IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

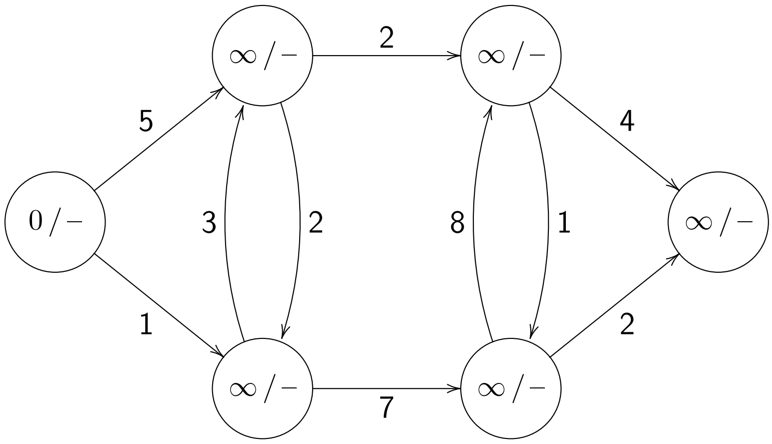
9. Übung zur Vorlesung Algorithmen auf Graphen

Musterlösungen

Aufgabe 1: Die Analyse des Algorithmus von Dijkstra führt zu den nachfolgenden Ergebnissen.

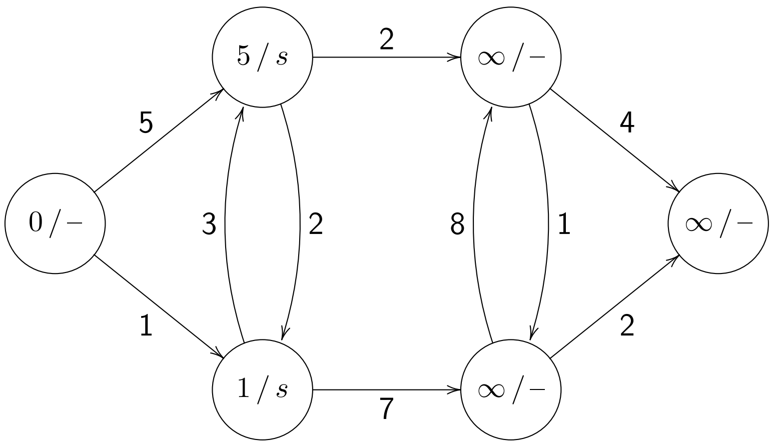
a) Wir notieren wieder die Wertpaare $k[v]/p[v]$ in jedem Knoten des Graphen. Die Initialisierung durch die Zeilen 1–5 ergibt:

$Q = \{s, a, b, c, d, e\}$



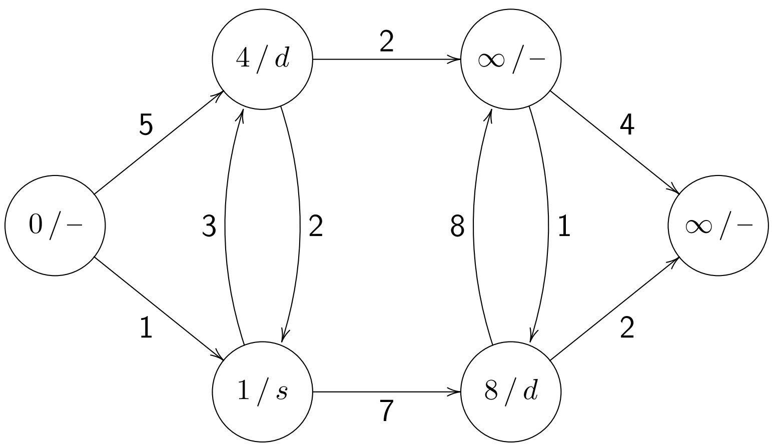
Anfangs wird immer der Startknoten s in Zeile 7 ausgewählt. Für die beiden Nachfolgerknoten a und d ergeben sich die Verbesserungen $k[a] = 5$ und $k[d] = 1$:

$Q = \{a, b, c, d, e\}$



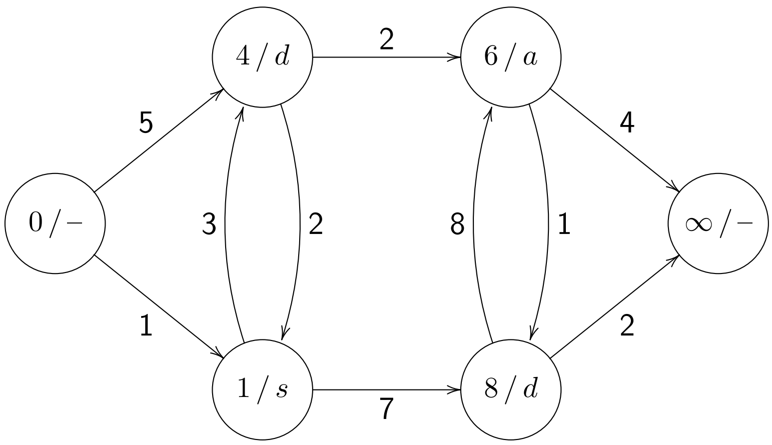
Als nächster Knoten wird d ausgewählt. Er führt zu Verbesserungen bei dem Knoten e und erneut bei dem Knoten a:

$Q = \{a, b, c, e\}$



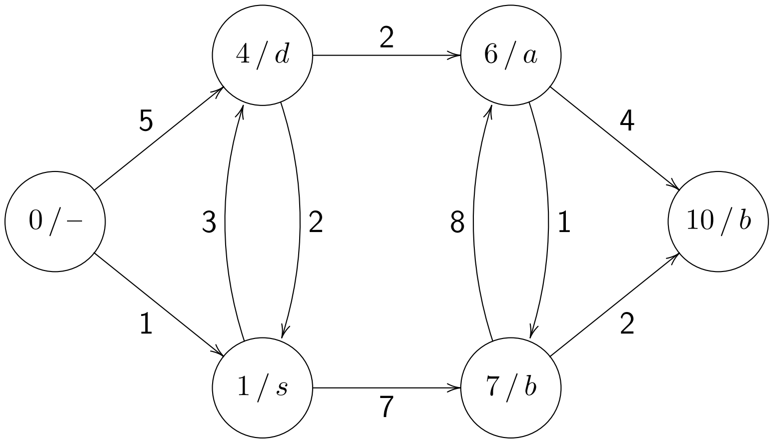
Unter den verbleibenden Knoten in Q hat nun a den günstigsten k–Wert. Seine Verarbeitung führt zu einer Verbesserung bei dem Knoten b:

$Q = \{b, c, e\}$



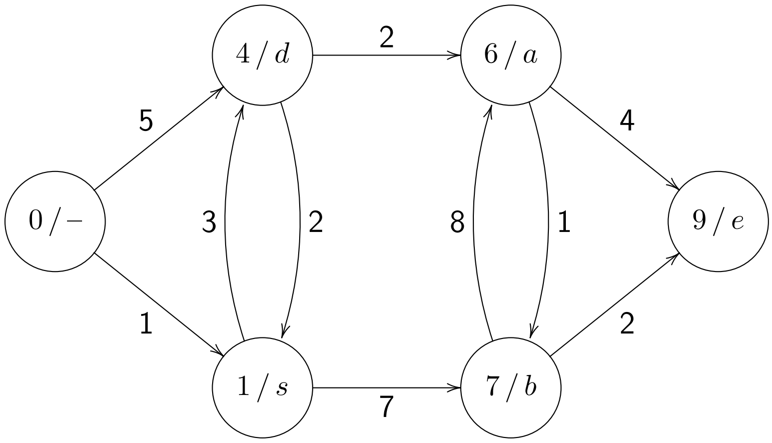
Anschließend wird b ausgewählt. Es ergibt sich eine Verkürzung des bisherigen Pfades zu e sowie ein erster Pfad zu c:

$Q = \{c, e\}$



Unter den verbleibenden beiden Knoten hat e den kleineren k–Wert. Der kürzeste Pfad zu c wird dabei verbessert:

$Q = \{c\}$



Schließlich wird noch der Knoten c ausgewählt, aber mangels ausgehenden Kanten und leerer Menge Q ergeben sich keine Änderungen mehr. Danach terminiert der Algorithmus.

b) Aus den p–Werten ergeben sich die folgenden kürzesten Pfade:

- von s nach a: $s \rightarrow d \rightarrow a$, Länge: $1 + 3 = 4$.
- von s nach b: $s \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b$, Länge: $1 + 3 + 2 = 6$.
- von s nach c: $s \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow c$, Länge: $1 + 3 + 2 + 1 + 2 = 9$.
- von s nach d: $s \rightarrow d$, Länge: 1.
- von s nach e: $s \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow e$, Länge: $1 + 3 + 2 + 1 = 7$.

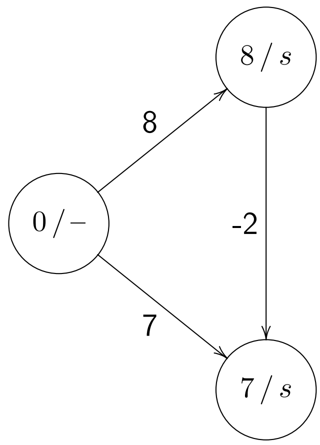
In allen Fällen stimmen die Pfadlängen mit den zugehöriegn k–Werten überein. Der Algorithmus hat also korrekt gearbeitet.

Aufgabe 2: Nachfolgend die Lösungen zu beiden Teilaufgaben:

a) Die Kante (a, b) ist negativ gewichtet, und negative Kanten sind bei dem Algorithmus von Dijkstra nicht zulässig.

b) Wenn man den Algorithmus von Dijkstra trotzdem anwendet, so erhält man nach der üblichen Initialisierung und der Auswahl des Startknotens s in Zeile 7 die folgende Situation:

$$\boxed{Q = \{a, b\}}$$



Der Knoten b hat den kleineren k–Wert, führt aber mangels ausgehenden Kanten zu keinen Änderungen. Lediglich die Menge Q wird kleiner:

$$\boxed{Q = \{a\}}$$

Jetzt wird noch der Knoten a in Zeile 7 ausgewählt. Da Q nach der Ausführung von Zeile 8 anschließend leer ist und insbesondere den Knoten b nicht mehr enthält, bleibt die Kante (a, b) ohne Berücksichtigung. Das Verfahren terminiert also ohne weitere Modifikationen.

Die ermittelten kürzesten Pfade lauten:

- von s nach a: $s \rightarrow a$, Länge: 8.
- von s nach b: $s \rightarrow b$, Länge: 7.

Der ermittelte kürzeste Pfad von s nach b ist jedoch nicht korrekt, denn in Wirklichkeit führt der kürzeste Pfad von s nach b über den Knoten a und hat die Länge 6.

Das Beispiel zeigt, dass die vorausgesetzten nicht–negativen Kanten für die Korrektheit des Verfahrens zwingend notwendig sind.

Aufgabe 3: Man betrachte einen kürzesten Pfad von s zu einem von s aus erreichbaren Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ mit Kosten $k(v)$. Dieser Pfad führt zum Schluss über den Knoten $p(v)$ nach v, wobei die Kante $(p(v), v)$ benutzt wird. Da der gesamte Pfad keine doppelten Knoten enthält (sonst wäre es kein Pfad gemäß der in der Vorlesung verwendeten Definition), gilt dies auch dann noch, wenn man die Abschlusskante $(p(v), v)$ entfernt. Der so gekürzte Pfad von s nach $p(v)$ besitzt die Kosten $k(v) - c((p(v), v))$ und kann natürlich nicht kürzer als $k(p(v))$ sein. Aus $k(v) - c((p(v), v)) \geq k(p(v))$ folgt dann aber $k(v) \geq k(p(v)) + c((p(v), v))$, also die Behauptung. $\square$