UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

FINANČNA MATEMATIKA – 1. stopnja

Naključni sprehodi v lizikah

Poročilo

Avtorja: Brina Ribič, David Rozman

Ljubljana, 2022

Kazalo

1. Uvod

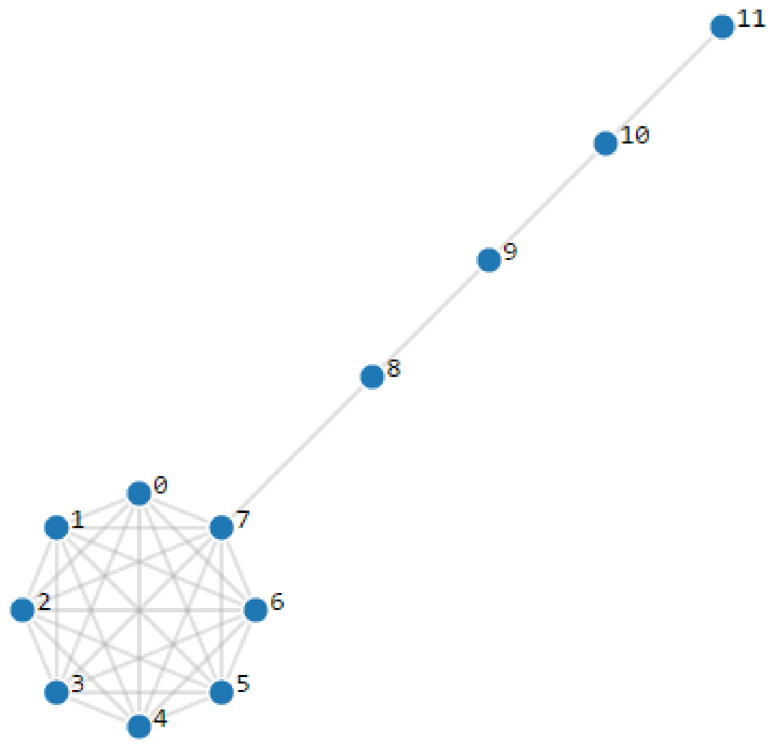
V tem poročilu bova predstavila rezultate projektne naloge 'Naključni sprehodi v lizikah'. Najprej bova predstavila problem ter kako sva se ga lotila, nato pa prikazala rezultate analize z grafi in tabelami.

2. Opis problema

Graf v obliki lizike je podan s parom (m, n), kjer m predstavlja število vozlišč polnega grafa, n pa število vozlišč na grafu poti. Da dobimo graf lizike, oba grafa povežemo z mostom. Po grafu opravimo naključni sprehod. V odvisnosti od parametrov m in n so naju zanimali sledeči pričakovani časi:

- Pričakovani čas, da obiščemo vsa vozlišča v grafu (Čas pokritja)
- Pričakovani čas, da pridemo od enega v drugo vozlišče (Čas dosega)
- Pričakovani čas, da se vrnemo v začetno vozlišče (Čas vrnitve)

Zanimalo naju je tudi, kaj se zgodi s pričakovanim časom, če graf malce spremeniva, na primer dodava na drugi konec poti še en poln graf itd.



Slika 1. Graf lizike (8,4)

3. Potek reševanja

Za reševanje problema sva uporabila programski jezik Python. Najprej sva napisala funkcije, ki zgenerirajo želeni graf. Kot argument sprejmejo število vozlišč, vrnejo pa slovar, kjer ključi predstavljajo vozlišča, vrednosti so pa seznami sosednjih vozlišč. Nato sva sestavila funkcije, ki po grafu opravijo naključni sprehod. Delujejo na sledeč način: Postavimo se v začetno vozlišče. Na vsakem koraku se premaknemo v naključno sosedno vozlišče, ki ga poberemo iz seznama sosedov. Postopek ponavljamo dokler določen pogoj ni izpolnjen (npr. trenutno vozlišče je enako začetnemu, če nas zanima čas vrnitve). Nazadnje sva definirala še funkcije, ki opravijo želeno število ponovitev naključnih sprehodov in vrnejo povprečni čas. Za vsak tip povprečnega časa, ki sva ga želela analizirati, sva naredila ustrezno veliko število ponovitev poskusov v za več parametrov m in n. Iz tabel in grafov sva nato poskusila ugotoviti časovno zahtevnost.

4. Navaden graf lizike

Najprej si bomo pogledali analizo navadnega grafa lizike, sestavljenega iz klike z m vozlišči, poti z n vozlišči in mosta.

