Mapping class grupos de superficies no orientables

Luis Paris

Abstract

Notas de un curso de 6 horas dado en Oaxaca en junio del 2019.

1 Definición de mapping class grupo

Definición. Sea M una superficie. M es compacta pero no necesariamente conexa y puede ser orientada o no y tener borde. Consideramos una reunión B de componentes de ∂M. Denotamos $\mathrm{Homeo}(M, B)$ el grupo de homeomorfismos $h : M \to M$ que son la identidad en B. El grupo $\mathrm{Homeo}(M, B)$ viene dotado con la *topología compacto-abierto*. Recordemos que esta topología se define como sigue. Sean K un compacto y U un abierto de M. Ponemos $\Delta(K, U) = \{h \in \mathrm{Homeo}(M, B) \mid h(K) \subset U\}$. Entonces el conjunto de los $\Delta(K, U)$ forma una base de abiertos para la topología de $\mathrm{Homeo}(M, B)$.

Teorema. *El grupo* $\mathrm{Homeo}(M, B)$ *es localmente conexo por arcos.*

Definición. Se dice que dos homeomorfismos $f, g \in \mathrm{Homeo}(M, B)$ son *isotopos* si están en la misma componente conexa de $\mathrm{Homeo}(M, B)$. Denotamos $\mathrm{Homeo}_0(M, B)$ la componente conexa de $\mathrm{Homeo}(M, B)$ que contiene la identidad. El *mapping class grupo* de M relativamente a B es el grupo cociente $\mathcal{M}(M, B) = \mathrm{Homeo}(M, B)/\mathrm{Homeo}_0(M, B)$. En otras palabras, $\mathcal{M}(M, B)$ es el grupo formado por las clases de isotopía de los elementos de $\mathrm{Homeo}(M, B)$. Es un grupo discreto.

Nota. Si M es orientable, denotamos $\mathrm{Homeo}^+(M, B)$ el subgrupo de $\mathrm{Homeo}(M, B)$ formado por los elementos $f \in \mathrm{Homeo}(M, B)$ que preservan la orientación, y denotamos por $\mathcal{M}^+(M, B)$ el subgrupo de $\mathcal{M}(M, B)$ formado por las clases de isotopía de elementos de $\mathrm{Homeo}^+(M, B)$. Si $B = \emptyset$, entonces $\mathcal{M}^+(M, B)$ es un subgrupo de indice dos de $\mathcal{M}(M, B)$, y si $B \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{M}^+(M, B) = \mathcal{M}(M, B)$. En general, en la literatura, es $\mathcal{M}^+(M, B)$ que se llama mapping class grupo, y $\mathcal{M}(M, B)$ se llama mapping class grupo extendido.

2 Representación gráfica de las superficies

Definición. Sean M_1 y M_2 dos superficies. Tomamos dos discos cerrados D_1 encajado en M_1 y D_2 encajado en M_2. Denotamos D_1^o (resp. D_2^o) el interior de D_1 (resp. D_2) y ∂D_1 (resp. ∂D_2) su borde. Sean $M_1' = M_1 \setminus D_1^o$ y $M_2' = M_2 \setminus D_2^o$. Denotamos $M = M_1 \# M_2$ la superficie obtenida a partir de M_1' y M_2' identificando ∂D_1 y ∂D_2. Esta superficie se llama la *suma conexa* de M_1 y M_2.

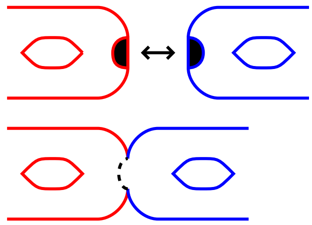


Figura 1. Suma conexa de dos superficies

Teorema.

(1) Sea M una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde. O M es una esfera, o existe $g \geq 1$ tal que M es la suma conexa de g toros.

(2) Sea M una superficie compacta, conexa, orientable, y con n componentes de borde, $n \geq 1$. Existe una superficie $\bar{M}$ compacta, conexa, orientable y sin borde, y n discos $D_1, \ldots, D_n$ encajados en $\bar{M}$ tales que $M = \bar{M} \setminus \cup_{i=1}^n D_i^o$.

Definición. Sea M una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde. Se dice que M es de *genero* 0 si M es una esfera y que M es de *genero* g si M es la suma conexa de g toros. Sea M una superficie compacta, conexa, orientable y con borde. Sea $\bar{M}$ la superficie sin borde tal que $M = \bar{M} \setminus \cup_{i=1}^n D_i^o$. Entonces el *genero* de M es el genero de $\bar{M}$.

Representación gráfica. Se representa una superficie orientable de genero g con n componentes de borde como el la figura siguiente.

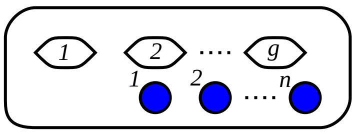


Figura 2. Superficie de genero g con n componentes de borde

Definición. Recordar que la esfera estándar es $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. El *plano proyectivo* es $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por

$$x \sim y \iff y = \pm x\,.$$

Note que $\mathbb{P}^2$ es una superficie no orientable.

Teorema.

(1) Sea M una superficie compacta, conexa, no orientable y sin borde. Entonces existe $g \geq 1$ tal que M es la suma conexa de g planos proyectivos.

