Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
01. Juli 2014, SS 2014

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 40 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 3) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Anfangswertproblem

Gegeben ist das dynamische System (Anfangswertproblem)

$$y'(t) = y(t)\Big(2 - 0.1 \cdot y(t)\Big) \quad \text{mit} \quad y(0) = 10.$$

a) Geben Sie für das Anfangswertproblem die Eulersche Iterationsformel an.
b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 0.1$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.
c) Geben Sie nun das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung an.
d) Bestimmen Sie für $h = 0.1$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 2: Nullstellenberechnung und numerische Integration

a) Gegeben ist die Funktion $h(x) = -x^3 + 4x + 2$. Verwenden Sie das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle $h(x) = 0$. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 2$ und berechnen Sie den ersten Newton-Iterationsschritt.
b) Verwenden Sie nun das Sekantenverfahren (Regula falsi) und berechnen Sie den ersten Iterationschritt zu den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$.

c) Gegeben ist die Funktion $k(x) = \frac{2x}{x+1}$. Gesucht ist ein Näherungswert des Integrals $\int_1^3 k(x)dx$ im Intervall $I = [1, 3]$. Teilen Sie das Intervall I in zwei gleiche Teilintervalle I_1 und I_2. Berechnen Sie den numerischen Wert des Integrals mit der Trapezformel.

d) Berechnen Sie nun mit derselben Intervallzerlegung wie in c) das Integral mit der Simpsonformel.

Aufgabe 3: Lineares Ausgleichsproblem
Gegeben sind die Messdaten $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 3$ mit:

x_i	0	1	2
y_i	-3	-5	2

Berechnen Sie zu den Messdaten eine Ausgleichsparabel $f(x) = a + bx + cx^2$ mit den Ansatzfunktionen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = x^2$, so dass die $\sum_{i=1}^{3}(y_i - f(x_i)))^2$ minimal wird. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.
b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.
c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = a + bx + cx^2$.

Aufgabe 4: Numerisches Differenzieren

a) Bestimmen Sie für eine allgemeine Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Taylorformel den Diskretisierungsfehler der zentralen Differenzenformel der 2. Ableitung

$$D^2 f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

(Hinweis: Entwickeln Sie $f(x_0+h)$ und $f(x_0-h)$ in eine Taylorreihe)

b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x + \frac{2}{x-2}$ den Näherungswert der zweiten Ableitung über die zentrale Differenzenformel $D^2 f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

c) Leiten Sie aus der zentralen Differenzenformel für die 2. Ableitung $D^2 f(x_0)$ über den Ansatz $D^{3-} f(x_0) = D^-(D^2 f(x_0))$ eine linksseitige Differenzenformel für die 3. Ableitung her.

d) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ unter b) den Wert der linksseitigen 3. Ableitung $D^{3-} f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

Aufgabe 5: Interpolationspolynom und kubische Splinefunktion

a) Gegeben sind die Stützpunkte $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$ und $(4, 6)$. Bestimmen Sie über das Verfahren der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom.

b) Gegeben sind die Stützpunkte $(-2, 4)$, $(-1, 1)$ und $(0, 0)$. Stellen Sie zur Bestimmung der kubischen Spline-Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad -2 \le x \le -1 \\ g_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

die erforderlichen 8 Bedingungen aus Stetigkeit, Differenzierbarkeit und den Randbedingungen $g_2'(0) = 0, g_2''(0) = 0$ auf.

c) Lösen Sie das aufgestellte Gleichungssystem für die Koeffizienten a_{ij} auf und bestimmen Sie die kubischen Spline-Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$.

Aufgabe 6: Partielle Differenzialgleichung

Gegeben ist das Raum-Zeit-Problem $u_t = u_{xx} - u_x + 2x$ für $1 \le x \le 5$ und $t \ge 0$ mit Randbedingungen $u(t, 1) = 3$, $u(t, 5) = 1$ und Anfangsbedingung $u(0, x) = 2$. Wählen Sie für das diskrete Raum-Zeit Gitter eine Zerlegung von $\Delta x = 1$ und $\Delta t = 1/2$.

a) Skizzieren Sie das diskrete Raum-Zeit-Gitter für die angegebenen Intervalle und Diskretisierungen in Raum- und Zeitrichtung. Markieren Sie hierbei die gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen sowie die gesuchten Werte u_1^n, u_2^n, u_3^n.

b) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen für u_t und zentralen Differenzen für u_x, u_{xx}. Formulieren Sie das explizite finite Differenzenverfahren und geben Sie hiebei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

c) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1, u_3^1 der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i) \Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i) \Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:
  Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.