Határozatlan integrál I.

Alapintegrálok és a parciális integrálás tétele

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak az elsődleges célja valós függvények határozatlan integrálásának megismerése, valamint a parciális integrálás tételének alkalmazása és gyakorlása. Ahogyan azt majd látni fogjuk, a parciális integrálás nem egy mechanikus módszer integrálok kiszámítására. Csak olyan esetekben érdemes alkalmazni, amikor az integrandus szorzat alakú és a tétel alkalmazása megkönnyíti a számítást. Továbbá, nem mindig látszik első ránézésre, hogy melyik függvényt érdemes f-nek illetve g'-nek választani. Vannak azonban olyan módszerek, amelyek igen hatékonyan alkalmazhatóak viszonylag általánosan is.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások:

1. A primitív függvény és határozatlan integrál fogalma
2. Alapintegrálok
3. A határozatlan integrál linearitása
4. A parciális integrálás tétele

További tudnivalók

Az alábbiakban a legfontosabb feladatok részletes megoldása található. A meg nem oldott feladatok házi feladatnak tekintendőek. Az egyes feladatoknál található útmutatók hasznos információkat, módszereket tartalmaznak. Kérlek benneteket, hogy azokat is olvassátok el figyelmesen.

1. Feladat. *Legyen*

$$f(x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Határozzuk meg az f függvény F primitív függvényét úgy, hogy,

(i) $F(0) = 0$

(ii) $F(1) = 0$

(iii) $F(a) = 0$ *($a \in \mathbb{R}$ adott)*

(iv) $F(0) = 3$

(v) $F(1) = 5$

(vi) $F(a) = 6$ *($a \in \mathbb{R}$ adott)*

teljesüljön.

Primitív függvény fogalma és egyértelműsége

1. Definíció. *Legyen $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény. Az $F\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény* ***primitív függvény****ének vagy* ***határozatlan integrál****jának nevezzük, ha az F függvény differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és*

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül minden $x \in]a, b[$ esetén. Az F függvényre a továbbiakban az $\int f$ vagy az $\int f(x)dx$ jelölést használjuk.

1. Tétel. *Ha $f, F\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ és $F' = f$, akkor $G\ :]a, b[\to \mathbb{R}$* ***pontosan akkor*** *primitív függvénye f-nek, ha létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$F(x) = G(x) + C \qquad (x \in]a, b[)$$

1. Megjegyzés. *Az előző tétel azt fejezi ki, hogy ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor ez a primitív függvény* ***konstans összeadandótól eltekintve*** *egyértelmű.*

Megoldás. Az $f(x) = 2x$ függvény primitív függvényei $F(x) = x^2 + C$ alakúak valamilyen $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Az egyes feladatrészeknél ezt a C konstanst kell úgy megválasztanunk, hogy F az adott helyen a meghatározott értéket vegye fel.

(i) Mivel $F(0) = 0^2 + C = C$, az $F(0) = 0$ érték úgy érhető el, ha a $C = 0$ konstanst választjuk.

(ii) Mivel $F(1) = 1^2 + C = 1 + C$, ezért az $F(1) = 0$ érték eléréséhez az $1 + C = 0$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami a $C = -1$ választással érhető el.

(iii) Mivel $F(a) = a^2 + C$, ezért az $F(a) = 0$ érték eléréséhez az $a^2 + C = 0$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami a $C = -a^2$ választással érhető el.

(iv) Mivel $F(0) = 0^2 + C = C$, az $F(0) = 3$ érték úgy érhető el, ha a $C = 3$ konstanst választjuk.

□

2. Feladat. *Legyen $F(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy ekkor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén*

$$F'(x) = \mathrm{sign}(x).$$

Igaz-e, hogy F a sign *függvény primitív függvénye $\mathbb{R}$-en?*

Megoldás. $F'(x)$ meghatározásához először figyeljük meg, hogy

$$F(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Mivel $F(x)$ az $x = 0$ helyen nem értelmezett, az $F'(x)$ deriváltat az értelmezési tartomány két intervallumán külön-külön tudjuk meghatározni:

$$F'(x) = |x|' = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Látható, hogy ez az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ értelmezi tartományon megegyezik a sign függvény értékeivel.

