Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

Capítulo 10

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS E COORDENADAS POLARES

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas.

Até agora usamos as coordenadas cartesianas, que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares.

CENGAGE Learning™

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS E COORDENADAS POLARES

Aqui descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

10.3
Coordenadas Polares

Nesta seção, nós aprenderemos:

Como representar pontos em coordenadas polares.

POLO E EIXO POLAR

Escolhemos um ponto no plano conhecido como **polo** (ou origem) e o denominamos *O*.

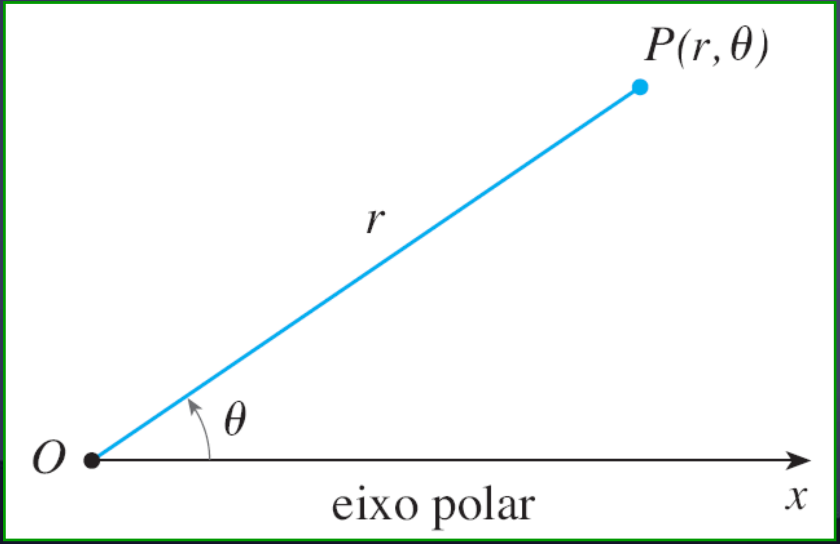
Então, desenhamos um raio (semirreta) começando em *O*, chamado **eixo polar**.

- Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo *x* positivo nas coordenadas cartesianas.

OUTRO PONTO

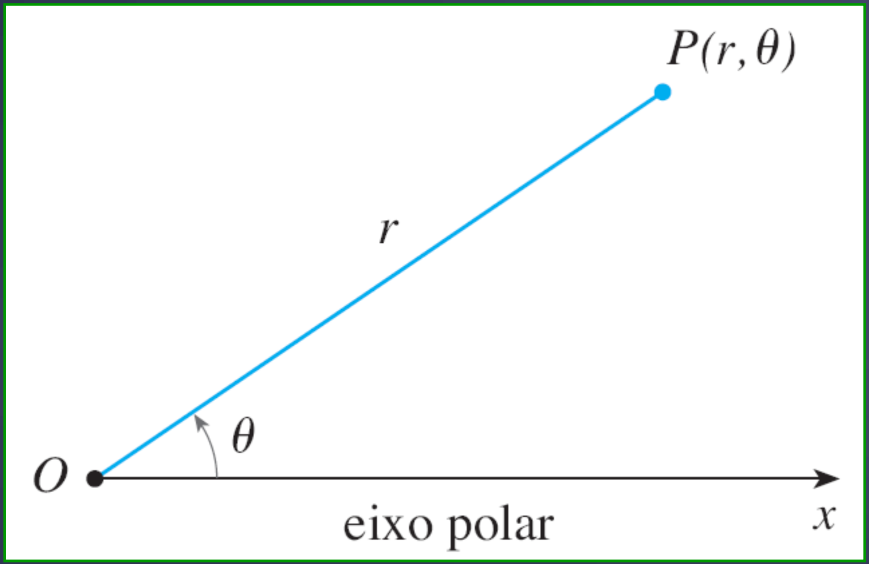
Se *P* for qualquer outro ponto no plano, seja:

- *r* a distância de *O* até *P*
- *θ* o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta *OP*



COORDENADAS POLARES

Assim, o ponto *P* é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são chamados **coordenadas polares** de *P*.



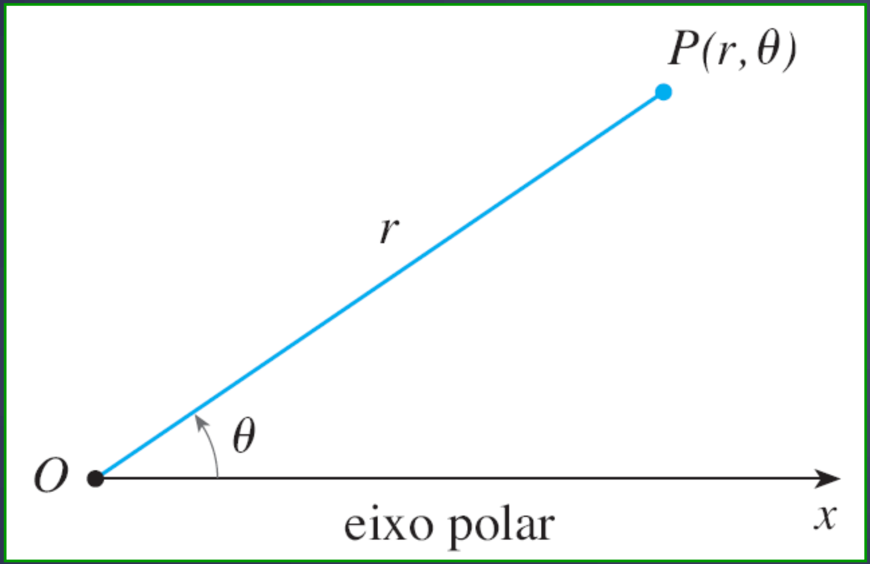
COORDENADAS POLARES

Usamos a convenção de que um ângulo é:

- positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar.
- negativo se for medido no sentido horário.

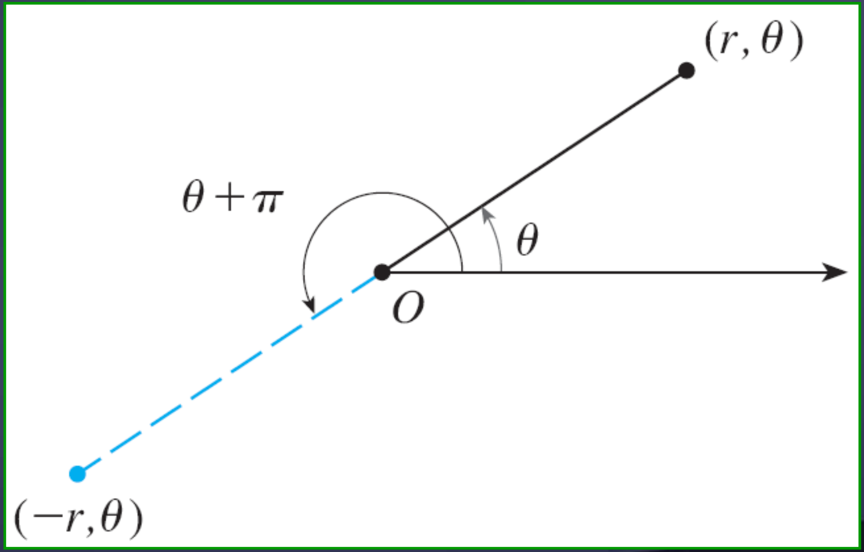
COORDENADAS POLARES

Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.



COORDENADAS POLARES

Estendemos o significado de coordenadas polares (r,θ) para o caso no qual r é negativo, convencionando que os pontos ($-r$, θ) e (r, θ) estão na mesma reta passando por O e estão à mesma distância | r | a partir de O, mas em lados opostos de O.

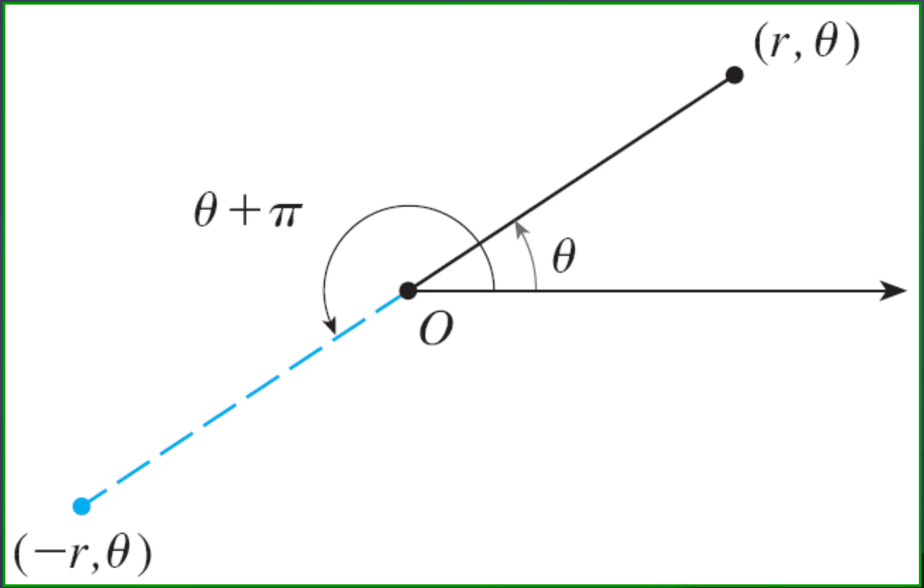


CENGAGE Learning™

COORDENADAS POLARES

Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ; se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao polo.

- Observe que (r, θ) representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.



CENGAGE Learning™

Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

a. $(1, 5\pi/4)$

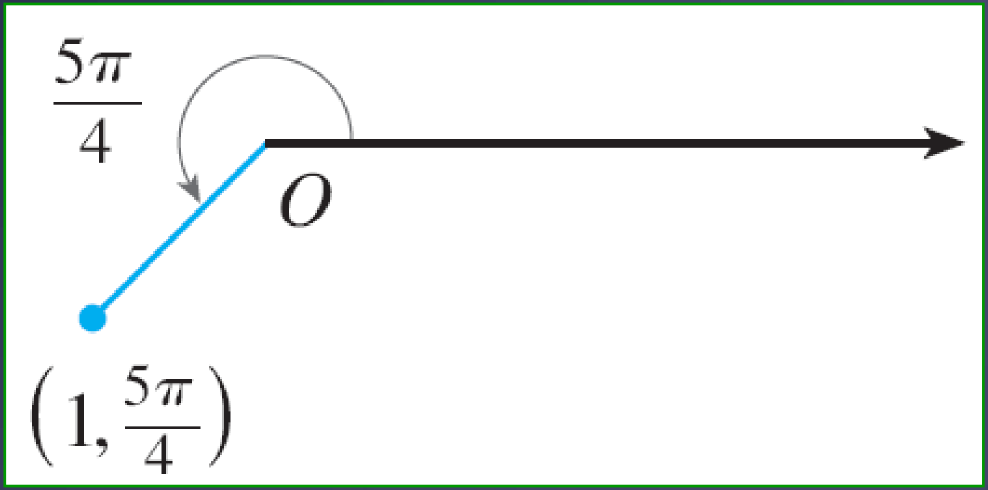
b. $(2, 3\pi)$

c. $(2, -2\pi/3)$

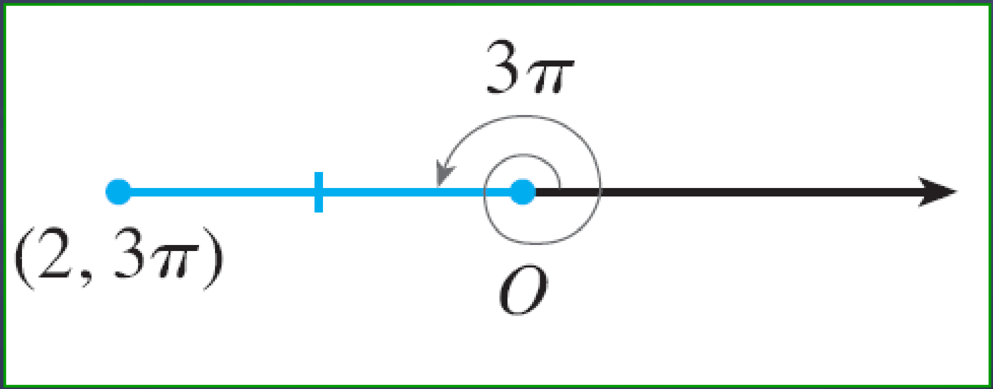
d. $(-3, 3\pi/4)$

COORDENADAS POLARES EXEMPLO 1 a E b

Ponto $(1, 5\pi/4)$

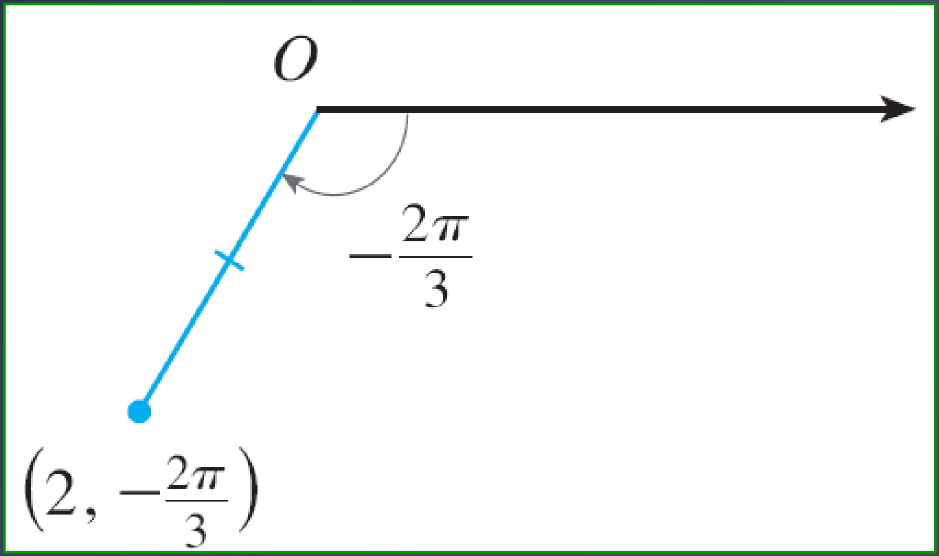


Ponto $(2, 3\pi)$



COORDENADAS POLARES EXEMPLO 1 c

Ponto $(2, -2\pi/3)$

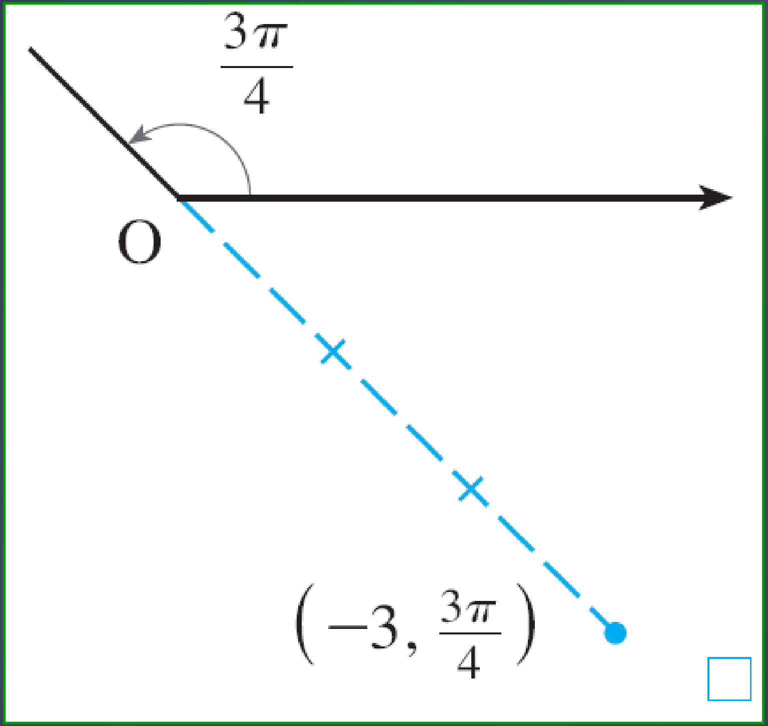


COORDENADAS POLARES EXEMPLO 1 d

Ponto $(-3, 3\pi/4)$

- Está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante.

- Isso porque o ângulo $3\pi/4$ está no segundo quadrante e $r = -3$ é negativo.



COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

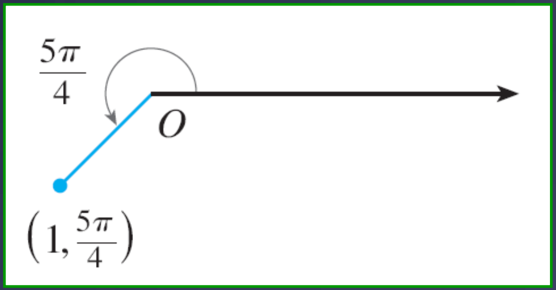
No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação.

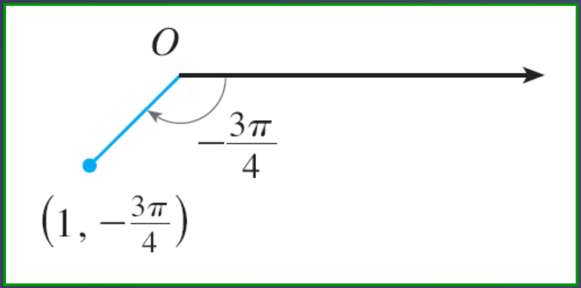
Porém, no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações.

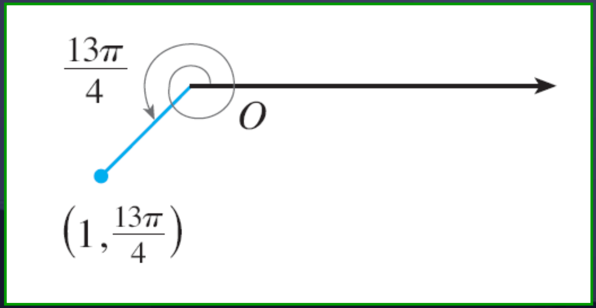
COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

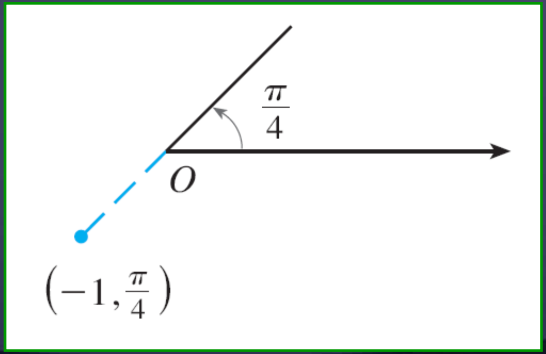
Por exemplo, o ponto (1, $5\pi/4$) no Exemplo 1(a) poderia ser escrito como:

- (1, $-3\pi/4$), (1, $13\pi/4$), ou (-1, $\pi/4$).









COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

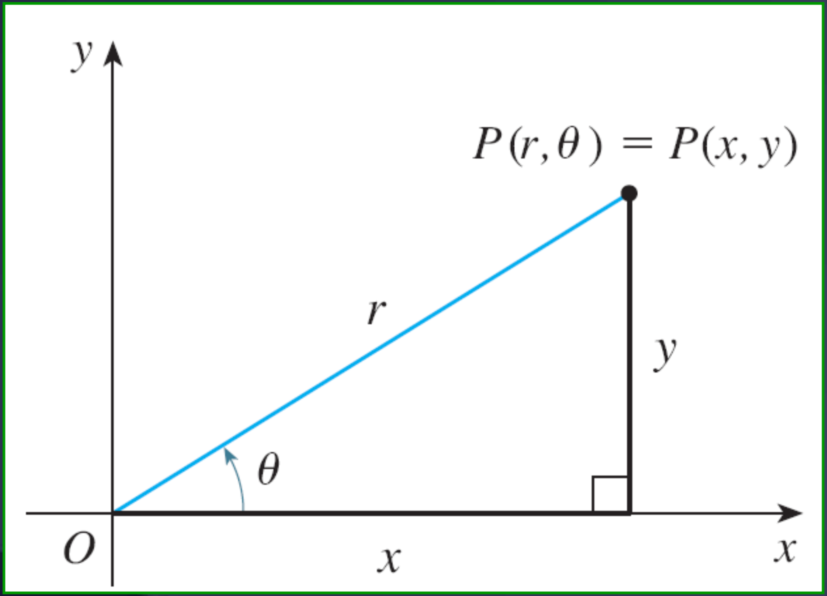
De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π, o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{e} \quad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

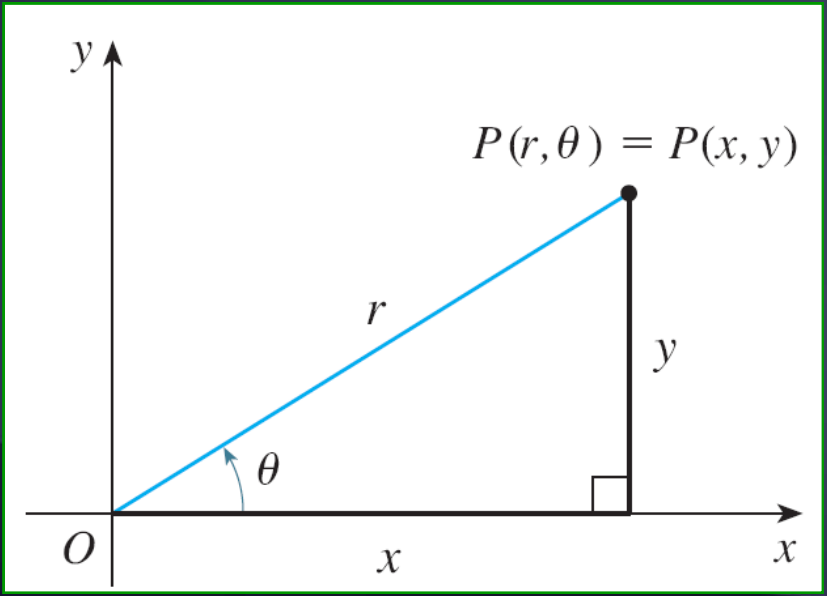
COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da figura.



- O polo corresponde à origem.
- O eixo polar coincide com o eixo *x* positivo.

Se o ponto *P* tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura, temos $\cos\theta = x/r$ *e* *sen* $\theta = y/r$, *e assim,*



$$x = r\cos\theta$$

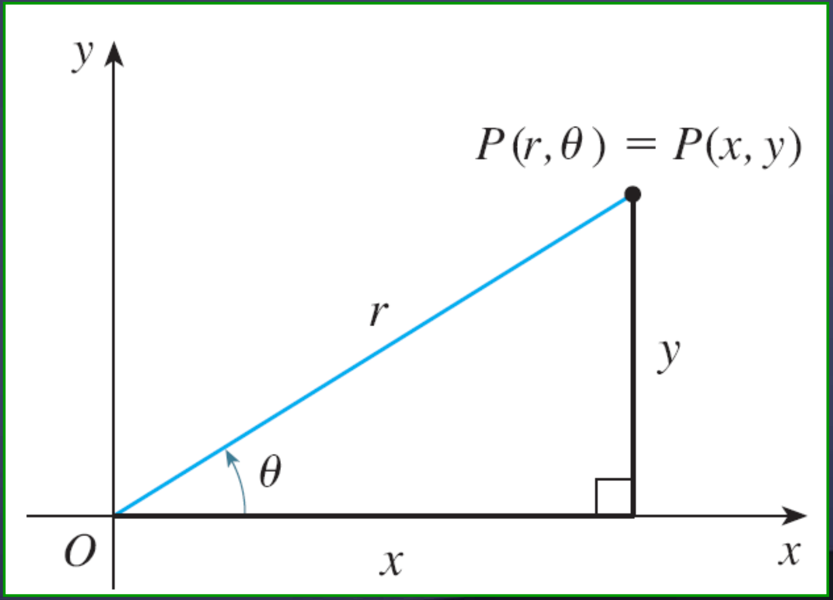
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

CENGAGE Learning™

COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir desta figura que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ.

- Veja a definição geral de sen θ e cos θ no Apêndice D, no Vol. I.



COORDENADAS CARTESIANAS VS. POLARES

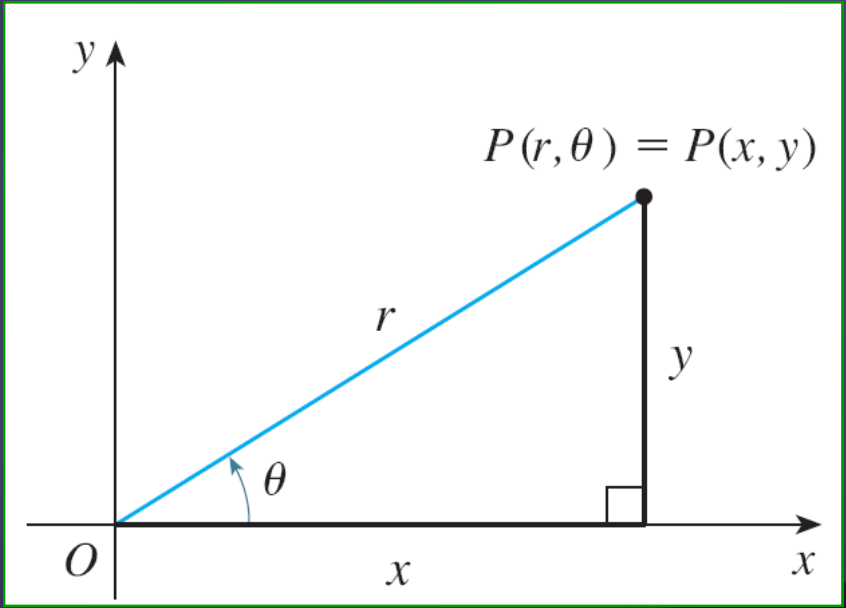
As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas.

COORD. CARTESIANAS VS. POLARES Equação 2

Para encontrar *r* e *θ* quando *x* e *y* são conhecidos, usamos as equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg} \theta = y / x$$

- Elas podem ser deduzidas a partir das Equações 1 ou simplesmente lidas a partir da figura.



Converta o ponto (2, π/3) de coordenadas polares para cartesianas.

- Como $r = 2$ e $\theta = \pi/3$, as Equações 1 fornecem:

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

- Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas.

COORD. CARTESIANAS VS. POLARES EXEMPLO 3

Representente o ponto com coordenadas cartesianas (1, -1) em termos de coordenadas polares.

Se escolhermos *r* positivo, então a Equação 2 fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1^2)} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = -1$$

- Como o ponto (1, -1) está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$.
- Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; e outra é $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

As Equações 2 não determinam univocamente θ quando x e y são dados.

- Isso porque, à medida que θ aumenta no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, cada valor de tg θ ocorre duas vezes.

Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar r e θ que satisfaçam as Equações 2.

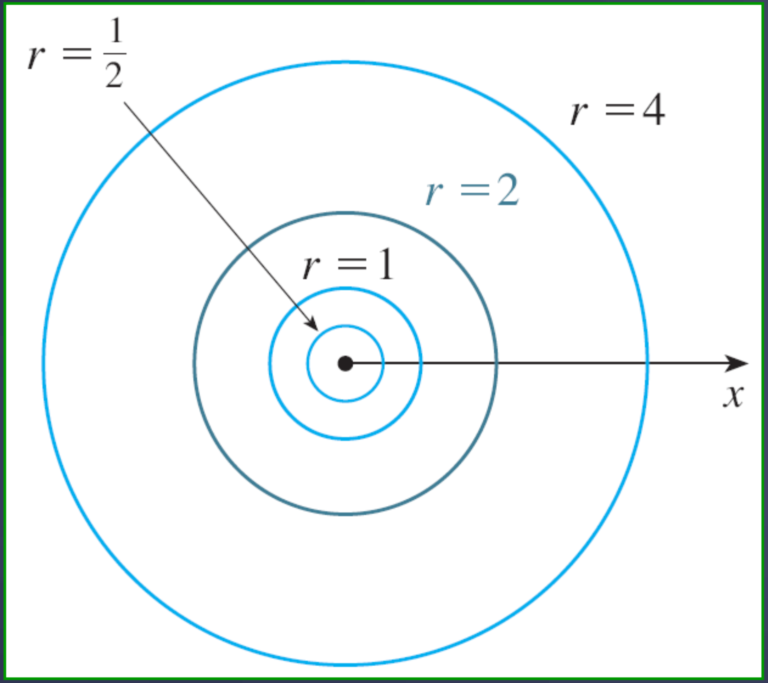
- Como no Exemplo 3, devemos escolher θ de modo que o ponto (r, θ) esteja no quadrante correto.

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$, ou mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.

Que curva é representada pela equação polar $r = 2$?

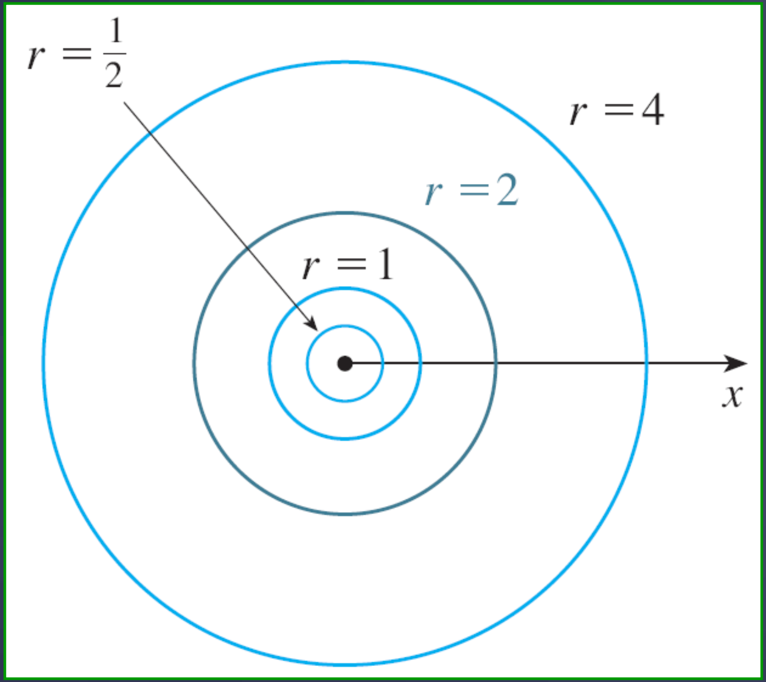
- A curva consiste em todos os pontos (r, θ) com $r = 2$.
- r representa a distância do ponto ao polo.

- A curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2.

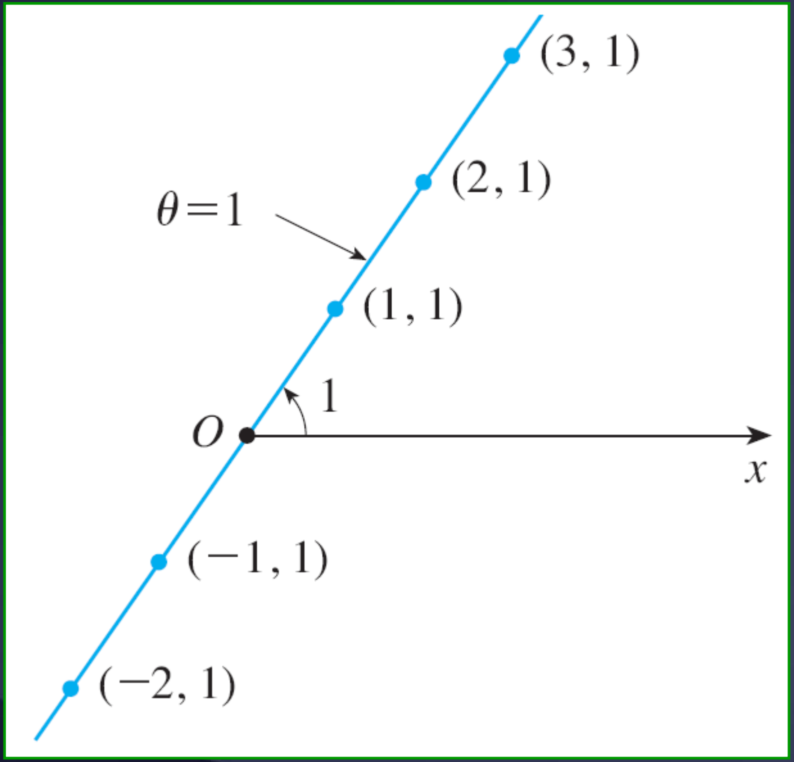


CURVAS POLARES EXEMPLO 4

Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$.



