Határozatlan integrál

A parciális törtekre bontás módszere

Elméleti áttekintés

A parciális törtekre bontás

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f valós függvény **racionális törtfüggvény**, ha léteznek olyan P és Q valós polinomok, hogy*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$$

teljesül.

1. Tétel. *Legyen f egy racionális törtfüggvény. Ekkor az f függvénynek létezik F primitív függvénye, továbbá ez az F függvény elemi függvény.*

A továbbiakban a Q polinom gyökeitől függően három különböző esetet kell megkülönböztetnünk.
I. eset Ha a Q polinomnak csak **egyszeres** multiplicitású, **valós** gyökei vannak, azaz

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva. Ezeket a konkrét feladatokban az együtthatók egyeztetésével lehet meghatározni.
II. eset Ha a Q polinomnak csak **valós** gyökei vannak, de a gyökök között vannak **többszörös multiplicitás**úak is, azaz, a Q polinom

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

alakú, ahol $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}} \\ &= \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} \\ &+ \cdots + \frac{A_{k1}}{(x - x_k)} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Az előállításban szereplő $A_{i\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$ valós számokat ebben az esetben is az együtthatók egyeztetésével tudjuk meghatározni.
III. eset Ha a Q polinomnak van **komplex gyök**e is. Ekkor, ha például $z \in \mathbb{C}$ gyöke a Q polinomnak, akkor $\overline{z}$ is gyöke Q-nak, vagyis a komplex gyökök a konjugáltjaikkal együtt lépnek fel. Ezen az eseten belül még további két esetet kell megkülönböztetnünk.
III. a) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **egyszeres komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_s x + c_s),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k x + C_k}{x^2 + b_k x + c_k}.$$

III. b) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **többszörös komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{\beta_s},$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k} + \cdots + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl}x + C_{sl}}{(x^2+b_sx+c_s)^l}$$

Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

Az $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$ alakú integrálok

A sinus és cosinus függvények tetszőleges $R(\sin(x), \cos(x))$ racionális kifejezése esetén a

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x) \qquad g(t) = 2\mathrm{arctg}(t)$$

helyettesítés mindig célravezető. Ezen helyettesítés elvégzése után ugyanis,

$$g'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{és} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

amiből azt látjuk, hogy ezzel a helyettesítéssel az integrandus egy racionális törtfüggvénybe megy át.

Az $\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

Abban az esetben, ha az integrandus az exponenciális függvény egy racionális törtfüggvénye, a

$$t = e^x = g^{-1}(x) \qquad x = \ln(t) = g(t) \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

helyettesítéssel az integrandus t-nek racionális törtfüggvényébe megy át.

Az $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ alakú integrálok

Ha az integrandus x-nek és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális törtfüggvénye, akkor az

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \qquad x = \frac{t^n - b}{a} = g(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{n}{a}t^{n-1}$$

helyettesítéssel az integrandus racionális törtfüggvénnyé alakítható.

Feladatok

1. Feladat. *Legyenek A, α, β olyan valós számok, hogy $A, \alpha \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ pedig legyen tetszőleges. Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i)
$$\int \frac{A}{(\alpha x + \beta)^n} dx$$

(ii)
$$\int \frac{Ax}{(\alpha x + \beta)^n} dx$$

(iii)
$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx$$

(iv)
$$\int \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} dx$$

2. Feladat. *A parciális törtekre bontás tételének felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i) $$\int \frac{4}{3x-5}dx,$$

(ii) $$\int \frac{5}{2-3x}dx,$$

(iii) $$\int \frac{5}{(2x-4)^6}dx,$$

(iv) $$\int \frac{14}{(6-4x)^7}dx,$$

(v) $$\int \frac{x}{(2x+3)^4}dx,$$

(vi) $$\int \frac{5x}{(3x-4)^6}dx$$

(vii) $$\int \frac{2}{x+3}dx,$$

(viii) $$\int \frac{5}{(x+1)^2}dx,$$

(ix) $$\int \frac{x^2}{x+1}dx,$$

(x) $$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx,$$

(xi) $$\int \frac{x+2}{x^2-1}dx,$$

(xii) $$\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}dx,$$

3. Feladat. *A parciális törtekre bontás tételének felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i) $$\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx,$$

(ii) $$\int \frac{1}{x^3+1}dx,$$

(iii) $$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx,$$

(iv) $$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx,$$

(v) $$\int \frac{1}{x^2-x+2}dx,$$

(vi) $$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx,$$

(vii) $$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx,$$

(viii) $$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}dx,$$

(ix) $$\int \frac{5}{x(x^2+4)}dx,$$

(x) $$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx,$$

(xi) $$\int \frac{2x^2}{x^4-1}dx$$

(xii) $$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$$

(xiii) $$\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

(xiv) $$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$$

(xv) $$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$$

4. Feladat. *A* $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x)$ *helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(i) $$\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$

(ii) $$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$$

(iii) $$\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx$$

(iv) $$\int \frac{4}{5+6\cos(x)}dx$$

(v) $$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}dx$$

(vi) $$\int \frac{2}{1+2\mathrm{tg}(x)}dx$$

(vii)

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$$

(viii)

$$\int \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}dx$$

(ix)

$$\int \frac{1+\mathrm{tg}(x)}{1-\mathrm{tg}(x)}dx$$

(x)

$$\int \frac{1}{(2-\sin(x))(3-\sin(x))}dx$$

(xi)

$$\int \frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^3}dx$$

(xii)

$$\int \frac{\cos(2x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx$$

5. Feladat. *A $t = e^x = g^{-1}(x)$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}dx$$

(ii)

$$\int \frac{5}{e^{2x}+1}dx$$

(iii)

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$$

(iv)

$$\int \frac{e^x}{e^{-x}+2}dx$$

(v)

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^2}dx$$

(vi)

$$\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}dx$$

(vii)

$$\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x(e^{2x}+7e^x+6)}dx$$

(viii)

$$\int \frac{3\,e^{2\,x}-7\,e^x}{e^{2\,x}-5\,e^x+6}dx$$

(ix)

$$\int \frac{2\,e^{2\,x}+5\,e^x}{e^{2\,x}-e^x-2}dx$$

6. Feladat. *A $t = \sqrt[n]{ax+b} = g^{-1}(x)$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int x\sqrt{5x+3}dx$$

(ii)

$$\int (3x+6)\sqrt{2x-4}dx$$

(iii)

$$\int (x^2-2x+3)\sqrt{2x-1}dx$$

(iv)

$$\int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3}dx$$

(v)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}dx$$

(vi)

$$\int x\sqrt[4]{5x+3}dx$$

(vii)

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}dx$$

(viii)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$$

(ix)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-2}}dx$$

7. Feladat. *Írjunk fel rekurziós formulát az alábbi megadott I_n függvényekre. Számítsuk ki minden esetben I_2-t, I_3-at, I_{10}-et és I_{100}-at is.*

(i)

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}dx$$

(ii)

$$I_n(x) = \int \sin^n(x)dx$$

(iii)

$$I_n(x) = \int \frac{1}{\cos^n(x)}dx$$

(iv)

$$I_n(x) = \int x^n e^{-x}dx.$$