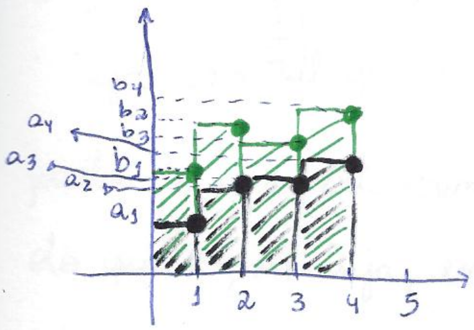
3- Teste da Comparação: Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos e suponha que $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2, \dots, a_k \leq b_k, \dots$

Então:

a) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergir então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

b) Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergir então $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

Demonstração



• sequência $\{a_n\}$

• sequência $\{b_n\}$

Notemos que

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \text{soma das áreas pretas}$$

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \text{soma das áreas verdes}$$

Se B é finita então como $A \leq B$, A é finita.

Se A é infinita então B também é infinita.

4- Teste da razão: Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série de termos positivos e suponha que
$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

a) Se $\rho < 1$ a série converge.

b) Se $\rho > 1$ a série diverge.

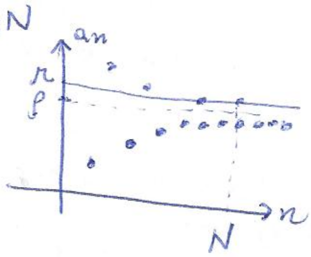
c) Se $\rho = 1$ a série pode convergir ou divergir.

Demonstração

- Se $\rho < 1$

Seja $r > 0$ tal que $0 < \rho < r < 1$. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho < r$ temos que a partir de um certo termo os termos da sequência $\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$ devem ser menores do que r, ou seja, existe $N > 0$ tal que $\frac{a_{k+1}}{a_k} < r$, $\forall\ k \geq N$

Assim,



$$a_{N+1} < r a_N$$
$$a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N$$
$$a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N$$
$$\vdots$$

Então $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} r^k a_N$ são séries tais que $a_{N+k} < r^k a_N$ e $\sum_{k=1}^{\infty} r^k a_N$ é convergente (série geométrica com raio $r < 1$) Pelo teste da comparação $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ converge. Agora, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$

Por propriedades de série, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ também converge.

- Se $\rho > 1$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, existe $N > 0$ tal que $a_{k+1} > 1$ $\forall$ …

Logo,

$a_{N+1} > a_N$

$a_{N+2} > a_{N+1} > a_N$

$a_{N+3} > a_{N+2} > a_N$

$\vdots$

$a_{N+k} > a_N$

Então temos $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \geq \lim\limits_{k\to\infty} a_N = a_N \neq 0$

Se $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, pelo teste da divergência a série diverge.

- Se $\rho = 1$

→ série harmônica diverge e $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{k+1} = 1$

→ série 2-harmônica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ converge e $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^2 = 1$

Exemplo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3k!}{4^k}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3(k+1)!}{4^{k+1}}}{\frac{3k!}{4^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{3}\cdot(k+1)\cdot \cancel{k!}}{4\cdot \cancel{4^k}} \cdot \frac{\cancel{4^k}}{\cancel{3}\cdot \cancel{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{4} = +\infty$$

logo a série diverge.

5 - Teste da raiz: Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série de termos positivos e suponha que $\rho = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \to \infty} (a_k)^{\frac{1}{k}}$

a) Se $\rho < 1$ a série converge

b) Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$ a série diverge

c) Se $\rho = 1$ a série pode convergir ou divergir

~~Demonstração: A demonstração deste teste não é tão simples, então não será feita. Na verdade, consegue-se comparar com uma série geométrica~~

Exemplo: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2k}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{a série converge.}$$

<u>Demonstração</u>

a) Se $\rho < 1$ temos $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$, logo existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, vale $\sqrt[n]{a_n} \leq b$, onde $\rho < b < 1$.

Logo $a_n \leq b^n$, $\forall n \geq n_0$

$\uparrow$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n$ é uma série geométrica de razão $b < 1 \Rightarrow$ converge

Pelo teste da comparação, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Se $\rho > 1$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, logo $a_n \geq 1$, $\forall n \geq n_0$. Mas isso implica que $\lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$. Pelo teste da divergência, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Se $\rho = 1$, podemos ver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge; mas ambas satisfazem $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$

2- Teste da Série Alternada: Uma série alternada da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} v_k = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots \quad \text{OU} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} v_k = -v_1 + v_2 - v_3 + \dots$$

onde todos os v_k são positivos, converge se as duas condições a seguir são satisfeitas:

a) $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k \geq v_{k+1} \geq \dots$

b) $\lim_{k \to \infty} v_k = 0$

Demonstração

Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} v_k = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$

Temos

$$s_1 = v_1$$

$$s_2 = v_1 - v_2$$

$$s_3 = v_1 - v_2 + v_3$$

$$s_4 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 > v_1 - v_2$$

$$s_5 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5$$

$$s_6 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6$$

A sequência $\{s_{2n}\} = s_2, s_4, s_6, \dots$ é crescente e limitada superiormente por v_1, logo converge para um valor S_O

A sequência $\{s_{2n-1}\} = s_1, s_3, s_5, \dots$ é decrescente e limitada inferiormente por 0, logo converge para um valor S_E

Mas o $(2n)$-ésimo termo da série é $-a_{2n}$, logo

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \Rightarrow s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$$

Assim,

$$S_E = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + a_{2n} = S_o$$

Pelo resultado (∘) (escrito abaixo) segue que a sequência $\{s_n\}$ converge e portanto a série converge.

Resultado (∘): Uma sequência converge para L se, e somente se, as sequências de termos de posição par e dos termos de posição ímpar convergem ambas para L.