

# Теория функций комплексной переменной

Н. В. Цилевич \*

30 августа 2016 г.

## Содержание

1	Комплексные числа	2
2	Стереографическая проекция и сфера Римана	4
3	Предел и непрерывность	6
4	Дифференцирование функции комплексной переменной	7
5	Элементарные функции комплексной переменной	10

---

\*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

# 1 Комплексные числа

Вспомним базовые понятия, связанные с комплексными числами.

Комплексное число представляется в виде пары вещественных чисел:  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ . При этом  $x$  называется вещественной частью числа  $z$ , а  $y$  — мнимой частью. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их соответственно вещественные и мнимые части. Также справедливы следующие соотношения:

1.  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2.  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
3.  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , при этом  $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0)$  и операции согласованы.

Число  $i = (0, 1)$  называется *мнимой единицей*. Легко видеть, что  $i^2 = -1$ . Таким образом, комплексное число можно записать в *алгебраической форме*:  $z = (x, y) = x + iy$ . Числа вида  $iy$  ( $y \in \mathbb{R}$ ) называются *чисто мнимыми*.

**Теорема 1.1.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  — поле. Вычитание и деление вводятся как операции, обратные к сложению и умножению.

*Доказательство.* Тривиально. □

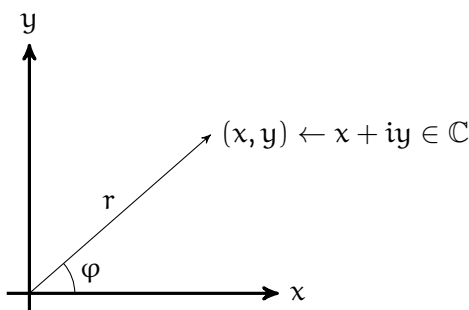
**Замечание 1.2.** На  $\mathbb{C}$  не задано отношения порядка.

Определим операцию комплексного сопряжения: если  $z = x + iy$ , то  $\bar{z} = x - iy$ .

Свойства сопряжения:

1.  $\bar{\bar{z}} = z$  (*инволюция*);
2.  $\overline{z_1 * z_2} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2$ , где  $*$  — любая арифметическая операция;
3.  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ ;
4.  $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geq 0$ ;
5.  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ .

## Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Сложение комплексных чисел соответствует сложению их радиус-векторов на комплексной плоскости. Перейдём к полярным координатам:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Благодаря этому мы можем записать комплексное число в *тригонометрической форме*:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .  $r = |z|$  называется *модулем* числа  $z$ , а  $\varphi$  — его *аргументом*.

Свойства модуля:

1. Геометрический смысл:  $|z|$  — расстояние на комплексной плоскости от 0 до  $z$ , отсюда  $|z_1 - z_2|$  — расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$ ;
2.  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0$ ;
3.  $|z| = 0 \iff z = 0$ ;
4.  $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ;
5. Неравенство треугольника:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
6.  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Заметим, что аргумент определён для любого ненулевого  $z$  с точностью до  $2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Будем обозначать  $\operatorname{Arg} z$  множество всех аргументов  $z$ , а  $\arg z$  — значение аргумента из фиксированного интервала длины  $2\pi$ , например,  $[0, 2\pi)$ .

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} - \text{в I и IV квадрантах} \\ \arctg \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} - \text{во II и III квадрантах} \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \text{ и } \arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z})$$

### Показательная форма записи комплексного числа

Введём теперь обозначение:  $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Тогда  $z = re^{i\varphi}$  — такая форма называется *показательной*.

**Лемма 1.3.** Пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ . Тогда  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ,  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Для частного — аналогично. □

Таким образом, имеем  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$  (по определению суммы множеств  $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ ) и  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Геометрический смысл умножения на число  $a \in \mathbb{C}$ : радиус-вектор растягивается в  $|a|$  раз и поворачивается на угол  $\arg a$ .

**Пример 1.4.** Умножение на  $i$  — поворот на  $\frac{\pi}{2}$ .

### Корень $n$ -й степени из комплексного числа

Воспользуемся показательной формой:  $z^n = r^n e^{in\varphi}$ .

