Anfangswertprobleme

Anfangswertprobleme

Definition 19

Ein Anfangswertproblem ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ mit } y(a) = \alpha, x \geq a$$

wobei $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$.

Beispiele Anwendungen von Anfangswertproblemen sind:

- Berechnung von Raketenbahnen
- chemische Reaktionen, biologische Prozesse
- Räuber-Beute-Modelle

Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist eine numerische Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen.

Dazu wird die Ableitung $y'(x)$ durch Differenzenquotienten angenähert, d.h.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{mit Schrittwerte} \quad h$$

Daraus folgt an der Stelle $x = a$ für das Anfangswertproblem

$$y(a+h) \approx y(a) + hf(a, y(a)).$$

Da $y(a)$ als Anfangswert bekannt ist, kann die rechte Seite der Gleichung berechnet werden und man erhält eine Approximation von $y(x)$ an der Stelle $x = a + h$.

Euler-Verfahren

Iteration (d.h. wiederholtes Anwenden) mit:

$$x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots$$

liefert die Nährungen

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \ldots$$

Diese Formel heißt Euler Verfahren.

Bemerkung:
Das Verfahren erfordert die Auswertung von $f(x_k, y_k)$.

Beispiel

Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y'(x) = y^2(x) + 2x - x^4 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

Die exakte Lösung lautet $y(x) = x^2$ (prüfe!).

Für eine Schrittweite von $h = 0.1$ sollen die iterierten Werte aus dem Euler-Verfahren mit den exakten Werten an den entsprechenden Stellen verglichen werden.

Mit $x_k = a + k \cdot h$ ergeben sich für $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Stellen $x = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots$

Die Euler-Formel für die Gleichung lautet

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot (y_k^2 + 2kh - k^4h^4)$$

mit $k = 0, 1, \ldots$ und $y_0 = 0$ und $x_k = kh$

Mit der Euler-Formel

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot (y_k^2 + 2kh - k^4 h^4)$$

ergeben sich aus der Iteration die Werte

x	Euler (y_k)	exakt
0.1	0.0	0.01
0.2	0.02	0.04
0.3	0.06	0.09
0.4	0.12	0.16
0.5	0.20	0.25
0.6	0.30	0.36

Berechnungsschema:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & 0 + 0.1 \cdot (0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0.1 - 0^4 \cdot 0.1^4) \\ y_2 & = & 0 + 0.1 \cdot (0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0.1 - 1^4 \cdot 0.1^4) \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

Bemerkung:
Wie bei den numerischen Verfahren für die Ableitung und für ein Integral gibt es auch bei dem Euler-Verfahren zwei Arten von Fehlern.

Diskretisierungsfehler:
Der Diskretisierungsfehler geht für $h \to 0$ gegen Null. Das Euler-Verfahren ist von erster Ordnung, d.h. der Fehler ist proportional zu $O(h)$. Die Näherungslösung konvergiert für $h \to 0$ gegen die exakte Lösung.

Rundungsfehler:
Der Rundungsfehler divergiert für $h \to 0$ aufgrund der steigenden Anzahl arithmetischer Auswertungen.

Beispiel

Gegeben ist die Differenzialgleichung $y'(x) = y(x)$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$.

Die exakte Lösung ist $y(x) = e^x$. Für $x = 1$ ergibt sich der Wert $y(1) = e \approx 2.718...$ (Eulersche Zahl).

Zur Fehlerbetrachtung werden die Werte aus dem Euler-Verfahren mit dem exakten Wert verglichen.

h	Euler-Wert	Fehler
1	2.0	0.718
$1/2$	2.250	0.468
$1/4$	2.441	0.277
$1/8$	2.566	0.152
		$\sim h$

Runge-Kutta-Verfahren

Das Runge-Kutta-Verfahren ist von höherer und damit besserer Fehlerordnung.

Es werden jedoch zusätzliche Funktionsauswertungen benötigt.

Einfachster Ansatz:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\}$$

d.h. $f(x_k, y_k)$ aus dem Euler-Verfahren wird durch einen Mittelwert aus zwei Funktionswerten ersetzt. Hierdurch ergibt sich ein Diskretisierungsfehler $\approx O(h^2)$, das sogenannte Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung .

Das bekannteste Runge-Kutta-Verfahren lautet:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\Big(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\Big)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_k, y_k) \\
F_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\
F_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\
F_4 &= f(x_{k+1}, y_k + hF_3)
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist von vierter Ordnung, d.h. $\sim O(h^4)$.

