5^a LISTA DE EXERCÍCIOS – MTM 1020–

1. Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $P = (-1, 2, 4)$ **b)** $z = \sqrt{xy}$, $P = (1, 1, 1)$

c) $z = ycos(x - y)$, $P = (2, 2, 2)$ **d)** $z = e^{xy}$, $P = (1, 0, 1)$.

2. Encontre todos os pontos do elipsóide $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x - 2y + 3z = 5$.

3. Use a Regra da Cadeia para determinar $\frac{dz}{dt}$ ou $\frac{dw}{dt}$.

a) $z = x^2y + xy^2$, $x = 2 + t^4$, $y = 1 - t^3$.

b) $z = sen(x)cos(y)$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$.

c) $w = xe^{\frac{y}{z}}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$.

d) $z = e^{1-xy}$, $x = \sqrt[3]{t}$, $y = t^3$.

e) $w = 5cos(yx) - sen(xz)$, $x = t^{-1}$, $y = t$, $z = t^3$.

4. Use uma forma apropriada da Regra da Cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$.

a) $z = x^2y^3$, $x = scos(t)$, $y = ssen(t)$.

b) $z = sen(\theta)cos(\varphi)$, $\theta = st^2$, $\varphi = s^2t$.

c) $w = e^r cos(\theta)$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$.

d) $w = e^{x^2y}$, $x = \sqrt{st}$, $y = \frac{1}{t}$.

e) $z = \frac{x}{y}$, $x = s^2 - t^2$, $y = 4st^3$.

f) $z = ln(x^2 + 1)$, $x = scos(t)$.

5. Suponha que

$$w = x^3y^2z^4, \quad x = t^2, \quad y = t + 2, \quad z = 2t^4.$$

Encontre a taxa de variação de w em relação a t em $t = 1$ usando a regra da cadeia e então confira sua resposta expressando w como uma função de t e depois derivando.

6. Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre $\frac{dz}{dt}$ para $t = 2$.

7. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $h(3) = 7$, $g'(3) = 5$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$ e $f_y(2, 7) = -8$, determine $\frac{dz}{dt}$ para $t = 3$.

8. Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

a) $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;

$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$, quando $(u, v, w) = (2, 1, 0)$.

b) $R = ln(u^2 + v^2 + w^2)$, $u = x + 2y$, $v = 2x - y$, $w = 2xy$;

$\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$, quando $(x, y) = (1, 1)$.

c) $u = x^2 + zy$, $x = prcos(\theta)$, $y = prsen(\theta)$, $z = p + r$;

$\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$, quando $(p, r, \theta) = (2, 3, 0)$.

9. Suponha que $F(x, y, z) = k$, para alguma constante $k \in \mathbb{R}$ qualquer, defina z implicitamente como uma função de x e y. Mostre que se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

10. Sendo $ye^x - 5sen(3z) = 3z$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ através da derivação implícita e confirme que o resultado obtido é consistente através do exercício anterior.

11. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2,3) = 4$ e $T_y(2,3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

12. O comprimento l, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $l = 1m$ e $w = h = 2m$, com l e w aumentando a uma taxa de $2m/s$ e h diminuindo a uma taxa de $3m/s$. Nesse instante deteermine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando:

a) O volume.

b) A área da superfície.

c) o comprimento da diagonal.

13. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de $2cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado possui $20cm$ de comprimento, o segundo tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\frac{\pi}{6}$?

14. Se $z = f(x,y)$, onde $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

15. Caso $z = f(x+cy)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, mostre que $c\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

16. Seja f uma função diferenciável de uma variável e seja $w = f(u)$, onde $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6\frac{dw}{du}.$$

17. Uma função f é dita **homogênea de grau** n se satisfaz a equação $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo valor de t, onde $n \in \mathbb{N}$ e f possui as derivadas de segunda ordem contínuas.

a) Verifique que $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y).$$

(Sugestão: Use a Regra da Cadeia para derivar $f(tx,ty)$ com relação a t).

18. Encontre a derivada direcional de f em P na direção do vetor $\overrightarrow{u}$.

a) $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{3}{2}}$, $P = (3,1)$, $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

b) $f(x,y,z) = 4x^5y^2z^3$, $P = (2,-1,1)$, $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

c) $f(x,y) = y^2 ln(x)$, $P = (1,4)$, $\overrightarrow{u} = -3i + 3j$.

d) $f(x,y,z) = \frac{z-x}{z+y}$, $P = (1,0,-3)$, $\overrightarrow{u} = (-6,3,-2)$.

19. Encontre a derivada direcional de f em P na direção e sentido de um vetor que faça um ângulo θ com o eixo x.

a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $P = (1,4)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, $P = (-1,-2)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x,y) = e^{xy}\sqrt{xy}$ em $P(1,1)$ na direção e sentido do eixo y negativo.

21. Suponha que $D_uf(1,2) = -5$ e $D_vf(1,2) = 10$,onde $\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{i} - \frac{4}{5}\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = \frac{4}{5}\overrightarrow{i} + \frac{3}{5}\overrightarrow{j}$. Determine $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ e a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção e sentido da origem.

22. Encontre o gradiente de f no ponto indicado.

a) $f(x,y) = (x^2+xy)^3$, $(-1,-1)$.

b) $f(x,y,z) = yln(z+x+y)$, $(-3,4,0)$.

23. Encontre um vetor unitário na direção do qual f cresce mais rapidamente em P e obtenha a derivada direcional de f nesta direção.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P = (4,-3)$.

b) $f(x,y,z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1,\ \ P = (1,1,-1)$.

24. Dado que $\nabla f(4,-5) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, determine a derivada direcional da função f no ponto $(4,-5)$ na direção de $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.