Теория функций комплексной переменной

Н. В. Цилевич *

2 сентября 2016 г.

Содержание

*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Комплексные числа

Вспомним базовые понятия, связанные с комплексными числами.

Комплексное число представляется в виде пары вещественных чисел: $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, где $x, y \in \mathbb{R}$. При этом x называется вещественной частью числа z, а y — мнимой частью. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их соответственно вещественные и мнимые части. Также справедливы следующие соотношения:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, при этом $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0)$ и операции согласованы.

Число $i = (0, 1)$ называется *мнимой единицей*. Легко видеть, что $i^2 = -1$. Таким образом, комплексное число можно записать в *алгебраической форме*: $z = (x, y) = z + iy$. Числа вида iy $(y \in \mathbb{R})$ называеются *чисто мнимыми*.

Теорема 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — *поле. Вычитание и деление вводятся как операции, обратные к сложению и умножению.*

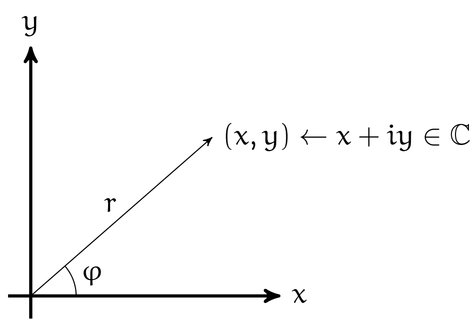
Доказательство. Тривиально. □

Замечание 1.2. На $\mathbb{C}$ не задано отношения порядка.

Определим операцию комплексного сопряжения: если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$.
Свойства сопряжения:

1. $\overline{\overline{z}} = z$ (*инволюция*);
2. $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$, где $*$ — любая арифметическая операция;
3. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$;
4. $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geqslant 0$;
5. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Сложение комплексных чисел соответствует сложению их радиус-векторов на комплексной плоскости. Перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Благодаря этому мы можем записать комплексное число в *тригонометрической форме*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. $r = |z|$ называется *модулем* числа z, а φ — его *аргументом*.

Свойства модуля:

1. Геометрический смысл: $|z|$ — расстояние на комплексной плоскости от 0 до z, отсюда $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2;
2. $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\overline{z}} \geqslant 0$;
3. $|z| = 0 \iff z = 0$;
4. $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$;
5. Неравенство треугольника: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
6. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

Заметим, что аргумент определён для любого ненулевого z с точностью до $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Будем обозначать $\operatorname{Arg} z$ множество всех аргументов z, а $\arg z$ — значение аргумента из фиксированного интервала длины 2π, например, $[0, 2\pi)$.

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ — в I и IV квадрантах} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ — во II и III квадрантах} \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \text{ и } \arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Показательная форма записи комплексного числа

Введём теперь обозначение: $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда $z = re^{i\varphi}$ — такая форма называется *показательной*.

Лемма 1.3. *Пусть* $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. *Тогда* $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Доказательство.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Для частного — аналогично. □

Таким образом, имеем $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ (по определению суммы множеств $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$) и $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Геометрический смысл умножения на число $a \in \mathbb{C}$: радиус-вектор растягивается в $|a|$ раз и поворачивается на угол $\arg a$.

Пример 1.4. Умножение на i — поворот на $\frac{\pi}{2}$.

Корень n-й степени из комплексного числа

Воспользуемся показательной формой: $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

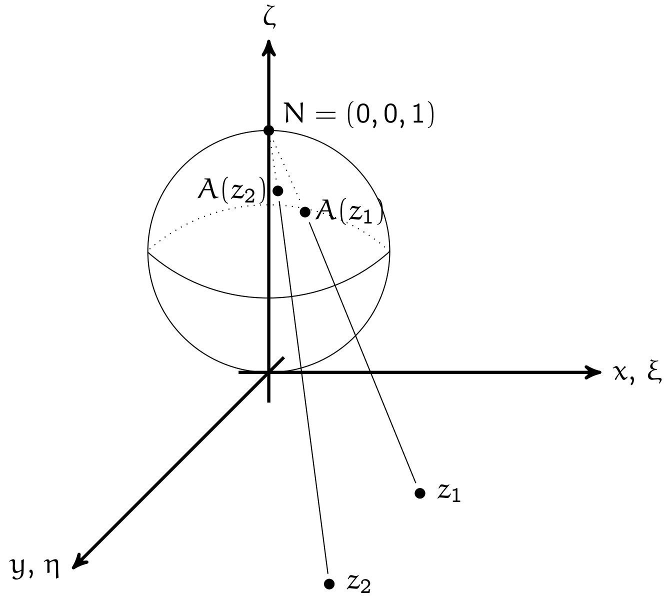
Определение 1.5. $w = \rho e^{i\psi}$ — корень n-й степени из $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $w^n = z$.