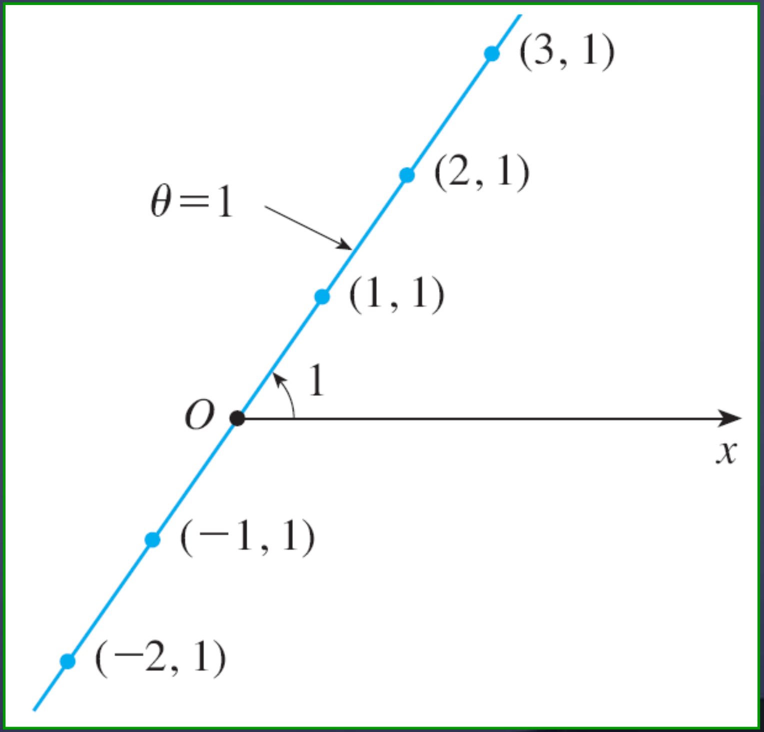
Esboce a curva polar $\theta = 1$.



- Essa curva consiste em todos os pontos (r, θ) tal que o ângulo polar θ é 1 radiano.
- É uma reta que passa por *O* e forma um ângulo de 1 radiano com o eixo polar.

Observe que:

- Os pontos (r, 1) na reta com $r > 0$ estão no primeiro quadrante.
- Os pontos (r, 1) enquanto aqueles com $r < 0$ estão no terceiro quadrante.



a. Esboce a curva com equação polar $r = 2 \cos \theta$.

b. Encontre a equação cartesiana para essa curva.

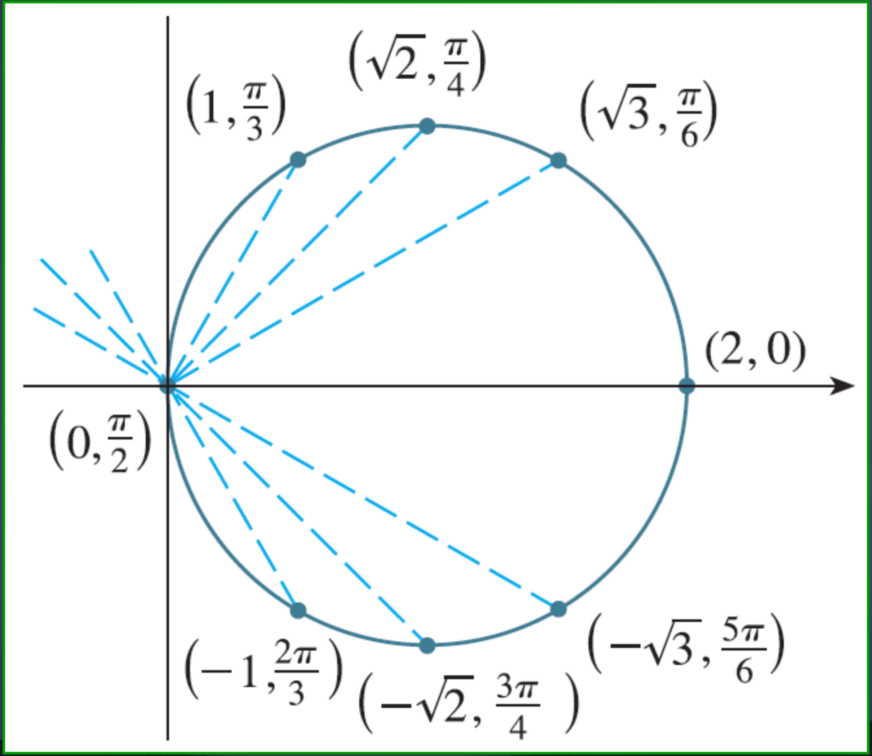
Na figura encontramos os valores de *r* para alguns valores convenientes de *θ* e marcamos os pontos correspondentes (*r*, *θ*).

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

CURVAS POLARES EXEMPLO 6 a

Então, juntamos esses pontos para esboçar a curva, que parece ser um círculo.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

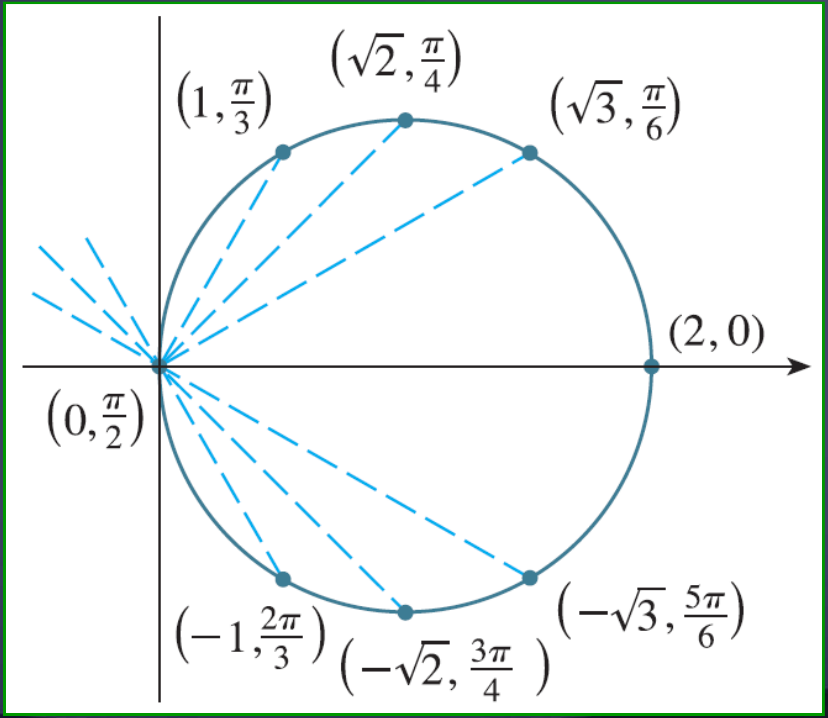


CURVAS POLARES

EXEMPLO 6 a

Usamos os valores de θ apenas entre 0 e π, já que, se deixarmos θ aumentar além de π, obtemos os mesmos pontos novamente.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



Para converter a equação dada em uma equação cartesiana, usamos as Equações 1 e 2.

- A partir de $x = r \cos \theta$, temos $\cos \theta = x/r$.
- Assim, a equação $r = 2 \cos \theta$ torna-se $r = 2x/r$, que fornece:

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

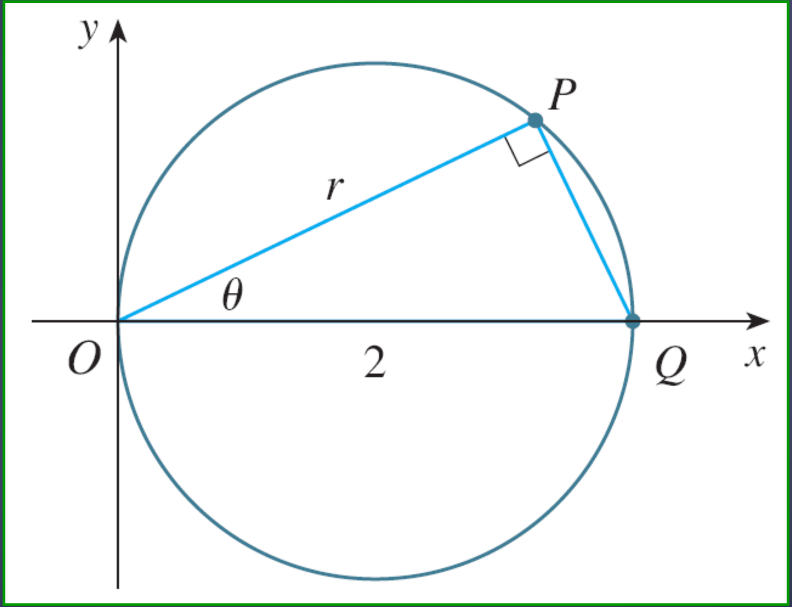
Completando o quadrado, obtemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que é uma equação do círculo com centro $(1, 0)$ e raio 1.

A figura mostra em uma ilustração geométrica que o círculo no Exemplo 6 tem a equação $r = 2 \cos \theta$.

- O ângulo *OPQ* é um ângulo reto e assim $r/2 = \cos \theta$.
- Porque *OPQ* é um ângulo reto?



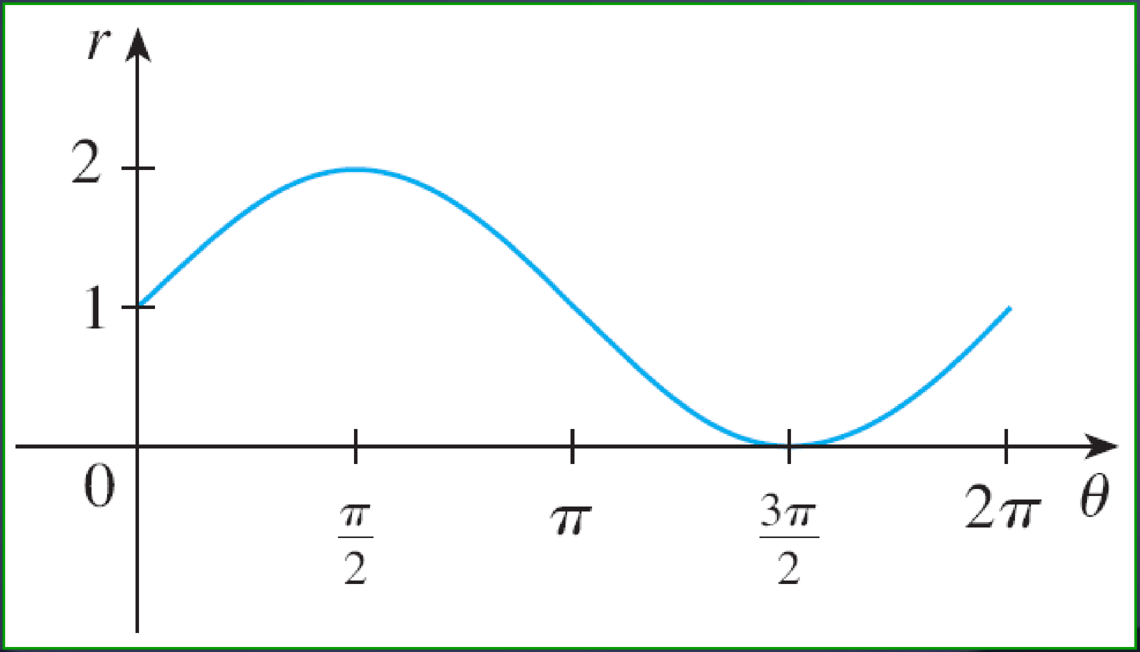
Esboce a curva $r = 1 + \text{sen}\ \theta$.

- Em vez de marcarmos os pontos como no Exemplo 6, primeiro esboçamos o gráfico de $r = 1 + \text{sen}\ \theta$ em coordenadas *cartesianas* na figura pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima.

CURVAS POLARES

EXEMPLO 7

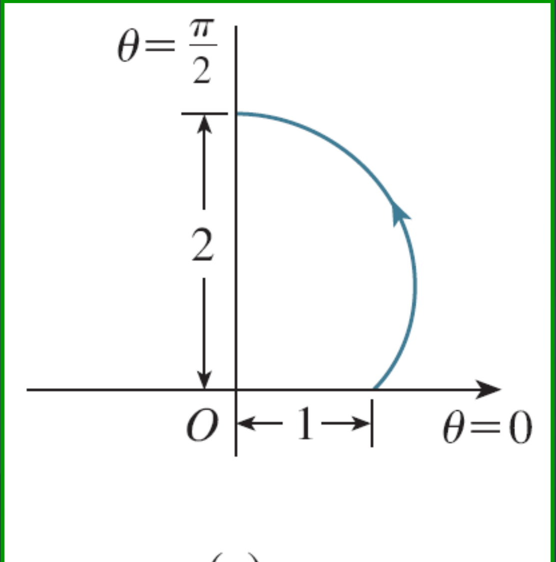
Isso nos permite ler facilmente os valores de *r* que correspondem a valores crescentes de *θ*.



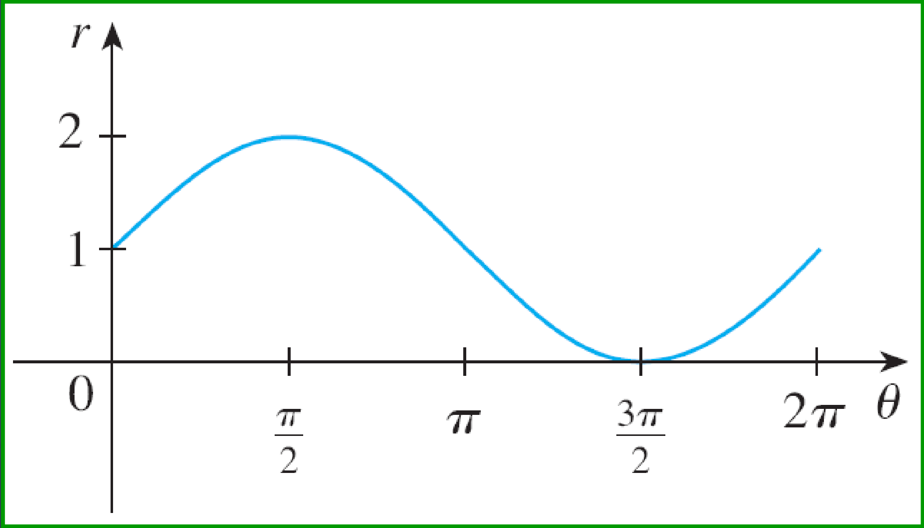
CURVAS POLARES

EXEMPLO 7

Por exemplo, vemos que, quando θ aumenta de 0 até $\pi/2$, *r* (a distância a partir de *O*) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na figura (a).

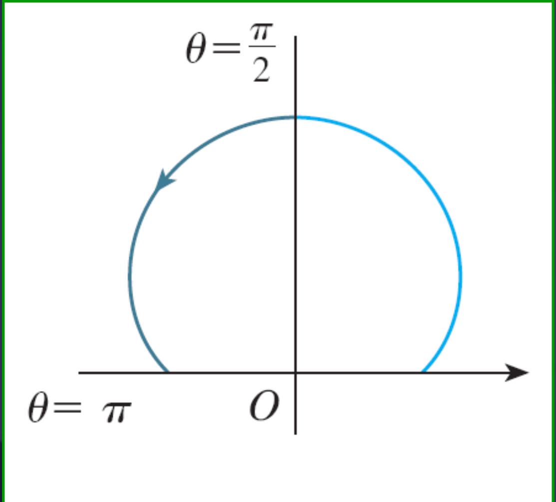


(a)

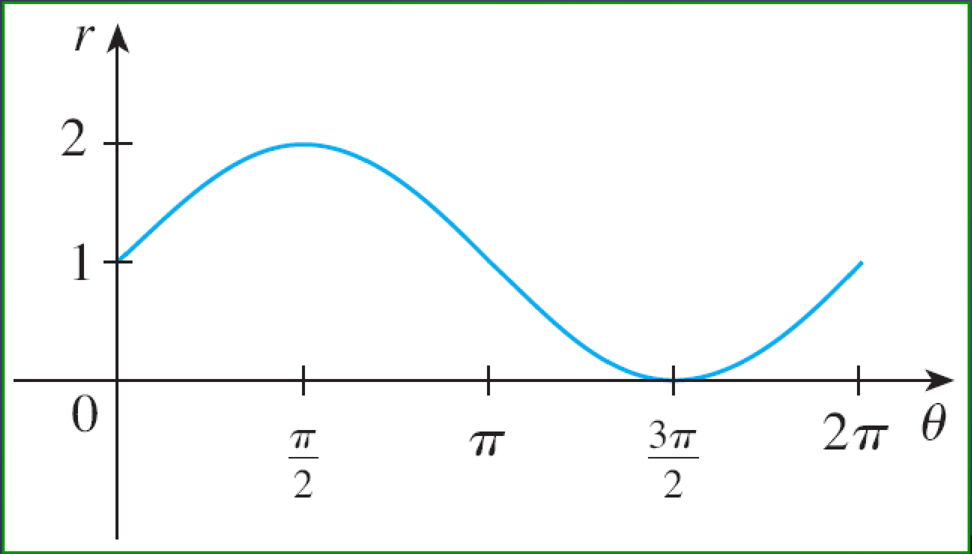


CURVAS POLARES EXEMPLO 7

Quando θ aumenta de $\pi/2$ até π, a figura da direita mostra que r diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva como na figura (b), à esqueda.

