Теория функций комплексной переменной

Н. В. Цилевич *

29 августа 2016 г.

Содержание

*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Комплексные числа

Вспомним базовые понятия, связанные с комплексными числами.

Комплексное число представляется в виде пары вещественных чисел: $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, где $x, y \in \mathbb{R}$. При этом x называется вещественной частью числа z, а y — мнимой частью. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их соответственно вещественные и мнимые части. Также справедливы следующие соотношения:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, при этом $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0)$ и операции согласованы.

Число $i = (0, 1)$ называется *мнимой единицей*. Легко видеть, что $i^2 = 1$. Таким образом, комплексное число можно записать в *алгебраической форме*: $z = (x, y) = z + iy$. Числа вида iy $(y \in \mathbb{R})$ называются *чисто мнимыми*.

Теорема 1.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — *поле. Вычитание и деление вводятся как операции, обратные к сложению и умножению.*

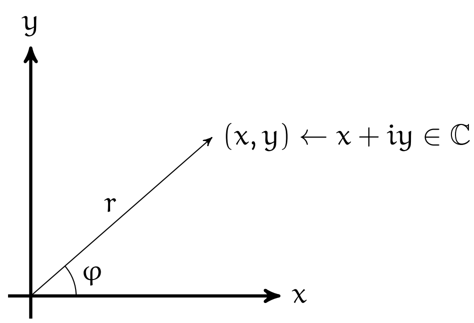
Доказательство. Тривиально. □

Замечание 1.2. На $\mathbb{C}$ не задано отношения порядка.

Определим операцию комплексного сопряжения: если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$.
Свойства сопряжения:

1. $\overline{\overline{z}} = z$ (*инволюция*);
2. $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$, где $*$ — любая арифметическая операция;
3. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$;
4. $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \geqslant 0$;
5. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Сложение комплексных чисел соответствует сложению их радиус-векторов на комплексной плоскости. Перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Благодаря этому мы можем записать комплексное число в *тригонометрической форме*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. $r = |z|$ называется *модулем* числа z, а φ — его *аргументом*.

Свойства модуля:

1. Геометрический смысл: $|z|$ — расстояние на комплексной плоскости от 0 до z, отсюда $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2;
2. $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\overline{z}} \geqslant 0$;
3. $|z| = 0 \iff z = 0$;
4. $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$;
5. Неравенство треугольника: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
6. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

Заметим, что аргумент определён для любого ненулевого z с точностью до $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Будем обозначать $\operatorname{Arg} z$ множество всех аргументов z, а $\arg z$ — значение аргумента из фиксированного интервала длины 2π, например, $(0, 2\pi)$.

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ — в I и IV квадранта} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ — во II и III квадрантах} \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \text{ и } \arg z_1 - arg z_2 = 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Показательная форма записи комплексного числа

Введём теперь обозначение: $e^{i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\varphi + i \sin\varphi$. Тогда $z = re^{i\varphi}$ — такая форма называется *показательной*.

Лемма 1.3. *Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$*

Доказательство.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Для частного — аналогично. $\square$

Таким образом, имеем $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ (по определению суммы множеств $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b : a \in A, b \in B\}$) и $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Геометрический смысл умножения на число $a \in \mathbb{C}$: радиус-вектор растягивается в $|a|$ раз и поворачивается на угол $\arg a$.

Пример 1.4. Умножение на i — поворот на $\frac{\pi}{2}$.

Корень n-й степени из комплексного числа

Воспользуемся показательной формой: $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