То есть:

$$\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1) \end{cases}$$

Итого, корней n-й степени из z n штук.

2 Стереографическая проекция и сфера Римана



Рассмотрим сферу S с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Уравнение этой сферы будет таким:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$$

Отождествим комплексную плоскость (x, y) с плоскостью (ξ, η). Рассмотрим лучи, исходящие из полюса N в точки $z \in \mathbb{C}$. Ясно, что точка пересечения луча и сферы единственна. Обозначим её как $A(z)$. Это и будет стереографическая проекция точки z на сферу S, которая называется *сферой Римана*. Таким образом мы установили взаимно-однозначное соответствие между комплексной плоскостью и сферой Римана без полюса:

$$\mathbb{C} \leftrightarrow S \backslash \{N\}$$

Предложение 2.1. *Справедливы соотношения:*

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z^2|}{1 + |z|^2}$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

Доказательство. Построим прямую через точки $N = (0, 0, 1)$ и $z = (x, y, 0)$. Она имеет вид $\{(tx, ty, 1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Подставим координаты точек прямой в уравнение сферы Римана:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + \cancel{1} - 2t + t^2 - \cancel{1} + t = 0$$

$$t^2(\underbrace{x^2 + y^2}_{|z|^2} + 1) = t \implies t = \frac{1}{1 + |z|^2}, \text{ откуда } \xi = tx = \frac{x}{1 + |z|^2}$$

Далее аналогично. □

Предложение 2.2. $\operatorname{dist}(A(z_1), A(z_2)) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}}$, $\operatorname{dist}(A(z), N) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$.

Доказательство. Спроецируем $A(z_1)$, $A(z_2)$ на ось $O\zeta$. Видно, что треугольники $\triangle BNA(z_1)$ и $\triangle ONz_1$ подобны (здесь $B = (0, 0, \zeta_1)$). Поэтому

$$\frac{\operatorname{dist}(N, A(z_1))}{\operatorname{dist}(N, z_1)} = \frac{\overbrace{\operatorname{dist}(N, B)}^{1-\zeta_1}}{\underbrace{\operatorname{dist}(N, O)}_{1}} \implies \operatorname{dist}(N, A(z_1)) = \sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \overbrace{(1-\zeta_1)}^{\frac{1}{1+|z_1|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$$

Точно также подобны $\triangle NA(z_1)A(z_2)$ и $\triangle Nz_1z_2$, отсюда

$$\frac{\operatorname{dist}(A(z_1), A(z_2))}{\operatorname{dist}(z_1, z_2)} = \frac{\operatorname{dist}(N, A(z_1))}{\operatorname{dist}(N, z_1)} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

□

Определение 2.3. Обобщённая окружность — это окружность или прямая.

Запишем уравнение обобщённой окружности:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \text{ где } A, B, C, D \in \mathbb{R},\ B^2 + C^2 > 4AD$$

Очевидно, что это уравнение является уравнением окружности тогда и только тогда, когда $A \neq 0$. В противном случае это — прямая.

Предложение 2.4. *Стереографическая проекция устанавливает биекцию между обобщёнными окружностями в $\mathbb{C}$ и окружностями на сфере Римана. При этом прямым соответствуют окружности, проходящие через точку N.*

Доказательство. Воспользуемся формулами $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$:

$$\frac{A \cdot (\xi^2 + \eta^2)}{(1-\zeta)^2} + \frac{B\xi + C\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

С учётом $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$ получим

$$\frac{A\zeta}{1-\zeta} + \frac{B\xi + C\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

$$(A - D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0$$

Мы получили уравнение плоскости. Значит, образом будет пересечение сферы с плоскостью, то есть окружность. Если мы в полученное уравнение подставим N, то убедимся, что N лежит в этой плоскости, при этом $A = 0$. □

Определение 2.5. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется расширенной комплексной плоскостью, ∞ — бесконечно удалённая точка.

Дополним определение стереографической проекции: пусть N переходит в ∞ и обратно. Тогда стереографическая проекция устанавливает биекцию между S и $\overline{\mathbb{C}}$, следовательно мы можем считать прямую окружностью, проходящей через ∞.

