Britta Nestler und Anastasia August
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
23. Juli 2019, SS 2019

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Nullstellenverfahren und Differenzenformeln

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Die drei Nullstellen dieses Polynoms liegen bei $x_1^\star = -5$, $x_2^\star = 1$ und $x_3^\star = -2$.

a) Verwenden Sie die Startwerte $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ und erläutern Sie den ersten Iterationsschritt des Bisektionsverfahrens. Was fällt auf ?

b) Berechnen Sie ebenfalls zu den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ den ersten Näherungswert x_2 des Sekantenverfahrens (regula falsi).

c) Stellen Sie nun die Newtonformel auf und berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 0$ den ersten Iterationsschritt.

d) Bestimmen Sie den Wert der rechtsseitigen Ableitung $D^+f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 0$ für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

Aufgabe 2: Polynominterpolation und numerische Integration

a) Gegeben sind die Messpunkte $(-1, -4)$, $(1, 2)$, $(2, 7)$ und $(4, 11)$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Newton-Algorithmus (Schema der Dividierten Differenzen) das Interpolationspolynom, das die Messpunkte verbindet.

b) Berechnen Sie den Wert der Obersumme für das Integral

$$\int_0^2 p(x)\,dx = \int_0^2 \left(3x^3 - 2x^2 + 2x\right) dx.$$

Zerlegen Sie hierfür das Intervall $[0, 2]$ in zwei Teilintervalle.

c) Bestimmen Sie nun den Wert des Integrals über die Trapezformel und

d) über die Simpsonformel.

e) Zeigen Sie, dass die Simpsonformel das gegebene kubische Polynom $p(x)$ exakt integriert.

Aufgabe 3: Partielle Differenzialgleichung und Taylorformel

Gegeben ist das Raum-Zeit-Problem $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + x - (u(t,x))^2$ für $1 \leq x \leq 4$ und $t \geq 0$ mit Randbedingungen $u(t,1) = 5$, $u(t,4) = 0$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1$.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen im Ort x. Wählen Sie für das diskrete Raum-Zeit Gitter eine Zerlegung von $\Delta x = 1$ und $\Delta t = 1/2$. Formulieren Sie das explizite finite Differenzenverfahren und geben Sie hiebei auch die Randbedingungen und die Anfangsbedingung in diskreter Form an.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1 der ersten Zeititeration.

Aufgabe 4: Lineares Ausgleichsproblem
Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	1	2	3

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = ax + bx^2$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.
b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.
c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax + bx^2$.

Aufgabe 5: Splines

Gegeben sind die Stützpunkte $(0, 4)$, $(1, 2)$, und $(2, 0)$.

a) Skizzieren Sie in einem $x - g(x)$ Diagramm das Vorgehen zur Bestimmung der kubischen Spline-Funktion $g(x)$ in den beiden Teilintervallen $0 \leq x \leq 1$ und $1 \leq x \leq 2$.

b) Bestimmen Sie zu den natürlichen Randbedingungen $g_1''(0) = 0$ und $g_2''(0) = 0$ für die gegebenen Stützpunkte die kubische Spline-Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c) Prüfen Sie, ob die Funktion $g(x)$ durch den Punkt $(1, 2)$ verläuft.

Aufgabe 6: Taylorformel

Gegeben ist eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t(t, x) = u_{xx}(t, x)$ und das implizite Lösungsverfahren

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right).$$

a) Entwickeln Sie die Anteile $u(t + \Delta t, x)$ als Funktion von t bei festem x und $u(t + \Delta t, x + \Delta x)$, $u(t + \Delta t, x - \Delta x)$ als Funktion von x bei festem $t + \Delta t$ jeweils in Taylorreihen bis einschließlich 4. Ordnung.

d) Bestimmen Sie durch Einsetzen der Taylorreihen den Diskretisierungsfehler für das Differenzenverfahren

$$e = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{u(t + \Delta t, x + \Delta x) - 2u(t + \Delta t, x) + u(t + \Delta t, x - \Delta x)}{\Delta x^2}.$$

in der Zeit- und Ortsvariablen.

Viel Erfolg!

A1

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$$

$$x_1^* = -5, \quad x_2^* = 1, \quad x_3 = -2$$

a) $x_0 = 0, \quad x_1 = 2$

$f(0) = -10, \quad f(2) = 8 + 24 + 6 - 10 = 28$

$f(0) < 0, \quad f(2) > 0 \Rightarrow$ mit diesem Verfahren kann man die NST $x_2^* = 1$ bestimmen, die zwischen x_0 und x_1 liegt.

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = \frac{1}{2}(0+2) = 1$$

Bereits im 1. Iterationsschritt ist die Nullstelle $x_2^* = 1$ gefunden.

b) $$x_2 = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 0 - (-10) \cdot \frac{2 - 0}{28 + 10} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$$

c) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 6x_n^2 + 3x_n - 10}{3x_n^2 + 12x_n + 3}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$x_0 = 0$

$$x_1 = 0 - \frac{(-10)}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

d) $$D^+ f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$x_0 = 0, \quad h = \frac{1}{2}$$

$$D^+ f(x_0) = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 10 + 10 \right) = 6\frac{1}{4} = 6{,}25$$

A2

a)

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

k	x	y
1	-1	-4
2	1	2
3	2	7
4	4	11

$-4 = a_0$

$2 \rightarrow D_{2,1} = \frac{2+4}{1+1} = 3 = a_1$

$7 \rightarrow D_{3,2} = \frac{7-2}{2-1} = 5 \rightarrow D_{3,2,1} = \frac{5-3}{2+1} = \frac{2}{3} = a_2$

$11 \rightarrow D_{4,3} = \frac{11-7}{4-2} = 2 \rightarrow D_{4,3,2} = \frac{2-5}{4-1} = -1$

$\rightarrow D_{4,3,2,1} = \frac{-1-\frac{2}{3}}{4+1} = -\frac{1}{3} = a_3$

$$f(x) = -4 + 3(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)(x-1) - \frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-2)$$

[Probe: $f(-1) = -4$ ✓

$f(1) = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ ✓

$f(2) = -4 + 3 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 7$ ✓

$f(4) = -4 + 3 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 11$ ✓]

b) $\int_0^2 p(x)\,dx = \int_0^2 (3x^3 - 2x^2 + 2x)\,dx$

$I = [0;2]$, $I_1 = [0;1]$, $I_2 = [1;2] \Rightarrow h = 1$

$p(1) = 3 - 2 + 2 = 3$, $p(2) = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$

$$I_0 = h\,(p(1) + p(20)) = 1 \cdot (3 + 20) = 23$$

c) $I_T = \frac{h}{2}(p_0 + 2p_1 + p_2)$

$p_0 = p(0) = 0$, $p_1 = p(1) = 3$, $p_2 = p(2) = 20$, $h = 1$

$$I_T = \frac{1}{2}(0 + 2 \cdot 3 + 20) = 13$$

d) $p_0 = 0, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 20, \quad h = 1$

$$I_S = \frac{4}{3} \cdot h \cdot p_1 + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (p_0 + p_2)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (0 + 20) = 4 + \frac{20}{3} = 10\frac{2}{3} \approx 10{,}67$$

e) $$\int_0^2 (3x^3 - 2x^2 + 2x)\,dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \Big|_0^2$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2^4 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 - 0 = 12 - \frac{16}{3} + 4 = 10\frac{2}{3}$$

$$= I_S$$

A3 $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + x - (u(t,x))^2$ für

$1 \le x \le 4$, $t \geq 0$, RB: $u(t,1) = 5$, $u(t,4) = 0$

AB: $u(0,x) = 1$

a) $\Delta x = 1$, $\Delta t = \frac{1}{2}$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + x_i - (u_i^n)^2$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + x_i - (u_i^n)^2 \right)$$

für $i = 1,2$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_4 = 4$

RB: $u_0^n = 5$, $u_3^n = 0$ für $n = 0,1,2,\ldots$

AB: $u_i^0 = 1$ für $i = 1;2$

b) $$u_1^1 \underset{\substack{n=0\\ i=1}}{\overset{\uparrow}{=}} u_1^0 + \Delta t \cdot \left(\frac{u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0}{(\Delta x)^2} + x_1 - (u_1^0)^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - 2\cdot 1 + 5}{1^2} + 2 - 1^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{5}{2} = 3{,}5$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0\\ i=2}}{\overset{\uparrow}{=}} u_2^0 + \Delta t \cdot \left(\frac{u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0}{(\Delta x)^2} + x_2 - (u_2^0)^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0 - 2\cdot 1 + 1}{1^2} + 3 - 1^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

A4

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	1	2	3

$f(x) = ax + bx^2$

a) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2$

$A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) \\ f_1(x_4) & f_2(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{cc|cl} 6 & 8 & 10 & :2 \\ 8 & 18 & 12 & :2 \\ \hline 3 & 4 & 5 & \cdot(-4) \\ 4 & 9 & 6 & \cdot(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 11 & -2 \end{array}$$

$\Rightarrow 11b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{2}{11}}$

$3a + 4b = 5 \Rightarrow 3a - 4 \cdot \frac{2}{11} = 5$

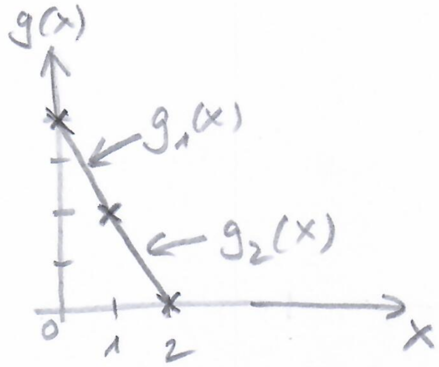
$\Rightarrow \boxed{a = \frac{21}{11}}$

$f(x) = \frac{21}{11}x - \frac{2}{11}x^2$

A5

$(0,4),\ (1,2),\ (2,0)$

a)



b) Stetigkeit

$g_1(0) = 4$ $\boxed{a_{10} = 4}$

$g_1(1) = 2$ $a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} = 2$

$g_2(1) = 2$ $a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20} = 2$

$g_2(2) = 0$ $8a_{23} + 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 0$

Differenzierbarkeit:

$g_1'(1) = g_2'(1)$ $3a_{13} + 2a_{12} + a_{11} = 3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}$

$g_1''(1) = g_2''(1)$ $6a_{13} + 2a_{12} = 6a_{23} + 2a_{22}$

Nat. RB:

$g_1''(0) = 0$ $2a_{12} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_{12} = 0}$

$g_2''(2) = 0$ $12a_{23} + 2a_{22} = 0$

a_{13}	a_{12}	a_{11}	a_{10}	a_{23}	a_{22}	a_{21}	a_{20}		
1	1	1	1	0	0	0	0	2	$\cdot(-3)$ $\cdot(-6)$
0	0	0	0	1	1	1	1	2	$\cdot(-8)$ (-12)
0	0	0	1	0	0	0	0	4	
0	0	0	0	8	4	2	1	0	
3	2	1	0	−3	−2	−1	0	0	
6	2	0	0	−6	−2	0	0	0	
0	2	0	0	0	0	0	0	0	:2
0	0	0	0	12	2	0	0	0	

1	1	1	1	0	0	0	0	2	
0	0	0	0	1	1	1	1	2	
0	0	0	1	0	0	0	0	4	
0	0	0	0	0	+4	+6	+7	+16	
0	+1	+2	+3	+3	+2	+1	0	+6	
0	+4	+6	+6	+6	+2	0	0	+12	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdot(-1)$ $\cdot(-4)$
0	0	0	0	0	+10	+12	+12	+24	:2

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 7 & 16 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 6 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ (\cdot 5) \\ (-3) \\ \\ \\ \cdot(-4)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 11 & 32 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & +3 & +3 & +4 & +3 & 0 & +6 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 6 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ (-3) \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|c|l}
a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & (-3) \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 11 & 32 & (-1) \quad \to (*) \\
0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & -6 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \to (**) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 6 & 12 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|cccccccc|c|l}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & \\
(*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -12 & (-5) \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 11 & 32 & \to (\bullet) \\
(**) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & -20 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 11 & 32 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 40
\end{array}
$$

$\boxed{a_{20} = 4}$

$6a_{21} + 11 \cdot 4 = 32 \Rightarrow \boxed{a_{21} = -2}$

$a_{22} - 3 \cdot 4 = -12 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 0}$

$a_{23} + 0 - 2 + 4 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{23} = 0}$

$\boxed{a_{10} = 4}$

$2a_{11} + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 6 \Rightarrow \boxed{a_{11} = -2}$

$\boxed{a_{12} = 0}$

$a_{13} + 0 + (-2) + 4 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{13} = 0}$

$$
g(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}
$$

c) $g(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2. \Rightarrow$ Ja.

A6 $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right)$$

a) $$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) + u_t(t,x)\cdot\Delta t + \frac{u_{tt}(t,x)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{u_{ttt}(t,x)}{3!}(\Delta t)^3 + \frac{u_{tttt}(t,x)}{4!}(\Delta t)^4$$

$$u(t+\Delta t, x\pm\Delta x) = u(t+\Delta t,x) \pm u_x(t+\Delta t,x)\Delta x + \frac{u_{xx}(t+\Delta t,x)}{2!}(\Delta x)^2 \pm \frac{u_{xxx}(t+\Delta t,x)}{3!}(\Delta x)^3 + \frac{u_{xxxx}(t+\Delta t,x)}{4!}(\Delta x)^4$$

b) $$e = \underline{u_t(t,x)} + \frac{u_{tt}(t+\Delta t,x)}{2!}\Delta t + \frac{u_{ttt}(t+\Delta t,x)}{3!}(\Delta t)^2 + \frac{u_{tttt}(t+\Delta t,x)}{4!}(\Delta t)^3 \underline{- 2\cdot\frac{u_{xx}(t+\Delta t,x)}{2!}} - 2\cdot\frac{u_{xxxx}(t+\Delta t,x)}{4!}(\Delta x)^2$$

$$= u_t(t,x) - u_{xx}(t+\Delta t,x) + O(\Delta t) + O((\Delta x)^2)$$

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
12. Februar 2019, WS 18/19

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: (Hornerschema, Nullstellen, numerisches Differenzieren, Taylorreihe)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2x$.

a) Berechnen Sie an der Stelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $f(2)$ unter Verwendung des Horner-Schemas.

b) Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 2$ den ersten Iterationsschritt x_1 des Newton-Verfahrens zur numerischen Bestimmung der Nullstelle $f(x) = 0$.

c) Bestimmen Sie die numerischen Werte der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$ unter Verwendung der zentralen Differenzenformeln $Df(x)$ und $D^2f(x)$ mit einer Schrittweite $h = 1$.

d) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um die Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2: (Numerische Integration)
Gegeben ist die Funktion $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

a) Bestimmen Sie den exakten (analytischen) Wert des Integrals der Funktion $h(x)$ im Intervall $I = [1, 3]$, d.h. $\int_1^3 h(x)dx$.

b) Teilen Sie das Intervall I in zwei gleiche Teilintervalle und berechnen Sie den numerischen Wert des Integrals mit der Untersumme (Linkssumme).

c) Bestimmen Sie nun für dieselbe Zerlegung wie in b) den numerischen Wert des Integrals über die Trapezformel.

d) Bestimmen Sie weiterhin für dieselbe Zerlegung wie in b) den numerischen Wert des Integrals über die Simpsonformel.

Aufgabe 5: (Anfangswertproblem)
Gegeben ist das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t) + t \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$.

a) Geben Sie die Eulersche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.
c) Vervollständigen Sie die Implementierung der Eulerschen Iterationsformel zur Bestimmung von $y_{1,k+1}$ und $y_{2,k+1}$ mit Schrittweite h und den gegebenen Startwerten y1_0, y2_0:

```
double[2] euler(double t, double y1_0, double y2_0, double h) {
  ...
}
```

d) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.
e) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 6: (Ausgleichsproblem)
Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	9

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = a + bx + cx^2$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $f(x) = a + bx + cx^2$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in c) gefundene Lösung.

Viel Erfolg!