Ennek ellenére nem mondhatjuk, hogy F a sign függvény primitív függvénye $\mathbb{R}$-en, mert primitív függvényének $\mathbb{R}$-en csak akkor nevezhetnénk, ha az $\mathbb{R}$ minden pontban F deriváltja megegyezne sign értékével. Viszont az $x = 0$ helyen $F(x)$ nem deriválható (még csak nem is folytonos). □

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x \leq 0 \end{cases}$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $\mathbb{R}$-en nem létezik primitív függvénye.

Útmutatás. Az állítás a Darboux-tétel következménye. □

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $s(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények az*

$$S(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & ha\ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & ha\ x \geq 0 \end{cases}$$

módon megadott $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye.

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

Útmutatás. Használjuk az alapintegrálok fejezetben található alapintegrálokat, valamint a határozatlan integrál linearitását. □

A határozatlan integrál linearitása

2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyenek $f, g\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre létezik $\int f$ és $\int g$, legyenek továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor létezik $\int \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C.$$

2. Megjegyzés. *Az előző tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy összegnek lehet venni tagonként a primitív függvényét, és a konstansokat ki lehet hozni az integráljel elé.*

A legfontosabb alapintegrálok

1. $$\int e^x\,dx = e^x$$
2. $$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x$$
3. $$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{ha } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| & \text{ha } \alpha = -1\,, \end{cases}$$
4. $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$
5. $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$
6. $$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$
7. $$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$
8. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}(x)$$
9. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}(x)$$
10. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$
11. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x)$$
12. $$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x)$$
13. $$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x)$$

(i)
$$\int x^5\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.
$$\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$$
□

(ii)
$$\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.
$$\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$
□

(iii)
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
□

(iv)

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

□

(v)

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$$

□

(vi)

$$\int \sqrt{x}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \sqrt{x}\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{6}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C$$

□

(vii)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

(viii)

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}}$$

(ix)

$$\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

□

(x)

$$\int (3 - x^3)^2\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A határozatlan integrál linearitását kihasználva a többtagú kifejezéseket tagonként integrálhatjuk, illetve a konstansokat kiemelhetjük.

$$\int (3 - x^3)^2 \, \mathrm{d}x = \int 9 - 6x^3 + x^6 \, \mathrm{d}x = \int 9 \, \mathrm{d}x - 6 \cdot \int x^3 \, \mathrm{d}x + \int x^6 \, \mathrm{d}x =$$

$$= 9x + C_1 - 6 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + C_2 \right) + \frac{x^7}{7} + C_3 = 9x - 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$$

Figyeljük meg, hogy a $C_1 - C_2 + C_3$ érték, illetve általában akárhány konstans bármilyen lineáris kombinációja is konstans, így ezeket a tagokat felesleges külön-külön kiírni. Elegendő egyetlen C konstans tag használata, a továbbiakban csak ezt fogjuk jelezni. □

(xi)

$$\int x^2(5 - x^4) \, \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int x^2(5 - x^4) \, \mathrm{d}x = \int 5x^2 - x^6 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int x^6 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} + C$$

□

(xii)

$$\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) \, \mathrm{d}x$$

(xiii)

$$\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \, \mathrm{d}x = \int x^{-2} \, \mathrm{d}x - 2 \cdot \int x^{-1} \, \mathrm{d}x + \int 1 \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x^{-1} - 2 \cdot \ln |x| + x + C = -\frac{1}{x} - 2 \cdot \ln |x| + x + C$$

□

(xiv)

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 2 \cdot \sqrt{x} + C$$

□

(xv)

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

Megoldás. Először át fogjuk alakítani az integrandus számlálóját, mégpedig úgy, hogy 1-et hozzáadva és 1-et kivonva belőle a számláló értéke nem változik, viszont a tört egyszerűsíthetővé válik.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

A fenti kifejezésben felismerhetjük a következő alapintegrált

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$$

Tehát

$$\int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x + C$$

□

(xvi)