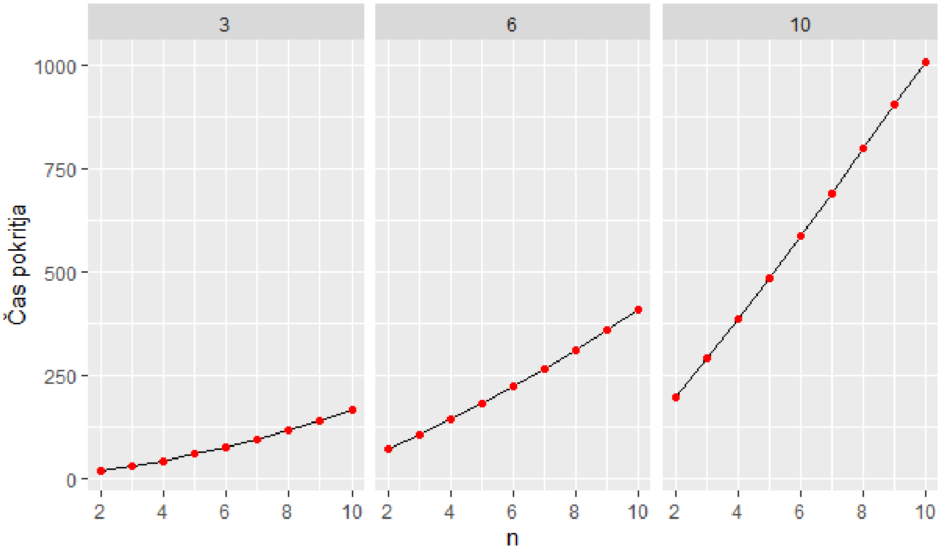
4.1. Čas pokritja. Da dobimo pravi čas pokritja, si moramo izbrati primerno začetno vozlišče. Z malo razmisleka hitro ugotovimo, da je za najdaljši čas sprehoda po celotnem grafu potrebno začeti v vozlišču na kliki, ki ni del mostu, kajti tako, da bo trajalo najdlje časa, da pridemo do konca poti, ki je najtežje dosegljivi del grafa.

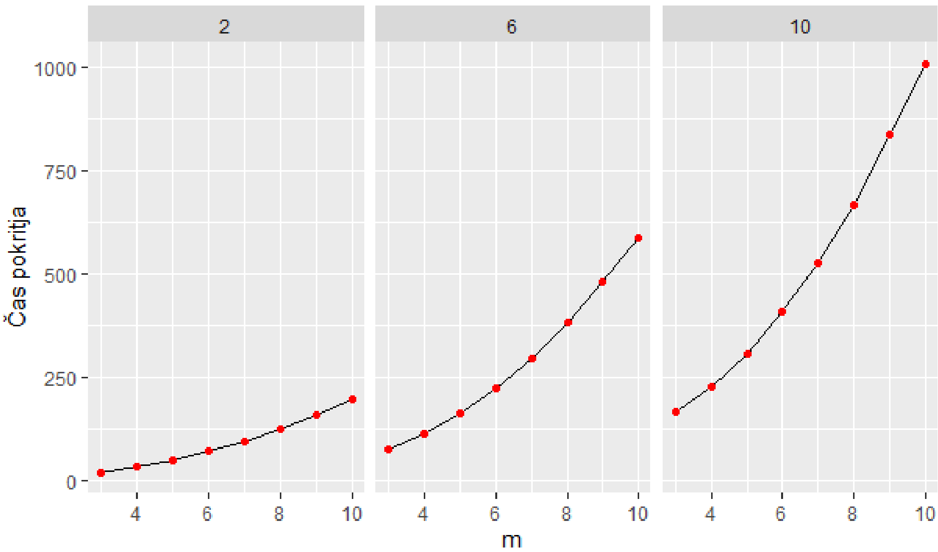
Sledeča tabela prikazuje pričakovani čas pokritja glede na parametre m in n. Za vsak primer sva izvedla 100.000 naključnih sprehodov in za pričakovani čas vzela njihovo povprečje.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	19	30	43	59	76	96	116	139	165
4	32	49	68	90	113	139	165	195	226
5	49	74	102	131	162	195	230	267	307
6	71	105	142	182	222	265	311	359	410
7	96	143	193	243	296	351	407	467	528
8	125	186	248	313	381	452	520	594	667
9	158	235	314	394	479	564	651	741	836
10	196	290	386	485	588	690	799	904	1009

Opazimo, da povečanje parametra m bolj vpliva na pričakovani čas kot povečanje parametra n. To je zato, ker ima vsako vozlišče v kliki veliko povezav in traja veliko časa, da bomo obiskali vsa, medtem ko imamo na poti vedno največ 2 izbiri za naslednje vozlišče.

Na naslednjih grafih vidimo kako povečanje določenega parametra vpliva na pričakovani čas. Prva trojica prikazuje spreminjanje časa pri fiksnem m in naraščajočim n, v drugi trojici pa sta vlogi zamenjani.





Vidimo, da se z n-jem pričakovani čas povečuje skoraj linearno, z m-jem pa rahlo kvadratično. Če si še ogledamo vrednosti v tabeli, hitro opazimo, da je pričakovani čas pri nekem m in n vedno blizu m^2n. Tako smo pokazali, da je pričakovani čas sprehoda po grafu lizike $\mathcal{O}(m^2n)$.

Tu bi poudarili še pomembnost začetne izbire vozlišča. Enak eksperiment sva izvedla še z začetkom v vozlišču na koncu poti. Naslednja tabela prikazuje, kako se pričakovani čas pokritja spremeni, če si izberemo napačno začetno vozlišče.

m-n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	16	25	36	48	64	80	98	119
4	12	18	27	37	49	64	80	99	119
5	14	21	29	39	51	65	82	100	120
6	17	23	31	41	54	68	84	102	122
7	20	26	34	44	56	70	86	104	124
8	23	29	37	47	59	73	89	107	127
9	27	33	41	50	62	76	92	110	130
10	30	36	44	54	65	79	95	113	132

Ker smo začeli v težko dosegljivem vozlišču smo hitro prehodili celotno pot, ostala pa je le še klika, ki smo jo hitro prehodili. Opazimo, da v tem primeru sprememba m zelo malo vpliva na čas pokritja.