(2) Sea M una superficie compacta, conexa, no orientable, y con borde. Entonces existe una superficie compacta, conexa, no orientable y sin borde, $\bar{M}$, y discos $D_1, \ldots, D_n$ encajados en $\bar{M}$ y dos a dos disjuntos, tales que $M = \bar{M} \setminus \cup_{i=1}^n D_i^o$.

Definición. Sea M una superficie compacta, conexa, no orientable y sin borde. Se dice que M es de *genero* g si M es la suma conexa de g planos proyectivos. Sea M una superficie compacta, conexa, no orientable y con borde. Sea $\bar{M}$ la superficie no orientable sin borde tal que $M = \bar{M} \setminus \cup_{i=1}^{n} D_i^o$. Entonces el *genero* de M es igual al genero de $\bar{M}$.

Pregunta. ¿Como se dibuja una superficie no orientable?

Definición. Un *crosscap* es una representación grafica de la banda de Moebius como en la figura 3, donde se identifica dos puntos antipodales en el circulo con la cruz en el interior.

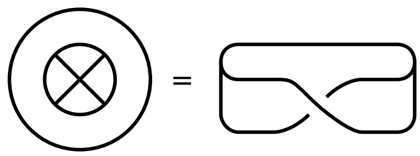


Figura 3. Crosscap

Representación gráfica. Sea N una superficie conexa no orientable de genero g con n componentes de borde. Se representa gráficamente N como sigue. Sea M una superficie conexa orientable de genero g_1 con $g_2 + n$ componentes de borde, donde $2g_1 + g_2 = g$. Pegando crosscaps a g_2 componentes de borde de M se obtiene una representación de N (ver la figura 4).

Ejemplo. En la figura 4 que sigue hay dos representaciones diferentes de una superficie no orientable de genero 3 con 1 componente de borde.

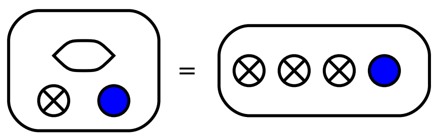


Figura 4. Superficie no orientable de genero 3 con una componente de borde

3 Arcos y círculos

Definición. Sean X, Y dos espacios topologicos y $f_0, f_1 : Y \to X$ dos encajes. Se dice que f_0 y f_1 son *homotopicos* si existe una aplicación continua $F : Y \times [0,1] \to X$ tal que $f(y,0) = f_0(y)$ y $F(y,1) = f_1(y)$ para todo $y \in Y$. Se dice que f_0 y f_1 son *isotopicos* si, a demás, para todo $t \in [0,1]$ la aplicación $f_t : Y \to X$, $y \mapsto F(y,t)$, es un encaje. Se dice que f_0 y f_1 son *ambiente isotopicas* si existe una aplicación continua $G : X \times [0,1] \to X$ tal que $g_0 = \text{id}$, $g_1 \circ f_0 = f_1$, y g_t es un homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$, donde $g_t : X \to X$, $x \mapsto G(x,t)$.

Definición. Un *circulo* en M es un encaje $a : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M \setminus \partial M$. Supondremos (en general) que los círculos no están orientados. Mediante abuso de notación identificaremos con frecuencia un circulo con su imagen. Se dice que a es *genérico* si no borda un disco o una banda de Moebius y si no es isotopico a una componente de borde de M (ver la figura 5). Un entorno regular de a

puede ser o un anillo, o una banda de Moebius (ver la figura 6). En el primer caso se dice que a es *twosided* y en el segundo caso se dice que a es *onesided*.

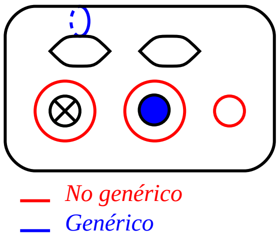


Figura 5. Círculos genéricos y no genéricos

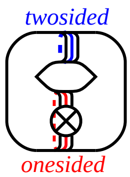


Figura 6. Círculos onesided y twosided

Definición. Un *arco* en M es un encaje $a : [0,1] \hookrightarrow M$ tal que $a(0), a(1) \in \partial M$ y $a(]0,1[) \subset M \setminus \partial M$.

Definición. Sean a y b dos círculos en M (resp. dos arcos en M). Se dice que a y b *bordan un bigono* si existe un disco encajado en M cuyo borde esta formado por un arco de a y un arco de b (ver la figura 7).

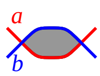


Figura 7. Bigono

Teorema ([Epstein]).

(1) *Sean a y b dos círculos homotopicos en M. Si $a \cap b \neq \emptyset$, entonces a y b bordan un bigono. Si $a \cap b = \emptyset$, entonces existe un anillo A encajado en M cuyas componentes de borde son a y b.*

(2) *Sean a y b dos arcos con las mismos extremos y homotopicos relativamente a los extremos. Entonces a y b bordan un bigono.*

Corolario.

(1) *Sean a y b dos círculos en M. Entonce a y b son homotopicos si y solamente si son ambiente isotopicos con una isotopía que deja el borde de M fijo punto por punto.*

(2) Sean a y b dos arcos en M con los mismos extremos. Entonces a y b son homotopicos si y solamente si son ambiente isotopicos con una isotopía que deja el borde de M fijo punto por punto.