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

(xvii)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x^2+1)}\sqrt{(x^2-1)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

Ebben a kifejezésben felismerhetjük a következő alapintegrálokat

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x) + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$$

Tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}(x) - \operatorname{arsinh}(x) + C$$

□

(xviii)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{20}}}{x^{\frac{1}{6}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{10}-\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{15}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{17}{15}}}{\frac{17}{15}} + C = \frac{15}{17}\cdot x^{\frac{17}{15}} + C$$

□

(xix)

$$\int 3x^4 + \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x$$

(xx)

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$$

(xxi)

$$\int 5^x \, \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int 5^x \, \mathrm{d}x = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

□

(xxii)

$$\int 2e^x \, \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int 2e^x \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int e^x \, \mathrm{d}x = 2 \cdot e^x + C$$

□

(xxiii)

$$\int 6\sin(x) + 5\cos(x) \, \mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int 6\sin(x) + 5\cos(x) \, \mathrm{d}x = 6 \cdot \int \sin(x) \, \mathrm{d}x + 5 \cdot \int \cos(x) \, \mathrm{d}x = 6 \cdot (-\cos(x)) + 5 \cdot \sin(x) + C =$$
$$-6\cos(x) + 5\sin(x) + C$$

□

(xxiv)

$$\int 2 \cdot 5^x + 4\sin(x) - 3\cos(x) \, \mathrm{d}x$$

(xxv)

$$\int \mathrm{tg}^2(x) \, \mathrm{d}x$$

Megoldás. Használjuk a következő trigonometrikus azonosságokat.

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \text{és hogy} \qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

melyek minden $x \in \mathbb{R}$ esetén érvényesek. Ezeket használva az integrandus a következőképpen alakítható át.

$$\int \mathrm{tg}^2(x) \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \, \mathrm{d}x$$

Az $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$ alapintegrált alkalmazva ez a kifejezés

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x - \int 1 \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) - x + C.$$

□

(xxvi)

$$\int \operatorname{ctg}^2(x)\,\mathrm{d}x$$

(xxvii)

$$\int \frac{\cos^2(x)-5}{1+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Ebben a feladatban az alábbi trigonometrikus azonosságot fogjuk használni.

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ennek segítségével a kifejezés átalakítható, majd egyszerűsíthető az alábbiak szerint.

$$\int \frac{\cos^2(x)-5}{1+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2(x)-5}{1+2\cos^2(x)-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2(x)-5}{2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{5}{2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\cdot\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\operatorname{tg} x + C$$

□

(xxviii)

$$\int \frac{1+\cos(2x)}{\cos^2(x)-1}\,\mathrm{d}x$$

(xxix)

$$\int \frac{5\cos(2x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

6. Feladat. *A parciális integrálás tételének felhasználásával számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat.*

A parciális integrálás tétele

3. Tétel (A parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f'\cdot g$, akkor létezik $\int f\cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx + C. \qquad (x \in]a,b[)$$

(i)

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \ln x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1.$$

Ekkor

$$f(x)\cdot g'(x) = \ln x \cdot 1 = \ln x$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{valamint} \qquad g(x) = x \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$

Figyeljük meg, hogy $g'(x)$-ből $g(x)$-et határozatlan integrálással kaphatjuk meg, $f(x)$-ből $f'(x)$-et pedig deriválással. Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - x + C$$

□

(ii)

$$\int x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Ismét a parciális integrálás tételét szeretnénk alkalmazni. Ehhez fel kell ismernünk, hogy a feladatban szereplő függvény olyan szorzat, amelynek az egyik tényezője (a későbbi $g'(x)$) egy függvény deriváltja. Legyen

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{és} \quad g'(x) = (n+1)x^n.$$

Ekkor tehát

$$f(x) \cdot g'(x) = (n+1) \cdot x^n \ln(x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{valamint} \quad g(x) = \int g'(x)\,\mathrm{d}x = \int (n+1)x^n\,\mathrm{d}x = x^{n+1} \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét!

