Algoritmos e Estruturas de Dados II

Exercícios

1. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Mínimo de Vetor.

```
M(v,a,b)
---------------------------
Se a = b
    Devolva a
m ← M(v, a + 1, b)
Se v[a] < v[m]
    m ← a
Devolva m
```

   (a) É verdade que

   $$\mathsf{M}(v, a, b) = \mathsf{Mínimo}'(v, a, b),$$

   para toda instância (v, a, b) do problema de Mínimo de Vetor[1]? Justifique.

   (b) Seja $c(n)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de uma instância de tamanho n do problema. Expresse $c(n)$ como uma recorrência.

   (c) Resolva esta recorrência.

2. Considere o seguinte problema computacional.

Fatorial
Instância: $n \in \mathbb{N}$.
Resposta: $n!$

   (a) Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema.

   (b) Seja $m(n)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância n. Expresse $m(n)$ como uma recorrência.

   (c) Resolva esta recorrência.

3. Considere o seguinte problema computacional.

Exponenciação
Instância: (x, n), onde $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.
Resposta: x^n

   (a) Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema de Exponenciação baseado na seguinte observação.

   $$x^n = x \times x^{n-1}, \text{ para todo } n > 0.$$

   (b) Seja $m(n)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância (x, n). Expresse $m(n)$ como uma recorrência.

[1] Mínimo′ refere-se ao algoritmo discutido em aula

(c) Resolva esta recorrência.

4. Considere o seguinte problema computacional.

Soma de Vetor
Instância: (v, a, b), onde v é um vetor indexado por $[a..b]$.
Resposta: $\sum_{i=a}^{b} v[i]$

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(n)$ o número de somas de elementos de v efetuadas na execução de seu algoritmo para uma instância de tamanho n. Expresse $s(n)$ como uma recorrência, usando como tamanho de uma instância o valor de

$$|(v, a, b)| = b - a + 1,$$

(c) Resolva esta recorrência.

5. A *seqüência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada pela recorrência

$$F(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional.

Número de Fibonacci
Instância: $n \in \mathbb{N}$.
Resposta: $F(n)$.

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(n)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância n. Expresse $s(n)$ como uma recorrência.

6. Considere o seguinte problema computacional.

Reversão
Instância: (v, a, b), onde v é um vetor indexado por $[a..b]$.
Resposta: O vetor v revertido, isto é, modificado de tal forma que o primeiro elemento se torna o último, o segundo se torna o penúltimo e assim por diante.

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $t(n)$ o número de trocas entre elementos de v efetuadas na execução de seu algoritmo uma instância de tamanho n do problema, onde

$$|(v, a, b)| = b - a + 1.$$

i. Expresse $t(n)$ como uma recorrência.

7. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Busca em Vetor.

```
B(x,v,a,b)
  Se a > b
      Devolva não
  r ← B(x, v, a, b − 1)
  Se r ≠ não
      Devolva r
  Se x = v[b]
      Devolva b
  Devolva não
```

É verdade que

$$\mathsf{B}(x, v, a, b) = \mathsf{Busca}(x, v, a, b),$$

para toda instância (x, v, a, b) do problema[2]? Justifique.

8. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Busca em Vetor.

```
B(x,v,a,b)
  Se a > b
      Devolva não
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x = v[m]
      Devolva m
  r ← B(x, v, a, m − 1)
  Se r ≠ não
      Devolva r
  Devolva B(x, v, m + 1, b)
```

(a) Execute $\mathsf{B}(x, v, a, b)$ para as mesmas instâncias do problema de Busca em Vetor usadas como exemplo em aula.

(b) Seja $c(x, v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de $\mathsf{B}(x, v, a, b)$, e seja

$$c^+(n) = \max \{c(x, v, a, b) \mid |(x, v, a, b)| = n\}.$$

i. Para que instâncias (x, v, a, b) do problema temos

$$c(x, v, a, b) = c^+(n)?$$

ii. Expresse $c(n)$ como uma recorrência.

iii. Resolva esta recorrência.

9. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 1.

10. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 2.

11. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 3.

12. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 6.

[2] Busca refere-se ao algoritmo discutido em aula.

13. Dizemos que o vetor $v[a..b]$ é um *palíndromo* se a leitura de v na ordem direta é igual à sua leitura na ordem reversa, isto é, se

$$(v[a], v[a+1], \ldots, v[b-1], v[b]) = (v[b], v[b-1], \ldots, v[a+1], v[a]).$$

Considere o seguinte problema computacional.

