Compito 3(a): Primo contatto per il studio della stabilitá dei metodi e primo contatto con i problemi *stiff*

2021-2022 APPROSSIMAZIONE NUMERICA DI ODES

In questi esercizi, uno dovrebbe usare tutti i metodi implementati fino ad ora (eulero esplicito, eulero implicito, RK espliciti, e metodi embedded RK (incassati?). Per comparare si chiede di implementare (se non si ha fatto già)

- `function [y,nevals]=punto_medio(fun,jac,`t_0, t_f, y_0, h`,tol,maxiter,rpar)`
- `function [y,neval]=RK_Theta(fun,jac,`t_0, t_f, y_0, h`,theta,tol,maxiter,rpar)`

corrispondenti ai metodi di metodo del punto medio e del chiamato θ-metodo, definito:

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h_n\left(\theta\, f(t_n, y_n) + (1-\theta)\, f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \qquad n = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{0.1}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. Osservare che per $\theta = 1$ il metodo si riduce al metodo di Eulero esplicito, mentre che per $\theta = 0$ il metodo che si ottiene é Eulero implicito. Per $\theta = 1/2$ si ottiene la regola dei trapezi (chiamato anche Crank-Nicolson in altri contesti). Osservare che il metodo é implicito per $\theta \neq 1$; altrimenti é esplicito.
Uno puó implementare il metodo per $\theta = 1/2, 0, 1$, che sono i valori che fanno vedere comportamenti diversi.

La sintassi degli argomenti di input e output per le funzioni sopra, e la solita.

Esercizio 1 (**Curtis and Hirschfelder, 1952**) Considerare il problema:

$$\dot{y} = \lambda(y - \cos(t)) \quad y(0) = y_0 \ , \qquad \lambda < 0.$$

Per tutto questo studio, si deve aver presente la parte di teoria vista sulla stabilita lineare.

a) Calcolare la soluzione esatta del problema (in funzione di λ e di y_0)

b) Fare l'analisi della stabilitá lineare e calcolare la restrizione del paso di tempo $dt = h$ per eulero esplicito (cioe; calcolare il valore di h_{min} necessario (in termini di stabilitá) per eulero esplicito per riuscir ad approssimare la soluzione del problema) Studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. (osservare cosa succede con $h \in [h_{min} - \epsilon, h_{min} + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Cosa succede se $|\lambda|$ diventa grande?

c) Prendere $\lambda = -2000$ e $y_0 = 0$, comparare le approssimazioni ottenute con eulero implicito ed il metodo del punto medio con diversi valori di $h = 1/20, 1/30, ..$

d) Ripetere lo studio fatto in *(b)* con gli altri metodi espliciti (almeno un RK esplicito e un embedded RK). In particolare studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. (osservare cosa succede con $h \in [h_{min} - \epsilon, h_{min} + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Cosa succede se $|\lambda|$ diventa grande?

e) Ripetere lo studio con il metodo di Eulero implicito e il metodo θ per $\theta = 1/2$. Usare anche il metodo del punto medio. Prendere $\lambda = -2000$ e $y_0 = 0$, comparare le approssimazioni ottenute con eulero implicito ed il metodo del punto medio con diversi valori di h

Esercizio 2 Con i concetti di stabilitá in mano che abbiamo imparato ora, fare una revisione critica dell'approssimazioni dei problemi in compiti precedenti (Studiando in ogni caso, come applicare i risoltati di stabilitá).
In particolare, considerare il problema di valori iniziali corrispondente alla equazione logistica:

$$\dot{y} = \lambda y(1 - y) \qquad \lambda > 0,$$

con dato iniziale $y(0) = y_0 > 0$. Considerare l'approssimazione con i metodi espliciti e impliciti che abbia implementato e cercar di riprodurre i risultati di stabilitá visit a lezione.
Implementare una funzione:

```
function RR = stabfn(A,b,z)
```

che valuti e calcoli la funzione di stabilitá di un metodo RK con coefficienti del tableau (A, b), e che dato un valore $z \in \mathbb{C}$ ritorni il valore $R(z)$. Detta funzione verrá chiamata nei programmi `StabilityRegion.m.` e `stepRestrict.m` che trovarete su elearning.

Il programma `stepRestrict.m` permette calcolare numericamente una stima ottimale sul paso in tempo h che puó usarsi garantendo ancora l'stabilitá.

Esercizio 3 **Regioni di Stabilità**. Considerare la funzione di stabilitá razionale

$$R(z) = \frac{2 - z^2)}{2(1 - z)} \qquad z \in \mathbb{C}\ .$$

Ci dicono che tale $R(z)$ é la funzione di stabilitá di un metodo ad un passo, Ψ^h

(a) Determinare il massimo ordine p possibile per tale metodo, quando si usa per approssimare la soluzione del problema lineare di Dahlquist.

(b) Usando il programma `StabilityRegion.m.` disegnare la regione di stabilitá di questo metodo.

(c) Scrivere in dettaglio la evoluzione discreta di questo metodo quando si approssima il sistema autonomo

$$\dot{y} = Ay \qquad A \in \mathbb{R}^{d\times d} , \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \tag{0.2}$$

(d) Considerare il problema di valori iniziali

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \mathbf{y}(0) = [2, 2]^T \qquad t \in [0, 10] , \tag{0.3}$$

con i valori $(\alpha, \beta) = (-2, 1); (-2.2); (1.5, 0)$. Studiare l'approssimazione con $h = 1$ e $h = 0.5$ e comparare l'approssimazione con la soluzione esatta. Spiegare i risoltati con aiuto della funzione di Stabilità.

Esercizio 4 (Lo faremmo assieme piú avanti...) Considerare i problemi ai valori iniziali in $\mathbb{R}^2$ dati per

$$\dot{y} = Ay + g(t) \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}^2 , \qquad y(0) = [2, 3/2]^T$$

con $T = 10$. Si considerano due problemi; la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e la funzione $g(t)$ sono definite in due modi diversi:

- Problema 1:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix}$$

- Problema 2:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 999(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix}$$

Studiare la approssimazione numerica ai problemi descritti sopra con i diversi metodi implementati. In particolare, fare uno studio comparativo dell'approssimazione che si ottiene con almeno Eulero esplicito, un RK esplicito, un metodo embedded RK, e i metodi impliciti (eulero implicito, e anche il metodo dei trapezi e/o il metodo del punto medio).

Studiare il h_{min} necessario (in termini di stabilitá) per ogni metodo per riuscir a approssimare il problema. Studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. Possono aiutare i diversi grafici (per ogni problema si fa un set di grafici che poi vengono confrontati) *a)* Diagramma (t, y) tempo verso la approssimazione della soluzione, per diversi valori di h.

b) Diagramma (t, h):tempo versus il paso di tempo $h = dt$ con che avanza il metodo. Si deve anche segnalare i valori di h che vengono scartati o rifiutati (nel caso dei metodi embbedded)

c) Diagramma di convergenza (h, errore) e Diagramma di efficienza (h, neval)