Graph Teori

Johan Brinch

23. november 2009

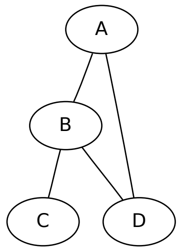
Indhold

1 Introduktion til grafer

Grafen er en datastruktur. Af andre datastrukturer findes blandt andet `lister`, `tupler` og `dictionaries`.

Lister og tupler lagrer elementer i en rækkefølge, f.eks. [1,0,2,1]. Dictionaries lagrer par af nøgler og værdier, så en værdi kan findes ved opslag på dens tilhørende nøgle, f.eks. {a: 1, b: 0, c: 2, d: 1}.

Grafer bruges til at beskrive forhold. Grafen indeholder elementer, kaldet knuder, og forhold mellem par af elementer, kaldet kanter. For eksempel kunne en graf lagre personer hvis forhold er givet ved hvorvidt to personer er venner eller ej. Hver knude ville symbolisere en person og hver kant et venskab.



Figur 1: Eksempel på graf

1.1 Knuder og kanter

En graf består af knuder og kanter. Alle kanter forbinder to knuder. En knude kan have nul eller flere kanter. Knuderne i grafen er „emnerne", som grafen beskriver. Kanterne er deres relationer til hinanden.

Eksempel 1.1.1 *Metronettet*

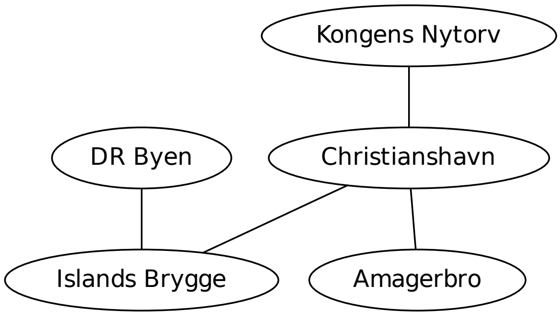
Et eksempel på en graf kunne være metronettet. Her kunne stationer repræsenteres som knuder og forbindelser imellem dem som kanter.

Figur 2 på den følgende side viser en graf over metronettet med 5 knuder og 4 kanter. Knuderne er stationer og kanterne forbindelser. Grafen bruges her til at vise hvilke stationer der er forbundet til hinanden.

Grafen kaldes retningsløs eller *undirected* fordi kanterne ikke angiver en retning. En forbindelse virker begge veje. Hvis man kan tage toget fra Nørreport til Kongens Nytorv er det også muligt at gå den anden vej. I en graf hvor kanterne angiver en retning (en *directed* graf) er det kun muligt at „følge" kanten i den angivne retning. Forbindelsen virker kun den ene vej. Dens er *ensrettet*.

1.2 Orienterede grafer

En orienteret (*directed*) graf er en graf hvori alle kanter har en tilknyttet retning. Kanten kan nu kun følges i den angivne retning. Det er dog muligt at tillade

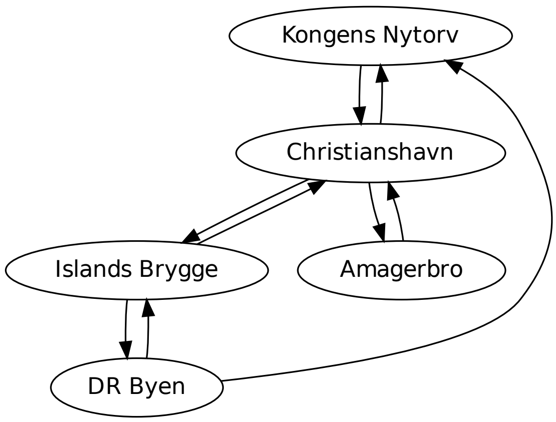


Figur 2: Graf over et udsnit af metronettet

„bevægelse“ mellem to knuder i begge retninger, ved at tilføje to kanter: en i hver retning.