Замечание 2.6. Стереографическая проекция конформна, то есть сохраняет углы между кривыми (будет описано далее).

Замечание 2.7. Дробно-линейные отображения в $\mathbb{C}$ переходят в движения сферы Римана.

3 Предел и непрерывность

Мы отождествили $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$, а следовательно ввели понятие сходимости, которое наследует из $\mathbb{R}^2$ основные свойства.

Определение 3.1. $z_n \to z \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |z_n - z| < \varepsilon.$

Свойства сходимости:

1. *Покоординатность*: $z_n \to z \iff x_n \to x,\ y_n \to y$ (где $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$);
2. *Критерий Коши*: z_n сходится, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$;
3. *Принцип Больцано-Вейерштрасса*: множество A ограничено тогда и только тогда, когда существует R такое, что $z < R$ для всех $z \in A$. Если z_n ограничена, то из z_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
4. $\lim(z_k * z'_k) = \lim z_k * \lim z'_k$, где $*$ — арифметическая операция.

Расширим понятие сходимости на $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение 3.2. $z_n \in \mathbb{C} \to \infty \iff \forall R > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |z_n| > R.$

Замечание 3.3. Очевидно, что $z_n \to \infty \iff |z_n| \to \infty \iff \frac{1}{|z_n|} \to 0 \iff \frac{1}{z_n} \to 0.$

Предложение 3.4. *Сходимость в $\overline{\mathbb{C}}$ равносильна сходимости на сфере Римана. В частности, $z_n \to \infty \iff A(z_n) \to N$.*

Доказательство. Следует из формул для расстояния:

$$\operatorname{dist}(A(z_n), A(z)) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1 + |z_n|^2} \cdot \sqrt{1 + |z|^2}} \to 0$$

□

Отсюда также вытекает, что $\overline{\mathbb{C}}$ — компактно.

Займёмся теперь изучением функций комплексной переменной.

Предел функции комплексной переменной

Определение 3.5. $f(x + iy) = \underbrace{u(x, y)}_{\operatorname{Re} f} + i\underbrace{v(x, y)}_{\operatorname{Im} f}$, при этом $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Определение 3.6. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$, z_0 — предельная точка E и $a \in \overline{\mathbb{C}}$.

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : z \in \overset{\circ}{B}_\delta(z_0) \cap E \implies f(z) \in B_\varepsilon(a)$

Имеет место и покоординатная сходимость:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = \alpha \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = \beta \end{cases}$$

Определение 3.7 (по Гейне). $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$, если для любой последовательности $z_n \subset E$ такой, что $z_n \to z_0$ выполнено $f(z_n) \to a$.

Определение 3.8. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$, z_0 — неизолированная точка множества E. Функция f называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$; *непрерывной на множестве* E, если f непрерывна в каждой точке этого множества.

Отметим важные свойства непрерывности:

1. Функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ непрерывны по совокупности переменных;

2. Композиция непрерывных функций непрерывна;

3. Если функция непрерывна на компакте, то она на нём ограничена, а её модуль достигает на этом компакте своих наибольшего и наименьшего значений.

4. Если G — область (т. е. открытое связное множество), $f : G \to D$ и f — непрерывная биекция, то D — тоже область и f^{-1} непрерывно.

4 Дифференцирование функции комплексной переменной

Определение 4.1. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, G — область, $z_0 \in G$. Функция называется *дифференцируемой в точке* z_0, если существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, который называется *производной* функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Введём обозначение: $z - z_0 = \Delta z$, $f(z) - f(z_0) = \Delta f$ и заметим, что если $\varphi = \alpha + i\beta = o(\Delta z)$, то это то же самое, что $\alpha, \beta = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$.

Рассмотрим простейшие свойства дифференцируемых функций:

1. *Определение через дифференциал*: функция f дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда существет точка $A \in \mathbb{C}$ такая, что $\Delta f = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$. При этом $A = f'(z_0)$;

2. Если f дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке;

3. Сумма и произведение дифференцируемых функций дифференцируемы;

4. *Композиция*: пусть $f : G \to D$, $g : D \to \mathbb{C}$, G и D — области, $z_0 \in G$, $w_0 = f(z_0)$ и $h(z) = g(f(z))$. Если f дифференцируема в точке z_0, g дифференцируема в точке w_0, то h дифференцируема в точке z_0 и $h'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$.

