Határozatlan integrál

A parciális törtekre bontás módszere

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak az elsődleges célja, hogy a parciális törtekre bontás tételének segítségével úgynevezett racionális törtfüggvényeknek is meg tudjuk határozni a primitív függvényeit. Ezt következően trigonometrikus, illetve exponenciális függvények racionális kifejezéseinek integrálására tanulunk majd néhány módszert.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások:

1. Racionális törtfüggvények integrálása (Kalkulus előadásjegyzet 9.4.1 fejezetete)
2. A parciális törtekre bontás módszere
3. Trigonometrikus, illetve exponenciális függvények racionális kifejezéseinek integrálása (Kalkulus előadásjegyzet 9.4.2 fejezetete)

További tudnivalók

Az alábbiakban a feladatlapon található legfontosabb példák részletes megoldása található. A meg nem oldott feladatok házi feladatnak tekintendőek. Az egyes feladatoknál található útmutatók hasznos információkat, módszereket tartalmaznak. Kérlek benneteket, hogy azokat is olvassátok el figyelmesen.

Korábbi előismeretek

1. Polinomok, maradékos osztás a $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben (polinomosztás) (ezekről Diszkrét matematikából volt szó)
2. Teljes négyzetté kiegészítés

Racionális törtfüggvények és a parciális törtekre bontás módszere

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f valós függvény* ***racionális törtfüggvény****, ha léteznek olyan P és Q valós polinomok, hogy*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0)$$

teljesül.

1. Tétel. *Legyen f egy racionális törtfüggvény. Ekkor az f függvénynek létezik F primitív függvénye, továbbá ez az F függvény elemi függvény.*

A továbbiakban a Q polinom gyökeitől függően három különböző esetet kell megkülönböztetnünk.

Ha a Q polinomnak csak egyszeres multiplicitású, valós gyökei vannak

Ha

$$Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

ahol az $A_1, \ldots, A_n$ együtthatók egyértelműen meg vannak határozva. Ezeket a konkrét feladatokban az együtthatók egyeztetésével lehet meghatározni.

Ha a Q polinomnak csak valós gyökei vannak, de a gyökök között vannak többszörös multiplicitásúak is

Ha a Q polinom

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

alakú, ahol $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}} \\
&= \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} \\
&+ \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} \\
&\qquad + \cdots + \frac{A_{k1}}{(x - x_k)} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}}.
\end{aligned}$$

Az előállításban szereplő $A_{i\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$ valós számokat ebben az esetben is az együtthatók egyeztetésével tudjuk meghatározni.

Ha a Q polinomnak van komplex gyöke is

Ekkor, ha például $z \in \mathbb{C}$ gyöke a Q polinomnak, akkor $\overline{z}$ is gyöke Q-nak, vagyis a komplex gyökök a konjugáltjaikkal együtt lépnek fel. Ezen az eseten belül még további két esetet kell megkülönböztetnünk.

a) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **egyszeres komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_s x + c_s),$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x - x_r)^j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k x + C_k}{x^2 + b_k x + c_k}.$$

b) eset Ha a Q polinomnak **többszörös valós** és **többszörös komplex** gyöktényezői vannak, azaz,

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{\beta_s},$$

akkor

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^i} + \cdots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k} + \cdots + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl}x + C_{sl}}{(x^2+b_sx+c_s)^l}$$

Az $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$ alakú integrálok

A sinus és cosinus függvények tetszőleges $R(\sin(x), \cos(x))$ racionális kifejezése esetén a

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x) \qquad g(t) = 2\mathrm{arctg}(t)$$

helyettesítés mindig célravezető. Ezen helyettesítés elvégzése után ugyanis,

$$g'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{és} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

amiből azt látjuk, hogy ezzel a helyettesítéssel az integrandus egy racionális törtfüggvénybe megy át.

Az $\int R(e^x)dx$ alakú integrálok

Abban az esetben, ha az integrandus az exponenciális függvény egy racionális törtfüggvénye, a

$$t = e^x = g^{-1}(x) \qquad x = \ln(t) = g(t) \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

helyettesítéssel az integrandus t-nek racionális törtfüggvényébe megy át.

