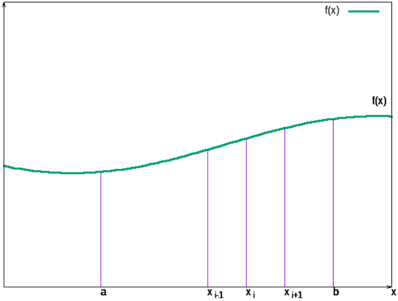
Numerische Integration

Numerische Integration

Schon einfache Funktionen wie e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$ lassen sich nicht elementar integrieren. Zur Approximation des Integralwertes werden numerische Methoden benötigt.

Hierzu betrachten wir das bestimmte Integral $I = \int_a^b f(x)dx$.



Darstellung der Intervallunterteilung für die numerische Integration

Zunächst wird das Intervall $I = [a, b]$ in n Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ zerlegt mit:

$$x_0 = a;\ x_{i+1} = x_i + h,\ i = 0, \ldots, n-1;\ x_n = b.$$

Die Funktionswerte sind $f_i = f(x_i); i = 0, \ldots, n.$

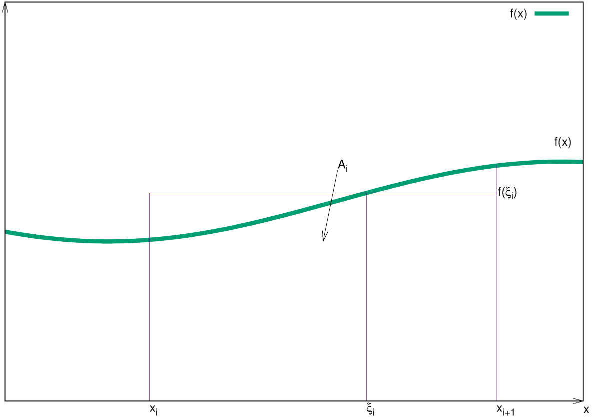
Dann werden die Flächeninhalte der einzelnen Streifen näherungsweise berechnet und aufsummiert. Für hinreichend kleines h erhält man eine Näherung des Integrals I.

Zur Verbesserung der Rechengenauigkeit gibt es zwei Möglichkeiten:

- Bei vorgegebener Unterteilung des Intervalls wählt man ein Interpolationspolynom höherer Ordnung, um die Funktion zu approximieren und integriert statt der Funktion das Interpolationspolynom.
- Bei vorgegebenem Interpolationspolynom (vom Grad $\leqslant 2$) verkleinert man h.

Rechteck-Verfahren

Die Funktion $f(x)$ wird in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch eine konstante Funktion $f(\xi_i); \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ersetzt.



Allgemeine Darstellung des Rechteck-Verfahrens $A_i = f(\xi_i) \cdot h$

Rechteck-Verfahren

$\Rightarrow$ Das Integral $I = \int_a^b f(x)dx$ wird durch die Zwischensumme:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot h = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)$$

approximiert.

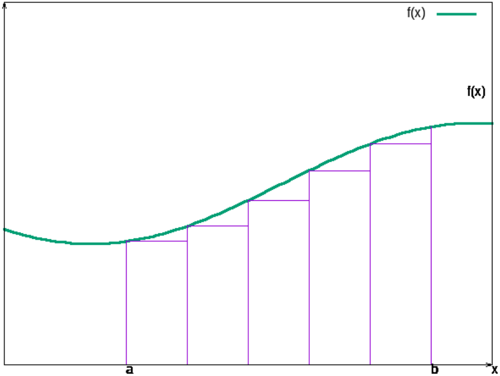
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx h\big(f(\xi_0) + f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})\big)$$

Rechteck-Verfahren: Spezialfälle

- Zwischenwert $\xi_i = x_i$ (linke Intervallgrenze)

$$\Rightarrow \quad I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),$$

sogenannte Linkssumme (Untersumme).