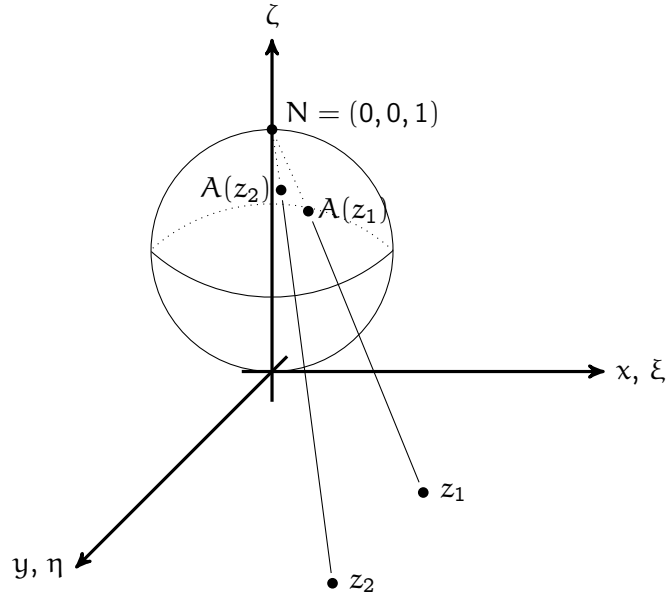
**Определение 1.5.**  $w = \rho e^{i\psi}$  — корень  $n$ -й степени из  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  тогда и только тогда, когда  $w^n = z$ .

То есть:

$$\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1) \end{cases}$$

Итого, корней  $n$ -й степени из  $z$   $n$  штук.

## 2 Стереографическая проекция и сфера Римана



Рассмотрим сферу  $S$  с центром в точке  $(0, 0, \frac{1}{2})$  и радиусом  $\frac{1}{2}$ . Уравнение этой сферы будет таким:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$$

Отождествим комплексную плоскость  $(x, y)$  с плоскостью  $(\xi, \eta)$ . Рассмотрим лучи, исходящие из полюса  $N$  в точки  $z \in \mathbb{C}$ . Ясно, что точка пересечения луча и сферы единственна. Обозначим её как  $A(z)$ . Это и будет стереографическая проекция точки  $z$  на сферу  $S$ , которая называется *сферой Римана*. Таким образом мы установили взаимно-однозначное соответствие между комплексной плоскостью и сферой Римана без полюса:

$$\mathbb{C} \leftrightarrow S \setminus \{N\}$$

**Предложение 2.1.** *Справедливы соотношения:*

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

*Доказательство.* Построим прямую через точки  $N = (0, 0, 1)$  и  $z = (x, y, 0)$ . Она имеет вид  $\{(tx, ty, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Подставим координаты точек прямой в уравнение сферы Римана:

$$t^2 x^2 + t^2 y^2 + 1 - 2t + t^2 - 1 + t = 0$$

$$t^2 (\underbrace{x^2 + y^2}_{|z|^2} + 1) = t \implies t = \frac{1}{1 + |z|^2}, \text{ откуда } \xi = tx = \frac{x}{1 + |z|^2}$$

Далее аналогично. □

**Предложение 2.2.**  $\text{dist}(A(z_1), A(z_2)) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad \text{dist}(A(z), N) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$

*Доказательство.* Спроецируем  $A(z_1), A(z_2)$  на ось  $O\zeta$ . Видно, что треугольники  $\triangle BNA(z_1)$  и  $\triangle ONz_1$  подобны (здесь  $B = (0, 0, \zeta_1)$ ). Поэтому

$$\frac{\text{dist}(N, A(z_1))}{\text{dist}(N, z_1)} = \frac{\overbrace{\text{dist}(N, B)}^{1-\zeta_1}}{\underbrace{\text{dist}(N, O)}_1} \implies \text{dist}(N, A(z_1)) = \sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \overbrace{(1 - \zeta_1)}^{\frac{1}{1+|z_1|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$$

Точно также подобны  $\triangle NA(z_1)A(z_2)$  и  $\triangle Nz_1z_2$ , отсюда

$$\frac{\text{dist}(A(z_1), A(z_2))}{\text{dist}(z_1, z_2)} = \frac{\text{dist}(N, A(z_1))}{\text{dist}(N, z_1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

□

**Определение 2.3.** Обобщённая окружность — это окружность или прямая.

Запишем уравнение обобщённой окружности:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \text{ где } A, B, C, D \in \mathbb{R}, B^2 + C^2 > 4AD$$

Очевидно, что это уравнение является уравнением окружности тогда и только тогда, когда  $A \neq 0$ . В противном случае это — прямая.