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \dots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. Lösungen

Aufg. 1: (Hornerschema, Nullstellen, numerisches Differenzieren, Taylorreihe)

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2x$$

a) $x_0 = 2$

	2	0	-4	2	0
+		4	8	8	20
	2	4	4	10	20 = f(2)

b) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$x_0 = 2$

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{20}{(8x^3 - 8x + 2)|_{x=2}} = 2 - \frac{20}{50}$$

$$= \frac{8}{5}$$

c) $$Df(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$x_0 = 2, \; h = 1$:

$$Df(2) = \frac{2(2+1)^4 - 4(2+1)^2 + 2(2+1) - 2(2-1)^4 + 4(2-1)^2 - 2(2-1)}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 + 4 - 2}{2} = 66$$

$$D^2 f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$= 2 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2(2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) + 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1$$

$$= 2 \cdot 81 - 4 \cdot 9 + 6 - 2(32 - 16 + 4) = 2 \cdot (81 - 18 + 3 - 20) = 92$$

d) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$

$f(x_0) = 20$ (aus a))

$f'(x_0) = 8x_0^3 - 8x_0 + 2$, $f'(2) = 8\cdot 8 - 8\cdot 2 + 2 = 50$

$f''(x_0) = 24x_0^2 - 8$, $f''(2) = 24\cdot 4 - 8 = 8(12-1) = 88$

$f'''(x_0) = 48x_0$, $f'''(2) = 96$

$f^{IV}(x_0) = 48$, $f^{IV}(2) = 48$

$f^{V}(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \forall \quad n \geq 5$

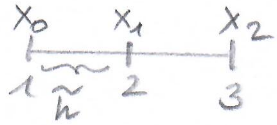
$f(x) = 20 + 50(x-2) + 44(x-x_0)^2 + 16(x-x_0)^3 + 2(x-x_0)^4$

Aufgabe 2

a) $$\int_1^3 2x^3 - 3x^2 - 4\,dx = \left[\frac{x^4}{2} - x^3 - 4x\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{81}{2} - 27 - 12 - \frac{1}{2} + 1 + 4\right] = 6$$

b) $x_0 = 1,\quad x_1 = 2,\quad \tilde{h} = 1$



$$I = 1 \cdot (h(1) + h(2))$$

$$= 1 \cdot (2 - 3 - 4 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4)$$

$$= -5 + 2 \cdot (16 - 12 - 4) = -5$$

c) $$I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{1}{2}(h(1) + 2h(2) + h(3))$$

$$= \frac{1}{2}(-5 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 - 4) = \frac{1}{2} \cdot (-5 + 23)$$

$$= 9$$

d) $$I_S = \frac{4}{3} h \cdot f_1 + \frac{1}{3} h (f_0 + f_2) = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 0 +$$

$$+ \frac{1}{3}(-5 + 23) = \frac{18}{3} = 6.$$

Klausur Mod&Sim WS 18/19

Lösungen

(Interpolationspolynome und Splines)

Aufg. 3. a) $p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2)$

x_k	y_k
1	4
2	0
3	1

$a_0 = 4$

$D_{2,1} = \frac{0-4}{2-1} = -4 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{1-0}{3-2} = 1 \qquad D_{3,2,1} = \frac{1+4}{3-1} = \frac{5}{2}$

$= a_2$

$p(x) = 4 - 4(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2)$

[Probe: $p(1) = 4$, $p(2) = 4-4(2-1) = 0$

$p(3) = 4 - 4(3-1) + \frac{5}{2}(3-1)(3-2) =$

$= 4 - 8 + 5 = 1$]

b) $g(1) = g_1(1) = a_{12} + a_{11} + a_{10} = 4$

$g(2) = g_1(2) = 4a_{12} + 2a_{11} + a_{10} = 0$

$g_1'(1) = 2a_{12} \cdot 1 + a_{11} = 0$

$g(2) = g_2(2) = 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 0$

$g(3) = g_2(3) = 9a_{22} + 3a_{21} + a_{20} = \cancel{0}1$

$g_1'(2) = g_2'(2)$: $2 \cdot 2 \cdot a_{12} + a_{11} = 2 \cdot 2\, a_{22} + a_{21}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) (-2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-4)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} a_{21} = 4-8 = -4 \\ -2a_{11} = -16 \Rightarrow a_{11} = 8 \\ a_{10} = 0 \end{array}$$

$$\boxed{g_1(x) = -4x^2 + 8x} \Rightarrow \underbrace{-\cancel{8}4 \cdot 4 + 8}_{-8} = 4a_{22} + a_{21}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & \cancel{0}1 \\ 4 & 1 & 0 & -8 \end{array}\right) (-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \cdot\left(-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1{,}5 & -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) (1{,}5) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1{,}5 & -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & +0{,}25 & 13 \end{array}\right) \qquad a_{20} = 52$$

$$-1{,}5a_{21} - \frac{5}{4}a_{20} = 1 \Rightarrow a_{21} = \frac{1}{-1{,}5} \cdot 66 = -44$$

$$4a_{22} = -2 \cdot (-44) - 52 = 36 \Rightarrow a_{22} = 9$$

$$g_2(x) = 9x^2 - 44x + 52$$

Klausur WS 18/19 Lösungen (6)

Aufg. 4: (Raum-Zeit-Problem)

$$u_t(t,x) = -4u_x(t,x) + u_{xx}(t,x) \quad \text{für } x \in [0;2], t \geq 0$$

Randbed.: $u(t,0) = 2$, $u(t,2) = 6$

Anfangsbed.:

$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{3}{4} \\ 4 & \text{für } \frac{3}{4} < x \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{für } \frac{5}{4} < x < 2 \end{cases}$$

$\Delta x = 1/2$, $\Delta t = 1/8$

0	$1/2$	1	$3/2$	2
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

a)
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -4\,\frac{u_{i+1}^n \cancel{-2u_i^n} - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \left(-4\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)$$

Anfangs~~Rand~~bedingungen:

~~$u_i^n = u_i^{n-1} + \Delta t(-4$~~

$u_i^0 = 2$ für $i = 0$

$u_i^0 = 1$ für $i = 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}$

$u_i^0 = 4$ für $i = 2$

$u_i^0 = 6$ für $i = 4$

Randbedingungen

$u_0^n = 2$ und $u_4^n = 6$ für $n = 0, 1, \ldots$

b) $$\underset{\substack{\uparrow \\ i=1}}{u_1^1 =} u_1^0 + \underbrace{\Delta t}_{1/8}\left(-4\,\frac{u_2^0 - u_0^0}{2\Delta x} + \frac{u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0}{\Delta x^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{8}\left(-4 \cdot \frac{4-2}{2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{4 - 2 \cdot 1 + 2}{(\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{8}\left(-4 \cdot \frac{2}{1} + 4 \cdot 4\right) = 2$$

$$u_2^1 = u_2^0 + \Delta t \cdot \left(-4 \frac{u_3^0 - u_1^0}{2\Delta x} + \frac{u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0}{\Delta x^2}\right)$$

$\uparrow$
$i = 2$
$n = 0$

$$= 4 + \frac{1}{8} \cdot \left(-4 \cdot \frac{1-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1 - 2 \cdot 4 + 1}{(\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$= 4 + \frac{1}{8}\left(-4 \cdot 0 + (-6) \cdot 4\right) = 4 - 3 = 1$$

$$u_3^1 = u_3^0 + \Delta t \left(-4 \frac{u_4^0 - u_2^0}{2\Delta x} + \frac{u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0}{\Delta x^2}\right)$$

$\uparrow$
$i = 3$
$n = 0$

$$= 1 + \frac{1}{8} \cdot \left(-4 \frac{6-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{6 - 2 \cdot 1 + 4}{(\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{8}\left(-8 + 8 \cdot 4\right) = 1 - 1 + 4 = 4$$

Aufg. 5: (Anfangswertproblem)

$$y_1'(t) = -2y_1(t) - y_2(t)$$

$$y_2'(t) = -y_2(t) + t$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

a) $$\frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\Delta t} = -2y_1^n - y_2^n$$

$$\frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\Delta t} = -y_2^n + t^n$$

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} - \Delta t(2y_{1,n} + y_{2,n})$$

$$y_{2,n+1} = y_{2,n} + \Delta t(-y_{2,n} + t_n)$$

$$y_{1,0} = 0, \quad y_{2,0} = 1, \quad t_k = kh$$

b) $h = 1/2 = \Delta t$

$$y_{1,1} = y_{1,0} - \frac{1}{2}(2y_{1,0} + y_{2,0}) = 0 - \frac{1}{2}(2 \cdot 0 + 1) = -\frac{1}{2}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{2}(-y_{2,0} + 0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = k \cdot h = 1 \cdot h = \frac{1}{2}$$

c) double [2] euler(double t, double y1_0, double y2_0, double h, int i){

Anzahl gewünschter Iterationsschritte

double yk[2];

```
yk[0] = y1_0;
yk[1] = y2_0;
for (int j=0; j<i; j++){
  yk[0]+ = h*(-2yk[0] - yk[1]);
  yk[1]+ = h*(-yk[1] + t);
  t+ = h;
}
return yk;
}
```

d) Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung:

$$y_{1,k+1} = y_{1,k} + \frac{h}{2}\{-2y_{1,k} - y_{2,k} + f_1(y_{1,k} + hf_1(y_{1,k}, y_{2,k}), y_{2,k} + hf_2(y_{1,k}, y_{2k}))$$

$$= y_{1,k} + \frac{h}{2}\{-2y_{1,k} - y_{2,k} + f_1(y_{1,k} + h(-2y_{1,k} - y_{2,k}), y_{2,k} + h(-y_{2,k} + t_k))\}$$

$$= y_{1,k} + \frac{h}{2}\{-2y_{1,k} - y_{2,k} - 2(y_{1,k} + h(-2y_{1,k} - y_{2,k})) - y_{2,k} - h(-y_{2,k} + t_k)\}$$

$$= y_{1,k} + \frac{h}{2}\{\underline{-2y_{1,k}}\ \underline{\underline{-y_{2,k}}}\ \underline{-2y_{1,k}} + \underline{4y_{1,k}h} + \underline{\underline{2y_{2,k}h}} \underline{\underline{-y_{2,k}}} + \underline{\underline{hy_{2,k}}} - ht_k\} = y_{1,k} + \frac{h}{2}\{(4h-2)y_{1,k} + (2h-2)y_{2,k} - ht_k\}$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + \frac{h}{2}\{-y_{2,k} + t_k + f_2(t_{k+1}, y_{k,1} + h(-2y_{1,k} - y_{2,k}), y_{2,k} + h(-y_{2,k} + t_k))\} = y_{2,k} + \frac{h}{2}\{y_{-2,k} + t_k - y_{2,k} - h(-y_{2,k} + t_k) + t_{k+1} = y_{2,k} + \frac{h}{2}\{\underline{-y_{2,k}} + t_k -$$

$$- \underline{y_{2,k}} + \underline{h y_{2,k}} - h t_k + t_{k+1} \} =$$

$$= y_{2,k} + \frac{h}{2} \{ (h-2) y_{2,k} + (1-h) t_k + t_{k+1} \}$$

e) $h = 1/2$

$$y_{1,1} = 0 + (1/2)^2 \cdot \frac{1}{2} \{ (4 \cdot \tfrac{1}{2} - 2) \cdot 0 + (2 \cdot \tfrac{1}{2} - 2) \cdot 1$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 0) = - \frac{1}{8}$$

$$y_{2,1} = 1 + \frac{1}{4} \{ (\tfrac{1}{2} - 2) \cdot 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \{ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Alternative Lösung zu 5c):

```
double [2] euler(double t, double y1_0,double y2_0,
 double h) {
  int k
  double n = t/h;
  double t_0 = 0;
  double y[2];
  y[0] = y1_0;
  y[1] = y2_0;
 for (k = 0, k<n, k++) {
  y[0]+ = h(-2*y[0] - y[1]);
  y[1]+ = h(-y[1] + t_0 + k*h);
  }
  return y;
```

Lösungen

Aufg. 6

x_i	-1	0	1
y_i	3	2	9

$f(x) = a + bx + cx^2$

a) $f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$A\lambda = y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ (3) \end{array} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

$$3a + 2 \cdot 4 = 14 \Rightarrow \boxed{a = \frac{14-8}{3} = 2}$$

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2$$

d)

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
10. Juli 2018, SS 2018

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Numerische Integration und Anfangswertproblem
Gegeben ist das Integral

$$I = \int_0^4 \frac{2x^2 - 2}{x+1}\, dx$$

a) Berechnen Sie für I einen Näherungswert durch Anwendung der Obersumme. Zerlegen Sie hierfür das Intervall $[0, 4]$ in vier Teilintervalle.

b) Berechnen Sie für dieselbe Zerlegung wie in Aufgabenteil eine Näherung von I über die Trapezformel.

c) Wenden Sie nun die Simpsonformel an und bestimmen Sie den Näherungswert.

d) Gegeben ist das gewöhnliche Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2\, x\, y_1(x) \\ y_2'(x) &= y_2(x) + y_1(x) \end{aligned}$$

mit $y_1(-1) = \frac{1}{2}$, $y_2(-1) = \frac{1}{2}$ und $x \geq -1$. Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für dieses Differenzialgleichungssystem an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.

Aufgabe 2: Nullstellenberechnung und Taylorreihe

a) Gegeben ist die Funktion $g(x) = 4x^3 - x^2 - 2$. Verwenden Sie das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle $g(x) = 0$. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 1$ und berechnen Sie den ersten Newton-Iterationsschritt.

b) Verwenden Sie nun das Bisektionsverfahren und berechnen Sie für das Startintervall $[0, 1]$ den ersten Iterationschritt.

c) Entwickeln Sie die Funktion $g(x)$ aus Aufgabenteil a) um die Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe.

Aufgabe 3: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	0	3	4	7
y_i	1	2	6	4

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = a+bx$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $f(x) = a + bx$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in c) gefundene Lösung.

Aufgabe 4: Interpolationspolynom und kubische Splines

a) Gegeben sind die Stützpunkte $(-5, 17), (-2, 8), (-1, 21), (0, 42)$ und $(1, 35)$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom.

b) Gegeben sind die Stützpunkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(2, 0)$. Stellen Sie zur Bestimmung der kubischen Spline-Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ g_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

die erforderlichen 8 Bedingungen aus Stetigkeit, Differenzierbarkeit und den Randbedingungen $g_1'(0) = 0, g_1''(0) = 0$ auf.

c) Stellen Sie das Gleichungssystem für die Bestimmung der Koeffizienten a_{ij} auf.

Aufgabe 5: Numerisches Differenzieren

a) Verwenden Sie den Ansatz $D^{+}\big(D^{2}f(x)\big)$, um eine rechtsseitige finite Differenzenformel $D^{3,+}f(x)$ für die 3. Ableitung $f'''(x)$ einer Funktion $f(x)$ zu formulieren.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$. Berechnen Sie den Näherungswert der Differenzenformel $D^{3,+}f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für die Schrittweite $h = 1/2$.
(Hilfe: $D^{3,+}f(x) = \frac{1}{h^3}\big(f(x+2h) - 3f(x+h) + 3f(x) - f(x-h)\big)$)

c) Bestimmen Sie den Wert der 3. Ableitung $f'''(x)$ der Funktion an der Stelle $x = 1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit Teil b).

d) Vervollständigen Sie die Implementierung der finiten Differenzenformel $D^{3,+}f(x)$ für die Funktion f, die Schrittweite h und die Stelle x_0:

```
double D3_plus(double (*f)(double), double x_0, double h) {
    ...
}
```

Aufgabe 6: Raum-Zeit-Probleme

Die Ausbreitung einer Verunreinigung in einem fließenden Gewässer lässt sich beschreiben durch die partielle Differenzialgleichung

$$u_t(t,x) = -v_0 u_x(t,x) + D u_{xx}(t,x), \quad \text{für} \quad x \in [0,2] \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

mit Randbedingungen $u(t,0) = 2$, $u(t,2) = 8$ und der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad 0 < x \leq \frac{3}{4} \\ 10, & \text{für} \quad \frac{3}{4} < x \leq \frac{5}{4} \\ 1, & \text{für} \quad \frac{5}{4} < x < 2 \end{cases}$$

Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1/2$ und $\Delta t = 1/8$ ist. Die Fließgeschwindigkeit sei $v_0 = 10$ und die Diffusionskonstante $D = 1$.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen in der Ortskoordinate x. Formulieren Sie für $u_i^n, i = 0, \ldots, 4, n = 0, \ldots$ das explizite Differenzenverfahren. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1 und u_3^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k)\\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1)\\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2)\\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)
\end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. SS 2018

Aufg. 1 Num. Integration und Anfangswertproblem

$$I = \int_0^4 \frac{2x^2-2}{x+1}\,dx =: \int_0^4 f(x)\,dx$$

a) $[0;4]$: $Int_1 = [0;1]$, $Int_2 = [1;2]$, $Int_3 = [2;3]$, $Int_4 = [3;4]$, $h = 1$

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

$$I_{Obersumme} = h\sum_{i=0}^{3} f(x_{i+1}) = 1\cdot(f(1)+f(2)+f(3)+f(4))$$

$$= \frac{2\cdot 1^2-2}{1+1} + \frac{2\cdot 2^2-2}{2+1} + \frac{2\cdot 3^2-2}{3+1} + \frac{2\cdot 4^2-2}{4+1}$$

$$= 0 + 2 + 4 + 6 = 12$$

$I \approx 12$

b) $I_T = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4))$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 0^2-2}{0+1} + 2\cdot 0 + 2\cdot 2 + 2\cdot 4 + 6\right) = 8$$

c) $I_S = \frac{4}{3}\cdot h\,(f(x_1) + f(x_3)) + \frac{2}{3}h(f(x_2)) + \frac{1}{3}h(f(x_0)+f(x_4))$

$$= \frac{4}{3}\cdot(0+4) + \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}(-2+6) = 8$$

d) $y_1'(x) = -2x\,y_1(x)$

$y_2'(x) = y_2(x) + y_1(x)$

$y_1(-1) = \frac{1}{2}$, $y_2(-1) = \frac{1}{2}$, $x \geq -1$, $h = 1/2$

$x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1, \dots$

$y_{1,0} = \frac{1}{2}$, $y_{2,0} = \frac{1}{2}$

$$y_{1,k+1} = y_{1,k} + h \cdot (-2x_k\, y_{1,k}) = y_{1,k} - x_k\, y_{1,k} = y_{1,k}(1-x_k)$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + h \cdot (y_{2,k} + y_{1,k}) = y_{2,k} + \tfrac{1}{2}(y_{2,k} + y_{1,k}) =$$
$$= \tfrac{3}{2} y_{2,k} + \tfrac{1}{2} y_{1,k}$$

$$y_{1,1} = y_{1,0}(1 - x_0) = \tfrac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$$

$$y_{2,1} = \tfrac{3}{2} y_{2,0} + \tfrac{1}{2} y_{1,0} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 1.$$

Aufg. 2 Nullstellenberechnung und Taylorreihe

a) $g(x) = 4x^3 - x^2 - 2$, $g'(x) = 12x^2 - 2x$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x)} = 1 - \frac{4 \cdot 1^3 - 1^2 - 2}{12 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = \frac{9}{10}$$

b) $I_0 = [0;1]$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

(i) Prüfe Vorzeichenwechsel:

$g(x_0) = g(0) = -2$, $g(x_1) = g(1) = 1$

$\Rightarrow$ In I_0 liegt nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle

(ii) $$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$g(x_2) = g\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\tfrac{17}{8} < 0$$

$\Rightarrow g(x_2) \cdot g(x_1) < 0$

$\Rightarrow$ neues Intervall $I_1 = [\tfrac{1}{2}; 1]$.

c) $g'(x) = 12x^2 - 2x\,, \quad g'(0) = 0$

$g''(x) = 24x - 2\,, \quad g''(0) = -2$

$g'''(x) = 24 = g'''(0)$

$g^{IV}(x) = 0 = g^{(n)}(0) \quad \forall \; n \geq 4 \qquad g(0) = -2$

$T_g(x) = -2 + 0 - 2 \cdot \frac{1}{2!} x^2 + \frac{24}{3!} x^3 = 4x^3 - x^2 - 2$

