Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
02. Februar 2016, WS 2015/16

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die ide Messpunkte $(0,3)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$. Gesucht ist eine Ausgleichsparabel der Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu diesen Punkten. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

d) Skizzieren Sie die gegebenen Punkte sowie die Ausgleichsparabel.

Aufgabe 2: Numerisches Differenzieren, partielle Differenzialgleichung

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 2$. Berechnen Sie den Näherungswert der ersten Ableitung über die rechtseitige Differenzenformel $D^+f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/4$

b) Berechnen Sie mit der sog. Fünfpunkte-Mittelpunkt Differenzenformel

$$\hat{D}f(x_0) = \frac{1}{12h}\Big\{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\Big\}$$

den Näherungswert der ersten Ableitung $\hat{D}f(x_0)$ für die Funktion $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/4$.

c) Diskretisieren Sie das folgende Raum-Zeit-Problem nach dem expliziten Differenzenverfahren:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - x \cdot u(t,x) \quad \text{für} \quad x \in [1,3] \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

mit Randbedingungen $u(t,1) = 3$, $u(t,3) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(0,x) = 2$, $1 < x < 3$. Das Gitter ist so gewählt, dass $\Delta x = 1/2$ und $\Delta t = 1/4$ ist. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

d) Berechnen Sie Werte u_1^1, u_2^1 und u_3^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Aufgabe 3: Numerisches Integrieren

Gesucht sind Näherungswerte für das Integral

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx \quad \text{mit} \quad f(x) = 2x^2 - x.$$

Zerlegen Sie das Intervall [-1, 3] in vier Teilintervalle.

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals über Anwendung der Formel für die Mittelsumme I_M.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals über die Trapezformel I_T und:

c) über die Simpsonformel I_S.

d) Prüfen Sie durch Einsetzen der Ergebnisse aus a) - c), dass folgende Gleichheit gilt: $I_S = \frac{1}{3}\Big(2I_M + I_T\Big)$.

e) Vervollständigen Sie die Implementierung des Mittelpunktverfahrens, indem Sie die Funktion $f(x)$ unter Verwendung der C-Syntax definieren und für `n` Stützstellen zwischen $[a, b]$ für die Funktion `f`:

```c
double f(...) { ... }
double int_mittel(double (*f)(double), double a, double b, int n) {
  ...
}
```

Aufgabe 4: Nullstellenberechnung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}$ und gesucht sind die Nullstellen der Gleichung $f(x) = 0$.

a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 1$ den Wert des ersten Iterationsschrittes.

c) Verwenden Sie dann das Sekantenverfahren mit Startwerten $x_0 = 1$ und $x_a = 2$ und berechnen Sie den Wert des ersten Iterationsschrittes.

d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Sekantenverfahren zur Nullstellensuche:

```c
double sekanten(double (*f)(double), double a, double b) {
  ...
}
```

Die Funktion `sekanten` erwartet die Funktion `f` sowie zwei Startwerte `a` und `b`. Ihr Rückgabewert ist die gefundene Nullstelle mit einer Genauigkeit von `1e-12`. Bemerkung: `y=f(x)` gibt den Funktionswert an der Stelle `x` zurück. Beenden Sie die Funktion mit dem Wert `NaN`, falls keine Konvergenz vorliegt (etwa nach 100 Iterationsschritten).

Aufgabe 5: System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2xy_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= (x-2)y_2(x) \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 2$.

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für die Differenzialgleichung an.

c) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 6: Taylorformel und Spline-Interpolation

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 4. Ordnung (Hinweis: $\ln(1) = 0$ und $(\ln(x))' = 1/x$).

b) Bringen Sie das Polynom aus a) in die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ und bestimmen Sie den Wert von $f(2)$ mit dem Hornerschema.

c) Entwickeln Sie die Funktion $g(x) = \frac{1}{1+x}$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x = 0$ und zeigen Sie durch gliedweises Ableiten der Taylorreihe von $\ln(1+x)$ aus a), dass gilt $\Big(\ln(1+x)\Big)' = \frac{1}{1+x}$.

d) Gegeben sind die Stützpunkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ und $(3,-2)$. Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(0) = 1$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion der Form

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ g_3(x) = a_{32}x^2 + a_{31}x + a_{30} & \text{für} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3} h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3} h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3} h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x_k, y_k) \\ F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems: Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.