

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Exercícios

17 de dezembro de 2012

1. Mostre o que será escrito na execução do algoritmo Ordena abaixo para a instância $(v, 1, 8)$ onde

$v[i]$	3	41	52	26	38	57	9	49
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Ordena(v, a, b)
Se $a \geq b$
Devolva v
Ordena($v, a, b - 1$)
Insere(v, a, b)
Escreva v, a, b
Devolva v

Insere(v, a, b) é o algoritmo discutido em aula.

2. Descreva as instâncias (v, a, b) para as quais o algoritmo Ordena_I faz o menor número possível de comparações com elementos de v .
3. Escreva uma versão recursiva do Algoritmo Insere discutido em aula, isto é, um algoritmo recursivo para o seguinte problema.

Inserção em Vetor Ordenado
Instância: (v, a, b) onde $v[a..b - 1]$ é um vetor ordenado.
Resposta: o vetor v modificado de tal forma que $v[a..b]$ é um vetor ordenado.

- (a) Seja $T^+(n)$ o número máximo de trocas efetuado pelo seu algoritmo para computar uma instância com $n = b - a + 1$. Descreva $T^+(n)$ através de uma recorrência.
 - (b) Resolva esta recorrência.
4. Uma *cópia de memória* é o que acontece quando uma variável é copiada para outra durante a execução de um algoritmo. Por exemplo, o algoritmo Troca, abaixo, realiza 3 cópias de memória.

Troca(v, a, b)
$x \leftarrow v[a]$
$v[a] \leftarrow v[b]$
$v[b] \leftarrow x$

O Algoritmo Insere discutido em aula usa o Algoritmo Troca acima. Na análise feita em aula vimos que o algoritmo Insere faz $n - 1$ trocas entre

elementos do vetor no pior caso para uma instância com $n = b - a + 1$, o que corresponde a $3(n - 1)$ cópias de memória.

- (a) Quantas cópias de memória faz o algoritmo Ordena_I (discutido em aula) no pior caso para uma instância (v, a, b) com $n = b - a + 1$?
- (b) Modifique o Algoritmo **Inserere** de tal forma que ele faça no máximo $n + 1$ cópias de memória para uma instância (v, a, b) com $n = b - a + 1$.
- (c) Quantas cópias de memória faz o algoritmo Ordena_I discutido em aula no pior caso, para uma instância (v, a, b) com $n = b - a + 1$, usando esta versão modificada do Algoritmo **Inserere**?

5. Mostre o que será escrito na execução do algoritmo Ordena abaixo para a instância $(v, 1, 8)$ onde

$v[i]$	3	41	52	26	38	57	9	49
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$\text{Ordena}_S(v, a, b)$
Se $a \geq b$
Devolva v
Troca($v, a, \text{Minimo}(v, a, b)$)
Escreva v, a, b
Devolva $\text{Ordena}_S(v, a + 1, b)$

6. Explique como modificar o Algoritmo Ordena_S discutido em aula de tal forma que o número de trocas entre elementos do vetor no melhor caso seja 0.
7. Mostre o que será escrito na execução do algoritmo Ordena abaixo para a instância $(v, 1, 8)$ onde

$v[i]$	3	41	52	26	38	57	9	49
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Ordena(v, a, b)
Se $a \geq b$
Escreva v, a, b
Devolva v
$m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$
Ordena(v, a, m)
Ordena($v, m+1, b$)
Intercala(v, a, m, b)
Escreva v, a, b
Devolva v

8. Use indução matemática para mostrar que quando n é uma potência de 2, a solução da relação de recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 & \text{se } n = 2, \\ T(n) &= 2T(n/2) + n & \text{se } n = 2^k, \text{ para } k > 1 \end{aligned}$$

é $T(n) = n \log n$.

9. A seguinte versão do algoritmo **Intercala** pode ser usada pelo **Mergesort**?

```

Intercala( $v, a, m, b$ )
1  faça  $i \leftarrow a$  até  $m$  faça
2     $u[i] \leftarrow v[i]$ 
3  faça  $j \leftarrow m+1$  até  $b$  faça
4     $u[b+m+1-j] \leftarrow v[j]$ 
5   $i \leftarrow a$ 
6   $j \leftarrow b$ 
7  faça  $k \leftarrow a$  até  $b$  faça
8    se  $u[i] \leq u[j]$ 
9      então  $v[k] \leftarrow u[i]$ 
10      $i \leftarrow i+1$ 
11     senão  $v[k] \leftarrow u[j]$ 
12      $j \leftarrow j-1$ 

```

10. Mostre que o número de comparações feitas pelo Ordena_M (Merge Sort) é crescente em função do tamanho do vetor, ou seja, que

$$C(n+1) > C(n) \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde $C(n)$ é o número de comparações feitas na execução de Ordena_M(v, a, b) com $n = b - a + 1$.

11. Mostre o que será escrito na execução do algoritmo Particiona abaixo para a instância $(v, 1, 12)$ onde

$v[i]$	13	19	9	5	12	8	7	4	21	2	6	11
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Particiona(v, a, b, x)

 Se $a > b$

 Devolva $a - 1$

$m \leftarrow \text{Particiona}(v, a, b - 1, x)$

 Se $v[b] \leq x$

$m \leftarrow m + 1$

 Troca(v, m, b)

 Escreva v, a, b

 Devolva m

12. Que modificações devem ser feitas no Algoritmo Ordena_Q (Quick Sort) para que ordene em ordem não-crescente?
13. Na execução de Ordena_Q(v, a, b) (Quick Sort) com $n = b - a + 1$, qual o número máximo de vezes em que um mesmo elemento de valor máximo em v pode ser movido?
14. Apresente seis vetores de tamanho 10, com os valores pertencentes ao conjunto $\{1, \dots, 10\}$, onde o Algoritmo Ordena_Q (Quick Sort) efetua o maior número possível de comparações.
15. Quantas comparações faz o Algoritmo Ordena_Q (Quick Sort) faz ao ordena um vetor de tamanho n com todos os valores iguais?