$$\begin{aligned}\int x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}\int (n+1)\cdot x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left(f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\ln(x)\cdot x^{n+1} - \int \frac{1}{x}\cdot x^{n+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{n+1}\cdot\int x^n\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C\end{aligned}$$

□

$\int P(x)\ln(x)dx$ alakú integrálok

Legyen P egy valós polinom. Amennyiben az integrandus $P(x)\ln(x)$ alakú, akkor a határozatlan integrál kiszámítására mindig alkalmazható a parciális integrálás tétele, mégpedig az alábbi választással

$$f(x) = \ln(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = P(x).$$

(iii)

$$\int \sqrt{x}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Ahhoz, hogy a függvényben szorzótényezőként felismerjük egy függvény deriváltját, ismét az előbbihez hasonló átalakítást kell végeznünk:

$$\int \sqrt{x}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Legyen

$$f(x) = \ln^2(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Ekkor tehát

$$f(x)\cdot g'(x) = \ln^2(x)\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$f'(x) = (\ln^2(x))' = 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}.$$

$$g(x) = \int g'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = x^{\frac{3}{2}} \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\cdot\left(f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\left(\ln^2 x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \int 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\ln^2 x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int\ln(x)\cdot x^{\frac{3}{2}-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\ln^2(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int\ln(x)\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

A kapott kifejezés még mindig tartalmazza egy szorzatfüggvény integrálást. Ezt ismét a parciális integrálás tételével fogjuk elvégezni. A kérdéses kifejezés nagyon hasonlít az előbbihez, ismét hasonló az átalakítást fogunk elvégezni ahhoz, hogy $f'(x)$-et felismerhessük.

$$\int x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Most legyen

$$\tilde{f}(x) = \ln(x) \qquad \text{és ismét} \quad g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Ekkor

$$\tilde{f}'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^{\frac{3}{2}}.$$

Most ezekre a függvényekre alkalmazzuk a parciális integrálás tételét az előbbi kifejezésben szereplő integrálra.

$$\begin{aligned}
\int x^{\frac{1}{2}}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\cdot\left(\tilde{f}(x)\cdot g(x) - \int\tilde{f}'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
= \frac{2}{3}\cdot\left(\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \int\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right) &= \frac{2}{3}\cdot\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C\\
&= \frac{2}{3}\cdot\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\cdot\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Ennek ismeretében visszatérhetünk az eredeti feladathoz. A félbehagyott műveletsorunkat folytassuk azzal, hogy a megjelent integrál helyére behelyettesítjük az előbb kiszámolt értékét, azaz,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot\ln^2(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\int\ln(x)\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\cdot\ln^2(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\ln(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C\right)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\ln^2(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9}\cdot\ln(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

$\square$

(iv)

$$\int x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Útmutatás. A parciális integrálás tételét szeretnénk alkalmazni, ehhez meg kell választanunk, hogy az x és az e^{-x} közül melyik szorzótényezőt tekintsük $f(x)$-nek és melyiket $g'(x)$-nek. Az ügyes választás titka az, hogy átgondoljuk: a parciális integrálás tételének alkalmazásakor a $f(x)$ és $g'(x)$ mellett szükségünk lesz az $f'(x)$ és a $g(x)$ függvényre. Ehhez $f(x)$-et deriválnunk kell majd, hogy $f'(x)$-et kapjuk, a $g'(x)$-et pedig integrálni fogjuk, hogy $g(x)$-et kapjuk. Ha jól választjuk meg a szerepeket, akkor a tényezők e műveletek során egyszerűsödni fognak (ha viszont rosszul, akkor lehet, hogy bonyolultabb feladatot kapunk). Vagyis azt a szorzótényezőt érdemes $f(x)$-nek választanunk, amelyik a deriválás során egyszerűsödne, és azt $g'(x)$-nek, amelyiket integrálva könnyen kezelhető kifejezést kapunk. Ebben az esetben például legyen $f(x) = x$ jó választás, mivel $f'(x) = 1$ és a $g'(x) = e^{-x}$-ből integrálással kapható $g(x) = -e^{-x}$ sem bonyolult. Általában az x^n vagy $\ln(x)$ típusú tagokon a deriválás egyszerűsít (ezért őket $g'(x)$-nek érdemes választanunk), míg például az e^x, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ függvények nem lesznek bonyolultabbak, ha integráljuk őket (ezért jó döntés őket $f(x)$-nek választani). □

