



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA (ITA)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
ESPACIAIS

WRITTEN AND CODED BY ALISSON VINICIUS BRITO LOPES

REPORT:
PROJECT No. 3

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS-SP

01 DE JULHO DE 2015

1 INTRODUÇÃO

O Objetivo inicial deste trabalho é calcular o escoamento sobre um perfil biconvexo utilizando uma formulação de potencial completo, dando assim, continuidade ao que já fora feito nos projetos 1 e 2. Será utilizada a formulação do potencial completo em forma conservativa e em coordenadas curvilíneas gerais que se conformam ao perfil. Devido à exiguidade de tempo, será considerando apenas casos sem sustentação, ou seja, com ângulo de ataque nulo. Utilizar-se-á as malhas computacionais desenvolvidas no Projeto 2.

Uma vez que o objetivo inicial é atender os casos mandatórios e realizar os três estudos de caso, o código aqui apresentado ainda não possui o amortecimento temporal implementado conforme sugerido por Holst. O procedimento de discretização espacial da equação do potencial completo que deve ser utilizado neste trabalho é o esquema da densidade artificial de Holst & Ballhaus. O esquema iterativo a ser utilizado será o AF2 de fatoração aproximada.

1.1 Casos Mandatórios e adicionais

Dois casos serão investigados, considerando inicialmente o perfil biconvexo. No caso 1 será considerando um perfil de espessura $t = 0.10$, $M_\infty = 0.70$ e $\alpha = 0^\circ$ este caso corresponde ao caso subcrítico, por sua vez o caso supercrítico (Caso 2) será considerado espessura $t = 0.10$, $M_\infty = 0.84$ e $\alpha = 0^\circ$.

Para os casos adicionais pretende-se investigar entre os casos apresentados os seguintes: Obter uma malha computacional sobre o perfil NACA 0012 e calcular o escoamento para o caso 2 sem sustentação; Estudar o efeito sobre a variação do número de Mach para baixos valores de Mach até o regime transônico, até que ocorra divergência do método, analisar porquê a solução finalmente diverge e analisar a influência do parâmetro c ; Estudar os efeitos dos vários parâmetros de relaxação na razão de convergência e incluir uma sequência de alfas e analisar os resultados.

2 FORMULAÇÃO

2.1 Operadores

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\)_{i,j} = \delta_{\xi}(\)_{i,j} = \frac{1}{2}((\)_{i+1,j} - (\)_{i-1,j}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\)_{i,j} = \delta_{\eta}(\)_{i,j} = \frac{1}{2}((\)_{i,j+1} - (\)_{i,j-1}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\)_{i+\frac{1}{2},j} = \vec{\delta}_{\xi}(\)_{i+\frac{1}{2},j} = ((\)_{i+1,j} - (\)_{i,j}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\)_{i,j+\frac{1}{2}} = \vec{\delta}_{\eta}(\)_{i,j} = ((\)_{i,j+1} - (\)_{i,j}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\)_{i+\frac{1}{2},j} = \vec{\mu}_{\xi} \delta_{\eta}(\)_{i,j} = \frac{1}{4}((\)_{i+1,j+1} + (\)_{i,j+1} - (\)_{i+1,j-1} - (\)_{i,j-1}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\)_{i,j+\frac{1}{2}} = \vec{\mu}_{\eta} \delta_{\xi}(\)_{i,j} = \frac{1}{4}((\)_{i+1,j+1} + (\)_{i+1,j} - (\)_{i-1,j+1} - (\)_{i-1,j}) \quad (6)$$

2.2 Cálculo do Jacobiano e quantidades métricas

A transformação de coordenadas do espaço cartesiano bidimensional (físico) para o espaço de coordenadas curvilíneas gerais (espaço computacional) leva as seguintes equações para o cálculo do jacobiano e termos de métricas:

$$J = (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi})^{-1} \quad (7)$$

$$\xi_x = Jy_{\eta} \quad (8)$$

$$\xi_y = Jx_{\eta} \quad (9)$$

$$\eta_x = -Jy_\xi \quad (10)$$

$$\eta_y = Jx_\xi \quad (11)$$

$$A_1 = \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad (12)$$

$$A_2 = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \quad (13)$$

$$A_3 = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad (14)$$

O que se percebe na prática é que onde a malha é mais refinada o jacobiano é grande, ao passo que, onde a área da cela é grande o jacobiano é pequeno, o jacobiano configura-se como um valor sempre positivo, uma vez que o sentido de leitura da malha corresponde à direção ξ no sentido anti-horário e a direção η no sentido da fronteira externa em direção ao perfil.

Holst argumenta que a forma de calcular as quantidades métricas como apresentada acima tem apresentado bons resultados em malhas suaves, mas apresenta resultados ruins quando aplicados em malhas não suaves. Uma vez que se conclui no projeto 2 que as malhas elípticas são mais suaves (embora percam ortogonalidade próxima a parede), neste sentido, mesmo antes de proceder essa simulação é de se esperar que ao utilizar a malha elíptica os resultados esperados sejam melhores quando comprado com a malha parabólica.

Quando maior o valor de A_2 mais não ortogonal será a malha, enquanto os termos A_1 e A_3 indicam o **alongamento** da malha (obs.: é comum ouvir em discussões sobre CFD a expressão “razão de aspecto”, entretanto deve-se evitar esse tipo de tradução ao “pé da letra” para *aspect ratio*).

É momento de apresentar as equações para o calculo das componentes contravariantes de velocidade:

$$U_{i,j} = A_{1i,j} \phi_{\xi_{i,j}} + A_{2i,j} \phi_{\eta_{i,j}} \quad (15)$$

$$V_{i,j} = A_{2i,j} \phi_{\xi_{i,j}} + A_{3i,j} \phi_{\eta_{i,j}} \quad (16)$$

$$U_{i+\frac{1}{2},j} = A_{1i+\frac{1}{2},j} \phi_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} + A_{2i+\frac{1}{2},j} \phi_{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (17)$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = A_{2i+\frac{1}{2},j} \phi_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}} + A_{3i+\frac{1}{2},j} \phi_{\eta_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (18)$$

$$U_{i,j+\frac{1}{2}} = A_{1i,j+\frac{1}{2}} \phi_{\xi_{i,j+\frac{1}{2}}} + A_{2i,j+\frac{1}{2}} \phi_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}} = A_{2i,j+\frac{1}{2}} \phi_{\xi_{i,j+\frac{1}{2}}} + A_{3i,j+\frac{1}{2}} \phi_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

Se faz necessário calcular as componentes contravariantes de velocidades nos pontos $i, j + \frac{1}{2}$ e $i + \frac{1}{2}, j$ uma vez que as mesmas serão requisitados no calculo da densidade artificial.

