Lösen von Gleichungen

Numerisches Lösen von Gleichungen

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

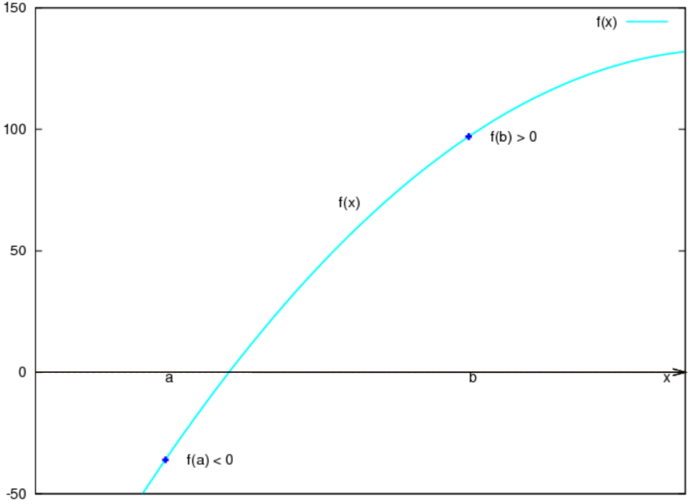
Das Bisektionsverfahren ist eine numerische Methode zur Bestimmung einer Nullstelle. Es basiert auf dem Zwischenwertsatz:

Satz 9

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$*. Dann existiert eine Zwischenstelle* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = 0$*.*

Darstellung des Zwischenwertsatzes

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.



Bisektion: Algorithmus

1. Initialisierung:
   $x_1 = a, x_2 = b, f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), \delta = 10^{-5}$
2. Iteration:
   a) Bestimme Intervallmitte: $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
   b) Bestimme Funktionswert: $f_3 = f(x_3)$
   c) Festlegung des neuen Intervalls:
      i) falls $f_3 \cdot f_2 \leqslant 0$ (Nullstelle zwischen x_2 und x_3), dann $x_1 := x_3$ und $f_1 := f_3$
      ii) falls $f_3 \cdot f_2 > 0$ (Nullstelle zwischen x_1 und x_3), dann $x_2 := x_3$ und $f_2 := f_3$
   d) Abbruchbedingungen
      i) falls $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, dann Lösung:$= x_3$ Stop
      ii) falls $|x_2 - x_1| > \delta$, dann weiter mit a)

Bemerkungen zum Bisektionsverfahren

- Das Bisektionsverfahren liefert nur eine Nullstelle im Intervall $I = [a, b]$.
- δ ist Abbruchskriterium und sollte nicht kleiner als die Rechengenauigkeit sein.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - \sqrt{x^2 + 1}$ im Intervall $I = [1, 2]$

Da $f(1) = -0.4142$ und $f(2) = 5.7639$ liegt nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $I = [1, 2]$.

1. Schritt des Algorithmus:
$x_3 = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = 1.5722$ usw.

Nach 13 Iterationen ergibt sich als Nullstelle: $\xi = 1.1509$.

Beispiel

Es soll die n-ten Wurzel $x = \sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0, a \neq 1$ berechnet werden.

Diese Aufgabe ist äquivalent mit dem folgenden Nullstellenproblem: $x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow f(x) = x^n - a = 0$

z.B. $x = \sqrt[5]{8} \Rightarrow f(x) = x^5 - 8 = 0.$

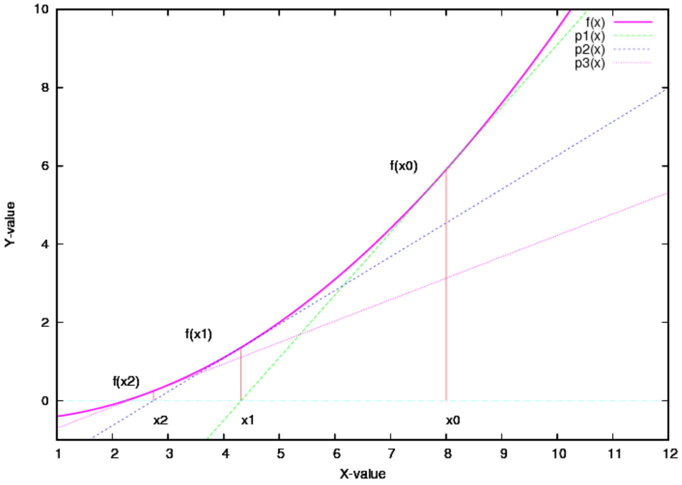
Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist die am häufigsten eingesetzte Methode zur numerischen Bestimmung einer Nullstelle von $f(x)$ im Intervall $I = [a, b]$, da es eine schnelle Konvergenz bestitzt.

Iteratives Verfahren:

Man startet mit einem Startwert x_0, berechnet die Tangente an die Funktion $f(x)$ in x_0 und bestimmt den Schnittpunkt mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt wird der neue Punkt x_1, an dem die nächste Tangente berechnet wird und wieder der Schnittpunkt mit der x-Achse usw.