Теорема 4.2. *Пусть* $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$*,* G *— область,* $z_0 = (x_0, y_0) \in G$*.* f *дифференцируема в точке* z_0 *тогда и только тогда, когда* u *и* v *дифференцируемы как функции из* $\mathbb{R}^2$ *в* $\mathbb{R}$ *и, кроме того, выполнены* **условия Коши-Римана***:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Доказательство. Дифференцируемость f в точке z_0 равносильна существованию $A = a + ib \in \mathbb{C}$ такого, что $\Delta f = A\Delta z + \varphi$, где $\varphi = o(\Delta z)$. Пусть $\varphi = \alpha + i\beta$. Тогда это будет равносильно $\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha + i\beta$, причём $\alpha, \beta = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, что, в свою очередь, равносильно выполнению условий

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha \\ \Delta v = a\Delta y + b\Delta x + \beta \end{cases}$$

То есть u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0). Легко видеть, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = b = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

Замечание 4.3. Производную функции f можно теперь выразить так:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Определение 4.4. Функция называется *голоморфной в точке*, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция называется *голоморфной в области*, если она дифференцируема в любой точке этой области.

Далее будем обозначать множество всех функций, голоморфных в области G, как $H(G)$.

Пример 4.5.

$$f(z) = u + iv = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y, \quad u'_x = 1, v'_y = -1$$

Видно, что условия Коши-Римана не выполнены — функция нигде не дифференцируема.

Попробуйте в качестве упражнения доказать, что $f(z) = |z|^2$ дифференцируема, но не голоморфна в точке 0.

Предложение 4.6 (Условия Коши-Римана в тригонометрической форме). *Пусть* $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$*. Тогда* $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}$

Доказательство. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$u'_\varphi = u'_x \cdot x'_\varphi + u'_y \cdot y'_\varphi = -u'_x \cdot r\sin\varphi + u'_y \cdot r\cos\varphi = r \cdot (-v'_y \sin\varphi - v'_x \cos\varphi)$$

С учётом $v'_r = v'_x \cdot x'_r + v'_y \cdot y'_r = v'_x \cdot \cos\varphi + v'_y \sin\varphi$ получим:

$$r \cdot (-v'_y \sin\varphi - v'_x \cos\varphi) = -rv'_r$$

Аналогично и для $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}$. □

Пример 4.7.

$$f(z) = z^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$u = r^n \cos n\varphi, \quad v = r^n \sin n\varphi$$

$$u'_\varphi = -nr^n \sin n\varphi, \quad v'_r = nr^{n-1}\sin n\varphi, \quad u'_\varphi = -rv'_r.$$

Определение 4.8. Функция f называется *регулярной в точке*, если она голоморфна в этой точке и f' непрерывна в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 4.9 (об обратной функции). *Пусть функция* f *регулярна в точке* z_0 *и* $f'(z_0) \neq 0$. *Тогда существует окрестность точки* z_0*, в которой* f *обратима, причём* f^{-1} *в соответствующей окрестности точки* $w_0 = f(z_0)$ *дифференцируема и* $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Доказательство. Мы хотим применить вещественную теорему об обратной функции, рассматривая f как $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Для этого нам нужна гладкость, которая есть по условию теоремы, и ненулевой якобиан.

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - v'_x u'_y$$

По условию Коши-Римана, это равно:

$$(u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \text{ — по условию.}$$

По вещественной теореме об обратной функции существует окрестность точки z_0, в которой f обратима и f^{-1} в соответствующей окрестности точки w_0 непрерывна. Так как f и f^{-1} непрерывны, то $\Delta z \to 0 \iff \Delta w \to 0$.

$$(f^{-1})'(w_0) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta f^{-1}}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta f} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta f} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

□

Примеры 4.10.

- $f(z) = z^n$ — регулярна в $\mathbb{C}$, $f'(z) = nz^{n-1}$;
- многочлены регулярны в $\mathbb{C}$;
- $f(z) = \frac{1}{z}$ регулярна в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$;
- дробно-линейная функция $\frac{az+b}{cz+d}$ регулярна в $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$.

Геометрический смысл аргумента производной

Определение 4.11. Гладкая кривая в $\mathbb{C}$ — это кривая, у которой существует параметризация $\gamma(t)$, являющаяся простым гладким путём: $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b]$.

Касательный вектор к кривой γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ есть $\gamma'(t_0)$, и он не зависит от параметризации. Вспомним также, что угол между гладкими кривыми в точке их пересечения есть угол между их касательными в этой точке.