2.3 Esquema da densidade artificial

Sendo muito breve, a ideia do esquema de densidade artificial é ter um esquema *upwind*, só que sem adicionar explicitamente os termos de dissipação artificial igual ao Jameson. A equação originalmente a ser resolvida é a equação 21:

$$\left(\frac{\rho U}{J}\right)_{\xi} + \left(\frac{\rho V}{J}\right)_{\eta} = 0.0 \quad (21)$$

Uma vez que as variáveis na eq. (21) não são função do tempo, a mesma será resolvida utilizando técnica conhecido como método de relaxação, o que significa que: a solução da mesma será obtida por meio de um processo iterativo. A solução dessa equação será considerada convergida, quando a solução se tornar invariante com a continuação das iterações. Neste contexto, o *resíduo* é a grandeza sobre a qual se efetua os testes de convergência.

O problema discreto deste projeto estará convenientemente escrito na forma padrão de correção (*forma delta*), eq. (22) , conforme descrito por Holst & Ballhaus:

$$NC_{i,j}^n + \omega L\Phi_{i,j}^n = 0.0 \quad (22)$$

$$C_{i,j}^n = \Delta\Phi_{i,j}^n = \Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n \quad (23)$$

O termos $L\phi_{i,j}$ (eq. (24)) é a discretização da equação diferencial, também chamado de operador de resíduo e $C_{i,j}^n$ (eq.(23)) é a correção a ser efetuada no potencial no nível de iteração n:

$$L\phi_{i,j} = \tilde{\delta}_{\xi} \left(\frac{\tilde{\rho}U}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \tilde{\delta}_{\eta} \left(\frac{\bar{\rho}V}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Para o calculo dos coeficientes de densidade $\tilde{\rho}$ e $\bar{\rho}$ se faz necessário conhecer a densidade nos pontos inteiros e nos pontos deslocados mais meio.

$$\rho_{i,j} = \left(1.0 - \left(\frac{\gamma - 1.0}{\gamma + 1.0}\right) (U_{i,j}\delta_{\xi}(\phi)_{i,j} + V_{i,j}\delta_{\eta}(\phi)_{i,j})\right)^{\left(\frac{1.0}{\gamma-1}\right)} \quad (25)$$

$$\rho_{i+\frac{1}{2},j} = \left(1.0 - \left(\frac{\gamma - 1.0}{\gamma + 1.0}\right) \left(U_{i+\frac{1}{2},j}\delta_{\xi}(\phi)_{i+\frac{1}{2},j} + V_{i+\frac{1}{2},j}\delta_{\eta}(\phi)_{i+\frac{1}{2},j}\right)\right)^{\left(\frac{1.0}{\gamma-1}\right)} \quad (26)$$

$$\rho_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(1.0 - \left(\frac{\gamma - 1.0}{\gamma + 1.0} \right) \left(U_{i,j+\frac{1}{2}} \delta_\xi(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}} + V_{i,j+\frac{1}{2}} \delta_\eta(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \right)^{\left(\frac{1.0}{\gamma - 1} \right)} \quad (27)$$

O calculo das densidades artificiais é conforme as equações 28 e 30, os valores subscritos “ r ” e “ s ” são adotados de tal fé a garantir que o controle da direção *upwind* seja respeitada.

$$\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2},j} = [(1 - v)\rho]_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j} \rho_{i+r+\frac{1}{2},j} \quad (28)$$

$$r = +1 \text{ se } U_{i+\frac{1}{2},j} < 0.0, \text{ senão } -1; \quad (29)$$

$$\bar{\rho}_{i,j+\frac{1}{2}} = [(1 - v)\rho]_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} \rho_{i,j+s+\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$s = +1 \text{ se } V_{i,j+\frac{1}{2}} < 0.0, \text{ senão } -1; \quad (31)$$

O calculo dos termos $v_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ tratam-se de funções do tipo “switching” ou “transiction” e serão feitos conforme as equações 32 e 33, baseando-se na análise da densidade que é um parâmetro mais “barato” computacionalmente quando comparado ao calculo baseado no número de Mach. O parâmetro “ c ” é um *user-defined* valor real, que deve ser utilizado dentro do seguinte intervalo: $1 \leq c \leq 2$.

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = \text{se } U_{i+\frac{1}{2},j} \geq 0.0 \text{ então } v_{i+\frac{1}{2},j} = \max(0.0, (c_1 - \rho_{i,j})c_2c) \quad (32)$$

$$\text{senão } v_{i+\frac{1}{2},j} = \max(0.0, (c_1 - \rho_{i+1,j})c_2c)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \text{se } V_{i,j+\frac{1}{2}} \geq 0.0 \text{ então } v_{i,j+\frac{1}{2}} = \max(0.0, (c_1 - \rho_{i,j})c_2c) \quad (33)$$

$$\text{senão } v_{i,j+\frac{1}{2}} = \max(0.0, (c_1 - \rho_{i,j+1})c_2c)$$

2.4 Esquema de iteração AF2 (AF, Approximate Factorization)

O esquema AF2 consiste em um procedimento de dois passos. As equações (37) e (42) são resolvidas primeiramente por meio do processo de solução de uma matriz bidiagonal e depois resolvendo uma matriz tridiagonal periódica. A matriz bidiagonal do primeiro passo constitui em uma matriz triangular superior e pode ser resolvida facilmente por meio de um procedimento de substituição do tipo *backward*, ou pode-se simplesmente aplicar o solver ora desenvolvido para solução da matriz tridiagonal.

$$N_{AF2}(\)_{i,j} = -\frac{1}{\alpha}(\alpha - \vec{\delta}_\eta \bar{B}_{i,j})(\alpha \tilde{\delta}_\eta - \vec{\delta}_\xi \tilde{B}_{i,j} \tilde{\delta}_\xi) C_{i,j}^n \quad (34)$$

$$\bar{B}_{i,j} = \left(\frac{\bar{\rho} A_3}{J} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$\tilde{B}_{i,j} = \left(\frac{\tilde{\rho} A_1}{J} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \quad (36)$$

