Határozatlan integrál

Alapintegrálok és a parciális integrálás tétele

Elméleti áttekintés

1. Definíció. *Legyen* $]a,b[\subset\mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum,* $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvény. Az* $F:]a,b[\to\mathbb{R}$ *differenciálható függvényt az* f *függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha*

$$F'(x)=f(x)$$

teljesül minden $x\in]a,b[$ *esetén. Az* F *függvényre a továbbiakban az* $\int f$ *vagy az* $\int f(x)dx$ *jelölést használjuk.*

1. Tétel. *Ha* $f,F:]a,b[\to\mathbb{R}$ *és* $F'=f$*, akkor* $G:]a,b[\to\mathbb{R}$ ***pontosan akkor*** *primitív függvénye* f*-nek, ha létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$*, hogy*

$$F(x)=G(x)+C \qquad (x\in]a,b[)$$

2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek* $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ *olyan függvények, melyekre létezik* $\int f$ *és* $\int g$*, legyenek továbbá* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *tetszőleges konstansok. Ekkor létezik* $\int\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ *is, és létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$*, hogy*

$$\int\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx+C.$$

3. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az* $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ *függvények differenciálhatóak* $]a,b[$*-n, és létezik* $\int f'\cdot g$*, akkor létezik* $\int f\cdot g'$ *is, és létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$ *konstans, hogy*

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx+C. \quad (x\in]a,b[)$$

Alapintegrálok

1. $$\int e^x\,dx=e^x$$

2. $$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}a^x$$

3. $$\int \ln(x)\,dx=x\ln(x)-x$$

4. $$\int \log_a(x)\,dx=\frac{1}{\ln a}(x\ln(x)-x)$$

5. $$\int x^\alpha\,dx=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{ha}\,\alpha\neq-1,\\ \ln|x| & \text{ha}\,\alpha=-1\,,\end{cases}$$

6. $$\int \cos(x)\,dx=\sin(x)$$

7. $$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)$$

8. $$\int \mathrm{tg}(x)\,dx=-\ln|\cos(x)|$$

9. $$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx=\ln|\sin(x)|$$

10. $$\int \arccos(x)\,dx=x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$$

11. $$\int \arcsin(x)\,dx=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$$

12. $$\int \mathrm{arctg}(x)\,dx=x\,\mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

13.
$$\int \mathrm{arcctg}(x)\,dx = x\mathrm{arcctg}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

14.
$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$

15.
$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$

16.
$$\int \tanh(x)\,dx = \ln|\cosh(x)|$$

17.
$$\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)|$$

18.
$$\int \mathrm{arcosh}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcosh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

19.
$$\int \mathrm{arsinh}(x)\,dx = x\,\mathrm{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$$

20.
$$\int \mathrm{artanh}(x)\,dx = x\,\mathrm{artanh(x)} + \frac{1}{2}\ln|1-x^2|$$

21.
$$\int \mathrm{arcoth}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

22.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}(x)$$

23.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}(x)$$

24.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$

25.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x)$$

26.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x)$$

27.
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\mathrm{arcctg}(x)$$

28.
$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$

29.
$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

30.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arsinh}(x)$$

31.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arcosh}(x)$$

32.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{artanh}(x)$$

33.
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\mathrm{arcoth}(x)$$

Feladatok

1. Feladat. *Legyen*
$$f(x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Határozzuk meg az f függvény F primitív függvényét úgy, hogy,

(i) $F(0) = 0$

(ii) $F(1) = 0$

(iii) $F(a) = 0$ *($a \in \mathbb{R}$ adott)*

(iv) $F(0) = 3$

(v) $F(1) = 5$

(vi) $F(a) = 6$ *($a \in \mathbb{R}$ adott)*

teljesüljön.

2. Feladat. *Legyen $F(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy ekkor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén*

$$F'(x) = \operatorname{sign}(x).$$

Igaz-e, hogy F a sign *függvény primitív függvénye $\mathbb{R}$-en?*

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } x > 0 \\ 0, & \textit{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $\mathbb{R}$-en nem létezik primitív függvénye.