Aufg. 3 : Lineares Ausgleichsproblem

x_i	0	3	4	7
y_i	1	2	6	4

$f(x) = a + bx$

a) $f_1 = 1, \quad f_2 = x\,, \quad A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 74 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 58 \end{pmatrix}$$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 58 \end{pmatrix}$$

c)

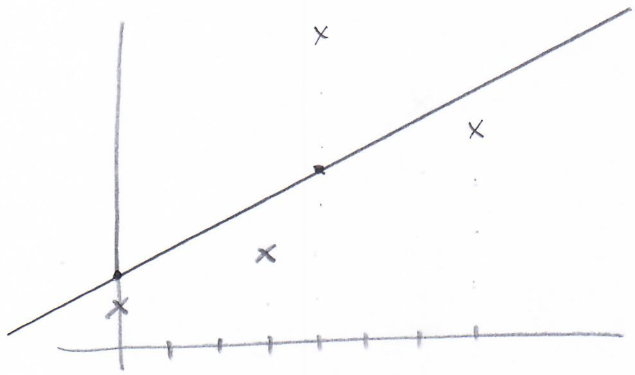
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 14 & 13 \\ 14 & 74 & 58 \end{array}\right) \; :2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 14 & 13 \\ 7 & 37 & 29 \end{array}\right) \; \begin{array}{c} \cdot(-7) \\ \cdot(4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 14 & 13 \\ 0 & 50 & 25 \end{array}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$4a + 14 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$$



Aufg. 4: Interpolationspolynom und kubische Splines

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + \dots$$
$$= a_0 + a_1(x+5) + a_2(x+5)(x+2) + a_3(x+5)(x+2)(x+1) + a_4(x+5)(x+2)(x+1)x$$

k	x_k	y_k
1	-5	17 $= a_0$
2	-2	8
3	-1	21
4	0	42
5	1	35

$$D_{2,1} = \frac{8-17}{-2+5} = -3 = a_1$$

$$D_{3,2} = \frac{21-8}{-1+2} = 13, \quad D_{3,2,1} = \frac{13+3}{-1+5} = 4 = a_2$$

$$D_{4,3} = \frac{42-21}{0+1} = 21, \quad D_{4,3,2} = \frac{21-13}{0+2} = 4, \quad D_{4,3,2,1} = \frac{4-4}{0+5} = 0 = a_3$$

$$D_{5,4} = \frac{35-42}{1-0} = -7, \quad D_{5,4,3} = \frac{-7-21}{1+1} = -14, \quad D_{5,4,3,2} = \frac{-14-4}{1+2} = -6$$

$$D_{5,4,3,2,1} = \frac{-6-0}{1+5} = -1 = a_4$$

$$f(x) = 17 - 3(x+5) + 4(x+5)(x+2) - (x+5)(x+2)(x+1)x$$

Probe: $f(-5) = 17$ ✓, $f(-2) = 8$ ✓

$f(-1) = 17 - 3(-1+5) + 4(-1+5)(-1+2) = 21$ ✓

$f(0) = 17 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 2 = 42$ ✓

$f(1) = 17 - 3(1+5) + 4(1+5)(1+2) - (1+5)(1+2)(1+1) \cdot 1$

$= 35$ ✓

b) $(0,0); (1,1), (2,0)$

		c)
$g_1(0) = 0$	$\Rightarrow$	$a_{10} = 0$
$g_1(1) = 1$		$a_{13} + a_{12} + a_{11} = 1$
$g_2(1) = 1$		$a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20} = 1$
$g_2(2) = 0$		$8a_{23} + 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 0$
$g_1'(1) = g_2'(1)$		$3a_{13} + 2a_{12} + a_{11} = 3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}$
$g_1''(1) = g_2''(1)$		$6a_{13} + 2a_{12} = 6a_{23} + 2a_{22}$
$g_1'(0) \stackrel{!}{=} 0$		$a_{11} = 0$
$g_1''(0) = 0$		$a_{21} = 0$

Aufg. 5: Numerisches Differenzieren

a) $D^+(D^2 f(x)) = D^+\left(\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\right) =$

$= \frac{1}{h^2}\left(D^+(f(x+h)) - 2D^+(f(x)) + Df(x-h)\right) =$

$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - 2\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right)$

$= \frac{1}{h^3}\left(f(x+2h) - 3f(x+h) + 3f(x) - f(x-h)\right)$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = 1$, $h = 1/2$

$D^{3,+}(f(x)) = 2^3\left(f(2) - 3f(1{,}5) + 3f(1) - f(\tfrac{1}{2})\right)$

$= 8(16 - 12 - 8 + 1 - 3(6{,}75 - 6{,}75 - 6 + 1) + 3(2 - 3 - 4 + 1) -$

6

$$- 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 12$$

c) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 4$

$f''(x) = 12x - 6$

$f'''(x) = 12$

$$e = |D^{3,+} f(x) - f'''(x)| = |12 - 12| = 0$$

d) s. u.

Aufg. 6: Raum-Zeit-Probleme

$$u_t(t,x) = -V_0 u_x(t,x) + D u_{xx}(t,x) \quad , x \in [0,2], \ t \geq 0$$

RB $u(t,0) = 2, \ u(t,2) = 8$

AB:
$$u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{3}{4} \\ 10 & \text{für } \frac{3}{4} < x \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{für } \frac{5}{4} < x < 2 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}, \quad \Delta t = \frac{1}{8}, \quad V_0 = 10, \quad D = 1$$

a) $x_0 = 0, \ x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = 1, \ x_3 = \frac{3}{2}, \ x_4 = 2, \ \Delta x = \frac{1}{2}, \ \Delta t = \frac{1}{8}$

$$u_t = -10 u_x + u_{xx}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(-10 \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

RB: $u_0^n = 2, \ u_4^n = 8 \quad \forall n \geq 0$

AB: $u_1^0 = 1, \ u_2^0 = 10, \ u_3^0 = 1$

b) $$u_1^1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0 \\ i=1}}{=} u_1^0 + \Delta t \left(-10 \frac{u_2^0 - u_0^0}{2\Delta x} + \frac{u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0}{\Delta x^2} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{8} (-10 \cdot (10 - 2) + 4 (10 - 2 \cdot 1 + 2))$$

$$= -4$$

$$u_2^1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0 \\ i=2}}{=} u_2^0 + \Delta t \left(-10 \frac{u_3^0 - u_1^0}{2\Delta x} + \frac{u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0}{\Delta x^2} \right) =$$

$$= 10 + \frac{1}{8}\left(-10\cdot(1-1) + 4\cdot(1-2\cdot 10+1)\right) = 1$$

$$u_3^1 = u_3^0 + \frac{1}{8}\left(-10\,\frac{u_4^0 - u_2^0}{2\Delta x} + \frac{u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0}{\Delta x^2}\right)$$

$n=0$
$i=3$

$$= 1 + \frac{1}{8}\left(-10\cdot(8-10) + 4\cdot(8-2\cdot 1+10)\right) = 11{,}5.$$

Aufg. 5d

```
double D3_plus(double (*f)(double), double 2
x_0, double h) {
 return (1/(h*h*h))*(f(x_0+2*h)-3*f(x_0+h)+2
 3*f(x_0) - f(x_0-h));
 }
```

Eine Alternative für 1/(h*h*h) ist pow(h,-3.0)

(pow ist aber sehr sehr teuer).

Tipp: Kommt $\frac{1}{h^2}$ oft vor, berechnet man das nur einmal am Anfang:

h = 1/(h*h*h)

André Lust, Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
6. Februar 2018, WS 2017/2018

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: (Interpolationspolynome, Nullstellen, Splines)

a) Gegeben sind folgende Messdaten eines Prozessablaufs:

x_k	0	1	3
y_k	1	3	2

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Algorithmus das Interpolationspolynom $p(x)$, das die Messdaten verbindet.

b) Um eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$ zu bestimmen, berechnen Sie nun mit dem Startwert $x_0 = 1$ den ersten Iterationsschritt des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung (Hinweis: Verwenden Sie $p(x) = 1 + \frac{17}{6}x - \frac{5}{6}x^2$)

c) Skizzieren Sie in einem $x - g(x)$ Diagramm das Vorgehen zur Bestimmung der Spline-Funktion $g(x)$ in den Teilintervallen $[0, 1]$ und $[1, 3]$.

d) Bestimmen Sie außerdem mit der Zusatzbedingung $g_1'(0) = 1$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

Aufgabe 2: (Numerische Integration)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

Gesucht ist ein Näherungswert des Integrals über die Funktion $f(x)$ im Intervall $[1, 3]$, d.h. für $\int_1^3 f(x)dx$. Teilen Sie das Intervall I in zwei gleiche Teilintervalle I_1 und I_2. Berechnen Sie den numerischen Wert des Integrals

a) mit der Trapezformel und

b) mit der Simpsonformel.

Aufgabe 3: (Lineares Ausgleichsproblem)

Zu folgenden Messdaten soll die Ausgleichsgerade bestimmt werden.

x_i	-1	1	3	5	7
y_i	6	2	0	0	-3

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax + b$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in $c)$ gefundene Lösung der Ausgleichsgerade.

e) In welchen Fällen besitzt das Fehlergleichungssystem eine Lösung? Ist es im gegebenen Fall lösbar?

Aufgabe 4: (Taylorreihe)

a) Geben Sie die Taylorreihe von $sin(2x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 5. Ordnung an (Hinweis: $sin(0) = 0$, $cos(0) = 1$)

b) Leiten Sie die Taylorreihe von $sin(2x)$ aus $a)$ gliedweise ab und zeigen Sie dadurch, dass für die Ableitung gilt $(sin(2x))' = 2cos(2x)$.

Aufgabe 5: (Hornerschema, numerisches Differenzieren und Nullstellen)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x$

a) Berechnen Sie an der Stelle $x_0 = 2$ den Funktionswert $f(2)$ unter Verwendung des Horner-Schemas.

b) Bestimmen Sie die numerischen Werte der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ unter Verwendung der zentralen Differenzenformeln $Df(x)$ und $D^2f(x)$ mit einer Schrittweite von $h = 1$.

c) Zur Bestimmung der Nullstelle $f(x) = 0$, verwenden Sie das Sekantenverfahren mit Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 1$ und berechnen Sie den Wert des ersten Iterationsschritts .

d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Newtonverfahrens zur Nullstellensuche:

```
double newton(double (*f)(double), double (*df)(double), double x0) {
    ...
}
```

Aufgabe 6: (Partielle Differenzialgleichung)

Gegeben ist das Raum-Zeit-Problem $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u(t,x) + x^2$, $x \in [0,3]$, $t \geq 0$ mit Randbedingungen $u(t,0) = 0$, $u(t,3) = 2$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1/2$ für $0 < x < 3$.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen im Ort x. Wählen Sie $\Delta x = 1$. Formulieren Sie das explizite finite Differenzenverfahren und geben Sie die Randbedingungen und die Anfangsbedingung in diskreter Form an.

b) Wählen Sie für die gegebene Diskretisierung $\Delta x = 1$ die größt mögliche Zeitschrittweite, so dass das explizize Differenzverfahren stabil bleibt.

c) Skizzieren Sie für die gegebene Raum-Zeit-Ebene das diskrete Raum-Zeit-Gitter und markieren Sie mit unterschiedlichen Symbolen die Positionen u_i^n der Anfangs- und Randbedingungen.

d) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1 der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Britta Nestler, André Lust
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. WS 17/18 ①

Lösungen

Aufg. 1 (Interpolationspolationspolynome, Nullstellen, splines)

a)

x_k	0	1	3
y_k	1	3	2

$$p(x) = a_0 + a_1(x-0) + a_2(x-0)(x-1) +$$

k	x_k	y_k
1	0	1
2	1	3
3	3	2

$= a_0$

$$\rightarrow D_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = 2 = a_1$$

$$\rightarrow D_{3,2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2-3}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

$$D_{3,2,1} = \frac{D_{3,2} - D_{2,1}}{x_3 - x_1} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{3-0} = -\frac{5}{6} = a_2$$

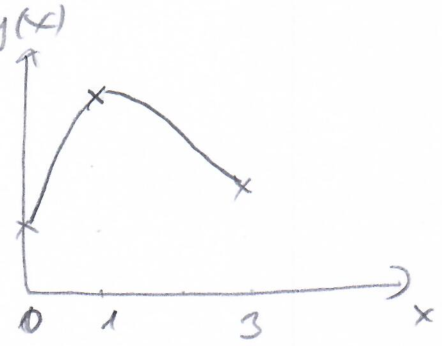
$$p(x) = 1 + 2x - \frac{5}{6}x(x-1) = 1 + \frac{17}{6}x - \frac{5}{6}x^2$$

b) $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1 + \frac{17}{6}\cdot 1 - \frac{5}{6}\cdot 1^2}{1 + \frac{17}{6} - \frac{5}{3}\cdot 1}$$

$$= 1 - \frac{1+2}{\frac{13}{6}} = -\frac{5}{13}$$

b)



c) $g_1(0) = \boxed{a_{10} = 1}$

$g_1(1) = a_{12} + a_{11} + a_{10} = 3$

$g_2(1) = a_{22} + a_{21} + a_{20} = 3$

$g_2(3) = 9a_{22} + 3a_{21} + a_{20} = 2$

$g_1'(1) = g_2(1) \Rightarrow 2a_{12} \cdot 1 + a_{11} = 2a_{22} \cdot 1 + a_{21}$

$g_1'(0) = 1 \Rightarrow 2a_{12} \cdot 0 + a_{11} = 1 \Rightarrow \boxed{a_{11} = 1}$

$\Rightarrow a_{12} + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 1}$

$2 \cdot 1 + 1 = 2a_{22} + a_{21}$

$$\begin{array}{ccc|cl}
9 & 3 & 1 & 2 & \\
1 & 1 & 1 & 3 & (-9)\ (-2) \\
2 & 1 & 0 & 3 & \\
\hline
9 & 3 & 1 & 2 & \\
0 & -6 & -8 & -25 & \\
0 & -1 & -2 & -3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad (-6)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 25 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \boxed{a_{20} = -\frac{7}{4}}$$

$$6a_{21} + 8 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 25 \Rightarrow \boxed{a_{21} = \frac{13}{2}}$$

$$a_{22} + \frac{13}{2} - \frac{7}{4} = 3 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -\frac{7}{4}}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ -\frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{7}{4}, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

Aufg. 2 (Numerische Integration)

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

a) $[1,3]$ $\quad I_1 = [1;2]$, $I_2 = [2;3]$, $h = 1$

$$I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_3)$$

$$f_0 = f(1) = 1, \quad f_1 = f(2) = \frac{8}{3}, \quad f_2 = f(3) = \frac{18}{4}$$

$$I_T = \frac{1}{2}\left(1 + 2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{18}{4}\right) = \frac{65}{12} \approx 5{,}42$$

b) $$I_S = \frac{4}{3} h \cdot f_1 + \frac{1}{3} h (f_0 + f_2)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{18}{4}\right) = \frac{32}{9} + \frac{11}{6} = \frac{97}{18} \approx 5{,}39$$

Aufg. 3 (Lineares Ausgleichsproblem)

x_i	-1	1	3	5	7
y_i	6	2	0	0	-3

a) $f(x) = ax + b \qquad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(-1) & 1 \\ f_1(1) & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \lambda = y$$

b) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = A^T \cdot A$$

$$A^T \cdot y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

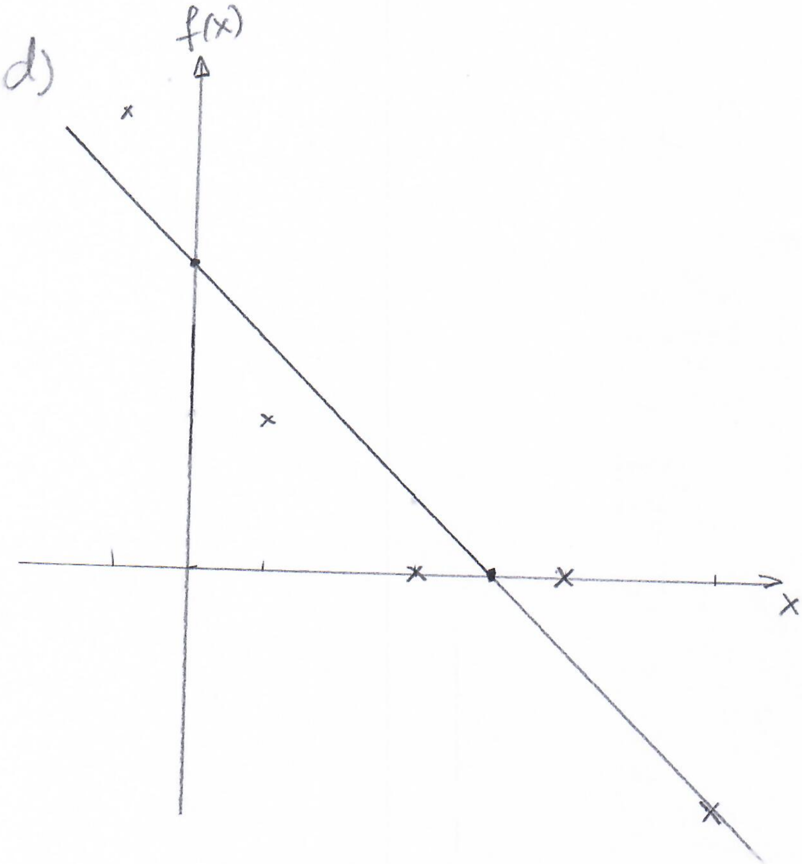
$$\begin{pmatrix} 85 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{cc|c} 85 & 15 & -25 \\ 15 & 5 & 5 \\ \hline 17 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \\ \hline 17 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 32 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-3) \\ (17) \\ \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{b = 4} \qquad 3a + 4 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$f(x) = -x + 4$

d)



e) $A\lambda = y$ hat eine Lösung, wenn

$\|A\lambda - y\|_2 = 0$ („Die 2-Norm des Fehlervektors ist Null")

$$A\lambda - y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b-6 \\ a+b-2 \\ 3a+b \\ 5a+b \\ 7a+b-3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\lambda - y\|_2 = \sqrt{(-a+b-6)^2 + (a+b-2)^2 + (3a+b)^2 + (5a+b)^2 + (7a+b-3)^2}$$

$$\|A\lambda - y\|_2 = 0 \iff \begin{cases} -a+b-6 = 0 & \Rightarrow b = a+6 \quad b = 4 \\ a+b-2 = 0 & \Rightarrow 2a+6-2=0 \Rightarrow a = -2 \\ 3a+b = 0 & \Rightarrow b = -3a \ ↯ \\ 5a+b = 0 \\ 7a+b-3 = 0 \end{cases}$$

