Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
12. Februar 2019, WS 18/19

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: (Hornerschema, Nullstellen, numerisches Differenzieren, Taylorreihe)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2x$.

a) Berechnen Sie an der Stelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $f(2)$ unter Verwendung des Horner-Schemas.

b) Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 2$ den ersten Iterationsschritt x_1 des Newton-Verfahrens zur numerischen Bestimmung der Nullstelle $f(x) = 0$.

c) Bestimmen Sie die numerischen Werte der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$ unter Verwendung der zentralen Differenzenformeln $Df(x)$ und $D^2f(x)$ mit einer Schrittweite $h = 1$.

d) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um die Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2: (Numerische Integration)
Gegeben ist die Funktion $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

a) Bestimmen Sie den exakten (analytischen) Wert des Integrals der Funktion $h(x)$ im Intervall $I = [1, 3]$, d.h. $\int_1^3 h(x)dx$.

b) Teilen Sie das Intervall I in zwei gleiche Teilintervalle und berechnen Sie den numerischen Wert des Integrals mit der Untersumme (Linkssumme).

c) Bestimmen Sie nun für dieselbe Zerlegung wie in b) den numerischen Wert des Integrals über die Trapezformel.

d) Bestimmen Sie weiterhin für dieselbe Zerlegung wie in b) den numerischen Wert des Integrals über die Simpsonformel.

Aufgabe 3: (Interpolationspolynome und Splines)
Gegeben sind folgende Messdaten eines Prozessablaufes:

x_k	1	2	3
y_k	4	0	1

a) Wenden Sie den Newton-Algorithmus an und bestimmen Sie ein Interpolationspolynom, das die Messdaten verbindet.

b) Bestimmen Sie für obige Messdaten eine quadratische Spline-Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 1 \le x \le 2 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

mit der Zusatzbedingung $g_1'(1) = 0$.

Aufgabe 4: (Raum-Zeit-Problem)
Gegeben ist die partielle Differenzialgleichung

$$u_t(t,x) = -4u_x(t,x) + u_{xx}(t,x), \quad \text{für} \quad x \in [0,2] \quad \text{und} \quad t \ge 0$$

mit Randbedingungen $u(t,0) = 2$, $u(t,2) = 6$ und der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad 0 < x \le \frac{3}{4} \\ 4, & \text{für} \quad \frac{3}{4} < x \le \frac{5}{4} \\ 1, & \text{für} \quad \frac{5}{4} < x < 2 \end{cases}$$

Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1/2$ und $\Delta t = 1/8$ ist.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen in der Ortskoordinate x. Formulieren Sie für $u_i^n, i = 0, \ldots, 4, n = 0, \ldots$ das explizite Differenzenverfahren. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.
b) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1 und u_3^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Aufgabe 5: (Anfangswertproblem)
Gegeben ist das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t) + t \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$.

a) Geben Sie die Eulersche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.
c) Vervollständigen Sie die Implementierung der Eulerschen Iterationsformel zur Bestimmung von $y_{1,k+1}$ und $y_{2,k+1}$ mit Schrittweite `h` und den gegebenen Startwerten `y1_0`, `y2_0`:

```
double[2] euler(double t, double y1_0, double y2_0, double h) {
  ...
}
```

d) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.
e) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 6: (Ausgleichsproblem)
Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	9

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = a + bx + cx^2$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $f(x) = a + bx + cx^2$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in c) gefundene Lösung.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3} h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3} h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3} h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.