UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

FINANČNA MATEMATIKA – 1. stopnja

Naključni sprehodi v lizikah

Poročilo

Avtorja: Brina Ribič, David Rozman
Ljubljana, 2022

Kazalo

1. Uvod

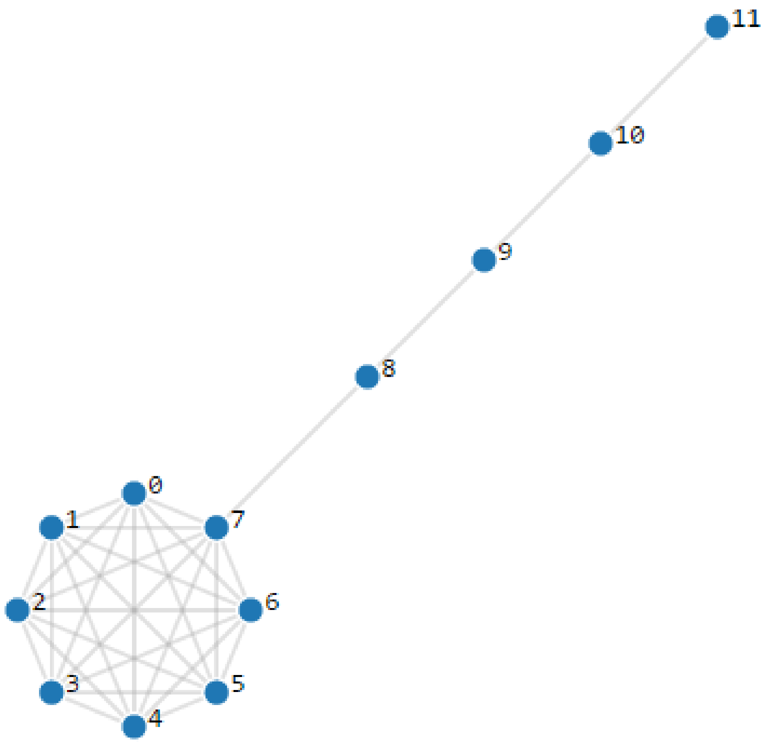
V tem poročilu bova predstavila rezultate projektne naloge 'Naključni sprehodi v lizikah'. Najprej bova predstavila problem ter kako sva se ga lotila, nato pa prikazala rezultate analize z grafi in tabelami.

2. Opis problema

Graf v obliki lizike je podan s parom (m, n), kjer m predstavlja število vozlišč polnega grafa, n pa število vozlišč na grafu poti. Da dobimo graf lizike, oba grafa povežemo z mostom. Po grafu opravimo naključni sprehod. V odvisnosti od parametrov m in n so naju zanimali sledeči pričakovani časi:

- Pričakovani čas, da obiščemo vsa vozlišča v grafu (Čas pokritja)
- Pričakovani čas, da pridemo od enega v drugo vozlišče (Čas dosega)
- Pričakovani čas, da se vrnemo v začetno vozlišče (Čas vrnitve)

Zanimalo naju je tudi, kaj se zgodi s pričakovanim časom, če graf malce spremeniva, na primer dodava na drugi konec poti še en poln graf itd.



Slika 1. Graf lizike (8,4)

3. Potek reševanja

Za reševanje problema sva uporabila programski jezik Python. Najprej sva napisala funkcije, ki zgenerirajo željeni graf. Kot argument sprejmejo število vozlišč, vrnejo pa slovar, kjer ključi predstavljajo vozlišča, vrednosti so pa seznami sosednjih vozlišč. Nato sva sestavila funkcije, ki po grafu opravijo naključni sprehod. Delujejo na sledeč način: Postavimo se v začetno vozlišče. Na vsakem koraku se premaknemo v naključno sosedno vozlišče, ki ga poberemo iz seznama sosedov. Postopek ponavljamo dokler določen pogoj ni izpolnjen (npr. trenutno vozlišče je enako začetnemu, če nas zanima čas vrnitve). Nazadnje sva definirala še funkcije, ki opravijo želeno število ponovitev naključnih sprehodov in vrnejo povprečni čas. Sledi zgled funkcije, ki zgenerira pot z n vozlišči.

