2. MODELAREA ROBOŢILOR UNICICLU CU ECUAŢII DIFERENŢIALE

Un robot mobil este o platformă mecatronică care are trei componente principale, i.e., un modul de senzori (prin intermediul căruia este preluată informaţie din mediu şi se estimează poziţia în spaţiu şi viteza vehiculului), un modul de orientare (prin intemediul căruia sunt generate referinţe de mişcare obţinute prin proceduri de localizare şi orientare a obiectului în spaţiu) şi un modul de conducere (care generează comenzile care vor fi transmise către elementele de execuţie în scopul îndeplinirii anumitor operaţii).

Scopul lucrării este simularea unui robot mobil de tip uniciclu utilizând modele bazate pe ecuaţii diferenţiale.

2.1 Breviar teoretic

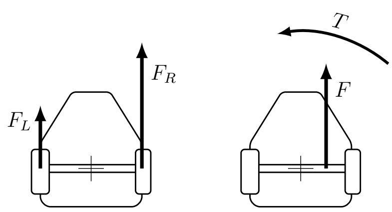

Figura 2.1: Robot mobil

Robotul mobil considerat în lucrarea de faţă este unul cu două roţi (acţionate de două motoare). Acesta poate avea traiectorii într-un spaţiu bi-dimensional. În general, un astfel de robot are forma unui cărucior, sau a unei maşini cu două roţi paralele, fiecare aflată la distanţă egală faţă de centru, în direcţii opuse (figura 2.1). Acest tip de roboţi mobili pot înainta cu viteze medii, dar nu au mişcare laterală instantanee. Ei sunt folosiţi adesea în competiţii (precum RoboCup), datorită simplităţii şi a capacităţii ridicate de manevrabilitate.

Modelul robotului Modelul cinematic al robotului este

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

unde x, y şi θ sunt coordonatele în spaţiu ale robotului (ca în figura 2.2), iar v şi ω sunt comenzile date robotului care reprezintă viteza de translaţie şi, respectiv, de rotaţie a acestuia.

Prelucrând aceste ecuaţii, se obţine modelul dinamic al procesului. Folosind Legea a doua a lui Newton, mişcarea de translaţie este descrisă de

$$M\dot{v} = F - B_v v, \tag{2.2}$$

iar mişcarea de rotaţie este descrisă de

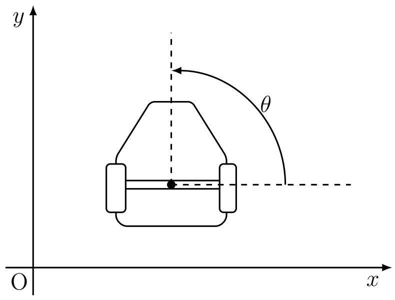

Figura 2.2: Coordonatele robotului

$$J\dot{\omega} = T - B_\omega \omega, \tag{2.3}$$

unde M este masa robotului, J este momentul de inerţie, F este rezultanta forţelor care acţionează asupra sistemului, T reprezintă orientarea (direcţia de virare), B_v este coeficientul de frecare de translaţie, iar B_ω este coeficientul de frecare de rotaţie.

Efectul acţiunii acestor forţe asupra celor două roţi este reprezentată de mişcarea robotului. Astfel, dacă motorul asociat roţii stângi are turaţie mai mare, robotul se va deplasa spre dreapta, şi invers, dacă motorul asociat roţii drepte are turaţie mai mare, robotul se va deplasa spre stânga. Rezultă următoarele două ecuaţii. Astfel,

$$F = F_R + F_L, \quad T = \ell(F_R + F_L), \tag{2.4}$$

unde ℓ reprezintă jumătatea lungimii axului roţilor, iar F_R şi F_L sunt forţele dezvoltate de fiecare motor în parte (R dreapta şi L stânga). Asemănător, luând în considerare tensiunea electrică aplicată celor două motoare, putem defini tensiunea medie - e_m (media a două tensiuni u_R şi u_L care vor fi transmise către fiecare motor) şi tensiunea diferenţială - e_d (diferenţa acestora). Astfel, obţinem următoarele relaţii între tensiuni (comenzi către motoare) şi forţe,