Demostración. Sean a y b dos círculos homotopicos. Sin descartar la posibilidad de aplicar una pequeña isotopía ambiente, podemos suponer que a y b se interceptan en un numero finito de puntos. Razonaremos por inducción sobre $|a \cap b|$. Supongamos que $|a \cap b| = 0$, es decir, $a \cap b = \emptyset$. Entonces existe un anillo A encajado en M cuyas componentes de borde son a y b (ver la figura 8). Se observa entonce que se puede empujar a sobre b a lo largo del anillo A con una isotopía ambiente. Supongamos que $|a \cap b| > 0$ (i.e. $a \cap b \neq \emptyset$) mas la hipótesis de inducción. Entonces a y b bordan un bigono D (ver la figura 9). Empujando a a lo largo de D se observa que a es ambiente isotopica a un circulo a' tal que $|a' \cap b| < |a \cap b|$. De la hipótesis de inducción sale que a' es ambiente isotopica a b, por lo tanto a es ambiente isotopica a b. La segunda parte del corolario se demuestra de la misma manera. $\square$

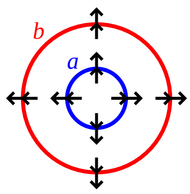


Figura 8. Isotopía a lo largo de un anillo

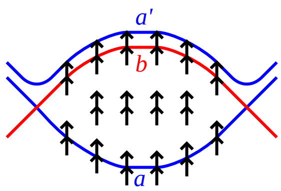


Figura 9. Isotopía a lo largo de un bigono

4 Algunos elementos del mapping class grupo

Definición. Recordemos que el *cilindro* o *anillo* es la superficie $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. El *twist de Dehn estándar* es el homeomorfismo $T : C \to C$ definido por

$$T(z, t) = (e^{2i\pi t} z, t)\,.$$

Se llama también *twist de Dehn estándar* la clase $t \in \mathcal{M}(C, \partial C)$ de T.

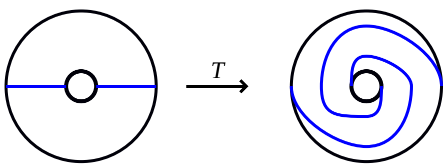


Figura 10. Twist de Dehn estándar

Definición. Sean M una superficie y $a : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ un circulo twosided. Un *entorno tubular de* a es un encaje $\varphi : C \hookrightarrow M$ del anillo $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ tal que

- $\varphi(C) \cap \partial M = \emptyset$,
- $\varphi(z, \frac{1}{2}) = a(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

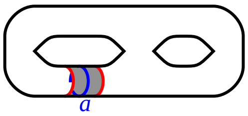


Figura 11. Entorno tubular

Definición. Sean M una superficie, B una unión de componentes de borde de M, y $a : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ un circulo twosided. Tomamos un entorno tubular $\varphi : C \hookrightarrow M$ de a y definimos $T_a \in \mathrm{Homeo}(M, B)$ como sigue:

- $T_a(x) = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}(x)$ si x esta en la imagen de φ, donde T es el twist de Dehn estándar,
- $T_a(x) = x$ si x no esta en la imagen de φ.

La clase de isotopía $t_a \in \mathcal{M}(M, B)$ de T_a se llama el *twist de Dehn* a lo largo de a.

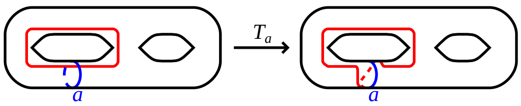


Figura 12. Twist de Dehn

Proposición. *Sean M una superficie y B una unión de componentes de borde de M.*

(1) Sea a un circulo twosided. La definición de t_a no depende de la elección del entorno tubular de a. Tampoco depende de la orientación de a, pero depende de la orientación del entorno tubular.

(2) Si a y b son dos círculos twosided isotopicos, entonces $t_a = t_b$.

(3) Sean a un circulo twosided y $f \in \mathcal{M}(M, B)$. Entonces $f t_a f^{-1} = t_{f(a)}$.

Proposición. *Sean M una superficie, B una unión de componentes de borde de M, y $a : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ un circulo twosided. Si a borda un disco o una banda Moebius o si a es isotopico a una componente de borde de M no incluida en B, entonce $t_a = 1$. Sino t_a es de orden infinito.*

Proposición. *Sean M una superficie, B una unión de componentes de borde de M, y $a, b : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ dos círculos twosided.*

(1) Si $a \cap b = \emptyset$, entonces $t_a t_b = t_b t_a$.

(2) Supongamos que $a \cap b$ esta formado de un punto único y la orientación de los entornos tubulares de a y b coinciden en un entorno del punto de intersección. Entonces $t_a t_b t_a = t_b t_a t_b$.

