付 録 A　付録: Mathematica の使い方

A.1　方程式

例 A.1.1 (代数方程式) 次の方程式を解け.

$$(\mathrm{i})x^3+x^2+x+1=0 \qquad (\mathrm{ii})\begin{cases} 3x & -2y & +7z & =80 \\ 5x & +3y & -4z & =2 \\ 2x & +5y & +z & =42 \end{cases}$$

【解】 *(*例 A.1.1*)*

$\boldsymbol{Solve[x\hat{}3+x\hat{}2+x+1==0,x]}$

$\boldsymbol{Solve[\{3x-2y+7z==80,5x+3y-4z==2,2x+5y+z==42\},\{x,y,z\}]}$

$\{\{x\to -1\},\{x\to -i\},\{x\to i\}\}$

$\{\{x\to 6, y\to 4, z\to 10\}\}$

問題 A.1.1 次の方程式を解け.

$$(\mathrm{i})x^4+2x^2-4x+8=0 \qquad (\mathrm{ii})\begin{cases} xy & +x & +y & =-3 \\ yz & +y & +z & =-7 \\ zx & +z & +x & =11 \end{cases}$$

【補足】実行は *"Shift + Enter"* で行う.

【補足】乗算は（例えば "1×2）は "$1*2$" *or* "1 2"（*1* と *2* の間にスペース）など.

A.2　漸化式

例 A.2.1 (漸化式) 次の漸化式について, $x_1,\cdots,x_{10}$ を求め, 一般項を求めよ：$x_0=1,\ x_n=x_{n-1}+n$.

【解】 *(*例 A.2.1*)*

$\boldsymbol{x[0]=1;}$

$\boldsymbol{x[i\_]:=x[i-1]+i;}$

$\boldsymbol{Table[x[i],\{i,1,10\}]}$

$\boldsymbol{RSolve[\{y[0]==1,y[n+1]==y[n]+n\},y[n],n]}$

$\{2,4,7,11,16,22,29,37,46,56\}$

$\left\{\left\{y[n]\to \frac{1}{2}\left(2-n+n^2\right)\right\}\right\}$

問題 A.2.1 次の漸化式について, $x_1,\cdots,x_{10}$ を求め, 一般項を求めよ：$x_1=0,\ x_2=1,\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$.

【ヒント】*"FunctionExpand[$\cdots$]"* と *"//FullSimplify"* を用いよ.

【補足】*"Simplify" or "FullSimplify"* は結果を簡約化する命令である.

A.3　微分・積分

例 A.3.1 (微分 (1 変数)) x^3-2x^2-9x の 1 階導関数と 2 階導関数を求めよ.

【解】　*(*例 A.3.1*)*

$\boldsymbol{D[x\^{}3 - 2x\^{}2 - 9x, x]}$

$\boldsymbol{D[x\^{}3 - 2x\^{}2 - 9x, \{x, 2\}]}$

$-9 - 4x + 3x^2$

$-4 + 6x$

問題 A.3.1 $\sin x \cos x$ の 1 階導関数と 2 階導関数を求めよ.

例 A.3.2 (偏微分) 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + y^4$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$ を求めよ.

【解】　*(*例 A.3.2*)*

f[x_, y_]:=x^3 + 2x^2y^2 + y^4;

{D[f[x, y], x], D[f[x, y], {y, 3}], D[f[x, y], {x, 2}, {y, 2}]}

$\left\{3x^2 + 4xy^2, 24y, 8\right\}$

問題 A.3.2 2 変数関数 $f(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ について, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

例 A.3.3 (不定積分と定積分 (1 変数)) 不定積分 $\int x^3 dx$, 定積分 $\int_0^1 x^3 dx$ を求めよ.

【解】　*(*例 A.3.3*)*

Integrate[x^3, x]

Integrate[x^3, {x, 0, 1}]

$\frac{x^4}{4}$

$\frac{1}{4}$

問題 A.3.3 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$, 定積分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ を求めよ.

例 A.3.4 (広義積分 (1 変数)) 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 及び $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ を求めよ.

【解】　*(*例 A.3.4*)*

Integrate[1/Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}]

Integrate[Sin[x]/x, {x, 0, Infinity}]

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

問題 A.3.4 広義積分 $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx$ 及び $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ.