Bemerkung:

Für die gewöhnliche Differenzialgleichung $y'(x) = f(x)$ entspricht:

- das Euler-Verfahren der Rechteck-Integration
- das Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung der Trapez-Integration und
- das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung der Simpsonformel.

Systeme von Differenzialgleichungen

Bei den meisten Anwendungen handelt es sich um Systeme von Differenzialgleichungen der Form:

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \geq a$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$y_i(a) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Beispiel

Lotka-Volterra-Gleichungen oder Räuber-Beute-Modell

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= c_{11}y_1(t) + c_{12}y_1(t)y_2(t)\\
y_2'(t) &= c_{21}y_2(t) + c_{22}y_1(t)y_2(t)
\end{aligned}
$$

wobei $x = t$ die Zeit als Systemvariable ist und $c_{ij} = \text{const.}$ mit $c_{ii} > 0, c_{ij} < 0, i \neq j$.

Das Euler-Verfahren für Systeme lautet:

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + hf_i(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{n,k}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Beispiel

Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\begin{aligned} y_{1,k+1} &= y_{1,k} + hf_1(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + hf_2(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \end{aligned}$$

Das Runge-Kutta-Verfahren für Systeme lautet:

$$\begin{aligned} y_{i,k+1} &= y_{i,k} + \frac{h}{2}\{f_i(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}) + \\ &\quad f_i(x_{k+1}, y_{1,k} + hf_1(x_k, y_{1,k}, \ldots, \\ &\quad y_{n,k}), y_{2,k} + hf_2(x_k, y_{1,k}, \ldots, y_{n,k}), \ldots)\} \end{aligned}$$

Beispiel

Räuber-Beute-Modell für zwei Unbekannte $y_1(t), y_2(t)$.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= c_{11}y_1(t) + c_{12}y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) &= c_{21}y_2(t) + c_{22}y_1(t)y_2(t) \end{aligned}$$

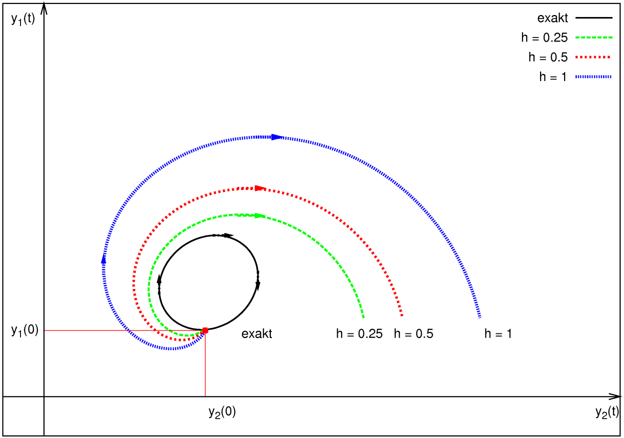
Parameter:

$$c_{11} = 0.25, c_{12} = -0.01, c_{21} = -1.0, c_{22} = 0.01$$

Startwerte

$$y_1(0) = 80 \quad \text{und} \quad y_2(0) = 30$$

Numerische Simulation des Räuber-Beute-Modells mit dem Euler-Verfahren



Verlauf der Beute $y_1(t)$ und der Räuber $y_2(t)$ als Funktion der Zeit t.

Beispiel: Räuber-Beute-Modell

Gegeben sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 0.25y_1(t) - 0.01y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_2(t) + 0.01y_1(t)y_2(t) \\ \text{mit} \quad y_1(0) &= 80 \qquad y_2(0) = 30 \end{aligned}$$

a) Geben Sie das Euler-Verfahren zur Lösung des Räuber-Beute-Modells an.

b) Berechnen Sie den 1. Schritt des Euler-Verfahrens für die Schrittweite $h = 1$.

Lösung: Räuber-Beute-Modell

zu a) das Euler-Verfahren lautet:

$$\begin{aligned} y_{1,k+1} &= y_{1,k} + h(0.25y_{1,k} - 0.01y_{1,k}y_{2,k}) \\ y_{2,k+1} &= y_{2,k} + h(-y_{2,k} + 0.01y_{1,k}y_{2,k}) \end{aligned}$$

zu b) der 1. Schritt des Euler-Verfahrens für $h = 1$ ergibt:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= y_{1,0} + (0.25y_{1,0} - 0.01y_{1,0}y_{2,0}) \\ &= 100 - 0.01 \cdot 2400 = 76 \\ y_{2,1} &= y_{2,0} + (-y_{2,0} + 0.01y_{1,0}y_{2,0}) \\ &= 30 - 30 + 0.01 \cdot 2400 = 24 \end{aligned}$$