Пусть функция f голоморфна в области G, $z_0 = \gamma(t_0) \in G$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ — гладкая кривая, проходящая через точку z_0, $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ — образ кривой γ. Касательный вектор к Γ в точке $w_0 = f(z_0)$ есть $\Gamma'(t_0)$.

$$\Gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0) \implies \operatorname{Arg} \Gamma'(t_0) = \arg f'(z_0) + \operatorname{Arg} \gamma'(t_0)$$

И можно увидеть геометрический смысл аргумента производной: $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который поворачивается касательная к любой кривой в точке z_0 под действием f.

Понятие конформности

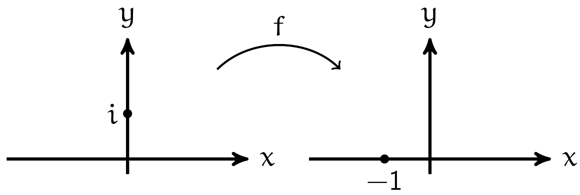
Определение 4.12. Отображение f называется *конформным в точке* z_0, если оно сохраняет углы между кривыми в z_0 (с учётом направления). f называется *конформным в области* G, если оно конформно во всех точках области G и однолистно (взаимно однозначно).

Примеры 4.13.

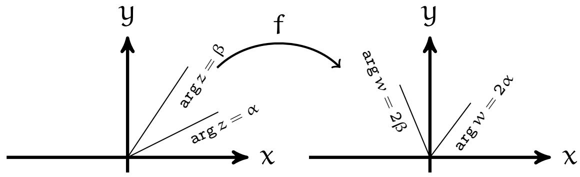
- если f голоморфна в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то f конформно в z_0.

- $f(z) = z^2$. $f'(z) = 2z \implies f$ конформно в любой точке $z \neq 0$.

  Допустим, $z_0 = i$. $\arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}$.



  При $z_0 = 0$ конформности нет — углы между кривыми, проходящими через 0, не сохраняются:



  Видим, что угол межу прямыми составлял $\beta - \alpha$, а после действия функции f стал $2(\beta - \alpha)$.

5 Элементарные функции комплексной переменной

Изучим свойства некоторых важных функций.

Целая степенная функция $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

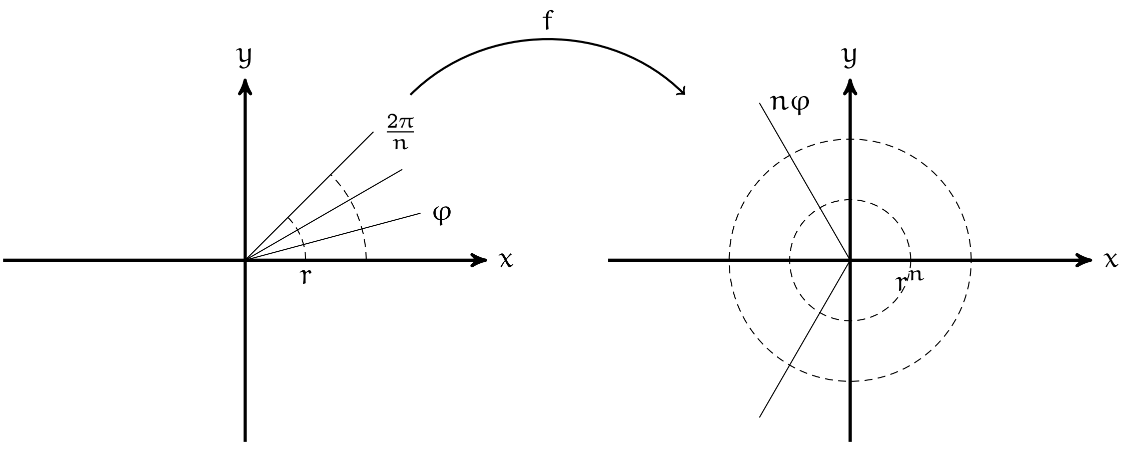
При $n = 1$ функция $f(z) = z$ регулярна на всей комплексной плоскости и конформна. При $n \geqslant 2$ f регулярна в $\mathbb{C}$, а её производная $f'(z) = nz^{n-1}$.

$$z_1^n = z_2^n \iff r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad (*)$$

Это означает, что f взаимно однозначно в области G тогда и только тогда, когда G не содержит пар точек, удовлетворяющих условию $(*)$. Пример такой области:

$$G_k = \left\{ \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n} \right\}$$

f конформно отображает G_k на $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$:



Чтобы продолжить изучение элементарных функций, нам нужно сделать отступление и ввести понятие о непрерывных ветвях и точках ветвления.

