平成24年度 基礎数理演習C

高橋 亮

平成24年4月24日

目 次

1　常微分方程式の逐次近似と縮小写像の原理

1.1　常微分方程式とその解

本節（§ 1）では断りのない限り,

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$: 領域（連結開集合）, $I \subset \mathbf{R}$: 開区間, $f = f(x,t) : \Omega \times I \to \mathbf{R}^n$: ベクトル値関数

とし, $\mathbf{R}^n$ における絶対値 $|\cdot|$ を次のように定義する.

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{for } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

本節で考察する**常微分方程式**（または **ODE**）とは次の形で表される方程式のことである:

$$\dot{x} = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times I. \tag{1.1}$$

ここで, $\dot{} = \frac{d}{dt}$ である.

応用上では (1.1) に初期条件を課すのが通例である. すなわち, 与えられた $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$ に対して, 次の常微分方程式 (1.1) の**初期値問題**を考える：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

通常, 簡単のために $t_0 = 0 \in I$ とすることが多い.

定義 1.1 $x = x(t)$ が初期値問題 *(1.2)* の解 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x が次の *(i)-(iii)* をみたす:

(i) $(x(t), t) \in \Omega \times I$, $\forall t \in I$.

(ii) x は I 上 C^1 級関数（*i.e.,* x は I 上微分可能でかつその導関数は I 上連続）.

(iii) $x(t_0) = x_0$ かつ $\dot{x} = f(x,t)$ が各 $t \in I$ に対して成立する.

ここで次の 3 つの疑問が生じる:

【Q.1】解は存在するか？

【Q.2】解が存在すればそれは一意的か？

【Q.3】解の延長の問題（時間大域的存在 or 有限時間爆発）

本ノートにおいて, 上記 3 つの質問に関して一般的に取り扱うことはしない. その代わりに, 以下に関連した簡単な例を 3 つあげる. 記述してある根拠を考えるのは自習問題とする.

例 1.1 (時間大域的存在と一意性が成立する例)

$n = 1$, $\Omega = \mathbf{R}$, $I = \mathbf{R}$, $f(x,t) = x$, $x_0 = c_0 \in \mathbf{R}$, $t_0 = 0$, *i.e.,*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = c_0. \end{cases}$$

後述の定理 *1.4* より解の一意性が保証され, 解は $x(t) = c_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$.

例 1.2 (一意性が成立しない例)

$n = 1$, $\Omega = \mathbf{R}$, $I = \mathbf{R}$, $f(x,t) = |x|^{1/2}$, $x_0 = 0$, $t_0 = 0$, *i.e.,*

$$\begin{cases} \dot{x} = |x|^{1/2} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

この初期値問題の解は次に示すように無数に存在する: $\forall a, b > 0$ に対して,

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+a)^2 & (t \le -a) \\ 0 & (-a \le t \le b) \\ \frac{1}{4}(t-b)^2 & (t \ge b). \end{cases}$$

例 1.3 (ロジスティック (Logistic) 方程式) 時刻 $t=0$ における人口を c としたとき, 彼らが住む世界が非常に単純であるならば, その人口の増減は次の微分方程式で近似される.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x),\ t>0 \\ x(0)=c. \end{cases}$$

ここで, 簡単のために諸係数はすべて 1 とした.
後述の定理 *1.4* より解の一意性が保証され, 解は

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (c=0) \\ 1 & (c=1) \\ \frac{ae^t}{1-a+ae^t} & (otherwise). \end{cases}$$

・$c=0$（*resp.* $c=1$）の場合, $\dot{x}\equiv 0$ が成立するので, 解 $x(t)\equiv 0$（*resp.* $x(t)\equiv 1$）は**平衡点**（*or* **不動点**, **定常解**）とよばれる.
・$c>0$ かつ $c\neq 1$ の場合, 解は時間大域的に存在（*i.e.*, $[0,+\infty)$ 上存在）し,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1.$$

・$c<0$ の場合（※人口が負であるのはおかしいが, 数学的には考慮してもよい）,

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}} x(t) = -\infty \qquad for\ T_{\max} := \log\frac{1+|c|}{|c|}$$

が成立する. このことを解 $x(t)$ は時刻 $T_{\max}$ で（有限時間）**爆発する**という. したがって, 解は $[0,T_{\max})$ 上で存在する.