Za vsak tip povprečnega časa, ki sva ga želela analizirati, sva naredila ustrezno veliko število ponovitev poskusov v za več parametrov m in n. Iz tabel in grafov sva nato poskusila ugotoviti časovno zahtevnost.

4. Navaden graf lizike

Najprej si bomo pogledali analizo navadnega grafa lizike, sestavljenega iz klike z m vozlišči, poti z n vozlišči in mosta.

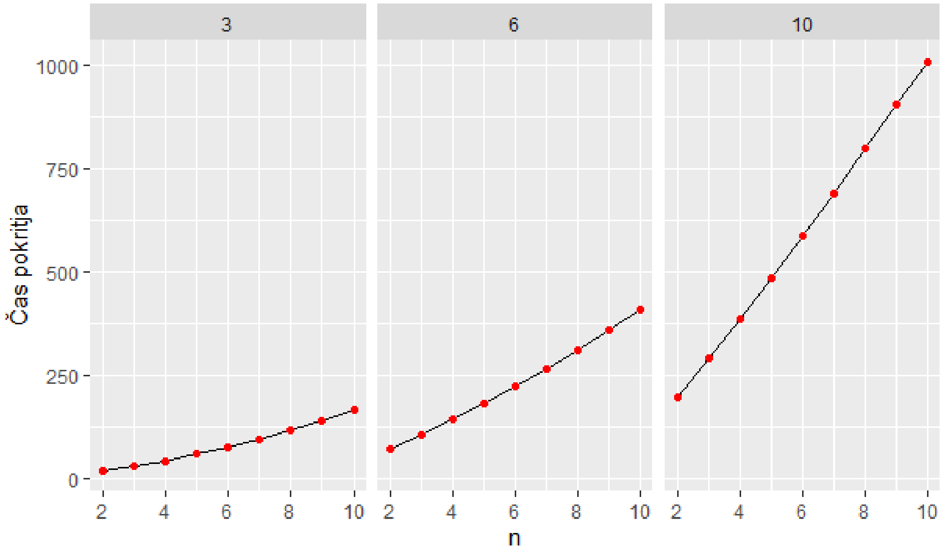
4.1. **Čas pokritja.** Da dobimo pravi čas pokritja, si moramo izbrati primerno začetno vozlišče. Z malo razmisleka hitro ugotovimo, da je za najdaljši čas sprehoda po celotnem grafu potrebno začeti v vozlišču na kliki, ki ni del mostu, kajti tako, da bo trajalo najdlje časa, da pridemo do konca poti, ki je najtežje dosegljivi del grafa.