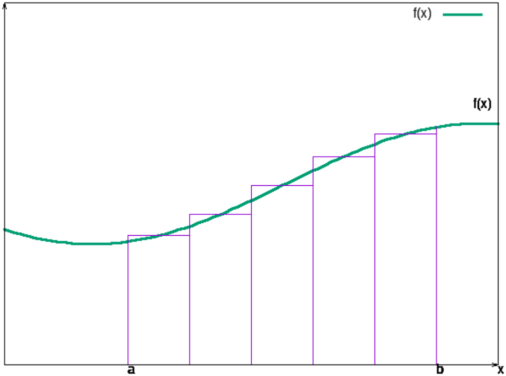


Rechteck-Verfahren: Spezialfälle (fortgesetzt)

- Zwischenwert $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ (Intervallmitte)

$$\Rightarrow \quad I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)\right),$$

sogenannte Mittelsumme.

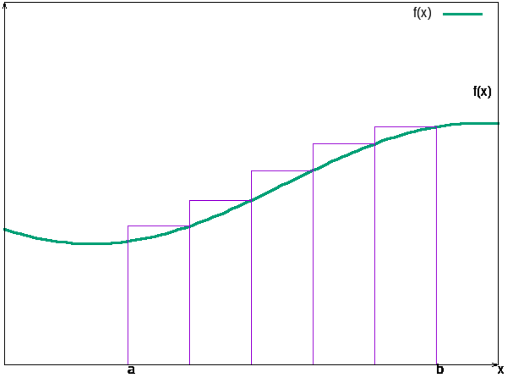


Rechteck-Verfahren: Spezialfälle (fortgesetzt)

- Zwischenwert $\xi_i = x_{i+1}$ (rechte Intervallgrenze)

$$\Rightarrow \quad I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

sogenannte Rechtssumme (Obersumme).



Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $I = [1, 5]$ und für eine Schrittweite von $h = 1$.

Gesucht sind die Näherungswerte der Unter-, Mittel- und Obersumme.

Es werden Funktionswerte an den Knotenpunkten benötigt:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16,\ f(5) = 25$$
$$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4},\ f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4},\ f(\frac{7}{2}) = \frac{49}{4},\ f(\frac{9}{2}) = \frac{81}{4},$$

Der exakte Wert des Integrals lässt sich mit Hilfe einer Stammfunktion berechnen:

$$\int_1^5 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = 41.\overline{3}$$

Beispiel (fortgesetzt)

Untersumme:

$$I_U \approx h(f(1) + f(2) + f(3) + f(4)) = (1 + 4 + 9 + 16) = 30$$

Mittelsumme:

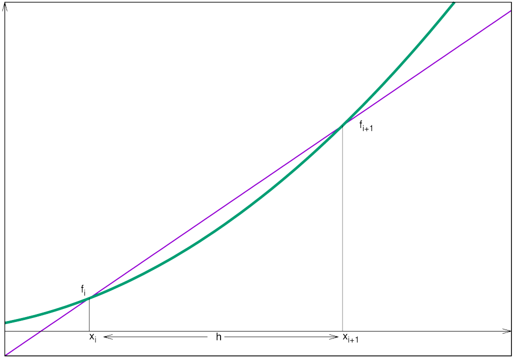
$$I_M \approx h\left(f(\frac{3}{2}) + f(\frac{5}{2}) + f(\frac{7}{2}) + f(\frac{9}{2})\right) = \frac{164}{4} = 41$$

Obersumme:

$$I_O \approx h(f(2) + f(3) + f(4) + f(5)) = (4 + 9 + 16 + 25) = 54$$

Trapezformel

Durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ wird eine Sehne gelegt. Dann wird die Fläche des Trapezes bestimmt und aufsummiert.



$$
\begin{aligned}
I_T &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} (f_{i+1} - f_i)\, h + f_i\, h \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) \cdot h \\
&= \frac{f_0 + f_1}{2} h + \frac{f_1 + f_2}{2} h + \frac{f_2 + f_3}{2} h + \ldots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} h
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Trapezformel

$$
I_T = \frac{h}{2} \Big(f_0 + 2 f_1 + 2 f_2 + \ldots + 2 f_{n-1} + f_n \Big)
$$

Bemerkung:
Dieselbe Formel erhält man, wenn man den Mittelwert aus Ober- und Untersumme bildet.
$I_T = \frac{1}{2}(I_U + I_0)$.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $I = [1, 5]$.
Gesucht ist der Wert des Integrals nach der Trapezformel.

