# $1^a$ LISTA DE EXERCÍCIOS – MTM 1020–

**1**. Seja $f(x,y) = ln(x+y-1)$.

**a)** Calcule $f(1,1)$ **b)**Calcule $f(e,1)$

**c)** Determine e esboce o domínio de $f$.

**2**. Determine e esboce o domínio da função

**a)** $f(x,y) = \sqrt{1+x-y^2}$ **b)**$f(x,y) = \sqrt{x+y}$

**c)** $f(x,y) = ln(9-x^2-9y^2)$ **d)**$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

**e)** $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$ **f)**$f(x,y) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

**g)** $f(x,y) = 10-4x-5y$ **h)**$f(x,y) = f(x,y) = y+1$

**3**. Faça o esboço do mapa de contorno da função mostrando as várias curvas de nível.

**a)** $f(x,y) = (y-2x)^2$ **b)**$f(x,y) = y - ln(x)$

**c)** $f(x,y) = x^2+y^2$ **d)**$f(x,y) = x^2+y$

**e)** $f(x,y) = x^2-y^2$

**4**. Seja $f(x,y) = x^2 - 2x^3 + 3xy$. Determine uma equação da curva de nível que passa pelo ponto

**a)** $(-1,1)$ **b)**$(0,0)$ **c)**$(2,-1)$

**5**. Uma placa fina de metal, localizada no plano $xy$, tem temperatura $T(x,y)$ no ponto $(x,y)$. As curvas de nível de $T$ são chamadas isotérmicas porque todos os pontos de uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por $T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$.

**6**. Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

**a)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-2)} x^5 + 4x^3y - 5xy^2$ **b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$

**c)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4+3y^4}$ **d)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**e)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$ **f)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

**g)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ **h)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$

**7**. Sejam $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$ e $f(x,y) = 2x + 3y - 6$. Determine $h(x,y) = g(f(x,y))$ e o conjunto no qual $h$ é contínua.

**8**. Se $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre.

**9**. O volume de um cone circular reto de raio $r$ e altura $h$ é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

**a)** Encontre uma fórmula para a taxa de variação de $V$ em relação a $r$ se $r$ variar e $h$ permanecer constante.

**a)** Encontre uma fórmula para a taxa de variação de $V$ em relação a $h$ se $h$ variar e $r$ permanecer constante.

**10**. Use a definição de derivadas parciais como limites para encontrar $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ se $f(x,y) = x^2y - x^3y$ .

**11**. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

**a)** $f(x,y) = 3x - 2y^4$ **b)** $z = xe^{3y}$

**c)** $z = (2x+3y)^{10}$ **d)** $w = ln(x + 2y + 3z)$

**e)** $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... x_n^2}$ **f)** $f(x,y,z) = ye^z sen(xz)$

**12**. Um ponto move-se ao longo da interseção do plano $y = 1$ e do parabolóide elíptico $z = x^2 + 3y^2$. Qual é a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ quando o ponto estiver em $(2,1,7)$?

**13**. Determine a inclinação da reta tangente em $(-1,1,5)$ da curva de interseção da superfície $z = x^2 + 4y^2$ e

**a)** o plano $x = -1$ **b)** o plano $y = 1$.

**14**. Use derivação implícita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

**a)** $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ **b)** $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$

**c)** $x^2 + zsen(xyz) = 0$

**15**. Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem da função.

**a)** $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **b)** $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

**16**. Determine as derivadas parciais indicadas.

**a)** $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2;\ \ f_{xxy},\ f_{yyy}$

**b)** $f(x, y, z) = cos(4x + 3y + 2z);\ \ f_{xyz},\ f_{yzz}$

**c)** $u = e^{r\theta};\ \ \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$

**17**. Verifique que a função $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

**18**. Se $f$ e $g$ são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função $u(x, t) = f(x + at) - g(x - at)$ é solução da equação da onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

**19**. A energia cinética de um corpo com massa $m$ e velocidade $v$ é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que $\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$.

**20**. Disseram-lhe que existe uma função $f$ cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

# Gabarito

**1**. $a)0, \;\; b)1, \;\; c) Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 - x\}$

**2**.

**a)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 - 1\}$

**b)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\}$

**c)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$

**d)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1\}$

**e)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, \; x \neq = \pm 1\}$

**f)** $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2\}$

**g)** $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ **h)**$Dom(f) = \mathbb{R}^2$

**4**.

**a)** $x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$ **b)**$x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$ **c)**$x^2 - 2x^3 + 3xy = -18$

**6**.

**a)** $2025$ **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** $\nexists$ **d)** $0$ **e)** $\nexists$, **f)** $\nexists$ **g)** $0$ **h)** $\nexists$

**7**. $h(x,y) = (2x + 3y - 6)^2 - \sqrt{2x + 3y - 6}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{3}(6 - 2x)\}$

**8**. $f_x(1,2) = -8, \;\; f_y(1,2) = -4$

**9**. $a)\frac{2}{3}\pi r h, \;\; b)\frac{1}{3}\pi r^2 h$

**11**.

**a)** $f_x(x,y) = 3, \;\; f_y(x,y) = 8y^3$

**b)** $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{3y}, \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3y}$

**c)** $\frac{\partial z}{\partial x} = 20(2x + 3y)^9, \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = 30(2x + 3y)^9$

**d)** $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x+2y+3z}, \;\; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{x+2y+3z}, \;\; \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3}{x+2y+3z}$

**e)** $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^1+x_2^2+...+x_n^2}}$

**f)** $f_x(x,y) = yze^z cos(xz), \quad f_y(x,y) = e^z sen(xz), \quad f_z(x,y) = ye^z(sen(xz) + cos(xz))$

**12**. 4

**13**. $a) - 2, \quad b)8$

**14**.

**a)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-2x}{2z-3xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xz-2y}{2z-3xy}$

**b)** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

**c)** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+yz^2cos(xyz)}{xyzcos(xyz)+sen(xyz)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2cos(xyz)}{xyzcos(xyz)+sen(xyz)}$

**15**.

**a)** $f_{xx}(x,y) = 6xy^5 + 24x^2y, \quad f_{yy}(x,y) = 20x^3y^3, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 15x^2y^4 + 8x^3$

**b)** $w_{uu} = \frac{v^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad w_{vv} = \frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad w_{uv} = w_{vu} = \frac{-uv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$

**16**.

**a)** $12xy, \quad 72xy$

**b)** $24sen(4x + 3y + 2z), \quad 12sen(4x + 12y + 2z)$

**c)** $\theta e^{r\theta}(2sen\theta + \theta cos\theta + r\theta sen\theta)$