Az $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ alakú integrálok

Ha az integrandus x-nek és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális törtfüggvénye, akkor az

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \qquad x = \frac{t^n - b}{a} = g(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{n}{a}t^{n-1}$$

helyettesítéssel az integrandus racionális törtfüggvénnyé alakítható.

1. Feladat. *Legyenek A, α, β olyan valós számok, hogy $A, \alpha \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ pedig legyen tetszőleges. Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int \frac{A}{(\alpha x + \beta)^n} dx$$

Megoldás. *Attól függően, hogy a feladatokban szereplő $n \in \mathbb{N}$ eggyel egyezik meg, illetve egytől különböző, két esetet kell megkülönböztetnünk.*

ha $n = 1$**, akkor** *vegyük észre, hogy az integrandus „majdnem”* $\dfrac{f'}{f}$ *alakú, ezért*

$$\int \frac{A}{\alpha x + \beta} dx = \frac{A}{\alpha} \int \frac{\alpha}{\alpha x + \beta} dx = \frac{A}{\alpha} \ln\left(|\alpha x + \beta|\right) + C.$$

ha $n \neq 1$**, akkor** *vegyük észre, hogy az integrandus „majdnem”* $f^{\alpha} \cdot f'$ *alakú, így*

$$\int \frac{A}{(\alpha x + \beta)^n} dx = \int A \cdot (\alpha x + \beta)^{-n} dx = \frac{A}{\alpha} \int \alpha \cdot (\alpha x + \beta)^{-n} dx = \frac{A}{\alpha} \frac{(\alpha x + \beta)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

□

(ii)

$$\int \frac{Ax}{(\alpha x + \beta)^n} dx$$

Megoldás. *Ahhoz, hogy az integrandusnak meg tudjuk határozni a primitív függvényét, először el kell végeznünk egy polinomosztást. Ekkor*

$$\frac{Ax}{(\alpha x + \beta)^n} = \frac{A}{\alpha} \frac{\alpha x}{(\alpha x + \beta)^n} = \frac{A}{\alpha} \frac{(\alpha x + \beta) - \beta}{(\alpha x + \beta)^n} = \frac{A}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha x + \beta)^{n-1}} - \frac{A\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha x + \beta)^n}.$$

Figyeljük meg, hogy a fenti felbontás már olyan, amit az előző példa fényében már tudunk integrálni. □

(iii)

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx$$

Megoldás. *A megoldás során azt fogjuk majd használni, hogy*

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}(x).$$

Ehhez először alakítsuk át a nevezőt

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \int \frac{1}{\alpha^2 \left(\dfrac{x^2}{\alpha^2} + 1\right)} dx = \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 1} dx$$

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \qquad t = \frac{x}{\alpha} = g^{-1}(x) \qquad \textit{azaz} \qquad x = g(t) = \alpha t.$$

Ebben az esetben $g'(t) = \alpha$*, ezért*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx &= \int \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 1} dx = \int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \Big|_{t = g^{-1}(x)} \\
&= \int \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \alpha dt \Big|_{t = \frac{x}{\alpha}} = \int \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} dt \Big|_{t = \frac{x}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg}(t) \Big|_{t = \frac{x}{\alpha}} + C = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C.
\end{aligned}$$

□

(iv)

$$\int \frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2}dx$$

Megoldás. *Hasonlóan, mint az előző példa esetében, először itt is alakítsuk át az integrandust.*

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\frac{\beta^2x}{\alpha^2}+1} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2+1}.$$

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{\beta^2x^2+\alpha^2} \qquad t = \frac{\beta x}{\alpha} = g^{-1}(x) \qquad \text{azaz} \qquad x = g(t) = \frac{\alpha}{\beta}t.$$

Ebben az esetben $g'(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, *ezért*

$$\int \frac{1}{\beta^2x^2+\alpha^2}dx = \int \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2+1}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$
$$= \int \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}dt\Big|_{t=\frac{\beta x}{\alpha}} = \int \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt\Big|_{t=\frac{\beta x}{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}(t)\Big|_{t=\frac{\beta x}{\alpha}} + C = \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + C.$$