Точки ветвления многозначной функции

Определение 5.1. Пусть f — многозначная функция. Говорят, что в области G выделена *непрерывная ветвь* f, если любой точке из этой области сопоставлено одно значение $f(z)$ так, что полученная однозначная функция непрерывна.

Аналогично определяется и непрерывная ветвь вдоль пути.

Замечание 5.2. Ни существование, ни единственность непрерывной ветви не гарантируются.

Определение 5.3. z_0 называется *точкой ветвления* функции f, если в любой окрестности этой точки при обходе её по любому замкнутому пути любая непрерывная ветвь f вдоль этого пути получает ненулевое приращение.

Чтобы в G существовала непрерывная ветвь f, необходимо, чтобы G не содержала путей, обходящих точку ветвления.

Пример 5.4. $f(z) = \operatorname{Arg} z$. 0 — единственная конечная точка ветвления функции f. Непрерывная ветвь Arg существует в области, если в этой области нельзя обойти точку 0. Например, $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.

Функция $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

Эта функция определена в области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и является n-значной.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i \operatorname{Arg} z}{n}}$$

Непрерывные ветви корня существуют там же, где и непрерывные ветви Arg — в областях, где нельзя обойти 0. В каждой такой области существует n непрерывных ветвей:

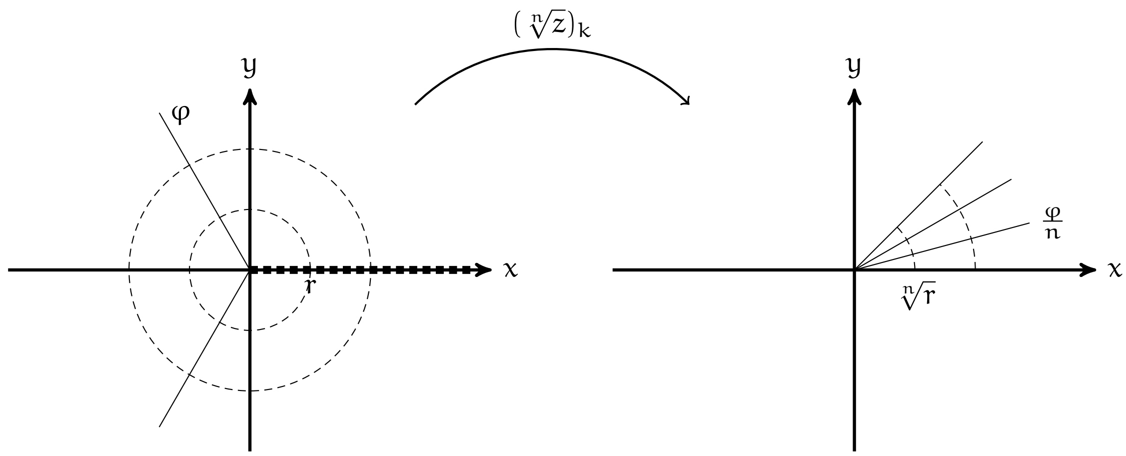
$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i \arg z}{n} + \frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

К каждой ветви применима теорема об обратной функции:

$$w = (\sqrt[n]{z})_k, \quad z = w^n$$

$$(\sqrt[n]{z})_k' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{n w^{n-1}} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1}$$

Отображение f конформно в любой точке $z \neq 0$. В качестве области с непрерывной ветвью можно взять $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$:



Далее главной ветвью корня будем называть главную ветвь Arg.

Экспоненциальная функция

Определение 5.5. Пусть $z = x + iy$. Тогда $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Предложение 5.6. *Свойства экспоненциальной функции:*

1. *Комплексная экспоненциальная функция есть продолжение вещественной;*
2. $f(z) = e^z$ *регулярна в* $\mathbb{C}$, $f'(z) = e^z$;
3. $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$;
4. f *конформна в любой точке комплексной плоскости;*
5. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;
6. *Формула Эйлера:* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$;
7. *Функция* f $2\pi i$*-периодична:* $e^{z+2\pi i} = e^z$;
8. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$. *То есть* f *взаимно однозначна в области* G, *если* G *не содержит точек* z_1, z_2 *таких, что* $z_1 - z_2 = 2\pi k i$;
9. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Мы не будем доказывать все перечисленные свойства, так как большинство из них очевидны. Докажем свойства 2 и 5.

