Compitino 00
(Motivazione & Warm up)

2021-2022 Metodi Numerici per ODEs

Primo Passo: Implementare in MATLAB le seguente funzione:

- `function [y,nevals]=euler_esplicito(fun,`t_0, t_f, y_0, h`)`
- `function [y,nevals]=euler_implicito_lineare(fun,jac,`t_0, t_f, y_0, h`)`

corrispondenti ai metodi di Eulero esplicito:

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h_n\ f(t_n, y_n)\,, \qquad n = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{0.1}$$

e al metodo di Eulero implicito,

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h_n\, f(t_{n+1}, y_{n+1})\,, \qquad n = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{0.2}$$

Entrambi metodi devono approssimare la soluzione del problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $y \in \mathbb{R}^d$ e $f : [0, t_f] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$ (Cioe, il codice deve funzionare per equazioni scalari e anche per sistemi).

In un primo momento ci focalizzaremo sul metodo di Eulero esplicito.

Per Eulero implicito, nel caso che $f(t, y)$ fosse non-lineare si dovrebbe risolvere (ad ogni paso di tempo) *un sistema (o una equazione se $d = 1$) non-lineare di equazioni.* Questo lo vedremmo in un lab posteriore.
Nel caso $f(t, y)$ sia lineare, si deve risolvere *un sistema lineare ad ogni paso di tempo.* Sempre

che sia possibile uno dovrebbe usare un metodo efficiente (minore costo possibile). Per sistemi di grandi dimensione (non in questo LAB!) uno dovrebbe usare fattorizzazione di Cholesky, fattorizzazione *LU* factorization oppure metodi iterativi. (Nei esempi test di questo set, non ci sara bisogno...)

Sintassi. Variabili di Input e output

Variabili di Input

`fun` Variable di caratteri e una "function handle". Molti opzioni per passare la definizione della funzione.
La funzione *[y_b]=fun*(t_a, y_a) valuta la funzione f (lato destro della ODE) nel instante di tempo t_a e valore y_a (cioe valuta la funzione f nel punto (t_a, y_a) del piano di fasi). Osservare che per un sistema il valore in output deve essere sempre vettoriale. Per ogni problema, si deve costruire un *.m* -file diverso che contiene la funzione specifica del problema.

`jac` Variable di caratteri e una "function handle".
La funzione *[J_b]=fun*(t_a, y_a) valuta il Jacobiano della funzione f (la differenziale Df) nel instante di tempo t_a e nel valore y_a (cioe valuta la funzione Jacobiano Df nel punto (t_a, y_a) del piano di fasi). Osservare che il valore in output deve essere sempre una matrice (1×1 per il caso scalare !). Per ogni problema, si deve costruire un *.m* -file diverso che contiene il Jacobiano specifico del problema.

t_0 tempo iniziale

t_f tempo finale

h=`dt` Valore di $t_n - t_{n-1}$ per i metodi a passo fisso che uno vuole usare per avanzare in tempo.

y_0 vettore colonna che contiene il dato iniziale y_0

Variabili di Output

`y`] vettore colonna che contiene la approssimazione numerica in tempo t_f

`nevals` Costo del algoritmo in termini di numero di evaluazioni di funzione.

Esercizi guidati

Esercizio 0a *(Linear Model test example).* Considerare il problema modello

$$\dot{y} = -5y, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 1 \ .$$

Approssimare numericamente la soluzione per $t \in [0, 5]$ con eulero esplicito (ed eulero implicito) con paso di tempo: $h = 0.5, 0.25$ e $h = 0.1$. Disegnare le approssimazioni numeriche. Cosa osserva?? Spiegare i risoltati.

Esercizio 0b Considerare ora il problema

$$\dot{y} = 50(y-1)^2(y-5), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 1.1 \ .$$

Similmente a quanto fatto nel punto precedente, approssimare numericamente la soluzione per $t \in [0, 0.4]$ con eulero esplicito con paso di tempo: $h = 0.1, 0.05$ e $h = 0.01$. Disegnare le approssimazioni numeriche. Cosa osserva?? Spiegare i risoltati.

Esercizio 1 *(Linear Model test example).* Considerare il problema modello

$$\dot{y} = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 1 \ .$$

Approssimare numericamente con eulero esplicito (ed eulero implicito) la dinamica del problema per diversi valori di λ (considerando $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$). Iniziare con $\lambda = -1, -10, -100$. Osservare che questo problema semplice (con soluzione esatta conosciuta) permette verificare che i metodi sono programmati bene.

a) Realizzare diagrammi di convergenza dei metodi e verificare se possibile il ordine dei metodi.

Se decidesse di usare $\lambda \in \mathbb{C}$ cossa osserva? Studiare i casi $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ e $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.