1.2 Banach 空間

本節では以下 X を実ベクトル空間とする.

定義 1.2 写像 $\|\cdot\| : X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$ が X 上の**ノルム** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\|\cdot\|$ が次の *(N1)-(N3)* をみたす:
(N1) $\|x\|\geq 0,\ \forall x\in X$ かつ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$（0 は X の零元）.
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall x\in X,\ \forall \alpha\in\mathbf{R}$.
(N3) $\|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|,\ \forall x,y\in X$（**三角不等式**）.
X 上にノルム $\|\cdot\|$ が定義されるとき, X を（実）**ノルム空間**といい, $X=(X,\|\cdot\|)$ と書く. ただし, 文脈から備わっているノルムが明らかな場合は単に X と略記することもある. また, X 上のノルムであることを強調するために $\|\cdot\|_X$ と書くこともある.

定義 1.3 $X=(X,\|\cdot\|)$：ノルム空間.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ が $x_0\in X$ に**収束する** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$.
これを

$$\|x_n-x_0\|\to 0,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\quad x_n\to x_0\ in\ X$$

などと書く.

命題 1.1 $X=(X,\|\cdot\|)$：ノルム空間.
$\{x_n\}\subset X$ が収束する $\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ は **Cauchy 列**, *i.e.*,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N},\quad s.t.\quad \|x_n-x_m\|<\varepsilon,\ \forall n,m\geq N.$$

定義 1.4 $X = (X, \|\cdot\|)$：ノルム空間.
X が（実）**Banach 空間** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 命題 *1.1* の逆の命題が成立する（**完備性**）.
言い換えると, *Banach* 空間とは完備なノルム空間である.

例 1.4 $\mathbf{R}$ は, その上のノルムを通常の絶対値として採用することにより, *Banach* 空間となる（実数の完備性）.

例 1.5 一方, $\mathbf{Q}$ は, その上のノルムを通常の絶対値として採用しても, *Banach* 空間とならない. 実際, $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots \notin \mathbf{Q}$ に対して, $\{x_n\} \subset \mathbf{Q}$ を $\sqrt{2}$ の小数表示の小数点第 n 位で打ち切ったもの, *i.e.*,

$$x_1 = 1.4,\ x_2 = 1.41,\ x_3 = 1.414,\ x_4 = 1.4142,\ x_5 = 1.41421, \cdots$$

とすると, $\{x_n\}$ は *Cauchy* 列となるが,

$$x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$$

であり, $\mathbf{Q}$ で収束しない.

注意 (ノルム空間上の強位相) ベクトル空間 X にノルム $\|\cdot\|$ を導入することにより, X に**位相**を入れることができる. いろいろな位相が考えられるが, 最も代表的なものは**強位相**である. 強位相は次のように定義される：
ノルム空間 $X = (X, \|\cdot\|)$ において,

$$G \subset X \text{ が}\textbf{開集合} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in G,\ \exists r = r(a) > 0 \quad s.t. \quad B_r(a) := \{x \in X \mid \|x - a\| < r\} \subset G.$$

このように位相を入れることにより, **閉集合**, **近傍**, *etc...* といった位相的概念が定義される. 例えば,

$$A \subset X \text{ が閉集合} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \ni x_n \to x_0 \ in\ X \implies x_0 \in A.$$

無限次元の Banach 空間を一つあげておこう.