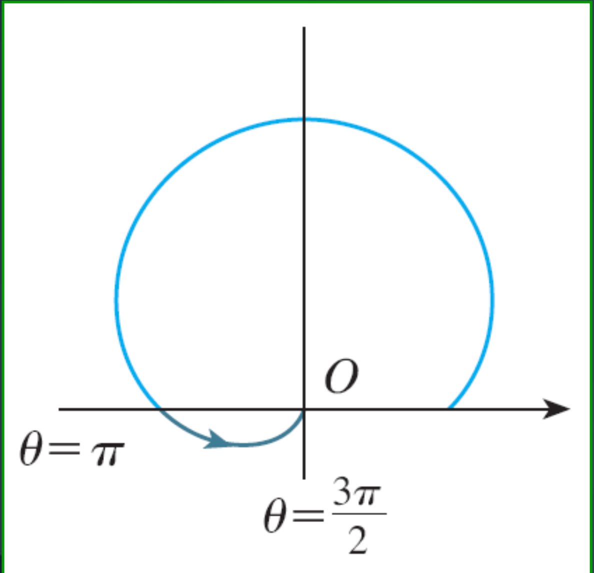


(b)

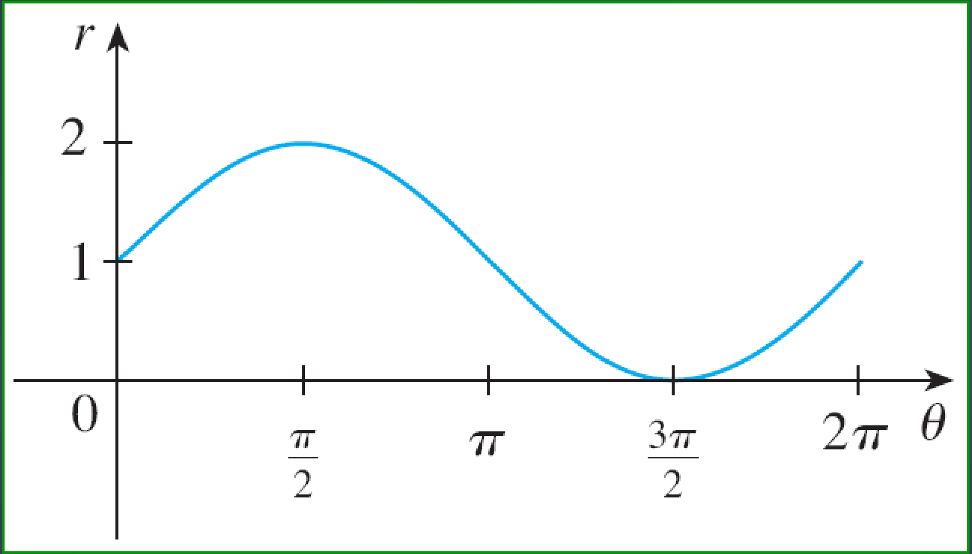


CENGAGE Learning

Quando θ aumenta de π até $3\pi/2$, r diminui de 1 para 0, como apresentado na parte (c).



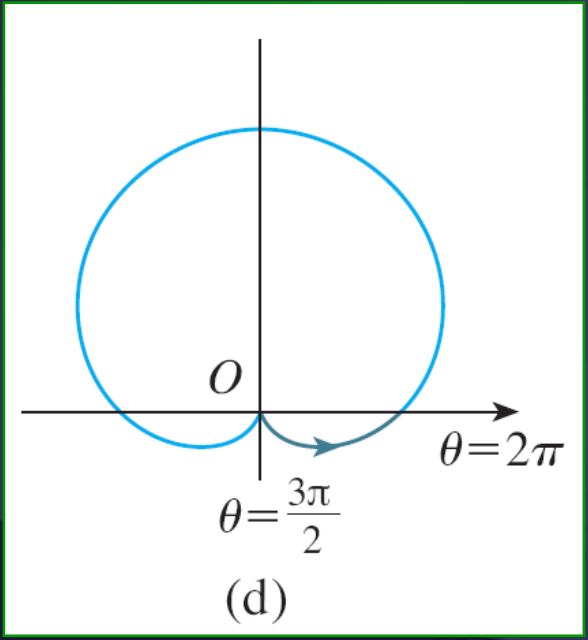
(c)

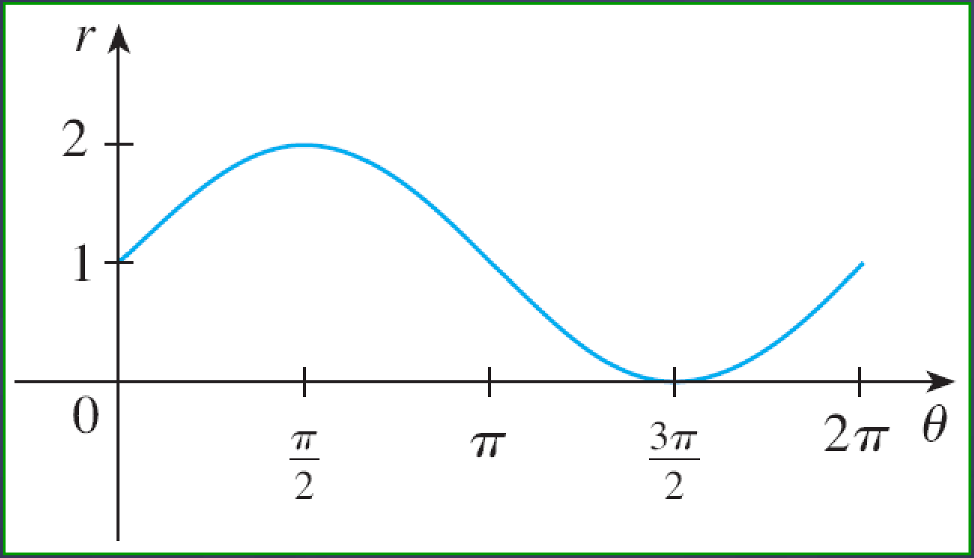


CURVAS POLARES

EXEMPLO 7

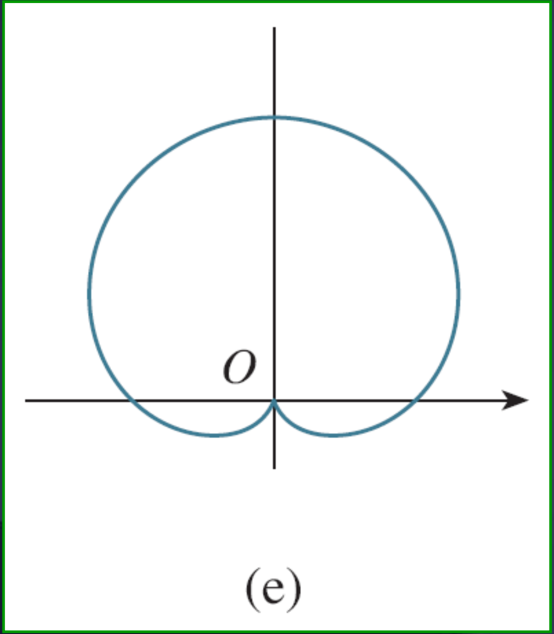
Finalmente, quando *θ* aumenta de 3π/2 até 2π, *r* aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d).

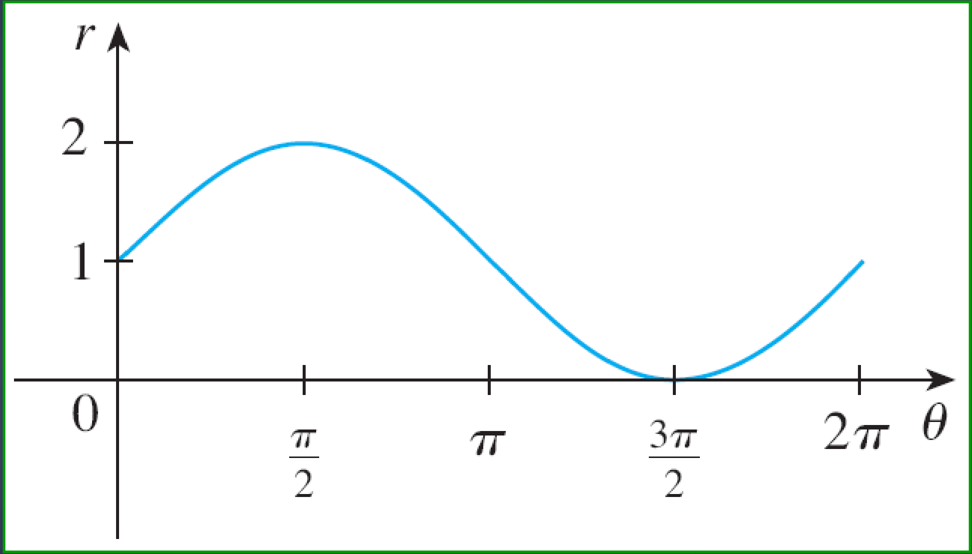




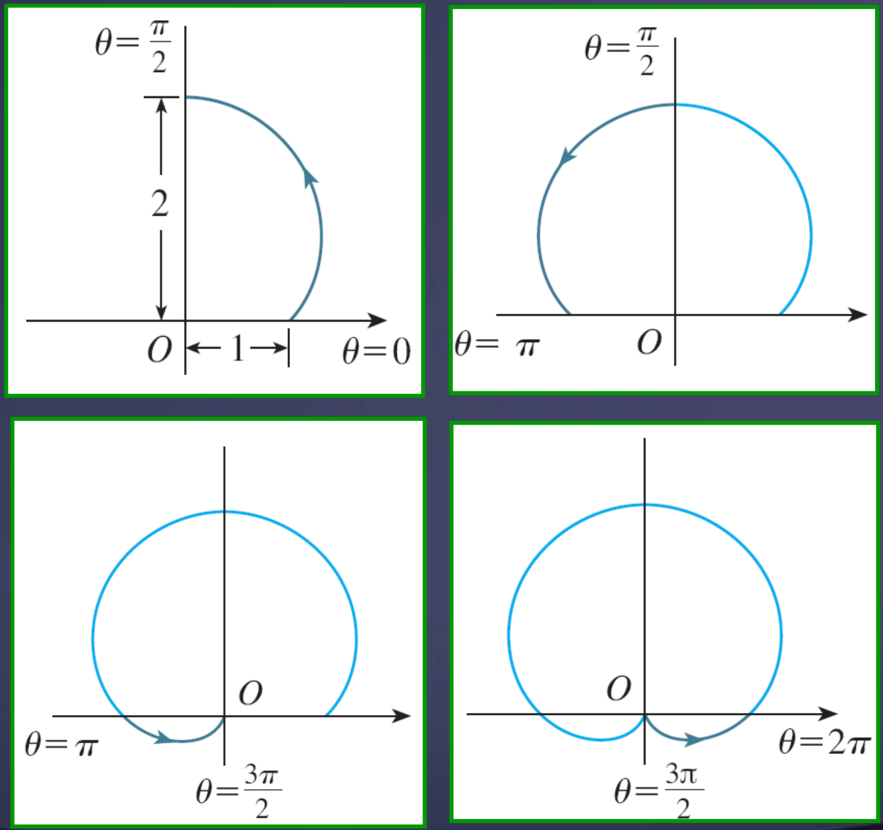
CURVAS POLARES   EXEMPLO 7

Se deixássemos θ aumentar além de 2π ou diminuir além de 0, simplesmente retraçaríamos nossa trajetória.



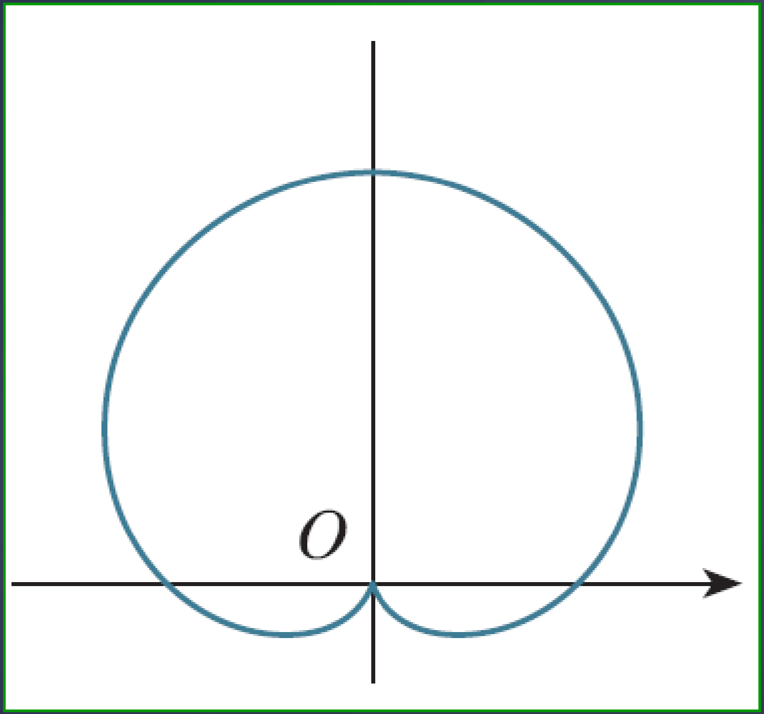


Juntando as partes da curva nas figuras (a)-(d), esboçamos a curva completa na parte (e).



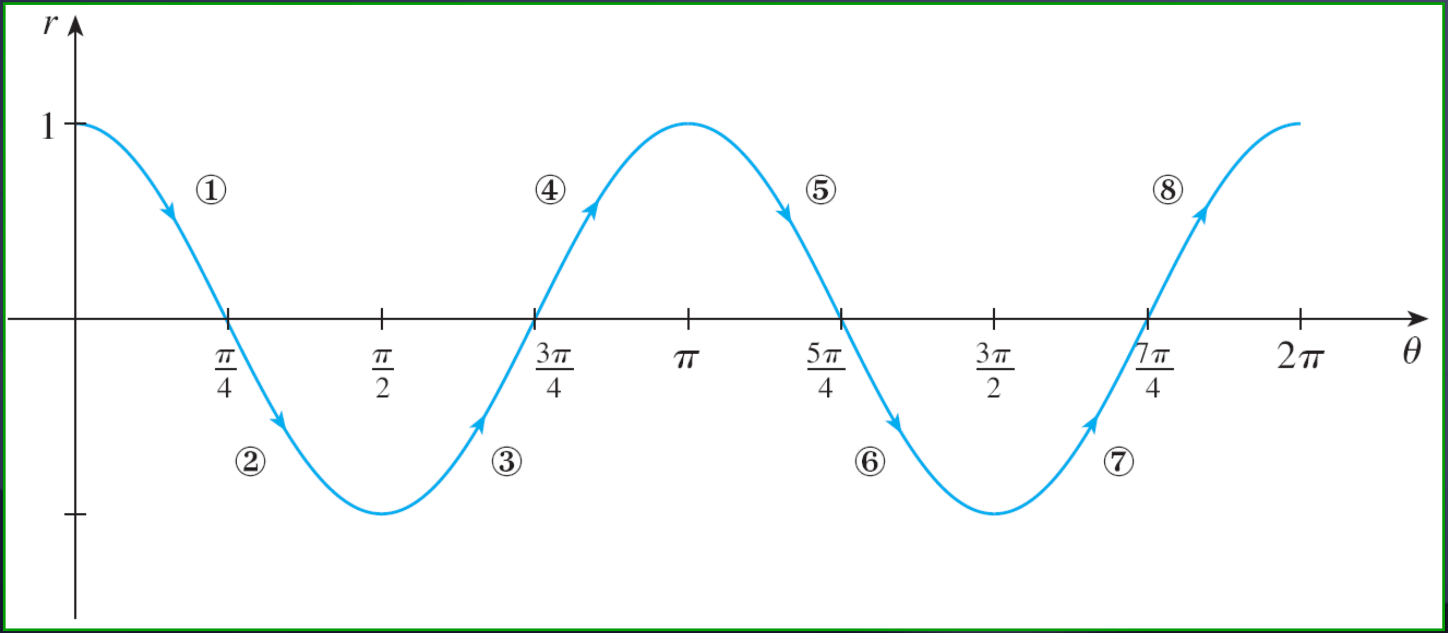
CARDIOIDE EXEMPLO 7

Ela é chamada de **cardioide**, porque tem o formato parecido com o de um coração.