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{-x}.$$

Ekkor

$$f'(x) = 1$$

Továbbá

$$g(x) = \int g'(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int (e^{-1})^x\,\mathrm{d}x$$

Alkalmazva az

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

alapintegrált $a = e^{-1}$ értékkel ebből

$$g(x) = \int (e^{-1})^x\,\mathrm{d}x = \frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}} = -e^{-x}.$$

adódik $g'(x)$ egy primitív függvényére.

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

□

(v)

$$\int x^2 \cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x^2 \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{-2x} = (e^{-2})^x.$$

Így

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Ekkor

$$f'(x) = 2x$$

Továbbá az

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

alapintegrál segítségével meghatározhatjuk, hogy

$$g(x) = \frac{(e^{-2})^x}{\ln e^{-2}} = \frac{e^{-2x}}{\ln e^{-2}} = \frac{e^{-2x}}{-2}.$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$(1)\quad \int x^2 \cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = x^2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2x} + \int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Most számítsuk ki a fenti kifejezésben megjelent

$$\int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét. Legyen

$$\tilde{f}(x) = x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{-2x} = (e^{-2})^x.$$

Így

$$\int \tilde{f}(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Ekkor

$$\tilde{f}'(x) = 1,$$

és ahogyan az előbb már megállapítottuk

$$g(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}.$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \tilde{f}(x)\cdot g(x) - \int \tilde{f}'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó tagként megjelent integrált a g meghatározásakor már kiszámoltuk.

$$\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int (e^{-2})^x\,\mathrm{d}x = \frac{(e^{-2})^x}{\ln e^{-2}} + C = \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

Tehát

$$\int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2} + C\right) = -\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

A fenti kifejezésben a C konstans tagot, majd az utolsó lépésben, a zárójel felbontása után megjelenő $-\frac{1}{4}C$ konstanst ismét csak C-vel jelöltem. Ez azért megengedhető, mert esetünkben C nem egy rögzített számot, hanem egy tetszőleges konstans értéket jelölt.

Végül a kiszámolt integrál értékét írjuk vissza az eredeti, (1)-gyel jelölt műveletsorba.

$$\int x^2\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2x} + \int x\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

□

(vi)

$$\int (x^2+2)\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \ln(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = (x^2 + 2).$$

Így

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 + 2)\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{valamint } g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\begin{aligned}\int (x^2+2)\ln x\,\mathrm{d}x &= f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(x)\cdot\left(\frac{x^3}{3}+2x\right) - \int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) + 2x\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}+2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) + 2x\ln(x) - \left(\frac{x^3}{9}+2x+C\right) = \frac{x^3}{3}\ln(x) + 2x\ln(x) - \frac{x^3}{9} - 2x + C\end{aligned}$$

(Itt újra C-vel jelöltük a zárójel felbontása után létrejött $-C$ konstans tagot.) □

(vii)

$$\int (x-1)e^x\,\mathrm{d}x$$

(viii)

$$\int (x^2+x+1)e^x\,\mathrm{d}x$$

(ix)

$$\int x^2 e^{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$\int P(x)e^x dx$ alakú integrálok

Legyen P egy valós polinom. Amennyiben az integrandus $P(x)e^x$ alakú, akkor a határozatlan integrál kiszámítására $\deg(P)$-szer kell alkalmazni a parciális integrálás tételét, mégpedig az alábbi választással

$$f(x) = P(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x.$$

(x)

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Útmutatás. (Ez egy nehéz feladat.) Szeretnénk alkalmazni a parciális integrálás tételét. A iv feladatrészhez tartozó útmutatásban már tárgyaltuk, hogy az x^n típusú tényezőt érdemes $f(x)$-nek, azaz a majd deriválandó tényezőnek, az e^x típusút pedig $g'(x)$-nek, azaz majd integrálandó tényezőnek választani. Most viszont azzal szembesülünk, hogy az e^{-x^2} kifejezést nehéz integrálni. (Érdekességképpen megemlítem: e^{-x^2} integrálja nem elemi, azaz egyáltalán nem is fejezhető ki az általunk ismert nevesített függvények segítségével.) Emiatt a kifejezést előbb át kell alakítanunk úgy, hogy az e^{-x^2}-es részen megjelenjen valamilyen függvény deriváltja: □

Megoldás. Az útmutatás szerint először át kell alakítanunk a kifejezést.