定義 1.5 $I \subset \mathbf{R}$：区間, $k = 0, 1, \cdots,\ n = 1, 2, \cdots$.

$$C^k(I; \mathbf{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f \text{ は } I \text{ 上 } C^k \text{ 級 } \mathbf{R}^n \text{ 値関数}\}.$$

しばしば $C(I) = C^0(I)$, 丸かっこの省略（例：$I = (a,b), [a,b]$ ならば各々 $C(a,b), C[a,b]$）と略記する.

定理 1.1 $C[a,b]$（$-\infty < a < b < +\infty$）はノルム

$$\|x\| := \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \quad for\ x \in C[a,b]$$

に関し *Banach* 空間となる.

1.3 縮小写像の原理

ここでは Banach 空間での**縮小写像の原理**とその応用について述べる.

定理 1.2 (縮小写像の原理) $X = (X, \|\cdot\|)$：*Banach* 空間, $F : X \to X$：**縮小写像**, *i.e.*,

$$\exists k \in (0,1) \quad s.t. \quad \|F(x) - F(y)\| \le k\|x - y\|,\ \forall x, y \in X.$$

$\Longrightarrow \exists 1 z \in X\ s.t.\ F(z) = z$（不動点の一意存在）.

この定理は実際には次の形で用いられることが多い.

定理 1.3 (縮小写像の原理・改) $X = (X, \|\cdot\|)$：*Banach* 空間, $A \subset X$：閉集合, $F : A \to A$：縮小写像, *i.e.*,

$$\exists k \in (0,1) \quad s.t. \quad \|F(x) - F(y)\| \le k\|x - y\|,\ \forall x, y \in A.$$

$\Longrightarrow \exists 1 z \in A\ s.t.\ F(z) = z.$

定理 1.1, 定理 1.3 を用いて, 次の定理を示そう.

定理 1.4 (常微分方程式の時間局所解の一意存在) $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$: *given*, $f : \Omega \times I \to \mathbf{R}^n$: 次の性質（**Lipschitz 条件**）をみたす;

$$\exists L > 0 \quad s.t. \quad |f(x,t) - f(y,t)| \le L|x-y|, \ \forall x, y \in \Omega, \ \forall t \in I. \tag{1.3}$$

$\Longrightarrow \exists \delta > 0$ *s.t.* 初期値問題 *(1.2)* は $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I$ で定義された解 $x = x(t)$ をもつ.
（*i.e.*, I を $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で置き換えた定義 *1.1* の *(i)-(iii)* が成立する）

【証明の概略】一意性の証明はレポート問題とし, ここでは存在性のみ証明する.

Step.1 まず, 次の同値の命題に注意する（ただし, $\delta > 0$ は後で決定される）:

$x = x(t) \in C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ が微分方程式 (1.2) の解 $\Leftrightarrow$ $x = x(t) \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ が次の積分方程式の解.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{1.4}$$

この観点から,

$$F(x(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(x(s), s)ds \quad \text{for } x \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \tag{1.5}$$

を導入すれば, 次の同値の命題を得る:

$x = x(t) \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ が積分方程式 (1.4) の解 $\Leftrightarrow$ $x = x(t) \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ が $F(x) = x$ をみたす.

よって, 存在性の問題は

(1.5) で定義された $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ からそれ自身への写像 F に対して, その不動点を見つけること

に帰着される. したがって, F の不動点の存在を証明すればよい.

Step.2 $\exists R > 0$, $\exists r > 0$ s.t.

$$\hat{D} := \{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid |x - x_0| \le R, \ |t - t_0| \le r\} \subset \Omega \times I.$$

$\hat{D}$ は $\Omega \times I$ の有界閉部分集合（コンパクト部分集合）. そこで,

$$\delta_0 := \min\{r, R/M\}, \quad M := \max_{(x,t) \in \hat{D}} |f(x,t)|$$

とすると, $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ に対して,

$$x(t) \in \hat{D}, \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \Rightarrow F(x(t)) \in \hat{D}, \ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{1.6}$$

Step.3 $\delta \in (0, \delta_0]$ に対して,

$$A_\delta := \{x \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mid \|x - x^0\| \le R\}$$