Для доказательства свойства 2 нужно проверить дифференцируемость вещественной и мнимой части, а также условия Коши-Римана. Пусть $f = u + iv$. $u = e^x\cos y$, $v = e^x \sin y$ — эти функции дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. $u'_x = e^x\cos y = v'y$, $u'_y = -e^x\sin y = -v'_x$. Условия Коши-Римана выполнены.

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$$

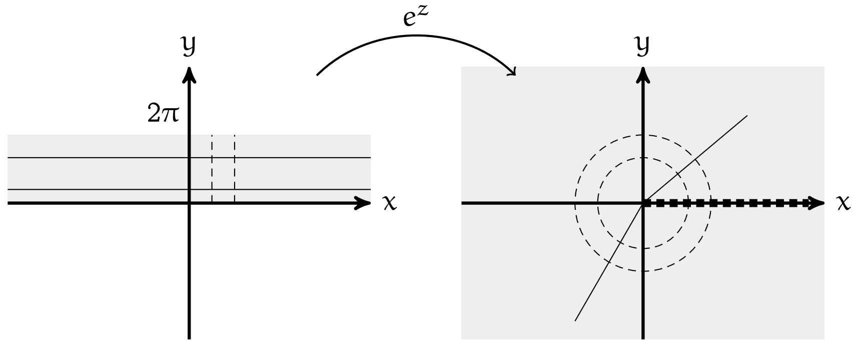
Свойство 5 доказывается простейшими преобразованиями:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1\cos y_2)) =$$
$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}$$

□

Пример 5.7. $G = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$



Логарифмическая функция

Определение 5.8. Пусть $z \neq 0$. w называется *логарифмом* z, если $e^w = z$.

Если $w = u+iv$, то $e^w = e^{u+iv} = z$ равносильно $e^u = |z|$, $v = \operatorname{Arg} z$, то есть $u = \ln|z|$. Итого, для всех $z \neq 0$ существует бесконечно много логарифмов. Обозначим за $\operatorname{Ln} z$ множество всех логарифмов числа z:

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i \arg z + 2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Тогда $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ будет *главным значением логарифма.*

Итак, Ln — многозначная функция на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ с точкой ветвления 0.

Предложение 5.9. *Свойства логарифмической функции:*

1. $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$;
2. *В области, в которой существует непрерывная ветвь логарифма, ветвей бесконечно много и они отличаются на* $2\pi k i$. *Каждая ветвь есть обратная к экспоненциальной функция.*

Доказательство. 1. Доказываем два включения. Пусть $w \in \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$. Тогда w представимо в виде суммы $w_1 + w_2$, где $w_1 \in \operatorname{Ln} z_1$, $w_2 \in \operatorname{Ln} z_2$. Отсюда $e^w = e^{w_1} \cdot e^{w_2} = z_1 z_2$, поэтому $w \in \operatorname{Ln}(z_1 z_2)$. Обратно, пусть теперь $w \in \operatorname{Ln}(z_1 z_2)$. Тогда $e^w = z_1 z_2$. Возьмём $w_1 = \ln z_1$, $w_2 = w - w_1$. Получим, что $e^{w_1} = z_1$, $e^{w_2} = e^{w - w_1} = \frac{e^w}{e^{w_1}} = \frac{z_1 z_2}{z_1} = z_2$, поэтому $w_2 \in \operatorname{Ln} z_2$. Таким образом, $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in \operatorname{Ln} z_1$, $w_2 \in \operatorname{Ln} z_2$, отсюда $w \in \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

2. Пусть $(\ln z)_k = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(\ln z)'_k = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

□

Функция Жуковского

Определение 5.10. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, где $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, называется *функцией Жуковского.*

Функция Жуковского регулярна на области определения, $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$. Она также конформна во всех точках кроме 0 и ± 1.

$$f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 1 + \frac{1}{z_2} \iff (z_1 - z_2) + \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} = 0 \iff$$

$$\iff (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0 \iff z_1 = z_2 \text{ либо } z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, f взаимно однозначно в любой области, не содержащей пар точек $z_1 z_2 = 1$. Например, $G = \{0 < |z| < 1\}$ или $G = \{|z| > 1\}$.

Теперь воспользуемся показательной формой комплексного числа и применим к ней функцию Жуковского:

$$z = re^{i\varphi}, \quad f(z) = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi$$

Видно, что окружность с центром в 0 и радиусом r_0, где $0 < r_0 < 1$, переходит в эллипс, обходимый в отрицательном направлении:

$$w = a\cos\varphi + ib\sin\varphi, \quad a = \frac{1}{2}(r_0 + \frac{1}{r_0}), \quad b = -\frac{1}{2}(\frac{1}{r_0} - r_0)$$

Найдём фокусы эллипса. Для эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ они равны $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Легко проверить, что фокусы равны ± 1.