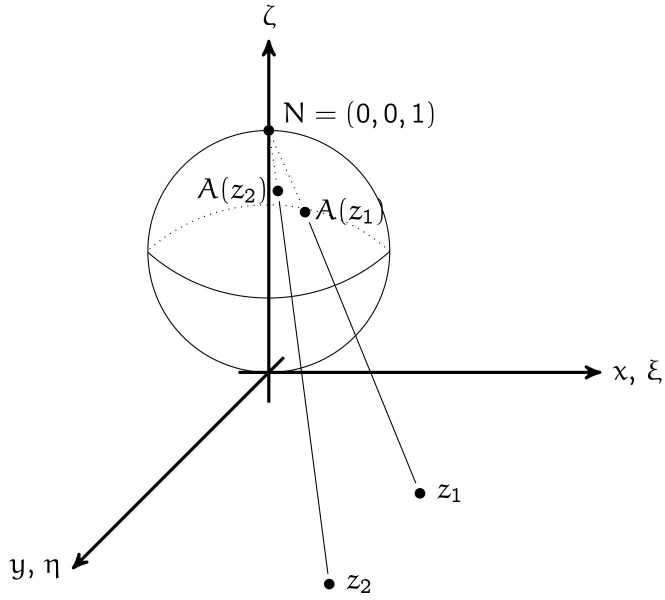
Определение 1.5. $w = \rho e^{i\psi}$ — корень n-й степени из $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда $w^n = z$.

То есть:

$$\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, ..., n-1) \end{cases}$$

Итого, корней n-й степени из z n штук.

2 Стереографическая проекция и сфера Римана



Рассмотрим сферу S с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}$. Уравнение этой сферы будет таким:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$$

Отождествим комплексную плоскость (x, y) с плоскостью (ξ, η). Рассмотрим лучи, исходящие из полюса N в точки z. Ясно, что точка пересечения луча и сферы единственна. Обозначим её как $A(z)$. Это и будет стереографическая проекция точки z на сферу S, которая называется *сферой Римана*. Таким образом мы установили взаимно-однозначное соответствие между комплексной плоскостью и сферой Римана без полюса:

$$\mathbb{C} \leftrightarrow S\backslash\{N\}$$

Предложение 2.1. *Справедливы соотношения:*

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z^2|}{1+|z|^2}$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

Доказательство. Построим прямую через точки $N = (0, 0, 1)$ и $z = (x, y, 0)$. Она имеет вид $\{(tx, ty, 1-t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Подставим координаты точек прямой в уравнение сферы Римана:

$$t^2x^2 + t^2y^2 + \cancel{1} - 2t + t^2 - \cancel{1} + t = 0$$

$$t^2(\underbrace{x^2+y^2}_{|z|^2}+1) = t \implies t = \frac{1}{1+|z|^2}, \text{ откуда } \xi = tx = \frac{x}{1+|z|^2}$$

Далее аналогично. $\square$

Предложение 2.2. $\operatorname{dist}(A(z_1), A(z_2)) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}$, $\operatorname{dist}(A(z), N) = \frac{1}{\sqrt{q+|z|^2}}$.

Доказательство. Спроецируем $A(z_1)$, $A(z_2)$ на ось $O\zeta$. Видно, что треугольники $\triangle BNA(z_1)$ и $\triangle ONz_1$ подобны (здесь $B = (0, 0, \zeta_1)$). Поэтому

$$\frac{\operatorname{dist}(N, A(z_1))}{\operatorname{dist}(N, z_1)} = \frac{\overbrace{\operatorname{dist}(N, B)}^{1-\zeta_1}}{\underbrace{\operatorname{dist}(N, O)}_{1}} \implies \operatorname{dist}(N, A(z_1)) = \sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \overbrace{(1-\zeta_1)}^{\frac{1}{1+|z_1|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$$

Точно также подобны $\triangle NA(z_1)A(z_2)$ и $\triangle Nz_1z_2$, отсюда

$$\frac{\operatorname{dist}(A(z_1), A(z_2))}{\operatorname{dist}(z_1, z_2)} = \frac{\operatorname{dist}(N, A(z_1))}{\operatorname{dist}(N, z_1)} = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

□

Определение 2.3. Обобщённая окружность — это окружность или прямая.

Запишем уравнение обобщённой окружности:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \text{ где } A, B, C, D \in \mathbb{R},\ B^2 + C^2 > 4AD$$

Очевидно, что это уравнение является уравнением окружности тогда и только тогда, когда $A \neq 0$. В противном случае это — прямая.