例 A.3.5 (積分 (多変数)) 次の積分を求めよ：

$$\iint_D x + y dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]\}.$$

【解】　*(*例 A.3.5*)*

Integrate[x + y, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]

1

問題 A.3.5 次の積分を *Mathematica* 及び手計算によって求めよ：

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

【ヒント】手計算の際は極座標を用いるとよい.

A.4　行列

例 A.4.1 (行列の加減・スカラー倍・乗算・べき) 次の行列について, $A+B$, $A-B$, $2A$, AB, A^3 を求めよ：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

【解】 *(*例 A.4.1*)*

```
a = {{1,2},{3,4}};
b = {{5,6},{7,8}};
a + b//MatrixForm
a − b//MatrixForm
2a//MatrixForm
a.b//MatrixForm
MatrixPower[a,3]//MatrixForm
MatrixPower[a,3]
(*"//MatrixForm" をつけない場合、結果は "リスト" で返される*)
```

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$

$\{\{37,54\},\{81,118\}\}$

問題 A.4.1 次の行列について, $A^2+B^2+AB+3A+4B$ を求めよ：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

例 A.4.2 (行列の行列式, トレース, 転置行列, 逆行列)

次の行列の行列式, トレース, 転置行列, 逆行列を求めよ：$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

【解】 *(*例 A.4.2*)*

```
a = {{2,4,5},{1,1,1},{9,2,3}};
Det[a]
Tr[a]
Transpose[a]//MatrixForm
Inverse[a]//MatrixForm
```

-9

6

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{9} & -\frac{32}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

問題 A.4.2 次の行列の行列式, トレース, 転置行列, 逆行列を求めよ：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

例 A.4.3 (行列の固有値と固有ベクトル) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ：$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

【解】 *(*例 A.4.3*)*

```
a = {{2,4},{-1,-3}};
Eigenvalues[a]
Eigenvectors[a]
Eigensystem[a]
{-2,1}
{{-1,1},{-4,1}}
{{-2,1},{{-1,1},{-4,1}}}
```

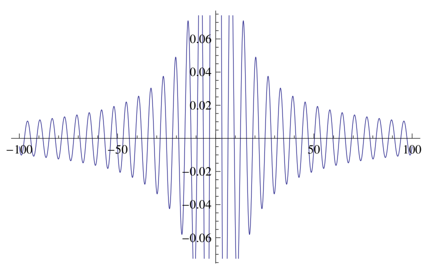
問題 A.4.3 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

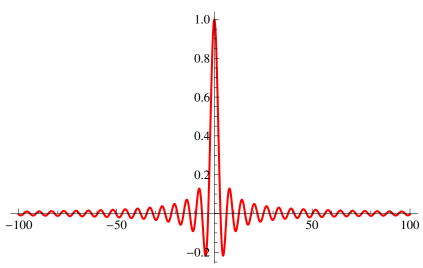
A.5 グラフ

例 A.5.1 (グラフ: x-y 平面上) $y = \frac{\sin x}{x}$ $(-100 \le x \le 100)$ のグラフを描け.

【解】 *(*例 A.5.1*)*

```
Plot[Sin[x]/x, {x, -100, 100}]
Plot[
Sin[x]/x, {x, -100, 100},
PlotStyle → {Thickness[.005], RGBColor[1, 0, 0]},
PlotRange → All
]
```



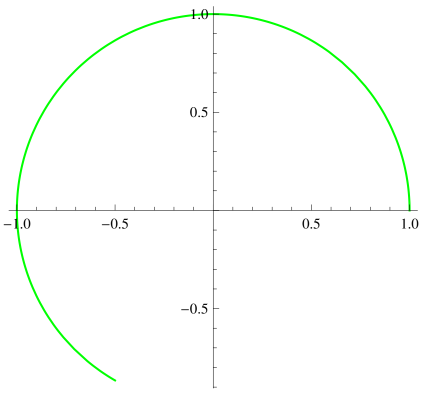


問題 A.5.1 $y = \frac{\cos 2\pi x}{2\pi x}$ $(-5 \le x \le 5)$ のグラフを描け.