を考える. ここで, $x^0 = x^0(t) \equiv x_0$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$（定理 1.1 参照）. このとき, (1.6) から

$$x \in A_\delta \ \Rightarrow \ F(x) \in A_\delta \tag{1.7}$$

が成立し, かつ

$$|F(x(t)) - F(y(t))| \le L\delta \|x - y\|, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall x, y \in A_\delta. \tag{1.8}$$

$$\therefore \ \|F(x) - F(y)\| \le L\delta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in A_\delta.$$

Step.4 いま改めて

$$\delta = \min\{\delta_0, 1/(2L)\}$$

とおくと,

$$\|F(x) - F(y)\| \le \frac{1}{2}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in A_\delta$$

が成立するから, F は A_δ からそれ自身への縮小写像となる. 定理 1.1 より $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ は Banach 空間であり, A_δ はその閉部分集合である. ゆえに定理 1.3 が適用できて, $\exists \tilde{x} \in A_\delta$ s.t. $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$. ∎

注意 上の定理 *1.4* の証明において, 一意性は別に確認する必要がある. なぜなら, 上の証明では A_δ に解が存在することを示しただけで, $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ にまた別の解が存在するかもしれないからである.

1.4 逐次近似法

ここでは, **逐次近似法**の応用の一端を概観する.

初期値問題 (1.2) の**逐次近似列** $\{x^k\} \subset C(J)$（$J \subset I$：閉区間）は次のように与えられる：

$$\begin{cases} x^0 \equiv x_0 \\ x^{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x^k(s), s)ds \quad (k = 0, 1, \cdots). \end{cases} \tag{1.9}$$

厳密性をないがしろにして言えば, もし

$$\exists \bar{x} \in C(J) \quad \text{s.t.} \quad x^k \to \bar{x} \text{ in } C(J)$$

が示されれば, $\bar{x}$ は (1.2) の解であることが期待される. このことを Mathematica を用いて眺めてみよう.

例題 1.1 次の初期値問題（$n = 1$）について, 厳密解と逐次近似列で構成した数値解とを, グラフによって比較せよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + e^t, \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

【解答例】Mathematica によるプログラムの一例を以下に示す：

```
(*Definition of f = f(x,t)*)

f[x_, t_] = -x + Exp[t];


(*Error message*)

approximate::nonnegativeint = "'N' must be replaced by a non-negative integer.";


(*Construction of successively approximate sequences

t : time, x0 : initial value, N : number of iterations

The initial time t0 is always 0*)

approximate[t_, x0_, N_]:=

Module[{k = 0},

If[Or[N < 0, Not[IntegerQ[N]]], Message[approximate::nonnegativeint, N],
```

x[0, s_]:=x0;

While[$k < N$,

x[k_, s_]:=($x[k,s]$ = x0 + Integrate[$f[x[k-1,u],u],\{u,0,s\}$]);

k++

]; (*Instead of “While,” you can also use “For” and “Do”*)

$x[N,t]$

]

];

(*An example of “approximate”*)

approximate[1, 1, 3]

$-\frac{7}{6}+e$

(*Numerical solution (data) : k = number of iterations, d = [step size], tlast = [last time]*)

nsol[k_, d_, x0_, tlast_]:=Table[{t, approximate[t, x0, k]}, {t, 0, tlast, d}];