Demostración. Claramente, si $a \cap b = \emptyset$, entonces $t_a t_b = t_b t_a$. Demostremos la segunda parte. Suponemos que $a \cap b$ es un punto único. Tenemos

$$t_a t_b t_a = t_b t_a t_b \quad \Leftrightarrow \quad t_b^{-1} t_a t_b = t_a t_b t_a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad t_{t_b^{-1}(a)} = t_{t_a(b)} \, .$$

Por lo tanto, para demostrar que $t_a t_b t_a = t_b t_a t_b$ basta demostrar que $t_b^{-1}(a)$ es isotopico a $t_a(b)$. Un entorno regular de $a \cup b$ es un toro con un agujero y $t_a(b) \simeq t_b^{-1}(a)$ es el circulo representado en la figura 13. □

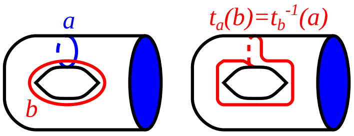


Figura 13. Relación de trenza

Definición. Sean M una superficie, B una unión de componentes de borde de M, b una componente de borde de M, y $a : [0,1] \to M$ un arco. Suponemos que $b \not\subset B$ y $a(0), a(1) \in b$. Denotamos $s_{a,b}$ el elemento en $\mathcal{M}(M, B)$ que se obtiene deslizando b a lo largo de a. Este elemento $s_{a,b}$ se llama el *boundary slide* de b a lo largo de a.

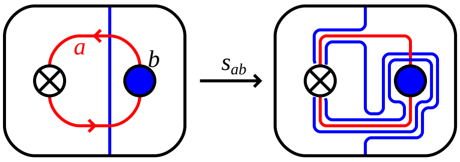


Figura 14. Boundary slide

Lema. *Sean b una componente de borde de M, $a : [0,1] \to M$ un arco tal que $a(0), a(1) \in b$, y Σ un entorno regular de $a \cup b$.*

(1) O bien Σ es una superficie no orientable de genero 1 con dos componentes de borde, o bien Σ es una superficie orientable de genero 0 con tres componentes de borde.

(2) Supongamos que Σ es una superficie de genero 0 con tres componentes de borde. Sean c_1 y c_2 las dos componentes de borde de Σ diferentes de b. Entonces $s_{a,b} = t_{c_1}^{-1} t_{c_2}$.

(3) Supongamos que Σ es una superficie no orientable de genero 1 con dos componentes de borde. Sea c la componente de borde de Σ diferente de b. Entonces $s_{a,b}^2 = t_c$.

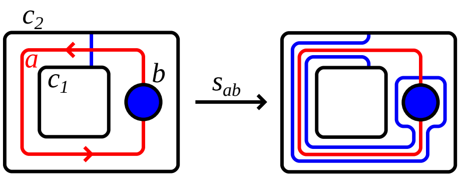


Figura 15. Boundary slide

Definición. Sean M una superficie y B una unión de componentes de borde de M. Sean b un circulo de M que borda una banda de Moebius y a un circulo (orientado) tal que $|a \cap b| = 1$. Denotamos $y_{a,b}$ el elemento de $\mathcal{M}(M, B)$ que se obtiene deslizando b a lo largo de a. Este elemento $y_{a,b}$ se llama el *crosscap slide* de b a lo largo de a.

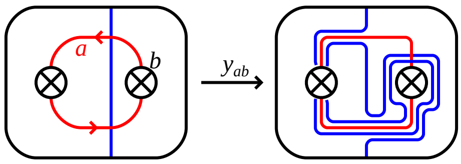


Figura 16. Crosscap slide

Lema. *Sean b un circulo de M que borda una banda de Moebius R y a un circulo (orientado) tal que $|a \cap b| = 1$. Sea Σ un entorno regular de $a \cup R$.*

(1) Si a es twosided, entonces Σ es una superficie no orientable de genero 2 con una componente de borde. Si a es onesided, entonces Σ es una superficie no orientable de genero 1 con dos componentes de borde.

(2) Supongamos que a es onesided. Sean c_1, c_2 las componentes de borde de Σ. Entonces $y_{a,b} = t_{c_1}^{-1} t_{c_2}$.

(3) Supongamos que a es twosided. Sea c la componente de borde de Σ. Entonces $y_{a,c}^2 = t_c$.

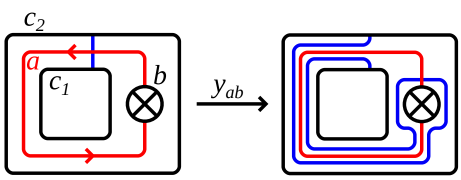


Figura 17. Crosscap slide

5 Primeros ejemplos de mapping class grupos

Proposición. *Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ el disco estándar. Entonces $\mathcal{M}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) = \{1\}$.*

Demostración. Tenemos que mostrar que $\mathrm{Homeo}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D})$ es conexo. Sea $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un homeomorfismo de $\mathbb{D}$ cuya restricción al borde de $\mathbb{D}$ es la identidad. Para todo $t \in [0, 1]$ definimos $h_t \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D})$ por

$$h_t(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \geq 1 - t\,, \\ h(\frac{1}{t} z) & \text{si } |z| < 1 - t\,. \end{cases}$$

Claramente, $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ es un camino en $\mathrm{Homeo}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D})$ que conecta h con la identidad. $\square$

Proposición. *Denotamos $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ el cilindro y $a_0 = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$, $a_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ las componentes de borde de $\mathbb{S}^1$. Entonces $\mathcal{M}(C, a_0) = \{1\}$.*