In diesem Fall gibt es keine Lösung für $\|A\lambda - y\|_2 = 0$, also ist $A\lambda = y$ nicht lösbar

Aufg. 4 (Taylorreihe)

a) $f(x)=\sin(2x)$, $x_0=0$

$f'(x) = 2\cos(2x)$ $\qquad f'(0) = 2$

$f''(x) = -4\sin(2x)$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -8\cos(2x)$ $\qquad f'''(0) = -8$

$f^{IV}(x) = 16\sin(2x)$ $\qquad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = 32\cos(2x)$ $\qquad f^{V}(0) = 32$

$$T_f(x, x_0=0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots$$

$$= f(0) + f'(0)\cdot x + \dots$$

$$= 0 + 2x - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{32}{5!}x^5 + R_5(x)$$

$$= \underbrace{2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}_{} + R_5(x)$$

b) $\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5\right)' = 2 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$

$\cos(2x_0) = 1$

$(\cos(2x_0))' = -2\sin(2x_0) = 0$

$(\cos(2x_0))'' = -4\cos(2x_0) = -4$

$(\cos(2x_0))''' = 8\sin(2x_0) = 0$

$(\cos(2x_0))^{IV} = 16\cos(2x_0) = -16$

$$T_{2\cos(2x_0)}(x, x_0=0) = 2 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 + R_4(x) = \underbrace{2 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 + R_4(x)}_{}$$

Aufg. 5 (Hornerschema, numerisches Differenzieren und Nullstellen)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x$$

a)

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & \frac{1}{3} & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & x_0 = 2 \\
+ & & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{10}{6} & \\
\hline
 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{3} & = f(2)
\end{array}$$

b) $$Df(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}, \quad x_0 = 0,\ h = 1$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}(-1)^4 + 2\cdot(-1)^2 - \frac{1}{2}\cdot(-1)}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D^2 f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 2(\cdot 0) + \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2}}{1^2} = -\frac{10}{3}$$

c) $x_0 = -1$, $x_1 = 1$

$$x_2 = x_0 - f(x_0)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = -1 - f(-1)\frac{1+1}{f(1) - f(-1)}$$

$$= -1 - \left(\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2}\right)\frac{2}{\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= -1 - 2\cdot\left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{10}{3}$$

Aufg. 6 (Partielle DGL)

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t;x) - u(t,x) + x^2, \quad x \in [0;3], t \geq 0$$

RB $u(t,0) = 0$, $u(t,3) = 2$, AB: $u(0,x) = \frac{1}{2}$ für $0 < x < 3$.

a) $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - u_i^n + x_i^2$$

$\Delta x = 1$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(u_{i+1}^n - 3u_i^n + u_{i-1}^n + x_i^2 \right)$$

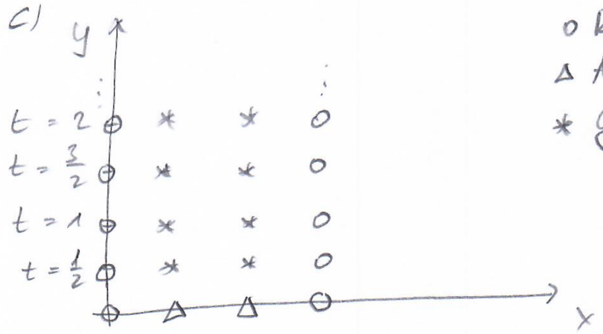
$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

RB: $u_0^n = 0$, $u_3^n = 2 \quad \forall n \geq 0$

AB: $u_1^0 = \frac{1}{2}$, $u_2^0 = \frac{1}{2}$

b) $\Delta t \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2}$ ist die größtmögliche Zeitschrittweite

c)



o RB
Δ AB
* gesuchte Stellen

d) $$u_1^1 \underset{\substack{n=0 \\ i=1}}{\overset{}{=}} u_1^0 + \frac{1}{2}\left(u_2^0 - 3u_1^0 + u_0^0 + x_1^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 1^2 \right) = \frac{1}{2}$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0 \\ i=2}}{\overset{}{=}} u_2^0 + \frac{1}{2}\left(u_3^0 - 3u_2^0 + u_1^0 + x_2^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2^2 \right) = 3$$

Aufg. 5 d

```
double newton(double (*f)(double), double ↲
  (*df)(double), double x0) {
    int i = 0;
    do
    {x0 + = - f(x0) / df(x0);
     i++}
    while ( fabs(f(x0)) > 1e-12 || i > 100);
    return x0;
}
```

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
11. Juli 2017, SS 2017

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: (Interpolationspolynome, Hornerschema und Differenzenformeln)

a) Gegeben sind folgende Messdaten eines Prozessablaufs:

x_k	0	1	2	3
y_k	4	1	0	2

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Algorithmus das Interpolationspolynom $p(x)$, das die Messdaten verbindet.

b) Prüfen Sie, dass das Interpolationspolynom $p(x)$ mit der Funktion $f_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 4$ übereinstimmt.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Hornerschemas das Restpolynom 2. Grades $f_2(x)$, das sich durch Abspalten des Linearfaktors $(x-2)$ aus der Funktion $f_3(x)$ (Aufgabenteil 1b)) ergibt.

d) Bestimmen Sie die rechtsseitige Ableitung $D^+f_2(x)$ der Funktion $f_2(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 2$ an der Stelle $x_0 = 0$ für zwei Schrittweiten $h = 1$ und $h = 1/25$.

e) Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $f_2'(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und geben Sie für die beiden Schrittweiten h aus Aufg. 1 d) den jeweiligen Fehler $e(h) = |D^+f_2(x_0) - f_2'(x_0)|$ an.

Aufgabe 2: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die Messpunkte $(-\frac{1}{2}, 6)$, $(\frac{1}{4}, 1)$ und $(1, 0)$. Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form:

$$f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

zu diesen Punkten. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$.

Aufgabe 5: Numerische Integration und Nullstellenbestimmung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Berechnen Sie den Wert der Untersumme für das Integral $\int_1^3 f(x)\,dx$. Zerlegen Sie hierfür das Intervall $[1,3]$ in zwei gleiche Teilintervalle.
b) Bestimmen Sie für die Schrittweite h aus a) den Wert der Trapezformel
c) und der Simpsonformel.
d) Berechnen Sie mit dem Newtonverfahren zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = 0$ für den Startwert $x_0 = 1/2$ den ersten Iterationsschritt.
e) Verwenden Sie die Startwerte $x_1 = -1$ und $x_2 = 1/2$ und bestimmen Sie den ersten Iterationsschritt des Bisektionsverfahrens. Geben Sie das Intervall des nächsten Interationsschrittes an.

P: f) Vervollständigen Sie die Implementierung des Bisektionsverfahrens zur Nullstellensuche:

```
double bisektion(double (*f)(double), double x1, ↩
   double x2) {
  ...
}
```

Die Funktion `bisektion` erwartet die Funktion `f` und die beiden Startwerte `x1`, `x2`. Ihr Rückgabewert ist die Nullstelle mit einer Genauigkeit von `1e-12`. Die Funktion `f(x)` braucht nicht angegeben werden. Beenden Sie die Routine mit dem Wert `NaN`, falls keine Konvergenz vorliegt.

Aufgabe 6: Partielle Differenzialgleichung

Gegeben ist das Raum-Zeit-Problem $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + x(1-x)$ für $2 \leq x \leq 5$ und $t \geq 0$ mit Randbedingungen $u(t,2) = 3$, $u(t,5) = 0$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1$ für $2 < x < 5$.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen im Ort x. Wählen Sie $\Delta x = 1$ und $\Delta t = 1/2$. Formulieren Sie das explizite finite Differenzenverfahren und geben Sie die Randbedingungen und die Anfangsbedingung in diskreter Form an.

b) Skizzieren Sie für die gegebene Raum-Zeit-Ebene das diskrete Raum-Zeit-Gitter und markieren Sie mit unterschiedlichen Symbolen die Positionen u_i^n der Anfangs- und Randbedingungen.

c) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1 der ersten Zeititeration. Geben Sie die beiden Vektoren $\mathbf{u}^0 = (u_0^0, \ldots, u_3^0)$ und $\mathbf{u}^1 = (u_0^1, \ldots, u_3^1)$ an.

Viel Erfolg!

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:
  Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. SS 2017

Lösungen

Aufg. 1 Interpolationspolynome, Hornerschema und Differenzenformeln

a) $p(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

k	x_k	y_k
1	0	4
2	1	1
3	2	0
4	3	2

$4 = a_0$

$D_{2,1} = \frac{1-4}{1-0} = -3 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{0-1}{2-1} = -1 \quad D_{3,2,1} = \frac{-1+3}{2-0} = 1 = a_2$

$D_{4,3} = \frac{2-0}{3-2} = 2 \quad D_{4,3,2} = \frac{2+1}{3-1} = \frac{3}{2} \quad D_{4,3,2,1} = \frac{\frac{3}{2}-1}{3-0} = \frac{1}{6} = a_3$

$p(x) = 4 - 3x + x(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

Probe: $p(0) = 4$

$p(1) = 4 - 3 = 1$ ✓

$p(2) = 4 - 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 0 = 0$ ✓

$p(3) = 4 - 3\cdot 3 + 3\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2$ ✓

b) $p(x) = 4 - 3x + x^2 - x + \frac{1}{6}x(x^2 - 3x + 2)$

$= x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x =$

$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 4 = f_3(x)$

c) $f_3(x) = (x-2)f_2(x) + f_3(2) = (x-2)(b_3x^2 + b_2x + b_1) + f_3(2)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{3} & 4 \\
+ & & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -4 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -2 & 0 = f_3(2) \\
 & b_3 & b_2 & b_1 &
\end{array}$$

$f_2(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 2$

Probe: $(x-2)(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 2) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - 2x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 4 = f_3(x)$ ✓

d) $D^+ f_2(x) = D^+\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 2\right)$

$x_0 = 0, \quad h = 1:$

$$D^+ f_2(x) = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{\frac{1}{6}\cdot 1^2 + \frac{5}{6}\cdot 1 - 2 + 2}{1}$$

$$= 1$$

$x_0 = 0, \quad h = \frac{1}{2}:$

$$D^+ f_2(x) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} - 2 + 2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} + \frac{5}{6} = \frac{11}{12}$$

e) $f_2'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$

$f_2'(0) = \frac{5}{6}$

$e(1) = \left|1 - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{6}$

$e(\frac{1}{2}) = \left|\frac{11}{12} - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{12}$

<u>Aufg 2</u> Lineares Ausgleichsproblem

$(-\frac{1}{2}, 6), (\frac{1}{4}, 1), (1, 0)$

$f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$

a) $f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad A\lambda = y \text{ hat}$$

die Form $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3

b) $A^T A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^T y = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{cc|c|l} 21 & 3 & -8 & \cdot(-3) \\ 3 & 3 & 7 & \cdot(21) \\ \hline 21 & 3 & -8 & \\ 0 & 54 & 171 & \end{array} \quad \Rightarrow b = \frac{19}{6}$$

$21a + 3 \cdot \frac{19}{6} = -8 \Rightarrow a = -\frac{5}{6}$

$f(x) = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{19}{6}$

Aufg. 3: Quadratische Splines

$(0,4), (1,1)$ und $(2,0)$

a) 

b)
$g_1(0) = 4 \Rightarrow a_{10} = 4$

$g_1(1) = 1 \qquad a_{12} + a_{11} + a_{10} = 1$

$g_2(1) = 1 \qquad a_{22} + a_{21} + a_{20} = 1$

$g_2(2) = 0 \qquad 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 0$

$g_1'(1) = g_2'(1) \qquad 2a_{12} + a_{11} = 2a_{22} + a_{21}$

$g_1'(0) = 1 \Rightarrow \boxed{a_{11} = 1}$ ④

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow a_{12} + 1 + 4 = 1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = -4}$$

$$2a_{12} + a_{11} = -4 \cdot 2 + 1 = -7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) (-4), (-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & +2 & +3 & +4 \\ 0 & +1 & +2 & +9 \end{array}\right) (-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{a_{20} = 14}$$

$$2a_{21} + 3 \cdot 14 = 4 \Rightarrow \boxed{a_{21} = \frac{4 - 3 \cdot 14}{2} = 2 - 3 \cdot 7 = -19}$$

$$a_{22} - 19 + 14 = 1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 1 + 5 = 6}$$

$$g(x) = \begin{cases} -4x^2 + x + 4, & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 6x^2 - 19x + 14, & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

c) $$g(1) = \begin{cases} -4 \cdot 1^2 + 1 + 4 = 1, & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 6 \cdot 1^2 - 19 \cdot 1 + 14 = 1, & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Aufg. 4: System gewöhnlicher DGLn

$$y_1'(x) = y_1(x)\cdot\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$y_2'(x) = 2y_2(x) - y_1(x)\,y_2(x)$$

AB: $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2$

a) $$y_{1,k+1} = y_{1,k} + h\cdot y_{1,k}\left(1 - \frac{1}{x_k+1}\right)$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + h\left(2y_{2,k} - y_{1,k}\,y_{2,k}\right)$$

AW:

$h = \frac{1}{2},\ x_0 = 0,\ y_{1,0} = 1,\ y_{2,0} = 2;\ x_k = k\,h$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{2}\,y_{1,0}\left(1 - \frac{1}{x_0+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\left(1 - \frac{1}{0+1}\right) = 1 = y_{1,1}^{Eul}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{2}\left(2y_{2,0} - y_{1,0}\,y_{2,0}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(2\cdot 2 - 1\cdot 2\right) = 3 = y_{2,1}^{Eul}$$

b) $$y_{1,k+1} = y_{1,k} + \frac{h}{2}\left\{f_1(x_k, y_{1,k}) + f(x_{k+1}, y_{1,k+1}^{Eul})\right\}$$

$$= y_{1,k} + \frac{h}{2}\left\{y_{1,k}\left(1 - \frac{1}{x_k+1}\right) + \left(y_{1,k+1}^{Eul}\left(1 - \frac{1}{x_{k+1}+1}\right)\right)\right\}$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + \frac{h}{2}\left\{f_2(y_{1,k}, y_{2k}) + f_2(y_{1,k}^{Eul}, y_{2,k}^{Eul})\right\}$$

$$= y_{2,k} + \frac{h}{2}\left\{2y_{2,k} - y_{1,k}\,y_{2k} + 2y_{2,k+1}^{Eul} - y_{1,k+1}^{Eul}\,y_{2,k+1}^{Eul}\right\}$$

AW: $y_{1,0} = 1,\ y_{2,0} = 2$

c) $h = \frac{1}{2}$ $\qquad x_1 = 0 + 1 \cdot h = \frac{1}{2}$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{4}\left\{ y_{1,0}\left(1 - \frac{1}{x_0+1}\right) + y_{1,1}^{Eul}\left(1 - \frac{1}{x_1+1}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left\{ 1\left(1 - \frac{1}{0+1}\right) + 1\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{4}\left\{ 2y_{2,0} - y_{1,0}y_{2,0} + 2y_{2,1}^{Eul} - y_{1,1}^{Eul}y_{2,1}^{Eul}\right\}$$

$$= 2 + \frac{1}{4}\left\{ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3\right\}$$

$$= 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

Aufg. 5: Num. Integration und Nullstellenbestimmung

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

a) $[1,3]$: $I_1 = [1,2]$, $I_2 = [2,3]$, $h = 1$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$

$$I_u = h \cdot f(1) + h \cdot f(2) = 1 \cdot (1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1) + 1 \cdot (2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2)$$

$$= 2$$

b) $h = 1$

$$I_T = \frac{h}{2}\left(f(1) + 2f(2) + f(3)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 2 \cdot 2 + 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3\right)$$

$$= 8$$

c) $I_S = \frac{4}{3} h f(2) + \frac{1}{3} \cdot h \left(f(1) + f(3)\right) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (0 + 12) =$

$$= \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

d) $x_0 = \frac{1}{2}$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_0 = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{8}$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

e) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ $f(-1) = -1 - 2 - 1 = -4 < 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} > 0$ => die NST ist in $[-1; \frac{1}{2}]$

a) Intervallmitte: $\frac{-1+\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

b) $f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{64} - \frac{2}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{25}{64} < 0$

c) $f(-\frac{1}{4}) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$ => Nullstelle ist in

$[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ => neues Intervall.

f)
```
double bisektion(double (*f)(double), double x1, 2
double x2){

double m;
double f1;
double f2;
double fm;
int i=0;
```

```
do {
 m = (X1+X2)/2;
 if (f(X1)*f(m) < 0)
 X2 = m;
 else
 X1 = m;
 i++;
} while (f(m) > 1e-12 || i > 100);
 if (f(m) < 1e-12)
 return m;
 else
 return NAN;
}
```

Aufg. 6: Partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u(1-u) + x(1-x)$$

$2 \leq x \leq 5, \quad t \geq 0$

RB $u(t,2) = 3, \quad u(t,5) = 0$

AB: $u(0,x) = 1$ für $2 < x < 5$

a) $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + u_i^n(1 - u_i^n) + x_i(1-x_i)$$

mit $\Delta t = \frac{1}{2}, \ \Delta x = 1$

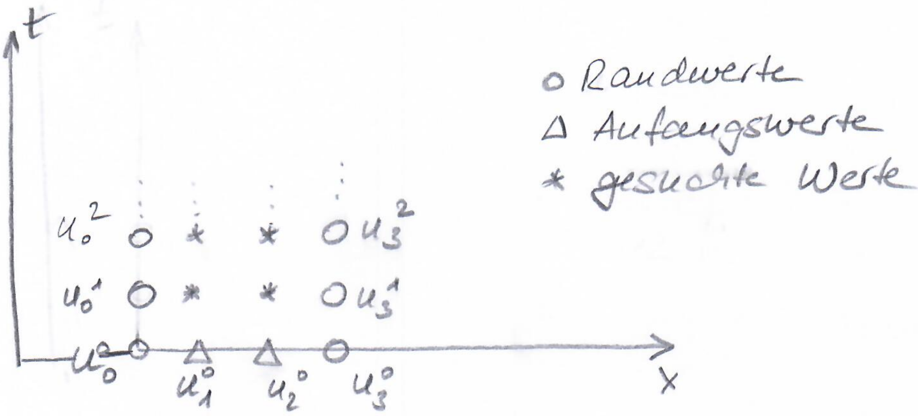
$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + u_{i-1}^n - (u_i^n)^2 + x_i(1-x_i)\right)$$

$x_0 = 2, \ x_1 = 3, \ x_2 = 4, \ x_3 = 5$

RB: $u_0^n = 3, \ u_3^n = 0 \quad \forall \, n \geq 0$

AB: $u_1^0 = 1, \ u_2^0 = 1$

b)



c) $u_1^1 \underset{\substack{n=0\\ i=1}}{=} u_1^0 + \frac{1}{2}\left(u_2^0 - u_1^0 + u_0^0 - (u_1^0)^2 + x_1(1-x_1)\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - 1 + 3 - 1^2 + 3(1-3)\right)$

$= -1$

$u_2^1 \underset{\substack{n=0\\ i=2}}{=} u_2^0 + \frac{1}{2}\left(u_3^0 - u_2^0 + u_1^0 - (u_2^0)^2 + x_2(1-x_2)\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(0 - 1 + 1 - 1^2 + 4(1-4)\right)$

$= -\frac{11}{2}$

$\vec{u}^0 = (3, 1, 1, 0)$,

$\vec{u}^1 = (3, -1, -\frac{11}{2}, 0)$.