Os seguintes passos são:

Passo 1:

$$(\alpha - \vec{\delta}_\eta \bar{B}_{i,j}) f_{i,j}^n = \alpha \omega L \Phi_{i,j}^n \quad (37)$$

A diagonal principal, a diagonal inferior e superior é formada respectivamente conforme as seguintes equações, resolvidos para $(2 \leq j \leq JMAX \text{ e } 1 \leq i \leq IMAX - 1)$:

$$(at)_{i,j} = \alpha + \bar{B}_{i,j} \quad (38)$$

$$(bt)_{i,j-1} = 0.0 \quad (39)$$

$$(ct)_{i,j+1} = -\bar{B}_{i,j+1} \quad (40)$$

$$(vt)_{i,j} = \alpha \omega L \Phi_{i,j}^n \quad (41)$$

Deve-se pautar que o valor de $f_{i,jmax+1}^n = 0$, pois é consistente com a solução de estado estacionário.

Passo 2:

$$(\alpha \tilde{\delta}_\eta - \vec{\delta}_\xi \tilde{B}_{i,j} \tilde{\delta}_\xi) C_{i,j}^n = f_{i,j}^n \quad (42)$$

A diagonal principal, a diagonal inferior e superior é formada respectivamente conforme as seguintes equações, resolvidos para $(2 \leq j \leq JMAX \text{ e } 1 \leq i \leq IMAX - 1)$:

$$(at)_{i,j} = (\tilde{B}_{i,j} + \tilde{B}_{i+1,j} + \alpha) \quad (43)$$

$$(bt)_{i-1,j} = -\tilde{B}_{i,j} \quad (44)$$

$$(ct)_{i+1,j} = -\tilde{B}_{i+1,j} \quad (45)$$

$$(vt)_{i,j} = f_{i,j} + \alpha C_{i,j-1} \quad (46)$$

No segundo passo é resolvido um sistema tridiagonal periódico, em um procedimento semelhante aquele feito no projeto 2.

2.5 Condição de contorno na parede do perfil

As condições de contorno na parede do perfil são impostas conforme as seguintes equações, sendo que a componente de velocidade contravariante perpendicular à parede deve ser nula:

$$V_{i,jmax} = 0.0 \quad (47)$$

$$V_{i,jmax+\frac{1}{2}} = -V_{i,jmax-\frac{1}{2}} \quad (48)$$

$$U_{i,jmax+\frac{1}{2}} = U_{i,jmax-\frac{1}{2}} \quad (49)$$

$$\rho_{i,jmax+\frac{1}{2}} = \rho_{i,jmax-\frac{1}{2}} \quad (50)$$

As condições de contorno impostas pelas equações 47, 48, 49 requer uma modificação no calculo da componente de velocidade contravariante U de tal maneira a garantir tal condição:

$$U_{i,jmax} = \left(A_{1i,jmax} - \frac{A_{2i,jmax}A_{2i,jmax}}{A_{3i,jmax}} \right) \quad (51)$$

$$V_{i,jmax} = (A_2\Phi_\xi + A_3\Phi_\eta)_{i,jmax} = 0.0 \quad (52)$$

$$\Phi_{\eta i,jmax} = \left(-\frac{A_2}{A_3}\Phi_\xi \right)_{i,jmax} \quad (53)$$

As derivadas em η (termos de métrica) para a parede foram feitas *backward*, testou-se também operadores *one-sided* de três pontos. É necessário modificar também o operador de resíduo para a parede ($j = j_{max}$), sendo que o mesmo é calculado conforme a equação 54:

$$L\phi_{i,j} = \tilde{\delta}_\xi \left(\frac{\tilde{\rho}U}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - 2 \left(\frac{\tilde{\rho}V}{J} \right)_{i,jmax-\frac{1}{2}} \quad (54)$$

2.5.1 Condição de contorno fronteira externa

A condição de contorno para fronteira externa é imposta conforme a eq. 55, sendo que uma forma simples de implementação pode ser feita por meio da eq. 56.

$$\Phi_{i,1} = \Phi_\infty \quad (55)$$

$$\Phi_{i,1} = U_\infty (x_{i,j} \cos(\alpha) + y_{i,j} \sin(\alpha)) \quad (56)$$

A condição de contorno na esteira é dada pela eq. 57 e deve-se atentar a esse fato, que embora simples, pode trazer algum problema durante a implementação do código.

$$\Phi_{1,j}^n = \Phi_{imax,j}^n \quad (57)$$

A velocidade do escoamento não perturbado é calculada conforme a equação 58, já levando em consideração a adimensionalização implícita na formulação que estamos utilizando, enquanto a densidade do escoamento não perturbado é calculado conforme a eq. 59.

$$U_\infty = \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M_\infty^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

$$\rho_\infty = \left[\frac{2}{M_\infty^2(\gamma - 1) + 2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (59)$$

2.6 Calculo dos dados de saída

Com o objetivo de visualizar os contornos de “iso-propriedades”, ou seja, curvas de nível indicando contornos de velocidade, Mach, densidade e coeficiente de pressão constantes no campo todo, os dados de saída a serem calculados necessitam do conhecimento das componentes cartesianas de velocidade, e serão calculados conforme as eqs. 60, 61 e 62. Onde U é a magnitude do vetor de velocidade local:

$$u_{i,j} = \xi_x \delta_\xi \phi_{i,j} + \eta_x \delta_\eta \phi_{i,j} \quad (60)$$

$$\mathbf{v}_{i,j} = \xi_y \delta_\xi \phi_{i,j} + \eta_y \delta_\eta \phi_{i,j} \quad (61)$$

$$C_{p_{i,j}} = 1.0 - \frac{U^2}{U_\infty^2} \quad (62)$$

3 DOCUMENTAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Utilizou-se um computador de uso pessoal do tipo *Laptop* com processador Intel® Core™ i5-3210M CPU @ 2.50GHz com sistema operacional *Windows 7 Home basic* de 64 bits. Os códigos foram desenvolvidos no *Code::Blocks* que trata-se de um *open source* ambiente integrado para desenvolvimento de códigos em linguagens: C, C++ e Fortran.