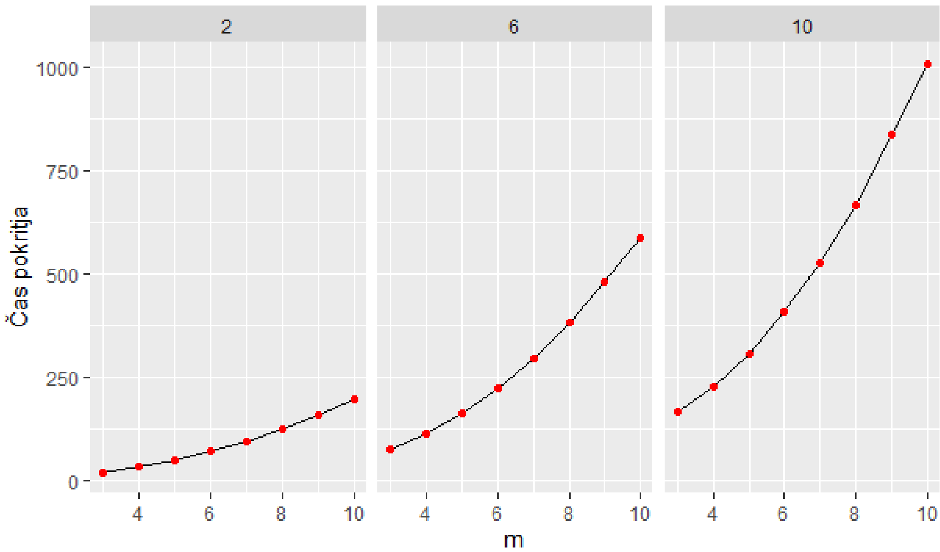
Sledeča tabela prikazuje pričakovani čas pokritja glede na parametre m in n. Za vsak primer sva izvedla 100.000 naključnih sprehodov in za pričakovani čas vzela njihovo povprečje.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	19	30	43	59	76	96	116	139	165
4	32	49	68	90	113	139	165	195	226
5	49	74	102	131	162	195	230	267	307
6	71	105	142	182	222	265	311	359	410
7	96	143	193	243	296	351	407	467	528
8	125	186	248	313	381	452	520	594	667
9	158	235	314	394	479	564	651	741	836
10	196	290	386	485	588	690	799	904	1009

Opazimo, da povečanje parametra m bolj vpliva na pričakovani čas kot povečanje parametra n. To je zato, ker ima vsako vozlišče v kliki veliko povezav in traja veliko časa, da bomo obiskali vsa, medtem ko imamo na poti vedno največ 2 izbiri za naslednje vozlišče.

Na naslednjih grafih vidimo kako povečanje določenega parametra vpliva na pričakovani čas. Prva trojica prikazuje spreminjanje časa pri fiksnem m in naraščajočim n, v drugi trojici pa sta vlogi zamenjani.





Vidimo, da se z n-jem pričakovani čas povečuje skoraj linearno, z m-jem pa rahlo kvadratično. Če si še ogledamo vrednosti v tabeli, hitro opazimo, da je pričakovani čas pri nekem m in n vedno blizu m^2n. Tako smo pokazali, da je pričakovani čas sprehoda po grafu lizike $\mathcal{O}(m^2n)$.

Tu bi poudarili še pomembnost začetne izbire vozlišča. Enak eksperiment sva izvedla še z začetkom v vozlišču na koncu poti. Naslednja tabela prikazuje, kako se pričakovani čas pokritja spremeni, če si izberemo napačno začetno vozlišče.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	16	25	36	48	64	80	98	119
4	12	18	27	37	49	64	80	99	119
5	14	21	29	39	51	65	82	100	120
6	17	23	31	41	54	68	84	102	122
7	20	26	34	44	56	70	86	104	124
8	23	29	37	47	59	73	89	107	127
9	27	33	41	50	62	76	92	110	130
10	30	36	44	54	65	79	95	113	132

Ker smo začeli v težko dosegljivem vozlišču smo hitro prehodili celotno pot, ostala pa je le še klika, ki smo jo hitro prehodili. Opazimo, da v tem primeru sprememba m zelo malo vpliva na čas pokritja.

4.2. **Čas dosega.** Sedaj si bomo pogledali pričakovane čase, da pridemo iz enega vozlišča v drugo.

4.2.1. *Vozlišča v kliki.* Kot prvo bi si pogledali potreben čas, da pridemo iz enega vozlišča v polnem grafu do drugega. Ločili bomo dva primera:

- Začetno vozlišče je del mostu
- Začetno in končno vozlišče nista del mostu

Če bi za končno vozlišče izbrali vozlišče pri mostu, bi dobili navaden čas dosega za poln graf. Če pa za končno vozlišče vzamemo neko drugo vozlišče v kliki, s tem dopuščamo, da se med sprehodom znajdemo tudi na poti, kar bo povečalo pričakovani čas.