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $s(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények az*

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \textit{ha } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & \textit{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

módon megadott $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye.

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i) $$\int x^5 dx$$

(ii) $$\int x^{-3} dx,$$

(iii) $$\int \sqrt{x} dx,$$

(iv) $$\int \sqrt[3]{x^2} dx,$$

(v) $$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

(vi) $$\int \sqrt{x}\sqrt[3]{x} dx,$$

(vii) $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

(viii) $$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} dx,$$

(ix) $$\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}} dx,$$

(x) $$\int (3 - x^2)^3 dx,$$

(xi) $$\int x^2(5 - x^4) dx,$$

(xii) $$\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx,$$

(xiii) $$\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx,$$

(xiv) $$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx,$$

(xv) $$\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx,$$

(xvi) $$\int \frac{x^2}{1 - x^2} dx,$$

(xvii) $$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$$

(xviii) $$\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} dx,$$

(xix) $$\int 3x^4 + \frac{4}{x^5} dx,$$

(xx) $$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$$

(xxi) $$\int 5^x dx,$$

(xxii) $$\int 2e^x dx,$$

(xxiii) $$\int (2^x + 3^x)^2 dx,$$

(xxiv) $$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx,$$

(xxv) $$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx,$$

(xxvi)
$$\int 6\sin(x)+5\cos(x)dx,$$

(xxvii)
$$\int 2\cdot 5^x+4\sin(x)-3\cos(x)dx,$$

(xxviii)
$$\int \alpha\sinh(x)+\beta\cosh(x)dx,$$

(xxix)
$$\int \mathrm{tg}^2(x)dx,$$

(xxx)
$$\int \mathrm{ctg}^2(x)dx,$$

(xxxi)
$$\int \frac{\cos(x)^2-5}{1+\cos(2x)}dx,$$

(xxxii)
$$\int \frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)^2-1}dx,$$

(xxxiii)
$$\int \frac{5\cos(2x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$$

(xxxiv)
$$\int \sqrt{1-\sin(2x)}dx$$

6. Feladat. *A parciális integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

(i)
$$\int \ln(x)dx,$$

(ii)
$$\int x^n\ln(x)dx,\ (n\neq -1)$$

(iii)
$$\int \sqrt{x}\ln^2(x)dx,$$

(iv)
$$\int (x^2+2)\ln(x)dx,$$

(v)
$$\int xe^{-x}dx,$$

(vi)
$$\int x^2e^{-2x}dx,$$

(vii)
$$\int (x-1)e^xdx,$$

(viii)
$$\int (x^2+x+1)e^xdx,$$

(ix)
$$\int x^2e^{x+1}dx,$$

(x)
$$\int x^3e^{-x^2}dx,$$

(xi)
$$\int x^5e^{x^3}dx,$$

(xii)
$$\int x\cos(x)dx,$$

(xiii)
$$\int x^2\sin(2x)dx,$$

(xiv)
$$\int x\sinh(x)dx,$$

(xv)
$$\int x^3\cosh(3x)dx,$$

(xvi)
$$\int e^{\sqrt{x}}dx,$$

(xvii)
$$\int x\sin(\sqrt{x})dx,$$

(xviii)
$$\int e^x\sinh(x)dx$$

(xix)
$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}dx,$$

(xx)
$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx,$$

(xxi)
$$\int e^x\cos(x)dx,$$

(xxii)
$$\int e^{2x}\sin(3x)dx,$$

(xxiii)
$$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx,$$

(xxiv)
$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx,$$

(xxv)
$$\int e^{2x}\sin^2(x)dx,$$

(xxvi)
$$\int (e^x-\cos(x))^2\,dx,$$

(xxvii)
$$\int \mathrm{arctg}(x)dx$$

(xxviii)
$$\int x\,(\mathrm{arctg}(x))^2\,dx,$$

(xxix)
$$\int (\arcsin(x))^2dx,$$