Aproveitou-se a oportunidade deste projeto para trabalhar em alguns conceitos **básicos** de Orientação a Objetos, alocação dinâmica de memória, de-alocação de memória, passagem de classes e métodos dentro de *functions* e retorno de objetos por meio de *functions*, ponteiros de três dimensões, utilizando a linguagem C++. Devido à necessidade constante de avaliação de parâmetros e de experimentos com o código, optou-se por rodar o mesmo no modo *Debug* por meio do compilador GNU *Debugger* ou mais conhecido como GDB.

Todas as simulações numéricas aqui apresentadas foram realizadas utilizando a *double precision* conforme pode ser evidenciado no anexo A onde é apresentado o código fonte deste trabalho. As simulações foram feitas utilizando malhas com fator de estiramento $XSF = 1.18$ (estiramento para as linhas na direção ξ) e $YSF = 1.25$ (estiramento para as linhas na direção η). Embora se tenha esperado o resíduo atingir o “zero de máquina”, considerou-se para a geração final dos dados de saída que a solução obtida pelo método iterativo estaria convergida quando fosse atingida uma o “zero de máquina”.

3.1 Históricos de Convergência

O primeiro gráfico (Figura 1) mostra a curva de resíduo para o caso subcrítico, onde foi feita a variação do parâmetro ω ao ser mantido o valor de $\alpha = 1.0$. Na Figura 1 é apresentada a curva de convergência ao ser mantida o valor de ω fixo, e variado o parâmetro α . Este tipo de análise feita dentro dos limites de estabilidade do método AF2 nos dá um indicativo de valores “ótimos/adequados” que poderão ser utilizados para gerar os resultados finais.

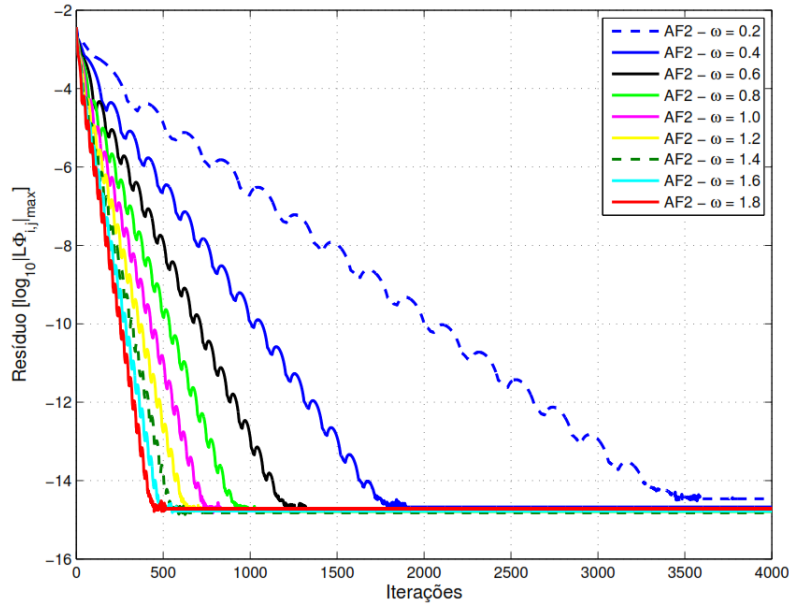


Figura 1: Influência do parâmetro ω na razão de convergência para $\alpha = 1.0$ – Caso 1.

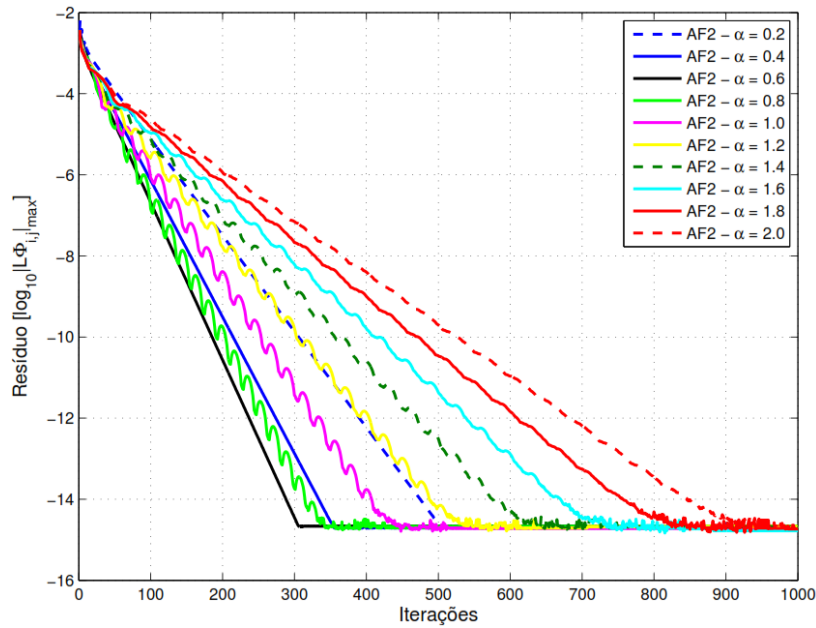


Figura 2: Influência do parâmetro α na razão de convergência para $\omega = 1.8$ – Caso 1.

Analisando a Figura 1 e Figura 2 para o caso 1 já é possível observar que os valores mais sugestivos para utilização de ω estão próximo ao limite superior de estabilidade e valores adequados de α estão próximos a $\alpha = 0.6$, necessitando de aproximadamente 300 iterações para convergência, neste sentido adotar-se-á o valor de $\omega = 1.8$ e $\alpha = 0.6$ para as simulações Caso 1.

A próxima análise é para o caso 2, ou seja, o caso supercrítico, onde são apresentados os históricos de convergência considerando o valor de ω fixo igual a 1.8 e variando o parâmetro α . Valores de α adequados estão próximos a $\alpha = 0.4$, onde o método converge com menos de 500 iterações, para valores inferiores o método divergiu. Para este estudo utilizou um valor para o parâmetro fixo $c = 1.2$.