Palíndromo
Instância: (v, a, b), onde v é um vetor indexado por $[a..b]$.
Resposta: sim se $v[a..b]$ é um palíndromo ou não, caso contrário

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $c(v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de seu algoritmo para a instância (v, a, b) do problema, e sejam

$$\begin{aligned} c^+(n) &= \max\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \\ c^-(n) &= \min\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \end{aligned}$$

onde

$$|(v, a, b)| = b - a + 1.$$

i. Descreva as instâncias (v, a, b) de tamanho n para as quais

$$c(v, a, b) = c^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias (v, a, b) de tamanho n para as quais

$$s(v, a, b) = c^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $c^-(n)$.

iv. Expresse $c^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(c) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo.

14. Seja p um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$. Dados $c \leq d \in [a..b]$, vamos denotar por $p_{c,d}$ o polinômio

$$p_{c,d}(x) = p[c]x^0 + p[c+1]x^1 + \ldots + p[d]x^{c-d}.$$

Por exemplo, se p é o vetor dado por

i	0	1	2	3	4	5
$p[i]$	4	8	15	16	23	42

então,

$$p_{0,5}(x) = 4x^0 + 8x^1 + 15x^2 + 16x^3 + 23x^4 + 42x^5,$$

e

$$p_{2,4}(x) = 15x^0 + 16x^1 + 23x^2.$$

Considere o seguinte problema computacional.

Avaliação de Polinômio
Instância: (p, a, b, x), onde p é um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$ e x é um número racional.
Resposta: $p_{a,b}(x)$.

(a) Usando o algoritmo do Exercício 3, escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(p, a, b, x)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância (p, a, b, x) do problema, e sejam

$$\begin{aligned} s^+(n) &= \max\{s(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \\ s^-(n) &= \min\{s(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \end{aligned}$$

onde

$$|(p,a,b,x)| = b - a + 1.$$

i. Descreva as instâncias (p, a, b, x) de tamanho n para as quais

$$s(p,a,b,x) = s^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias (p, a, b, x) de tamanho n para as quais

$$s(p,a,b,x) = s^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $s^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(c) Seja $m(p, a, b, x)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância (p, a, b, x) do problema, e sejam

$$\begin{aligned} m^+(n) &= \max\{m(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \\ m^-(n) &= \min\{m(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}. \end{aligned}$$

i. Descreva as instâncias (p, a, b, x) de tamanho n para as quais

$$m(p,a,b,x) = m^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias (p, a, b, x) de tamanho n para as quais

$$m(p,a,b,x) = m^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $m^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(d) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo. Qual é o invariante da iteração?

15. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos, e é dado por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k, \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional:

Coeficiente Binomial

Instância: (n, k), onde $n, k \in \mathbb{N}$.
Resposta: $\binom{n}{k}$

(a) Quantas multiplicações realiza o seguinte algoritmo para o problema de Coeficiente Binomial[3]?

Binomial(n,k)

Se $n < k$
    Devolva 0
Devolva $\frac{\mathsf{Fatorial}(n)}{\mathsf{Fatorial}(k)\mathsf{Fatorial}(n-k)}$

(b) Seja

$$m^+(n) = \max\{m(n,k) \mid 0 \leq k \leq n\}.$$

i. Para que instâncias (n,k) do problema de Coeficiente Binomial temos

$$m(n,k) = m^+(n)?$$

ii. Dê uma expressão para $m^+(n)$.

(c) A partir da observação de que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n,$$

modifique o Algoritmo Binomial′ de maneira a garantir que

$$m^+(n) = n - 1.$$

(d) Escreva um algoritmo *recursivo* o problema de Coeficiente Binomial baseado na seguinte recorrência[4].

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k, \\ 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{se } 0 < k \leq n. \end{cases}$$

i. Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância (n,k) do problema. Dê uma expressão para $m(n,k)$.

ii. Seja $s(n,k)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância (n,k) do problema. Expresse $s(n,k)$ através de uma recorrência.

16. Considere o seguinte problema computacional.

Diferença de Vetores	
Instância:	(v,a,u,p,l), onde v é um vetor indexado por $[a..a+l]$ e u é um vetor indexado por $[p..p+l]$.
Resposta:	o menor $d \in [0..l]$ tal que $v[a+d] \neq u[p+d]$, ou $l+1$ se $v[a+d] = u[p+d]$ para todo $d \in [0..l]$.