При $r_0 \to 0$ эллипс уходит на бесконечность, при $r_0 \to 1$ — «схлопывается» в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды в противоположных направлениях. Значит, функция Жуковского конформно отображает $G = \{0 < |z| < 1\}$ на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

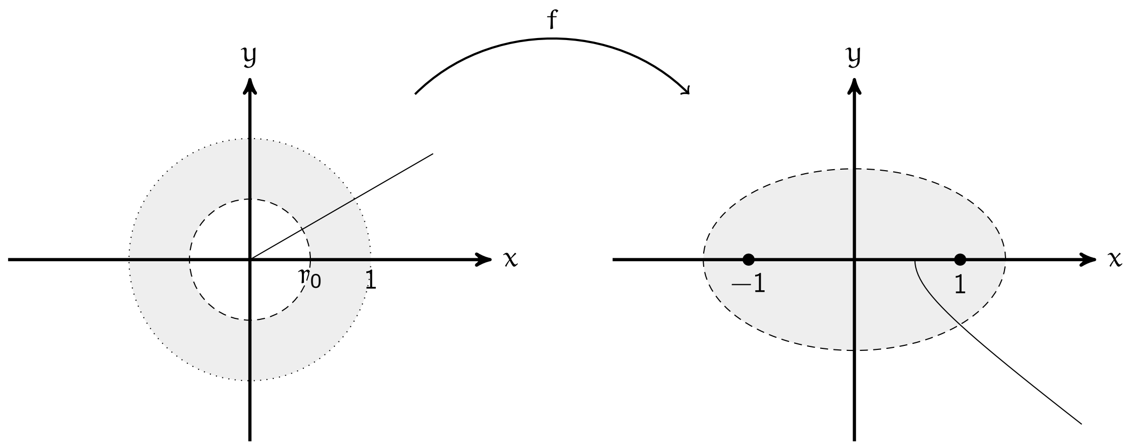
Луч $\{\arg z = \varphi_0\}$, $0 < r < 1$ переходит в кривую:

$$w = a\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) - \frac{1}{2}ib(\frac{1}{r} - r), \quad a = \cos\varphi_0, \quad b = \sin\varphi_0$$

Кривая, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, — это гипербола, вернее, в данном случае, половина одной ветви гиперболы, лежащая в нужном квадранте. Фокусы гиперболы равны $\pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm 1$

Рассмотрим случаи, когда $a = 0$ или $b = 0$:

- при $\varphi_0 = 0$ образом будет луч $(1, \infty)$;
- при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ образ — луч $(0, -i\infty)$;
- при $\varphi_0 = \pi$ — луч $(-\infty, -1)$;
- при $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ — луч $(0, i\infty)$.



Функция, обратная к функции Жуковского

Исследуем функцию $z = w + \sqrt{(w-1)(w+1)}$. Это двузначная функция.

$$\operatorname{Arg}\sqrt{(w-1)(w+1)} = \frac{1}{2}(\operatorname{Arg}(w-1) + \operatorname{Arg}(w+1))$$

$$\Delta_\gamma \arg\sqrt{(w-1)(w+1)} = \frac{1}{2}(\Delta_\gamma \arg(w-1) + \Delta_\gamma \arg(w+1))$$

Здесь $\Delta_\gamma \arg$ означает приращение аргумента при обходе вдоль кривой γ. Узнаем, где существует непрерывная ветвь функции, обратной к функции Жуковского:

- если γ не обходит ни -1, ни 1, то $\Delta_\gamma \arg \sqrt{(w-1)(w+1)} = 0$ - хорошо;
- если γ обходит 1, но не обходит -1, то $\Delta_\gamma \arg \sqrt{(w-1)(w+1)} = \pi$ - плохо;
- если γ обходит -1, но не обходит 1, то $\Delta_\gamma \arg \sqrt{(w-1)(w+1)} = \pi$ - плохо;
- если γ обходит и 1, и -1, то $\Delta_\gamma \arg \sqrt{(w-1)(w+1)} = 2\pi$ - хорошо.

Таким образом, непрерывная ветвь существует в областях, в которых нельзя обойти ровно одну точки из ± 1. Например, $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Тригонометрические функции

Определение 5.11. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.