Werte an den Knotenpunkten:
$f_1 = 1, f_2 = 4, f_3 = 9, f_4 = 16, f_5 = 25$

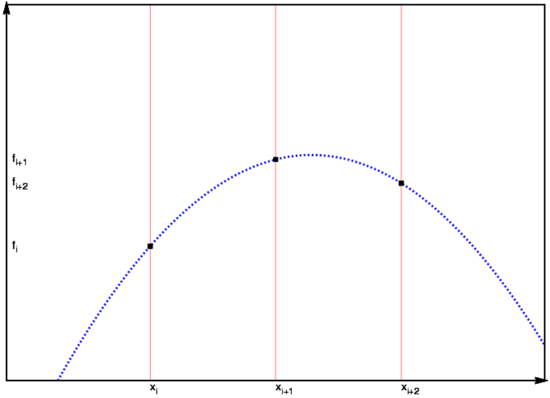
Mit der Trapezformel folgt:

$$\int_1^5 x^2 dx \simeq \frac{1}{2}(1 + 8 + 18 + 32 + 25) = 42$$

Simpsonformel

Es wird angenommen, dass die Anzahl der Unterteilungen des Intervalls $I = [a, b]$ gerade ist, d.h. $n = 2m$.

Dann wird die Funktion $f(x)$ nicht durch ein Geradenstück, sondern in jedem Doppelstreifen $[x_i, x_{i+2}]$ durch eine Parabel approximiert.



Simpsonformel

Durch die drei Punkte $(x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}), (x_{i+2}, f_{i+2})$ lautet das Interpolationspolynom 2. Grades:

k	x	y			
1	x_i	f_i	$= a_0$		
			$\searrow$		
2	x_{i+1}	f_{i+1}	$\rightarrow \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}$	$= a_1$	
			$\searrow$	$\searrow$	
3	x_{i+2}	f_{i+2}	$\rightarrow \frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}}$	$\rightarrow$	$\frac{\frac{f_{i+2}-f_{i+1}}{h} - \frac{f_{i+1}-f_i}{h}}{x_{i+2}-x_i} = a_2$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p_i(x) &= a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)(x - x_{i+1}) \\
p_i(x) &= f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(x - x_i) \\
&\qquad + \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} - f_i}{2h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})
\end{aligned}
$$

Simpsonformel

Für das Intergral über das Näherungspolynom $p_i(x)$ in einem Doppelstreifen $[x_i, x_{i+2}]$ ergibt sich:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p_i(x)\, dx = \frac{1}{3} h(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \qquad \circledast$$

Das Integral nach Simpson erfolgt als Summe über alle Doppelstreifen:

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{4}{3} h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3} h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) \\ &\quad + \frac{1}{3} h(f_0 + f_{2m}) \end{aligned}$$

zu ⊛:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} (a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)(x - x_{i+1}))dx$$

Substituieren von $z = x - x_i$ ergibt

$$x - x_{i+1} = x - (x_i + h) = z - h$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \int_0^{2h} a_0 + a_1 z + a_2 z(z-h)dz \\
= \quad & a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} - a_2 h \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2h} \\
= \quad & a_0 2h + a_1 \frac{4h^2}{2} + a_2 \frac{8h^3}{3} - a_2 h \frac{4h^2}{2} \\
= \quad & f_i 2h + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} 2h^2 + \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{2h^2} \left(\frac{8h^3}{3} - 2h^3 \right) \\
= \quad & f_{i+1}(2h - \frac{2}{3}h) + f_i \frac{h}{3} + f_{i+2} \frac{h}{3} \\
= \quad & \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})
\end{aligned}$$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$ und die Schrittweite $h = 1$ im Intervall $I = [1, 5]$. Gesucht ist der Wert des Integrals nach der Simpsonformel.