**Предложение 2.4.** *Стереографическая проекция устанавливает биекцию между обобщёнными окружностями в  $\mathbb{C}$  и окружностями на сфере Римана. При этом прямым соответствуют окружности, проходящие через точку  $N$ .*

*Доказательство.* Воспользуемся формулами  $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ :

$$\frac{A \cdot (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \zeta)^2} + \frac{B\xi + C\eta}{1 - \zeta} + D = 0$$

С учётом  $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta)$  получим

$$\frac{A\zeta}{1 - \zeta} + \frac{B\xi + C\eta}{1 - \zeta} + D = 0$$

$$(A - D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0$$

Мы получили уравнение плоскости. Значит, образом будет пересечение сферы с плоскостью, то есть окружность. Если мы в полученное уравнение подставим  $N$ , то убедимся, что  $N$  лежит в этой плоскости, при этом  $A = 0$ . □

**Определение 2.5.**  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  называется расширенной комплексной плоскостью,  $\infty$  — бесконечно удалённая точка.

Дополним определение стереографической проекции: пусть  $N$  переходит в  $\infty$  и обратно. Тогда стереографическая проекция устанавливает биекцию между  $S$  и  $\overline{\mathbb{C}}$ , следовательно мы можем считать прямую окружностью, проходящей через  $\infty$ .

**Замечание 2.6.** Стереографическая проекция конформна, то есть сохраняет углы между кривыми (будет описано далее).

**Замечание 2.7.** Дробно-линейные отображения в  $\mathbb{C}$  переходят в движения сферы Римана.

### 3 Предел и непрерывность

Мы отождествили  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}^2$ , а следовательно ввели понятие сходимости, которое наследует из  $\mathbb{R}^2$  основные свойства.

**Определение 3.1.**  $z_n \rightarrow z \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |z_n - z| < \varepsilon$ .

Свойства сходимости:

1. *Покоординатность*:  $z_n \rightarrow z \iff x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  (где  $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ );
2. *Критерий Коши*:  $z_n$  сходится, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$ ;
3. *Принцип Больцано-Вейерштрасса*: множество  $A$  ограничено тогда и только тогда, когда существует  $R$  такое, что  $z < R$  для всех  $z \in A$ . Если  $z_n$  ограничена, то из  $z_n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
4.  $\lim(z_k * z'_k) = \lim z_k * \lim z'_k$ , где  $*$  — арифметическая операция.

Расширим понятие сходимости на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Определение 3.2.**  $z_n \in \mathbb{C} \rightarrow \infty \iff \forall R > 0 \exists N : \forall n > N \quad |z_n| > R$ .

**Замечание 3.3.** Очевидно, что  $z_n \rightarrow \infty \iff |z_n| \rightarrow \infty \iff \frac{1}{|z_n|} \rightarrow 0 \iff \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$ .

**Предложение 3.4.** *Сходимость в  $\overline{\mathbb{C}}$  равносильна сходимости на сфере Римана. В частности,  $z_n \rightarrow \infty \iff A(z_n) \rightarrow N$ .*

*Доказательство.* Следует из формул для расстояния:

$$\text{dist}(A(z_n), A(z)) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1 + |z_n|^2} \cdot \sqrt{1 + |z|^2}} \rightarrow 0$$

□

Отсюда также вытекает, что  $\overline{\mathbb{C}}$  — компактно.

Займёмся теперь изучением функций комплексной переменной.

#### Предел функции комплексной переменной

**Определение 3.5.**  $f(x + iy) = \underbrace{u(x, y)}_{\text{Re } f} + i \underbrace{v(x, y)}_{\text{Im } f}$ , при этом  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

**Определение 3.6.** Пусть  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0$  — предельная точка  $E$  и  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : z \in \overset{\circ}{B}_\delta(z_0) \cap E \implies f(z) \in B_\varepsilon(a)$$

Имеет место и покоординатная сходимость:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta \end{cases}$$

**Определение 3.7** (по Гейне).  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ , если для любой последовательности  $z_n \subset E$  такой, что  $z_n \rightarrow z_0$  выполнено  $f(z_n) \rightarrow a$ .

**Определение 3.8.** Пусть  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0$  — неизолитованная точка множества  $E$ . Функция  $f$  называется *непрерывной в точке  $z_0$* , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ; *непрерывной на множестве  $E$* , если  $f$  непрерывна в каждой точке этого множества.