Prva tabela prikazuje čas, če je začetno vozlišče del mostu

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	6	7	4	9	10	10	11	12
6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
7	7	7	8	9	9	10	10	11	12
8	8	8	9	9	10	10	11	11	12
9	9	9	10	10	11	11	12	12	12
10	10	10	11	11	11	12	12	13	13

Hitro opazimo zanimivost in sicer, da se je pri majhnih m s povečanjem tega parametra čas dosega celo zmanjšal. Razlog je v tem, da smo s povečanjem števila povezav v začetnem vozlišču zmanjšali verjetnost, da se bomo na začetku sprehoda premaknili na pot, torej stran od ciljnega vozlišča. Pri majhnih m torej dolžina poti precej bolj vpliva na čas kot pri velikih, kjer je verjetnost, da se bomo na njej znašli precej majhna.

Druga tabela prikazuje čas, če začetno vozlišče ni del mostu.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9
4	4	5	5	5	6	6	7	8	8
5	5	5	6	6	6	7	7	8	8
6	6	6	6	7	7	7	8	8	8
7	7	7	7	7	8	8	8	9	9
8	8	8	8	8	9	9	9	9	10
9	8	9	9	9	9	10	10	10	10
10	9	10	10	10	10	10	11	11	11

Vidimo, da je večja razlika v primerjavi s prejšnjo tabelo opazna le pri majhnih m. Ker je m majhen, je velika verjetnost, da do vozlišča ob mostu sploh ne bomo prišli, zaradi česar je tu čas dosega manjši. Zaradi podobnih razlogov kot prej, da se pri majhnih m vpliv povečanja dolžine poti pozna precej bolj, kot za večje m.

Da bi določili čas dosega v odvisnosti od m in n, moramo upoštevati le čase za velike vrednosti teh parametrov. S prvim parametrom čas očitno raste linearno, drugi pa prispeva zelo malo. Čas dosega je približno $\mathcal{O}(m + log(n))$.

4.2.2. *Od vrha do dna.* Tu bomo za začetno vozlišče vzeli vozlišče v kliki, ki ni del mostu, za končno pa konec poti, torej najbolj oddaljeno vozlišče. Rezultate simulacije prikazuje naslednja tabela.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	18	29	42	57	74	93	114	136	162
4	31	48	67	88	111	164	164	192	223
5	48	73	100	129	159	193	228	265	305
6	69	104	141	180	221	265	309	357	404
7	93	141	189	239	293	348	406	466	528
8	122	185	246	311	379	448	518	591	669
9	155	234	313	394	476	560	647	736	828
10	193	288	386	484	585	688	794	898	1007

Hitro opazimo, da so vrednosti zelo podobne tistim pri času pokritja. To ni presenetljivo, saj smo v obeh primerih začeli v istem vozlišču. Čas pa je bil odvisen predvsem od časa dosega konca poti. V tem primeru so vrednosti v povprečju malenkost manjše, saj se je sprehod tu vedno ustavil, ko smo dosegli konec poti, pri času pokritja pa se je to zgodilo le, če je bilo vozlišče na koncu poti zadnje doseženo, kar pa se ni zgodilo le v redkih primerih. Čas dosega v tem primeru je torej $\mathcal{O}(m^2n)$

4.2.3. *Od dna do vrha.* Tu bomo zamenjali vlogi vozlišč iz prejšnjega primera. Začeli bomo torej na koncu poti, končali pa v vozlišču na kliki, ki ni del mostu. Ker začnemo v najtežje dosegljivem vozlišču, pričakujemo, da bodo pričakovani časi tu precej krajši.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	15	23	34	46	60	76	94	115
4	9	15	23	33	45	59	75	93	113
5	10	15	23	33	45	59	74	92	112
6	10	16	24	33	45	59	74	92	112
7	11	17	24	34	45	59	75	92	111
8	12	18	25	35	46	60	76	92	112
9	13	18	26	35	47	60	76	93	112
10	14	19	27	36	47	61	76	93	113