A trükk a következő (a motivációnkra lejjebb fog fény derülni): szorozzuk meg $1 = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$-del, és bontsuk fel az x^3 tényezőt $x^3 = x \cdot x^2$-re:

$$\int x^3 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \int e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^2 \,\mathrm{d}x$$

Legyen

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Így

$$\int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = \int x^3 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

Ekkor

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x.$$

$g(x) = \int e^{-x^2} \cdot (-2x) \,\mathrm{d}x$ kiszámítása most még bonyolultnak tűnhet, ezért gondolkodjunk visszafelé! Az integrálással primitív függvényt keresünk, azaz olyan függvényt, amelynek a deriváltja $e^{-x^2} \cdot (-2x)$. Azt már tudjuk, hogy az e^x integrálja és deriváltja is önmaga, ezért számíthatunk arra, hogy e^{-x^2} integrálja és deriváltja is az eredetihez "hasonló" kifejezés lesz. A deriváltját könnyen tudjuk ellenőrizni, hiszen ez egy összetett függvény:

$$\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Észrevehetjük, hogy a kapott kifejezés éppen $g'(x)$, aminek a primitív függvényét keressük. Tehát

$$g(x) = \int e^{-x^2} \cdot (-2x) \,\mathrm{d}x = e^{-x^2}$$

egy primitív függvénye $g'(x)$-nek. Most már érthető az is, hogy az első átalakítást miért úgy végeztük el: a megtett lépéseknek köszönhetően éppen e^{-x^2} deriváltja jelent meg.

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét!

$$\int x^3 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x^2} - \int -x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

A tétel alkalmazása során megjelent integrálos tagban ismét az e^{-x^2} kifejezés szerepel. Számoljuk ki először csak ezt az integrálos tagot! Ezt ismét úgy tudjuk megtenni, ha először átalakítjuk a kifejezést. Ugyanazt az ötletet fogjuk használni, mint az előbb: szeretnénk az integrálon belül kialakítani az e^{-x^2} függvény deriváltját.

$$\int -x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

Mint azt már megállapítottuk, most az integrálon belül lévő $-2x \cdot e^{-x^2}$ kifejezés éppen az e^{-x^2} függvény deriváltja. Ez azt is jelenti, hogy

$$\int -2x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = e^{-x^2} + C,$$

és így

$$\int -x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C.$$

(Az utolsó zárójel felbontása után kapott $\frac{1}{2}C$ konstanst újra C-vel jelöltük.)

Ezt visszahelyettesítve az eredeti, (2)-vel jelölt műveletsorba:

$$\int x^3 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x^2} - \int -x \cdot e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C$$

□

(xi)

$$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x \quad \text{és} \quad g'(x) = \cos(x).$$

Így

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Ekkor

$$f'(x) = 1, \qquad \text{valamint } g(x) = \sin(x) \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.

$$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\sin(x) - (-\cos(x) + C) = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

(Az utolsó zárójel felbontása után kapott $-C$ konstanst újra C-vel jelöltük.) □

$\int P(x)T(x)dx$ alakú integrálok

Jelölje T a $\sin, \cos, \sinh, \cosh$ függvények valamelyikét. Amennyiben az integrandus $P(x)T(x)$ alakú, akkor a határozatlan integrál kiszámítására $\deg(P)$-szer kell alkalmazni a parciális integrálás tételét, mégpedig az alábbi választással

$$f(x) = P(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = T(x).$$

(xii)

$$\int x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

(xiii)

$$\int x\sinh(x)\,\mathrm{d}x$$

(xiv)

$$\int x^3\cosh(3x)\,\mathrm{d}x$$

(xv)