Esboce a curva $r = \cos 2\theta$.

- Como no Exemplo 7, primeiro esboçamos $r = \cos 2\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, em coordenadas Cartesianas.

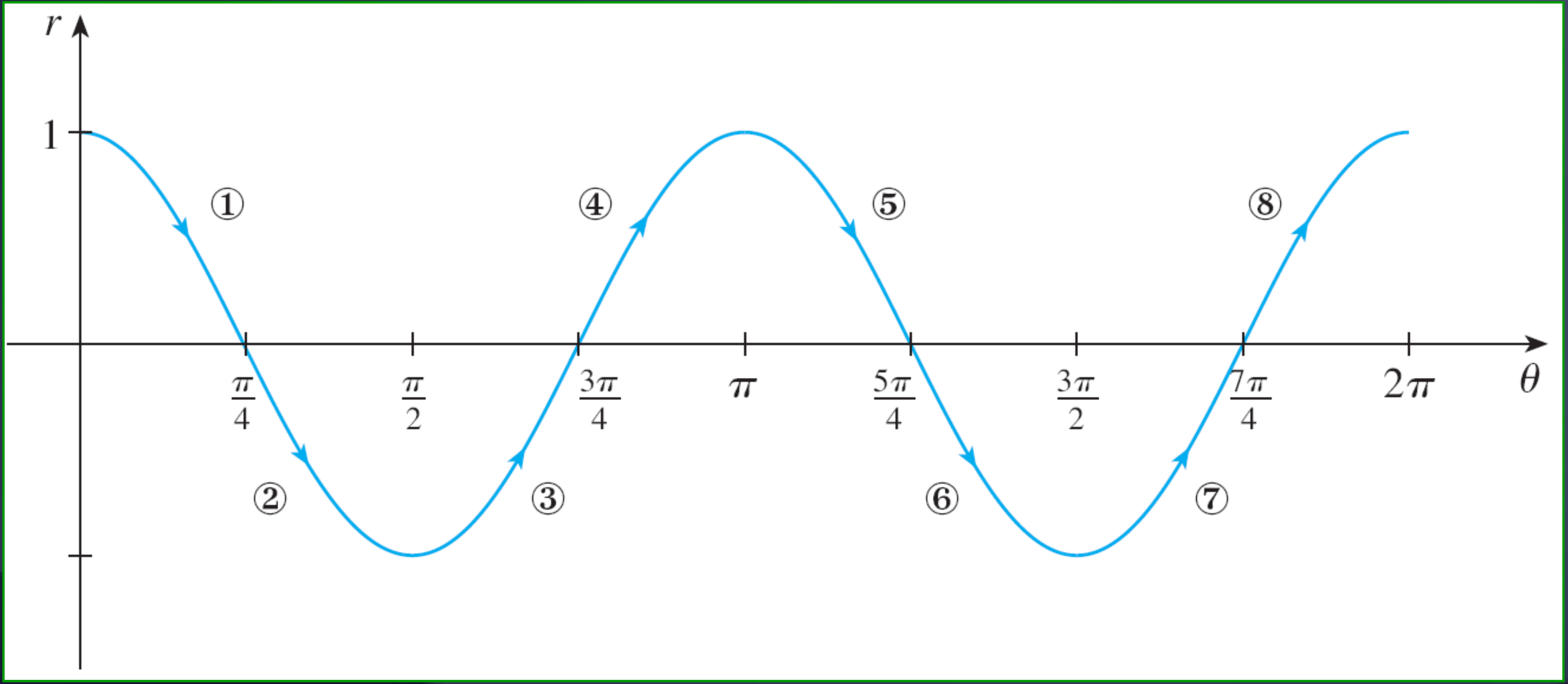


CENGAGE Learning™

CURVAS POLARES

EXEMPLO 8

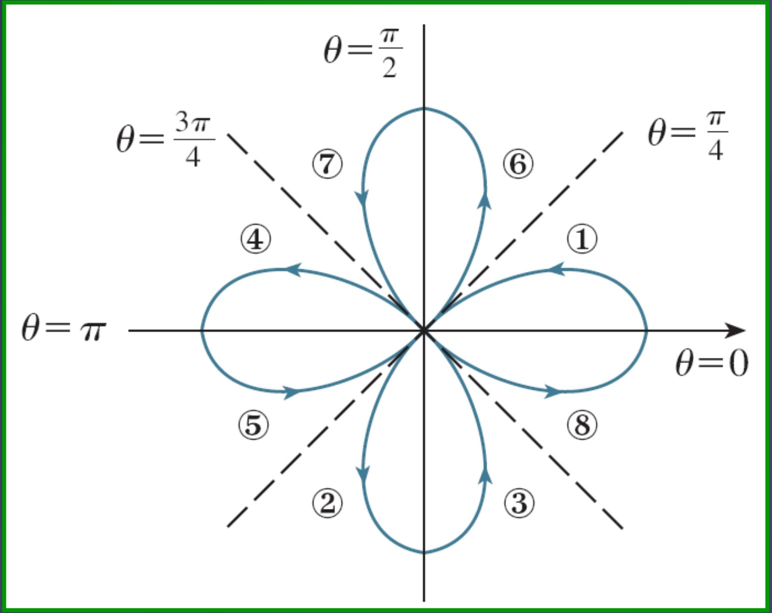
Quando θ aumenta de 0 até $\pi/4$, a figura mostra que r diminui de 1 até 0.

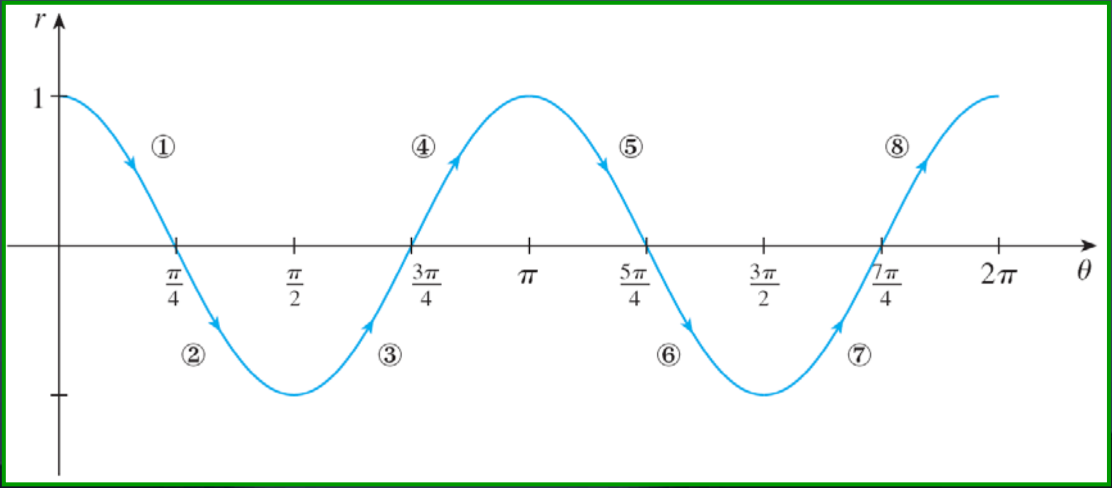


CURVAS POLARES

EXEMPLO 8

E assim desenhamos a parte correspondente da curva polar na figura (indicada por①).



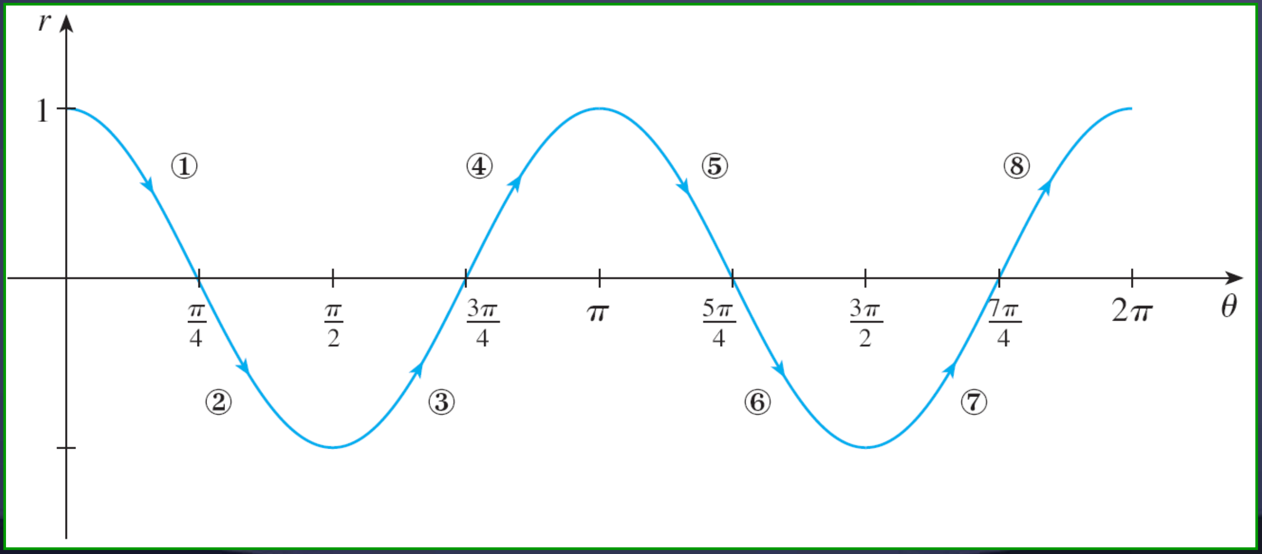


CURVAS POLARES

EXEMPLO 8

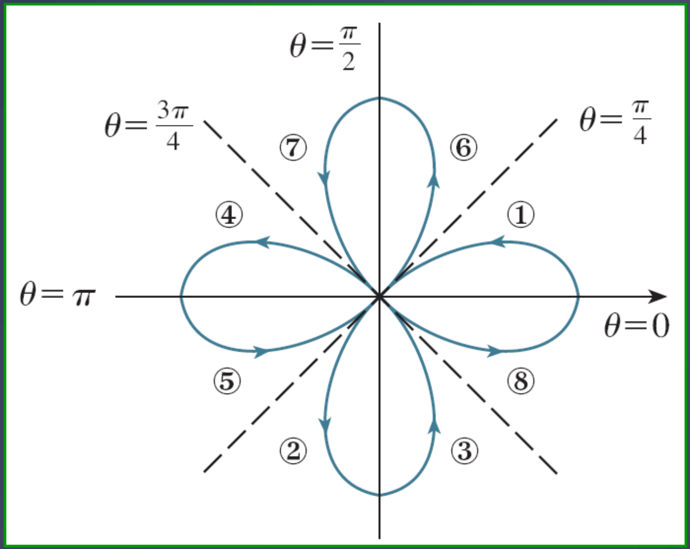
Quando θ aumenta de $\pi/4$ até $\pi/2$, *r* varia de 0 até -1.

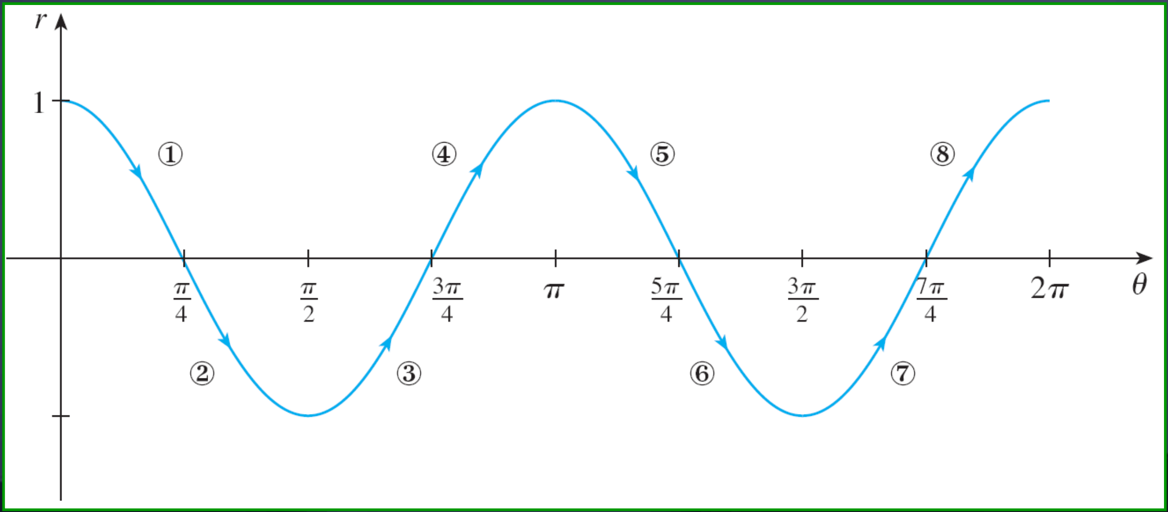
- Isso significa que a distância de *O* aumenta de 0 até 1.



CURVAS POLARES — EXEMPLO 8

- mas, em vez de ser no 1º quadrante, essa parte da curva polar (indicada por ②) está no lado oposto ao polo no terceiro quadrante.

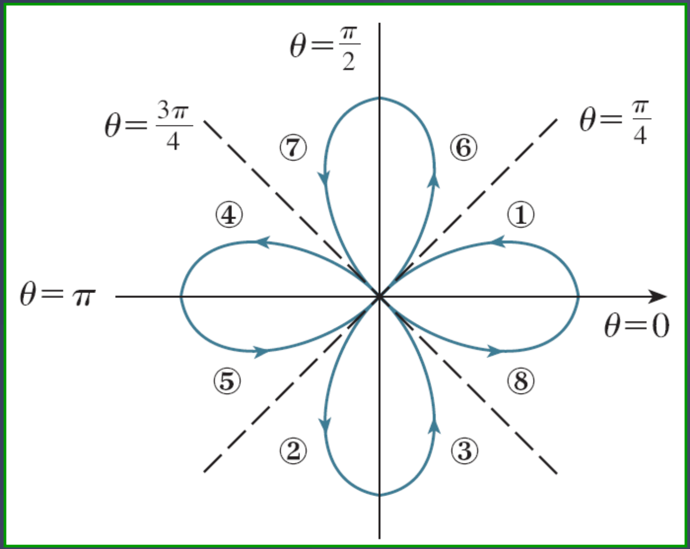


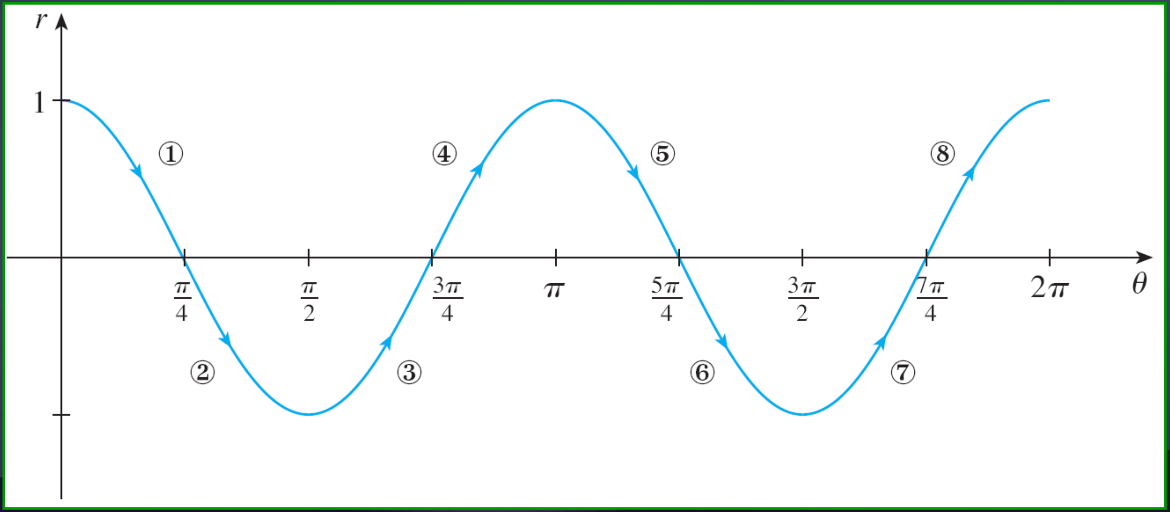


CURVAS POLARES

EXEMPLO 8

O restante da curva é desenhado de uma maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as partes são traçadas.