Darstellung des Newton-Verfahrens



Formeln zum Newton-Verfahren

Tangentengleichung in x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Schnittpunkt x_1 mit der x-Achse, d.h. für $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ \Rightarrow x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Newton: Algorithmus

1. Initialisierung: wähle x_0 und $\delta := 10^{-5}$
2. Iteration:
   a) Newton-Formel:

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

   b) Abbruchbedingung:
      i) falls $|x_{n+1} - x_n| < \delta$, dann Lösung:$= x_{n+1}$; Stop
      ii) falls $|x_{n+1} - x_n| \geqslant \delta$, dann weiter mit a).

Eigenschaften des Newton-Verfahrens

- schnelle Konvergenz (wenige Iterationsschritte)
- bei einem schlechten Startwert kann das Verfahren divergieren.
  Ausweg: Finde über das Bisektionsverfahren zunächst einen guten Startwert.
- die Ableitung $f'(x)$ muss existieren
- das Verfahren ist erweiterbar auf Funktionen mehrerer Veränderlicher $f(x, y, \ldots)$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - \sqrt{x^2+1}$, im Intervall $I = [1, 2]$.

Die Ableitung lautet: $f'(x) = 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Die Newton-Iteration ergibt:

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.5	1.5722
1	1.2343	0.2920
2	1.1573	0.0207
3	1.1510	0.0001
4	1.1509	$0.6 \cdot 10^{-8}$

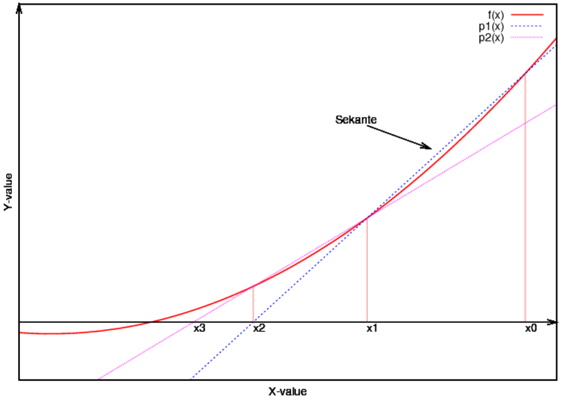
d.h. nach 4 Iterationen hat man die Nullstelle bis auf 8 Dezimalstellen genau bestimmt.

Regula falsi

Das Newton-Verfahren benötigt die Berechung der ersten Ableitung von $f(x)$. Falls dies nicht möglich ist, ist das Regula falsi Verfahren eine alternative Methode zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Hierzu werden zwei Startwerte x_0 und x_1 benötigt.

Geometrisch: Statt einer Tangente wird eine Sekante zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ bestimmt und dann der Schnittpunkt x_2 der Sekanten mit der x-Achse berechnet. Daraus ergibt sich ein neuer Punkt $(x_2, f(x_2))$, der zusammen mit $(x_1, f(x_1))$ den nächsten Iterationsschritt bildet, usw..

Darstellung des Regula fals Verfahrens



Formeln zum Regula falsi Verfahren

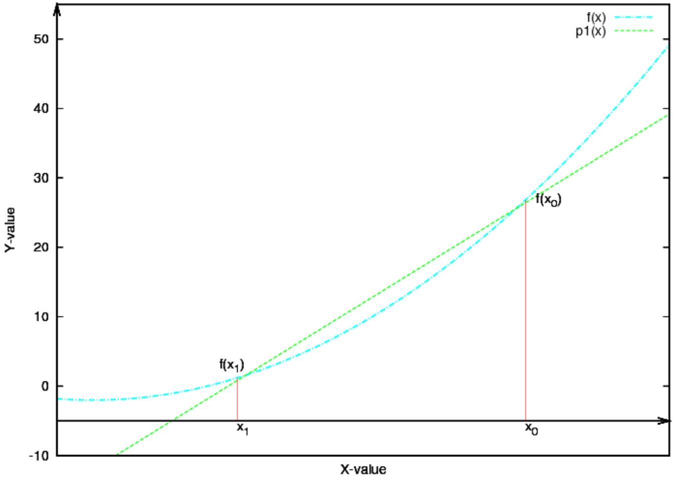
Sekantengleichung in x_0 und x_1:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Schnittpunkt x_2 mit der x-Achse, d.h. für $y = 0$:

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Konstruktion der Sekanten



Regula falsi: Algorithmus

1. Initialisierung: wähle x_0, x_1 und $\delta := 10^{-5}$
2. Iteration:
   a) Sekanten-Formel:

   $$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

   b) Abbruchbedingung:
      i) falls $|x_{n+1} - x_n| < \delta$, dann Lösung:$= x_{n+1}$; Stop
      ii) falls $|x_{n+1} - x_n| \geqslant \delta$, dann weiter mit a).

Bemerkungen

- die Konvergenz des Regula falsi Verfahrens ist langsamer als die des Newton-Verfahrens
- Bei Nullstellen von Polynomausdrücken ist das Horner-Schema zur Auswertung der Funktionswerte $f(x_1)$ sehr geeignet. Es kann außerdem zur Berechnung der Ableitung $f'(x_1)$ an einem Punkt x_1 angewendet werden.
- Bei dem Newton-Verfahren muss in jedem Iterationsschritt $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ berechnet werden.