Határozatlan integrál II.

A helyettesítéses integrálás tétele

Elméleti áttekintés

1. Tétel (A helyettesítéses integrálás tétele). *Ha* $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$*,* $g\ :]c,d[\to\mathbb{R}$ *olyan függvények, melyek esetén létezik* $g'\ :]c,d[\to]a,b[$ *és létezik* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ *is, akkor létezik* $\int (f\circ g)(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ *is, és van olyan* $C\in\mathbb{R}$*, hogy*

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\left(\int f\right)\circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)} + C. \quad (x\in]c,d[)$$

Továbbá, ha a g függvény invertálható, akkor

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C. \qquad (x\in]a,b[)$$

2. Tétel. *Legyen* $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ *differenciálható* $]a,b[$*-n,* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$*, ekkor* $f^{\alpha}\cdot f'$ *függvénynek létezik a primitív függvénye* $]a,b[$*-n és*

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \qquad (x\in]a,b[)$$

teljesül valamely $C\in\mathbb{R}$ *konstanssal.*

3. Tétel. *Ha* $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n,* $f(x)\neq 0$ $(x\in[a,b])$*,* f *differenciálható* $]a,b[$*-n, akkor az* $\dfrac{f'}{f}$ *függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$*, hogy*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C. \qquad (x\in]a,b[)$$

4. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény,* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*,* $\alpha\neq 0$ *tetszőlegesek. Ha létezik* $\int f$*, akkor létezik* $\int f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x$ *is, és létezik olyan* $C\in\mathbb{R}$ *konstans, hogy*

$$\int f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C, \quad (x\in\mathbb{R})$$

ahol F jelöli az f függvény primitív függvényét.

Feladatok

1. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit a 4. Tétel segítségével.*

(i)
$$\int (3x+2)^3\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int (5x-4)^5\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \sqrt[4]{7x-16}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \frac{1}{(-3x+4)^4}\,\mathrm{d}x$$

(v)
$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x,$$

(vi)
$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x,$$

(vii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,\mathrm{d}x,$$

(viii)
$$\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

(ix)
$$\int e^{5x+4}\,\mathrm{d}x,$$

(x)
$$\int \frac{2}{3}e^{3x-2}\,\mathrm{d}x,$$

(xi)
$$\int 3^{4x-7}\,\mathrm{d}x,$$

(xii)
$$\int 5^{2-3x}\,\mathrm{d}x,$$

(xiii)
$$\int \sin\left(6x+4\right)\,\mathrm{d}x,$$

(xiv)
$$\int \cos\left(-4-5x\right)\,\mathrm{d}x,$$

(xv)
$$\int \frac{1}{\sin^2\left(3x+2\right)}\,\mathrm{d}x,$$

(xvi)
$$\int \sinh\left(2-7x\right)\,\mathrm{d}x$$

2. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit a 2. Tétel segítségével.*

(i)
$$\int x^2(2x^3+4)^2\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int (2x^3+4)^5x^2\,\mathrm{d}x$$

(v)
$$\int x^2\sqrt{6x^3+1}\,\mathrm{d}x,$$

(vi)
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x,$$

(vii)
$$\int \frac{5x^2}{\sqrt[3]{3x^3+18}}\,\mathrm{d}x,$$

(viii)
$$\int e^x\sqrt{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$

(ix)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(x)
$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xi)
$$\int \frac{x}{3-2x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xii)
$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

(xiii)
$$\int \frac{\ln^5(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(xiv)
$$\int \sin^5(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

(xv)
$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

(xvi)
$$\int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

(xvii)
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\sqrt[4]{\mathrm{ctg}(x)}}\,\mathrm{d}x$$

3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit a 3. Tétel segítségével.*

(i)
$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{1}{x\ln(x)\ln\left(\ln(x)\right)}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \frac{2x}{x^2+7}\,\mathrm{d}x$$