Предложение 2.4. *Стереографическая проекция устанавливает биекцию между обобщёнными окружностями в $\mathbb{C}$ и окружностями на сфере Римана. При этом прямым соответствуют окружности, проходящие через точку N.*

Доказательство. Воспользуемся формулами $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$:

$$\frac{A \cdot (\xi^2 + \eta^2)}{(1-\zeta)^2} + \frac{B\xi + C\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

С учётом $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$ получим

$$\frac{A\zeta}{1-\zeta} + \frac{B\xi + C\eta}{1-\zeta} + D = 0$$

$$(A - D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0$$

Мы получили уравнение плоскости. Значит, образом будет пересечение сферы с плоскостью, то есть окружность. Если мы в полученное уравнение подставим N, то убедимся, что N лежит в этой плоскости, при этом $A = 0$. □

Определение 2.5. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется расширенной комплексной плоскостью, ∞ — бесконечно удалённая точка.

Дополним определение стереографической проекции: пусть N переходит в ∞ и обратно. Тогда стереографическая проекция устанавливает биекцию между S и $\overline{\mathbb{C}}$, следовательно мы можем считать прямую окружностью, проходящей через ∞.

Замечание 2.6. Стереографическая проекция конформна, то есть сохраняет углы между кривыми (будет описано далее).

Замечание 2.7. Дробно-линейные отображения в $\mathbb{C}$ переходят в движения сферы Римана.

3 Предел и непрерывность

Мы отождествили $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$, а следовательно ввели понятие сходимости, которое наследует из $\mathbb{R}^2$ основные свойства.

Определение 3.1. $z_n \to z \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |z_n - z| < \varepsilon$.

Свойства сходимости:

1. *Покоординатность*: $z_n \to z \iff x_n \to x$, $y_n \to y$ (где $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$);
2. *Критерий Коши*: z_n сходится, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$;
3. *Принцип Больцано-Вейерштрасса*: множество A ограничено тогда и только тогда, когда существует R такое, что $z < R$ для всех $z \in A$. Если z_n ограничена, то из z_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность;
4. $\lim(z_k * z'_k) = \lim z_k * \lim z'_k$, где $*$ — арифметическая операция.

Расширим понятие сходимости на $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение 3.2. $z_n \in \mathbb{C} \to \infty \iff \forall R > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |z_n| > R$.

Замечание 3.3. Очевидно, что $z_n \to \infty \iff |z_n| \to \infty \iff \frac{1}{|z_n|} \to 0 \iff \frac{1}{z_n} \to 0$.

Предложение 3.4. *Сходимость в $\overline{\mathbb{C}}$ равносильна сходимости на сфере Римана. В частности, $z_n \to \infty \iff A(z_n) \to N$.*

Доказательство. Следует из формул для расстояния:

$$\operatorname{dist}(A(z_n), A(z)) = \frac{|z_n - z|}{\sqrt{1 + |z_n|^2} \cdot \sqrt{1 + |z|^2}} \to 0$$

$\square$

Отсюда также вытекает, что $\overline{\mathbb{C}}$ — компактно.
Займёмся теперь изучением функций комплексной переменной.

Предел функции комплексной переменной

Определение 3.5. $f(x + iy) = \underbrace{u(x, y)}_{\operatorname{Re} f} + i \underbrace{v(x, y)}_{\operatorname{Im} f}$, при этом $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Определение 3.6. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$, z_0 — предельная точка E и $a \in \overline{\mathbb{C}}$.
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : z \in \overset{\circ}{B}_\delta(z_0) \cap E \implies f(z) \in B_\varepsilon(a)$

Имеет место и покоординатная сходимость:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = \alpha \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = \beta \end{cases}$$

Определение 3.7 (по Гейне). $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$, если для любой последовательности $z_n \subset E$ такой, что $z_n \to z_0$ выполнено $f(z_n) \to a$.

Определение 3.8. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \to \mathbb{C}$, z_0 — неизолированная точка множества E. Функция f называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$; *непрерывной на множестве* E, если f непрерывна в каждой точке этого множества.

Отметим важные свойства непрерывности:

1. Функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ непрерывны по совокупности переменных;
2. Композиция непрерывных функций непрерывна;
3. Если функция непрерывна на компакте, то она на нём ограничена, а её модуль достигает на этом компакте своих наибольшего и наименьшего значений.
4. Если G — область (т. е. открытое связное множество), $f : G \to D$ и f — непрерывная биекция, то D — тоже область и f^{-1} непрерывно.

4 Дифференцирование функции комплексной переменной