Werte an den Knotenpunkten:

$$f_0 = 1, f_1 = 4, f_2 = 9, f_3 = 16, f_4 = 25$$

Mit der Simpsonformel folgt:

$$\int_1^5 x^2 dx \simeq \frac{4}{3}(4 + 16) + \frac{2}{3}(9) + \frac{1}{3}(1 + 25) = \frac{124}{3} = 41.\overline{3}$$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $I = [1, 2]$.

Der Wert des Integrals ist $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0.693147$.

Gesucht sind die Näherungswerte mit der Trapez- und mit der Simpsonformel.

Trapezformel: $n = 2; h = \frac{1}{2}; f_0 = 1, f_1 = \frac{2}{3}, f_2 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I_T = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0.7083$$

Simpsonformel: $n = 2$

$$\Rightarrow I_S = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0.6944$$

Bemerkungen:

- Für $h \to 0$ nähern sich die Integralwerte mit der Trapez- und Simpsonformel dem exakten Wert an.
- Die Simpsonformel ist genauer als die Trapezformel.

Fehlerverhalten

Wie bei den Differenzenformeln für die Ableitung gibt es zwei Arten von Fehlern: Diskretisierungsfehler und Rundungsfehler.

Diskretisierungsfehler:

entsteht aufgrund der diskreten Approximation des Integrals.

Beispiel

Fehlerverhalten der Trapez- und Simpsonformel für das Integral $\int_1^2 \sqrt{1+e^{0.5x^2}}dx = 2.09883511$:

m	n	h	F_{Trapez}	$F_{Simpson}$
1	2	0.5	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
2	4	0.25	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
4	8	0.125	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	20	0.05	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
20	40	0.025	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
40	80	0.0125	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$
			$\sim h^2$	$\sim h^4$

Diskretisierungsfehler

für die vorgestellten Verfahren:

- $\sim h$, d.h. 1. Ordnung für die Unter- und Obersumme
- $\sim h^2$, d.h. 2. Ordnung für die Mittelpunktformel und für die Trapezformel
- $\sim h^4$, d.h. 4. Ordnung für die Simpson

Bemerkungen:

- Herleitung wie bei den Differenzenformeln über Taylorreihen
- das Verfahren nach Simpson ist einfach, relativ genau und wird daher oft verwendet

Rundungsfehler

Beispiel

$$I_T = \sum \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

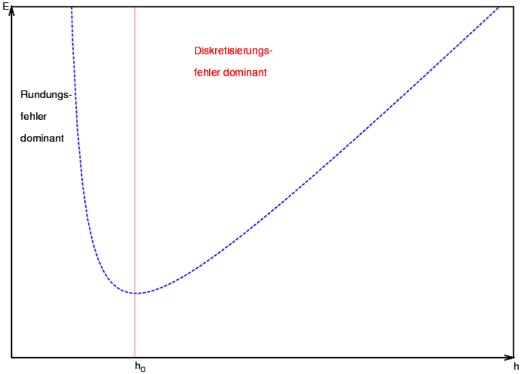
Es entstehen zwei Rundungsfehler:

- bei der Auswertung der Funktion $f(x)$ an den Punkten x_i und x_{i+1}
- bei der Bildung der Linearkombination $f_i + f_{i+1}$.

$$\Longrightarrow I_T = \sum \frac{h}{2}(f_i + \varepsilon_i + f_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) + \eta,$$

wobei ε_i der Fehler der Auswertung und η der Fehler der Linearkombination ist.

Für $h \to 0$ geht der Diskretisierungsfehler $\to 0$, aber umso mehr Auswertungen von f_i und umso mehr Linearkombination sind nötig, d.h. für kleine h steigt der Rundungsfehler.



Graphischer Verlauf des Gesamtfehlers für numerische Integrationsverfahren

Bemerkungen:

- das minimale h_0 ist schwer im voraus zu bestimmen
- der Gesamtfehler ist qualitativ für alle Integrationsverfahren gleich, nur das Minimum bei h_0 ist verschieden.
- auch bei der Lösung von Differenzialgleichungen findet man ein solches Fehlerverhalten.