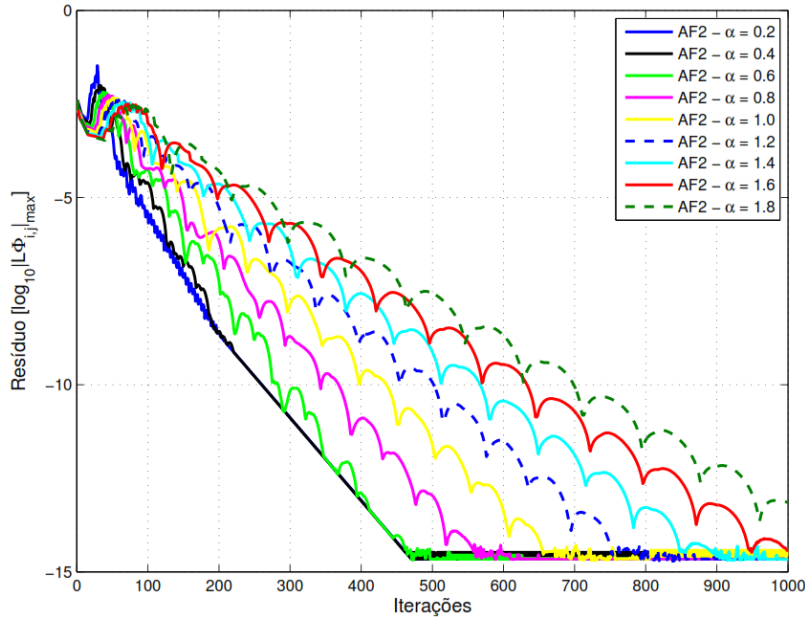


Figura 3: Influência do parâmetro α na razão de convergência para $\omega = 1.8$ – Caso 2.

3.1.1 Considerações sobre sequência de alfas (α 's) aplicadas ao método AF2

Alguns autores sugerem utilizar uma sequência de α 's em vez de usar um valor de α constante para todo o processo iterativo. Esta ideia é motivada e tem sua raiz no conceito de aniquilação de autovetores e no fato que para um dado valor de α o esquema trabalha bem em altas frequências e mal em baixas frequências, ou vice-versa, isso significa dizer que valores pequenos de α correspondem a valores grandes de Δt e neste caso estou tentando aniquilar λ pequenos, valores altos de α representa valores pequenos de Δt e estou tentando aniquilar as altas frequências.

Segundo BALLHAUS, JAMESON e ALBERT uma sequência adequada de α 's é expressa pela seguinte equação (63):

$$\alpha_k = \alpha_H \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_H} \right)^{\frac{k-1}{M-1}} \quad (63)$$

As recomendações discutidas em sala de aula nos diz que uma boa sequência de α 's deve ter entre 5 e 10 α 's elementos (M). Para o esquema AF2 $\alpha_L = O(1)$ e $\alpha_H = O\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$, onde Δx é o menor intervalo na malha considerando ambas as direções.

Testou-se inicialmente uma sequência de α 's com $\alpha_L = 1$ e $\alpha_H = 160$ e utilizou-se uma sequência de $M = 5$ e $M = 10$. O que se percebe para este caso é que aumentar o número de α 's na sequência não levou a uma melhoria na convergência.

A Figura 4 mostra a aplicação da sequência de alfas para o caso supercrítico em comparação com a utilização de um alfa fixo, deve-se argumentar aqui que a aplicação da sequência de alfas não trouxe

melhorias, pois seria interessante programar a mesma em um contexto de simulação com amortecimento temporal conforme feito por HOLST.

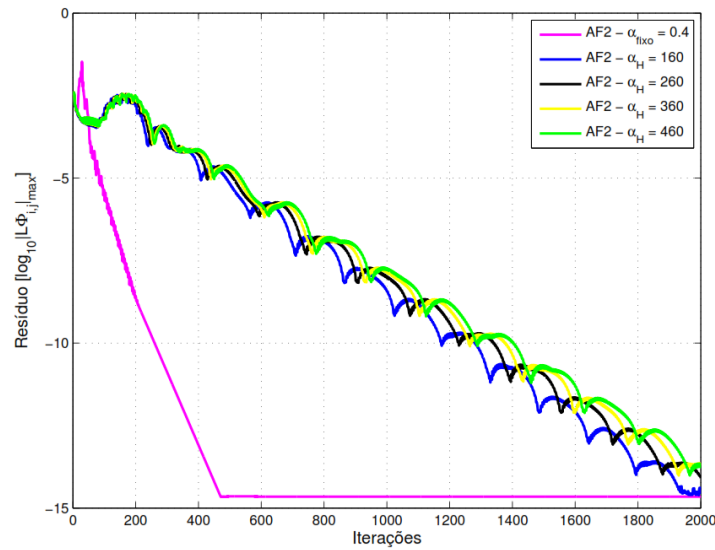


Figura 4: Influência da utilização de uma sequência de Alfas.

Embora se tenha aumentado os valores tanto para alfa High quanto para alfa Low, os experimentos computacionais não mostraram em nenhum caso melhoria clara quando comparado ao método utilizando um valor de alfa fixo ótimo. O que se pode argumentar é que foi possível obter convergência para $M = 0.86$, o que de certa maneira não foi possível de obter usando um valor de alfa fixo.

3.2 Curvas de “iso-propriedades” perfil biconvexo

A Figura 5 e Figura 6 apresentam os campos de “iso-propriedades” para o Mach e para o campo de pressão, destas figuras já podemos observar que todo o campo de escoamento ao redor do aerofólio é subsônico.

A Figura 7 é o campo de pressão para o caso supercrítico utilizando uma malha elíptica enquanto a Figura 8 é apresentado o campo de Mach. Observando essas figuras é possível ver a localização do choque em relação à origem, evidenciando assim que para o caso supercrítico o código esta conseguindo capturar bem choque, manteve-se sempre constante o parâmetro $c = 1.2$ conforme sugerido em Holst.

