Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Klausur zur Modellierung und Simulation
07. Juli 2015, SS 2015

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bearbeitungszeit: 60 Minuten (Master Hochschule, Aufgaben 1 - 4) bzw. 90 Minuten (KIT, alle Aufgaben)

Aufgabe 1: Nullstellenberechnung und Taylorformel
Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $x^3 = 3$.

a) Formulieren Sie zunächst ein Nullstellenproblem der Form $f(x) = 0$. Verwenden Sie dann das Sekantenverfahren mit Startwerten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und berechnen Sie den Wert des ersten Iterationsschrittes.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für den Startwert $x_1 = 1$ den Wert des ersten Iterationsschrittes.

c) Vergleichen Sie beide Ergebnisse aus a) und b) mit dem exakten Wert $\sqrt[3]{3} = 1.44$.

d) Geben Sie die Taylorreihe von $g(x) = e^{\alpha x}$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur 4. Ordnung an.

e) Leiten Sie die Taylorreihe von $e^{\alpha x}$ aus d) gliedweise ab und zeigen Sie dadurch, dass für die Ableitung gilt $\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x}$.

Aufgabe 2: Polynom- und Spline-Interpolation

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ für die Datenpunkte $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(1,2)$ und $(2,23)$ mit der Methode der Dividierten Differenzen.

b) Bringen Sie das Polynom aus a) in die Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und bestimmen Sie den Wert von $p(2)$ mit dem Hornerschema.

c) Gegeben sind die Stützpunkte $(-1,-1)$, $(0,-1)$, und $(1,2)$. Bestimmen Sie mit der Zusatzbedingung $g_1'(-1) = 0$ für die gegebenen Stützpunkte eine quadratische Spline-Funktion der Form

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10} & \text{für} \quad -1 \le x \le 0 \\ g_2(x) = a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: Numerisches Integrieren

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

a) Berechnen Sie den Wert der Untersumme für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$. Zerlegen Sie hierfür das Intervall [0, 1] in zwei Teilintervalle.

b) Bestimmen Sie nun den Wert des Integrals über die Trapezformel und

c) über die Simpsonformel.

d) Vervollständigen Sie die Implementierung des Trapez-Verfahrens für `n` Stützstellen zwischen $[a, b]$ für die Funktion `f`:

```
double int_trapez(double (*f)(double), double a, double b, int n) {
  ...
}
```

Aufgabe 4: Anfangswertproblem

Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{x}{(y(x) \cdot (1+x^2))}, y \neq 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

a) Geben Sie die Euler'sche Iterationsformel für diese Differenzialgleichung an und bestimmen Sie für eine Schrittweite $h = 1/2$ die ersten beiden Iterationsschritte des Eulerverfahrens.

b) Geben Sie das Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung für die Differenzialgleichung an.

c) Bestimmen Sie für $h = 1/2$ den ersten Iterationsschritt des Runge-Kutta Verfahrens 2. Ordnung.

d) Schreiben Sie eine numerische Lösung mit dem Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung, indem Sie die Funktion

```
double solveRK2(double (*F)(double, double), double y0, double dx, int n) {
  ...
  printf("%lf %lf\n", x, y);
  ...
}
```

erweitern. Dabei ist $\texttt{F}(x, y) = y'(x)$. `y0` der Startwert $y(0)$. `dx` die Schrittweite und `n` die Anzahl der Schritte.

Aufgabe 5: Lineares Ausgleichsproblem

Gegeben sind die folgenden Messpunkte:

x_i	-1	0	1
y_i	$1/2$	$7/2$	$7/2$

Gesucht ist eine Ausgleichsfunktion der Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zur Bestimmung der Funktion $f(x)$ gehen Sie nach den folgenden Schritten vor:

a) Formulieren Sie das Fehlergleichungssystem $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{y}$.

b) Stellen Sie das Normalengleichungssystem $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$ auf.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Aufgabe 6: Numerisches Differenzieren und partielle Differenzialgleichung

a) Zeigen Sie, dass die Differenzenformel

$$D^{neu}f(x_0) = \frac{1}{2h}\big(- 3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\big)$$

bei äquidistanter Zerlegung Polynome vom Grad 2 der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ exakt differenziert.

b) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x - \frac{4}{x}$ den Wert der ersten Ableitung mit der zentralen Differenzenformel $Df(x_0)$ und mit der neuen Differenzenformel $D^{neu}f(x_0)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und für eine Schrittweite von $h = 1/2$.

c) Diskretisieren Sie das folgende Raum-Zeit-Problem nach dem expliziten Differenzenverfahren: $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + x^2$ mit $2 \leq x \leq 5$ und $t \geq 0$, Randbedingungen $u(t,2) = 0$, $u(t,5) = 7$ und der Anfangsbedingung $u(0,x) = 1$ für $2 < x < 5$. Das numerische Gitter ist $\Delta x = 1$. Geben Sie hierbei auch die Rand- und Anfangsbedingungen in diskreter Form an.

d) Berechnen Sie für die größt mögliche Zeitschrittweite die beiden Werte u_1^1 und u_2^1 als Ergebnis der ersten Zeititeration.

Viel Erfolg!

Britta Nestler
Fakultät IWI, Hochschule Karlsruhe und Fakultät Maschinenbau, KIT

Formelsammlung zur Vorlesung „Modellierung und Simulation"

Taylorformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Newton-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Regula-Falsi Verfahren

$$x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Rechteckformel

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i), \quad \text{mit} \quad \xi_i = x_i \quad \text{oder} \quad \xi_i = \frac{1}{2}\Big(x_i + x_{i+1}\Big) \quad \text{oder} \quad \xi_i = x_{i+1}$$

Trapezformel

$$I_T = \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\Big)$$

Simpsonformel

$$I_S = \frac{4}{3} h(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3} h(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3} h(f_0 + f_{2m})$$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\Big\}$$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Fehlerfunktional des Ausgleichsproblems

$$E(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) := \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_i)\Big)^2$$

Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Gauß-Newton-Verfahren (für nichtlineare Ausgleichsprobleme):

Für $k = 0, 1, \ldots$

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:
  Minimiere $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{\delta}^{(k)}||_2^2$
- Setze $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$.