

# Функциональный анализ

Ф. Л. Бахарев \*

19 декабря 2016 г.

## Содержание

1	Линейное нормированное пространство . . . . .	2
2	Пространства Лебега . . . . .	4
3	Непрерывность. Сжимающее отображение . . . . .	6
4	Линейные операторы . . . . .	9
5	Пространства линейных непрерывных операторов . . . . .	11
6	Корректно разрешимые задачи . . . . .	12
7	Линейные непрерывные функционалы . . . . .	13
8	Интегральные операторы . . . . .	15
9	Скалярное произведение . . . . .	20
10	Ортогональность . . . . .	22
11	Теорема о наилучшем приближении . . . . .	23
12	Ортогональное дополнение и ортогональные проекторы . . . . .	25
13	Ряды Фурье . . . . .	26
14	Теорема Риса . . . . .	30
15	Сопряжённый оператор . . . . .	30
16	Собственные числа и собственные векторы . . . . .	32
17	Компактность . . . . .	33
18	Компактные операторы . . . . .	34
19	Примеры компактных операторов . . . . .	35
20	Собственные числа и собственные векторы компактных самосопряжённых операторов . . . . .	37

---

\*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

## 1 Линейное нормированное пространство

**Определение 1.1.** Линейное множество  $L$  над полем скаляров  $\mathbb{R} (\mathbb{C})$  — множество с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющее свойствам:

1.  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in L$
2.  $x + y = y + x \quad \forall x, y, z \in L$
3. Существует элемент  $0$  такой, что  $x + 0 = x \quad \forall x \in L$
4. Для любого  $x \in L$  существует обратный элемент по сложению  $-x$  такой, что  $-x + x = 0$
5.  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x \in L$
6.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x, y \in L$
7.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), x, y \in L$

**Определение 1.2.**  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}$  называется нормой, если:

1.  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in L$
2.  $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x) \quad \forall x \in L, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3.  $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in L$
4.  $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

Если выполнены только первых три свойства, то  $\varphi$  называется полунормой.

**Замечание 1.3.**

1.  $\rho(x, y) = \varphi(x - y)$  — метрика.
2. Если на пространстве задана норма  $\|\cdot\|$ , то  $X = (L, \varphi)$  — нормированное пространство.

**Определение 1.4.**  $x_n \rightarrow x$  в  $X$ , если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$

**Определение 1.5.**  $\{x_n\} \subset X$  — фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если  $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$

**Замечание 1.6.**  $x_n \rightarrow x \implies \{x_n\}$  — фундаментальная. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Определение 1.7.** Нормированное пространство  $X$  называется полным, если из фундаментальности последовательности следует существование предела.

**Определение 1.8.** Пусть  $x_n \in X$ .  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  сходится, если  $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$  имеет предел  $\lim S_n = S$ .  $S$  называется суммой ряда.

**Определение 1.9.** Ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  называется *сходящимся абсолютно*, если  $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$  сходится.

**Замечание 1.10.** Из обычной сходимости не следует абсолютная сходимость.

$S_n$  сходится  $\iff |S_n - S_m| \rightarrow 0$ . Пусть  $C_n = \sum_{j=1}^n \|x\|$ .  $C_n$  сходится  $\iff |C_n - C_m| \rightarrow 0$ .

Если мы хотим, чтобы сходимость  $S_n$  была равносильна  $\|S_n - S_m\| \rightarrow 0$ , то нам нужна полнота пространства.

**Определение 1.11.** Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (в честь польского математика Стефана Банаха).

**Примеры 1.12.**

- Евклидово пространство:  $\mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\| = |x| = \sqrt[n]{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$  — то же, что  $\ell_n^2$  с нормой  $\|\cdot\|_2$ ;
- $\ell_n^1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ , где  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ ;
- $\ell_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , где  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ ;
- $\ell_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ,  $\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \geq 1$ ;
- $C(\overline{\Omega})$  с нормой  $\|x\| = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x(t)|$ , где  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^m$ .  $\overline{\Omega}$  — замыкание  $\Omega$ . Ясно, что  $\overline{\Omega}$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ .

**Упражнение 1.13.** Верно ли, что  $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty$ ?

**Теорема 1.14.** Пространство  $C(\overline{\Omega})$  полно.

*Доказательство.* Рассмотрим фундаментальную последовательность  $x_n \in C(\overline{\Omega})$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall k, n > N \quad \|x_k - x_n\| = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

Возьмём  $t \in \overline{\Omega}$ .  $\{x_n(t)\}$  — числовая последовательность. Тогда получаем  $|x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$ , отсюда  $\{x_n(t)\}$  — фундаментальна, значит существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ .

Проверим, что  $\max_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , т. е.  $x_n \rightrightarrows x$  на  $\overline{\Omega}$ . Заметим, что  $\forall k, n > N$   $|x_k(t) - x_n(t)| < \varepsilon \implies |x(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon$ .

Почему же  $x$  непрерывна? Потому что равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

□

Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Рассмотрим пространство дифференцируемых функций  $C^1[a, b]$ . Какую норму на нём выбрать?

- $\varphi_1(x) = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ;
- $\varphi_2(x) = \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$ ;
- $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ ;
- $\varphi_4(x) = |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$ .

Заметим, что  $\varphi_2$  нормой вообще не является, а  $\varphi_1$  не даёт полноты пространства.

**Теорема 1.15.** 1. Пространство  $(C^1[a, b], \varphi_1)$  не полно.

2. Пространство  $(C^1[a, b], \varphi_3)$  полно.

*Доказательство.* Докажем первое утверждение.

*Первый аргумент.*  $x$  — производная непрерывная на  $[a, b]$ , негладкая. По аппроксимационной теореме Вейерштрасса для любого  $\varepsilon > 0$  существует многочлен  $P$  такой, что  $\max_{[a, b]} |P - x| < \varepsilon$

*Второй аргумент.* Пусть  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $x(t) = |t| \notin C^1[a, b]$ ,  $x^\varepsilon(t) = |t|^{1+\varepsilon} \in C^1[a, b]$ .  
 $\max_{[a, b]} |x(t) - x^\varepsilon(t)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Для доказательства второго утверждения возьмём  $x_n \in C^1[a, b]$  — последовательность, фундаментальную относительно  $\varphi_3$ .

$$\varphi_3(x_n - x_k) \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0 \implies \begin{cases} \varphi_1(x_n - x_k) \rightarrow 0 \\ \varphi_2(x_n - x_k) \rightarrow 0 \end{cases} \implies \exists x \in C^1[a, b], y \in C^1[a, b]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n - x) \rightarrow 0 \iff x_n \rightrightarrows x \text{ на } [a, b] \\ \varphi_1(x'_n - y) \rightarrow 0 \iff x'_n \rightrightarrows y \text{ на } [a, b] \end{cases} \implies x \in C^1[a, b], x' = y$$

Отсюда  $\varphi_3(x_n - x) \rightarrow 0$

□

## 2 Пространства Лебега

### Неравенство Гёльдера

Рассмотрим  $(T, \mu)$  — пространство с мерой,  $x, y$  — измеримые функции, и числа  $p, q > 0$  — сопряжённые показатели, т. е.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда верно неравенство:

$$\int_T |x(t)y(t)| d\mu(t) \leq \left( \int_T |x(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_T |y(t)|^q d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}}$$

### Неравенство Минковского

Если  $(T, \mu)$  — пространство с мерой,  $x, y$  — измеримые функции,  $p \geq 1$ , то верно неравенство:

$$\left( \int_T |x(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_T |y(t)|^q d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} \geq \int_T |x(t) + y(t)| d\mu(t)$$

Обозначение:  $\|x\|_p = \left( \int_T |x|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Замечание 2.1.** Частный случай —  $p = q = 2$ . Тогда неравенство Гёльдера оказывается неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$\int_T |x(t)| \cdot |y(t)| d\mu(t) \leq \left( \int_T |x(t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_T |y(t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Замечание 2.2.** Пусть  $T = \mathbb{N}$ , и если  $M \subset \mathbb{N}$ , то  $\#M = \text{card } M$  — количество элементов  $M$  — будет мерой. Рассмотрим функцию  $x : \mathbb{N} \rightarrow k$ , где  $k$  — некоторое поле скаляров. Мы помним, что функция из натуральных чисел называется последовательностью. Как можно

вычислять  $\int_{\mathbb{N}} x(n) d\#(n)$ ? Ясно, что такой интеграл — это ряд  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)$ , а суммируемые функции в этом случае будут абсолютно сходящимися рядами. Неравенство Гёльдера будет выглядеть так:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| |y_n| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

А неравенство Минковского — так:

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Определение 2.3.** Пространство Лебега  $\mathcal{L}^p(T, \mu)$  — это множество  $\{x \mid \int_T |x|^p d\mu < \infty\}$ . Оно линейно:  $x, y \in \mathcal{L}^p \implies x + y \in \mathcal{L}^p$  и  $\lambda y \in \mathcal{L}^p$

Заметим, что  $\|x\|_p = \left( \int_T |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$  — полунорма на  $\mathcal{L}^p(T, \mu)$ . Если  $\|x\|_p = 0$ , то  $x = 0$  почти везде.

Чтобы получить норму, введём следующее отношение эквивалентности:

$$x_1 \sim x_2 \text{ если } x_1 - x_2 = 0 \text{ почти везде.}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^p(T, \mu) / \sim = L^p(T, \mu)$$

— это настоящее пространство Лебега. В дальнейшем мы будем считать функции, отличающиеся на множестве меры нуль, одинаковыми.

**Замечание 2.4.** Пусть  $T \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \lambda$  — мера Лебега. Тогда будем обозначать  $L^p(T, \mu) = L^p(T)$ .