Eksempel 1.2.1 *Metronettet udbygges med ensretning*

Sæt nu, at man vælger at bygge en ensrettet forbindelse mellem DR Byen og Kongens Nytorv. Det er nu muligt at tage toget fra DR Byen til Kongens Nytorv, men ikke den modsatte vej. Grafen over metronettet må dermed laves med en orienteret graf, hvor alle kanter angiver en gyldig retning. Ved de forbindelser, der tillader bevægelse i begge retninger bruger vi to kanter. Figur 3 viser grafen fra figur 2 udvidet med orientering og den nye kant.



Figur 3: Orienteret graf over metronet

1.3 Veje

En vej i en graf er et sæt af knuder, der er forbundne af kanter.

Eksempel 1.3.1 *Til DR Byen og tilbage igen*

Figur 2 på foregående side viser en uorienteret graf over metronettet. Betragt vejen:
DR Byen → Islands Brygge → Christianshavn → Kongens Nytorv

Det er den korteste vej (3 brugte kanter) mellem DR Byen og Kongens Nytorv. Men det er ikke den eneste vej mellem de to stationer. Man kunne havde taget forbi Amagerbro på vejen, blot for at vende om og fortsætte mod Kongens Nytorv. Denne vej ville have brugt 5 kanter i stedet for 3.

Hvis vi i stedet vender blikket mod den orienterede graf fra figur 3 på forrige side, ser vi at ovenstående ikke længere er den korteste vej fra DR Byen til Kongens Nytorv. Vi kan nu gøre brug af den nye direkte forbindelse og få vejen:
DR Byen → Kongens Nytorv

Vejen indeholder nu kun 1 kant (2 mindre). Desværre kan den direkte forbindelse kun bruges i en retning, så tilbagevejen bliver noget længere:
Kongens Nytorv → Christianshavn → Islands Brygge → DR Byen

Tilbagevejen bruger igen 3 kanter.

Eksempel 1.3.2 *Cykler*

En vej kaldes en cykel (*cycle*) hvis start- og slutknuden er den samme. Vi kan sammensætte de to veje fra eksempel 1.3.1 og få cyklen:

DR Byen → Kongens Nytorv → Christianshavn → Islands Brygge
→ DR Byen

En vej kaldes en cykel, hvis den starter og slutter med samme knude.

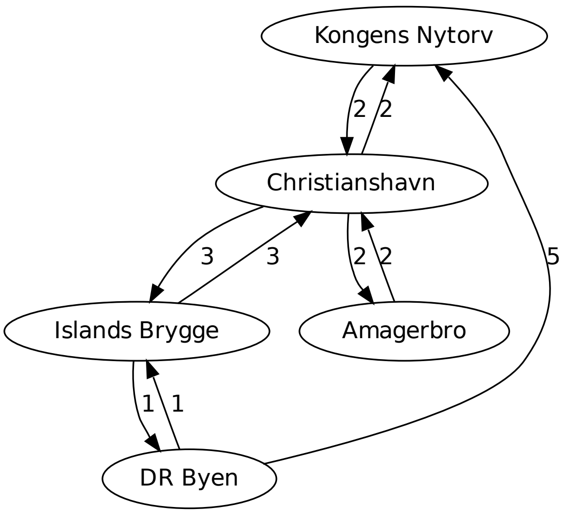
1.4 Vægtede kanter

Indtil nu har vi kun beskæftiget os med uvægtede grafer. I korteste vej eksemplet fra eksempel 1.3.1 var længden af vejen antallet af kanter der indgik i vejen. Man tænke på det, som at hver kant kostede 1 at bruge.

I en vægtet graf tildeles hver kant en vægt (*weight*), der angiver hvor meget kanten koster. Man kan tænke på det som en afstand mellem de to knuder kanten forbinder. Vægten angiver dermed kantens længde.

Lad vende tilbage til metronettet. Figur 4 på næste side viser figur 3 på forrige side med angivede vægte. Hver vægt viser antallet af minutter det tager at bevæge sig over den tilhørende kant.

Ifølge grafen tager den direkte vej fra DR Byen til Kogens Nytorv 5 minutter, mens den „gamle“ vej, over Christianshavn, tager 6 minutter. Cyklen fra DR Byen til Kongens Nytorv og tilbage igen ville altså tage 11 minutter at gennemføre.