Pričakovanja so se uresničila, časi so tu precej manjši. Ker pot zahteva veliko korakov, da jo prehodimo, je čas tu odvisen predvsem od njene dolžine. Parameter m tu nima velikega vpliva na čas, saj ko pridemo enkrat v kliko, bomo hitro dosegli tudi končno vozlišče. Ocenimo, da je čas dosega v tem primeru $\mathcal{O}(n^2 + m)$. Da bi pokazala, da je to dobra ocena, sva z njo v tabeli vrednosti delila vse izračunane vrednosti.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1,286	1,250	1,211	1,214	1,179	1,154	1,134	1,119	1,117
4	1,125	1,154	1,150	1,138	1,125	1,113	1,103	1,094	1,087
5	1,111	1,071	1,095	1,100	1,098	1,093	1,072	1,070	1,067
6	1,000	1,067	1,091	1,065	1,071	1,073	1,057	1,057	1,057
7	1,000	1,062	1,043	1,062	1,047	1,054	1,056	1,045	1,037
8	1,000	1,059	1,042	1,061	1,045	1,053	1,056	1,034	1,037
9	1,000	1,000	1,040	1,029	1,044	1,034	1,041	1,033	1,028
10	1,000	1,000	1,038	1,029	1,022	1,034	1,027	1,022	1,027

Vidimo, da se z večanjem parametrov količnik res bliža 1, torej hipoteza drži.

4.3. **Čas vrnitve.** Sedaj si bomo pogledali še pričakovani čas, da se pri naključnem sprehodu vrnemo v začetno vozlišče. Analizirala sva 3 primere začetnih vozlišč:

- Vozlišče v kliki, ki ni del mostu
- Vozlišče v kliki, ki je del mostu
- Vozlišče na koncu poti

4.3.1. *Vozlišče v kliki, ki ni del mostu.* Naslednja tabela prikazuje izračunane pričakovane čase.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	6	6	7	8	8	9	9	10	10
5	6	6	7	8	8	9	9	10	10
6	7	7	8	8	8	9	9	10	10
7	8	8	8	9	9	9	10	10	10
8	9	9	9	9	10	10	10	11	11
9	10	10	10	10	10	11	11	11	11
10	10	11	11	11	11	12	12	12	12

Vidimo, da so rezultati zelo podobni časom dosega, ko začetno vozlišče ni bilo del mostu. Ni presenetljivo, saj gre za zelo podoben tip sprehoda. Pričakovani čas je spet $\mathcal{O}(m + log(n))$.

4.3.2. *Vozlišče v kliki, ki je del mostu.* Sedaj opravimo enak eksperiment, le da obstaja možnost, da se že takoj znajdemo na poti.

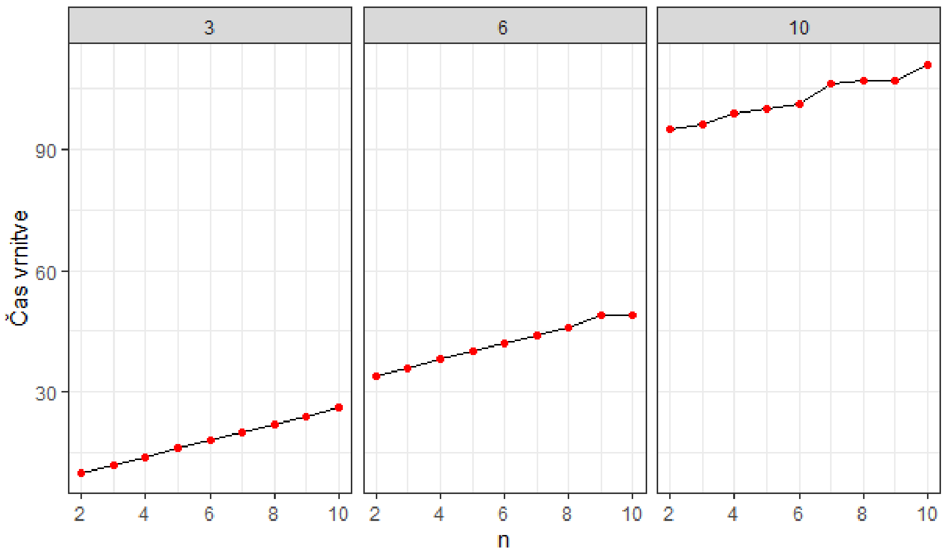
m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	3	5	5	6	7	7	8	9
4	4	5	5	6	6	6	7	7	8
5	5	5	6	6	6	7	7	8	8
6	6	6	6	7	7	7	8	8	8
7	7	7	7	7	8	8	8	9	9
8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
9	8	9	9	9	9	10	10	10	10
10	9	10	10	10	10	10	11	11	11