**Теорема 2.5.** Пространство  $L^p(T, \mu)$  полно при  $p \geq 1$ .

**Пример 2.6.** Рассмотрим  $L^2(0, +\infty)$  и  $L^1(0, +\infty)$ . Какое из этих пространств является вложением в другое? Возьмём функцию  $x(t) = \frac{1}{t+1}$ .

$$\int_0^\infty \frac{1}{t+1} dt = \infty$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2} dt < \infty$$

Отсюда видно, что  $L^2(0, +\infty) \not\subset L^1(0, +\infty)$ . Легко придумать и пример, доказывающий отсутствие включения в обратную сторону.

**Теорема 2.7** (О вложенности пространств  $L^p$ ). Пусть  $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ . Тогда:

$$1. \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}.$$

$$2. \text{ Если } (T, \mu) \text{ — пространство с мерой, } \mu(T) < \infty, \text{ то } L^{p_1}(T, \mu) \supset L^{p_2}(T, \mu)$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Хотим проверить, что  $x \in \ell^{p_1} \implies x \in \ell^{p_2}$ .

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_1} < \infty \implies \exists N \quad \forall j > N \quad |x_j| < 1 \implies |x_j|^{p_1} > |x_j|^{p_2}$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_1} > \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_2} \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_2} < \infty \implies x \in \ell^{p_2}$$

2. Для доказательства второго пункта достаточно применить неравенство Гёльдера.

□

### 3 Непрерывность. Сжимающее отображение

**Определение 3.1.** Возьмём отображение  $F : X \rightarrow Y$ , где  $X$  и  $Y$  — линейные нормированные пространства.  $F$  называется непрерывным в точке  $x_0$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x : \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$$

$F$  называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках  $X$ .

**Пример 3.2.**  $X = Y = C[0, 1]$ ,  $\|x\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ . Рассмотрим отображение  $(F(x))(t) = \int_0^t x(s) ds$  и докажем, что оно непрерывно.

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\| &= \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t x_1(s) ds - \int_0^t x_2(s) ds \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \max_{t \in [0,1]} t \cdot \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Достаточно взять  $\delta = \varepsilon$  и всё доказано.

**Определение 3.3.** Отображение  $F : X \rightarrow Y$  называется липшицевым, если существует такое  $C$ , что для всех  $x_1, x_2 \in X$  выполнено  $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq C \cdot \|x_1 - x_2\|$

Заметим, что из липшицевости отображения следует его непрерывность. Достаточно взять  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ .

**Определение 3.4.** Отображение  $F : X \rightarrow Y$  называется сжимающим, если существует такое  $\gamma < 1$ , что  $\forall x_1, x_2 \in X$  выполнено  $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|$ .

**Теорема 3.5** (Банаха о неподвижной точке). Если пространство  $X$  — полное, а отображение  $F$  — сжимающее, то существует единственный элемент  $x_* \in X$  такой, что  $F(x_*) = x_*$ . Этот элемент называется неподвижной точкой.

*Доказательство.* Докажем существование. Возьмём траекторию точки  $x_1$ :

$$x_1, \underbrace{F(x_1)}_{x_2}, \underbrace{F(F(x_1))}_{x_3}, \dots, \text{ т. е. } x_{n+1} = F(x_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \leq \gamma \|x_n - x_{n-1}\| \leq \gamma^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \dots \leq \gamma^{n-1} \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{\alpha}$$

Таким образом, при  $m > n$ :

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha\gamma^{m-2} + \alpha\gamma^{m-3} + \dots + \\ &+ \alpha\gamma^{n-1} \leq \sum_{j=n-1}^{\infty} \alpha\gamma^j = \alpha\gamma^{n-1} \frac{1}{1-\gamma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $\{x_n\}$  фундаментальна, а значит существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Обозначим его за  $x_*$ . Ясно, что это и будет неподвижная точка.

Докажем единственность. Пусть  $x_*$  и  $x^*$  — две неподвижные точки. Тогда:

$$\underbrace{\|F(x_*) - F(x^*)\|}_{\leq \gamma \|x_* - x^*\|} = \|x_* - x^*\|$$

Отсюда  $\|x_* - x^*\| = 0$ , что и требовалось.  $\square$

**Теорема 3.6.** Пусть пространство  $X$  — полное,  $F: X \rightarrow X$  и существует  $n$  такое, что  $F^n$  — сжимающее. Тогда существует единственная точка  $x_*$  такая, что  $F(x_*) = x_*$ .

*Доказательство.* Если  $F^n$  сжимающее, то существует (и единственна) неподвижная точка:  $F^n(x_*) = x_*$ . Условие теоремы подразумевает, что если  $F$  переводит точку  $x_*$  в некоторую точку  $x_1$ , которую, в свою очередь, переводит в  $x_2$ , то через  $n$  итераций точка  $x_{n-1}$  снова переходит в  $x_*$ . Отсюда следует, что точки  $x_1, \dots, x_{n-1}$  — тоже неподвижные точки  $F^n$ . Но по теореме Банаха такая точка у  $F^n$  только одна, следовательно,  $x_* = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$ .  $\square$

**Пример 3.7** (Интегральное уравнение Фредгольма I рода). Пусть нам даны функции  $K(s, t)$  и  $a(t)$ . Мы хотим найти функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую уравнению:

$$x(t) = a(t) + \int_{s_1}^{s_2} K(s, t)x(s) ds$$

Будем рассматривать частный случай, в котором  $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ ,  $a \in C[0, 1]$ . Задача — найти  $x \in C[0, 1]$  такое, что

$$x(t) = a(t) + \int_0^t K(s, t)x(s) ds$$

**Предложение 3.8.** Это уравнение имеет единственное решение.

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $F: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ .

$$(F(x))(t) = a(t) + \int_0^t K(s, t)x(s) ds$$

Заметим, что оно, вообще говоря, не является сжимающим. Рассмотрим также  $(F_0(x))(t) = \int_0^t K(s, t)x(s) ds$ .

Обратим внимание на несколько важных свойств:

- $F_0(x) - F_0(y) = F_0(x - y)$

- $F(x) - F(y) = F_0(x) - F_0(y)$
- $F^n(x) - F^n(y) = F(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x)) - F_0(F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0^n(x - y)$

$$(F_0(x - y))(t) = \int_0^t K(s_1, t)(x(s_1) - y(s_1)) ds_1$$

$$(F_0^2(x - y))(t) = \int_0^t K(s_2, t) \int_0^{s_2} K(s_1, s_2)(x(s_1) - y(s_1)) ds_1 ds_2$$

...

$$(F_0^n(x - y))(t) = \int_0^t K(s_n, t) \int_0^{s_n} K(s_{n-1}, s_n) \int_0^{s_{n-1}} \dots \int_0^{s_2} K(s_1, s_2)(x(s_1) - y(s_1)) ds_1 ds_2 \dots ds_n$$

Получаем:

$$\|F_0^n(x - y)\| = \max_{t \in [0, 1]} |(F_0^n(x - y))(t)| \leq M^n \|x - y\| \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t \int_0^{s_n} \int_0^{s_{n-1}} \dots \int_0^{s_3} \int_0^{s_2} ds_1 ds_2 \dots ds_n \leq \frac{M^n}{n!} \|x - y\|$$

Здесь  $M = \max |K|$ . Коэффициент  $\frac{M^n}{n!}$  стремится к нулю, а это значит, что  $F_0^n$  — сжимающее, следовательно, существует неподвижная точка.  $\square$

**Пример 3.9.** Допустим, что мы хотим решить дифференциальное уравнение  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $a, b \in C[0, 1]$  на промежутке  $[0, 1]$ . Это уравнение имеет единственное решение  $y \in C^1[0, 1]$ . Как это доказать? Рассмотрим интегральное уравнение:

$$x(t) = \int_0^t a(s)x(s) ds + B(t)$$

По предыдущей теореме существует  $x \in C[0, 1]$ , решающее это уравнение. Для этого уравнения также верны утверждения:

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ , где  $b(t) = B'(t)$ ;
- $x(0) = B(0)$ .

Для решения исходной задачи достаточно выбрать  $B$  такое, что  $B' = b$  и  $B(0) = y_0$ . Откуда взять непрерывную дифференцируемость  $y$ ?

$$b \in C[0, 1] \implies B \in C^1[0, 1],$$

$$x \in C[0, 1], a \in C[0, 1] \implies \int_0^t x(s)a(s) ds \in C^1[0, 1]$$

Таким образом всё доказано.



## 4 Линейные операторы

**Определение 4.1.** Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Отображение  $U : X \rightarrow Y$  называется линейным, если:

1.  $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$
2.  $U(\lambda x) = \lambda U(x)$ , где  $\lambda$  — скаляр,  $x \in X$

**Замечание 4.2.** Ясно, что выполнение обоих этих свойств равносильно  $U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 U(x_1) + \lambda_2 U(x_2)$ .

**Замечание 4.3.** В дальнейшем будем обозначать  $U(x)$  как  $Ux$ .

**Предложение 4.4** (Свойства линейных отображений).

1.  $U(0) = 0$ ;
2.  $U\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j Ux_j$ ;
3. Если  $M \subset X$  — линейное множество, то множество  $U(M)$  линейно в  $Y$ . Если  $M \subset X$  — выпуклое множество, то множество  $U(M)$  выпукло в  $Y$ ;
4. Если  $N \in Y$  — линейное (выпуклое), то  $U^{-1}(N)$  — линейное (выпуклое). Частный случай: если  $N = \{0\}$ , то множество  $U^{-1}(N) = U^{-1}(\{0\}) = \text{Ker } U$  — линейное в  $X$ ;
5.  $\text{Ker } U = \{0\} \iff U$  инъективно;
6. Если  $U$  — линейная биекция, то  $U^{-1}$  — линейное;
7. Пусть  $U_1, U_2 : X \rightarrow Y$  — линейные. Тогда  $U_1 + U_2, \lambda U_1$  тоже линейны;
8. Если  $X \xrightarrow{U} Y \xrightarrow{V} Z$ , то композиция  $V \circ U$  линейна.

