IWI Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

# 2. Übung zur Vorlesung Algorithmen auf Graphen

## Musterlösungen

**Aufgabe 1:** Wir analysieren die Struktur des gegebenen Graphen:

a) Die Ein– und Ausgangsgrade sind aus der nachfolgenden Tabelle ersichtlich:

| Knoten | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eingangsgrad | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| Ausgangsgrad | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |

b) Die Adjazenzlisten lauten:

$$\ell_a = \{e, f\} \ , \quad \ell_b = \{a, c, f\} \ , \quad \ell_c = \{b, d, g\} \ , \quad \ell_d = \{h\}$$
$$\ell_e = \{a, f\} \ , \quad \ell_f = \{g\} \ , \quad \ell_g = \{d\} \ , \quad \ell_h = \{g\} \ .$$

Der Graph besitzt $|E| = 14$ Kanten. Die Formel ist also wegen

$$\sum_{v \in V} |\ell_v| = 2 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14$$

korrekt.

c) Der Graph besitzt drei Zyklen, nämlich

$$a \ \to \ e \ \to \ a$$

sowie

$$b \ \to \ c \ \to \ b$$

und

$$d \ \to \ h \ \to \ g \ \to \ d \ .$$

**Aufgabe 2:** Die Analyse ergibt beim zweiten Graph die folgenden Ergebnisse:

a) Die Ein– und Ausgangsgrade sind aus der nachfolgenden Tabelle ersichtlich:

| Knoten | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eingangsgrad | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| Ausgangsgrad | 0 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |

b) Die Adjazenzlisten lauten:

$$\ell_a = \emptyset \ , \quad \ell_b = \{a, c, f\} \ , \quad \ell_c = \{d\} \ , \quad \ell_d = \{g\}$$
$$\ell_e = \{a, b, f\} \ , \quad \ell_f = \{a\} \ , \quad \ell_g = \{b, f, h\} \ , \quad \ell_h = \{d\} \ .$$

Der Graph besitzt $|E| = 13$ Kanten. Die Formel ist also wegen

$$\sum_{v \in V} |\ell_v| = 0 + 3 + 1 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 13$$

korrekt.

c) Der Graph besitzt zwei „einfache“ Zyklen, nämlich

$$b \to c \to d \to g \to b$$

und

$$d \to g \to h \to d \; .$$

**Aufgabe 3:** Wir zeigen beide Richtungen der Äquivalenz durch Widerspruchsbeweise:

„$\Longrightarrow$“: $X$ ist nach Voraussetzung eine Knotenüberdeckung. Wir nehmen nun an, dass $V \setminus X$ keine stabile Menge ist. Dann existieren zwei Knoten $u, v \in V \setminus X$ (also $u, v \notin X$), die über eine Kante $\{u, v\} \in E$ miteinander verbunden sind. Wegen $u, v \notin X$ wäre dann aber keiner der beiden Kantenknoten in $X$ vertreten. Also wäre $X$ doch keine Knotenüberdeckung.

„$\Longleftarrow$“: Umgekehrt sei jetzt $V \setminus X$ eine stabile Menge. Angenommen, $X$ ist keine Knotenüberdeckung. Dann gibt es mindestens eine Kante $\{u, v\} \in E$ mit $u \notin X$ (also $u \in V \setminus X$) und $v \notin X$ (also $v \in V \setminus X$). Wegen der Stabilität von $V \setminus X$ würde daraus aber $\{u, v\} \notin E$ folgen, ein Widerspruch. $\square$

**Aufgabe 4:** In einem ungerichteten azyklischen Graph mit 721 Knoten und 691 Kanten gibt es genau $721 - 691 = 30$ Zusammenhangskomponenten. Mindestens eine dieser Komponenten muss mindestens 25 Knoten enthalten, da es sonst nur maximal $30 \cdot 24 = 720$ Knoten geben könnte. $\square$

Alternativ kann man auch (ein wenig komplizierter) mit den 691 Kanten argumentieren. Mindestens eine der Zusammenhangskomponenten muss nämlich mindestens 24 Kanten enthalten, da es sonst nur maximal $30 \cdot 23 = 690$ Kanten geben könnte. Wegen der Zyklenfreiheit von $G$ stellt diese Komponente auf ihrer Knotenmenge einen Baum dar, der folglich mindestens $24 + 1 = 25$ Knoten miteinander verbindet. $\square$