Compito 1
(Metodi numerici per le ODEs)

2021-2022 APPROSSIMAZIONE *numerica* DI ODES

Primo Passo: Implementare in MATLAB la seguente funzione:

- `function [y,nevals]=RK_esplicito(fun,`t_0, t_f, y_0, h`,tableau,rpar)`

corrispondenti ai metodi di Runge Kutta esplicito per approssimare la soluzione del problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $y \in \mathbb{R}^d$ e $f : [0, t_f] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$ (Cioe, il codice deve funzionare per equazioni scalari e anche per sistemi.

Sintassi. Variabili di Input e output

Variabili di Input

`fun` Variable di caratteri e una "function handle".
La funzione *[y_b]=fun(*t_a, y_a*)* valuta la funzione f (lato destro della ODE) nel instante di tempo t_a e valore y_a (cioe valuta la funzione f nel punto (t_a, y_a) del piano di fasi). Osservare che per un sistema il valore in output deve essere sempre vettoriale. Per ogni problema, si deve costruire un $.m$ -file diverso che contiene la funzione specifica del problema.

t_0 tempo iniziale

t_f tempo finale

h=`dt` Valore di $t_n - t_{n-1}$ per i metodi a passo fisso che uno vuole usare per avanzare in tempo.

y_0 vettore colonna che contiene il dato iniziale y_0

`tableau` Variable di caratteri e una "function handle" .Variable di caratteri corrispondente al nome del file `.m` dove vengono definiti i coefficienti del tableau di BUTCHER:

$$
\begin{array}{c|c}
c & A \\
\hline
 & \\
 & b'
\end{array}
$$

corrispondente al metodo RK che si vuole usare nell'approssimazione. Come tale va chiamata come @nomefile_tableau . Al interno della funzione RK_esplicito.m viene dichiarata nel modo

$$[c, A, b] = feval(tableau)$$

`rpar` (optional) spazio extra che potrebbe usarsi per la definizione di f.

Variabili di Output

`y`] vettore colonna che contiene la approssimazione numerica in tempo t_f

`nevals` Numero di valutazioni o chiamate alla funzione f (Serve per misurare il costo del algoritmo).

In alternativa uno puo programare alcuni metodi di RK espliciti (uno di ordine basso; uno di ordine medio e uno di ordine alto..) definendo le variabili del tableau al interno della funzione.

Secondo Passo: Considerare il problema ai valori iniziali:

$$
\begin{cases}
y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2\,(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} & t \in [0, t_f] \\
\\
y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{0.1}
$$

Osservare che per questo problema lineare si puo trovare la soluzione analitica.
Approssimare numericamente la soluzione del problema (0.1) nel intervallo di tempo $[0, t_f]$ con $t_f = 10$, usando eulero esplicito e al meno due metodi RK espliciti. Fare uno studio di convergenza dei metodi, per verificare i risoltati teorici visti a lezione. In particolare, considerare le seguenti indicazioni o suggerimenti *(generali)*:

- Analizare la convergenza dei metodi mediante *Diagrammi di Convergence*; Diagrammi in scala logaritmica che confrontano il paso di tempo h verso il errore. Verificare il ordine di convergenza dei diversi metodi.
- Studiare la efficenza dei metodi usando *Diagrammi di Efficienza*; Diagrammi in scala logaritmica che confrontano il costo dei metodi (numero di valutazioni di funzione) verso il errore.
- Studiare la sensitivitá dei metodi con rispetto alla scelta del paso di tempo h. Per ogni metodo considerato, studiare per quali dei valori di h si osserva convergenza e per quali invece il metodo diverge. (Questo ultimo punto in realtá lo studiaremo teoricamente a breve, ora si chiede solo di osservare...)

- Fare uno studio comparativo dei diversi metodi (convergenza ed efficenza).
- Si possono usare altri metodi giá implementati e anche tutte le routine di matlab **ode45** (embedded RK), **ode23s** (parte di BDF...) per confrontare e comparare i risoltati.
- Per h fisso si puo studiare la variazione in tempo degli *errori locali* .

Terzo Passo: una volta che siamo sicuri che i metodi sono programmati bene (convergono col ordine dovuto!) usare al meno un RK di ordine $p \geq 4$ per approssimare alcuni dei problemi del compito precedente. In particolare e consigliabile fare gli Esercizi 1, 3 e 6 del foglio precedente. Paragonare i risoltati con quelli ottenuti con Eulero (esplicito e/o implicito). Le indicazioni/suggerimenti per lo studio dell'approssimazione del problema (0.1), possono essere utili anche per altri problemi.

NOTA importante: Ricordare SEMPRE, Ogni grafico deve essere accompagnato degli opportuni commenti ed osservazioni. Si devono spiegare le deduzioni e conclusioni che si possono trarre. Sempre che sia possibile si devono collegare i risoltati ottenuti alla teoria sviluppata a lezione.