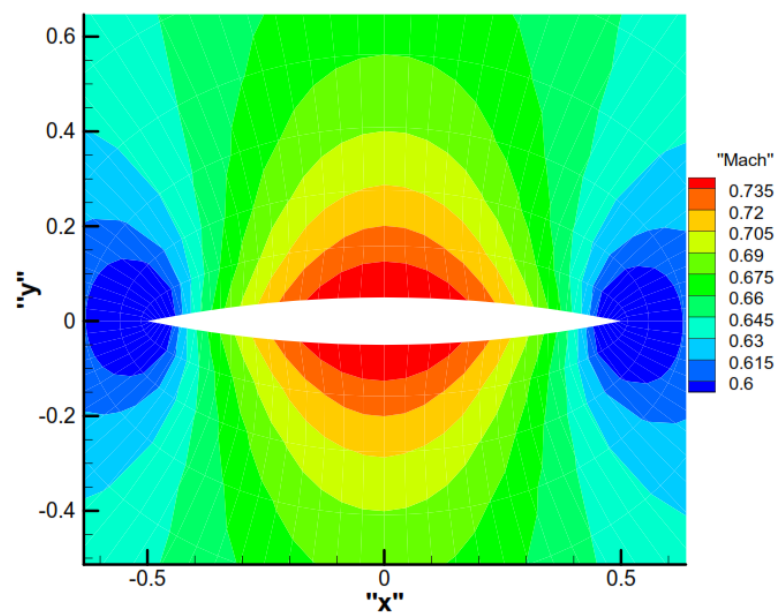


Figura 5: Campos de Mach - malha Elíptica – Caso 1.

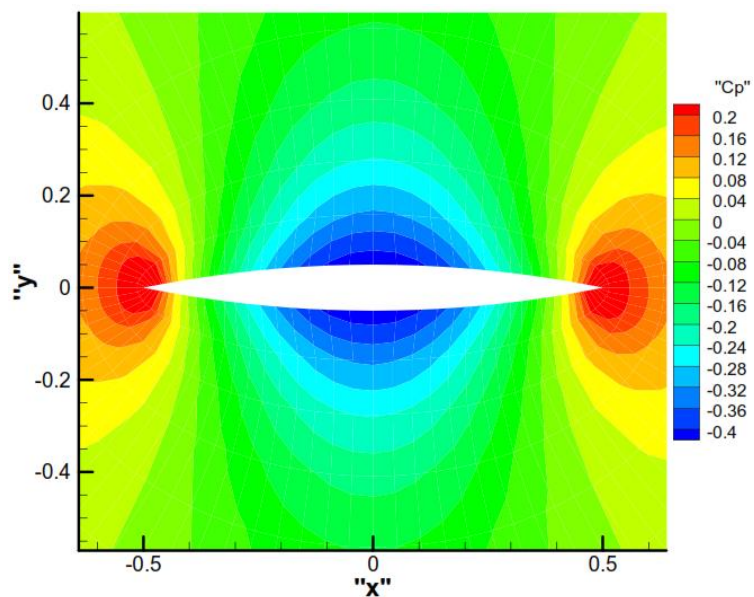


Figura 6: Campos de Cp- malha Elíptica– Caso 1.

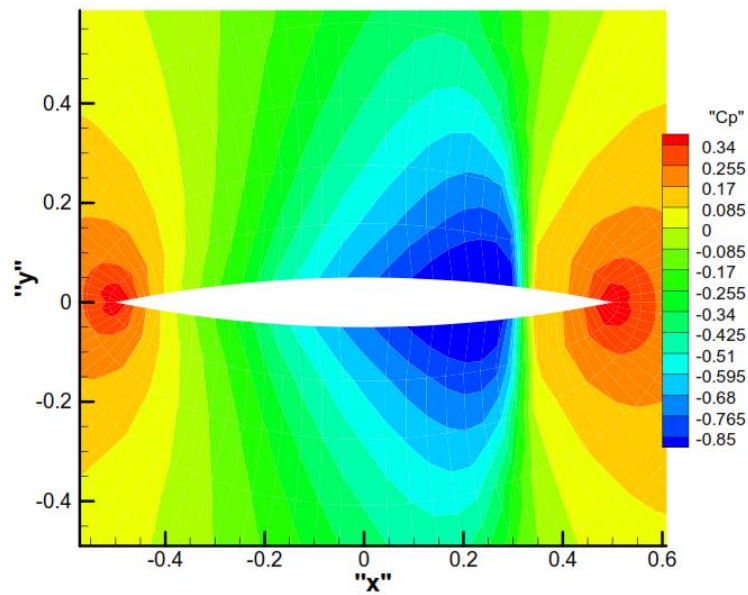


Figura 7: Campos de Cp- malha Elíptica– Caso 2.

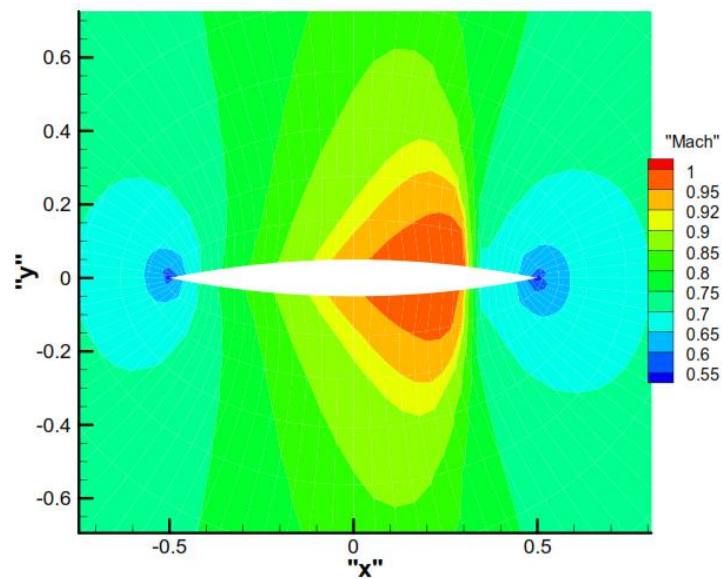


Figura 8: Campos de Mach - malha Elíptica – Caso 2.

O esquema de discretização espacial utilizado para o caso 1 e seus resultados apresentado por meio das Figura 5 e Figura 6 comportam-se como uma discretização centrada e não é afetada pelos termos de dissipação artificial, por sua vez, ao aumentar o número de Mach para 0.84, a função “switching” que depende do número de Mach local (equações 28 e 30) é acionado/ligado realizando assim os cálculos considerando os termos de densidade artificiais (discretizadas por operador de primeira ordem, *backward*) ponderados pelo parâmetro c .