**Определение 4.5.** Множество  $M$  называется выпуклым, если для любых  $x_1, x_2 \in M$  отрезок  $[x_1, x_2]$  лежит в  $M$ .

*Доказательство предложения.* Докажем выпуклость в свойстве 3.

$$y_1, y_2 \in U(M) \implies \exists x_1, x_2 \in M : Ux_1 = y_1, Ux_2 = y_2$$

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 = \lambda Ux_1 + (1 - \lambda)Ux_2 = U(\underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}_{\in M}) \in U(M)$$

В свойстве 4:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in U^{-1}(N) &\implies Ux_1, Ux_2 \in N \implies \forall \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 Ux_1 + \lambda_2 Ux_2 \in N \implies \\ &\implies U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in N \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in U^{-1}(N) \end{aligned}$$

В свойстве 6 биективность  $U$  означает, что  $\forall y_1, y_2 \exists x_1, x_2$  такие, что  $Ux_1 = y_1, Ux_2 = y_2$ . Отсюда  $U^{-1}(y_1 + y_2) = U^{-1}(Ux_1 + Ux_2) = U^{-1}(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = U^{-1}(x_1) + U^{-1}(x_2)$ .

Доказательства остальных свойств тривиальны.  $\square$

**Теорема 4.6** (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения). Пусть  $U : X \rightarrow Y$  — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $U$  непрерывен;
2.  $U$  непрерывен в нуле;
3. Образ любого ограниченного множества ограничен;
4. Существует  $C$  такое, что  $\forall x \in X$  выполняется  $\|Ux\|_Y = C\|x\|_X$ .

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$ . Тривиально.
- $4 \Rightarrow 1$ .  $\|Ux_1 - Ux_2\| \leq C\|x_1 - x_2\|$ . Это влечёт липшицевость и, как следствие, непрерывность.
- $2 \Rightarrow 3$ . Непрерывность в нуле означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Ux\| < \varepsilon$ . Ограниченность множества  $M$  в  $X$  означает, что  $\exists R : M \subset B_R(0) = \{\|x\| \leq R\}$ . Таким образом,  $x \in M \Rightarrow \|x\| \leq R$ .  $\|\frac{\delta}{2R}x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \|U(\frac{\delta}{2R}x)\| < \varepsilon$ . Отсюда  $\|Ux\| \leq \frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta} \Rightarrow Ux \in B_{\frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta}}(0)$ . То есть,  $U(M)$  ограничено.
- $3 \Rightarrow 4$ .  $B_1(0)$  — ограниченное множество. Тогда  $U(B_1(0))$  — ограничено, т. е. существует такое  $C$ , что  $U(B_1(0)) \subset B_C(0)$ . Если  $\|x\| \leq 1$ , то  $\|Ux\| \leq C$ . Теперь возьмём произвольное  $x$ .  $x' = \frac{x}{\|x\|} \in B_1(0) \Rightarrow \|Ux'\| \leq C$ . Но  $\|Ux'\| = \|U(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ux\|$ . Отсюда  $\|Ux\| \leq C\|x\|$ .

□

**Определение 4.7.** Пусть  $U : X \rightarrow Y$  — линейный непрерывный оператор. Тогда нормой оператора  $U$  называется величина  $\|U\| = \inf \{C \mid \|Ux\| \leq C\|x\|\}$ .

**Замечание 4.8.** В формулировке определения инфимум и минимум совпадают (это можно доказать, перейдя к пределу в неравенстве  $\|Ux\| \leq C\|x\|$ ).

**Замечание 4.9.** Выполнено неравенство  $\|Ux\|_Y \leq \|U\| \cdot \|x\|_X$ . В частности,  $\frac{\|Ux\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|U\|$   $\forall x \in X$ , т. е. можно записать  $\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$ .

**Теорема 4.10** (Об эквивалентных способах определения нормы оператора). Пусть  $U : X \rightarrow Y$  — линейный непрерывный оператор. Тогда:

$$\|U\| = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}}_A = \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\|}_B = \underbrace{\sup_{\|x\| < 1} \|Ux\|}_C = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Ux\|}_D$$

**Замечание 4.11.** Так как замкнутость и ограниченность, вообще говоря, неравносильна компактности (за исключением конечномерных пространств), в  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\|$  максимум может и не достигаться.

**Доказательство теоремы.** Очевидно, что  $B \geq C$  и  $B \geq D$ .

$$B = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|Ux\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A$$

Докажем, что  $D \geq A$ . Возьмём  $x' = \frac{x}{\|x\|}$ , тогда  $\|x'\| = 1$  и  $\|Ux'\| \leq D$ .  $\|U(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$ . Итак,  $\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq D$ , тогда и  $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$ . Осталось проверить, что  $C \geq A$ . Возьмём  $x \neq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Рассмотрим  $x' = \frac{x}{\|x\|(1+\varepsilon)}$ . Тогда  $\|x'\| < 1$ . Отсюда следует, что  $\|Ux'\| \leq C \Rightarrow \frac{\|Ux\|}{\|x\|(1+\varepsilon)} \leq C \Rightarrow \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq C(1+\varepsilon)$ . Устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $A = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leq C$ . □

## 5 Пространства линейных непрерывных операторов

**Определение 5.1.** Пусть  $X, Y$  — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Возьмём  $B(X, Y) = \{U : X \rightarrow Y, U \text{ — линейно, непрерывно}\}$ . Это *линейное пространство*.

**Теорема 5.2** (О свойствах операторной нормы).  $U, V \in B(X, Y)$ .

1.  $\|U\| \geq 0, \|U\| = 0 \iff U = 0$ ;
2.  $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$  ( $\lambda$  — скаляр);
3.  $\|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|$ ;
4.  $W \in B(Y, Z)$ .  $WU \in B(X, Z)$ ,  $\|WU\| \leq \|W\| \|U\|$ .

*Доказательство.*

1. Неотрицательность очевидна. Если  $\|U\| = 0$ , то  $\|Ux\| \leq 0 \cdot \|x\| \implies \|Ux\| = 0 \forall x$ ;
2.  $\|\lambda U\| = \sup_{\|x\|=1} \|(\lambda U)(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ux\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = |\lambda| \|U\|$ ;
3.  $x \in X$ .  $\|(U + V)(x)\| = \|Ux + Vx\| \leq \|Ux\| + \|Vx\| \leq \|U\| \|x\| + \|V\| \|x\| = (\|U\| + \|V\|) \|x\|$ ;
4.  $x \in X$ .  $\|(WU)(x)\| = \|W(U(x))\| \leq \|W\| \cdot \|Ux\| \leq \|W\| \|U\| \|x\|$ .

□

**Теорема 5.3** (О полноте пространства операторов). Если  $Y$  полно, то  $B(X, Y)$  полно.

*Доказательство.* Возьмём фундаментальную последовательность линейных непрерывных отображений  $U_n \in B(X, Y)$ , то есть  $\|U_n - U_m\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0: \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N$   $\|U_n - U_m\| < \varepsilon$ . Это означает, что  $\|(U_n - U_m)(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ . Следовательно,  $\{U_n x\}$  фундаментальна в  $Y$ . Обозначим  $Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x$ . Мы хотим проверить, что  $U$  непрерывно, линейно и что есть сходимость по норме.

1. (Линейность  $U$ ).  $U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x_2 = \alpha_1 Ux_1 + \alpha_2 Ux_2$
2. (Нерерывность  $U$ ). Возьмём любое  $\varepsilon > 0, N, \forall m, n > N, \forall x \in X$ .  $\|U_n x - U_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \implies \|Ux - U_m x\| \leq \varepsilon \|x\|$ .  $\|Ux\| = \|(Ux - U_m x) + U_m x\| \leq \|(Ux - U_m x)\| + \|U_m x\| \leq \varepsilon \|x\| + \|U_m\| \|x\|$ . Отсюда  $\|U\| \leq \varepsilon + \|U_m\|$ .
3. (Сходимость  $U_n$  к  $U$ ).  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \forall x \in X \|U_n x - U_m x\| \leq \varepsilon \|x\|$ . Устремив  $n$  к бесконечности, получим:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > N \forall x \in X \|Ux - U_m x\| = \|(U - U_m)(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \implies \|U - U_m\| \leq \varepsilon$ . Итак,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > N \|U - U_m\| \leq \varepsilon$ , т. е.  $U_n \rightarrow U$  в  $B(X, Y)$ .

□

Следует отметить важный частный случай.

**Определение 5.4.**  $B(X, \text{поле скаляров}) = X^*$  называется *сопряжённым пространством к  $X$* .  $f \in X^*$  называется *линейным непрерывным функционалом*.

Норма функционала определяется как  $\|f\| = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \|x\|\} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ .

## 6 Корректно разрешимые задачи

Рассмотрим отображение  $A : X \rightarrow Y$ . Мы хотим решить уравнение  $Ax = f$ .  $f$  — какие-то известные данные.

В общей постановке вопроса корректная разрешимость означает три вещи:

- Решение существует для любого  $f$ .
- Решение единственно.
- Устойчивость: если  $f_n \rightarrow f$ , то для решений верно, что  $x_n \rightarrow x$ . (Здесь  $Ax_n = f_n$ ,  $Ax = f$ .)

В частном случае, когда  $X$  и  $Y$  — линейные нормированные пространства и  $A$  — линейное отображение, вышеописанные условия равносильны тому, что  $A^{-1} \in B(Y, X)$ .

**Замечание 6.1.** Самый простой пример корректно разрешимой задачи — случай, когда оператор  $A$  тождественен.

**Теорема 6.2** (Об обратимости оператора, близкого к тождественному). *Если  $B \in B(X, X)$ ,  $X$  — полное и  $\|B\| < 1$ , то существует оператор  $(I \pm B)^{-1} \in B(X, X)$ . ( $I$  — тождественный оператор.)*

*Доказательство.* Приведём два способа доказать эту теорему.