□

2. Feladat. *A parciális törtekre bontás tételének felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int \frac{4}{3x-5}dx,$$

Megoldás.

$$\int \frac{4}{3x-5}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x-5}dx = \frac{4}{3}\cdot\ln\left(|3x-5|\right) + C.$$

□

(ii)

$$\int \frac{5}{2-3x}dx$$

Megoldás.

$$\int \frac{5}{2-3x}dx = -\frac{5}{3}\int \frac{-3}{2-3x}dx = -\frac{5}{3}\ln\left(|2-3x|\right) + C.$$

□

(iii)

$$\int \frac{5}{(2x-4)^6}dx$$

Megoldás.

$$\int \frac{5}{(2x-4)^6}dx = \int 5\cdot(2x-4)^{-6}dx = \frac{5}{2}\int 2\cdot(2x-4)^{-6}dx = \frac{5}{2}\frac{(2x-4)^{-5}}{-5} + C.$$

□

(iv)

$$\int \frac{14}{(6-4x)^7}dx$$

Megoldás.

$$\int \frac{14}{(6-4x)^7}dx = -\frac{14}{4}\cdot\int(-4)\cdot(6-4x)^{-7}dx = -\frac{14}{4}\cdot\frac{(6-4x)^{-6}}{-6}+C.$$

□

(v)

$$\int \frac{x}{(2x+3)^4}dx,$$

Először végezzünk el egy polinomosztást

$$\frac{x}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)-3}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2\,(2\,x+3)^3} - \frac{3}{2\,(2\,x+3)^4}.$$

Ennek az összegnek már mindkét tagját tudjuk integrálni, így

$$\int \frac{x}{(2x+3)^4}dx = \int \frac{1}{2\,(2\,x+3)^3} - \frac{3}{2\,(2\,x+3)^4}dx = \frac{1}{4\,(2\,x+3)^3} - \frac{1}{8\,(2\,x+3)^2}+C.$$

(vi)

$$\int \frac{5x}{(3x-4)^6}dx$$

Megoldás. *Hasonlóan, mint az előző feladat esetében*

$$\frac{5x}{(3x-4)^6} = \frac{5}{3\,(3\,x-4)^5} + \frac{20}{3\,(3\,x-4)^6},$$

így,

$$\int \frac{5x}{(3x-4)^6}dx = \int \frac{5}{3\,(3\,x-4)^5} + \frac{20}{3\,(3\,x-4)^6}dx = -\frac{5}{36\,(3\,x-4)^4} - \frac{4}{9\,(3\,x-4)^5}+C.$$

□

(vii)

$$\int \frac{2}{x+3}dx,$$

(viii)

$$\int \frac{5}{(x+1)^2}dx,$$

(ix)

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx,$$

Megoldás. *Mivel az integrandus nem egy valódi racionális törtfüggvény, ezért először a polinomosztást kell elvégeznünk.*

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + x - 1,$$

ezt felhasználva,

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \ln\left(|x+1|\right) + \frac{x^2}{2} - x + C.$$

□

(x)

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx,$$

(xi)

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx,$$

Megoldás. *A nevezőben szereplő $Q(x) = x^2 - 1$ másodfokú polinomnak kell először meghatároznunk a gyökeit.*

$$\begin{aligned} Q(x) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1, \end{aligned}$$

azaz, a Q polinomnak két darab, egyszeres multiplicitású, valós gyöke van, mégpedig $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$. Így a Q polinom gyöktényezős alakja

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Így, keresendőek azok (az egyértelműen meghatározott) A, B valós számok, melyekre

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Ezeket egy együtthatókat úgy tudjuk meghatározni, hogy közös nevezőre hozunk és egyeztetjük mindkét oldalon az együtthatókat.