(a) Escreva um algoritmo recursivo para resolver este problema.

(b) Seja $c(v,a,u,p,l)$ o número de comparações entre elementos de v e u na execução de seu algoritmo sobre a instância (v,a,u,p,l) do problema, e seja

$$c^+(n) = \max\{c(v,a,u,p,l) \mid |(v,a,u,p,l)| = n\},$$

onde

$$|(v,a,u,p,l)| = l + 1.$$

[3] Fatorial refere-se ao algoritmo dado como resposta no Exercício 2.

[4] Esta recorrência é conhecida como *Triângulo de Pascal*.

i. Para que instâncias (v, a, u, p, l) do problema temos

$$c(v, a, u, p, l) = c^+(n)?$$

ii. Expresse $c^+(n)$ por meio de uma recorrência.

iii. Resolva esta recorrência.

(c) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo.

17. Sejam $v[a..b]$ e $u[p..q]$ dois vetores. Dizemos que *u é um segmento de v em m* se $m+q-p \leq b$ e

$$u[p+i] = v[m+i] \text{ para todo } 0 \leq i \leq q-p.$$

Dizemos que *u é um segmento de v* se u é um segmento de v em m para algum $m \in [a..b]$.

Considere o seguinte problema computacional[5].

Casamento de Vetores	
Instância:	(u, p, q, v, a, b), onde u é um vetor indexado por $[p..q]$, com $p \leq q$ e v é um vetor indexado por $[a..b]$, com $a \leq b$
Resposta:	$b+1$, se u não é segmento de v ou o menor $m \in [a..b]$ tal que u é um segmento de v em m, caso contrário.

(a) Usando o algoritmo pedido no Exercício 16, escreva um algoritmo recursivo para este problema.

(b) Seja $c(u, p, q, v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de u e v na execução de seu algoritmo sobre a instância (u, p, q, v, a, b) do problema, e seja

$$c^+(n) = \max\{c(u, p, q, v, a, b) \mid |(u, p, q, v, a, b)| = n\},$$

onde

$$|(v, a, u, p, l)| = (q-p) + (b-a) + 2.$$

i. Para que instâncias (u, p, q, v, a, b) do problema temos

$$c(u, p, q, v, a, b) = c^+(n)?$$

ii. Expresse $c^+(n)$ por meio de uma recorrência.

iii. Resolva esta recorrência.

(c) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo.

18. O seguinte problema computacional é uma variação do problema de Busca em Vetor Ordenado discutido em sala de aula. Neste problema procuramos um índice m do vetor para o qual $v[m] = m$, ou, se não existe tal índice, o "lugar onde ele deveria estar".

Ponto Fixo de Vetor Ordenado	
Instância:	(v, a, b), onde $v[a..b]$ é um vetor ordenado.
Resposta:	$m \in [a-1..b]$ satisfazendo $m < v[i]$ para todo $m < i \leq b$.

(a) Escreva um algoritmo recursivo para este problema que faz no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ comparações com elementos de v para qualquer instância de tamanho n.

[5]Observe que este é o problema resolvido por um editor de textos quando se utiliza a função de procurar por uma palavra num texto (também chamado de "find", "search" ou "match").

(b) Prove que seu algoritmo faz no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ comparações com elementos de v para qualquer instância de tamanho n.

(c) Escreva uma versão iterativa de seu algoritmo.

19. Como a precisão de qualquer dispositivo computacional é finita, o cálculo computacional do valor de uma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quase sempre uma aproximação.

Dizemos que um algoritmo F calcula uma ε-aproximação de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se F é um algoritmo que recebe um número racional x como entrada e devolve outro número racional $F(x)$ satisfazendo $|F(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Considere o seguinte problema computacional.

Raiz Quadrada
Instância: (x, ε), onde $x \geq 0$ e $\varepsilon \in \mathbb{Q}$.
Resposta: Uma ε-aproximação de $\sqrt{x}$, isto é, $r \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $|\sqrt{x} - r| \leq \varepsilon$

(a) Baseado na idéia de busca binária discutida em aula, escreva um algoritmo que só usa as 4 operações aritméticas elementares para resolver este problema.

(b) Expresse o número de operações aritméticas envolvendo números racionais feitas pelo seu algoritmo em função dos valores de x e ε.