1. Возьмём уравнение  $(I - B)x = f$ . Надо доказать, что для любого  $f \in X$  существует единственный  $x \in X$ , решающий это уравнение. Это равносильно  $x = f + Bx = g(x)$ . Заметим, что  $x$  удовлетворяет уравнению тогда и только тогда, когда  $x$  — неподвижная точка отображения  $g$ . Проверим, что  $g$  — сжимающее.  $\|g(x_1) - g(x_2)\| = \|(f + Bx_1) - (f + Bx_2)\| = \|Bx_1 - Bx_2\| \leq \|B\| \cdot \|x_1 - x_2\|$ .  

$$\underbrace{\leq}_{<1}$$

Теперь проверим устойчивость. Пусть  $f_n \rightarrow f$ ,  $(I - B)x_n = f_n$ ,  $(I - B)x = f$ . Нужно проверить, что  $x_n \rightarrow x$ .  $x_n = f_n + Bx_n$ ,  $x = f + Bx$ .

$$\|x_n - x\| = \|f_n + Bx_n - f - Bx\| \leq \|f_n - f\| + \|Bx_n - Bx\| \leq \|f_n - f\| + \|B\| \cdot \|x_n - x\|$$

Отсюда

$$0 \leq \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x_n - x\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} \implies \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

2. Докажем формулу  $(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + B^3 + \dots$ . Необходимо проверить, что этот ряд сходится. Докажем, что он сходится абсолютно, то есть  $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \dots < \infty$ . Заметим, что  $\|B^k\| \leq \|B\|^k$ . Отсюда  $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \dots \leq \|I\| + \|B\| + \|B\|^2 + \dots$ . Но это — геометрическая прогрессия, она сходится. Частичные суммы:  $S_n = I + B + \dots + B^{n-1}$ ,  $(I - B)S_n = S_n(I - B) = I - B^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ . Мы воспользовались полнотой пространства, утверждая, что абсолютная сходимость влечёт сходимость ряда.

□

**Теорема 6.3** (Об обратимости оператора, близкого к обратимому). *Пусть  $U \in B(X, Y)$  — линейное отображение и существует  $U^{-1} \in B(Y, X)$ . Кроме того,  $X$  или  $Y$  — полное пространство. Рассмотрим  $V \in B(X, Y)$  такой, что  $\|V\| < \|U^{-1}\|^{-1}$ . Тогда существует  $(U + V)^{-1} \in B(Y, X)$ .*

*Доказательство.*  $U + V = U(I_X + U^{-1}V)$  (или  $(I_Y + VU^{-1})U$ ). Оператор  $U$  обратим, обратный к нему оператор непрерывен. Получаем  $\|U^{-1}V\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|V\| < 1$ . □

## 7 Линейные непрерывные функционалы

Вспомним, что если  $X$  — нормированное пространство, то  $X^* = B(X, \text{поле скаляров})$  называется сопряжённым к  $X$  пространством. Норма функционала определяется как  $\|f\| = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C\|x\|\} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ .

**Пример 7.1** (Функционалы в пространстве Лебега). Рассмотрим  $L^p(T, \mu)$ , причём  $1 < p < \infty$ . Возьмём  $q$  — сопряжённый показатель такой, что  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ . Возьмём также  $y_0 = L^q(T, \mu)$ . Определим функционал  $f$  формулой  $f(x) = \int_T x(t)y_0(t) d\mu(t)$ . Нам нужно проверить, что это действительно функционал, что он непрерывен (линейность очевидна). Чтобы этот функционал был функционалом, необходимо, чтобы подынтегральная функция была суммируемой. Для этого воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} \int_T |x(t)y_0(t)| d\mu(t) &\leq \left( \int_T |x|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_T |y_0|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|y_0\|_q \cdot \|x\|_p < \infty \\ |f(x)| &\leq \underbrace{\|y_0\|_q}_{=C} \cdot \|x\| \implies \|f\| \leq \|y_0\|_q \end{aligned}$$

Проверим, что  $\|f\| \geq \|y_0\|_q$ .

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{|y_0|^q}{y_0} = |y_0|^{q-1} \frac{y_0}{y_0} = |y_0|^{q-1} \text{sign } y_0 \implies x_0 y_0 = |y_0|^q \\ |f(x_0)| &= \left| \int_T x_0 y_0 \right| = \int_T |y_0|^q \end{aligned}$$

Но так как  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $(q-1)p = q$ .

$$\begin{aligned} \|x_0\|_p &= \left( \int_T |x_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_T |y_0|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_T |y_0|^q \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|f\| &\geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_p} = \frac{\int_T |y_0|^q}{\left( \int_T |y_0|^q \right)^{\frac{1}{p}}} = \left( \int_T |y_0|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|y_0\|_q \end{aligned}$$

Таким образом,  $L^q(T, \mu) \hookrightarrow L^p(T, \mu)^*$ ,  $y_0 \mapsto f$  и  $\|y_0\|_q = \|f\|$ . Имеет место *изометрическое вложение*, и даже более того, биекция.

**Пример 7.2.** Рассмотрим пространство  $C[-1, 1]$ . Пусть  $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t) dt$ . Снова хотим доказать, что это функционал, что он непрерывен и линеен. Для непрерывности достаточно установить, что  $|f(x)| \leq C\|x\|$ .

$$|f(x)| \leq \int_{-1}^1 |t||x(t)| dt \leq \max |x| \int_{-1}^1 |t| dt = \|x\| \implies \|f\| \leq 1$$

Непрерывность доказана. Теперь возьмём функцию  $x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon}, & |t| \leq \varepsilon \\ -1, & t \leq -\varepsilon \end{cases}$ .

$$f(x_\varepsilon) = \int_{-1}^1 tx_\varepsilon(t) dt = \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) |t| dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t^2}{\varepsilon} dt = 1 + O(\varepsilon)$$

Получаем, что  $\|f\| \geq \frac{f(x_\varepsilon)}{\|x_\varepsilon\|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$ . Теперь возьмём  $y_0 \in L^1(-1, 1)$ ,  $f(x) = \int_{-1}^1 y_0(t)x(t) dt$ .

$$|f(x)| \leq \int_{-1}^1 |y_0||x| \leq \|x\| \int_{-1}^1 |y_0| \leq \|y_0\|_1 \cdot \|x\|_C$$

Значит,  $f$  — линейный непрерывный функционал.  $\|f\| = \|y_0\|_1$ ,  $x_0(t) = \text{sign } y_0 \notin C$ .

**Упражнение 7.3.** Пусть  $\delta(x) = x(0)$ . Доказать, что  $\delta \notin L^1(-1, 1)$ , то есть не существует  $y_0 \in L^1(-1, 1)$  такого, что  $\forall x \in C[-1, 1] \int_{-1}^1 y_0(t)x(t) dt = x(0)$

Напомним, что  $\ell^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots), \|x\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j| < \infty\}$  и  $c_0 = \{x = (x_1, x_2, \dots), \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0\}$ ,  $c_0 \subset \ell^\infty$ . При этом  $\|x\|_{c_0} = \|x\|_\infty$ .  $c_0$  — полное нормированное пространство.

**Теорема 7.4.**  $(c_0)^* = \ell^1$

Рассмотрим  $L_{\text{fin}} \subset \ell^\infty$  такое, что  $x \in L_{\text{fin}}$ , если у  $x$  лишь конечное число ненулевых координат. Отметим, что  $L_{\text{fin}}$  является линейной оболочкой векторов  $e_1, e_2, \dots$ , где  $e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots)$ . Также  $\overline{L_{\text{fin}}} = c_0$

- $x \in c_0 \implies \exists x^{(n)} \in L_{\text{fin}}: x^{(n)} \rightarrow x$ , где  $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ .  $\|x - x^{(n)}\| = \|(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{j \geq n+1} |x_j|$ .
- $c_0$  замкнуто.

*Доказательство.*

1. Возьмём  $y^{(0)} \in \ell^1$ , где  $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots)$  и  $\|y^{(0)}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^{(0)}| < \infty$ . Построим по нему функционал на  $c_0$ . Пусть  $x \in c_0$ . Рассмотрим  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j^{(0)}$ .

$$|f(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty} |y_j^{(0)}| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^{(0)}| = \|y^{(0)}\|_1 \|x\|_\infty \implies \|f\| \leq \|y^{(0)}\|_1$$

Мы построили вложение  $\ell^1 \hookrightarrow (c_0)^*$ ,  $y^{(0)} \mapsto f$ .

2. Пусть нам дан функционал  $f \in (c_0)^*$ . Мы хотим построить по нему  $y \in \ell^1$ . Положим  $f(e_j) = y_j$  ( $y = (y_1, y_2, \dots)$ ). Нам нужно проверить, что  $y \in \ell^1$  и что  $\forall x f(x) = \sum x_j y_j$ . Возьмём  $z^{(n)} = (\text{sign } y_1, \text{sign } y_2, \dots, \text{sign } y_n, 0, 0, \dots)$ .  $|f(z^{(n)})| \leq \|f\| \cdot \|z^{(n)}\|_\infty \leq \|f\|$ . Но левая часть неравенства равна  $\sum_{j=1}^n |y_j|$ . Из неравенства следует, что ряд сходится, откуда  $y \in \ell^1$ .

Покажем теперь, что  $\forall x f(x) = \sum x_j y_j$ . Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ .

$$f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j y_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Левая часть стремится к  $f(x)$ , так как  $\sum_{j=1}^n x_j e_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .

□

## 8 Интегральные операторы

Что такое интегральный оператор? Допустим, у нас есть функция двух переменных  $K(s, t)$ , называемая *ядром интегрального оператора* (не путать с ядром оператора). Оператор действует следующим образом: он берёт функцию  $x(s)$  и преобразует её в функцию  $(Ux)(t)$  по формуле  $(Ux)(t) = \int_S K(s, t)x(s) dv(s)$  (множество интегрирования и мера определяются отдельно). Какими свойствами должна обладать функция  $K$ , чтобы этот оператор был «хорошим»?

### Интегральные операторы в пространствах Лебега

Будем рассматривать переменные  $s$  на множестве  $S$  с мерой  $\nu$  и  $t$  на множестве  $T$  с мерой  $\mu$ , а также функцию  $K : S \times T \rightarrow$  поле скаляров, притом измеримую. Пусть  $x$  — также измеримая функция на  $S$ ,  $(Ux)(t) = \int_S K(s, t)x(s) dv(s)$ . Какие условия нужно наложить на функцию  $K$ , чтобы оператор  $U$  действовал из  $L^p(S, \nu)$  в  $L^r(T, \mu)$  и был непрерывен?

$$\begin{aligned} \int_T |(Ux)(t)|^r dt &\leq \int_T \left( \int_S |K(s, t)| |x(s)| ds \right)^r dt \leq \int_T \left( \left( \int_S |K(s, t)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \right)^r dt = \\ &= \int_T \left( \int_S |K(s, t)|^q ds \right)^{\frac{r}{q}} dt \cdot \|x\|_p^r \\ \|Ux\|_r &\leq \left( \int_T \left( \int_S |K(s, t)|^q ds \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \|x\|_p \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера и  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ .

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 8.1** (О гёльдеровских условиях непрерывности). *Если  $\int_T \left( \int_S |K(s, t)|^q ds \right)^{\frac{r}{q}} dt < \infty$ , то  $U$  действует непрерывно из  $L^p(S, \nu)$  в  $L^r(T, \mu)$ .*

Пусть  $p = 2$ ,  $r = 2$ , то есть  $q = 2$ . Тогда:

$$\int_T \int_S |K(s, t)|^2 ds dt < \infty \iff K \in L^2(S \times T, \nu \times \mu)$$

и  $\|U\| \leq \|K\|_{L^2(S \times T, \nu \times \mu)}$ . Операторы, удовлетворяющие таким условиям, называются операторами Гильберта-Шмидта, а  $K$  — ядром Гильберта-Шмидта.

**Замечание 8.2.** Существуют линейные непрерывные интегральные операторы, не являющиеся операторами Гильберта-Шмидта.

### Тест Шура

**Теорема 8.3** (Тест Шура). *Пусть  $(Ux)(t) = \int_S K(s, t)x(s) dv(s)$ . Предположим, что существуют строго положительные функции  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : T \rightarrow \mathbb{R}$  и числа  $A, B \in \mathbb{R}$  такие, что:*

$$1. \int_S |K(s, t)| \varphi(s) \, d\nu(s) \leq A\psi(t) \text{ для почти всех } t \in T.$$

$$2. \int_T |K(s, t)| \psi(t) \, d\mu(t) \leq B\varphi(s) \text{ для почти всех } s \in S.$$

Тогда  $U$  — линейный непрерывный оператор из  $L^2(S, \nu)$  в  $L^2(T, \mu)$ .

*Доказательство.*

$$|(Ux)(t)| \leq \int_S \sqrt{|K(s, t)| \varphi(s)} \sqrt{\frac{|K(s, t)| |x(s)|^2}{\varphi(s)}} \, d\nu(s) \leq \underbrace{\left( \int_S |K(s, t)| \varphi(s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq A\psi(t)} \left( \int_S \frac{|K(s, t)| |x(s)|^2}{\varphi(s)} \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_T |(Ux)(t)|^2 \, dt \leq \int_T A\psi(t) \int_S \frac{|K(s, t)| |x(s)|^2}{\varphi(s)} \, ds \, dt = \int_S A \frac{|x(s)|^2}{\varphi(s)} \underbrace{\int_T |K(s, t)| \psi(t) \, dt}_{\leq B\varphi(s)} \, ds < AB \int_S |x(s)|^2 \, ds$$

То есть,  $\|Ux\|_2 \leq \sqrt{AB} \|x\|_2$ . □

**Следствие 8.4.**  $\|U\| \leq \sqrt{AB}$

**Упражнение 8.5.**

1.  $S = T = (0, 1)$  с мерой Лебега,  $K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{|s-t|}}$ . Заметим, что получается оператор, не являющийся оператором Гильберта-Шмидта, так как  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{ds \, dt}{|s-t|} = +\infty$ . Придумать тест Шура для этого случая.

2.  $S = T = \mathbb{R}$ ,  $K(s, t) = e^{-(s+t)^2}$ . Является  $U$  оператором Гильберта-Шмидта, и, если нет, является ли он непрерывным?

3.  $S = T = (0, +\infty)$ ,  $K(s, t) = e^{-st}$ . Установить непрерывность  $U$  с помощью теста Шура.

4.  $S = T = \mathbb{N}$ ,  $\nu = \mu = \#$ ,  $K: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда оператор  $U$  равен  $\sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} x_j$ .

**Теорема 8.6** (Тест Шура в дискретном случае). Пусть существуют  $\varphi_j > 0$ ,  $\psi_i > 0$ ,  $A, B$  такие, что

$$1. \sum |K_{ij}| \varphi_j \leq A\psi_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$2. \sum |K_{ij}| \psi_j \leq B\varphi_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Тогда  $U: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  непрерывен и  $\|U\| \leq \sqrt{AB}$ .

**Пример 8.7** (Оператор Харди). Оператор Харди  $H$  действует в пространстве  $L^2(0, +\infty)$ :

$$(Hx)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(s) \, ds$$

Частный случай:  $H: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  и  $(Hx)_k = \frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k)$  (среднее арифметическое).



Применим тест Шура.

$$\frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = \int_0^\infty K(s, t) x(s) ds$$

где  $K(s, t) = \frac{1}{t} \chi_{[0, t]}(s) = \frac{1}{t} \chi_{[s, +\infty)}(t)$ . Возьмём  $\varphi(s) \equiv 1$ . Тогда

$$\int_0^\infty |K(s, t)| \varphi(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t ds = 1$$

Взяв  $\psi(t) \equiv 1$ , получим

$$\int_0^\infty |K(s, t)| \psi(t) dt = \int_0^\infty \frac{dt}{t} = \infty$$

Значит, такое  $\psi$  не подходит. Возьмём  $\psi(t) = t^{-\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ . Тогда

$$\int_0^\infty |K(s, t)| \psi(t) dt = \int_0^s \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \frac{s^{-\alpha}}{\alpha}$$

В качестве  $\varphi(s)$  возьмём  $s^{-\alpha}$ .

$$\int_0^\infty |K(s, t)| \varphi(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t s^{-\alpha} ds = \frac{1}{t} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha}$$

Заметим, что при этом должно быть  $\alpha < 1$ . Кроме того,

$$\|H\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \quad \forall \alpha \in (0, 1) \implies \|H\| \leq 2$$

**Упражнение 8.8.** Доказать, что  $\|H\| = 2$ .

### Интегральные операторы с непрерывным ядром

Будем рассматривать ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , пространство  $L^2(\Omega)$  и пространство непрерывных функций  $C(\overline{\Omega})$ . Пусть также у нас есть функция  $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $K \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\|K\|_{C(\overline{\Omega})} = M$ .

**Теорема 8.9.** Рассмотрим оператор  $U$  такой, что  $(Ux)(t) = \int_\Omega K(s, t) x(s) ds$ . Верно, что  $U \in B(L^2(\Omega), C(\overline{\Omega}))$ .

*Доказательство.* Докажем, что если  $x \in L^2(\Omega)$ , то  $Ux \in C(\overline{\Omega})$ . (Здесь непрерывность  $x$  не гарантируется.)

$$|Ux(t_1) - Ux(t_2)| = \left| \int_\Omega K(s, t_1) - K(s, t_2) x(s) ds \right| \leq \left( \int_\Omega |K(s, t_1) - K(s, t_2)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$$

По теореме Кантора  $K$  равномерно непрерывно на  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ , то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \underbrace{|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)|}_{\sqrt{|s_1 - s_2|^2 + |t_1 - t_2|^2}} < \delta \implies |K(s_1, t_1) - K(s_2, t_2)| < \varepsilon$$

Если  $|t_1 - t_2| < \delta$ , то  $|K(s, t_1) - K(s, t_2)| < \varepsilon$ , отсюда  $|\mathcal{U}x(t_1) - \mathcal{U}x(t_2)| < \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2$ .  
Теперь докажем, что  $\|\mathcal{U}x\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \|x\|_{L^2(\Omega)}$ .

$$\|\mathcal{U}x\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{t \in \overline{\Omega}} \left| \int_{\Omega} K(s, t) x(s) ds \right| \leq \max_{t \in \overline{\Omega}} \left( \int_{\Omega} |K(s, t)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leq (M^2 \cdot |\Omega|)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Рассмотрим оператор вложения  $j : C(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $x \mapsto x$ . Справедливо следствие:

**Следствие 8.10.** 1.  $j\mathcal{U} \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$

2.  $\mathcal{U}j \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$

*Доказательство.* Заметим, что  $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ .

$$\left( \int_{\Omega} |x(s)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \|x\|_{C(\overline{\Omega})}^2 \cdot |\Omega| \right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

Получаем

$$\|x\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\|jx\|_{L^2(\Omega)} = \|x\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

То есть  $j$  непрерывен.

$$C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega) \xrightarrow{\mathcal{U}} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

□

### Операторы со слабой особенностью

Рассмотрим оператор  $\mathcal{U}x(t) = \int_{\Omega} K(s, t)x(s) ds$ , причём  $K$  — ядро со слабой особенностью, а  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  — ограниченная область.