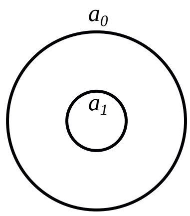


Figura 18. Un cilindro

Demostración. Tenemos que mostrar que $\mathrm{Homeo}(C, a_0)$ es conexo. Sea $h \in \mathrm{Homeo}(C, a_0)$. La restricción de h^{-1} a a_1 es un homeomorfismo $g' : a_1 \to a_1$ que preserva la orientación. Un tal homeomorfismo es isotopico a la identidad, es decir, existe una familia continua $g'_t : a_1 \to a_1$ de homeomorfismos tal que $g'_1 = g'$ y $g'_0 = \mathrm{id}$. Se puede prolongar esta isotopía a una isotopía $g_t : C \to C$ tal que $g_0 = \mathrm{id}$ y la restricción de g_t a a_0 es la identidad. Ponemos $h_t = g_t \circ h$. Entonces $h_0 = h$, la restricción de h_t a a_0 es la identidad, y la restricción de h_1 a $a_0 \sqcup a_1$ es la identidad. Por lo tanto, podemos suponer que la restricción de h a $a_0 \sqcup a_1$ es la identidad.

Consideremos el arco b de la figura 19. Usando "rotaciones" se puede construir una isotopía $g_t : C \to C$ tal que $g_0 = \mathrm{id}$, la restricción de g_t a a_0 es la identidad, y $g_1(b)$ es homotopico a $h^{-1}(b)$. Ponemos $h_t = g_t \circ h$. Entonces $h_0 = h$, la restricción de h_t a a_0 es la identidad, la restricción de h_1 a $a_0 \sqcup a_1$ es la identidad, y $h_1(b)$ es homotopico a b.

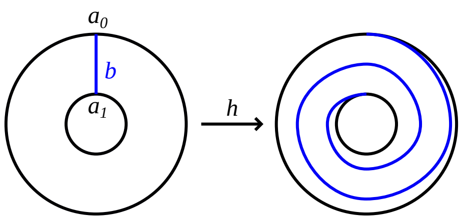


Figura 19. Mapping class grupo del cilindro

Por consiguiente, podemos suponer que $h(b)$ es homotopico a b (ver la figura 20). Existe una isotopía $g_t : C \to C$ tal que $g_0 = \mathrm{id}$, la restricción de g_t a $a_0 \sqcup a_1$ es la identidad, y $g_1(b) = h^{-1}(b)$. Ponemos $h_t = g_t \circ h$. Entonces $h_0 = h$, la restricción de h_t a a_0 es la identidad, y la restricción de h_1 a $a_0 \cup a_1 \cup b$ es la identidad. Como $\mathcal{M}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) = \{1\}$, concluimos que h_1 es isotopico a la identidad con una isotopía que fija $a_0 \cup a_1 \cup b$ punto por punto. $\square$

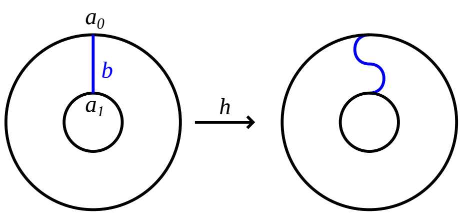


Figura 20. Mapping class grupo de un cilindro

Proposición. *Sea N la banda de Moebius. Entonces $\mathcal{M}(N, \partial N) = \{1\}$.*

Demostración. Tomamos un homeomorfismo $h \in \mathrm{Homeo}(N, \partial N)$ y demostramos que h es isotopico a la identidad. Representamos la banda de Moebius como en la figura 21, donde identificamos c_0 y c_1. Consideramos el arco a dibujado en la figura y ponemos $b = h(a)$. Observemos que a no separa N en dos componentes conexas, por lo tanto b tampoco separa N en dos componentes conexas. Un ejemplo de un arco con los mismos extremos que a que separa N en dos componentes conexas es dado en la figura 22.

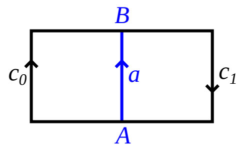


Figura 21. Banda de Moebius

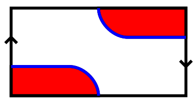


Figura 22. Arco que separa N

Sea $\tilde{N} \to N$ la cubierta universal de N y $\gamma : \tilde{N} \to \tilde{N}$ el generador del grupo de deck de la cubierta (ver la figura 23). Denotemos A el origen de a y B su destino. Elijemos un levantamiento $\tilde{A}$ de A, denotamos $\tilde{a}$ el levantamiento de a de origen $\tilde{A}$, y denotamos $\tilde{B}$ el destino de $\tilde{a}$. Sea $\tilde{b}$ el levantamiento de b de origen $\tilde{A}$. Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que el destino de $\tilde{b}$ es $\gamma^m \tilde{B}$.

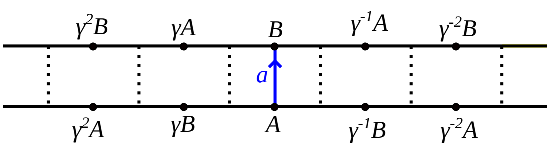


Figura 23. Cubierta universal de N

Si m fuese impar con $m \geq 3$, entonces $\tilde{b}$ y $\gamma^2\tilde{b}$ se interceptarían (ver la figura 24), y eso no es posible. Asimismo, uno no puede tener m impar y $m \leq -3$.