例 A.5.2 (グラフ: パラメタ 1 つ) 次のグラフを描け: $\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases}$

【解】 *(*例 A.5.2*)*

```
f1 = {Cos[t], Sin[t]};
g1 = ParametricPlot[
f1, {t, 0, 4Pi/3},
AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → {Thickness[.005], RGBColor[0, 1, 0]},
PlotRange → All
]
```

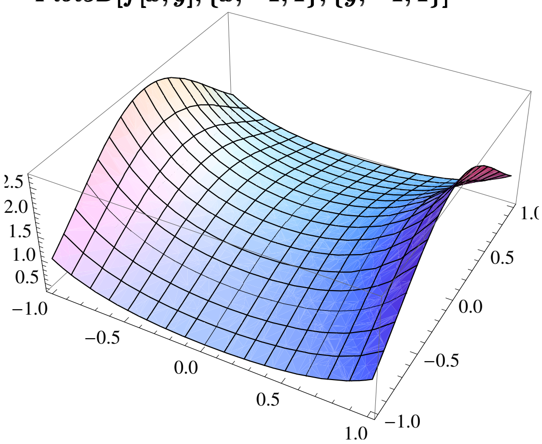


問題 A.5.2 次のグラフを描け: $\begin{cases} x &= t\cos\frac{1}{t} \\ y &= t\sin\frac{1}{t} \end{cases}$

例 A.5.3 (グラフ: x-y-z 座標上) $z = e^{x^2-y^2}$ のグラフを描け.

【解】 *(*例 A.5.3*)*

```
f[x_, y_]:=E^(x^2 − y^2);
gf = Plot3D[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}]
```



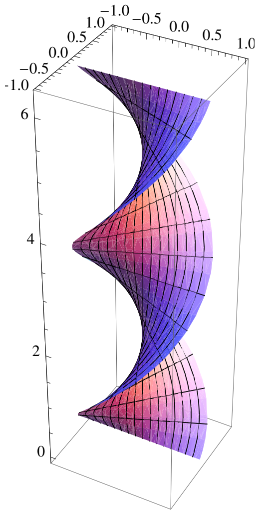
問題 A.5.3 $z = \sin(2\pi\sqrt{x^2+y^2})$ のグラフを描け.

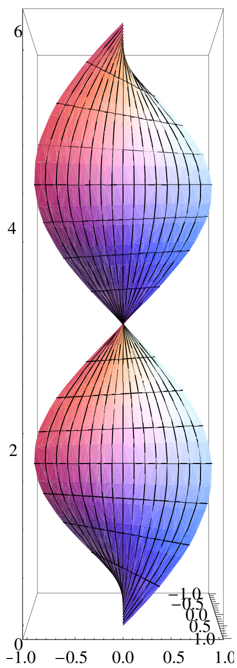
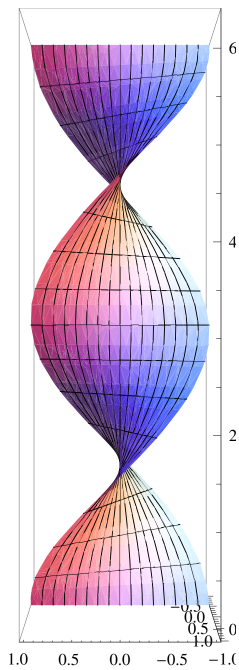
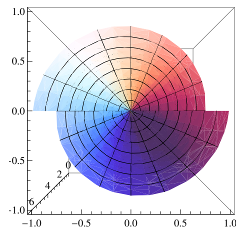
例 A.5.4 (グラフ: パラメタ 2 つ) 次のグラフを描け: $\begin{cases} x &= t\cos s \\ y &= t\sin s \\ z &= s \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$, $s \in [0, 2\pi]$.

【解】 *(*例 A.5.4*)*

```
x1 = tCos[s]; y1 = tSin[s]; z1 = s;
gf1 = ParametricPlot3D[{x1, y1, z1}, {t, −1, 1}, {s, 0, 2Pi}]
Show[gf1, ViewPoint → {2, 0, 0}]
```

Show[*gf1*, *ViewPoint* → {0, 2, 0}]
Show[*gf1*, *ViewPoint* → {0, 0, 2}]