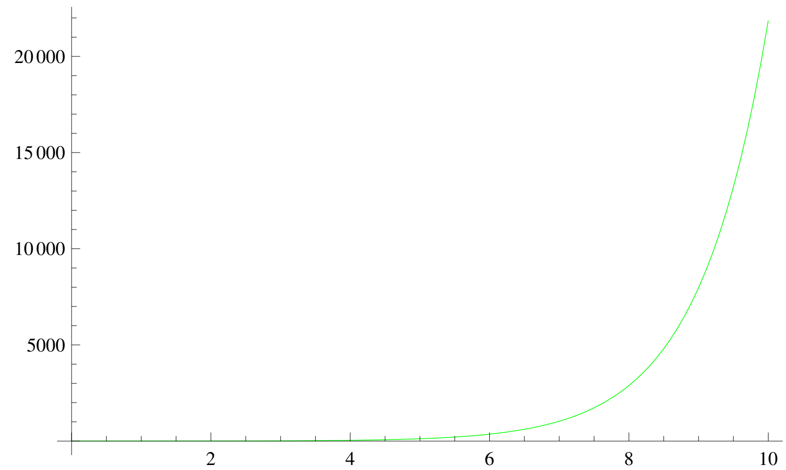
ngraph[k_, d_, x0_, tlast_]:=ListLinePlot[nsol[k, d, x0, tlast],

PlotStyle → {Thickness[.001], RGBColor[0, 1, 0]},

PlotRange → All];

(*Graph of the numerical solution : $k = 3, d = 0.1$, x0 = 1, tlast = 10*)

ngraph[3, 0.1, 1, 10]



(*Analytical solution : x0 = 1*)

asol[x0_]:=DSolve[{$x'[t]$ == $f[x[t], t], x[0]$ == x0}, $x[t], t$];

asol[1]

$$\left\{\left\{x[t]\to\frac{1}{2}e^{-t}\left(1+e^{2t}\right)\right\}\right\}$$

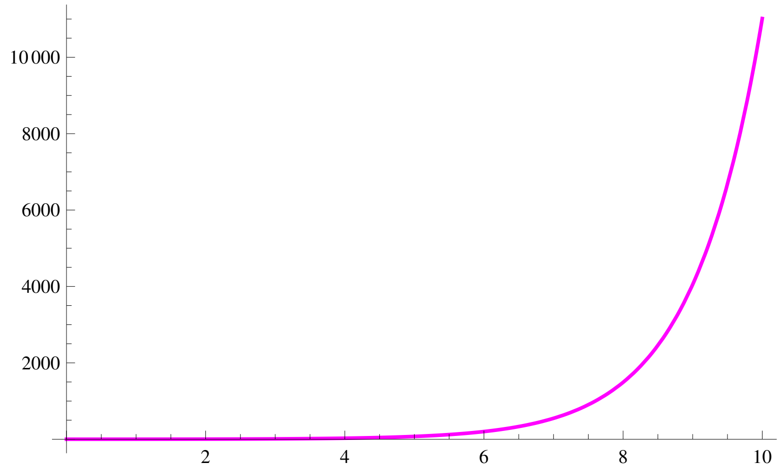
(*Graph of the analytical solution : x0 = 1, tlast = 10*)

agraph[x0_, tlast_]:=Plot[Evaluate[$x[t]$/.asol[x0]], {t, 0, tlast},

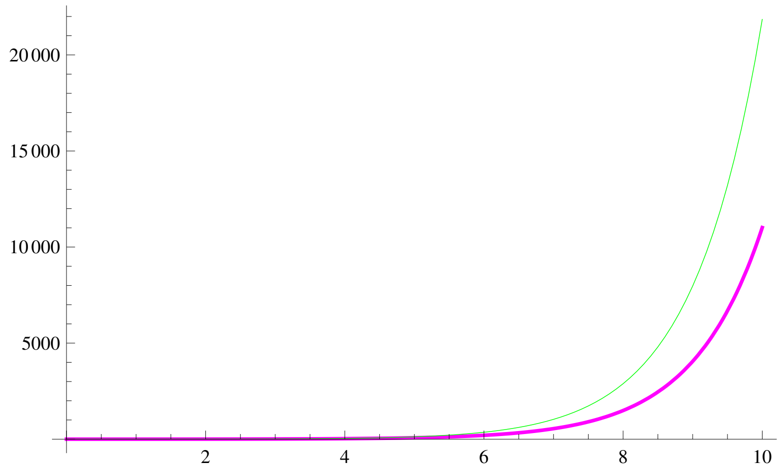
PlotStyle → {Thickness[.005], RGBColor[1, 0, 1]},