Отметим важные свойства непрерывности:

1. Функция  $f$  непрерывна тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$  непрерывны по совокупности переменных;
2. Композиция непрерывных функций непрерывна;
3. Если функция непрерывна на компакте, то она на нём ограничена, а её модуль достигает на этом компакте своих наибольшего и наименьшего значений.
4. Если  $G$  — область (т. е. открытое связное множество),  $f : G \rightarrow D$  и  $f$  — непрерывная биекция, то  $D$  — тоже область и  $f^{-1}$  непрерывно.

## 4 Дифференцирование функции комплексной переменной

**Определение 4.1.** Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  — область,  $z_0 \in G$ . Функция называется *дифференцируемой в точке  $z_0$* , если существует предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ , который называется *производной функции  $f$  в точке  $z_0$*  и обозначается  $f'(z_0)$ .

Введём обозначение:  $z - z_0 = \Delta z$ ,  $f(z) - f(z_0) = \Delta f$  и заметим, что если  $\varphi = \alpha + i\beta = o(\Delta z)$ , то это то же самое, что  $\alpha, \beta = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ .

Рассмотрим простейшие свойства дифференцируемых функций:

1. *Определение через дифференциал:* функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда существует точка  $A \in \mathbb{C}$  такая, что  $\Delta f = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$ . При этом  $A = f'(z_0)$ ;
2. Если  $f$  дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке;
3. Сумма и произведение дифференцируемых функций дифференцируемы;
4. *Композиция:* пусть  $f : G \rightarrow D$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  и  $D$  — области,  $z_0 \in G$ ,  $w_0 = f(z_0)$  и  $h(z) = g(f(z))$ . Если  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ ,  $g$  дифференцируема в точке  $w_0$ , то  $h$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $h'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$ .

**Теорема 4.2.** Пусть  $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  — область,  $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ .  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда  $u$  и  $v$  дифференцируемы как функции из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}$  и, кроме того, выполнены условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

*Доказательство.* Дифференцируемость  $f$  в точке  $z_0$  равносильна существованию  $A = a + ib \in \mathbb{C}$  такого, что  $\Delta f = A\Delta z + \varphi$ , где  $\varphi = o(\Delta z)$ . Пусть  $\varphi = \alpha + i\beta$ . Тогда это будет равносильно  $\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha + i\beta$ , причём  $\alpha, \beta = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ , что, в свою очередь, равносильно выполнению условий

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha \\ \Delta v = a\Delta y + b\Delta x + \beta \end{cases}$$

То есть  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ . Легко видеть, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = b = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

□

**Замечание 4.3.** Производную функции  $f$  можно теперь выразить так:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

**Определение 4.4.** Функция называется *голоморфной в точке*, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция называется *голоморфной в области*, если она дифференцируема в любой точке этой области.

Далее будем обозначать множество всех функций, голоморфных в области  $G$ , как  $H(G)$ .

**Пример 4.5.**

$$f(z) = u + iv = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y, \quad u'_x = 1, v'_y = -1$$

Видно, что условия Коши-Римана не выполнены — функция нигде не дифференцируема.

Попробуйте в качестве упражнения доказать, что  $f(z) = |z|^2$  дифференцируемо не голоморфно в точке 0.

**Предложение 4.6** (Условия Коши-Римана в тригонометрической форме).

Пусть  $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ . Тогда  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r \frac{\partial u}{\partial r}$

*Доказательство.*  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

$$u'_\varphi = u'_x \cdot x'_\varphi + u'_y \cdot y'_\varphi = -u'_x \cdot r \sin \varphi + u'_y \cdot r \cos \varphi = r \cdot (-v'_y \sin \varphi - v'_x \cos \varphi)$$

С учётом  $v'_r = v'_x \cdot x'_r + v'_y \cdot y'_r = v'_x \cdot \cos \varphi + v'_y \sin \varphi$  получим:

$$r \cdot (-v'_y \sin \varphi - v'_x \cos \varphi) = -rv'_r$$

Аналогично и для  $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r \frac{\partial u}{\partial r}$ .

□

**Пример 4.7.**

$$f(z) = z^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$u = r^n \cos n\varphi, \quad v = r^n \sin n\varphi$$

$$u'_\varphi = -nr^n \sin n\varphi, \quad v'_r = nr^{n-1} \sin n\varphi, \quad u'_r = -rv'_r.$$

**Определение 4.8.** Функция  $f$  называется *регулярной в точке*, если она голоморфна в этой точке и  $f'$  непрерывна в некоторой окрестности этой точки.