Figur 4: Vægtet graf over metronet

1.5 Søgning i grafer

Ligesom der kan søges i lister er det også muligt at søge i grafer. I kan en søgning efter et element a gøres ved at gennemløbe listen og sammenligne alle elementer med a. Gennemløbet starter ved første element og fortsætter herefter med næste element indtil listen løber tør for elementer.

I Python kan liste-gennemløb udføres med en `for`-løkke. Da listens elementer er nummereret som første, andet, tredje … n'e element er rækkefølgen af elementerne oplagt.

I grafen er der ikke på samme måde en oplagt rækkefølge at udvælge knuderne på. Der er ikke nogen i'e knude.

I de følgende afsnit skal vi se på to forskellige tilgange til søgning i grafer, der hver definerer en rækkefølge, hvori knuderne kan gennemløbes. Når først en sådan rækkefølge er klar kan søgning efter knuden a udføres ved sammenligning med hver knude (som ved lister).

I afsnit 1.6 på side 9 skal vi se hvordan gennemløb af grafer kan bruges til at finde den korteste vej mellem to hustande i et vejnet.

1.5.1 Dybde-først søgning

I en dybde-først søgning (*depth-first search*) defineres rækkefølgen af knuder ved at vælge de „dybe" niveauer først (de knuder, der ligger langt fra start-knuden).

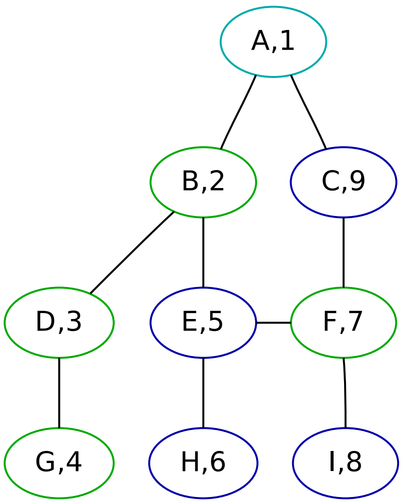
I dybde-først søgning vælges en vilkårlig knude som start-knude, der besøges først. Herefter vælges en vilkårlig kant (retning), der følges så langt som muligt (rekursion). Når den valgte kant er fuldt udforsket fortsætter søgningen med næste kant.

Der tages løbende højde for, at hver knude kun besøges én gang.

Dybde-først søgning kan også forstås på følgende måde:

1. Du står ved et vejkryds i en by og skal finde et specifik kryds. Du har ikke noget kort.
2. På skift prøver du hver vej væk fra krydset og afsøger alle veje du støder på i den retning. Du noterer de veje du møder, så du kan undgå at prøve dem igen senere.
3. Hvis det søgte kryds ikke var nede af den valgte retning afprøves næste vej.

Figur 5 illustrerer dybde-først søgning med et eksempel. Knuderne er nummereret efter den rækkefølge de bliver besøg i. Søgningen har valgt knuden A som start-knude og vælger dernæst knuden B som det første barn, der skal besøges herefter. Bemærk, at knuden 9 først bliver besøgt, når den opdages fra 7.



Figur 5: Dybde-først søgning i en graf

1.5.2 Bredde-først søgning

Ved bredde-først søgning (*breadth-first search*) betragtes første knude fra alle udgående kanter før deres kanter følges. Dermed adskiller bredde-først søgning sig fra dybde-først søgning ved at søge i niveauer af knuder (hvor dybde-først blot løb ned ad første knude).

Bredde-først søgning kan også beskrives på følgende måde:

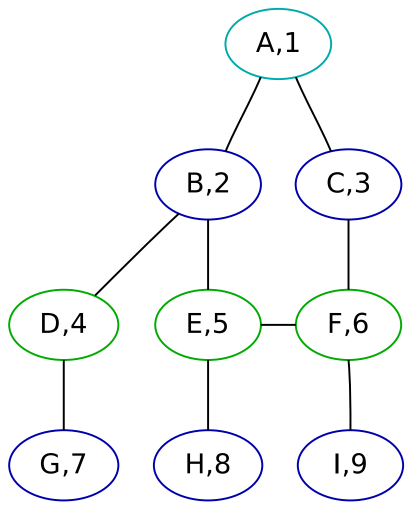
1. Du står ved et vejkryds i en by og skal finde et specifikt vejkryds. Du har ikke noget kort.

