Compito 3(a): Primo contatto per il studio della stabilitá dei metodi e primo contatto con i problemi *stiff*

2020-2021 APPROSSIMAZIONE NUMERICA DI ODES

In questi esercizi, uno dovrebbe usare tutti i metodi implementati fino ad ora (eulero esplicito, eulero implicito, RK espliciti, e metodi embedded RK (incassati?). Per comparare si chiede di implementare (se non si ha fatto già)

- `function [y,nevals]=punto_medio(fun,jac,`t_0, t_f, y_0, h`,tol,maxiter,rpar)`
- `function [y,neval]=RK_Theta(fun,jac,`t_0, t_f, y_0, h`,theta,tol,maxiter,rpar)`

corrispondenti ai metodi di metodo del punto medio e del chiamato θ-metodo, definito:

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\theta\, f(t_n, y_n) + (1-\theta)\, f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{0.1}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. Osservare che per $\theta = 1$ il metodo si riduce al metodo di Eulero esplicito, mentre che per $\theta = 0$ il metodo che si ottiene é Eulero implicito. Per $\theta = 1/2$ si ottiene la regola dei trapezi (chiamato anche Crank-Nicolson in altri contesti). Osservare che il metodo é implicito per $\theta \neq 1$; altrimenti é esplicito.
Uno puó implementare il metodo per $\theta = 1/2, 0, 1$, che sono i valori che fanno vedere comportamenti diversi.

La sintassi degli argomenti di input e output per le funzioni sopra, e la solita.

Esercizio 1 (**Curtis and Hirschfelder, 1952**) Considerare il problema:

$$\dot{y} = \lambda(y - \cos(t)) \quad y(0) = y_0\,, \qquad \lambda < 0.$$

Per tutto questo studio, si deve aver presente la parte di teoria vista sulla stabilita lineare.

a) Calcolare la soluzione esatta del problema (in funzione di λ e di y_0)

b) Fare l'analisi della stabilitá lineare e calcolare la restrizione del paso di tempo $dt = h$ per eulero esplicito (cioe; calcolare il valore di h_{min} necessario (in termini di stabilitá) per eulero esplicito per riuscir ad approssimare la soluzione del problema) Studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. (osservare cosa succede con $h \in [h_{min} - \epsilon, h_{min} + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Cosa succede se $|\lambda|$ diventa grande?

c) Ripetere lo studio fatto in *(b)* con gli altri metodi espliciti (almeno un RK esplicito e un embedded RK). In particolare studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. (osservare cosa succede con $h \in [h_{min} - \epsilon, h_{min} + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Cosa succede se $|\lambda|$ diventa grande?

d) Ripetere lo studio con il metodo di Eulero implicito e il metodo θ per $\theta = 1/2$. Usare anche il metodo del punto medio.

Esercizio 2 Con i concetti di stabilitá in mano che abbiamo imparato ora, fare una revisione critica dell'approssimazioni dei problemi in compiti precedenti (Studiando in ogni caso, come applicare i risoltati di stabilitá).
In particolare, considerare il problema di valori iniziali corrispondente alla equazione logistica:

$$\dot{y} = \lambda y(1 - y) \qquad \lambda > 0,$$

con dato iniziale $y(0) = y_0 > 0$. Considerare l'approssimazione con i metodi espliciti e impliciti che abbia implementato e cercar di riprodurre i risultati di stabilitá visit a lezione.
Implementare una funzione:

```
function RR = stabfn(A,b,z)
```

che valuti e calcoli la funzione di stabilitá di un metodo RK con coefficienti del tableau (A, b), e che dato un valore $z \in \mathbb{C}$ ritorni il valore $R(z)$. Detta funzione verrá chiamata nei programmi `StabilityRegion.m.` e `stepRestrict.m` che trovarete su elearning.

Il programma `stepRestrict.m` permette calcolare numericamente una stima ottimale sul paso in tempo h che puó usarsi garantendo ancora l'stabilitá.

Esercizio 3 **Regioni di Stabilità**. Considerare la funzione di stabilitá razionale

$$R(z) = \frac{2 - z^2)}{2(1 - z)} \qquad z \in \mathbb{C}\ .$$

Ci dicono che tale $R(z)$ é la funzione di stabilitá di un metodo ad un passo, Ψ^h

(a) Determinare il massimo ordine p possibile per tale metodo, quando si usa per approssimare la soluzione del problema lineare di Dahlquist.

(b) Usando il programma `StabilityRegion.m.` disegnare la regione di stabilitá di questo metodo.

(c) Scrivere in dettaglio la evoluzione discreta di questo metodo quando si approssima il sistema autonomo

$$\dot{y} = Ay \qquad A \in \mathbb{R}^{d\times d}\ , \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \tag{0.2}$$

(d) Considerare il problema di valori iniziali

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \mathbf{y}(0) = [2,2]^T \qquad t \in [0,10]\ , \tag{0.3}$$

con i valori $(\alpha, \beta) = (-2, 1); (-2.2); (1.5, 0)$. Studiare l'approssimazione con $h = 1$ e $h = 0.5$ e comparare l'approssimazione con la soluzione esatta. Spiegare i risoltati con aiuto della funzione di Stabilità.

Esercizio 4 (Lo faremmo assieme piú avanti...) Considerare i problemi ai valori iniziali in $\mathbb{R}^2$ dati per

$$\dot{y} = Ay + g(t) \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}^2\ , \qquad y(0) = [2, 3/2]^T$$

con $T = 10$. Si considerano due problemi; la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e la funzione $g(t)$ sono definite in due modi diversi:

- Problema 1:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix}$$

- Problema 2:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ 999(\cos(t) - \sin(t)) \end{bmatrix}$$

Studiare la approssimazione numerica ai problemi descritti sopra con i diversi metodi implementati. In particolare, fare uno studio comparativo dell'approssimazione che si ottiene con almeno Eulero esplicito, un RK esplicito, un metodo embedded RK, e i metodi impliciti (eulero implicito, e anche il metodo dei trapezi e/o il metodo del punto medio).

Studiare il h_{min} necessario (in termini di stabilitá) per ogni metodo per riuscir a approssimare il problema. Studiare come sono le soluzione (cosa succede) se $h > h_{min}$ per ogni metodo. Possono aiutare i diversi grafici (per ogni problema si fa un set di grafici che poi vengono confrontati)

a) Diagramma (t, y) tempo verso la approssimazione della soluzione, per diversi valori di h.

b) Diagramma (t, h):tempo versus il paso di tempo $h = dt$ con che avanza il metodo. Si deve anche segnalare i valori di h che vengono scartati o rifiutati (nel caso dei metodi embbedded)

c) Diagramma di convergenza (h, errore) e Diagramma di efficienza (h, neval)