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
31. Januar 2017, WS 2016/17

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -x\, y_1(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 2$ und $y_2(0) = 0$.

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für das Differenzialgleichungssystem an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte.

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für das Differenzialgleichungssystem an.

c) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 2: (Interpolationspolynome, Taylorreihe und Differenzenformeln)

a) Gegeben sind folgende Messdaten eines Prozessablaufs:

x_k	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y_k	-1	1	8	27

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Algorithmus das Interpolationspolynom $p(x)$, das die Messdaten verbindet.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1+2x)^3$. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe.

c) Vergleichen Sie das Ergebnis des Interpolationspolynoms $p(x)$ aus Aufg. 2 a) mit der Taylorreihe aus Aufg. 2 b) (Hilfe: Ausmultiplizieren).

d) Bestimmen Sie die rechtsseitige Ableitung $D^+f(x)$ der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ für zwei Schrittweiten $h = 1$ und $h = 0.5$.

e) Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und geben Sie für die beiden Schrittweiten h aus Aufg. 2 d) den jeweiligen Fehler $e(h) = |D^+f(x_0) - f'(x_0)|$ an.

Aufgabe 3: Partielle Differenzialgleichung und Taylorformel

Gegeben ist das Raum-Zeit-Problem $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\Big(1 - x\Big)$ für $1 \leq x \leq 5$ und $t \geq 0$ mit Randbedingungen $u(t,1) = 0$, $u(t,5) = 4$ und Anfangsbedingung $u(0,x) = 1$.

a) Diskretisieren Sie die partielle Differenzialgleichung mit Vorwärtsdifferenzen in der Zeit t und zentralen Differenzen in den Ortsableitungen x. Wählen Sie für das diskrete Raum-Zeit Gitter eine Zerlegung von $\Delta x = 1$ und $\Delta t = 1/2$. Formulieren Sie das explizite finite Differenzenverfahren und geben Sie die Randbedingungen und die Anfangsbedingung in diskreter Form an.

b) Skizzieren Sie für die gegebene Raum-Zeit-Ebene das diskrete Raum-Zeit-Gitter und markieren Sie mit unterschiedlichen Symbolen die Positionen u_i^n der Anfangs- und Randbedingungen.

c) Berechnen Sie unter Verwendung des expliziten Differenzenverfahrens die Werte u_1^1, u_2^1, u_3^1 der ersten Zeititeration.

Aufgabe 4: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-2	~~2~~ -1	0	1	2
y_i	$1/2$	$1/2$	2	$3/2$	$5/2$

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = a + bx$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsparabel $f(x) = a + bx$.

d) Tragen Sie die (x_i, y_i) Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die in c) gefundene Lösung.

Aufgabe 5: Nullstellenberechnung und numerische Integration

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2x + 1$.

a) Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein geeignetes Nullstellenproblem $h(x) = 0$.

b) Skizzieren Sie für die Startwerte $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ den Bisektionsalgorithmus mit (i) Initialisierung, (ii) Iteration und (iii) Abbruch.

c) Berechnen Sie für $h(x) = 0$ zu den Startwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ den ersten Näherungswert x_3 des Sekantenverfahrens (regula falsi).

d) Stellen Sie nun die Newtonformel auf und berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 1$ den ersten Iterationsschritt.

e) Berechnen Sie den Näherungswert des Integrals $\int_0^4 h(x)dx = \int_0^4 x^3 - 2x - 1dx$ mit der Simpsonformel für eine Schrittweite von $h = 1$.

f) Implementieren Sie die Simpsonformel für `n` Stützstellen im Intervall $[a, b]$ unter Verwendung der C-Syntax und wenden Sie die Funktion auf $h(x)$ aus Aufg. 5 e) an:

```
double h(...) { ... }
double int_simpson(double (*h)(double), double a, ↩
    double b, int n) {
  ...
}
```

Aufgabe 6: Kubische Splines

Gegeben sind die Stützpunkte $(0, 2)$, $(1, 0)$, und $(2, 3)$.

a) Skizzieren Sie in einem $x - g(x)$ Diagramm das Vorgehen zur Bestimmung der Spline-Funktion $g(x)$ in den Teilintervallen $[0, 1]$ und $[1, 2]$.

b) Bestimmen Sie zu den natürlichen Randbedingungen $g_1''(0) = 0$ und $g_2''(0) = 0$ für die gegebenen Stützpunkte die kubische Spline-Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) = a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c) Prüfen Sie, ob die Funktion $g(x)$ durch den Punkt $(1, 0)$ verläuft.

d) Zur Bestimmung der Koeffizienten a_{ij} des Splines muss das Gleichungssystem $Ma = y$ gelöst werden. Für N Punkte sind der Vektor `double ↩ a[N]` und die Inverse der Matrix M `double Minv[N][N]` bereits implementiert. Bestimmen Sie `double a[N]` mit einer Matrix-Vektor-Multiplikation. Achten Sie darauf, dass C Variablen nicht zwangsweise mit 0 initialisiert sind.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. WS 16/17

Lösungen

Aufg. 1 : System gewöhnlicher DGLn

$$y_1'(x) = -x\,y_1(x)$$

$$y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x)$$

AB: $y_1(0) = 2, \; y_2(0) = 0$

a) $y_{i,k+1} = y_{i,k} + h\, f_i(x_k, y_{1,k}, y_{2,k})$

$h = \frac{1}{2}, \quad y_{1,0} = 2, \quad y_{2,0} = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$$y_{1,1} = 2 + \frac{1}{2}(-0 \cdot y_{1,0}) = 2$$

$$y_{2,1} = 0 + \frac{1}{2}(-y_{1,0} - y_{2,0}) = \frac{1}{2} \cdot (-2-0) = -1$$

$$y_{1,2} = 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \cdot y_{1,1}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \cdot 2\right) = \frac{3}{2}$$

$$y_{2,2} = -1 + \frac{1}{2}(-2-(-1)) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

b) $y_{i,k+1} = y_{i,k} + \frac{h}{2}\left\{ f_i(x_k, y_{i,k}) + f_i(x_{k+1}, y_{i,k}^{Eul})\right\}$

c) $y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{4}\left\{ -0 \cdot y_{1,0} + \left(-\frac{1}{2}\, y_{1,1}^{Eul}\right)\right\}$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot \left\{ 0 + \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\right)\right\} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{4}\left\{ -y_{1,0} - y_{2,0} + \left(-y_{1,1}^{Eul} - y_{2,1}^{Eul}\right)\right\}$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left\{-2 - 0 + (-2+1)\right\} = -\frac{3}{4}$$

②

Aufg. 2 Interpolationspolynome, Taylor-Reihe und Differenzenformeln

a)

k	x_k	y_k
1	-1	-1
2	0	1
3	$\frac{1}{2}$	8
4	1	27

$-1 = a_0$

$D_{2,1} = \frac{1-(-1)}{0-(-1)} = 2 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{8-1}{\frac{1}{2}-0} = 14$, $D_{3,2,1} = \frac{14-2}{\frac{1}{2}-(-1)} = 8 = a_2$

$D_{4,3} = \frac{27-8}{1-\frac{1}{2}} = 38$, $D_{4,3,2} = \frac{38-14}{1-0} = 24$

$D_{4,3,2,1} = \frac{24-8}{1-(-1)} = 8 = a_3$

$p(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\Rightarrow p(x) = -1 + 2(x+1) + 8(x+1)x + 8(x+1)x(x-\frac{1}{2})$

Probe: $p(-1) = -1$ ✓

$p(0) = 1$ ✓

$p(\frac{1}{2}) = -1 + 2(\frac{1}{2}+1) + 8\cdot(\frac{1}{2}+1)\cdot\frac{1}{2} = 8$ ✓

$p(1) = -1 + 2(1+1) + 8(1+1)\cdot 1 + 8(1+1)\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{2})$

$= 27$ ✓

b) $f(x) = (1+2x)^3$

$x_0 = 0$, $f(0) = 1$

$f'(x) = 3(1+2x)^2\cdot 2 = 6(1+2x)^2$, $f'(0) = 6$

$f''(x) = 12\cdot(1+2x)\cdot 2 = 24(1+2x)$, $f''(0) = 24$

$f'''(x) = 24\cdot 2 = 48$, $f'''(0) = 48$

$f^{IV}(x) = 0$

$T_f(x) = 1 + 6x + \frac{24}{2!}x^2 + \frac{48}{3!}x^3 = 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$

c) $p(x) = -1 + 2x + 2 + 8x^2 + 8x + (8x^2 + 8x)(x - \frac{1}{2})$

$= 8x^2 + 10x + 1 + 8x^3 - 4x^2 + 8x^2 - 4x$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = T_f(x)$

d) $h = 1$:

$D^+ f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1) - f(0)}{1} = (1+2)^3 - 1$

$= 26$

$h = 0{,}5$

$D^+ f(x_0) = \frac{f(0{,}5) - f(0)}{0{,}5} = \frac{(1+2 \cdot 0{,}5)^3 - 1}{0{,}5} = 14$

e) $f'(0) = 6$

$e(1) = |26 - 6| = 20$, $e(0{,}5) = |14 - 6| = 8$

Aufg. 3: Partielle DGL und Taylor-Formel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(1 - x), \quad 1 \leq x \leq 5, \quad t \geq 0$$

RB: $u(t,1) = 0$, $u(t,5) = 4$, AB: $u(0,x) = 1$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}(1 - x_i)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}(1 - x_i) \right)$$

mit $\Delta t = \frac{1}{2}$, $\Delta x = 1$:

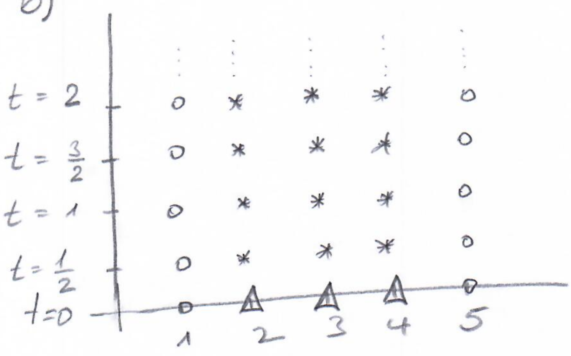
$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2} \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)(1 - x_i) \right)$$

$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5$

RB: $u_0^n = 0, \quad u_4^n = 4 \quad \forall\, n \geq 0$

AB: $u_0^0 = 0, \quad u_1^0 = 1, \quad u_2^0 = 1, \quad u_3^0 = 1, \quad u_4^0 = 4$

b)



o RB

Δ AB

* gesuchte Punkte

c) $$u_1^1 \underset{\substack{n=0\\ i=1}}{\overset{\uparrow}{=}} u_1^0 + \frac{1}{2}\left(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0 + \frac{1}{2}(u_2^0 - u_0^0)(1 - x_1)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - 2\cdot 1 + 0 + \frac{1}{2}(1-0)(1-2)\right) = \frac{1}{4}$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0\\ i=2}}{\overset{\uparrow}{=}} u_2^0 + \frac{1}{2}\left(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0 + \frac{1}{2}(u_3^0 - u_1^0)(1 - x_2)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - 2\cdot 1 + 1 + \frac{1}{2}(1-1)(1-3)\right) = 1$$

$$u_3^1 \underset{\substack{n=0\\ i=3}}{\overset{\uparrow}{=}} u_3^0 + \frac{1}{2}\left(u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0 + \frac{1}{2}(u_4^0 - u_2^0)(1 - x_3)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(4 - 2\cdot 1 + 1 + \frac{1}{2}(4-1)(1-4)\right) = 1 + \frac{1}{2}(3 - 4{,}5) = \frac{1}{4}$$

Aufg. 4: Lineares Ausgleichsproblem

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	$1/2$	$1/2$	2	$3/2$	$5/2$

$$f(x) = a + bx$$

a) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$

$A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

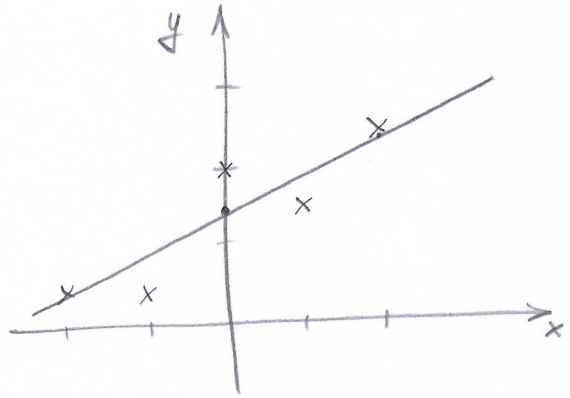
$$A^T \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{7}{5}$, $f(x) = \frac{7}{5} + \frac{1}{2}x$

d)



Aufg. 5: Nullstellenberechnung und numerische Integration

$f(x) = x^3, \quad g(x) = 2x+1$

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$h(x) := f(x) - g(x) = x^3 - 2x - 1.$

Gesucht sind die Lösungen von $x^3 - 2x - 1 = 0.$

b) (i) $x_e = 0$

$x_r = 2$

(ii) $x_m = \frac{1}{2}(x_e + x_r)$

wenn $h(x_m) h(x_e) < 0$

$x_r = x_m$

sonst $x_e = x_m$

(iii) wenn $|x_r - x_e| <$ fehler

Abbruch

sonst (ii)

c) $x_1 = 0, x_2 = 2,$

$$x_3 = x_1 - h(x_1) \frac{x_2 - x_1}{h(x_2) - h(x_1)}$$

$$x_3 = 0 - h(0) \frac{2 - 0}{h(2) - h(0)} = 0 - (-1) \frac{2}{8-4-1+1} = \frac{1}{2}$$

d) $h'(x) = 3x^2 - 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \quad x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 - \frac{h(1)}{h'(1)} = 1 - \frac{1-2-1}{3-2} = 3$$

e) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\quad h = 1$

$h_0 = -1,\ h_1 = -2,\ h_2 = 3,\ h_3 = 27-6-1 = 20,\ h_4 = 64-8-1 = 55$

$$I_S = \frac{4}{3}\cdot 1\cdot(-2+20) + \frac{2}{3}\cdot 1\cdot(3) + \frac{1}{3}\,1\cdot(-1+55)$$

$$= 24 + 2 + \frac{54}{3} = 44$$

f)

```
double h (double x ) {
 return x*x*x - 2*x -1;
 }
double int_simpson(double (*h)(double), double a, d
      double b, int n) {
double s = (b-a)/n;
double f0 = h(a);
double f1 = h(s);
double fend = h(b);
double fung = f1;
double fger = 0;
for (int i =1; i<n/2; i++){
  fund + = h(a +(1+2*i)*s);
 }
for (int j =1; j<n/2; j++) {
  fger + = h(a + 2*i*s));
}
double erg = (4/3)*s* fung +(2/3)*s* fger +(1/3)*s*(f0 + 2
  +fend);
```

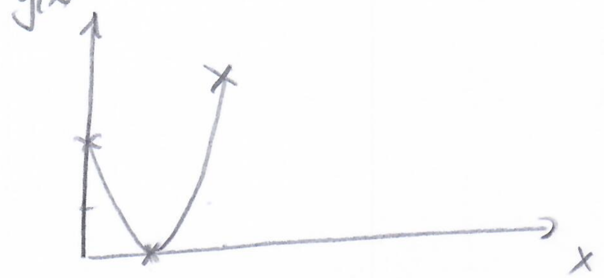
return erg;

}

Aufg. 6: Kubische Splines

(0,2), (1,0) und (2,3)

a)



b)

$g_1(0) = 2 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 2}$

$g_1(1) = 0 \qquad a_{13} + a_{12} + a_{11} + a_{10} = 0$

$g_2(1) = 0 \qquad a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20} = 0$

$g_2(2) = 3 \qquad 8a_{23} + 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 3$

$g_1'(1) = g_2'(1) \qquad 3a_{13} + 2a_{12} + a_{11} = 3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}$

$g_1''(1) = g_2''(1) \qquad 6a_{13} + 2a_{12} = 6a_{23} + 2a_{22}$

$g_1''(0) = 0 \qquad 2\boxed{a_{12} = 0}$

$g_2''(0) = 0 \qquad 2\boxed{a_{22} = 0}$

a_{13}	a_{11}	a_{10}	a_{23}	a_{21}	a_{20}		
1	1	1	0	0	0	0	(-3) (-6)
0	0	0	1	1	1	0	(-8)
0	0	0	8	2	1	3	
3	1	0	-3	-1	0	0	
6	0	0	-6	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	2	

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ (-3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -7 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ (-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

$a_{23} - \frac{17}{6} = -2 \Rightarrow \boxed{a_{23} = \frac{5}{6}}$

$\Rightarrow \boxed{a_{20} = 2}$

$-6a_{21} - 7 \cdot 2 = 3 \Rightarrow \boxed{a_{21} = -\frac{17}{6}}$

$2a_{11} + 3 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{5}{6} - \frac{17}{6} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{11} = -\frac{17}{6}}$

$a_{13} - \frac{17}{6} + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_{13} = \frac{5}{6}}$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{17}{6}x + 2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{17}{6}x + 2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(1) = \frac{5}{6} \cdot 1^3 - \frac{17}{6} \cdot 1 + 2 = 0 \checkmark$$

d)
```
double a[N];
for (int i=0; i<N+1; i++) {
  a[i] = 0.0;
    for (int j=0; j<N+1; j++) {
      a[i]+ = Minv [i][j] * y[j];
    }
}
return a[N];
```

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
5. Juli 2016, SS 2016

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Interpolationspolymon und Splines

Gegeben sind die folgenden Messdaten eines Prozessablaufs:

x_k	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y_k	-1	1	8	27

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Algorithmus das Interpolationspolynom, das die Messdaten verbindet.

b) Betrachten Sie nur die ersten 3 Stützpunkte an den Stellen $x_1 = -1, x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(-1) = 1$ die quadratische Spline-Funktion

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad -1 \le x \le 0 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1/2 \end{cases}$$

Aufgabe 2: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= -t\, y_2(t) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 2$.