**Определение 8.11.**  $K$  — ядро со слабой особенностью, если оно представляется в виде:

$$K(s, t) = \frac{A(s, t)}{|s - t|^\alpha}$$

Здесь  $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ,  $\alpha < m$

**Пример 8.12.**  $\Omega = (0, 1)$ ,  $K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{|s - t|}}$

**Замечание 8.13.** Предположим, что  $K(s, t) = \frac{a(s, t)}{|s - t|^\alpha}$ ,  $\alpha < m$ ,  $a$  — ограниченная функция, непрерывная вне диагонали множества  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ , то есть в точках  $(s, t)$  таких, что  $s \neq t$ . Тогда  $K$  — ядро со слабой особенностью. Почему? Можно записать  $K(s, t) = \frac{a(s, t)|s - t|^\delta}{|s - t|^{\alpha + \delta}}$ , где  $\alpha + \delta < m$ .  $A(s, t) = a(s, t)|s - t|^\delta$  непрерывно на  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$

Почему особенность «слабая»? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем лемму.

**Лемма 8.14.** Пусть у нас есть шар  $B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда  $\int_{B(0, \rho)} \frac{dx}{|x|^\alpha}$  конечен тогда и только тогда, когда  $\alpha < m$ .

*Доказательство.* Вычислим этот интеграл.

$$\int_{B(0,\rho)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_0^\rho \int_{S_1(0)} r^{m-1} \frac{1}{r^\alpha} d\theta dr = |S_1| \int_0^\rho r^{m-\alpha-1} dr = |S_1| \left| \frac{r^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right|_0^\rho = |S_1| \frac{\rho^{m-\alpha}}{m-\alpha}$$

□

**Теорема 8.15.** Пусть  $U$  — оператор со слабой особенностью:  $Ux(t) = \int_{\Omega} K(s, t)x(s) ds$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда  $U \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ .

*Доказательство.* Применим тест Шура. Возьмём функцию  $\varphi(s) \equiv 1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |K(s, t)| ds &= \int_{\Omega} \frac{|A(s, t)|}{|s - t|^\alpha} ds \leq M \cdot \int_{\Omega} \frac{1}{|s - t|^\alpha} ds \leq M \cdot \int_{B_d(t)} \frac{ds}{|s - t|^\alpha} \leq M \cdot \int_{B_d(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha} \leq \\ &\leq M \cdot |S_1| \cdot \frac{d^{m-\alpha}}{m-\alpha} \end{aligned}$$

Здесь  $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ,  $\|A\|_{C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} = M$ ,  $d = \text{diam } \overline{\Omega}$

Получаем, что  $\psi(t) = 1$ .

□

**Теорема 8.16.** В условиях предыдущей теоремы также верно  $U \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$ .

*Доказательство.* 1.  $\forall x \in C(\overline{\Omega}) \ Ux \in C(\overline{\Omega})$

2.  $\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|x\|_{C(\overline{\Omega})}$

Будем доказывать, что  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall t_1, t_2 \in \overline{\Omega}$  такого, что  $|t_1 - t_2| < \delta$ ,  $|Ux(t_1) - Ux(t_2)| < \varepsilon$

$$Ux(t_1) - Ux(t_2) = \int_{\Omega} (K(s, t_1) - K(s, t_2))x(s) ds$$

Возьмём  $\rho$  такое, что  $|t_1 - t_2| < \rho$ . Разобьём область  $\Omega$  на три части:

$$\Omega = \underbrace{(\Omega \setminus (B_{\frac{\rho}{2}}(t_1) \cup B_{\frac{\rho}{2}}(t_2)))}_{\Omega_{1,2}} \cup \underbrace{(B_{\frac{\rho}{2}}(t_1) \cap \Omega)}_{\Omega_1} \cup \underbrace{(B_{\frac{\rho}{2}}(t_2) \cap \Omega)}_{\Omega_2}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} \dots \right| &\leq \int_{\Omega_1} |K(s, t_1) - K(s, t_2)| |x(s)| ds \leq \|x\|_{C(\overline{\Omega})} \left( \int_{\Omega_1} |K(s, t_1)| ds + \int_{\Omega_1} |K(s, t_2)| ds \right) \leq \\ &\leq M \cdot \|x\| \left( \int_{\Omega_1} \frac{ds}{|s - t_1|^\alpha} + \int_{\Omega_1} \frac{ds}{|s - t_2|^\alpha} \right) \leq M \cdot \|x\| \cdot |S_1| \left( \frac{(\frac{\rho}{2})^{m-\alpha}}{m-\alpha} + \frac{(\frac{3\rho}{2})^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Такая же оценка справедлива и для  $\left| \int_{\Omega_2} \dots \right|$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_{1,2}} \dots \right| &\leq \|x\| \int_{\Omega_{1,2}} \left| \frac{A(s, t_1)}{|s - t_1|^\alpha} - \frac{A(s, t_2)}{|s - t_2|^\alpha} \right| ds = \\ &= \|x\| \int_{\Omega_{1,2}} \left| \frac{A(s, t_1)|s - t_2|^\alpha - A(s, t_2)|s - t_1|^\alpha}{|s - t_1|^\alpha |s - t_2|^\alpha} \right| ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|x\|}{(\frac{\rho}{2})^{2\alpha}} \underbrace{\int_{\Omega} |A(s, t_1)|s - t_2|^\alpha - A(s, t_2)|s - t_1|^\alpha| ds}_{\xrightarrow{|t_1 - t_2| \rightarrow 0} 0}$$

Мы воспользовались тем, что  $|s - t_1|^\alpha \geq (\frac{\rho}{2})^\alpha$  и  $|s - t_2|^\alpha \geq (\frac{\rho}{2})^\alpha$ .

Возьмём  $g \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ :  $g(s, t_1, t_2) = A(s, t_1)|s - t_2|^\alpha$ .  $g$  равномерно непрерывно:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \tilde{\delta} > 0 : |(s, t_1, t_2) - (s', t'_1, t'_2)| = \\ = \sqrt{|s - s'|^2 + |t_1 - t'_1|^2 + |t_2 - t'_2|^2} < \tilde{\delta} \implies |g(s, t_1, t_2) - g(s', t'_1, t'_2)| < \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

Возьмём  $\tilde{\varepsilon} = \|x\|^{-1}(\frac{\rho}{2})^{2\alpha}|\Omega|^{-1}\frac{\varepsilon}{2}$ . Заметим, что под интегралом стоит  $|g(s, t_1, t_2) - g(s, t_2, t_1)| < \tilde{\varepsilon}$  (при  $|(s, t_1, t_2) - (s, t_2, t_1)| = \sqrt{2}|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}$ ). Отсюда находим  $\tilde{\delta}$ . В результате  $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{2}}$ . □

## 9 Скалярное произведение

Пусть  $X$  — линейное множество над полем скаляров  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ .

**Определение 9.1.**  $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  называется скалярным произведением, если:

1.  $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
2.  $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
3.  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
4.  $\varphi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$

**Предложение 9.2** (Свойства скалярного произведения).

1.  $\varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(x_j, y)$
2.  $\varphi\left(x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right) = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} \varphi(x, y_j)$
3. *Неравенство Коши-Буняковского:*  $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y)$
4.  $p(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$  является нормой.

*Доказательство.* Докажем свойство 2.

$$\varphi\left(x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right) = \overline{\varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, x\right)} = \overline{\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(y_j, x)} = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} \varphi(x, y_j)$$

Докажем неравенство Коши-Буняковского. Возьмём какой-нибудь скаляр  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(x + \lambda y, x + \lambda y) &= \varphi(x, x) + \varphi(x, \lambda y) + \varphi(\lambda y, x) + \varphi(\lambda y, \lambda y) = \\ &= \varphi(x, x) + \overline{\lambda} \varphi(x, y) + \underbrace{\lambda \varphi(y, x)}_{\lambda \overline{\varphi(x, y)}} + \underbrace{\lambda \overline{\lambda} \varphi(y, y)}_{|\lambda|^2 \varphi(y, y)} \end{aligned}$$

Выберем  $\lambda$  следующим образом:  $\lambda = t\varphi(x, y)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Тогда получим:

$$= \varphi(x, x) + 2t|\varphi(x, y)|^2 + t^2|\varphi(x, y)|^2\varphi(y, y)$$

Дискриминант этого трёхчлена  $D = 4|\varphi(x, y)|^4 - 4|\varphi(x, y)|^2\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$ . Отсюда следует, что  $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$ .

В свойстве 4 проверим аксиомы нормы:

$$1. \quad p(x) \geq 0, \quad p(x) = 0 \iff x = 0$$

$$2. \quad p(\lambda x) = \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \varphi(x, x)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(x, x)} = |\lambda| p(x)$$

$$3. \quad \text{Требуется } p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi(x + y, x + y)} &\leq \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)} \iff \\ \iff \varphi(x + y, x + y) &\leq \varphi(x, x) + 2\sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)} + \varphi(y, y) \iff \\ \iff \underbrace{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}_{2 \operatorname{Re} \varphi(x, y)} &\leq 2\sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)} \\ 2 \operatorname{Re} \varphi(x, y) &\leq 2|\varphi(x, y)| \leq 2\sqrt{\varphi(x, x)\varphi(y, y)} \end{aligned}$$

□

**Замечание 9.3.** В пространстве со скалярным произведением можно естественным образом завести норму.

**Определение 9.4.** Пространство со скалярным произведением  $(X, \varphi)$  называется унитарным. Полное унитарное пространство называется гильбертовым (обозначается  $H$ ).