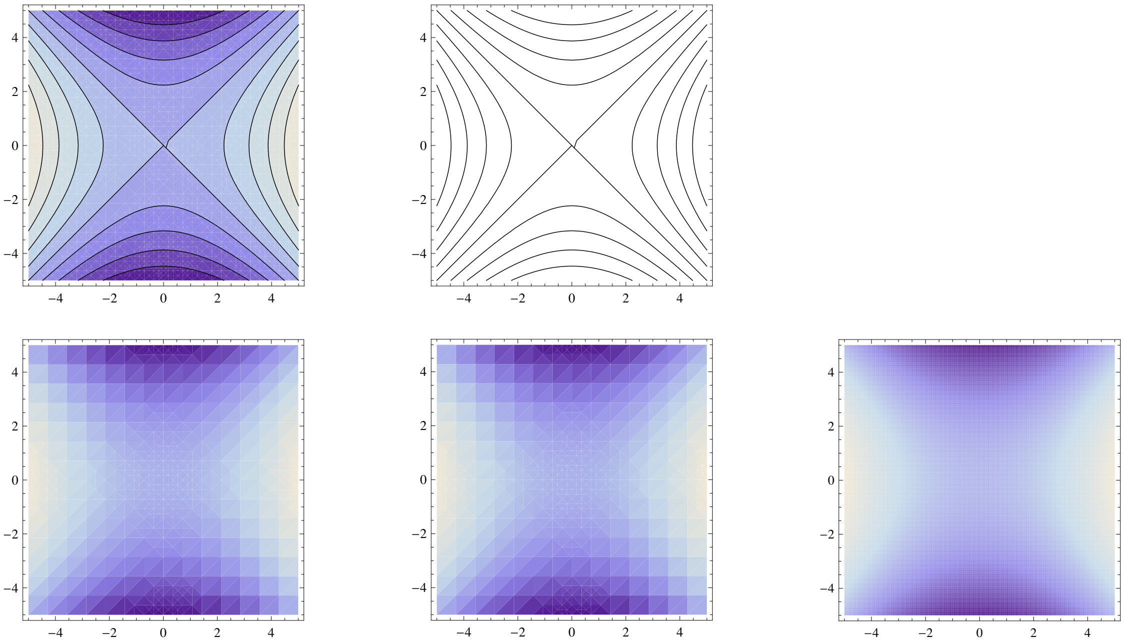


問題 A.5.4 次のグラフを描け: $\begin{cases} x &= (\sin t + 1)\cos s \\ y &= (\cos t + 1)\sin s \\ z &= \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [0, 2\pi]$.

例 A.5.5 (等高線) $z = x^2 - y^2$ の等高線を描け.

【解】 *(*例 A.5.5*)*
ContourPlot[*x*^2 − *y*^2, {*x*, −5, 5}, {*y*, −5, 5}]
ContourPlot[*x*^2 − *y*^2, {*x*, −5, 5}, {*y*, −5, 5}, *ContourShading* → *False*]
DensityPlot[*x*^2 − *y*^2, {*x*, −5, 5}, {*y*, −5, 5}]
DensityPlot[*x*^2 − *y*^2, {*x*, −5, 5}, {*y*, −5, 5}, *Mesh* → *False*]
DensityPlot[*x*^2 − *y*^2, {*x*, −5, 5}, {*y*, −5, 5}, *Mesh* → *False*, *PlotPoints* → 200]



問題 A.5.5 $z = \sin(2\pi\sqrt{x^2+y^2})$ の等高線を描け.

A.6 微分方程式

例 A.6.1 (微分方程式（求積できるもの）) 次の微分方程式を解け.

$$\text{(i)}\ \frac{dx}{dt} = kx,\ k \in \mathbf{R} \qquad \text{(ii)}\ x'' + x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$$

$$\text{(iii)}\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = x(t) \\ (x(0), y(0)) = (1, 2) \end{cases}$$

【解】 ***(*例 A.6.1*)***

DSolve$[x'[t] == kx[t], x[t], t]$

DSolve$[\{x''[t] + x[t] == 0, x[0] == 1, x'[0] == 0\}, x[t], t]$

DSolve$[\{x'[t] == y[t], y'[t] == x[t], x[0] == 1, y[0] == 2\}, \{x[t], y[t]\}, t]$

$\{\{x[t] \to e^{kt}C[1]\}\}$

$\{\{x[t] \to Cos[t]\}\}$

$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{2}e^{-t}\left(-1+3e^{2t}\right), y[t] \to \frac{1}{2}e^{-t}\left(1+3e^{2t}\right)\right\}\right\}$

問題 A.6.1 次の微分方程式を解け.

$$\text{(i)}\ xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 4xe^x \qquad \text{(ii)}\ x'' = k - \frac{x}{10},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ k \in \mathbf{R}$$

$$\text{(iii)}\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) + y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -x(t) \\ (x(0), y(0)) = (1/10000, 1) \end{cases}$$