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(x-1)\ B + (x+1)\ A}{(x-1)(x+1)} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\right),$$

vagyis

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - B &= 2. \end{aligned}$$

Ennek az inhomogén lineáris egyenletrendszernek létezik egy egyértelműen meghatározott megoldása, mégpedig

$$A = \frac{3}{2} \qquad B = -\frac{1}{2},$$

ezért

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} dx = \frac{3}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C.$$

□

(xii)

$$\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}dx,$$

Megoldás. *A nevezőben szereplő $Q(x) = x^2 - x - 6$ másodfokú polinomnak kell először meghatároznunk a gyökeit.*

$$\begin{aligned} Q(x) &= 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ x_1 &= 3, \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

azaz, a Q polinomnak két darab, egyszeres multiplicitású, valós gyöke van, mégpedig $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$. Így a Q polinom gyöktényezős alakja

$$Q(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Így, keresendőek azok (az egyértelműen meghatározott) A, B valós számok, melyekre

$$\frac{3x-4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Ezeket egy együtthatókat úgy tudjuk meghatározni, hogy közös nevezőre hozunk és egyeztetjük mindkét oldalon az együtthatókat.

$$\frac{3x-4}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(x-3)\ B + (x+2)\ A}{(x-3)(x+2)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}),$$

vagyis

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 2A - 3B &= 4. \end{aligned}$$

Ennek az inhomogén lineáris egyenletrendszernek létezik egy egyértelműen meghatározott megoldása, mégpedig

$$A = 1 \qquad B = 2,$$

ezért

$$\frac{3x-4}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3} + 2\frac{1}{x+2}.$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{3x-4}{x^2-x-6}dx = \int \frac{1}{x-3} + 2\frac{1}{x+2}dx = \ln(|x-3|) + 2\ln(|x+2|) + C.$$

□

3. Feladat. *A parciális törtekre bontás tételének felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx,$$

Megoldás. *A nevezőben szereplő $Q(x) = (x-3)(x+2)^2$ harmadfokú polinomnak kell először meghatároznunk a gyökeit.*

$$\begin{aligned} Q(x) &= 0 \\ (x-3)(x+2)^2 &= 0 \\ x_1 &= 3, \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

azaz, a Q polinomnak két darab valós gyöke van, mégpedig $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$. Az x_1 egyszeres, míg az x_2 egy kétszeres multiplicitású gyök. Így a Q polinom gyöktényezős alakja

$$Q(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)^2.$$

Így, keresendőek azok (az egyértelműen meghatározott) A, B és C valós számok, melyekre

$$\frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Ezeket egy együtthatókat úgy tudjuk meghatározni, hogy közös nevezőre hozunk és egyeztetjük mindkét oldalon az együtthatókat.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2} &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)}{(x-3)(x+2)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (4A-B+C)x + (4A-6B+C)x + (4A-6B-3C)}{(x-3)(x+2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{3,-2\}),\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ 4A-B+C &= 0 \\ 4A-6B-3C &= 0 \end{aligned}$$

Ennek az inhomogén lineáris egyenletrendszernek létezik egy egyértelműen meghatározott megoldása, mégpedig

$$A = \frac{9}{25} \qquad B = \frac{16}{25} \qquad \text{és} \qquad C = -\frac{4}{5}$$

ezért

$$\frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{16}{25\ (x+2)} - \frac{4}{5\ (x+2)^2} + \frac{9}{25\ (x-3)}.$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx &= \int \frac{16}{25\ (x+2)} - \frac{4}{5\ (x+2)^2} + \frac{9}{25\ (x-3)}dx \\ &= \frac{16\ \ln(|x+2|)}{25} + \frac{9\ \ln(|x-3|)}{25} + \frac{4}{5\ (x+2)} + C.\end{aligned}$$

□

(ii)

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx,$$

Útmutatás. *Használjuk, hogy*

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3\ (x+1)} - \frac{x-2}{3\ (x^2-x+1)},$$

amiből

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{3\ (x+1)} - \frac{x-2}{3\ (x^2-x+1)}dx = \frac{\ln(|x+1|)}{3} - \frac{\frac{\ln\left(|x^2-x+1|\right)}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{3} + C.$$

□

(iii)

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx,$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$$

határozatlan integrált. Az előzőek szerint, keresendőek azok A és B valós számok, melyekre

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)},$$

azaz,

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -5\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 5A - 2B = 3 \end{cases}$$