Esercizio 2. (Un semplice sistema (ancora lineale)) Considerare il problema in $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{y} = Ay + g(t) \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

con $n = 2$, $T = 10$ e dato iniziale $y(0) = [2, 3/2]^T$. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e la funzione $g(t)$ sono definite come:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 *(Resource-constrained growth).* Considerare il problema

$$\dot{y} = (\alpha - \beta y)y, \qquad y(0) = y_0 > 0 \ .$$

dove y rappresenta la densitá di popolazione e $\alpha, \beta > 0$ sono i coefficienti di crescita di essa (la tassa di crescita é $(\alpha - \beta y)$. Tramite separazione di variabili si può trovare la soluzione esatta al problema

$$y(t) = \frac{\alpha y_0}{\beta y_0 + (\alpha - \beta y_0)e^{-\alpha t}} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Approssimare numericamente la dinamica del problema per diversi valori di α, β. Osservare che per lunghi tempi ci sono *due stati stazionari (punti fissi)*; uno attrattivo $(y = \alpha/\beta)$ e uno repulsivo $(y = 0)$. Usare eulero esplicito e le routine di matlab **ode45** (embedded RK), **ode23s** (parte di BDF...) per comparare i risoltati.

a) Diagramma (t, y) tempo verso la approssimazione della soluzione. (per diversi valori di α e β.

b) Realizzare diagrammi di convergenza dei metodi e verificare se possibile il ordine dei metodi.

Esercizio 3 Blow-up Considerare il problema:

$$\dot{y} = y^2 \quad y(0) = y_0 > 0 \quad \longrightarrow \quad y(t) = \frac{y_0}{1 - t\, y_0} \quad \text{for } t < 1/y_0 \ .$$

Osservare che la soluzione di questo problema esiste soltanto per un tempo finito e dopo di che $\lim_{t \to 1/y_0} y(t) = \infty$. Usare eulero esplicito e le routine di matlab **ode45** (embedded RK), **ode23s** (parte di BDF...) per comparare i risoltati.

a) Diagramma (t, y) tempo verso la approssimazione della soluzione.

b) Realizzare diagrammi di convergenza dei metodi e verificare se possibile il ordine dei metodi.

Esercizio 4. (Crollo-Collasso) Considerare il problema

$$\dot{y} = -y^{-1/2}, \qquad y(0) = 1 \ . \tag{0.3}$$

Approssimare la sua soluzione fino a tempo $T = 1/2$ e dopo fino a tempo $T = 2/3$. Che si osserva?

Puo approssimarsi la soluzione per tempi $T > 2/3$?Cosa succede?

Esercizio 5 Considerare il problema

$$\dot{y} = \cos^2(\alpha y) \quad \longrightarrow \quad y(t) = \frac{\arctan(\alpha(t - c))}{\alpha} \quad y(0) \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$$

per $\alpha = 40$ e $y(0) = -0.0386 \approx \frac{\pi}{2\alpha}$. Usare eulero esplicito per la approssimazione nel intervallo di tempo $[0, 2]$. Che si osserva? Usare inoltre le routine di matlab **ode45** (embedded RK), **ode23s** (parte di BDF...) per comparare i risoltati.

Esercizio 6. (Pendulum) . Le equazioni di Newton relative al movimento di un pendulo (dovuto alle forze della gravitá) si scrivono come:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin\theta(t) \ , \tag{0.4}$$

essendoci m la masa del corpo sospeso, L la lunghezza della corda, e $g = 9.8$ la costante di gravita'. Si sa che la Energia totale del *sistema*:

$$E(t) := \frac{1}{2} m(L\dot{\theta})^2 - mLg\cos(\theta(t)) \tag{0.5}$$

viene preservata in tempo. Introdurre la variabile di velocità angolare $p := \dot{\theta}$ e riscrivere la equazione (0.4) come un sistema di ODEs di primo ordine.

Approssimare la soluzione del sistema tramite i metodi numerici considerati (eulero esplicito) fino a tempo finale $T = 5$ con diversi passi di tempo $dt = T/N$, $N \in \{25, 50, 100, 200, 400\}$. Considerare come dato iniziale

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad p(0) = 0 \ .$$

Studiare inoltre il comportamento in tempo delle Energie discrete approssimate (cinetica e potenziale) e la Energia totale.

Esercizio 7. (Una semplice rotazione...) Considerare il problema

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y_0} \ . \tag{0.6}$$

La soluzione esatta di (0.6) descrive un movimento circolare (una rotazione) con velocitá costante. Approssimare la soluzione del sistema tramite i metodi numerici considerati (eulero esplicito ed eulero implicito) fino a tempo finale $T = 10$ e tempo finale $T = 40$ con diversi passi di tempo $dt = T/N$, $N \in \{25, 50, 100, 200, 400\}$. Studiare la qualitá delle diverse approssimazione numeriche al invariante del sistema

$$I(\mathbf{y}) := \|\mathbf{y}\|_{\ell 2}$$

Che si osserva ?