2. På skift prøver du hver vej væk fra rundkørslen og ser om det efterfølgende vejkryds er det du søger. Du følger ikke de nye veje endnu.

3. Når du har noteret, at ingen af de umildbart næste vejkryds er det du søger, følger du deres respektive veje en ad gangen. Du noterer de kryds du møder, så du kan undgå at prøve dem igen senere.

4. Hvis krydset ikke var nede af den valgte retning afprøves næste vej.

Figur 6 viser et eksempel på bredde-først søgning. Grafen er den samme, som den i figur 5 på forrige side, men knuderne er nu nummeret efter hvornår de opdages under en bredde-først søgning.



Figur 6: Bredde-først søgning i en graf

1.6 Korteste vej

1.6.1 Dijkstra's algoritme

1.6.2 Køretid

1.6.3 Korteste vej mellem to hustande

2 Eksempler på grafer (Hvad kan det bruges til?!)

2.1 Vennenetværk (ikke-orienteret graf)

2.2 Telefonnumre (orienteret graf)

2.3 Repræsentation af en sudoku som en graf

3 Implementation af en graf i Python

Nu hvor det ligger fast hvad en graf er og hvad den kan bruges det ville det være rart med en implementation, som vi kan bruge i Python-programmer.

I denne sektion vil vi igennem analyse (hvad skal det kunne?) designovervejelser (hvordan skal den kunne det?) og implementation (hvordan koder man det?) få opbygget et Python grafmodul.

3.1 Analyse

I dette afsnit diskuteres funktionaliteten af en graf. Hvad skal den kunne?

Kogt helt ned, skal et grafmodul besidde funktionalitet:

1. Oprettelse af en tom graf
2. Indsættelse af knuder i en graf
3. Sletning af knuder i en graf
4. Tilføjelse af kant mellem to knuder i en graf
5. Sletning af kant mellem to knuder i en graf

Med disse funktioner kan vi opbygge og nedrive grafer. Men før de er anvendelige er det nødvendigt også at kunne undersøge grafer. Følgende funktionalitet omhandler netop dette:

1. Findes knude k i grafen?
2. Er knude k_1 og knude k_2 forbundet af en kant?
3. Hvor mange knuder indeholder grafen?
4. Hvor mange kanter indeholder grafen?

3.2 Designovervejelser

I analysen afsnit 3.1 på foregående side gennemgik jeg funktionaliteten af en graf. Nu vil jeg diskutere hvordan denne funktionalitet kan implementeres i Python.

Eftersom mine funktionaliteter beskæftiger sig med en specifik instans af en graf, vælger jeg at lave en klasse `Graf`, der repræsentere en graf med de beskrevne muligheder. Hver funktionalitet implementeres som en metode, der arbejder på grafen.

Inden jeg kan gå i gang med at beskrive, hvordan en graf kan ændres, skal jeg først vælge en repræsentation af en graf. Hvordan kan skal grafobjektet holde styr på knuder og kanter?

Der er følgende traditionelle måder at gøre dette på:

1. Hver knude indeholder en liste af andre knuder, som den er forbundet til.
2. Hver kant består af et par knuder, som denne forbinder.
3. En matrix af (knuder $\times$ knuder) angiver om et given par er forbundet[1].

Den første løsning kan implementeres med en `Knude`-klasse, som beskriver en knude. Det eneste knuden skal indeholde er sin egen værdi, samt en liste over andre knuder, som den er forbundet til. At undersøge om to knuder er forbundet kan gøres ved at løbe deres lister igennem og se om de har hinanden som element. Køretiden for operationen afhænger af hvor mange elementer de to knuder er forbundet til.

Den anden løsning kan implementeres med en `Kant`-klasse der indeholder et par af knuder (de to kunder, som kanten forbinder). `Graf`-klassen skal nu indeholde en liste af knuder sammen med en liste af kanter. At undersøge om to knuder er forbundet af en kant kan gøres ved at løbe listen af kanter igennem og for hver kant undersøge om de to knuder passer med parret. Køretiden er afhænger nu af det samlede antal kanter i grafen.