Ennek az egyenlet megoldása $A = 1$ és $B = 1$, ezért

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}$$

Mindebből,

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}dx = \ln(|x+5|) + \ln(|x-2|) + C.$$

adódik. □

(iv)

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx,$$

Útmutatás. *Használjuk, hogy*

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{3}{2\ (x+3)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2\ (x+1)},$$

ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx &= \int -\frac{3}{2\ (x+3)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2\ (x+1)}dx \\ &= -\frac{3\ \ln(|x+3|)}{2} + 2\ \ln(|x+2|) - \frac{\ln(|x+1|)}{2} + C. \end{aligned}$$

□

(v)

$$\int \frac{1}{x^2-x+2}dx,$$

Ebben az esetben a nevezőben lévő polinomnak mindkét gyöke komplex szám, ugyanis

$$x^2-x+2=0 \qquad \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2},$$

így a nevezőt először teljes négyzetté fogjuk alakítani.

$$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4},$$

így

$$\frac{1}{x^2-x+2}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}.$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó kifejezést már tudjuk integrálni, ha alkalmazzuk a

$$t=g^{-1}(x)=\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$$

helyettesítést. Ezért

$$\int\frac{1}{x^2-x+2}dx=\int\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx=\frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}+C.$$

(vi)

$$\int\frac{1}{(x-2)(x+4)}dx,$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$\int\frac{1}{(x-2)(x+4)}dx$$

határozatlan integrált. Az előzőek szerint, keresendőek azok A és B valós számok, melyekre

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)}=\frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$

azaz,

$$1=A(x+4)+B(x-2)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-4\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases}A+B=0\\4A-2B=1\end{cases}$$

Ennek az egyenlet megoldása $A=\dfrac{1}{6}$ és $B=-\dfrac{1}{6}$, ezért

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)}=\frac{1}{6\,(x-2)}-\frac{1}{6\,(x+4)}$$

Mindebből,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}dx = \int \frac{1}{6\ (x-2)} - \frac{1}{6\ (x+4)}dx = \frac{1}{6}\ln(|x-2|) - \frac{1}{6}\ln(|x+4|) + C.$$

adódik. □

(vii)

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx,$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx$$

határozatlan integrált. Ebben az esetben a nevezőben lévő harmadfokú polinomnak egyetlen, háromszoros multiplicitású gyöke van, mégpedig az $x_1 = -2$. Ezért most keresendőek azok A, B és C valós számok, melyekre

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-2) + C}{(x+2)^3},$$

azaz,

$$1 = Ax^2 + (4A+B)x + (4A+2B+C)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,-5\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} A = 3 \\ 4A + B = 4 \\ 4A + 2B + C = -6 \end{cases}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $A = 3$, $B = -8$ és $C = 2$, ezért

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3}$$

Mindebből,

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx = \int \frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3}dx = 3\ \ln(|x+2|) + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + C.$$

adódik. □

(viii)

$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}dx,$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}dx$$

határozatlan integrált. Ebben az esetben a nevezőben lévő harmadfokú polinomnak egyetlen, egyszeres multiplicitású gyöke van (az $x_1 = 1$), és egy további, kétszeres multiplicitású valós gyöke ($x_2 = 3$).

Ezért most keresendőek azok A, B és C valós számok, melyekre

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B(x-1)(x-3) + C(x-1)}{(x-1)(x-3)^2},$$

azaz,

$$5x-3 = (A+B)x^2 + (-6A-4B+C)x + (9A+3B-C)$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A és B megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ -6A-4B+C = 5 \\ 9A+3B-C = -3 \end{cases}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $A = 1$, $B = -1$ és $C = 6$, ezért

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x-3)} + \frac{6}{(x-3)^2}$$

Mindebből,

$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}dx = \int \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{1}{2\,(x-3)} + \frac{6}{(x-3)^2}dx$$
$$\frac{\ln(|x-1|)}{2} - \frac{\ln(|x-3|)}{2} - \frac{6}{x-3} + C$$

adódik. □

(ix)

$$\int \frac{5}{x(x^2+4)}dx,$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$\int \frac{5}{x(x^2+4)}dx$$

határozatlan integrált. Ebben az esetben a nevezőben lévő harmadfokú polinomnak egyetlen, egyszeres multiplicitású gyöke van (az $x_1 = 0$), és két egyszeres multiplicitású komplex gyöke ($x_2 = \pm 2i$).