A curva de Cp calculada especificamente no perfil é apresentada por meio da Figura 9. Perceba que para o caso supercrítico a presença de um choque moderado aparece a uma distância de aproximadamente 80% da corda. Era realmente de se esperar um Cp com “*perfect symmetry*” conforme descrito por HOLST, à curva possui uma simetria razoável. Próximo ao bordo de ataque à curva assume uma “ligeira” inclinação,

entretanto não prejudica o resultado final. O formato da curva e as ordens de grandeza para os valores de C_p no bordo de ataque, bordo de fuga e no centro do perfil estão coerentes com aqueles apresentados por HOLST.

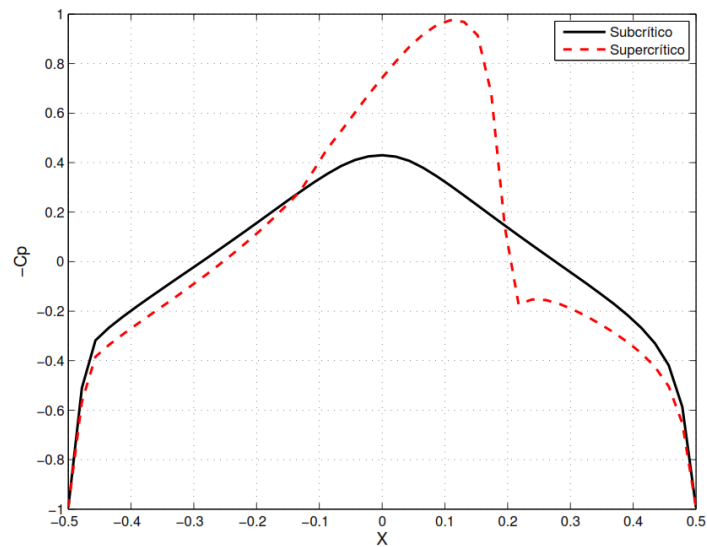


Figura 9: C_p para o perfil biconvexo, casos Subcrítico e Supercrítico.

3.3 Curva de “iso-propriedades” perfil NACA 0012

A Figura 10 mostra os resultados para o campo de pressão considerando o perfil NACA 0012, será apresentado o caso supercrítico, o código tem apresentado boa convergência também para esse caso no que diz respeito a convergência e captura do choque.

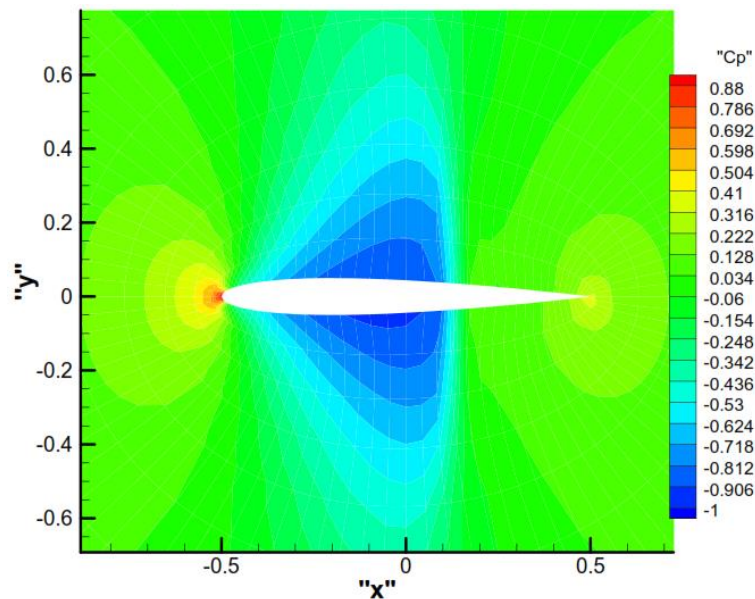


Figura 10: Campos de C_p NACA 0012- malha Elíptica– Caso 2.

A curva para o coeficiente de pressão abaixo tem como objetivo avaliar a influência do parâmetro c na localização e início do choque, os valores reais do C_p para este caso carecem de validação com outro estudo independente. Percebe-se que não adiante aumentar o valor do parâmetro c **demasiadamente**, para valores superiores a 1.8, ou seja, aumentando c , aumenta-se a parcela de dissipação artificial e consequentemente aumenta a quantidade de “upwinding” no esquema de diferenças, o método divergiu, esse parâmetro afeta diretamente a estabilidade do método, e para cada valor de “ c ” adotado a posição do choque também varia.

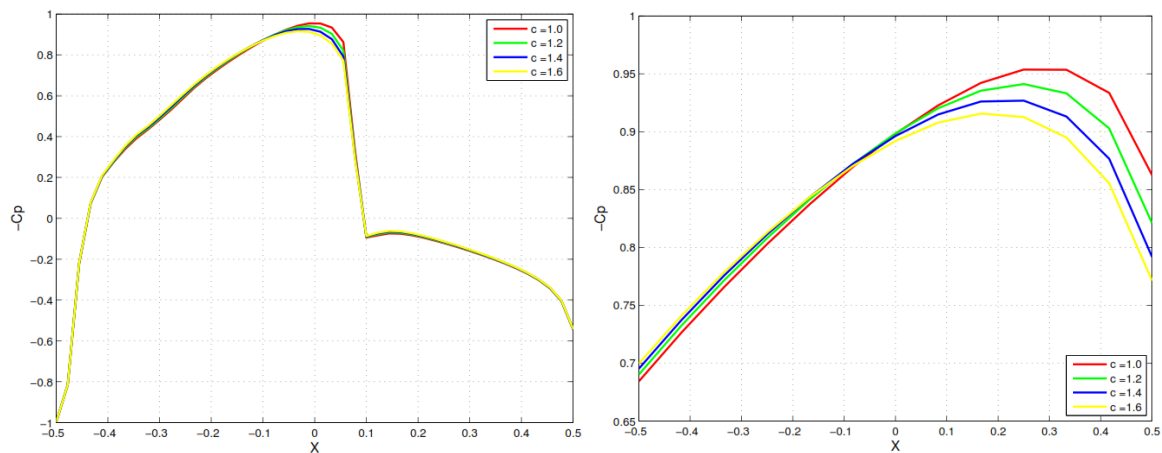


Figura 11: C_p NACA 0012 (a) e detalhe do C_p próximo ao choque em função do parâmetro “ c ”– Caso 2.