$$F = K_1 e_m + K_v v, \quad T = K_2 e_d - K_\omega \omega, \tag{2.5}$$

unde K_1, K_v, K_2 şi K_ω sunt constante care depind de caracteristicile constructive ale motoarelor. Prin urmare, modelul dinamic al robotului este

$$\begin{aligned} M\dot{v} &= -K_v v + K_1 e_m, \\ J\dot{\omega} &= -K_\omega \omega + K_2 e_d. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Intrările în model sunt e_m şi e_d, reprezentând comenzile calculate de regulatoare (din care au fost obţinute comenzile efective pentru cele două motoare u_L şi u_R) pentru controlul traiectoriei în plan a robotului. Prin urmare, modelul (2.6) se poate scrie

$$\begin{aligned} M\dot{v} &= -K_v v + K_1 \frac{u_L + u_R}{2}, \\ J\dot{\omega} &= -K_\omega \omega + K_2 (u_L - u_R). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Traiectoria de poziţie Utilizând viteza de translaţie şi viteza de rotaţie, se obţine poziţia robotului în planul xOy utilizând ecuaţiile (2.1), dată de x şi de y. Unghiul θ returnează orientarea robotului faţă de axa Ox (vezi figura 2.2).

2.2 Sarcini de lucru

1. Se realizează schema Simulink a modelului robotului parcurgând următorii paşi, cu valorile numerice[1]

$$M = 2200g, \qquad K_v = 172.5, \qquad K_1 = 7,$$
$$J = 0.05kg \cdot m^2, \qquad K_\omega = 0.03, \qquad K_2 = 0.5.$$

   1.1. Se transformă valorile numerice în unităţi SI.

   1.2. Se identifică variabilele de intrare şi de ieşire ale modelului.

   1.3. Se izolează variabila/variabilele de ieşire prin rescrierea corespunzătoare a ecuaţiilor (2.7).

   1.4. Se construieşte schema Simulink a noilor ecuaţii.

   1.5. Se vor utiliza porturi de intrare şi de ieşire pentru variabilele de intrare şi de ieşire (meniul *Ports & Subsystems*).

   1.6. Se încastrează modelul obţinut într-un subsistem:

   – se deschide un model nou şi se creează un subsistem în acesta (meniul *Ports & Subsystems*);

   – se deschide subsistemul nou creat (dublu-click) şi se copiază în schema realizată la pasul 1.4.

   1.7. Prin analiza numelor adăugate implicit blocului subsistem, se poate observa dacă porturile de intrare şi de ieşire din model au fost corect asignate.

2. Se implementează transformările de coordonate utilizând ecuaţiile (2.1) şi se afişează traiectoria de poziţie folosind un bloc de tip *XY Graph*.

3. Pentru diverse valori ale comenzilor de intrare (constante, diferite sau egale), se analizează răspunsul sistemului, atât ieşirile de viteză, cât şi traiectoria de poziţie, pentru validarea implementării modelului.

---

[1]

$K_v = 2K_m^2/(r_\omega^2 R) + B_v \quad \left[(N^2 + kg\text{sec.}\Omega)/(\text{sec.}^2\Omega)\right]$,
$K_\omega = b^2 K_m^2/(2r_\omega^2 R) + B_\omega \quad \left[(N^2 m^2 + kg\text{sec.}\Omega)/(\text{sec.}^2\Omega)\right]$,
$K_1 = 2K_m/(r_\omega R) \quad [N/(\text{sec.}\Omega)]$,
$K_2 = bK + m/(2r_\omega R) \quad [Nm/(\text{sec.}\Omega)]$,
unde K_m este constanta motoarelor, r_ω este diametrul roţilor, R este rezistenţa circuitului rotoric, b este lungimea osiei roţilor, B_v este coeficientul de frecare la translaţie şi B_ω este coeficientul de frecare la rotaţie.