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für die Differenzialgleichung an. Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 3: Taylorreihe und numerisches Integrieren

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$. Zerlegen Sie das Intervall [0, 4] in vier Teilintervalle.

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 2$.

b) Berechnen Sie den Näherungswert des Integrals für die Untersumme I_U.

Die Funktion `newton` erwartet die Funktion `f` und deren Ableitung `df` sowie einen Startwert `$x_0$`. Ihr Rückgabewert ist die gefundene Nullstelle mit einer Genauigkeit von `1e-12`. Bemerkung: `y=f(x)` gibt den Funktionswert an der Stelle `x` zurück. Beenden Sie die Funktion mit dem Wert `NaN`, falls keine Konvergenz vorliegt (etwa nach 100 Iterationsschritten).

Aufgabe 6: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die Messpunkte $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 3)$ und $(\frac{1}{4}, 2)$. Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form:

$$f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

zu diesen Punkten. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$.

d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Normalgleichungssystems. Die Rückgabewerte der Ansatzfunktionen `f1` und `f2` sind anzugeben.

```
double f1(double x) {
  ...
  return ...;
}
double f2(double x) {
  ....
}
int main(int argc, char* argv[]){
int N = 3;
double x[N] = {-1/2,1,1/4};
double y[N] = {1,3,2};
  ...
}
```

Viel Erfolg!

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \dots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur zur Mod. & Sim.   SS 2016   ①

Lösungen

Aufg. 1 Interpolationspolynome und Splines

a) $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) +$

$+ a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

k	x_k	y_k
1	-1	-1
2	0	1
3	1/2	8
4	1	27

$= a_0$

$D_{2,1} = \frac{1+1}{0+1} = 2 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{8-1}{1/2 - 0} = 14, \quad D_{3,2,1} = \frac{14-2}{\frac{1}{2}+1} = 8 = a_2$

$D_{4,3} = \frac{27-8}{1-\frac{1}{2}} = 38, \quad D_{4,3,2} = \frac{38-14}{1-0} = 24$

$D_{4,3,2,1} = \frac{24-8}{1+1} = 8 = a_3$

$f(x) = -1 + 2(x+1) + 8(x+1)x + 8(x+1)x(x-\frac{1}{2})$

Probe: $f(-1) = -1$ ✓

$f(0) = -1 + 2 \cdot 1 = 1$ ✓

$f(\frac{1}{2}) = -1 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 8$ ✓

$f(1) = -1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 27$ ✓

b) $g_1(-1) = -1$ $\qquad a_{12} - a_{11} + a_{10} = -1$

$g_1(0) = 1$ $\qquad a_{10} = 1$

$g_2(0) = 1$ $\qquad a_{20} = 1$

$g_2(\frac{1}{2}) = 8$ $\qquad \frac{a_{22}}{4} + \frac{a_{21}}{2} + a_{20} = 8$

②

$$g_1'(0) = g_2'(0) \qquad a_{11} = a_{21}$$

$$g_1'(-1) = 1 \qquad 2a_{12}\cdot(-1) + a_{11} = 1$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{10} = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{11} = (-1-2)\cdot(-1) = 3}$$

$$a_{12} - 3 + 1 = -1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 1}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{21} = 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{20} = 1}$$

$$\frac{1}{4}a_{22} + \frac{1}{2}3 + 1 = 8 \Rightarrow \boxed{a_{22} = \left(8 - \frac{5}{2}\right)\cdot 4 = 22}$$

$$g_1(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$g_2(x) = 22x^2 + 3x + 1$$

Aufg. 2: Gewöhnliche DGL'n

$$y_1'(t) = -y_1(t) - y_2(t)$$
$$y_2'(t) = -t\, y_2(t)$$

$y_1(0) = 1, \quad y_2(0,) = 2$

$h = 1/2$

a) $y_{1,k+1} = y_{1,k} + \frac{1}{2}(-y_{1,k} - y_{2,k}), \quad y_{2,k+1} = y_{2,k} + \frac{1}{2}\cdot(-t_k y_{2,k})$

AB: $y_{1,0} = 1, \quad y_{2,0} = 2, \quad t_k = k\cdot h$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{2}(-y_{1,0} - y_{2,0}) = 1 + \frac{1}{2}(-1-2) = -\frac{1}{2}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{2}\cdot(-t_0 \cdot y_{2,0}) = 2 - 0\cdot 2 = 2$$

b) $h = 1/2$

$$y_{1,k+1} = y_{1,k} + \frac{1}{4}\{-y_{1,k} - y_{2,k} - y_{1,k+1}^{Eul} - y_{2,k+1}^{Eul}\}$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + \frac{1}{4}\{-0\cdot y_{2,k} - \frac{1}{2}\cdot y_{2,k+1}^{Eul}\}$$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{4}\{-y_{1,0} - y_{2,0} - y_{1,1}^{Eul} - y_{2,1}^{Eul}\}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\{-1 - 2 + \frac{1}{2} - 2\} = -\frac{1}{8}$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{4}\{-\frac{1}{2}\cdot y_{2,0} - \frac{1}{2}\cdot y_{2,1}^{Eul}\}$$

$$= 2 + \frac{1}{4}\cdot\{-0\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\} = \frac{7}{4}$$

④

Aufg. 3 Taylorreihe und num. Integrieren

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 \quad , \quad Int = [0,4]$$

$$Int_1 = [0,1], \ Int_2 = [1,2], Int_3 = [2,3], Int_4 = [3,4]$$

a) $f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 3 \quad , \quad f'(2) = -2$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} = f''(2)$$

$$f^{(n)}(x) = 0 = f^{(n)}(2) \quad \text{für } n = 3, 4, \ldots$$

$$T_f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + 0$$

$$= -4 - 2(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2$$

$$= -4 - 2x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = f(x)$$

b) $I_U = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot h \quad , \quad h = 2 - 1 = 1$

$$I_U = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + \frac{1}{4} - 3 + 1 - 4 +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 1 = \frac{10}{4} - 13 = -\frac{21}{2}$$

c) $I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$

$f_i = f(x_i)\ ,\ x_i = i\ ,\ h = 1$

$$I_T = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + 2\left(\frac{1}{4} - 3 + 1\right) - 4\cdot 2 + 2\cdot\left(\frac{9}{4} - 9 + 1\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{16}{4} - 3\cdot 4 + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-14 + \frac{1}{2} - 4 +\right.$$

$$\left. + \frac{9}{2} - 18 + 2\right) = \frac{1}{2}\left(-34 + \frac{10}{2}\right) = -\frac{29}{2}$$

d) $I_S = \frac{4}{3}h\,(f_1 + f_3) + \frac{2}{3}h\cdot f_2 + \frac{1}{3}h\,(f_0 + f_4)$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} - 3 + 1 + \frac{9}{4} - 9 + 1\right) + \frac{2}{3}\cdot(-4) + \frac{1}{3}\left(1 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\cdot 16 - 3\cdot 4 + 1\right) = -10 - \frac{8}{3} - 2 = -\frac{44}{3}$$

Aufg. 4 Raum-Zeit-Probleme

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) + 4u(t,x)$$

für $x \in [0,2]$ und $t \geq 0$

RB $u(t,0) = 2$, $u(t,2) = 4$, AB: $u(0,x) = 1$ für $0 < x < 2$. $\Delta x = 1/2$, $\Delta t = 1/4$

a) $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + 4u_i^n$$

Mit $\Delta t = \frac{1}{4}$ und $\Delta x = \frac{1}{2}$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{4}(4u_{i+1}^n - 8u_i^n + 4u_{i-1}^n - u_{i+1}^n + u_{i-1}^n + 4u_i^n)$$

$$= u_i^n + \frac{1}{4}(3u_{i+1}^n - 4u_i^n + 5u_{i-1}^n)$$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$;

RB: $u_0^n = 2$, $u_4^n = 4$ für $n = 0, 1, \dots$

AB: $u_1^0 = 1$, $u_2^0 = 1$, $u_3^0 = 1$

b) $$u_1^1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0 \\ i=1}}{=} u_1^0 + \frac{1}{4}(3u_2^0 - 4u_1^0 + 5u_0^0)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2) = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$$

$$u_2^1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0 \\ i=2}}{=} u_2^0 + \frac{1}{4}(3u_3^0 - 4u_2^0 + 5u_1^0) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = 2$$

$$u_3^1 \underset{\substack{\uparrow \\ n=0 \\ i=3}}{=} u_3^0 + \frac{1}{4}(3 \cdot u_4^0 - 4u_3^0 + 5u_2^0) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = \frac{17}{4}$$

c) $u_0^1 = 2$, $u_4^1 = 4$.

Aufg. 5 Horner, numerisches Differenzieren und Nullstellen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + x$$

a) $x_0 = 2$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{1}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\
+ & & 1 & 2 & -4 & -6 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & 1 & -2 & -3 & -6 = f(2)
\end{array}$$

b) $Df(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$, $x_0 = 0, h = 1$:

$$Df(0) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^4 - 4\cdot 1^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot(-1)^4 - 4\cdot(-1)^2 - 1\right)}{2} = 1$$

$$D^2 f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$D^2 f(0) = \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{1} = \frac{1}{2} - 4 + 1 + \frac{1}{2} - 4 - 1 = -7$$

c) $x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1})\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = 1 - f(1)\,\frac{2-1}{f(2)-f(1)} = 1 - (-2{,}5)\cdot\frac{1}{-6-(-2{,}5)} =$$

$$= 1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{7}{2}} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

d) $x_0 = 2$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} =$$

$$= 2 + \frac{6}{2 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 + 1} = 2 + 6 = 8$$

e)
```
double newton (double (*f)(double), double
(*df)(double), double x0) {
  double err = 1e-12;
  double x = x0 ;

  double xalt = x0;
  int i=0;
do
  xalt = x ;
  x -= f(x)/df(x);
  if (i++ > 100) return NAN;
  while ( fabs(x - xalt) > err);
  return x ;
}
```

Aufg. 6 Lineares Ausgleichsproblem

$(-\frac{1}{2}; 1), (1,3), (\frac{1}{4}, 2)$

$$f(x) = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

a) $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = 1$, $A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \binom{a}{b}$$

$y = (1, 3, 2)^T$

b) $$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A^T \cdot A\lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{cc|c} 21 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 6 \\ \hline 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 7 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \end{array}$$

$(\cdot 7)$ (beside the row $1\ 1\ 2$)

$\Rightarrow b = \frac{11}{6} \Rightarrow a = 2 - \frac{11}{6} = \frac{1}{6}$

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$$

d)

```
double f1 (double x) {
  return 1.0/x;
  }

double f2 (double x) {
  return 1.0;
  }

int main(int argc, char* argv[]) {
  int N = 3;
  double x[N] = {-0,5, 1, 0,25};
  double y[N] = {1, 2, 3};

  double lambda1 = 0.0;
  double lambda2 = 0.0;
  double a11 = 0.0, a12 = 0.0, a22 = 0.0;
  double y1 = 0.0, y2 = 0.0;
  int i;
  for (i = 1; i < N; i++) {
    a11 + = f1(x[i]) * f1(x[i]);
    a12 + = f1(x[i]) * f2(x[i]);
    a22 + = f2(x[i]) * f2(x[i]);
    y1 += f1(x[i]) * y[i];
    y2 += f2(x[i]) * y[i];
  }
  lambda1 = (a22 * y1 - a12 * y2)/(a11a22-a12*a12);
  lambda2 = (a11 * y1 - a12 * y2)/(a11a22-a12*a12);

}
```

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
02. Februar 2016, WS 2015/16

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die ide Messpunkte $(0,3)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$. Gesucht ist eine Ausgleichsparabel der Form: $f(x) = ax^2+bx+c$ zu diesen Punkten. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

1
a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

3/2
b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

3/2
c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1/2
d) Skizzieren Sie die gegebenen Punkte sowie die Ausgleichsparabel.

Σ 4,5

Aufgabe 2: Numerisches Differenzieren, partielle Differenzialgleichung

1
a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 2$. Berechnen Sie den Näherungswert der ersten Ableitung über die rechtseitige Differenzenformel $D^+f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/4$

3/2
b) Berechnen Sie mit der sog. Fünfpunkte-Mittelpunkt Differenzenformel

$$\hat{D}f(x_0) = \frac{1}{12h}\Big\{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\Big\}$$

den Näherungswert der ersten Ableitung $\hat{D}f(x_0)$ für die Funktion $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/4$.

c) Diskretisieren Sie das folgende Raum-Zeit-Problem nach dem expliziten Differenzenverfahren:

1
$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - x\cdot u(t,x) \quad \text{für} \quad x\in[1,3] \quad \text{und} \quad t\geq 0$$

Rand + Anfang 1/2
mit Randbedingungen $u(t,1) = 3$, $u(t,3) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(0,x) = 2$, $1 < x < 3$. Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1/2$ und $\Delta t = 1/4$ ist. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

3/2
d) Berechnen Sie Werte u_1^1, u_2^1 und u_3^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Σ 5,5

Aufgabe 5: System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2xy_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= (x-2)y_2(x) \end{aligned}$$

1

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 2$.

Aufang 1/2

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

2

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für die Differenzialgleichung an.

1

c) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

1

$\Sigma 5{,}5$

Aufgabe 6: Taylorformel und Spline-Interpolation

1

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 4. Ordnung (Hinweis: $\ln(1) = 0$ und $(\ln(x))' = 1/x$).

1

b) Bringen Sie das Polynom aus a) in die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ und bestimmen Sie den Wert von $f(2)$ mit dem Hornerschema.

1

c) Entwickeln Sie die Funktion $g(x) = \frac{1}{1+x}$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x = 0$ und zeigen Sie durch gliedweises Ableiten der Taylorreihe von $\ln(1+x)$ aus a), dass gilt $\Big(\ln(1+x)\Big)' = \frac{1}{1+x}$.

d) Gegeben sind die Stützpunkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ und $(3,-2)$. Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(0) = 1$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion der Form

Bedingg. 3/2

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \le x \le 2 \\ g_3(x) = a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} & \text{für} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Lösungen 3/2

$\Sigma 6{,}0$

Viel Erfolg!