3.4 Estudo da variação do número de Mach

A Figura 12 mostra a variação do número de Mach para o perfil biconvexo, foram mantidos constantes os valores de $\alpha = 1.0$, $\omega = 1.8$. O que se pode dizer é que o método claramente diverge para valores de Mach superior a 0.84. Inicialmente apelou-se no sentido de aumentar o parâmetro c até o seu máximo valor, ou seja, $c = 2.0$, entretanto percebe-se que aumentar o “ c ” não surtiu efeitos e o método continuou a divergir. Ao aumentar o parâmetro α para 2.0 o método convergiu, mas requisitando de um número mais apreciável de iterações (aproximadamente 2000 iterações).

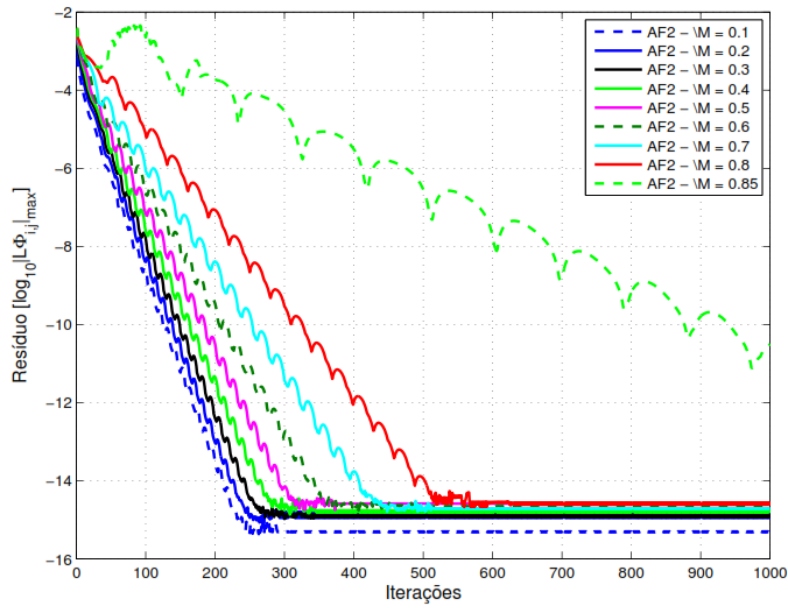


Figura 12: Influência do número de Mach na convergência.

Aumentando o número de Mach para 0.87 percebe-se que mesmo continuando aumentando o valor de alfa, ou fazendo combinações para alfa e “c” superiores aqueles considerados ótimos o método toma uma tendência de divergência que aparentemente parece irremediável.

Cabe argumentar aqui, que uma forma de contornar esse problema é trabalhar com o conceito de “amortecimento temporal”, ou conforme comentando em sala de aula: amortecimento temporal seria “inserir” termos no sentido de contribuir para que a matriz gerada tenha sua diagonal principal mais dominante, ou também, ele age no sentido de mitigar os erros de uma determinada frequência, como se fosse “um termo dissipativo”. O esquema AF2 testado neste trabalho não tem implementado o amortecimento temporal (termo $\phi_{\xi t}$), acredito que esse seria o “remédio” necessário para esse estudo.

4 COMENTÁRIOS FINAIS

O código desenvolvido para este Projeto 3 e disponibilizado no anexo A, esta apresentando resultados finais coerentes com aqueles encontrados nas principais referências bibliográficas indicadas pelo professor. Neste sentido acredita-se que o objetivo principal proposto foi atendido, ou seja, a oportunidade de praticar a implementação da equação do potencial completo utilizando o esquema de densidades artificiais de Holst. O código tem se comportado bem no quesito convergência para os casos mandatórios, e consegue gerar resultados também para o perfil NACA 0012. Adotou-se um valor de $c = 1.2$ conforme sugerido por Holst para todas as simulações feitas, e percebeu que ao alterar a quantidade/dose de dissipação artificial fornecida ao código poderá mudar o posicionamento inicial e final do choque, essa experiência serve para mostrar o cuidado que se deve tomar ao trabalhar com a implementação de dissipação artificial.

Aproveitou-se para estudar a aplicação do método AF2, onde se concluiu que o método apresenta suas melhores taxas de convergência para valores de ω próximo ao limite de estabilidade superior e para valores de α na faixa entre 0.5 e 1.0. Constatou-se que a escolha de um adequado parâmetro de relaxação e a busca por um valor ótimo de α é fundamental para acelerar a convergência do método, e que o método ao trabalhar com valores de α e ω próximos aos limites de estabilidade acaba por divergir, resultado este bastante diferente do projeto 2, onde valores bastante pequenos de α s levavam a melhores convergência. Utilizando uma sequência de α s foi possível obter convergência para $M = 0.86$, o que não é possível utilizando um valor fixo de α .

Após conversa com o Professor, pode-se concluir que todas as análises deste projeto poderiam ser enriquecidas e melhores entendidas com uma futura implementação do amortecimento temporal, o que de certa maneira levaria a um estudo mais seguro sobre sequências de α s, parâmetro " c " e sua influência nos resultados finais. Devido à exiguidade de tempo optou-se por atender os requisitos mandatórios e trabalhar os três estudos de caso sem a implementação do amortecimento temporal. Sugere-se que em projetos futuros o item amortecimento temporal torne-se um dos itens do caso mandatório de implementação, essa implementação não parece ser tão "complicada" e sua implementação esta em andamento.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Holst, T.L., “Approximate-Factorization Schemes for Solving the Transonic Full-Potential Equation,” In *Advances in Computational Transonics*, W.G. Habashi, editor, Pineridge Press, Swansea, UK, 1985, pp. 59-82.

Holst, T.L., “Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full-Potential Equation Using an Arbitrary Mesh,” *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 10, Oct. 1979, pp. 1038-1045.

Morgenstern, A., Jr., Azevedo, J.L.F., and de Mattos, B.S., “ Two Dimensional Full Potential Solutions of Lifting Airfoil Flows,” *Proceedings of the 3rd Brazilian Thermal Sciences Meeting, Vol. I, Itapema, SC*, Dec. 1990, pp.183-188.

Morgenstern, A., Jr., Azevedo, J.L.F., and de Mattos, B.S., “ Influence of Convergence Parameters and Mesh Refinement on Full-Potential Solutions of Airfoil Flows,” *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Vol. I, Rio de Janeiro, Dez. 1989, pp. 149-152.

6 ANEXO A