Ejercicios

Nombre:____

Enunciar claramente las propiedades que se usen en la resolución de los problemas.

1. Enuncie al menos dos invariantes topológicos que clasifiquen las superficies cerradas (compactacas y sin frontera).
2. De una lista exahustiva de las superficies.
3. De una construcción como CW-complejo de las superficies cerradas.
4. Describa el espacio cubriente universal de las superficies cerradas.
5. Proporcione una presentación para el grupo fundamental del espacio de las superficies cerradas orientables.
6. Proporcione una presentación para el grupo fundamental del espacio proyectivo real de dimensión 2 ($\mathbb{R}P^2$) y de la botella de Klein (K).
7. Sean x_0 y x_1 puntos distintos de un espacio X conectado por trayectorias. Demuestre que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par α y β de caminos de x_0 a x_1 los isomorfismos inducidos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ de cambio de punto base de x_0 a x_1 son iguales.
8. Calcule el grupo fundamental del espacio obtenido de la unión disjunta de dos toros T que se identifican en dos puntos.
9. Demuestre que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para $n \neq 2$. Justifica claramente todos los pasos de tu respuesta.
10. Sea $p : E \to B$ una función de recubrimiento entre dos espacios con estructura de CW-complejo. Suponga que p es nulhomotópica. Demuestre que E es simplemente conexo.
11. Sea $p : E \to B$ una función cubriente y sean $e_0 \in E$ y $b_0 \in B$ con $p(e_0) = b_0$. Pruebe que $p : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo.
12. a) Describa todos los espacios de recubrimiento arco-conexos de $\mathbb{R}P^2$.
    b) Describa todos los espacios de recubrimiento arco-conexos de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.