Ezért most keresendőek azok A, B és C valós számok, melyekre

$$\frac{5}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

teljesül. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{5}{x(x^2+4)} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)},$$

azaz,

$$5 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

kell, hogy teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha A, B és C megoldása az alábbi egyenletrendszernek,

$$\begin{cases} (A+B) & = 0 \\ C & = 0 \\ 4A & = 5 \end{cases}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $A = \frac{5}{4}$, $B = -\frac{5}{4}$ *és* $C = 0$, *ezért*

$$\frac{5}{x(x^2+4)} = \frac{5}{4}\frac{1}{x} - \frac{5}{4}\frac{x}{x^2+4}$$

Mindebből,

$$\int \frac{5}{x(x^2+4)}dx = \int \frac{5}{4}\frac{1}{x} - \frac{5}{4}\frac{x}{x^2+4}dx = \frac{5\,\ln(|x|)}{4} - \frac{5\,\ln\left(|x^2+4|\right)}{8} + C$$

adódik. □

(x)

$$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx,$$

Megoldás. *Használjuk azt, hogy*

$$\frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} = \frac{7}{15\,(x+2)} - \frac{14}{5\,(x-3)} + \frac{7}{3\,(x-4)},$$

ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}dx &= \int \frac{7}{15\,(x+2)} - \frac{14}{5\,(x-3)} + \frac{7}{3\,(x-4)}dx \\ &= \frac{7\,\ln\left(|x+2|\right)}{15} - \frac{14\,\ln\left(|x-3|\right)}{5} + \frac{7\,\ln\left(|x-4|\right)}{3} + C.\end{aligned}$$

□

(xi)

$$\int \frac{2x^2}{x^4-1}dx$$

Megoldás. *Használjuk egyfelől azt, hogy*

$$x^4 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{1,2} = \pm 1 \quad \text{és} \quad x_{3,4} = \pm i,$$

ezért a nevező gyöktényezős alakja

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Így, ebben az esetben keresendőek azok az egyértelműen meghatározott A, B, C és D valós számok, melyekre

$$\frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)}{x^4-1}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ esetén, azaz,

$$\begin{cases} A+B+C & = 0 \\ A-B+C+D & = 2 \\ A+B-C & = 0 \\ A-B-C-D & = 0 \end{cases}$$

Ennek az egyenletnek az egyértelműen meghatározott megoldása $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$ és $D = 1$, ezért

$$\frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2\,(x-1)},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x^2}{x^4-1}dx = \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2\,(x-1)}dx$$

$$\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + C.$$

□

4. Feladat. *A $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x)$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

Miért vezet célra a $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x)$ helyettesítés?

Legyen

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x).$$

Ekkor

$$x = 2\operatorname{arctg}(t) = g(t) \quad \text{és} \quad g'(t) = \frac{2}{t^2+1}.$$

Egyelőre nem világos azonban, hogy mennyivel egyenlő $\sin(2\operatorname{arctg}(t))$, illetve $\cos(2\operatorname{arctg}(t))$. Ehhez idézzünk fel néhány trigonometrikus azonosságot.

$$\sin(x) = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} \overset{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{2t}{t^2+1}$$

hasonlóan

$$\cos(x) = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \overset{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{1-t^2}{t^2+1},$$

ami mutatja, hogy ha egy $R(\sin(x), \cos(x))$ alakú kifejezésben elvégezzük a fenti helyettesítést, akkor egy racionális törtfüggvényt kapunk.