Den tredje løsning kan også implementeres med lister, selvom den er tænkt til matricer. Her behøves hverken en `Kant`- eller `Knude`-klasse. `Graf`-klassen indeholder en liste af knuder, der hver har en liste af knuder. Hvis der findes en kant fra knude nummer 1 til knude nummer 2 vil det andet element i den første liste være `sand` (f.eks.: `kanter[1][2] == True`). Hvis kanten ikke findes vil værdien være `falsk` (altså: `kanter[1][2] == False`). Køretiden afhænger (grundet valget af lister) af antaller af knuder og bliver dermed $O(k)$. [2]

Jeg vælger at implementere model nummer et på grund af dens simplicitet. I det følgende beskriver jeg hvordan jeg implementere hver enkelte funktionalitet.

3.2.1 Implementation af metoder

Opret tom graf Den tomme graf er et `Graph`-objekt uden nogen tilhørende knuder. Listen af knuder er sat til den tomme liste. En tom graf kan oprettes ved at instansiere klassen `Graph`. Dennes `__init__` metode sætter listen af knuder til den tomme liste:

[1] tænk på matricen som en liste af lister, der hver har et element for hver knude.

[2] med matricer kan køretiden reduceres til $O(1)$.

```
class Graph:
  ...
  def __init__(self):
    self.nodes = []
```

Indsættelse af knude En knude kan indsættes med `Graph`-metoden `add_node(node)`. Metoden virker ved at tilføje den nye knude til grafens liste over knuder:

```
class Graph:
  ...
  def add_node(self, node):
    self.nodes.append(node)
```

Sletning af knude En knude kan fjernes fra en graf med `Graph`-metoden `del_node`. Metoden virker ved at fjerne knuden fra grafens list af knuder:

```
class Graph:
  ...
  def del_node(self, node):
    self.nodes.remove(node)
```

Tilføjelse af kant En kant fra knude a til knude b kan tilføjes, ved at tilføje knude b til listen over kanter i knude a.

```
class Graph:
  ...
  def add_edge(self, node_a, node_b):
    node_a.add_edge(node_b)
```

I `Node`-klassen tilføjer `add_edge` metoden knuden til dens liste over kanter:

```
class Node:
  ...
  def add_edge(self, node):
    self.edges.append(node)
```

Sletning af kant En kan fra knude a til knude b kan slettes, ved at fjerne knude b fra listen over kanter i knude a.

```
class Graph:
  ...
  def del_edge(self, node_a, node_b):
    node_a.del_edge(node_b)
```

I `Node`-klassen fjernes knuden fra listen over kanter:

```
class Node:
  ...
  def del_edge(node):
    self.edges.remove(node)
```

Findes knude k i grafen? Hvis knude k ligger i grafen, ligger den i listen over knuder:

```
class Graph:
  ...
  def has_node(self, node):
    return (node in self.nodes)
```

Findes en kant fra knude k_1 til knude k_2? Hvis en kan findes fra knude k_1 til knude k_2 må knude k_2 ligge i listen over k_1's kanter:

```
class Graph:
  ...
  def has_edge(node_a, node_b):
    return node_a.has_edge(node_b)
```

I `Node`-klassen testes om `node_b` ligger i listen over kanter:

```
class Node:
  ...
  def has_edge(self, node):
    return (node in self.edges)
```

Hvor mange knuder indeholder grafen? Antallet af knuder i grafen er det samme som længden af listen over knuder:

```
class Graph:
  ...
  def count_nodes(self):
    return len(self.nodes)
```

Hvor mange kanter indeholder grafen? Antallet af kanter i grafen er lig med antallet af fra de enkelte knuder:

```
class Graph:
  ...
  def count_edges(self):
    count = 0
    for node in self.nodes:
      count += node.count_edges()
    return count
```

I `Node`-klassen tælles antallet af kanter ved at tælle antallet af elementer i listen over kanter:

```
class Node:
  ...
  def count_edges(self):
    return len(self.edges)
```

3.2.2 Fejlhåndtering

Flere af ovenstående punkter kan give en fejl. Man kan forsøge at fjerne en knude der ikke findes, eller tilføje en kant der findes i forvejen. I dette afsnit vil jeg belyse de metoder der kan fejle, og udvide dem med fejlhåndtering.