**Предложение 9.5** (Непрерывность скалярного произведения). Если  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , то  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

**Предложение 9.6.** Пусть  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  — сходящийся ряд в  $H$  — гильбертовом пространстве.

$$\text{Тогда } \left( \sum_{j=1}^{\infty} x_j, y \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, y).$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$ ,  $S_n \rightarrow S$ . Тогда  $(S_n, y) \rightarrow (S, y) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} x_j, y \right)$ .

$$(S_n, y) = \left( \sum_{j=1}^n x_j, y \right) = \sum_{j=1}^n (x_j, y) \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, y)$$

□

**Предложение 9.7** (Тождество параллелограмма).  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

*Доказательство.* Запишем равенства:

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = \|x\|^2 \pm (x, y) \pm (y, x) + \|y\|^2$$

Сложим их. Получим требуемое.  $\square$

**Пример 9.8.** Рассмотрим пространство  $X = C[0, 1]$ , функции  $x(t) = 1$  и  $y(t) = t$ .  $\|x + y\| = 2$ ,  $\|x - y\| = 1$ ,  $\|x\| = 1$ ,  $\|y\| = 1$ . Отсюда  $2^2 + 1^2 = 2 \cdot (1^2 + 1^2)$  — неверно. Из этого следует, что в пространстве  $C[0, 1]$  нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с естественной нормой.

**Предложение 9.9** (Формула восстановления). *Если пространство унитарное, то в нём можно восстановить скалярное произведение по норме. Для вещественного случая:*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

*Для комплексного случая:*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2)$$

*Доказательство.* Упражнение.  $\square$

**Пример 9.10.** В пространстве  $L^2(T, \mu)$ :

$$(x, y) = \int_T x(t) \overline{y(t)} d\mu(t)$$

$$\sqrt{(x, x)} = \left( \int_T |x(t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

## 10 Ортогональность

**Определение 10.1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство. Векторы  $x, y$  ортогональны, если  $(x, y) = 0$ .

**Предложение 10.2.** 1.  $x \perp x \iff x \perp H \iff x = 0$ .

2.  $x \perp y_1, y_2 \implies x \perp (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ .

3.  $x \perp y_n \forall n \in \mathbb{N}, y_n \rightarrow y \implies x \perp y$ .

4.  $x \perp A \implies x \perp \overline{\text{Lin}(A)}$ .

5. (Теорема Пифагора) Если для  $x_1, \dots, x_n$   $x_j \perp x_k \forall j \neq k$ , то  $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ .

**Определение 10.3.** Ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  в гильбертовом пространстве  $H$  называется ортогональным, если  $\forall j \neq k \ x_j \perp x_k$ .

**Теорема 10.4** (О сходимости ортогонального ряда). Рассмотрим ортогональный ряд (1)  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  и ряд (2)  $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ . Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда ряд (2) сходится. В случае сходимости выполняется теорема Пифагора  $\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ .

*Доказательство.* Обозначим  $S_n = \sum_{j=1}^n x_j$ ,  $C_n = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$ . Возьмём  $m > n$  и воспользуемся критерием Коши.

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m x_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m \|x_j\|^2 = C_m - C_n = |C_m - C_n|$$

Таким образом, фундаментальность последовательности  $S_n$  равносильна  $\|S_m - S_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \iff \|C_m - C_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$ , что равносильно фундаментальности  $C_n$ . Получаем  $\|S_n\|^2 = C_n$ .  $\square$

**Пример 10.5** (Ряд Фурье).  $b_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin nt + b_n \cos nt$  в пространстве  $L^2(0, 2\pi)$ .

$$\|a_n \sin nt\|_2^2 = |a_n|^2 \int_0^{2\pi} |\sin nt|^2 dt = |a_n|^2 \pi$$

$$\|b_n \cos nt\|^2 = |b_n|^2 \pi$$

$$\|b_0\|^2 = b_0^2 \cdot 2\pi$$

Чтобы ряд сходилась в  $L^2(0, 2\pi)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось  $\pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$ .

**Упражнение 10.6.** Доказать, что:

1.  $\int_0^{2\pi} \cos mt \sin nt dt = 0$ ;
2.  $\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt dt = 0$  при  $m \neq n$ .

**Пример 10.7.**  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$  в  $L^2(0, 2\pi)$ .

$$(e^{int}, e^{imt}) = \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \Big|_0^{2\pi}, & n \neq m \end{cases} = \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

## 11 Теорема о наилучшем приближении

**Пример 11.1.** Допустим, мы рассматриваем пространство  $C[-1, 1]$ . Возьмём в этом пространстве функцию  $x_0(t) = t^n$  и множество  $A = \text{Lin}\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$  многочленов степени не выше  $n-1$ . Мы хотим найти  $\text{dist}(x_0, A) = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|_{C[-1, 1]}$ . Необходимо ответить на ряд вопросов: существует ли минимум? единственен ли он? как его искать?

**Определение 11.2.**  $y_0$  называется наилучшим приближением к  $x_0$  в  $A$ , если  $\text{dist}(x_0, A) = \|x_0 - y_0\|$  и  $y_0 \in A$ .

**Теорема 11.3** (О наилучшем приближении). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A \subset H$  — замкнутое и выпуклое множество,  $x_0 \in H$ . Тогда существует и единственно наилучшее приближение к  $x_0$  в  $A$ .

*Доказательство.* Начнём с единственности. Предположим, что есть две точки  $y_1, y_2 \in A$ . Может ли так случиться, что они обе минимизируют расстояние до  $x_0$ ? Заметим, что любая точка на интервале  $y_1 y_2$  будет ближе к  $x_0$ , чем  $y_1$  и  $y_2$ . Возьмём векторы  $u = x_0 - y_1$  и  $v = x_0 - y_2$ . По тождеству параллелограмма  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ , откуда:

$$\underbrace{\|2x_0 - (y_1 + y_2)\|^2}_{(*)} + \|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|x_0 - y_1\|^2 + \|x_0 - y_2\|^2)$$

Обозначим  $\text{dist}(x_0, A) = d$ .

$$(*) = 4\|x_0 - \frac{y_1 + y_2}{2}\|^2 \geq 4d^2$$

Итого, получаем:

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2(\|x_0 - y_1\|^2 + \|x_0 - y_2\|^2) - 4d^2 \quad \forall y_1, y_2 \in A$$

Таким образом, если  $y_1, y_2$  — наилучшие приближения, то  $\|x_0 - y_1\| = d$  и  $\|x_0 - y_2\| = d$ , то  $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$ , отсюда  $y_1 = y_2$ . Единственность доказана.

Докажем существование. Возьмём последовательность  $y_n \in A$  такую, что  $\|x_0 - y_n\| \rightarrow d$  ( $y_n$  — минимизирующая последовательность).

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x_0 - y_n\|^2}_{\rightarrow d^2} + \underbrace{\|x_0 - y_m\|^2}_{\rightarrow d^2}) - 4d^2 \rightarrow 0$$

Из этого следует, что  $\|y_n - y_m\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \implies \exists y_0 = \lim y_n \in A. \|x_0 - y_0\| = d$ . Существование доказано.  $\square$

**Теорема 11.4** (О проекции). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $L \subset H$  — линейное замкнутое подмножество  $H$ . Тогда для любого  $x \in H$  существует единственная пара элементов  $y \in L, z \perp L$  таких, что  $x = y + z$ .

**Определение 11.5.**  $y$  называется проекцией вектора  $x$  на  $L$ .

*Доказательство теоремы.* Так как  $L$  линейно, то оно выпукло. Значит, существует наилучшее приближение  $y \in L$  для  $x$ . Определим  $z$  как  $x - y$ . Проверим, что  $z \perp L$ . Возьмём произвольный вектор  $l \in L$ , скаляр  $\lambda$ . Будем рассматривать вектор  $y + \lambda l$ . Очевидно, что  $\|y + \lambda l - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$ , то есть  $\|\lambda l - z\|^2 \geq \|z\|^2$ . Раскроем скобки в скалярных квадратах:

$$(\lambda l, \lambda l) - (\lambda l, z) - (z, \lambda l) + (z, z) \geq (z, z)$$

$$|\lambda|^2(l, l) - \lambda(l, z) - \bar{\lambda}(z, l) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Пусть  $\lambda = t(z, l)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Тогда

$$t^2|(z, l)|^2(l, l) - 2t|(z, l)|^2 \geq 0$$

$$|(z, l)|^2(t^2\|l\|^2 - 2t) \geq 0$$

Заметим, что если  $(z, l) \neq 0$ , то  $t^2\|l\|^2 \geq 2t \forall t$ , что неверно. Значит,  $(z, l) = 0$ . Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть существует два разложения:  $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$  и  $y_1, y_2 \in L, z_1, z_2 \perp L$ . Рассмотрим  $w = y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ . Но  $y_1 - y_2 \in L$ , а  $z_2 - z_1 \perp L$ , значит,  $w \perp w \implies w = 0$ .  $\square$

**Следствие 11.6.** В условиях предыдущей теоремы  $\|x\| \geq \|y\|$  и  $\|x\| \geq \|z\| = \text{dist}(x, L)$ .

*Доказательство.*

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

$\square$



## 12 Ортогональное дополнение и ортогональные проекторы

В этом параграфе рассматриваем гильбертово пространство  $H$ .

**Определение 12.1.** Если  $A \subset H$ , то его ортогональным дополнением называется  $A^\perp = \{x \in H : \forall y \in A \quad x \perp y\}$ .

**Предложение 12.2** (Свойства ортогонального дополнения).

1.  $A^\perp$  — линейное.
2.  $A^\perp$  — замкнутое множество, то есть если  $x_n \in A^\perp$ ,  $x_n \rightarrow x$ , то  $x \in A^\perp$ .
3.  $(\text{Lin } A)^\perp = A^\perp$ .
4.  $(\overline{A})^\perp = A^\perp$ .
5.  $(\overline{\text{Lin } A})^\perp = A^\perp$ .
6.  $A \subset B \implies A^\perp \supset B^\perp$ .
7.  $\{0\}^\perp = H$ ,  $H^\perp = \{0\}$ .
8. Если  $L$  — линейное подмножество  $H$ , то  $(L^\perp)^\perp = \overline{L}$ .