PlotRange → All];

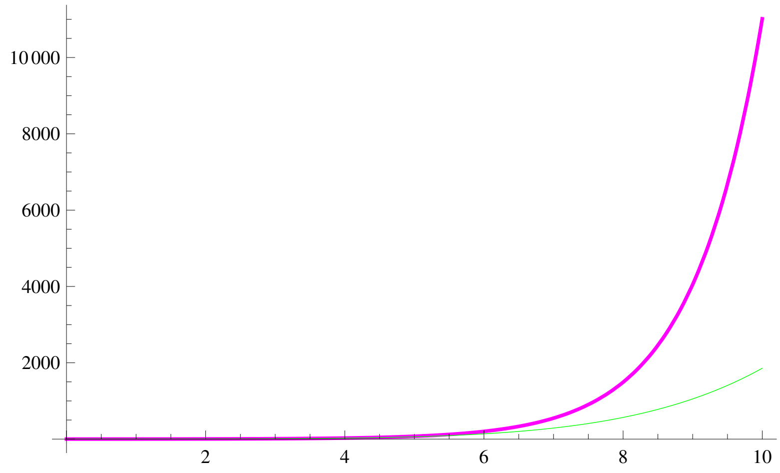
agraph[1, 10]



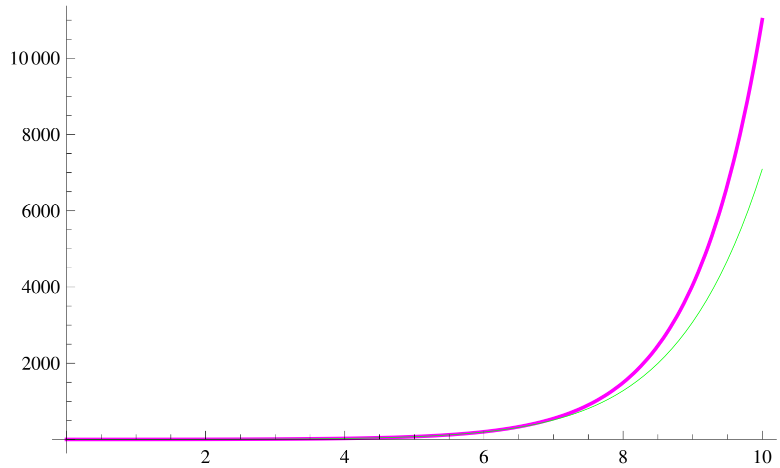
Show[agraph[1, 10], ngraph[3, 0.1, 1, 10]]



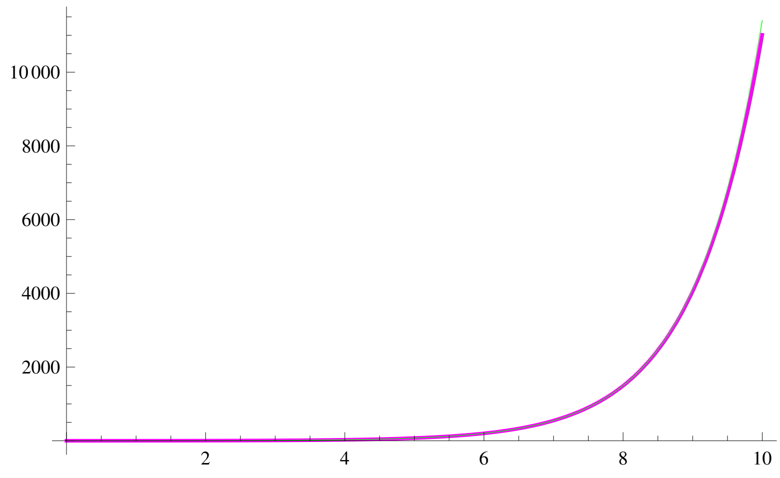
Show[agraph[1, 10], ngraph[6, 0.1, 1, 10]]



Show[agraph[1, 10], ngraph[10, 0.1, 1, 10]]



Show[agraph[1, 10], ngraph[15, 0.1, 1, 10]]



§1 の演習問題

演習問題 1.1 例題 *1.1* について, 各 d, $tlast$ に対してどれくらいの回数反復させれば厳密解を近似できるといえるかを吟味せよ.