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

(xvi)

$$\int x\sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

(xvii)

$$\int e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = e^x \quad \text{és} \quad g'(x) = \sin(x).$$
Így
$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$$
Ekkor
$$f'(x) = e^x, \qquad \text{valamint } g(x) = -\cos(x) \text{ egy primitív függvénye } g'(x)\text{-nek.}$$
Alkalmazzuk a parciális integrálás tételét.
$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = e^x \cdot (-\cos(x)) - \int e^x \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x$$
Számoljuk ki külön az ebben a kifejezésben megjelent $\int e^x \cdot (-\cos x)\,\mathrm{d}x$ integrált.
Hasonlóan, mint fent, legyen
$$f(x) = e^x \quad \text{és} \quad \tilde{g}'(x) = -\cos(x).$$
Így
$$\int f(x) \cdot \tilde{g}'(x)\,\mathrm{d}x = \int e^x \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$
Ekkor
$$f'(x) = e^x, \qquad \text{valamint } \tilde{g}(x) = -\sin(x) \text{ egy primitív függvénye } \tilde{g}'(x)\text{-nek.}$$
Alkalmazzuk erre is a parciális integrálás tételét.
$$\begin{aligned}\int e^x \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x &= f(x) \cdot \tilde{g}(x) - \int f'(x) \cdot \tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \cdot (-\sin(x)) - \int e^x \cdot -\sin(x)\,\mathrm{d}x = -e^x \cdot \sin(x) + \int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
Azt látjuk, hogy az utolsó lépésben megjelent integrál éppen ugyanaz, mint az eredeti feladat, azaz ismét a kezdeti problémával találkozunk. Ez azonban nem jelenti azt, hogy ne tudnánk kiszámolni: Helyettesítsük vissza az előbb kapott értéket az eredeti műveletsorunkba.
$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= e^x \cdot (-\cos(x)) - \int e^x \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x = e^x \cdot (-\cos(x)) - (-e^x \cdot \sin(x) + \int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x) \\ &= -e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $\int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$-t, így az egyenlet következő átrendezését kapjuk
$$2 \cdot \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = -e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x),$$
amiből az adódik, hogy
$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} + C.$$
□

$\int e^x \sin(x)dx$ és $\int e^x \cos(x)dx$ alakú integrálok

Ebben az esetben is hatékonyan alkalmazható a parciális integrálás tétele. Ilyen esetekben azonban **kétszer** kell alkalmazni a tételt az alábbi választással.

$$f(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) \in \{\sin(x), \cos(x)\}\,.$$

(xviii)

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(xix)

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

(xx)

$$\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

(xxi)

$$\int e^{2x} \sin(3x)\,\mathrm{d}x$$

(xxii)

$$\int e^{2x} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

(xxiii)

$$\int (e^x - \cos(x))^2\,\mathrm{d}x$$

(xxiv)

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Bár az integrandusról egyelőre még ez nem látszik, de szorzat alakú, ugyanis

$$\operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(x) \cdot 1.$$

Legyen ezek után

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = x,$$

így ha alkalmazzuk a parciális integrálás tételét, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \ln\left(|1+x^2|\right) + C.$$

Az, hogy a parciális integrálás tétele után kapott integrál értéke miért $\ln\left(|1+x^2|\right)$, a soron következő alkalommal ki fog derülni. (Most egyelőre fogadjuk el, hogy azért mert az $\ln\left(|1+x^2|\right)$ függvény a deriváltja $\dfrac{x}{1+x^2}$.) □

Az arcus és az area függvények primitív függvényei

Jelölje T az arcsin, arccos, arctg, arcctg, arsinh, arcosh, artanh vagy arcoth bármelyikét. Ezen függvények primitív függvényének meghatározására szintén alkalmas a parciális integrálás tétele, ha az integrandust

$$T(x) = T(x) \cdot 1$$

alakban írjuk fel és a tételt az

$$f(x) = T(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1$$

választással használjuk.