(v)
$$\int \frac{5x^2}{x^3+4}\,\mathrm{d}x,$$

(vi)
$$\int \frac{4\sin(x)}{5\cos(x)+4}\,\mathrm{d}x,$$

(vii)
$$\int \frac{5\sin\left(2x\right)}{\sin^2(x)+12\pi}\,\mathrm{d}x,$$

(viii)
$$\int \frac{-\sin\left(2x\right)}{5+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(ix)
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\mathrm{tg}(x)}\,\mathrm{d}x,$$

(x)
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\mathrm{ctg}(x)}\,\mathrm{d}x,$$

(xi)
$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$$

(xii)
$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x,$$

(xiii)
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,\mathrm{d}x$$

4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit az 1. Tétel segítségével.*

(i)
$$\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int (3x^2+2)\sin(x^3+2x-4)\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \frac{1}{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x,\ (\alpha \neq 0)$$

(v)
$$\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x,$$

(vi)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x,$$

(vii)
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x,$$

(viii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x,$$

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit az 1. Tétel segítségével.*

(i)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{1}{\sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}}\,\mathrm{d}x$$

(iv)
$$\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(v)
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+25x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

(vi)
$$\int \frac{1}{\sqrt{114x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

(vii)
$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(viii)
$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(ix)
$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

(x)
$$\int \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xi)
$$\int \sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xii)
$$\int \sqrt{\beta^2x^2-\alpha^2}\,\mathrm{d}x$$

(xiii)
$$\int \sqrt{36-49x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xiv)
$$\int \sqrt{1+9x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(xv)
$$\int \sqrt{169x^2-114}\,\mathrm{d}x$$

Nehezebb feladatok

6. Feladat. *Legyen R egy racionális törtfüggvény, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ pedig összemérhető valós számok (ez azt jelenti, hogy közülük bármely kettőnek a hányadosa racionális szám). Igazoljuk, hogy az $\int R\left(e^{\alpha_1 x},\dots,e^{\alpha_n x}\right)\,\mathrm{d}x$ integrál elemi függvényt állít elő. Dolgozzunk ki módszert az integrál meghatározására.*

7. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat.*

(i)
$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \, \mathrm{d}x$$

(ii)
$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

(iii)
$$\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} \, \mathrm{d}x$$

(iv)
$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} \, \mathrm{d}x$$

(v)
$$\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} \, \mathrm{d}x$$

(vi)
$$\int x^3 \ln^3(x) \, \mathrm{d}x$$

(vii)
$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^3 \mathrm{d}x$$

(viii)
$$\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

8. Feladat. *Legyen* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *egy kétszer folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg az* $\int x f''(x) \, \mathrm{d}x$ *és az* $\int f'(2x) \, \mathrm{d}x$ *integrálokat.*

9. Feladat. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres, nyílt intervallum,* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *pedig egy szigorúan monoton, folytonos függvény, melynek primitív függvényét jelölje* F. *Mutassuk meg, hogy ekkor*

$$\int f^{-1}(x) \, \mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + C$$

teljesül. Először bizonyítsuk a fenti formulát az alábbi speciális esetekre

(i) $f(x) = x^\alpha \; (\alpha > 0)$

(ii) $f(x) = \arcsin(x)$

(iii) $f(x) = e^x$

(iv) $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$.

10. Feladat. *Legyenek n és m adott pozitív egészek. Írjunk fel rekurziós formulát az*

$$\int \sin^n(x) \cos^m(x) \, \mathrm{d}x$$

alakú integrálokra.

11. Feladat. *Határozzuk meg az* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *függvényt, ha minden* $x \in I$ *esetén*

(i)
$$f'(x^2) = \frac{1}{x}$$

(ii)
$$f'(\sin^2(x)) = \cos^2(x)$$

teljesül.

12. Feladat. *Határozzuk meg az* $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ *integrálokat, ha*

(i)
$$f(x) = [x] \cdot |\sin(\pi x)| \; (x > 0)$$

(ii)
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \textit{ha } |x| \leqslant 1 \\ 1 - |x|, & \textit{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

(iii)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } x < 0 \\ x + 1, & \textit{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x, & \textit{ha } 1 < x. \end{cases}$$