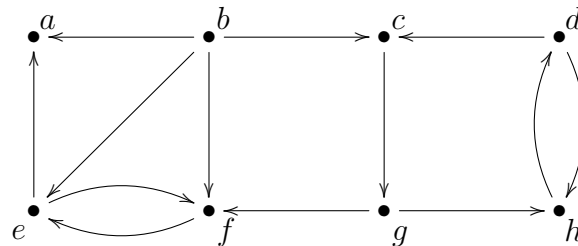


7. Übung zur Vorlesung Algorithmen auf Graphen

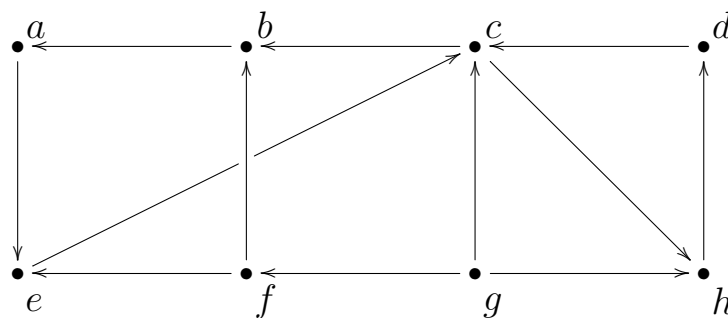
Aufgabe 1 (•): Führen Sie für den nachstehenden bekannten Graph



den Algorithmus STARKE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN nach den folgenden Vorgaben aus:

- Ermitteln Sie zur späteren Kontrolle zunächst per Hand alle starken Zusammenhangskomponenten von G .
- Nehmen Sie an, dass in der ersten Phase des Verfahrens die Knoten in der Reihenfolge a, h, e, c, d, f, b, g durchlaufen werden. Dokumentieren Sie nach dem Ende dieser ersten Phase den Zustand aller *Push*- und *Pop*-Zeiten sowie den Inhalt des Kellers L (markieren Sie dabei das oberste Element des Kellers, welches als erstes wieder entnommen wird).
- Skizzieren Sie den Graph G' , der aus G durch die Umorientierung aller Kanten hervorgeht.
- Dokumentieren Sie nun den Ablauf der Verarbeitung des Inhalts von L (in der richtigen Reihenfolge). Geben Sie dazu an, welche Knoten einen DFS-Aufruf auslösen und welche starke Zusammenhangskomponenten dabei jeweils berechnet werden.

Aufgabe 2 (•): Auch dieser bekannte Graph soll jetzt mit dem Algorithmus STARKE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN verarbeitet werden:



- Geben Sie zunächst „durch scharfes Hinsehen“ direkt alle starken Zusammenhangskomponenten von G an, so dass Sie später das Ergebnis des Verfahrens verifizieren können.
- Nehmen Sie an, dass in der ersten Phase des Verfahrens die Knoten in der Reihenfolge h, b, e, f, a, c, g, d durchlaufen und — sofern notwendig — von dort aus entsprechende

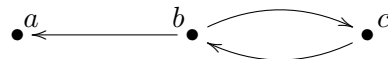
DFS-Aufrufe gestartet werden. Dokumentieren Sie nach dem Ende dieser ersten Phase den Zustand aller *Push*- und *Pop*-Zeiten sowie den Inhalt des Kellers L (markieren Sie dabei das oberste Element des Kellers, welches als erstes wieder entnommen wird).

- c) Skizzieren Sie den umorientierten Graph G' .
- d) Dokumentieren Sie nun den Ablauf der Verarbeitung des Inhalts von L (in der richtigen Reihenfolge). Geben Sie dazu an, welche Knoten einen DFS-Aufruf auslösen und welche starke Zusammenhangskomponenten dabei jeweils berechnet werden.

Aufgabe 3 (••): Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, auf den der Algorithmus STARKE ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN angewendet werden soll. Bekanntlicherweise verwaltet das Verfahren einen Keller L , der in der ersten Phase aufgebaut und nach der Umorientierung aller Kanten wieder abgebaut wird. Betrachten Sie nun die folgende Vereinfachung des Verfahrens:

- Auf die Umorientierung der Kanten wird verzichtet.
- Im Gegenzug wird die Verwaltung der Knotenmenge L nicht durch einen Keller, sondern durch eine Warteschlange realisiert, so dass sich auch hier die Reihenfolge umkehrt.

Leider funktioniert dies jedoch nicht. Zeigen Sie anhand des Graphen



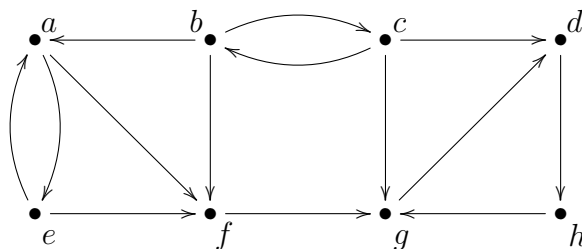
durch ein Gegenbeispiel, dass der scheinbar verbesserte Algorithmus nicht korrekt arbeitet.

Aufgabe 4 (•••): Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Aus G kann man einen neuen Graph $G' = (V', E')$ mit diesen Komponenten erzeugen:

$$V' := \{C \mid C \text{ ist eine starke Zusammenhangskomponente von } G\}$$

$$E' := \{(C, C') \mid \text{es gibt eine Kante } (v, v') \text{ von } v \in C \text{ nach } v' \in C'\}$$

- a) Konstruieren Sie G' aus dem bekannten Beispielgraph G :



- b) Zeigen Sie: G' ist immer azyklisch, ganz gleich, wie G aussieht.