Definition af fejl: Til at starte med definerer jeg fire fejltyper (`exceptions`), som grafen kan *kaste* i tilfælde af fejl:

```
class NodeAlreadyExistsError(Exception):
    """ Knuden findes allerede """
    pass

class NoSuchNodeError(Exception):
    """ Knuden findes ikke """
    pass

class EdgeAlreadyExistsException(Exception):
    """ Kanten findes allerede """
    pass

class NoSuchEdgeError(Exception):
    """ Kanten findes ikke """
    pass
```

Implementation af fejlhåndtering: Jeg ændrer de problematiske metoder, så de nu kaster en af ovenstående fejl, når en ulovlig handling forsøges.

Argumentet til `add_node` skal være en knude, som ikke ligger i grafen:

```
def add_node(node):
  # Fejlhåndtering
  if node in self.nodes:
    raise NodeAlreadyExistsError(node)
  # Tilføj knuden
  self.nodes.append(node)
```

Argumentet til `del_node` skal være en knude, som findes i grafen:

```
def def_node(node):
  # Fejlhåndtering
  if not node in self.nodes:
    raise NoSuchNodeError(node)
  # Slet knude
  self.nodes.remove(node)
```

Smartere fejlhåndtering: Jeg ser, at fejlhåndteringen tager følgende form:

1. Undersøg om en knude eller kant findes eller ej

2. Kast fejl hvis det ikke passer med forventningen

Ved at definere en generel metode for dette, kan jeg reducere antallet af linjer brugt på fejlhåndtering betydeligt. Jeg definerer en funktion for knude og en for kanter. Jeg vælger at kalde dem `ensure_nodes` og `ensure_edges`:

```
class Graph:
  ...

  def ensure_nodes(self, nodes, must_exist):
      """ Kast en fejl hvis en af knuderne findes/ikke findes """
      for node in nodes:
          exists = self.has_node(node)
          if must_exist and not exists:
              raise NoSuchNodeError(node)
          if not must_exist and exists:
              raise NodeAlreadyExistsError(node)

  def ensure_edges(self, edges, must_exist):
      """ Kast en fejl hvis en af kanterne findes/ikke findes """
      for node_a, node_b in edges:
          exists = self.has_edge(node_a, node_b)
          if must_exist and not exists:
              raise NoSuchEdgeError((node_a, node_b))
          if not must_exist and exists:
              raise EdgeAlreadyExistsError((node_a, node_b))
```

Jeg kan nu skrive fejlhåndteringen for `add_node` og `del_node` således:

```
def add_node(node):
  # Fejlhåndtering
  self.ensure_nodes( [node], True )
  # Tilføj knuden
  self.nodes.append(node)

def def_node(node):
  # Fejlhåndtering
  self.ensure_nodes( [node], False )
  # Slet knude
  self.nodes.remove(node)
```

Bemærk, at der kun bruges en enkelt linje til fejlhåndtering i den nye kode. Jeg fortsætter med at tilføje fejlhåndtering til de andre kritiske metoder:

Argumenterne til `add_edge` skal være to knuder, der findes i grafen (der må gerne findes en kant i forvejen):

```
class Graph:
  ...
  def add_edge(self, node_a, node_b):
    # Fejlhåndtering
    self.ensure_nodes(  [node_a, node_b]  , True  )
    # Tilføj kant
    node_a.add_edge(node_b)
```

Argumenterne til `del_edge` skal være to knuder, der deler en kant:

```
class Graph:
  ...
```

```
  def del_edge(self, node_a, node_b):
    # Fejlhåndtering
    self.ensure_edges( [(node_a, node_b)], True )
    # Slet kant
    node_a.del_edge(node_b)
```

