Nome: ____________________________________ Matrícula: __________

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Σ	

1ª Prova - MTM1018 - T 10

15 de Outubro de 2018

É proibido usar calculadora ou similares. Respostas sem justificativas, que não usem os métodos indicados ou que não incluam os cálculos necessários não serão consideradas. $\mathcal{M}_{22}$ indica o espaço das matrizes 2×2. Todas as operações consideradas são as usuais. Detalhe o escalonamento apenas na Questão 1.

Questão 1. *(2pts)* Resolva o sistema linear usando o método de Gauss-Jordan (apenas uma operação por vez aqui)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 12x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 18x_4 + 6x_5 &= 2 \\ x_1 - 6x_3 - 12x_5 &= 5 \end{cases}$$

Questão 2. *(2pts)*

(a) Considere os vetores/matrizes $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right], A_2 = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -8 \end{smallmatrix}\right], A_3 = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right], A_4 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Verifique se os vetores $B_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, e $B_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ são combinação linear de A_1, A_2, A_3 e A_4. (*Sugestão*: os dois podem ser verificados simultaneamente);

(b) Observando sua solução no item (a), $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é LI? Se A_4 puder ser escrito como combinação linear dos demais, escreva uma combinação linear de A_1, A_2 e A_3 que resulta em A_4;

(c) Encontre uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathcal{M}_{22}$, sendo:

$$W = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a-2b+2c+d & b+2d \\ 2a-5b+4c & 3a-8b+6c-d \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{22}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Questão 3. *(2pts)* Considere a matriz $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$

(0pts)(a) Calcule $A = BB^t + B^tB$.

(b) Considere a matriz A obtida no item anterior. Determine todos os valores reais λ, tais que existe $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \neq \overline{0}$ que satisfaz $AX = \lambda X$;

(c) Para cada um dos valores de λ encontrados no item anterior, determinar todos $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ tais que $AX = \lambda X$.

Questão 4. *(2pts)* Responda VERDADEIRO ou FALSO, com uma breve **justificativa** ou **contraexemplo**:

i-( ) Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = \overline{0}$, então $A = \overline{0}$;

ii-( ) Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 - 2A + I = \overline{0}$, então A é inversível e $A^{-1} = 2I - A$;

iii-( ) Pode-se mostrar que "para matrizes $n \times n$ A e B, se AB é invertível, então A e B são é invertíveis" sem usar determinantes;

iv-( ) Se $W = \{A \in \mathcal{M}_{22}; \det(A) = 0\}$, então W é subespaço de $\mathcal{M}_{22}$;

v-( ) Existe um subconjunto de 3 vetores LD dentro de $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,3,0), v_3 = (-2,0,6), v_4 = (-12,-18,0), v_5 = (0,6,-12)\}$

Questão 5. *(2pts)* O **traço** de uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é denotado por $\operatorname{tr}(A)$:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

a) Prove que $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ e $\operatorname{tr}(kA) = k\operatorname{tr}(A)$, em que k é um escalar;

b) Prove que $W = \{A \in M_{22}; \operatorname{tr}(A) = 0\}$ é subespaço de M_{22}, o espaço das matrizes 2×2;

c) Prove que se A e B são matrizes $n \times n$, então $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

d) Mostre que não existem matrizes 2×2 tais que $AB - BA = I_2$.