Klausur Mod. & Sim. WS 15/16 ①

Lösungen

Aufg. 1: Lineares Ausgleichsproblem

$(0,3)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 1$; $A\lambda = y$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

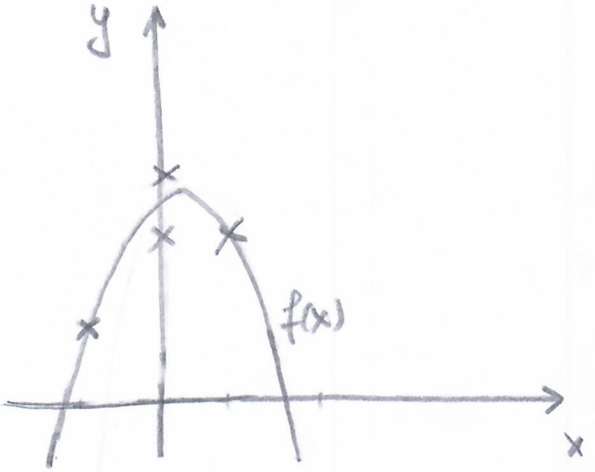
$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$

$2a + 5 = 3 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

d)



Aufg. 2 Numerisches Differenzieren, partielle DGL

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

$$D^+ f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

mit $x_0 = 1$ und $h = 1/4$:

$$D^+ f(1) = 4 \cdot \left(\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{5}{4} - 2 \right) - (1^2 + 4 \cdot 1 - 2) \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{25}{16} + 3 - 3 \right) = \frac{25}{4}$$

b) $f(x) = 4x^2 - 8x + 2, \quad x_0 = 1, \quad h = 1/4$

$$\hat{D} f(x_0) = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{4}} \left(f\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 8 f\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 8 f\left(1 + \frac{1}{4}\right) - f\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{3} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - 8 f\left(\frac{3}{4}\right) + 8 f\left(\frac{5}{4}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 2 - 8 \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{3}{4} + 2 \right) + \right.$$

$$\left. + 8 \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{5}{4} + 2 \right) - \left(4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{3}{2} + 2 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - 4 + 2 - 8\left(\frac{9}{4} - 6 + 2 \right) + 8 \left(\frac{25}{4} - 10 + 2 \right) - (9 - 12 + 2) \right) = 0$$

c) $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - x \cdot u(t,x)$ für $x \in [1,3]$,

$t \geq 0$, RB: $u(t,1) = 3$, $u(t,3) = 0$, AB: $u(0,x) = 2$

für $1 < x < 3$. $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = \frac{1}{4}$

$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{5}{2},\ x_4 = 3$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x} - x_i \cdot u_i^n$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - x_i u_i^n \right)$$

$$= u_i^n + \frac{1}{4} \left(4u_{i+1}^n - 8u_i^n + 4u_{i-1}^n - x_i u_i^n \right)$$

RB: $u_0^n = 3$, $u_4^n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$; AB: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 2$.

d) $$u_1^1 \underset{\substack{n=0 \\ i=1}}{\overset{\uparrow}{=}} u_1^0 + \frac{1}{4}(4 \cdot u_2^0 - 8u_1^0 + 4u_0^0 - x_1 u_1^0)$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 2 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 2) = \frac{9}{4}$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0 \\ i=2}}{\overset{\uparrow}{=}} u_2^0 + \frac{1}{4}(4u_3^0 - 8u_2^0 + 4u_1^0 - x_2 u_2^0) =$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(4 \cdot 2 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 1$$

$$u_3^1 \underset{\substack{n=0 \\ i=3}}{\overset{\uparrow}{=}} u_3^0 + \frac{1}{4}(4 \cdot u_4^0 - 8 \cdot u_3^0 + 4 \cdot u_2^0 - x_3 u_3^0)$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 0 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - \frac{5}{2} \cdot 2) = -\frac{5}{4}$$

Aufg. 3: Numerisches Integrieren

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx \quad \text{mit} \quad f(x) = 2x^2 - x$$

$[-1,3]$: $I_1 = [-1,0]$, $I_2 = [0,1]$, $I_3 = [1,2]$, $I_4 = [2,3]$

a) $x_0 = -0{,}5$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 2{,}5$, $h = 1$

$$I_M = \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \cdot h$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} + \frac{25}{2} - \frac{5}{2} = 1 + 3 + 10 = 14$$

b) $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$

$f_0 = 2\cdot(-1)^2 + 1 = 3$, $f_1 = 0$, $f_2 = 2\cdot 1^2 - 1 = 1$, $f_3 = 2\cdot 2^2 - 2 = 6$,

$f_4 = 2\cdot 3^2 - 3 = 15$

$$I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) = \frac{1}{2}(3 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 +$$

$$+ 2\cdot 6 + 15) = \frac{1}{2}\cdot 32 = 16$$

c) $$I_S = \frac{4}{3}h(f_1 + f_3) + \frac{2}{3}h \cdot f_2 + \frac{1}{3}h(f_0 + f_4)$$

$$= \frac{4}{3}(0 + 6) + \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}(3 + 15) = 8 + \frac{2}{3} + 6 = 14\tfrac{2}{3} = \frac{44}{3}$$

d) $$I_S = \frac{1}{3}(2\cdot 14 + 16) = \frac{44}{3} = \frac{1}{3}(2I_M + I_T) \checkmark$$

e)
```
double f(double x){return 2*x*x -x;}

double int-mittel(double (*f)(double), double a,
    double b, int n) {

 double h = (b-a)/n;

 double IM = h*f(a+0.5*h);

 for ( int i=1; i<n; i++) {
  IM += h*f(a+0.5*h*i);
  }

 return IM;

 }
```

Aufg. 4: Nullstellenberechnung

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + 1$

b) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot 1^3 - 1 + 1} = \frac{1}{4}$

c) $x_0 = 1, \quad x_a = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_a)}{f(x_0) - f(x_a)} = 1 - \frac{f(1)\cdot(1-2)}{f(1) - f(2)} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 - \frac{1}{4}}{f(1) - \frac{1}{8}\cdot 2^4 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} - \frac{7}{4}} = \frac{8}{11}.$$

d) double sekanten (double (*f)(double), double a, double b) {

```
err = 1e-12;
int i = 0;
double xalt;
do {
xalt = b;
b -= f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a));
a = xalt;
} while (fabs(a-b) > err && i < 100);
if (i > 99) return NaN; else return b;
}
```

Aufg. 5 System gewöhnlicher DGL

$$y_1'(x) = 2x y_1(x) + y_2(x)$$
$$y_2'(x) = (x-2) y_2(x)$$

AB: $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2$

a) $y_{1,k+1} = y_{1,k} + h(2x_k y_{1,k} + y_{2,k})$

$y_{2,k+1} = y_{2,k} + h(x_k - 2) y_{2,k}$

AB: $y_{1,0} = 1, \quad y_{2,0} = 2, \quad h = 1/2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$

$y_{1,1} = y_{1,0} + h(2x_0 y_{1,0} + y_{2,0})$

$= 1 + \frac{1}{2}(2 \cdot 0 \cdot 1 + 2) = 2 = y_{1,1}^{Eul}$

$y_{2,1} = y_{2,0} + h(x_0 - 2) y_{2,0} = 2 + \frac{1}{2}(0-2) \cdot 2 = 0 = y_{2,1}^{Eul}$

⑦

$$y_{1,2} = y_{1,1} + h(2x_1 y_{1,1} + y_{2,1})$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 0) = 3 = y_{1,2}^{Eul}$$

$$y_{2,2} = y_{2,1} + h(x_1 - 2) \cdot y_{2,1}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 2) \cdot 0 = 0 = y_{2,2}^{Eul}$$

b) $$y_{1,k+1} = y_{1,k} + \frac{h}{2}(2x_k y_{1,k} + y_{2,k} + 2x_{k+1} y_{1,k+1}^{Eul} + y_{2,k+1}^{Eul})$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + \frac{h}{2}((x_k - 2) y_{2,k} + (x_{k+1} - 2) y_{2,k+1}^{Eul})$$

c) $h = 1/2$

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{4}(2 \cdot x_0 y_{1,0} + y_{2,0} + 2x_1 y_{1,1}^{Eul} + y_{2,1}^{Eul})$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 0) = 2$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{h}{2}((x_0 - 2) y_{2,0} + (x_1 - 2) y_{2,1}^{Eul})$$

$$= 2 + \frac{1}{4}((0-2) \cdot 2 + (\frac{1}{2} - 2) \cdot 0) = 1$$

Aufg. 6 Taylorformel und Spline-Interpolation

a) $f(x) = \ln(1+x)\,, \quad x_0 = 0$

$$f(x_0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{1+x_0} = 1$$

$$f''(x_0) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1$$

$$f'''(x_0) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2$$

$$f^{IV}(x_0) = -\frac{6}{(1+x)^4} = -6$$

$$T_f(x) = 0 + 1\cdot(x-x_0) - \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{1}{3!}(x-x_0)^3$$

$$- \frac{6}{4!}(x-x_0)^4$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

$$\begin{array}{cccccc}
 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
+ & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\
\hline
 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} = f(2)
\end{array}$$

c) $g(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad g(0) = 1$

$g'(x) = f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad g'(0) = -1$

$g''(x) = f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad g''(0) = 2$

$g'''(x) = f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ $\qquad g'''(0) = -6$

$g^{IV} = 24 \frac{1}{(1+x)^5}$ $\qquad g^{IV}(0) = 24$

$T_g(x) = 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3 + \dots$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = (T_f(x))'$

d) $(0,0), (1,1), (2,0), (3,-2)$

$g_1(0) = 0$ $\qquad \boxed{a_{10} = 0}$

$g_1(1) = 1$ $\qquad a_{12} + a_{11} + a_{10} = 1$ $\qquad \boxed{a_{12} = 0}$

$g_2(1) = 1$ $\qquad a_{22} + a_{21} + a_{20} = 1$

$g_2(2) = 0$ $\qquad 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 0$

$g_3(2) = 0$ $\qquad 4a_{32} + 2a_{31} + a_{30} = 0$

$g_3(3) = -2$ $\qquad 9a_{32} + 3a_{31} + a_{30} = -2$

$g_1'(1) = g_2'(1)$ $\qquad 2a_{12} + a_{11} = 2a_{22} + a_{21}$

$g_2'(2) = g_3'(2)$ $\qquad 4a_{22} + a_{21} = 4a_{32} + a_{31}$

$g_1'(0) = 1$ $\qquad \boxed{a_{11} = 1}$ $\qquad \rightarrow g_1(x) = x$

$$\begin{array}{ccc|c}
a_{22} & a_{21} & a_{20} & \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & +2 & +3 & +4 \\
0 & +1 & +2 & +1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ (-4)\ (-2) \\ \\ \\ \\ \\ \\ (-2) \\ \\ \\ \\ \Rightarrow \boxed{a_{20} = -2}
\end{array}$$

$2a_{21} - 6 = 4 \Rightarrow \boxed{a_{21} = 5}$

$a_{22} + 5 - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -2}$

$g_2(x) = -2x^2 + 5x - 2$

$$\begin{array}{ccc|c}
a_{32} & a_{31} & a_{30} & \\
9 & 3 & 1 & -2 \\
4 & 2 & 1 & 0 \\
4 & 1 & 0 & -3 \\
\hline
9 & 3 & 1 & -2 \\
0 & +6 & +5 & +8 \\
0 & +1 & +1 & +3
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ (4) \\ (-9) \\ \\ \\ \\ (-6)
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{a_{30} = 10}$$

$$6a_{31} + 50 = 8 \Rightarrow \boxed{a_{31} = -7}$$

$$9a_{32} - 21 + 10 = -2$$

$$\boxed{a_{32} = 1} \Rightarrow g_3(x) = x^2 - 7x + 10$$

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
07. Juli 2015, SS 2015

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Nullstellenberechnung und Taylorformel
Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x^3 = 3$.

a) Formulieren Sie zunächst ein Nullstellenproblem der Form $f(x) = 0$. Verwenden Sie dann das Sekantenverfahren mit Startwerten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und berechnen Sie den Wert des ersten Iterationsschrittes.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für den Startwert $x_1 = 1$ den Wert des ersten Iterationsschrittes.

c) Vergleichen Sie beide Ergebnisse aus a) und b) mit dem exakten Wert $\sqrt[3]{3} = 1.44$.

d) Geben Sie die Taylorreihe von $g(x) = e^{\alpha x}$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 4. Ordnung an.

e) Leiten Sie die Taylorreihe von $e^{\alpha x}$ aus d) gliedweise ab und zeigen Sie dadurch, dass für die Ableitung gilt $\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x}$.

Aufgabe 2: Polynom- und Spline-Interpolation

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ für die Datenpunkte $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, 2)$ und $(2, 23)$ mit der Methode der Dividierten Differenzen.

b) Bringen Sie das Polynom aus a) in die Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und bestimmen Sie den Wert von $p(2)$ mit dem Hornerschema.

c) Gegeben sind die Stützpunkte $(-1, -1)$, $(0, -1)$, und $(1, 2)$. Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(-1) = 0$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion der Form

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad -1 \le x \le 0 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: Numerisches Integrieren

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

a) Berechnen Sie den Wert der Untersumme für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$. Zerlegen Sie hierfür das Intervall $[0,\ 1]$ in zwei Teilintervalle.

b) Bestimmen Sie nun den Wert des Integrals über die Trapezformel und

c) über die Simpsonformel.

d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Trapez-Verfahrens für `n` Stützstellen zwischen $[a, b]$ für die Funktion `f`:

```
double int_trapez(double (*f)(double), double a, double b, int n) {
  ...
}
```

Aufgabe 4: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{x}{(y(x) \cdot (1+x^2))}, y \neq 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für die Differenzialgleichung an.

c) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

d) Schreiben Sie eine numerische Lösung mit dem Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung, indem Sie die Funktion

```
double solveRK2(double (*F)(double, double), double y0, double dx, int n) {
  ...
  printf("%lf %lf\n", x, y);
  ...
}
```

erweitern. Dabei ist `F`$(x, y) = y'(x)$. `y0` der Startwert $y(0)$. `dx` die Schrittweite und `n` die Anzahl der Schritte.

Aufgabe 5: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1
y_i	1/2	7/2	7/2

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Aufgabe 6: Numerisches Differenzieren und partielle Differenzialgleichung

a) Zeigen Sie, dass die Differenzenformel

$$D^{neu}f(x_0) = \frac{1}{2h}\big(- 3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\big)$$

bei äquidistanter Zerlegung Polynome vom Grad 2 der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ exakt differenziert.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x - \frac{4}{x}$ den Wert der ersten Ableitung mit der zentralen Differenzenformel $Df(x_0)$ und mit der neuen Differenzenformel $D^{neu}f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

c) Diskretisieren Sie das folgende Raum-Zeit-Problem nach dem expliziten Differenzenverfahren: $u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + x^2$ mit $2 \leq x \leq 5$ und $t \geq 0$, Randbedingungen $u(t, 2) = 0$, $u(t, 5) = 7$ und der Anfangsbedingung $u(0, x) = 1$ für $2 < x < 5$. Das numerische Gitter ist $\Delta x = 1$. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

d) Berechnen Sie für die größt mögliche Zeitschrittweite die beiden Werte u_1^1 und u_2^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Lösungen

Aufg. 1 Nullstellenberechnung und Taylorformel

$x^3 = 3$

a) $f(x) = x^3 - 3 \overset{!}{=} 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = 2$

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_3 = x_1 - f(x_1) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$x_3 = 1 - (1^3 - 3) \frac{2 - 1}{2^3 - 3 - (1^3 - 3)} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{9}{7}$$

b) $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad f'(x) = 3x^2$$

$$x_2 = 1 - \frac{1^3 - 3}{3 \cdot 1^2} = \frac{5}{3}$$

c) $err_{Sek} \approx \left| \frac{9}{7} - 1{,}44 \right| \approx 0{,}15$

$err_{New} \approx \left| \frac{5}{3} - 1{,}44 \right| \approx 0{,}23$

d) $g(x) = e^{\alpha x}$, $x_0 = 0$

$g(0) = 1$, $g'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $g''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$,

$g'''(x) = \alpha^3 e^{\alpha x}$, $g^{iv}(x) = \alpha^4 e^{\alpha x}$

$g'(0) = \alpha$, $g''(0) = \alpha^2$, $g'''(0) = \alpha^3$, $g^{iv}(0) = \alpha^4$

$$T_g(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!}x^2 + \frac{\alpha^3}{3!}x^3 + \frac{\alpha^4}{4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3}{6}x^3 + \frac{\alpha^4}{24}x^4 + \ldots$$

e) $$T_g'(x) = \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^3}{2}x^2 + \frac{\alpha^3}{6}x^3 + \ldots$$

$$= \alpha\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!}x^2 + \frac{\alpha^2}{3!}x^3 + \ldots\right)$$

$$= \alpha\, T_g(x)$$

Aufg. 2: Polynom und Spline-Interpolation

a) $p(x) = a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)\cdot(x-x_2)(x-x_3)$

k	x	y
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	2
3	2	23

$= a_0$

$D_{2,1} = \frac{-1+1}{0+1} = 0 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{2+1}{1-0} = 3$, $D_{3,2,1} = \frac{3-0}{1+1} = \frac{3}{2} = a_2$

$D_{4,3} = \frac{23-2}{2-1} = 21$, $D_{4,3,2} = \frac{21-3}{2-0} = 9$

$D_{4,3,2,1} = \frac{9-\frac{3}{2}}{\;} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = a_3$

③

$$p(x) = -1 + \frac{3}{2}(x+1)x + \frac{5}{2}(x+1)x(x-1)$$

Probe: $p(-1) = -1$ ✓

$$p(0) = -1 + \frac{3}{2}(0+1)\cdot 0 + 0 = -1 \checkmark$$

$$p(1) = -1 + \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 0 = 2 \checkmark$$

$$p(2) = -1 + \frac{3}{2}(2+1)\cdot 2 + \frac{5}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 23 \checkmark$$

b) $$p(x) = \frac{5}{2}(x^2-1)x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

$$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

$$= \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1$$

	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	-1
$+$		5	13	24
	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}$	12	$23 = f(2)$

c) $(-1,-1), (0,-1), (1,2)$

$g_1(-1) = -1$ $\qquad a_{12} - a_{11} + a_{10} = -1$

$g_1(0) = -1$ $\qquad \boxed{a_{10} = -1}$

$g_2(0) = -1$ $\qquad \boxed{a_{20} = -1}$

$g_2(1) = 2$ $\qquad a_{22} + a_{21} + a_{20} = 2$

$g_1'(0) = g_2'(0)$ $\qquad a_{11} = a_{21}$

$g_1'(-1) = 0$ $\qquad -2a_{12} + a_{11} = 0$

$$
\begin{array}{ccc|c}
a_{12} & a_{11} & a_{10} & \\
1 & -1 & 1 & -1 \\
-2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & -2 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
\quad (\cdot 2)
$$

$a_{12} - 1 = -1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 0}$

$-2a_{11} - 2 = -2 \Rightarrow \boxed{a_{11} = 0}$

$\Rightarrow \boxed{a_{21} = 0}$

$a_{22} + 0 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 3}$

$g_1(x) = -1$

$g_2(x) = 3x^2 - 1$

Aufg. 3 Numerisches Integrieren

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$

$[0,1]$: $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$

$f_0 = f(x_0) = \frac{4}{1+0^2} = 4$, $f_1 = f(x_1) = \frac{4}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{16}{5}$