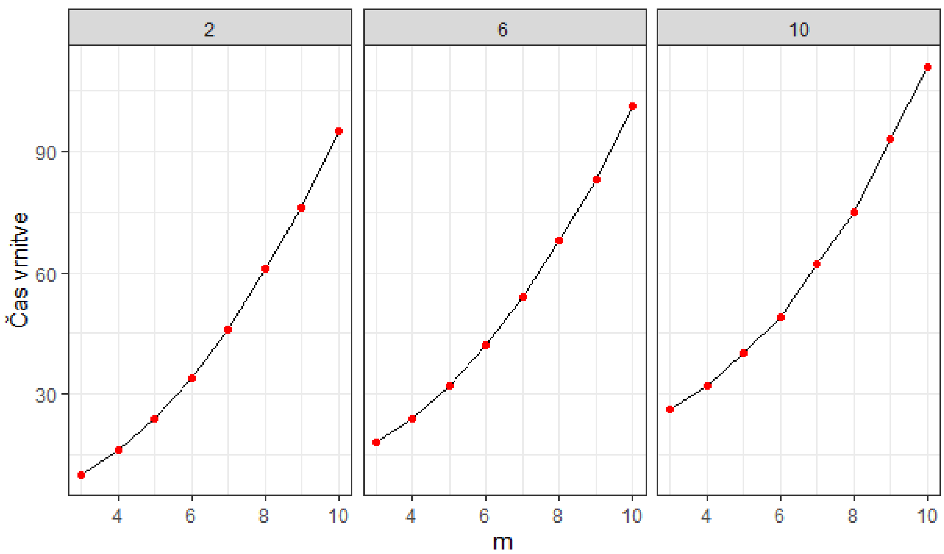
Rezultati so zelo podobni tistim iz prejšnjega primera, le za malenkost so manjši. Razlog je to, da je to vozlišče največje stopnje v grafu lizike, zato se lahko hitreje vrnemo vanj. Pričakovani čas je še vedno $\mathcal{O}(m + log(n))$.

4.3.3. *Vozlišče na koncu poti.* Poglejmo si še, kaj se zgodi, če začnemo na koncu poti.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	12	14	16	18	20	22	24	26
4	16	18	20	22	24	26	28	30	32
5	24	26	28	30	32	34	36	38	40
6	34	36	38	40	42	44	46	49	49
7	46	48	50	52	54	56	58	59	62
8	61	62	64	66	68	70	73	74	75
9	76	78	81	82	83	86	89	89	93
10	95	96	99	100	101	106	107	107	111

Konec poti je najtežje dosegljivi del grafa, zato se je, ko ga enkrat zapustimo, težko ponovno vrniti vanj. Obstaja sicer 50% verjetnosti, da bo število korakov enako 2, vendar v nasprotnem primeru se lahko hitro zgodi, da pristanemo v kliki, od koder pa je potrebno $\mathcal{O}(m^2n)$ korakov, da se vrnemo nazaj. Ker je na oko težko oceniti pričakovani čas, si pomagamo z grafi.





Z n-jem se čas veča linearno, z m-jem pa kvadratično. Pričakovani čas vrnitve je približno $\mathcal{O}(m^2 + n)$