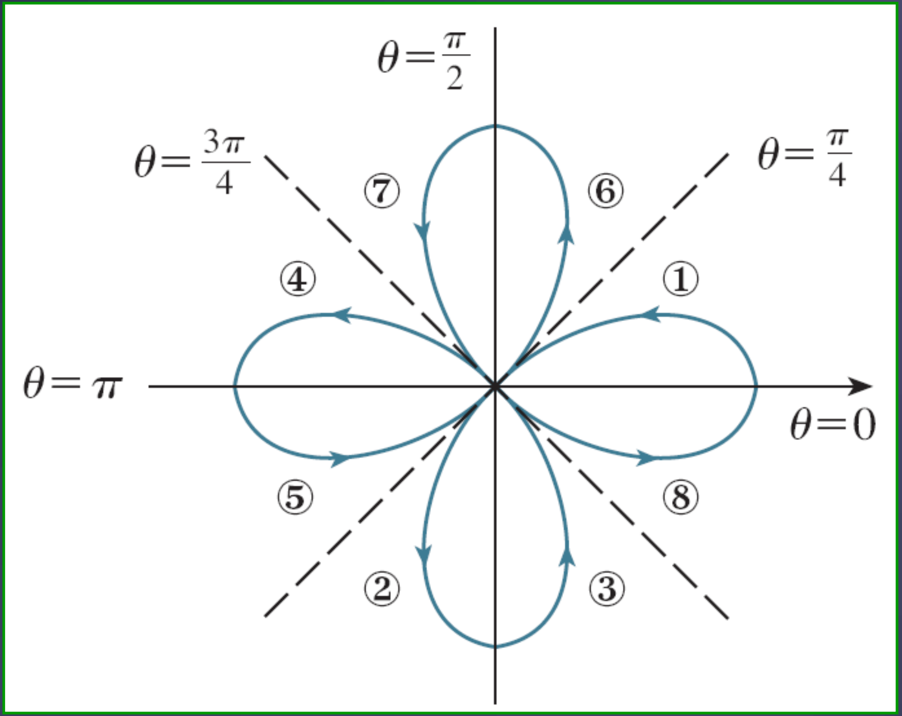


CENGAGE Learning™

CURVAS POLARES

EXEMPLO 8

A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosácea de quatro pétalas**.



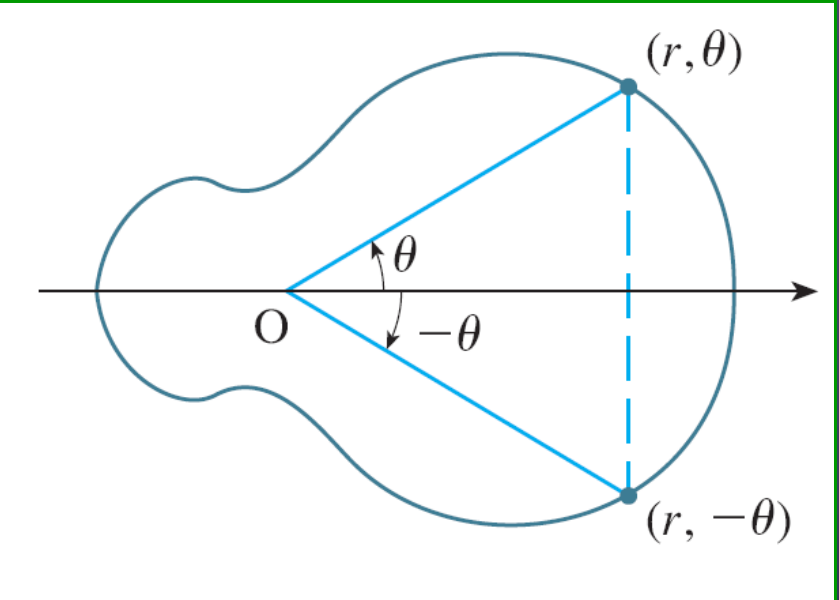
SIMETRIA

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria.

As três regras seguintes são explicadas por figuras.

REGRA 1

Se uma equação polar não mudar quando θ for trocado por $-\theta$, a curva será simétrica em relação ao eixo polar.

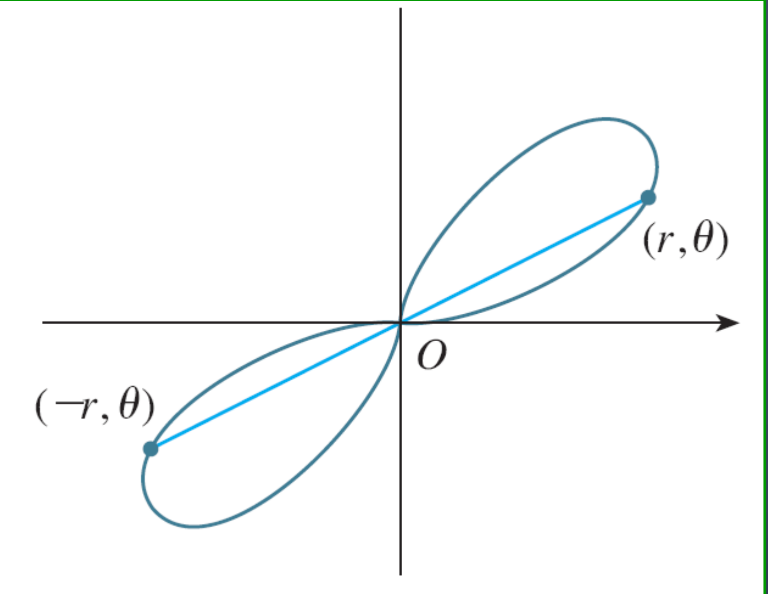


(a)

REGRA 2

Se a equação não mudar quando *r* for trocado por -*r*, ou quando θ for trocado por $\theta + \pi$, a curva será simétrica em relação ao polo.

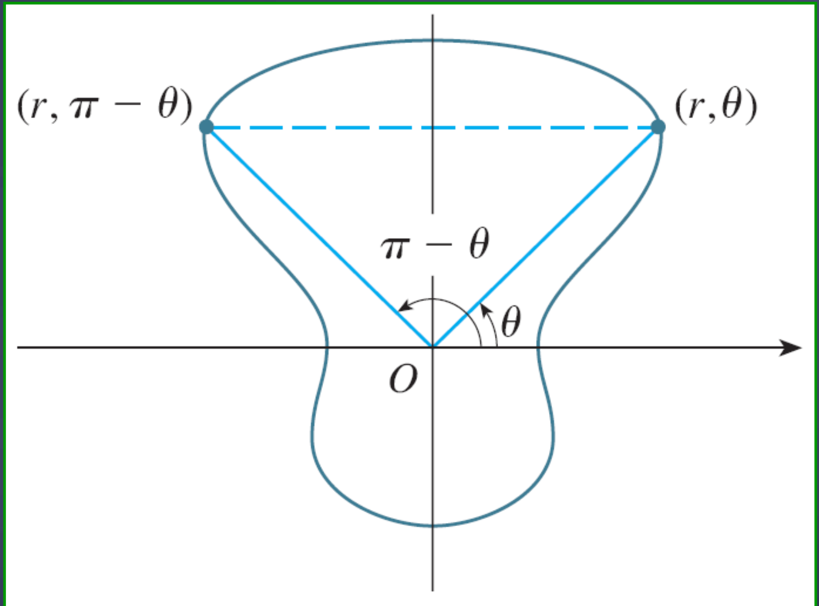
- Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° em torno da origem.



(b)

REGRA 3

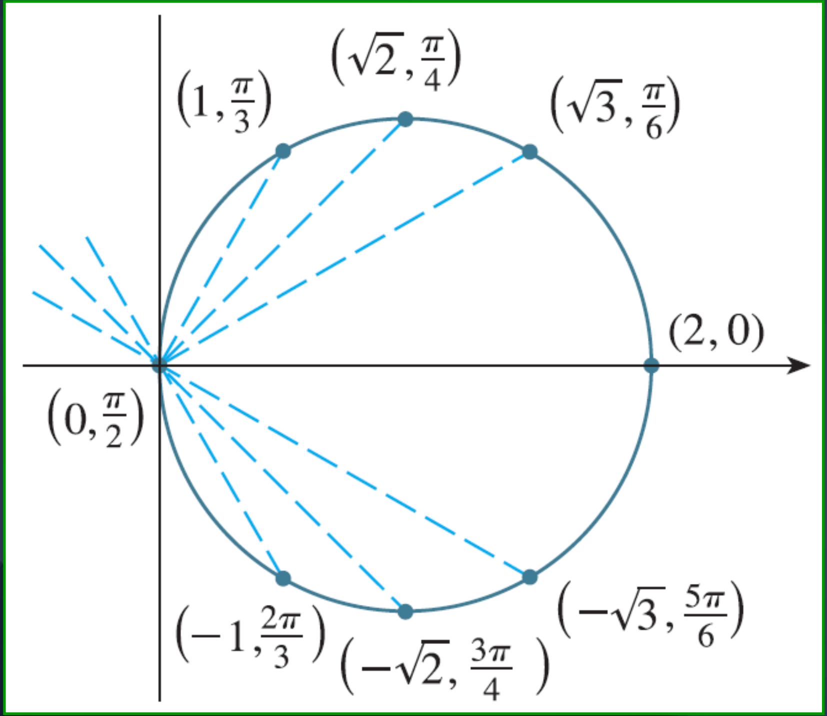
Se a equação não mudar quando θ for trocado por $\pi - \theta$, a curva será simétrica em relação à reta vertical $\theta = \pi/2$.

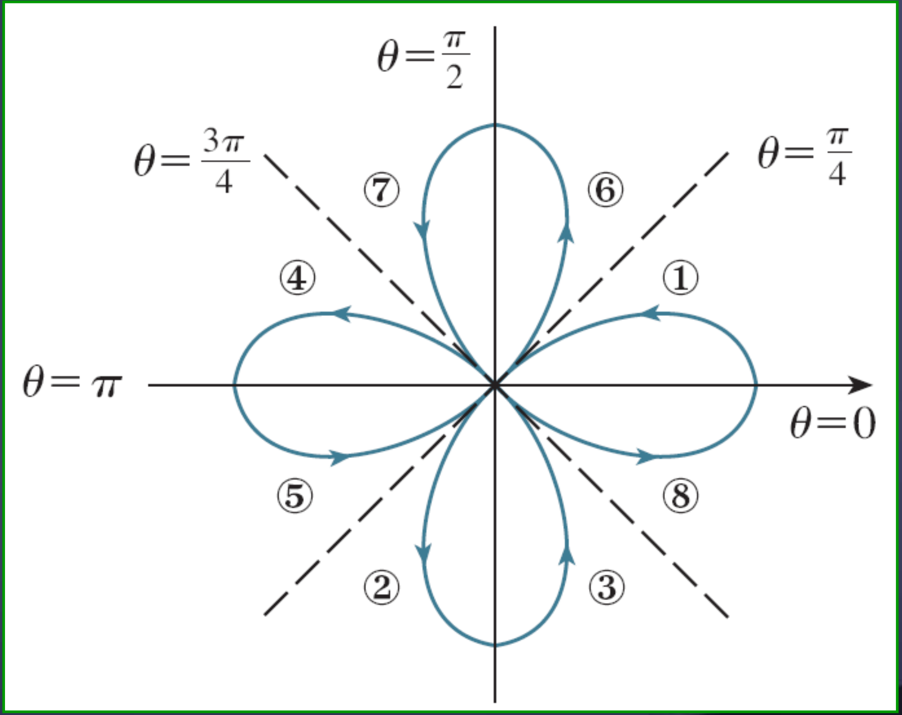


(c)

SIMETRIA

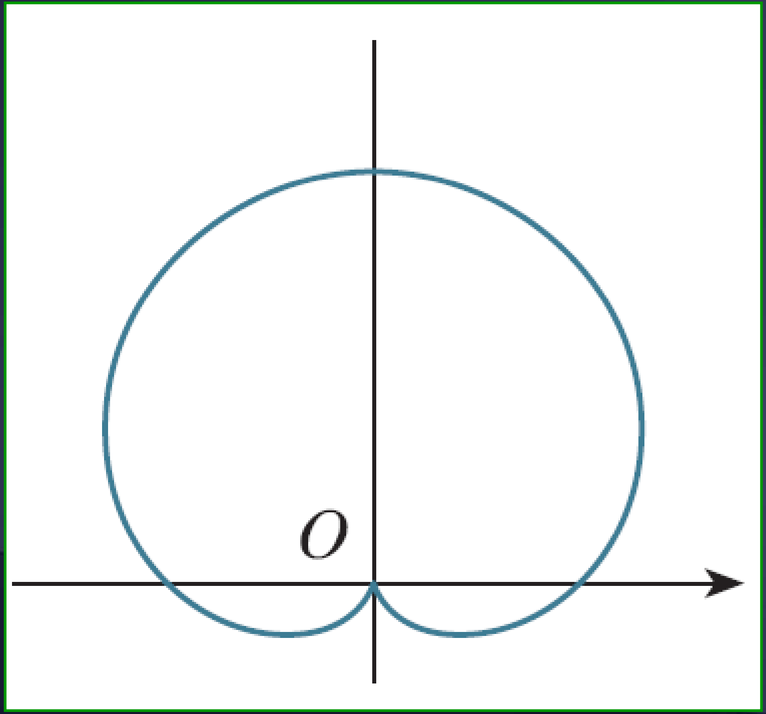
As curvas nos Exemplos 6 e 8 são simétricas em relação ao eixo polar, pois cos(-*θ*) = cos *θ*.

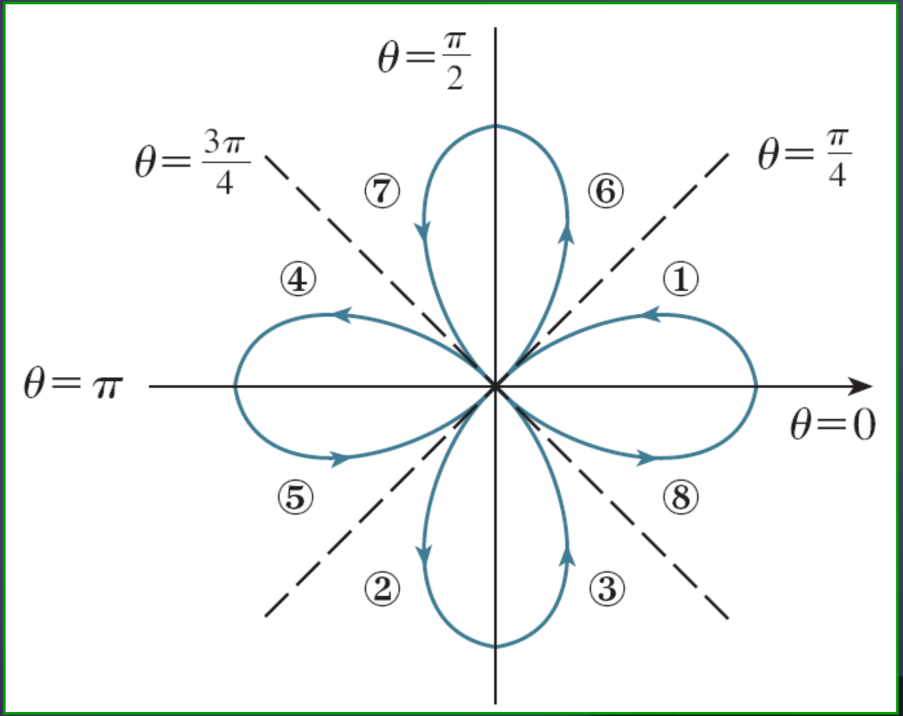




SIMETRIA

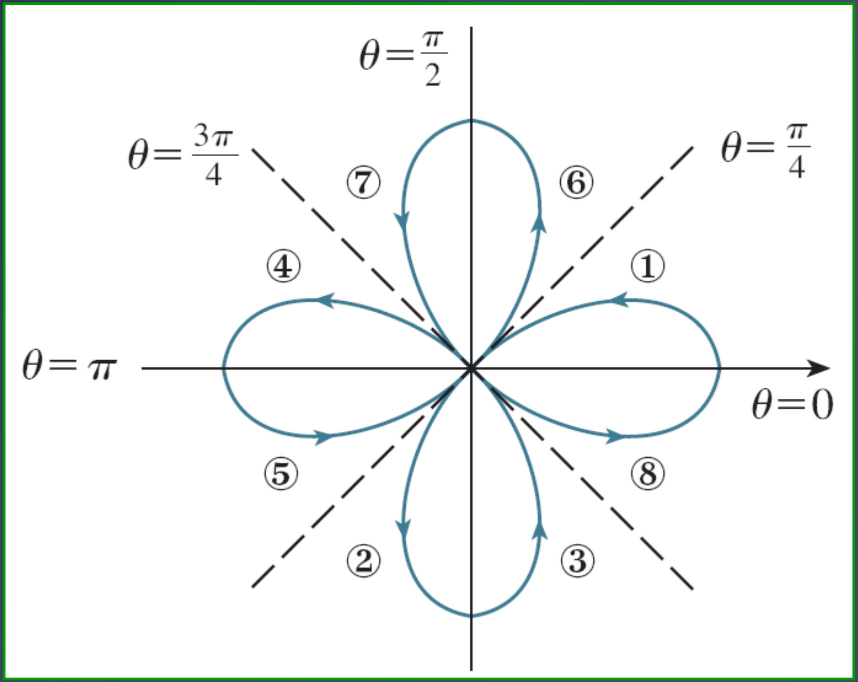
As curvas nos Exemplos 7 e 8 são simétricas em relação à $\theta = \pi/2$ porque sen $(\pi - \theta)$ = sen θ e $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$.