3.3 Endelig Implementation

```
# coding: utf-8

class NodeAlreadyExistsError(Exception):
    """ Knuden findes allerede """
    pass

class NoSuchNodeError(Exception):
    """ Knuden findes ikke """
    pass

class EdgeAlreadyExistsException(Exception):
    """ Kanten findes allerede """
    pass

class NoSuchEdgeError(Exception):
    """ Kanten findes ikke """
    pass


class Graph:
  def __init__(self):
      """ Tom graf, ingen knuder """
      self.nodes = []

  def add_node(self, node):
      """ Tilføj en knude """
      # Fejlhåndtering
      self.ensure_nodes( [node], False )
      # Tilføj knuden
      self.nodes.append(node)

  def del_node(self, node):
      """ Slet en knude """
      # Fejlhåndtering
      self.ensure_nodes( [node], True )
      # Slet knuden
      self.nodes.remove(node)

  def get_nodes(self):
      """ Hent en kopi af grafens knuder """
      return list(self.nodes)
```

```
def get_edges(self):
    """ Hent en kopi af kant-par """
    edges = []
    for node_a in self.get_nodes():
        for node_b in node.get_edges():
            # tilføj kant fra a til b
            edges.append( (node_a, node_b) )
    return edges


def add_edge(self, node_a, node_b):
    """ Tilføjer en kant fra a til b """
    # Fejlhåndtering
    self.ensure_nodes(  [node_a, node_b] , True  )
    self.ensure_edges( [(node_a, node_b)], False )
    # Tilføj kant
    node_a.add_edge(node_b)

def del_edge(self, node_a, node_b):
    """ Sletter kanten fra a til b """
    # Fejlhåndtering
    self.ensure_edges( [(node_a, node_b)], True )
    # Slet kant
    node_a.del_edge(node_b)

def has_node(self, node):
    """ Undersøger om node ligger i grafen """
    return (node in self.nodes)

def has_edge(self, node_a, node_b):
    """ Undersøger om en kant fra a til b findes """
    return node_a.has_edge(node_b)

def count_nodes(self):
    """ Tæller antallet af knuder """
    return len(self.nodes)

def count_edges(self):
    """ Tæller antallet af kanter """
    count = 0
    for node_a in self.nodes:
        # Læg a’s kanter til
        count += node_a.count_edges()
    return count


def ensure_nodes(self, nodes, must_exist):
    """ Kast en fejl hvis en af knuderne findes/ikke findes """
    for node in nodes:
        # Findes knuden?
```

```
          exists = self.has_node(node)
          # Overholder den begrænsningen?
          if must_exist and not exists:
              raise NoSuchNodeError(node)
          if not must_exist and exists:
              raise NodeAlreadyExistsError(node)

  def ensure_edges(self, edges, must_exist):
      """ Kast en fejl hvis en af kanterne findes/ikke findes """
      for node_a, node_b in edges:
          # Findes knuden?
          exists = self.has_edge(node_a, node_b)
          # Overholder den begrænsningen?
          if must_exist and not exists:
              raise NoSuchEdgeError((node_a, node_b))
          if not must_exist and exists:
              raise EdgeAlreadyExistsError((node_a, node_b))



class DirectedGraph(Graph):
    """ Implementation af en orienteret graf """
    pass


class UndirectedGraph(Graph):
    """ Implementation af en ikke-orienteret graf """

    def add_edge(self, node0, node1):
        """ Tilføjer en kant til grafen """
        Graph.add_edge(self, node0, node1)
        Graph.add_edge(self, node1, node0)

    def del_edge(self, node0, node1):
        """ Fjerner en kant fra grafen """
        Graph.del_edge(self, node0, node1)
        Graph.del_edge(self, node1, node0)

    def count_edges(self):
        """ Tæller antallet af kanter i grafen """
        # Divider med to, da alle kanter ligger dobbelt
        # (en for hver retning)
        return Graph.count_edges(self) / 2


class Node:
    def __init__(self):
        """ Ny knude, ingen kanter """
        self.edges = []
```

```
def add_edge(self, node):
    """ Tilføj kant """
    self.edges.append(node)

def del_edge(self, node):
    """ Fjern kant """
    self.edges.remove(node)

def has_edge(self, node):
    """ Test om en kant findes """
    return (node in self.edges)

def count_edges(self):
    """ Tæl antallet af kanter """
    return len(self.edges)
```

3.4 Test og afprøvning