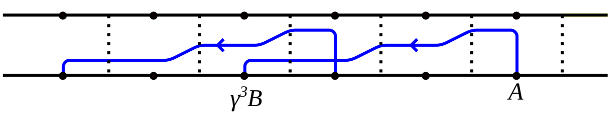


Figura 24.

Si $m = 1$ o -1, entonces b separa N en dos componentes conexas, lo que no puede ser. Si m fuese par con $m \geq 2$, entonces $\tilde{b}$ y $\gamma\tilde{b}$ se interceptarían (ver la figura 25), y eso no es posible. Asimismo, uno no puede tener m par con $m \leq -2$.

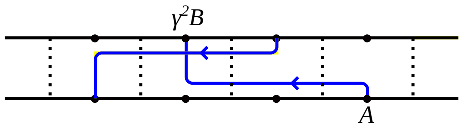


Figura 25.

En conclusión, tenemos $m = 0$, por lo tanto b es homotopico a a, así que existe una ambiente isotopía que fija el borde de N punto por punto y mueve b sobre a. Por consiguiente, podemos suponer que h es la identidad sobre $a \cup \partial N$. Como $\mathcal{M}(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) = \{1\}$, existe una isotopía $h_t : N \to N$ tal que $h_0 = h$, $h_1 = \mathrm{id}$, y h_t es la identidad sobre $a \cup \partial N$. $\square$

Definición (Recuerdo). El cilindro es la superficie $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. El *twist de Dehn estándar* es el homeomorfismo $T : C \to C$ definido por

$$T(z, t) = (e^{2i\pi t} z, t)\,.$$

Recordemos que también llamamos *twist de Dehn estándar* a la clase $t \in \mathcal{M}(C, \partial C)$ de T.

Proposición. *Sean C el cilindro y $t \in \mathcal{M}(C, \partial C)$ el twist de Dehn estándar. Entonces $\mathcal{M}(C, \partial C)$ es un grupo cíclico infinito generado por t.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Proposición (Korkmaz). *Supongamos que $N = N_{1,2}$ es una banda de Moebius con un agujero. Fijamos una componente de borde c de $N_{1,2}$ y denotamos b la otra componente de borde. Sea $s_{a,b} \in \mathcal{M}(N_{1,2}, c)$ el boundary slide de b a lo largo del arco a representado en la figura 26. Entonces $\mathcal{M}(N_{1,2}, c)$ es el grupo cíclico infinito generado por $s_{a,b}$.*

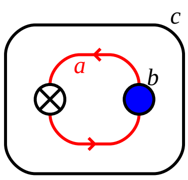


Figura 26. Banda de Moebius con un agujero

Teorema. *Sean M la botella de Klein con un agujero y c su componente de borde. Sean a y b los círculos dibujados en la figura 27.*

(1) El circulo a es el único circulo twosided genérico de M salvo isotopía.

(2) Sea $y_{a,b}$ el crosscap slide de b a lo largo de a. Entonces $y_{a,b}^2 = t_c$ y $y_{a,b} t_a y_{a,b}^{-1} = t_a^{-1}$.

(3) $\mathcal{M}(M,c) \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$*, donde la primera copia de* $\mathbb{Z}$ *esta generada por* t_a *y la segunda copia esta generada por* $y_{a,b}$.

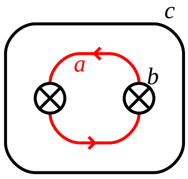


Figura 27. Botella de Klein con un agujero

Teorema. *Sean* M *el toro con un agujero y* a, b *dos círculos en* M *tales que* $i(a, b) = 1$*. Entonces* $\mathcal{M}(M, \partial M) = \langle t_a, t_b \mid t_a t_b t_a = t_b t_a t_b \rangle$*. Es el grupo de trenzas de tres cuerdas.*

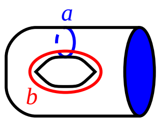


Figura 28. Toro con un agujero

6 Complejo de curvas y clasificación de los elementos de $\mathcal{M}(M)$

Definición. Un *complejo simplicial* es un conjunto E dotado de una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos tales que

(a) S es finito y no vacío para todo $S \in \mathcal{S}$,

(b) Si $S \in \mathcal{S}$, entonces cualquier parte no vacía de S pertenece a $\mathcal{S}$,

(c) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{S}$ para todo $x \in E$.

Los elementos de E se llaman *vertices* del complejo simplicial y los elementos de $\mathcal{S}$ se llaman *simplices*. La *dimensión* de un simplex $S \in \mathcal{S}$ es $|S| - 1$.