SIMETRIA

A rosácea de quatro pétalas é também simétrica em relação ao polo.

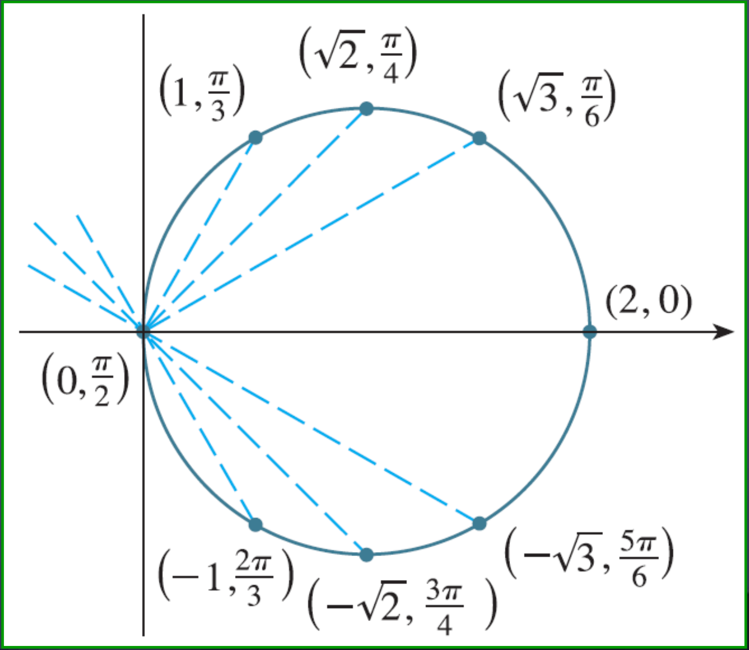


Essas propriedades de simetria poderiam ser usadas para esboçar as curvas.

SIMETRIA

Por exemplo, no Exemplo 6 só precisaríamos ter marcado pontos para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e então refleti-los em torno do eixo polar para obter o círculo completo.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



CENGAGE Learning™

TANGENTES A CURVAS POLARES

Para encontrar a reta tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Equação 3

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas parametrizadas (Equação 10.2.2), e a Regra do Produto temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

TANGENTES A CURVAS POLARES

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $dy/d\theta = 0$ (desde que $dx/d\theta \neq 0$).

Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $dx/d\theta = 0$ (desde que $dy/d\theta \neq 0$).

TANGENTES A CURVAS POLARES

Observe que, se estivermos olhando para as retas tangentes no polo, então r 0 e a Equação 3 é simplificada para

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{se} \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0}$$

TANGENTES A CURVAS POLARES

Por exemplo, no Exemplo 8 achamos que

$r = \cos 2\theta = 0$ quando $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$.

- Isso significa que as retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ (ou $y = x$ e $y = -x$) são retas tangentes a $r = \cos 2\theta$ na origem.

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9

a. Para a cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ do Exemplo 7, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \pi/3$.

b. Encontre os pontos na cardioide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

Usando a Equação 3 com $r = 1 + \text{sen}\,\theta$, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + (1 + \text{sen}\,\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1 + \text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{1 - 2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{(1 + \text{sen}\,\theta)(1 - 2\,\text{sen}\,\theta)}$$

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9 a

A inclinação da tangente no ponto no qual $\theta = \pi/3$ é:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = \pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\,\mathrm{sen}(\pi/3))}{(1 + \mathrm{sen}(\pi/3))(1 - 2\,\mathrm{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9 b

Observe que:

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta(1 + 2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \text{sen}\,\theta)(1 - 2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9 b

Portanto existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \pi/2)$, $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$ e tangentes verticais em $(3/2, \pi/6)$, $(3/2, 5\pi/6)$.

- Quando $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ e $dx/d\theta$ são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos.

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9 b

Usando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta} \right) \left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \right)$$

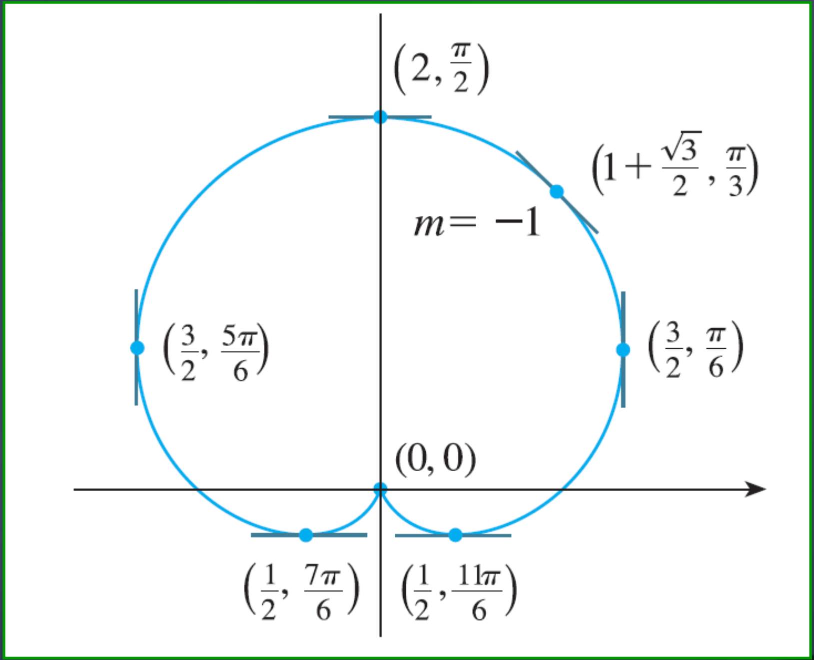
$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \infty$$

TANGENTES A CURVAS POLARES EXEMPLO 9 b

Por simetria,

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Então existe uma reta tangente vertical no polo.



Em vez de lembrarmos a Equação 3, poderíamos empregar o método usado para deduzi-la.

- Por exemplo, no Exemplo 9, poderíamos ter escrito:

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

- Então, teríamos

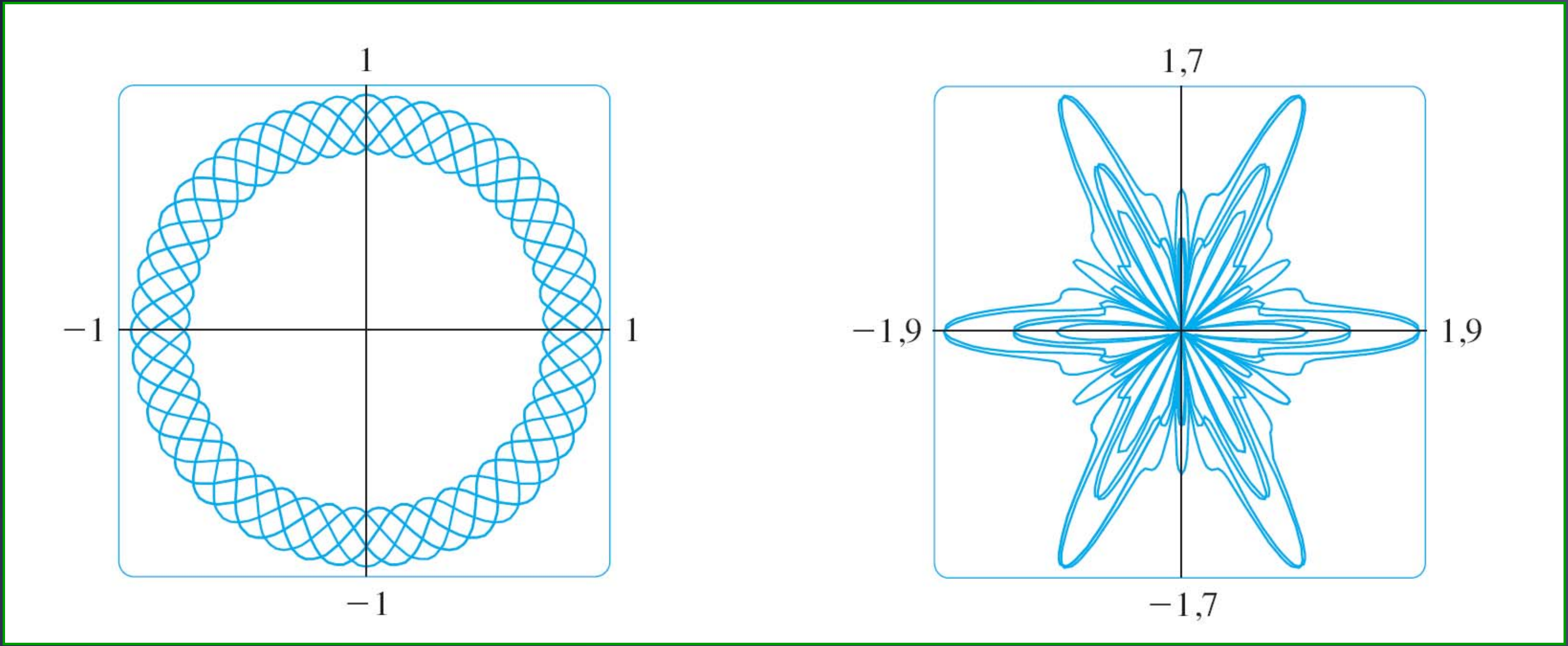
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{-\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \mathrm{sen}\,2\theta}{-\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos 2\theta}$$

que é equivalente à nossa expressão prévia.

TRAÇANDO CURVAS POLARES COM FERRAMENTAS GRÁFICAS

Embora seja útil saber esboçar as curvas polares simples manualmente, precisamos usar uma calculadora gráfica ou um computador quando nos deparamos com curvas complicadas, como as mostradas nas figuras a seguir.

GRÁFICOS DE CURVAS POLARES



TRAÇANDO CURVAS POLARES COM FERRAMENTAS GRÁFICAS

Algumas ferramentas gráficas têm comandos que nos permitem traçar curvas polares diretamente.

Com outras máquinas precisamos fazer a conversão para curvas parametrizadas primeiro.

FERRAMENTAS GRÁFICAS

Neste caso, tomamos a equação polar $r = f(\theta)$ e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

- Algumas máquinas requerem que o parâmetro seja denominado t em vez de θ.

Trace a curva r = sen(8θ / 5).

- Vamos assumir que nossa ferramenta gráfica não tenha um comando para traçar as curvas polares.

FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 10

Nesse caso, precisamos trabalhar com as equações paramétricas correspondentes, que são

$$x = r \cos \theta = \text{sen}(8\theta/5) \cos \theta \qquad y = r \,\text{sen}\, \theta = \text{sen}(8\theta/5) \,\text{sen}\, \theta$$

- Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ.

FERRAMENTAS GRÁFICAS **EXEMPLO 10**

Então nos perguntamos:

- Quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir?

Se a resposta for *n*, então

$$\operatorname{sen} \frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen} \frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π.

Isso ocorrerá primeiro quando $n = 5$.

- Portanto, traçamos a curva inteira se especificarmos que $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

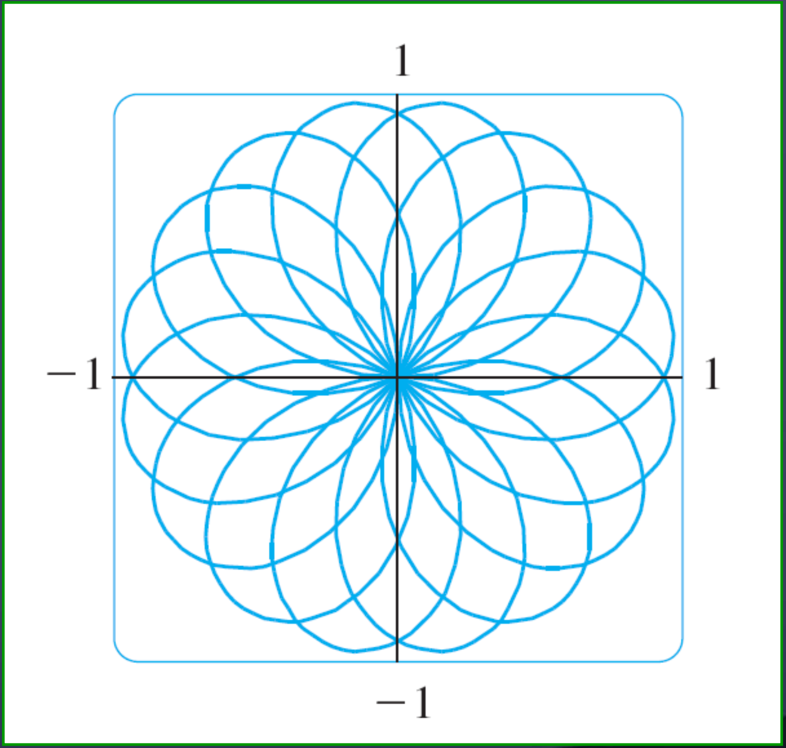
Trocando de θ para t, temos as equações

$$\boxed{x = \operatorname{sen}(8t/5)\cos t} \quad \boxed{y = \operatorname{sen}(8t/5)\operatorname{sen} t} \quad \boxed{0 \leqslant t \leqslant 10\pi}$$

FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 10

Esta é a curva resultante.

- Observe que essa rosácea tem 16 laços.



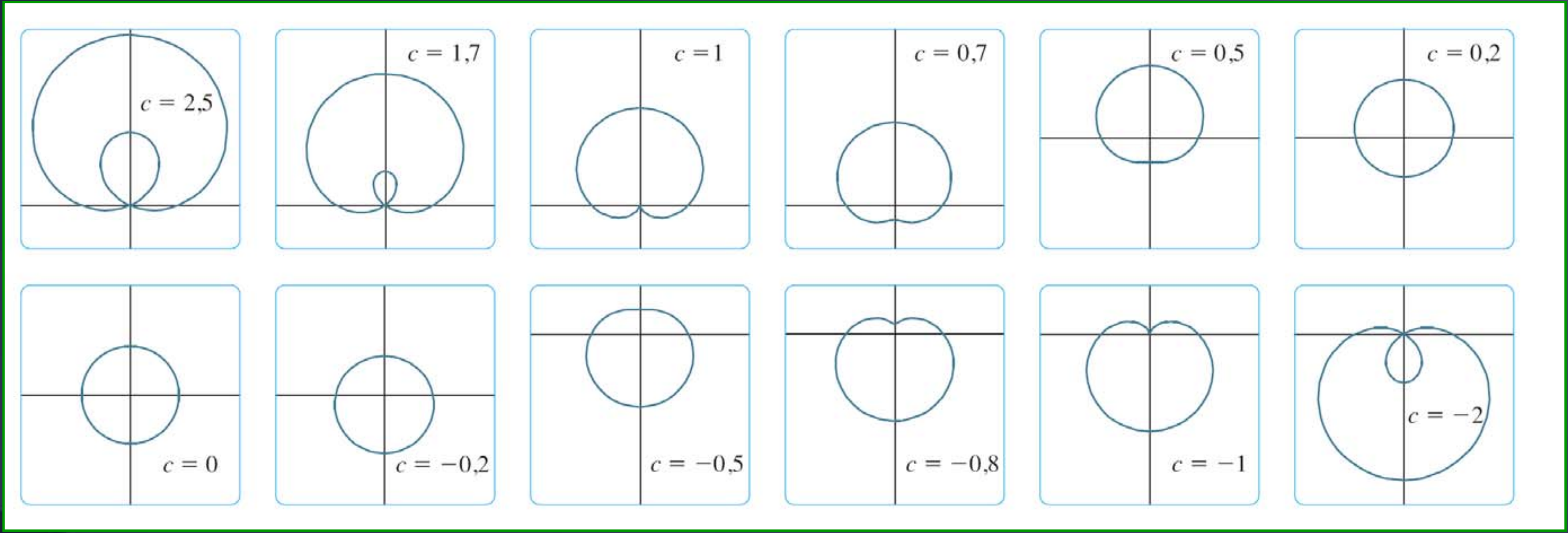
Investigue a família de curvas polares dada por $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$.