**Теорема 4.9** (об обратной функции). Пусть функция  $f$  регулярна в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда существует окрестность точки  $z_0$ , в которой  $f$  обратима, причём  $f^{-1}$  в соответствующей окрестности точки  $w_0 = f(z_0)$  дифференцируема и  $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .



*Доказательство.* Мы хотим применить вещественную теорему об обратной функции, рассматривая  $f$  как  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Для этого нам нужна гладкость, которая есть по условию теоремы, и ненулевой якобиан.

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - v'_x u'_y$$

По условию Коши-Римана, это равно:

$$(u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0 \text{ — по условию.}$$

По вещественной теореме об обратной функции существует окрестность точки  $z_0$ , в которой  $f$  обратима и  $f^{-1}$  в соответствующей окрестности точки  $w_0$  непрерывна. Так как  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны, то  $\Delta z \rightarrow 0 \iff \Delta w \rightarrow 0$ .

$$(f^{-1})'(w_0) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{-1}}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta f} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta f} = \frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

□

**Примеры 4.10.** •  $f(z) = z^n$  — регулярна в  $\mathbb{C}$ ,  $f'(z) = nz^{n-1}$ ;

- многочлены регулярны в  $\mathbb{C}$ ;
- $f(z) = \frac{1}{z}$  регулярна в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ ;
- дробно-линейная функция  $\frac{az+b}{cz+d}$  регулярная в  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ .

### Геометрический смысл аргумента производной

**Определение 4.11.** Гладкая кривая в  $\mathbb{C}$  — это кривая, у которой существует параметризация  $\gamma(t)$ , являющаяся простым гладким путём:  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ .

Касательный вектор к кривой  $\gamma$  в точке  $z_0 = \gamma(t_0)$  есть  $\gamma'(t_0)$ , и он не зависит от параметризации. Вспомним также, что угол между гладкими кривыми в точке их пересечения есть угол между их касательными в этой точке.

Пусть функция  $f$  голоморфна в области  $G$ ,  $z_0 = \gamma(t_0) \in G$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — гладкая кривая, проходящая через точку  $z_0$ ,  $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$  — образ кривой  $\gamma$ . Касательный вектор к  $\Gamma$  в точке  $w_0 = f(z_0)$  есть  $\Gamma'(t_0)$ .

$$\Gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0) \implies \text{Arg } \Gamma'(t_0) = \arg f'(z_0) + \text{Arg } \gamma'(t_0)$$

И можно увидеть геометрический смысл аргумента производной:  $\arg f'(z_0)$  — это угол, на который поворачивается касательная к любой кривой в точке  $z_0$  по действием  $f$ .

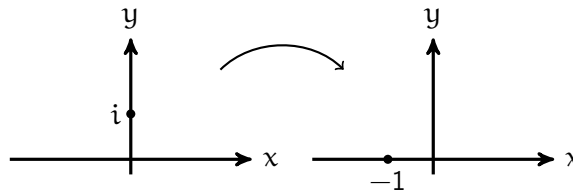
### Понятие конформности

**Определение 4.12.** Отображение  $f$  называется *конформным в точке  $z_0$* , если оно сохраняет углы между кривыми в  $z_0$  (с учётом направления).  $f$  называется *конформным в области  $G$* , если оно конформно во всех точках области  $G$  и однолистно (взаимно однозначно).

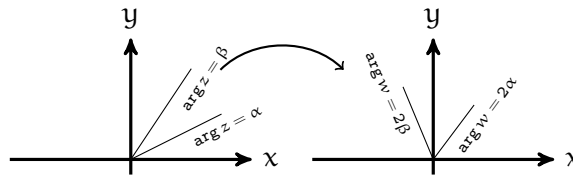
**Примеры 4.13.** • если  $f$  голоморфна в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ , то  $f$  конформно в  $z_0$ .

- $f(z) = z^2$ .  $f'(z) = 2z$ ,  $\arg f' = \text{const} \implies f$  конформно в любой точке  $z \neq 0$ .

Допустим,  $z_0 = i$ .  $\arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}$ .



При  $z_0 = 0$  конформности нет — углы между кривыми, проходящими через 0, не сохраняются:



Видим, что угол между прямыми составлял  $\beta - \alpha$ , а после действия функции  $f$  стал  $2(\beta - \alpha)$ .

## 5 Элементарные функции комплексной переменной