Definición. A partir de ahora suponemos que M es una superficie compacta (no necesariamente conexa). Denotamos $\hat{\mathcal{C}}(M)$ el conjunto de círculos en M que no bordan un disco y que no son isotopicos a una componente de borde de M. Denotamos $\mathcal{C}(M)$ el conjunto de las clases de isotopía de elementos de $\hat{\mathcal{C}}(M)$, y $\mathcal{T}(M)$ el subconjunto formado por las clases de isotopía de círculos twosided. El *indice de intersección* de dos clases $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(M)$ es $i(\alpha, \beta) = \min\{|a \cap b| \mid a \in \alpha \text{ y } b \in \beta\}$. El conjunto $\mathcal{C}(M)$ esta dotado de una estructura de complejo simplical. Una parte no vacía $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(M)$ es un simplex de $\mathcal{C}(M)$ si $i(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(M)$, $\alpha \neq \beta$. Este complejo simplicial se llama el *complejo de curvas* de M, y $\mathcal{T}(M)$ es considerado como un subcomplejo de $\mathcal{C}(M)$. Si $\mathcal{A}$ es un simplex de $\mathcal{C}(M)$, entonces existe un conjunto A de representantes de los elementos de $\mathcal{A}$ tal que $a \cap b = \emptyset$ para todo $a, b \in A$, $a \neq b$. Un tal conjunto de representantes se llama *conjunto admisible de representantes* de $\mathcal{A}$. Note que $\mathcal{M}(M)$ actuá sobre $\mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{T}(M)$, y son acciones simpliciales en el sentido que mandan un simplex sobre un simplex.

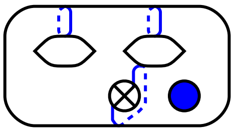
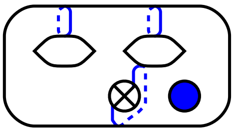


Figura 29. Simplex en $\mathcal{C}(M)$

Definición. Sean $\mathcal{A}$ un simplex de $\mathcal{C}(M)$ y A un sistema admisible de representantes de $\mathcal{A}$. El *estabilizador* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{M}(M)$ es el subgrupo $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M) = \{f \in \mathcal{M}(M) \mid f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\}$ de $\mathcal{M}(M)$. Por otro lado, denotamos $M_{\mathcal{A}}$ la compactificación natural de $M \setminus (\cup_{a \in A} a)$ (ver la figura 30). Los grupos $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M)$ y $\mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$ están vinculados con el homomorfismo $\Lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M) \to \mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$ que se define como sigue. Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M)$. Elegimos un representante $F \in \mathrm{Homeo}(M)$ de f tal que $F(\cup_{a \in A} a) = \cup_{a \in A} a$. Entonces F determina un elemento $\hat{F} \in \mathrm{Homeo}(M_{\mathcal{A}})$, y definimos $\Lambda_{\mathcal{A}}(f)$ como la clase de $\hat{F}$ en $\mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$. Este homomorfismo $\Lambda_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M) \to \mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$ se llama *homomorfismo de reducción* a lo largo de $\mathcal{A}$.



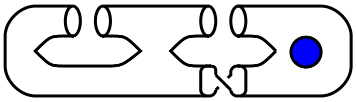


Figura 30. Superficie $M_{\mathcal{A}}$

Definición. Si $\mathcal{A}$ es un simplex de $\mathcal{C}(M)$, ponemos $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{T}(M)$ y denotamos $Z_{\mathcal{A}}$ el subgrupo de $\mathcal{M}(M)$ generado por $\{t_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}\}$.

Teorema. (Stukow). *Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M)$ un simplex y $\Lambda : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(M) \to \mathcal{M}(M_{\mathcal{A}})$ el homomorfismo de reducción a lo largo de $\mathcal{A}$. Entonces el núcleo de Λ es $Z_{\mathcal{A}}$. Es un grupo abeliano libre libremente generado por $\{t_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}\}$. En particular, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M) \setminus \mathcal{T}(M)$, entonces Λ es inyectivo.*

Definición. Denotamos $\Gamma(M) = \{M_i \mid i \in I\}$ el conjunto de componentes conexas de M y $\mathfrak{S}(\Gamma(M))$ el grupo de permutaciones de $\Gamma(M)$. Hay un homomorfismo natural $\varphi : \mathcal{M}(M) \to \mathfrak{S}(\Gamma(M))$ cuyo núcleo es naturalmente isomorfo a $\oplus_{i \in I} \mathcal{M}(M_i)$.

Definición. Se dice que un elemento $f \in \mathcal{M}(M)$ es *pseudo-Anosov* si $\mathcal{C}(M_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ y $f^n(\alpha) \neq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{C}(M)$ y todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se dice que un elemento $f \in \mathcal{M}(M)$ es *reducible* si existe un simplex $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M)$ tal que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. En este ultimo caso, $\mathcal{A}$ se llama un *sistema de reducción* de f y un elemento $\alpha \in \mathcal{A}$ se llama *clase de reducción* de f.

Teorema (Thurston ++ Folclore). *Suponemos que M es conexa. Si $f \in \mathcal{M}(M)$ es pseudo-Anosov, entonces el centralizador $Z_f(\mathcal{M}(M)) = \{g \in \mathcal{M}(M) \mid gf = fg\}$ de f en $\mathcal{M}(M)$ es virtualmente cíclico, e decir, $Z_f(\mathcal{M}(M))$ contiene un subgrupo de indice finito isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Definición. Sea $f \in \mathcal{M}(M)$. Elegimos $n \geq 1$ tal que $f^n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Se dice que f esta *correctamente reducido* si, para todo $i \in I$, la restricción de f^n a $\mathcal{M}(M_i)$ es o de orden finito o pseudo-Anosov. Se puede verificar sin muchas dificultades que esta definición no depende de la elección de n. Un sistema de reducción $\mathcal{A}$ de f es un *sistema de reducción correcto* si la reducción de f a lo largo de $\mathcal{A}$ esta correctamente reducida.

Teorema (Thurston ++ Folclore). *Sea M una superficie. Un elemento $f \in \mathcal{M}(M)$ es reducible, o correctamente reducido. Si f es reducible, entonces f admite un sistema de reducción correcto.*

Definición. Sean $f \in \mathcal{M}(M)$ y $\alpha \in \mathcal{C}(M)$ una clase de reducción de f. Se dice que α es una *clase de reducción esencial* si $f^n(\beta) \neq \beta$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y todo $\beta \in \mathcal{C}(M)$ tal que $i(\alpha, \beta) \neq 0$. Si $f \in \mathcal{M}(M)$ es reducible, denotamos $\mathcal{S}(f)$ el conjunto de las clases de reducción esenciales de f. Ponemos $\mathcal{S}(f) = \emptyset$ sino.

Teorema (Birman, Lubotzky, McCarthy). *Suponemos que M es una superficie conexa y orientable. Sea $f \in \mathcal{M}(M)$ un elemento reducible. Entonces $\mathcal{S}(f)$ es un sistema de reducción correcto de f. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es un sistema de reducción correcto de f, entonces $\mathcal{S}(f) \subset \mathcal{A}$. En otros términos, $\mathcal{S}(f)$ es el sistema de reducción correcto mínimo de f.*

A partir de ahora N designa una superficie conexa no orientable.

Proposición. *Existe un único recubrimiento doble $p : M \to N$ con M orientable.*

Definición. Sea $J : M \to M$ el único elemento no trivial del deck grupo de $p : M \to N$ y $j \in \mathcal{M}(M)$ la clase de isotopía de J. Sea $F \in \mathrm{Homeo}(N)$. Entonces F tiene dos levantamientos en M, un que preserva la orientación, que denotaremos $\tilde{F}$, y uno que invierte la orientación, $J \circ \tilde{F}$. Estos dos elementos conmutan con J. Denotamos $\mathcal{M}^+(M)$ el subgrupo de $\mathcal{M}(M)$ formado por las clases de isotopía que preservan la orientación, y $\mathcal{Z}_j^+(M)$ el subgrupo de $\mathcal{M}^+(M)$ formado por los elementos que conmutan con j. La aplicación que a $F \in \mathrm{Homeo}(N)$ asocia $\tilde{F}$ induce un homomorfismo $\iota : \mathcal{M}(N) \to \mathcal{Z}_j^+(M)$.

Teorema (Szepietowski). *$\iota : \mathcal{M}(N) \to \mathcal{Z}_j^+(M)$ es un isomorfismo.*

Definición. Sean $\alpha \in \mathcal{C}(N)$ y $a \in \alpha$. Si a es onesided, entonces $p^{-1}(a)$ esta formado de un único circulo, $\tilde{a}$. Si a es twoside, entonces $p^{-1}(a)$ esta formado por dos círculos, $\tilde{a}_1$ y $\tilde{a}_2$. En el primer caso ponemos $p^{-1}(\alpha) = \{[\tilde{a}]\}$ y en el segundo caso ponemos $p^{-1}(\alpha) = \{[\tilde{a}_1], [\tilde{a}_2]\}$. El conjunto $p^{-1}(\alpha)$ esta bien definido. Si $\mathcal{A}$ es una parte de $\mathcal{C}(N)$, ponemos $p^{-1}(\mathcal{A}) = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} p^{-1}(\alpha)$.

Definición. Sea $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}(M)$ un simplex tal que $j(\tilde{\mathcal{A}}) = \tilde{\mathcal{A}}$. Entonces, para todo $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}$, tenemos o $j(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, o $i(\tilde{\alpha}, j(\tilde{\alpha})) = 0$. De esto sigue que el conjunto $p(\tilde{\mathcal{A}}) = \{p(\tilde{\alpha}) \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}\}$ es un simplex de $\mathcal{C}(N)$.

Teorema (Wu Yingqing, Irmak - P.). *Sean $f \in \mathcal{M}(N)$ y $\mathcal{A}$ un simplex de $\mathcal{C}(N)$.*

(1) $\mathcal{A}$ es un sistema de reducción de f si y solamente si $p^{-1}(\mathcal{A})$ es un sistema de reducción de $\iota(f)$.

(2) $\mathcal{A}$ es un sistema de reducción correcto de f si y solamente si $p^{-1}(\mathcal{A})$ es un sistema de reducción correcto de $\iota(f)$.

(3) Tenemos $j(\mathcal{S}(\iota(f)) = \mathcal{S}(\iota(f))$ y $p(\mathcal{S}(\iota(f))) = \mathcal{S}(f)$.

(4) $\mathcal{S}(f)$ *es el sistema de reducción correcto mínimo de* f*, en el sentido que contiene todos los sistemas de reducción correctos de* f*.*

Corolario. *Sea* $f \in \mathcal{M}(N)$*.*

(1) f *es reducible si y solamente si* $\iota(f)$ *es reducible,*

(2) f *es de orden finito si y solamente si* $\iota(f)$ *es de orden finito,*

(3) f *es pseudo-Anosov si y solamente si* $\iota(f)$ *es pseudo-Anosov.*