

6. Übung zur Vorlesung

Modellierung und Simulation im WS 2019/2020

Aufgabe 1: Anfangswertproblem

Gegeben ist das dynamische System (Anfangswertproblem)

$$y'(t) = y(t) \left(2 - 0.1 \cdot y(t) \right) \quad \text{mit} \quad y(0) = 10.$$

- Geben Sie für das Anfangswertproblem die Eulersche Iterationsformel an.
- Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 0.1$ den ersten Iterationsschritt des Eulerverfahrens.
- Geben Sie nun das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung an.
- Bestimmen Sie für $h = 0.1$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 2: Anfangswertproblem

Der zeitliche Stromverlauf $I(t)$ genügt nach dem Einschalten der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$\frac{dI(t)}{dt} = U - R I(t) \quad \text{mit Anfangswert} \quad I(0) = 0, \quad \text{und} \quad t \geq 0.$$

R ist der Ohmsche Widerstand und U die Spannung. Zum Weiterrechnen werden beide Größen auf den Wert Eins gesetzt, d.h. $R = 1$ und $U = 1$.

- Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an, indem Sie $dI(t)/dt$ durch rechtsseitige Differenzen annähern.
- Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.
- Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für diese Differenzialgleichung an.
- Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

Aufgabe 3: Anfangswertproblem

Gegeben ist die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$y'(x) = x + y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

- Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an.
- Bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/4$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

Aufgabe 4: System aus Anfangswertproblemen

Gegeben ist das gewöhnliche Differenzialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= -y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x)\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.

- c) Geben Sie die Eulersche Iterationsformel für dieses System an.
- d) Berechnen Sie die ersten drei Iterationsschritte des Eulerverfahrens mit einer Schrittweite von $h = 1/2$.
- e) Zeichnen Sie die in d) berechneten Wertepaare $(y_{1,k}, y_{2,k})$ in ein y_1/y_2 - Koordinatensystem ein.