演習問題 1.2 次の初期値問題（$n=1$）について, 厳密解と逐次近似列で構成した数値解とを, グラフによって比較せよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = te^{-t^2} - 2tx, \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

また, 各 d, $tlast$ に対してどれくらいの回数反復させれば厳密解を近似できるといえるかを吟味せよ.

演習問題 1.3 次の初期値問題（$n=1$）について, 有限時間爆発するか否かを答え, もし爆発するならばその時刻を求めよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \ t > 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

また, 厳密解と逐次近似列で構成した数値解とを, グラフによって比較し, 各 d, $tlast$ に対してどれくらいの回数反復させれば厳密解を近似できるといえるかを吟味せよ.

演習問題 1.4 (調和振動) 次の初期値問題（$n=2$）について, 厳密解の軌道と逐次近似列で構成した数値解の軌道とを, 図を用いて比較せよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \ t > 0 \\ \dot{y} = -4\pi x, \ t > 0 \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

また, 各 d, $tlast$ に対してどれくらいの回数反復させれば厳密解を近似できるといえるかを吟味せよ.

演習問題 1.5 (振り子) 次の初期値問題（$n=2$）について, 逐次近似列で構成した数値解の軌道を, 図を用いて考察せよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \ t > 0 \\ \dot{y} = -\sin x, \ t > 0 \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

また, d, $tlast$ を変化させることによって, 図はどのように変化するかを吟味せよ.

§1 のレポート問題

以下のレポート問題 1.1, 1.2 を解き, 5 月 29 日の基礎数理演習 C の講義開始前 までに提出せよ．もちろん, 5 月 29 より前の基礎数理演習 C の講義のときに提出してもよい.

レポート問題 1.1 定理 *1.4* の【証明の概略】について, 以下の *(1)-(5)* に答えよ.

(1) Step.1 において詳細が省かれた *2* つの同値の命題を証明せよ.

(2) Step.2 の *(1.6)* を示せ.

(3) Step.3 の *(1.7), (1.8)* を示せ.

(4) A_δ は $C[t_0-\delta, t_0+\delta]$ の（強位相についての）閉部分集合であることを示せ.

(5) 解の一意性の証明 積分方程式 *(1.4)* の解が *2* つあると仮定し，それらを $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ とおき, $y = y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ とする．このとき, 次の不等式が成立することを示せ.

$$|y(t)| \le L \int_{t_0}^{t} |y(s)|ds, \quad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta].$$

ここで, L は *(1.3)* のものである．また, 同様の評価を再帰的に実行し, その結果として次が成立することを証明せよ.

$$y(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta].$$

レポート問題 1.2 (逐次近似法による定理 1.4 の証明) 定理 *1.4* の【証明の概略】に倣い, 逐次近似法によって, 定理 *1.4* の解の存在性を証明せよ.

【ヒント】*(1.9)* で与えられる $\{x^k\}$ が適当な $\delta > 0$ に対して, 次の *2* つの事項をみたすことを証明する.

・$\exists A_\delta \subset C[t_0-\delta, t_0+\delta]$：閉部分集合 *s.t.* $x^k \in A_\delta$, $\forall k = 0, 1, \cdots$.

・$C[t_0-\delta, t_0+\delta]$ で $\{x^k\}$ が *Cauchy* 列をなすことを証明する.

【ヒント＆注意】積分方程式 *(1.4)* の解を構成する際, *(1.9)* で $k \to \infty$ なる極限をとるが, 極限と積分の順序交換が成立することを示す必要がある．答案には, なぜ順序交換可能であるかを明記せよ.