(i)

$$\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$

Megoldás. Alkalmazzuk a fenti helyettesítést, azaz, legyen

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x),$$

vagyis,

$$x = 2\mathrm{arctg}(t) = g(t) \quad \text{és} \quad g'(t) = \frac{2}{t^2+1}.$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= \int f(x)dx \\
&= \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{1+\frac{2t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= \int \frac{t^2+2t+1}{t^2+1}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int 1+\frac{2t}{t^2+1}\Big|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= t+\ln\left(\left|t^2+1\right|\right)+C\Big|_{t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}+C \\
&= \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(\left|\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|\right)+C.
\end{aligned}$$

□

(ii)

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$$

Megoldás. Alkalmazzuk a fenti helyettesítést, azaz, legyen

$$t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x),$$

vagyis,

$$x = 2\mathrm{arctg}(t) = g(t) \quad \text{és} \quad g'(t) = \frac{2}{t^2+1}.$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} &= \int \frac{2}{(t^2+1)\left(\frac{1-t^2}{t^2+1}+1\right)}dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= \int 1dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = t\Big|_{t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}+C = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

□

(iii)

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx$$

Megoldás. Alkalmazzuk a fenti helyettesítést, azaz, legyen

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = g^{-1}(x),$$

vagyis,

$$x = 2\operatorname{arctg}(t) = g(t) \quad \text{és} \quad g'(t) = \frac{2}{t^2+1}.$$

Ebben az esetben

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{2}{(t^2+1)\left(\frac{2t}{t^2+1}+1\right)}dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \int \frac{2}{(t+1)^2}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = -\frac{2}{t+1}\Big|_{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1} + C.$$

□

(iv)

$$\int \frac{4}{5+6\cos(x)}dx$$

(v)

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}dx$$

(vi)

$$\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg}(x)}dx$$

5. Feladat. *A $t = e^x = g^{-1}(x)$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}dx$$

Megoldás. A megoldás során a

$$t = e^x = g^{-1}(x),$$

azaz az

$$x = g(t) = \ln(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

helyettesítést fogjuk alkalmazni. Ebben az esetben

$$\int \frac{4}{e^{2x}-4}dx = \int \frac{4}{(e^x)^2-4}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{4}{t^2-4}\cdot\frac{1}{t}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \frac{1}{2\ (t+2)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2\ (t-2)}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \frac{\ln(|t+2|)}{2} - \log|t| + \frac{\log(|t-2|)}{2}\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$$= \frac{\ln(|e^x+2|)}{2} - \ln|e^x| + \frac{\ln(|e^x-2|)}{2} + C.$$

□

(ii)
$$\int \frac{5}{e^{2x}+1}dx$$

(iii)
$$\int \frac{e^{3x}}{e^{x}+2}dx$$

Megoldás. A megoldás során a
$$t = e^x = g^{-1}(x),$$
azaz az
$$x = g(t) = \ln(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$
helyettesítést fogjuk alkalmazni. Ebben az esetben
$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx = \int \frac{(e^x)^3}{e^x+2}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{t^3}{t+2}\cdot\frac{1}{t}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \\ = \frac{4}{t+2} + t - 2dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = 4\,\ln\left(|t+2|\right) + \frac{t^2}{2} - 2\,t\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C \\ = 4\,\ln\left(|e^x+2|\right) + \frac{e^{2x}}{2} - 2\,e^x + C.\end{aligned}$$
□

(iv)
$$\int \frac{e^{x}}{e^{-x}+2}dx$$

(v)
$$\int \frac{e^{x}}{(e^{x}+2)^2}dx$$

Megoldás. A megoldás során a
$$t = e^x = g^{-1}(x),$$
azaz az
$$x = g(t) = \ln(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$
helyettesítést fogjuk alkalmazni. Ebben az esetben
$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x}}{(e^x+2)^2}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{t}{(t+2)^2}\cdot\frac{1}{t}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \\ = \int \frac{1}{(t+2)^2}\Big|_{t=g^{-1}(x)} = -\frac{1}{t+2}\Big|_{t=g^{-1}(x)} = -\frac{1}{e^x+2} + C.\end{aligned}$$
□