$I_U = f_0 \cdot h + f_1 \cdot h$, $h = \frac{1}{2}$

$I_U = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{16}{5}\right) = \frac{18}{5}$

b) $x_2 = 1$, $f_2 = f(x_3) = \frac{4}{1+1^2} = 2$

$I_T = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = \frac{1}{4}\left(4 + 2 \cdot \frac{16}{5} + 2\right) = 1 + \frac{8}{5} +$

$+ \frac{1}{2} = \frac{31}{10}$

c) $I_S = \frac{4}{3} h f_1 + \frac{1}{3} h (f_0 + f_2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} +$

$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(4 + 2) = \frac{32}{15} + 1 = \frac{47}{15}$

d)
```
double int_trapez(double (*f)(double), double a,
double b, int n){

double h = (b-a)/n;
double sum = 0,5*h*(f(a)+f(b));
for (i=1; i<n-1; i++){
  sum+ = h*f(a+ih);
  }
return sum;
}
```

Aufg. 4: Anfangswertprobleme

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)\cdot(1+x^2)}, \quad y \neq 0$$

AB: $y(0) = 1$

a) $$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{x_k}{y_k(1+x_k^2)}$$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 1/2$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{0}{1\cdot(1+0^2)} = 1$$

$$y_2 = y_1 + h \frac{x_1}{y_1(1+x_1^2)}, \quad x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{1\cdot(1+(\frac{1}{2})^2)} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

⑦

b) $$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{ f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{Eul}) \right\}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left\{ \frac{x_k}{y_k(1+x_k)^2} + \frac{x_{k+1}}{\left(y_k + h\frac{x_k}{y_k(1+x_k)^2}\right)(1+x_{k+1}^2)} \right\}$$

c) $h = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$, $y_1^{Eul} = 1$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{4}\left\{ \frac{x_0}{y_0(1+x_0)^2} + \frac{x_1}{y_1^{Eul}(1+x_1^2)} \right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left\{ 0 + \frac{\frac{1}{2}}{1\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} \right\} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

d)
```
double solveRk2(double (*F)(double, double), 2
  double y0, double dx, int n){
  double y = y0;
  double x = 0.0;
  for (int cnt = 0; cnt < n; cnt++){
   M1 = F(x, y);
   M2 = F(x + dx, y + dx*M1);
   y+ = 0.5*dx*(M1+M2);
   printf("%lf %lf\n", x, y);
   x+ = dx
  }
```

Aufg. 5 Lineares Ausgleichsproblem

x_i	-1	0	1
y_i	$1/2$	$7/2$	$7/2$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = 1$

$A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$A^T \cdot A \cdot \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & \frac{15}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{b = 3/2}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{array} \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{2}}$$

$$2a + 7 = 4 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

Aufg. 6 Numerisches Differenzieren und partielle DGL

a) $D^{neu} f(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h))$

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (f'(x) = 2ax + b)$

$D^{neu} f(x_0) = \frac{1}{2h}(-3\cdot(ax_0^2 + bx_0 + c) + 4\cdot(a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c) - (a(x_0+2h)^2 + b(x_0+2h) + c))$

$= \frac{1}{2h}(-3ax_0^2 - 3bx_0 - 3c + 4ax_0^2 + 8ax_0h + 4ah^2 + 4bx_0 + 4bh + 4c - ax_0^2 - 4ax_0h - 4ah^2 - bx_0 - 2bh - c)$

$= \frac{1}{2h}(4ax_0h + 2bh) = 2ax_0 + b = f'(x)$

b) $f(x) = x - \frac{4}{x}, \quad x_0 = 1, \quad h = \frac{1}{2}$

$Df(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f(\frac{3}{2}) - f(\frac{1}{2})}{2\cdot\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{2} - \frac{4}{3/2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{1/2}\right) = \frac{19}{3}$

$$D^{neu} f(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \left(-3 f(1) + 4 f(\tfrac{3}{2}) - f(2)\right)$$

$$= -3 \cdot \left(1 - \frac{4}{1}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3/2}\right) - \left(2 - \frac{4}{2}\right) = \frac{13}{3}$$

c) $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + x^2, \quad 2 \le x \le 5, \quad t \ge 0$

RB: $u(t,2) = 0, \quad u(t,5) = 7,$ AB: $u(0,x) = 1$ für $2 < x < 5$

$\Delta x = 1$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + x_i^2 \right)$$

$$= u_i^n + \Delta t \cdot \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + x_i^2\right)$$

$x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$

RB: $u_0^n = 0, \quad u_3^n = 7$ für $n = 0, 1 \ldots$

AB: $u_1^0 = 1, \quad u_2^0 = 1$

d) $\Delta t \le \frac{1}{2} \Delta x^2 \Rightarrow \Delta t$ max $\frac{1}{2}$

$$u_1^1 \underset{\substack{n=0\\ i=1}}{\overset{}{=}} u_1^0 + \frac{1}{2} \cdot \left(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0 + (x_1)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot 1 + 0 + 3^2\right) = 5$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0\\ i=2}}{=} u_2^0 + \frac{1}{2} \cdot \left(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0 + (x_2)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(7 - 2 \cdot 1 + 1 + 4^2\right) = 12$$

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
03. Februar 2015, WS 14/15

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

4P.

Aufgabe 1: Nullstellenberechnung

Gegeben sind die beiden Funktionen $g(x) = x^3$ und $h(x) = -3x + 10$.

a) Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein geeignetes Nullstellenproblem.

b) Verwenden Sie das Sekantenverfahren (Regula falsi) und berechnen Sie den ersten Iterationschritt zu den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$.

c) Verwenden Sie das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 2$ und berechnen Sie den ersten Newton-Iterationsschritt.

P: d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Newtonverfahren zur Nullstellensuche:

```
double newton(double (*f)(double), double ↩
    (*df)(double), double x0) {
  ...
}
```

Die Funktion `newton` erwartet die Funktion `f` und deren Ableitung `df` sowie einen Startwert `x`. Ihr Rückgabewert ist die gefundene Nullstelle mit einer Genauigkeit von `1e-12`. Bemerkung: `y=f(x)` gibt den Funktionswert an der Stelle `x` zurück. Beenden Sie die Funktion mit dem Wert `NaN`, falls keine Konvergenz vorliegt (etwa nach 100 Iterationsschritten).

4P.

Aufgabe 2: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die Messdaten $(0,1), (1,3), (2,4), (3,4)$. Berechnen Sie zu den Messdaten eine Ausgleichsgerade $f(x) = a + bx$ mit den Ansatzfunktionen $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = x$, so dass die $\sum_{i=1}^{3}(y_i - f(x_i)))^2$ minimal wird. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $A\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $A^T A\boldsymbol{\lambda} = A^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = a + bx$.

5P.

Aufgabe 5: Numerisches Differenzieren

a) Zeigen Sie, dass die numerische Differenzenformel für die Berechnung der ersten Ableitung

$$D^{neu}f(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\Big)$$

Polynome vom Grad 2 exakt differenziert.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{3}{x-1}$ den Näherungswert der ersten Ableitung über die Differenzenformel $D^{neu}f(x)$ (aus Teil a)) an der Stelle $x_0 = 2$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

c) Bestimmen Sie für die Funktion in b) den Näherungswert der ersten Ableitung der rechtsseitigen Ableitung $D^+f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

d) Berechnen Sie für die Funktion in b) den exakten Wert der Ableitung $f'(2)$ und geben Sie die Fehler e^{neu} und e^+ der Ergebnisse mit den Differenzenformeln D^{neu} und D^+ an.

5P

Aufgabe 6: Anfangswertproblem

Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2x(y(x))^2 \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ x \geq 0.$$

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.

b) Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

c) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.

d) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

e) Zeigen Sie, dass $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ die Lösung des Anfangswertproblems ist und bestimmen Sie die Fehler des Eulerverfahrens e^{Eu} und des Runge-Kutta Verfahrens e^{RK} eweils nach dem ersten Iterationsschritt.

Viel Erfolg!

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - \sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:
  Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.

Klausur Mod. & Sim. WS 14/15

Lösungen

Aufg. 1 Nullstellenberechnung

$$g(x) = x^3, \quad h(x) = -3x + 10$$

a) $g(x) - h(x) = x^3 + 3x - 10 \stackrel{!}{=} 0$

b) $$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad f(x) = x^3 + 3x - 10$

$$x_2 = 1 - f(1) \cdot \frac{2 - 1}{f(2) - f(1)} = 1 - (1^3 + 3 \cdot 1 - 10) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2^3 + 3 \cdot 2 - 10 - (1^3 + 3 \cdot 1 - 10)} = 1 - (-6) \cdot \frac{1}{4 - (-6)} =$$

$$= 1 + \frac{6}{10} = 1{,}6 = \frac{8}{5}$$

c) $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

$x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$f(2) = 4, \quad f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(2) = 15$

$$x_1 = 2 - \frac{4}{15} = \frac{26}{15}$$

d)
```
double newton(double (*f)(double), double
    (*df)(double), double x0){
    double err = 1e-12;
    double x = x0;
    double xalt;
```

```
do {
  xalt = x
  x- = f(x)/df(x);
  i++;
  }
  while(i<100 & (x-xalt)>err);
  if (i>99) {return NaN;} else
    {return x;}
  }
```

Aufg. 2: Lineares Ausgleichsproblem

$(0,1), (1,3), (2,4), (3,4)$, $f(x) = a + bx$

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$

a) $A\lambda = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$A^T A \lambda = A^T y$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$$

c)

4	6	12
6	14	23
2	3	6
6	14	23
2	3	6
0	5	5

(-3)

$2a + 3 = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow b = 1$

$f(x) = \frac{3}{2} + x$

Aufg. 3 Polynominterpolation und Spline-Funktion

$(0,2), (1,5), (2,15)$

a) $f(x) = a_0 + a_1(x-0) + a_2(x-0)(x-1)$

k	x	y
1	0	2
2	1	5
3	2	15

$= a_0$

$D_{2,1} = \frac{5-2}{1-0} = 3 = a_1$

$D_{3,2} = \frac{15-5}{2-1} = 10, \quad D_{3,2,1} = \frac{10-3}{2-0} = \frac{7}{2}$

$f(x) = 2 + 3x + \frac{7}{2}x(x-1)$

Probe: $f(0) = 2$ ✓, $f(1) = 5$ ✓

$f(2) = 2 + 3 \cdot 2 + \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 15$ ✓

b) $g_1(0) = 2$ $\quad \boxed{a_{10} = 2}$

$g_1(1) = 5 \quad a_{12} + a_{11} + a_{10} = 5$

$g_2(1) = 5 \quad a_{22} + a_{21} + a_{20} = 5$

$g_2(2) = 15 \quad 4a_{22} + 2a_{21} + a_{20} = 15$

(4)

$g_1'(1) = g_2'(1)$ $\quad 2a_{12} + a_{11} = 2a_{22} + a_{21}$

$g_1'(0) = 2$ $\quad \boxed{a_{11} = 2}$

$a_{12} + 2 + 2 = 5 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 1}$

$2a_{22} + a_{21} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

a_{22}	a_{21}	a_{20}		
1	1	1	5	(−4), (−2)
4	2	1	15	
2	1	0	4	
1	1	1	5	
0	−2	−3	−5	
0	−1	−2	−6	(−2)
1	1	1	5	
0	2	3	5	
0	0	1	7	$\Rightarrow \boxed{a_{20} = 7}$

$2a_{21} + 3 \cdot 7 = 5 \Rightarrow \boxed{a_{21} = -8}$

$a_{22} - 8 + 7 = 5 \Rightarrow \boxed{a_{22} = 6}$

$g_1(x) = x^2 + 2x + 2, \quad 0 \le x \le 1$

$g_2(x) = 6x^2 - 8x + 7, \quad 1 \le x \le 2$

(5)

c)
```
double a[N];
for (int i = 1; i < N; i++) {
  a[i] = 0.0;
   for (int j = 1; j < N, j++) {
     a[i] + = M[i][j] * y[j];
      leturn a[i];

   }
}
```

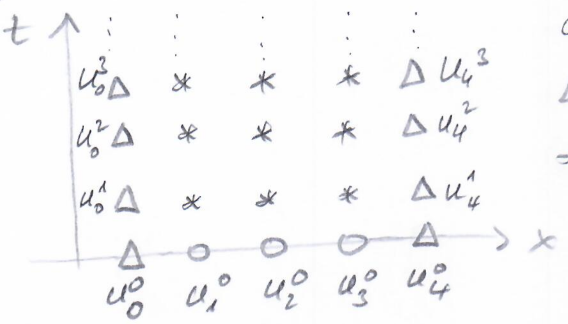
Aufg. 4 Partielle DGL

$$u_t = u_{xx} - 2u_x - x^2, \quad 2 \le x \le 6, \ t \ge 0$$

RB $u(t,2) = 5$, $u(t,6) = 3$, AB : $u(0,x) = 1$.

$\Delta x = 1$, $\Delta t = 1/2$ $\qquad x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6$

a)



o AB

Δ RB

* Gesuchte Werte

b) $$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - 2\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - x_i^2$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - 2\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - x_i^2\right)$$

RB : $u_0^n = 5$, $u_4^n = 3$ für $n = 0, 1, \dots$

AB : $u_1^0 = 1$, $u_2^0 = 1$, $u_3^0 = 1$.

c) $$u_1^1 \underset{\substack{n=0\\ i=1}}{=} u_1^0 + \Delta t\left(\frac{u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0}{\Delta x^2} - 2\,\frac{u_2^0 - u_1^0}{\Delta x} - x_1^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(1 - 2\cdot 1 + 5 - 2\cdot(1-1) - 3^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-5) = -\frac{3}{2}$$

$$u_2^1 \underset{\substack{n=0\\ i=2}}{=} u_2 + \Delta t\left(\frac{u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0}{\Delta x^2} - 2\,\frac{u_3^0 - u_2^0}{\Delta x} - x_2^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - 2\cdot 1 + 1 - 2\cdot(1-1) - 4^2\right) = 1 - \frac{16}{2} = -\cancel{5}7$$

$$u_3^1 = u_3^0 + \Delta t \left(\frac{u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0}{\Delta x^2} - 2 \cdot \frac{u_4^0 - u_3^0}{\Delta x} - x_3^2 \right)$$

$n=0$
$i=3$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(3 - 2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot \frac{3-1}{1} - 5^2\right) = -\frac{25}{2}$$

Aufg. 5 Numerisches Differenzieren

$$D^{neu} f(x_0) = \frac{1}{2h} \left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right)$$

$$p(x) := ax^2 + bx + c$$

$$D^{neu} p(x_0) = \frac{1}{2h} \left(-3 \cdot (ax_0^2 + bx_0 + c) + 4 \cdot (a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c) - (a(x_0+2h)^2 + b(x_0+2h) + c)\right)$$

$$= \frac{1}{2h} \left(-3ax_0^2 - 3bx_0 - 3c + 4ax_0^2 + 8ax_0h + 4ah^2 + 4bx_0 + 4bh + 4c - ax_0^2 - 4ax_0h - 4ah^2 - bx_0 - 2bh - c\right) = \frac{1}{2h}(4ax_0h + 2bh) = 2ax_0 + b = p'(x_0)$$

b) $f(x) = \frac{3}{x-1}$, $x_0 = 2$, $h = \frac{1}{2}$

$$D^{neu} f(2) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \left(-3 \cdot \frac{3}{2-1} + 4 \cdot \frac{3}{2+\frac{1}{2}-1} - \frac{3}{2+2\cdot\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$= -9 + \frac{12}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

c) $D^+ f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, $x_0 = 2$, $h = \frac{1}{2}$

(8)

$$D^+ f(2) = \frac{\frac{3}{2+\frac{1}{2}-1} - \frac{3}{2-1}}{\frac{1}{2}} = -2$$

d) $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$, $f'(2) = -\frac{3}{(2-1)^2} = -3$

$e^{neu} = |D^{neu} f(2) - f'(2)| = |-\frac{5}{2} - (-3)| = \frac{1}{2}$

$e^+ = |D^+ f(2) - f'(2)| = |-2-(-3)| = 1$

Aufg. 6 $\quad y'(x) = 2x(y(x))^2$, $y(0) = 1$, $x \geq 0$.

a) $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 2x_k \cdot y_k^2$

$y_{k+1} = y_k + h \cdot 2x_k \cdot y_k^2$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$

$x_k = 0 + k \cdot h = k \cdot h$

b) $h = 1/2$, $x_k = k \cdot h = k \cdot \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{2}$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot y_0^2 = 1 =: y_1^{Eul}$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_1 \cdot y_1^2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{3}{2} = y_2^{Eul}$

c) $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{Eul}))$

$= y_k + \frac{h}{2}(2x_k y_k^2 + 2x_{k+1}(y_{k+1}^{Eul})^2)$

$= y_k + \frac{h}{2}(2x_k y_k^2 + 2x_{k+1} \cdot (y_k + h \cdot 2x_k \cdot y_k^2)^2)$

$y_0 = 1$, $x_0 = 0$, $x_k = 0 + k \cdot h$.

d) $h = 1/2,\ y_0 = 1,\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2}$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(2x_0 y_0^2 + 2x_1 (y_1^{Eul})^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \left(2 \cdot 0 \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) = \frac{5}{4}$$

e) $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $y'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -2x\,(y(x))^2$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ ist <u>keine</u> Lösung von $y'(x) = 2x(y(x))^2$!

Die DGL sollte heißen:

$y'(x) = -2x(y(x))^2$. Dann wäre

$$y_1^{Eul} = y_0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot y_0^2 = 1$$

$$y_1^{RK} = y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(-2x_0 y_0^2 - 2x_1 \cdot (y_1^{Eul})^2 \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \left(-2 \cdot 0 \cdot 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) = \frac{3}{4}$$

$$y'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow e^{Eu} = |y_1^{Eul} - y'(\tfrac{1}{2})| = |1 - \tfrac{4}{5}| = \frac{1}{5}$$

$$e^{RK} = |y_1^{RK} - y'(\tfrac{1}{2})| = |\tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{5}| = \frac{1}{16}$$