Como o formato muda conforme c varia?

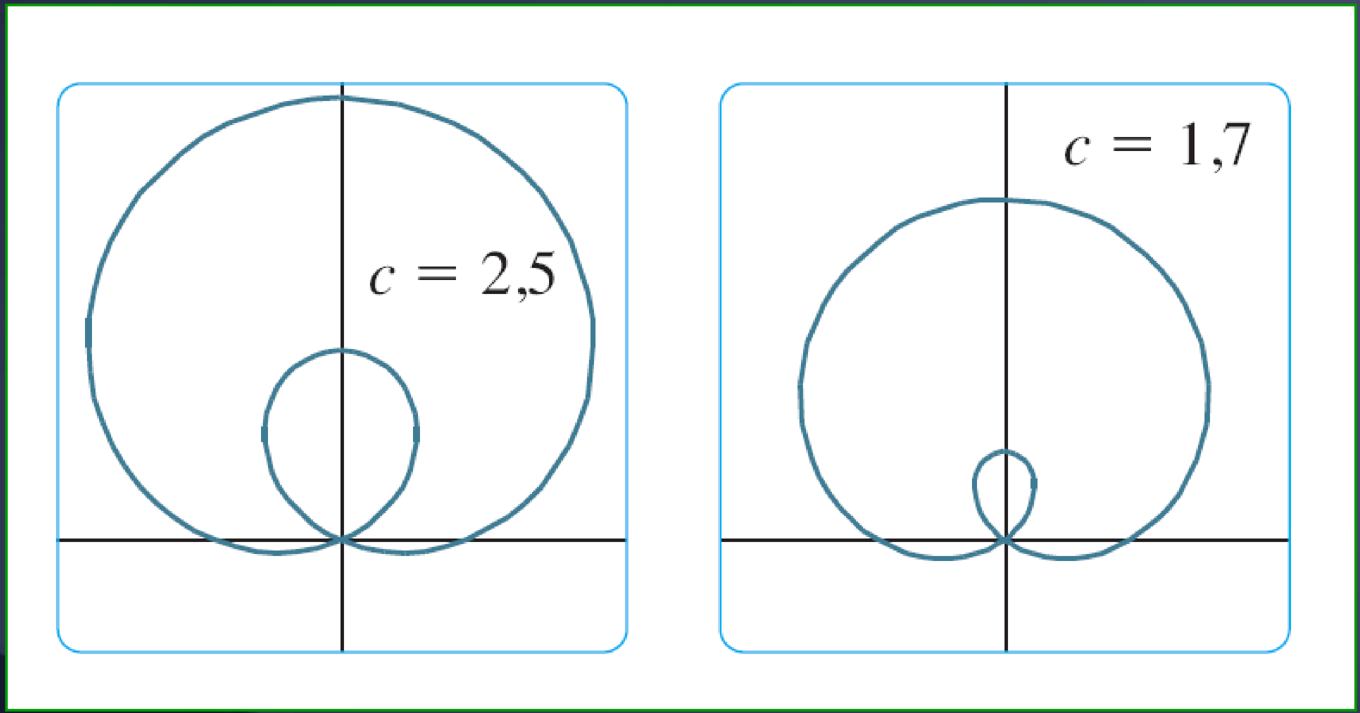
- Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.

FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 11

A figura mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de *c*.

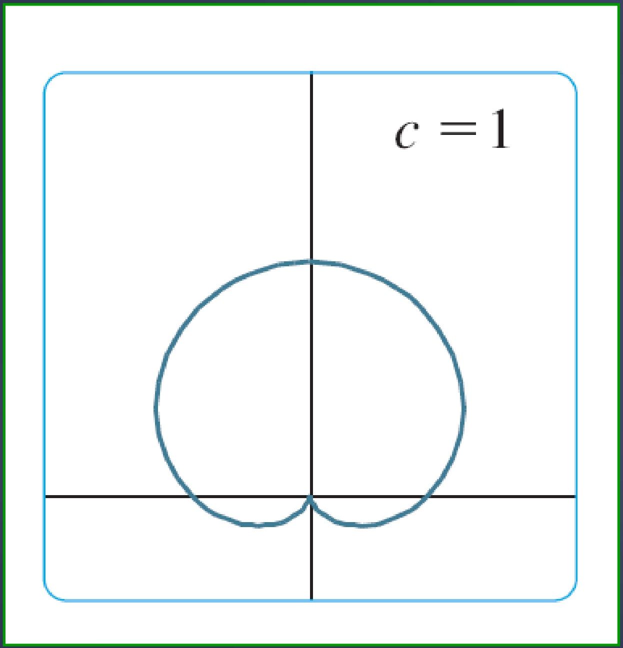


Para $c > 1$ existe um laço que reduz de tamanho quando c diminui.



FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 11

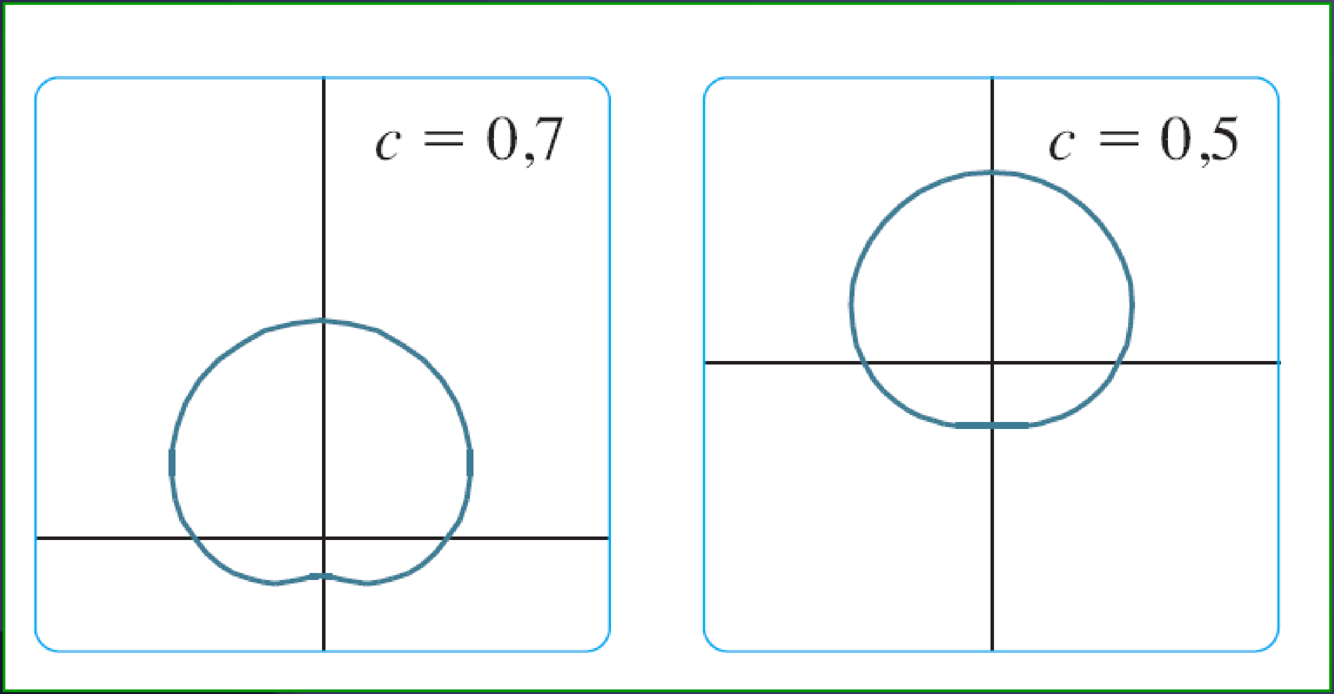
Quando c = 1, o laço desaparece e a curva torna-se a cardioide que esboçamos no Exemplo 7.



FERRAMENTAS GRÁFICAS

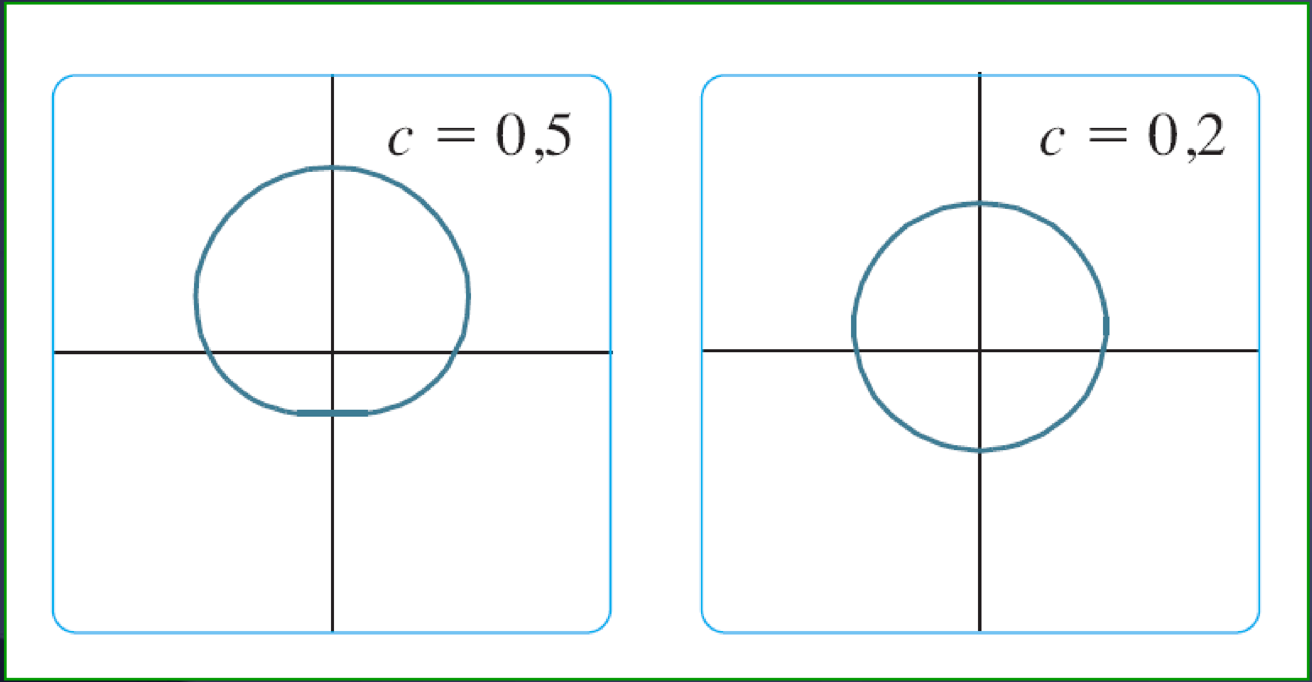
EXEMPLO 11

Para *c* entre 1 e ½, a cúspide da cardioide é suavizada e torna-se uma “covinha”.



FERRAMENTAS GRÁFICAS **EXEMPLO 11**

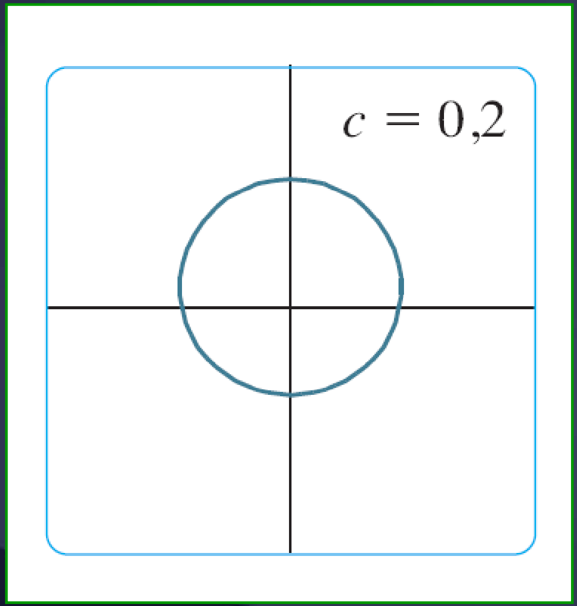
Quando *c* diminui de ½ para 0, a limaçon parece oval.

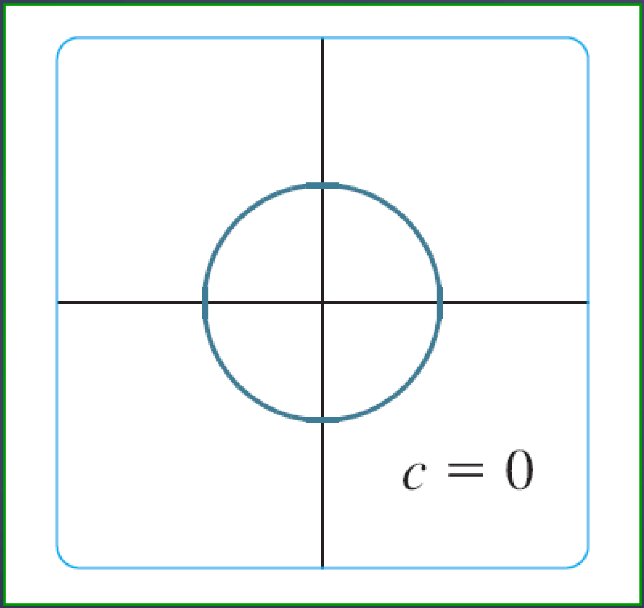


FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 11

Essa oval se torna mais circular quando $c \to 0$.

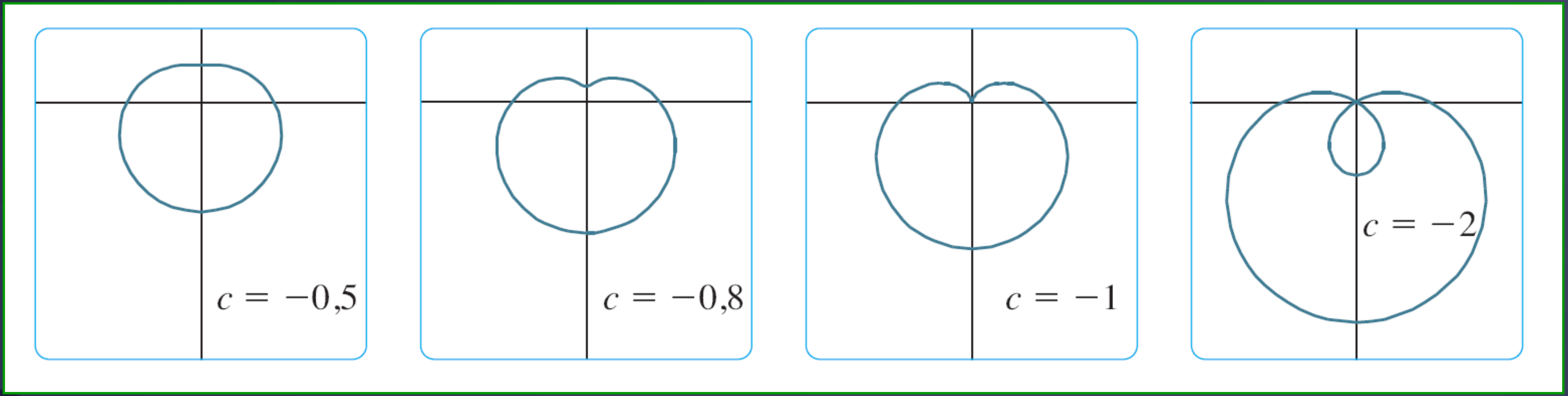
Quando $c = 0$, a curva é apenas o círculo $r = 1$.





FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 11

As partes restantes da figura mostram que, quando *c* se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa.



CENGAGE Learning™

FERRAMENTAS GRÁFICAS EXEMPLO 11

De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com *c* positivo.