Frage: Was ist mit der Aussage:

Modellierung und Simulation

Britta Nestler

Anfangswertpro

Euler-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren

Systeme von Differenzialgleichungen

Bemerkung:

Für die gewöhnliche Differenzialgleichung $y'(x) = f(x)$ entspricht:

- das Euler-Verfahren der Rechteck-Integration
- das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung der Trapez-Integration und
- das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung der Simpsonformel.

genau gemeint?

Antwort: Wir formen die DGL etwas um:

$$y'(x) = f(x)$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y(x_0)$$

$$y(x_1) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}_{} + y(x_0)$$

$\approx h \cdot f(x_0)$ nach Rechteckverfahren (Linkssumme) mit $h = x_1 - x_0$

$$\Rightarrow y(x_1) \approx y(x_0) + h\,f(x_0) =: y_1$$

($\hat{=}$ Euler-Verfahren)

<u>oder:</u>

$$y(x_1) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}_{} + y(x_0)$$

$\approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$ (Trapezformel)

$\Rightarrow y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) =: y_1$ mit $h = x_1 - x_0$

($\hat{=}$ Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung) oder:

$$y(x_1) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}_{\approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1)\right)} + y(x_0)$$

$$\approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1)\right) + y(x_0)$$

(Simpsonformel mit 2 Teilintervallen der Länge $\frac{h}{2}$)

$$\Rightarrow y(x_1) \approx y(x_0) + \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2f(x_0 + \frac{h}{2}) + 2f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1)\right) =: y_1 \quad \text{mit } h = x_1 - x_0$$

($\hat{=}$ Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung).