Nome: ______________________ Matrícula: __________

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Σ	

3ª Prova - MTM1049 - T 10

14 de Dezembro de 2016

Coloque o nome em todas as folhas. É proibido usar calculadora ou similares. Respostas sem justificativas ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas.

Questão 1. *(2pts)* Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear.

(i) Defina o núcleo de T, denotado por $\mathcal{N}(T)$;

(ii) Determine a matriz da transformação $[T] = [T]_{\bar{\varepsilon}\leftarrow\varepsilon}$ (em relação as bases canônicas) quando temos $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que satisfaz

$$T(3,2,1) = (1,1), \qquad T(0,1,1) = (0,-2), \qquad T(3,0,0) = (3,6);$$

(iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$, onde T é a transformação do item (ii) acima;

(iv) Poderia existir uma transformação linear injetiva $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$? (*Sugestão:* O que diria o Teorema da dimensão do núcleo e da imagem para T injetiva? Note que a imagem está contida em $\mathbb{R}^2$, o que limita a dimensão da imagem).

Questão 2. *(2pts)* Prove que se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear com núcleo $\mathcal{N}(T) = \{\bar{0}\}$, então T é injetiva.

Questão 3. *(2pts)* A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável? Para tanto, calcule o polinômio característico e todos os autovalores. Para cada um dos autovalores encontre uma base para o autoespaço correspondente.

Se A for diagonalizável, encontre as matrizes P invertível e D diagonal tais que $P^{-1}AP = D$.

Questão 4. *(2pts)* Encontre a matriz mudança de base $[I]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ (ou $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ na notação do livro), onde

$$\mathcal{B} = \{(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})\} \qquad \mathcal{C} = \{(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}), (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})\}$$

(*Sugestão:* Note que as bases são ortonormais (ON), se souber usar os coeficientes de projeção poderá resolver mais rápido).

Questão 5. *(2pts)* Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (9x + 12y, 12x + 16y).$$

Encontre uma <u>base ortonormal</u> $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}$ seja diagonal.