(vi)
$$\int \frac{e^{x}+4}{e^{2x}+4e^x+3}dx$$

Megoldás. A megoldás során a

$$t = e^x = g^{-1}(x),$$

azaz az

$$x = g(t) = \ln(t) \qquad \text{és} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

helyettesítést fogjuk alkalmazni. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}dx &= \int \frac{e^x+4}{(e^x)^2+4e^x+3}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\bigg|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= \int \frac{t+4}{t^2+4t+3}\cdot\frac{1}{t}dt\bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{1}{6\,(t+3)} - \frac{3}{2\,(t+1)} + \frac{4}{3\,t}dt\bigg|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= \frac{\ln(|t+3|)}{6} - \frac{3\,\ln(|t+1|)}{2} + \frac{4\,\ln|t|}{3}\bigg|_{t=g^{-1}(x)} + C \\
&= \frac{\ln(|e^x+3|)}{6} - \frac{3\,\ln(|e^x+1|)}{2} + \frac{4\,\ln|e^x|}{3} + C.
\end{aligned}$$

□

(vii)

$$\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x(e^{2x}+7e^x+6)}dx$$

6. Feladat. *A $t = \sqrt[n]{ax+b} = g^{-1}(x)$ helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit.*

(i)

$$\int x\sqrt{5x+3}dx$$

Megoldás. *Legyen*

$$t = \sqrt{5x+3} = g^{-1}(x) \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{t^2-3}{5} = g(t).$$

Ekkor

$$g'(t) = \frac{2}{5}t,$$

valamint

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{5x+3}dx &= \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{t^2-3}{5}t\cdot\frac{2}{5}t\bigg|_{t=g^{-1}(x)} \\
&= \int \frac{2t^4-6t^2}{25}\bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \frac{2\,t^5-10\,t^3}{125}\bigg|_{t=g^{-1}(x)} + C = \frac{2\,\left(\sqrt{5x+3}\right)^5 - 10\,\left(\sqrt{5x+3}\right)^3}{125} + C.
\end{aligned}$$

□

(ii)

$$\int (3x+6)\sqrt{2x-4}dx$$

(iii)

$$\int (x^2-2x+3)\sqrt{2x-1}dx$$

Megoldás. *Legyen*

$$t = \sqrt{2x-1} = g^{-1}(x) \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{t^2+1}{2} = g(t).$$

Ekkor

$$g'(t) = t,$$

valamint

$$\int (x^2-2x+3)\sqrt{2x-1}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \int t^2\left(\frac{(t^2+1)^2}{4} - t^2 + 2\right)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{t^6}{4} - \frac{t^4}{2} + \frac{9\,t^2}{4}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \frac{t^7}{28} - \frac{t^5}{10} + \frac{3\,t^3}{4}\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^7}{28} - \frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{10} + \frac{3\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{4} + C.$$

□

(iv)

$$\int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3}dx$$

(v)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}dx$$

Megoldás. *Legyen*

$$t = \sqrt{6x+4} = g^{-1}(x) \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{t^2-4}{6} = g(t).$$

Ekkor

$$g'(t) = \frac{1}{3}t,$$

valamint

$$\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \int \frac{2\frac{t^2-4}{6}}{t}\cdot\frac{1}{3}tdt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \int t^2 - 4dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \frac{t^3}{3} - 4t\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6x+4}\right)^3}{3} - 4\sqrt{6x+4} + C.$$

□

(vi)

$$\int x\sqrt[4]{5x+3}dx$$

(vii)

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}dx$$

Megoldás. *Legyen*

$$t = \sqrt[3]{6x-4} = g^{-1}(x) \qquad azaz \qquad x = \frac{t^3+4}{6} = g(t).$$

Ekkor

$$g'(t) = \frac{1}{2}t^2,$$

valamint

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}dx = \int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \int \frac{3\left(\frac{t^3+4}{6}\right)^2+2}{t} \cdot \frac{1}{2}t^2dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)} = \int \frac{t^7}{24} + \frac{t^4}{3} + \frac{5\,t}{3}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \frac{t^8}{192} + \frac{t^5}{15} + \frac{5\,t^2}{6}\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{6x-4}\right)^8}{192} + \frac{\left(\sqrt[3]{6x-4}\right)^5}{15} + \frac{5\,\left(\sqrt[3]{6x-4}\right)^2}{6} + C.$$

□