10^a LISTA DE EXERCÍCIOS – MTM 1020

1. Determine se $\overrightarrow{F}$ é um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\overrightarrow{F} = \nabla f$.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x-3y)\overrightarrow{i} + (-3x+4y-8)\overrightarrow{j}$

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = e^x sen(y)\overrightarrow{i} + e\,cos(y)\overrightarrow{j}$

c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (ln(y) + 2xy^3)\overrightarrow{i} + (3x^2y^2 + \dfrac{x}{y})\overrightarrow{j}$

2. Determine uma função f tal que $\overrightarrow{F} = \nabla f$ e calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot dr$

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = xy^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j}$, $C : \overrightarrow{r}(t) = (t + sen(\frac{\pi t}{2}), t + cos(\frac{\pi t}{2}))$, $0 \leq t \leq 1$

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + (xy+2z)\overrightarrow{k}$, onde C é o segmento de reta de $(1,0,-2)$ até $(4,6,3)$.

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2cos(z)\overrightarrow{i} + 2xycos(z)\overrightarrow{j} - xy^2sen(z)\overrightarrow{k}$, onde $C : \overrightarrow{r}(t) = (t^2, sen(t), t)$ $0 \leq t \leq \pi$.

3. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

a) $\displaystyle\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$, onde C é o quadrado com lados $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

b) $\displaystyle\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + cos(y^2))\,dy$, onde C é a fronteira englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

c) $\displaystyle\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

4. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot dr$, verifique a orientação da curva.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = \sqrt{x} + y^3\overrightarrow{i} + x^2 + \sqrt{y}\,\overrightarrow{j}$, onde C consiste no arco da curva $y = sen(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ e no segmento de reta de $(\pi,0)$ até $(0,0)$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^x + x^2y)\overrightarrow{i} + (e^y - xy^2)\overrightarrow{j}$, onde C é a circunferência $x^2+y^2 = 25$, orientada no sentido horário.

5. Calcule a integral de superfície.

a) $\displaystyle\iint_\sigma x^2yz\,dS$, onde σ é a parte do plano $z = 1+2x+3y$ que está acima do retângulo $[0,3]\times[0,2]$.

b) $\displaystyle\iint_\sigma yz\,dS$, onde σ é a parte do plano $z+y+x = 1$ que está no primeiro octante.

c) $\displaystyle\iint_\sigma yz\,dS$, onde σ é a superfície de equações paramétricas $x = u^2$, $y = usen(v)$, $z = ucos(v)$, $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

d) $\displaystyle\iint_\sigma x^2z^2\,dS$, onde σ é a parte do cone $z^2 = x^2+y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.

e) $\displaystyle\iint_\sigma (x^2z + y^2z)\,dS$, onde σ é o hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$.

f) $\displaystyle\iint_\sigma (z + x^2y)\,dS$, onde σ é a parte do cilindro $z^2+y^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante.

6. Calcule a integral de superfície $\iint_\sigma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\eta}\,dS$ para o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ e a superfície orientada σ. Para superfícies fechadas, use a orientação positiva (para fora).

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + zx\overrightarrow{k}$, onde σ é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xze^y\overrightarrow{i} - xze^y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, onde σ é a parte do plano $x+y+z = 1$, no primeiro octante, orientada para baixo.

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, onde σ é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$.

d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}$, onde σ é formada pelo parabolóide $y = x^2+z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e pelo círculo $x^2+z^2 \leq 1$, $y = 1$.

7. Calcule o rotacional e o divergente do campo vetorial.

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xyz\,\overrightarrow{i} - x^2y\,\overrightarrow{k}$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = e^x sen(y)\,\overrightarrow{i} - e^x cos(y)\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

8. Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\nabla f = \overrightarrow{F}$.

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y^2z^3\,\overrightarrow{i} - 2xyz^3\,\overrightarrow{j} + 3xy^2z^2\,\overrightarrow{k}$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = ye^{-x}\,\overrightarrow{i} + e^{-x}\,\overrightarrow{j} + 2z\,\overrightarrow{k}$.

9. Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_\sigma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\eta}\,dS$, ou seja, o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de σ.

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = e^x sen(y)\,\overrightarrow{i} + e^x cos(y)\,\overrightarrow{j} + yz^2\,\overrightarrow{k}$, onde σ consiste na superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 3xy^2)\,\overrightarrow{i} + xe^z\,\overrightarrow{j} + z^3\,\overrightarrow{k}$, onde σ é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $z^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$.

10. Use o Teorema de Stokes para calcular:

a) $\displaystyle\iint_\sigma rot(\overrightarrow{F})\cdot\overrightarrow{\eta}\,dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2z^2\,\overrightarrow{i} + y^2z^2\,\overrightarrow{j} + xyz\,\overrightarrow{k}$, sendo σ a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado para cima.

b) $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\cdot dr$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y^2)\,\overrightarrow{i} + (y+z^2)\,\overrightarrow{j} + (z+x^2)\,\overrightarrow{k}$, sendo C o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, com orientação positiva.