# Grupos modulares de superficies no orientables
# Ejercicios

Luis Paris

**Ejercicio 1.**

(1) Calcular la caraterística de Euler de una superficie orientable de género $g$ y de una superficie no orientable de genero $g$.

(2) ¿Cuál es la característica de Euler de una suma conexa de superficies?

(3) Sea $p : \tilde{M} \to M$ un recubrimento entre dos superficies. Determinar la característica de Euler de $M$ en función del número de hojas de $p$ y de la característica de Euler de $M$.

**Ejercicio 2.** Sea $N$ una superficie no orientabe y conexa. Mostrar que existe un unico cubriente con dos hojas $p : M \to N$ tal que $M$ es orientable.

**Ejercicio 3.** Mostrar que la suma conexa de una superficie orientable de genero $g_1$ y de una superficie no orientable de genero $g_2$ es una superficie no orientable de genero $2g_1 + g_2$.

**Ejercicio 4.** Sean $a_1, \dots, a_p$ y $b_1, \dots b_p$ dos colecciones de círuclos esenciales en una superficie $M$ tales que:

(a) $a_i$ y $a_j$ no son homótopos, y $b_i$ y $b_j$ no son homótopas, para todo $i \neq j$.

(b) $a_i$ es homotopa a $b_i$ para toda $i$.

Mostrar que existe una isotopía $H : M \times [0,1] \to M$ tal que $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_1(a_i) = b_i$ para todo $i$, donde $h_0(x) = H(x, 0)$ y $h_1(x) = H(x, 1)$ para toda $x \in M$.

**Ejercicio 5.** Sean $\alpha, \beta$ dos clases de isotopía de círculos. *El índice de intersección* de $\alpha$ y $\beta$ es $i(\alpha, \beta) = \min\{|a \cap b| \mid a \in \alpha, b \in \beta\}$. Suponemos que $\alpha \neq \beta$ y tomamos $a \in \alpha$, $b \in \beta$. Mostrar que $i(\alpha, \beta) = |a \cap b|$ si y solamente si $a$ y $b$ no bordean un bígono.

**Ejercicio 6.** Sean $a$ y $b$ dos círculos, con dos lados, en una superficie $M$ y $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Supongamos que $M$ es orientable. Mostrar que $i(t_a^n(b), b) = |n| i(a, b)^2$.

(2) Supongamos que $M$ es no orientable de género $g \geq 3$. Mostrar que podemos escoger $a, b$ y $n$ de tal manera que $i(t_a^n(b), b) \neq |n| i(a, b)^2$.

(3) Supongamos que $M$ es no orientable de genero $g \geq 3$ et $n \neq 0$. Mostrar que $i(t_a^n(b), b) \geq i(a, b)$.

**Ejercicio 7.** Sea $M$ una superficie. Supongamos que $M$ es de género $g \geq 1$ si $M$ es es orientable y de género $g \geq 3$ y sea $a$ un círculo esencial. Mostrar que $t_a$ est de orden infinito.

**Ejercicio 8a.** Supongamos que $M$ es una superficie orientable. $Diff^+$ el grupo de todos los difeomorfismos de la superficie y $Diff_0^+$ el subconjunto de difeomorfismos isótopos a la identidad. Mostrar que $Diff_0^+$ es un subgrupo normal de $Diff^+$.

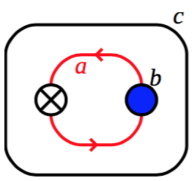
**Ejercicio 8b.** Supongamos que $M$ es una superficie no orientable. Mostrar que $\mathcal{M}(M)$ no está generada por los giros de Dehn. (Observación: Si $M$ es orientable, entonces $\mathcal{M}(M)$ está generada por los giros de Dehn).

**Exercice 9.** Sea $M$ sua superficie, $b$ una componente de borde de $M$ y $a$ un arco tal que $a(0), a(1) \in b$. Suponemos que una vecindad regular $\Sigma$ de $b \cup a$ es una superficie orientable de género 0 con 3 componententes de borde. Denotamos $c_1, c_2$ las dos componentes de borde de $\Sigma$ diferentes de $b$. Mostrar que $s_{a,b} = t_{c_1}^{-1} t_{c_2}$.

**Ejercicio 10.** Sea $M$ una superficie no orientable y $b$ un círculo de $M$ que bordea una cinta de Möbius. Mostrar que que $t_a = 1$.

**Ejercicio 11.** Sea $C = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ el cilindro y $t \in \mathcal{M}(C, \partial C)$ el giro de Dehn estándar. Mostrar que $\mathcal{M}(C, \partial C)$ es un grupo ciclico infinito generado por $t$.

**Ejercicio 12.** Supongamos que $N = N_{1,2}$ es la cinta de Möbius con un hoyo. Nos fijamos en su componente de borde $c$ de $N_{1,2}$ y denotamos por $b$ a la otra componente de borde. Sean $s_{a,b} \in \mathcal{M}(N_{1,2}, c)$ la "boundary slide" de $b$ a lo largo del arco $a$ está represenatdo en la siguiente figura. Mostrar que $s_{a,b}^2 = t_c$, donde $t_c$ representa el giro de Dehn a lo largo de una curva al interior de $N_{1,2}$ isotopo a $c$.




**Ejercicio 13.** Sea $M$ una superficie no orientable de genero $g$ con $n$ componentes de borde. Soit $\mathcal{A}$ un simplejo de $\mathcal{C}(M)$ y $A$ un sistema de representantes dmisibles de $\mathcal{A}$. Denotamos $M^0$ la compactifiación natural de $M \setminus (\cup_{a \in A} a)$. Mostrar que $\mathcal{A}$ es máximo si y solamente si todas las componentes de $M^0$ son pantalones (supeficies de género 0 con tres componentes de borde). Cuál es la dimensión máxima de un simplejo de $\mathcal{C}(M)$ ? Mostrar que existen simplejos máximos que no son de dimensión máxima.

**Ejercicio 14.** Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M)$ un simplejo y $\Lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M) \to \mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$ el homomorfismo de reducción a lo largo de $\mathcal{A}$. Mostrar que $t_\alpha \in \mathrm{Ker}(\Lambda_{\mathcal{A}})$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.

**Ejercicio 15.** Sean $N$ una surperficie conexa compacta no orientable con o sin borde y sea $p : M \to N$ el único recubriemento doble con $M$ orientable. Sea $J : M \to M$ la única traslación no trivial del recubrimiento $p : M \to N$ et $F \in \mathrm{Homeo}(N)$. Mostrar que $F$ tiene dos levantamientos en $M$, uno que preserva la orientación y otro que invierte la orientación.