**Доказательство.** Докажем свойство 8. Пусть  $L = \overline{L}$ . Тогда  $(L^\perp)^\perp = \{x \in H : x \perp L^\perp\} \supset L$ . Предположим, что  $(L^\perp)^\perp \neq L$ ,  $x \in (L^\perp)^\perp \setminus L$ . По теореме о проекции  $x$  представляется в виде  $x = y + z$ , где  $y \in L \subset (L^\perp)^\perp$ ,  $z \in L^\perp$ . Тогда  $\underbrace{x - y}_{\in (L^\perp)^\perp} = z \in L^\perp$ . Это означает, что  $x - y \perp z$ ,

откуда  $z = x - y = 0$ , то есть  $x = y \in L$  — противоречие. Значит, в случае замкнутого  $L$  его второе ортогональное дополнение совпадает с ним самим. Рассмотрим случай, когда  $L$  незамкнуто.  $L^\perp = (\overline{L})^\perp$ ,  $(L^\perp)^\perp = ((\overline{L})^\perp)^\perp = \overline{L}$ .  $\square$

**Определение 12.3.** Пусть  $L \subset H$  — замкнутое линейное множество и для всех  $x \in H$  существует единственные  $y, z$  такие, что  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$ ,  $x = y + z$ . Отображение  $P_L : H \rightarrow H$ ,  $x \mapsto y$  называется ортогональным проектором.

**Предложение 12.4** (Свойства ортогонального проектора).

1.  $P_L$  — линейное отображение.
2.  $P_L \in B(H, H)$ , т. е.  $P_L$  непрерывно.
3.  $\text{Ker } P_L = L^\perp$ .
4.  $P_L(H) = L$ .
5.  $P_L + P_{L^\perp} = I$

**Доказательство.** Докажем свойство 2. Проверим, что  $\|P_L x\| \leq \|x\|$ . Представим  $x$  в виде  $x = y + z$ , где  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$ . Отсюда  $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \implies \|y\| \leq \|x\|$ . То есть,  $\|P_L x\| \leq \|x\| \implies \|P_L\| \leq 1$ .  $\square$

**Замечание 12.5.** Если  $L \neq \{0\}$ , то  $\|P_L\| = 1$  (так как  $\forall x \in L \quad P_L x = x$ ).

**Теорема 12.6** (О характеристике ортогональных проекторов). Пусть  $U \in B(H, H)$ . Чтобы  $U$  был ортогональным проектором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1.  $U^2 = U$  (идемпотентность).

2.  $\forall x_1, x_2 \in H (Ux_1, x_2) = (x_1, Ux_2)$  (самосопряжённость).

*Доказательство.* Предположим, что  $U = P_L$ . Проверим идемпотентность. Если  $x = y + z$ , где  $y \in L, z \in L^\perp$ , то  $P_L x = y, P_L y = y$ . Проверим самосопряжённость. Пусть  $x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2$  ( $y_j \in L, z_j \in L^\perp$ ).  $P_L x_j = y_j. (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2)$ .

Обратно. Положим  $L = \{x \in H : Ux = x\} = \text{Ker}(U - I)$ . Ясно, что  $L$  — линейное замкнутое множество (ядро непрерывного оператора всегда замкнуто). Проверим, что  $\forall x \in H Ux \in L$ , то есть  $U(Ux) = Ux$ . Ясно, что это выполнено. Далее, представим  $x$  в виде  $x = \underbrace{Ux}_{\in L} + (x - Ux)$ .

Нужно доказать, что  $x - Ux \in L^\perp$ . Возьмём произвольное  $y \in L$ . Посчитаем скалярное произведение  $(x - Ux, y) = (x, y) - (Ux, y) = (x, y) - (x, Uy) = (x, y) - (x, y) = 0$ .  $\square$

### 13 Ряды Фурье

**Определение 13.1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство. Система векторов  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset H$  ( $A$  — некоторое множество индексов) называется ортогональной, если  $e_\alpha \neq 0 \forall \alpha \in A$  и  $(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}) = 0$ , если  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Система векторов называется ортонормированной, если она ортогональна и норма каждого вектора системы равна единице.

**Замечание 13.2.** Чаще всего множество  $A$  из определения 13.1 является множеством натуральных или целых чисел, но мы будем перенумеровывать индексы так, чтобы рассматривать множество натуральных чисел.

**Предложение 13.3.** Если система  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  ортогональна, то она линейно независима.

*Доказательство.* Предположим, что система линейно зависима. Тогда существуют скаляры  $\lambda_j$  такие, что  $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$ . Умножим это равенство скалярно на  $e_m$ . Получим  $\sum_{j=1}^n \lambda_j (e_j, e_m) = 0$ . Отсюда  $\lambda_m (e_m, e_m) = 0$ , но  $(e_m, e_m) \neq 0$ , значит,  $\lambda_m = 0 \forall m$ .  $\square$

**Предложение 13.4.** Пусть  $\{e_j\}$  — ортогональная система и  $x \in H$ . Предположим, что  $x$  представимо в виде  $x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j$ . Тогда такое представление единственно.

*Доказательство.* Рассмотрим представление  $x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j$ , умножим его скалярно на  $e_m$ .

$$(x, e_m) = \left( \sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j, e_m \right) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda_j e_j, e_m) = \lambda_m (e_m, e_m)$$

Отсюда  $\lambda_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)}$ , то есть коэффициент  $\lambda_m$  однозначно определяется по  $x$ .  $\square$

**Замечание 13.5.** Даже если  $x$  не представляется в виде ряда, можно вычислить величины  $\frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)} = \frac{(x, e_m)}{\|e_m\|^2}$ .

**Определение 13.6.**  $c_m(x) = \frac{(x, e_m)}{\|e_m\|^2}$  — коэффициенты Фурье вектора  $x$  по ортогональной системе  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ .  $\sum_{j=1}^\infty c_j(x)$  — ряд Фурье вектора  $x$  по этой системе.

Возникают естественные вопросы:

- Для всех ли  $x \in H$  ряд Фурье сходится?
- Если ряд Фурье сходится, то сходится ли он к  $x$ ?
- Как определить, к  $x$  или не к  $x$  он сходится?

**Пример 13.7.** Пусть  $H = \mathbb{R}^3$ ,  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Возьмём вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .  $c_1(x) = x_1$ ,  $c_2(x) = x_2$ . Значит, ряд Фурье  $x$  равен  $x_1 e_1 + x_2 e_2 = (x_1, x_2, 0)$ . Он сходится как конечная сумма, но не к  $x$ , а к его проекции на подпространство, натянутое на  $e_1, e_2$ .

**Теорема 13.8** (О частичных суммах ряда Фурье). Пусть у нас есть ортогональная система  $\{e_j\}$  в гильбертовом пространстве  $H$ , есть вектор  $x$  и его ряд Фурье  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(x) e_j$ . Рассмотрим  $S_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x) e_j$ ,  $L_n = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ . Тогда:

1.  $x - S_n(x) \perp L_n$ .
2.  $\|S_n(x)\| \leq \|x\|$

*Доказательство.* Докажем первое утверждение. Возьмём  $m : 1 \leq m \leq n$ .

$$(x - S_n(x), e_m) = (x, e_m) - \left( \sum_{j=1}^n c_j(x) e_j, e_m \right) = (x, e_m) - c_m(x) (e_m, e_m) = 0$$

Докажем второе утверждение.  $x = \underbrace{S_n(x)}_{\in L_n} + \underbrace{(x - S_n(x))}_{\perp L_n}$ . Отсюда  $S_n(x) = P_{L_n}(x)$  и  $\|S_n(x)\| \leq \|x\|$ ,  $\|x - S_n(x)\| \leq \|x\|$ . □

**Следствие 13.9.**

1.  $\|S_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n c_j(x) e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n |c_j(x)|^2 \cdot \|e_j\|^2 \leq \|x\|^2$ .
2. (Неравенство Бесселя)  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j(x)| \cdot \|e_j\|^2 \leq \|x\|^2$

**Теорема 13.10** (Риса-Фишера). Пусть  $\{e_j\}$  — ортогональная система в  $H$  — гильбертовом пространстве,  $x \in H$ . Тогда:

1. Ряд Фурье для  $x$  сходится.
2. Если  $S(x)$  — сумма этого ряда, то  $x - S(x) \perp e_j \forall j$ .
3.  $x = S(x) \iff \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(x)|^2 \cdot \|e_j\|^2 = \|x\|^2$

*Доказательство.* 1. Строим ортогональный ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(x) e_j$ . По теореме 10.4 этот ряд

сходится тогда и только тогда, когда  $\sum_{j=1}^{\infty} \|c_j(x) e_j\|^2$  сходится, то есть  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j(x)|^2 \|e_j\|^2$  сходится, что верно по неравенству Бесселя.

2.  $(x - S(x), e_j) = (x, e_j) - \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k, e_j \right) = (x, e_j) - c_j(x) (e_j, e_j) = 0$

3.  $x = \underbrace{z}_{\in L^\perp} + \underbrace{S(x)}_{\in L}$ , где  $L = \overline{\text{Lin}\{e_j\}}$ . По теореме Пифагора  $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|S(x)\|^2$ . Отсюда

$$x = S(x) \iff z = 0 \iff \|x\|^2 = \|S(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j(x) e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j(x)|^2 \|e_j\|^2.$$

□

**Определение 13.11.** Рассмотрим ортогональную систему  $\{e_j\} \subset H$ . Эта система называется *ортогональным базисом* в  $H$ , если  $\forall x \in H \ S(x) = x$  ( $S(x)$  — сумма ряда Фурье).

Возвращаясь к примеру 13.7, легко видеть, что выбранная в нём ортогональная система не является базисом.

**Определение 13.12.** Система векторов  $A \subset H$  называется *полной*, если из  $x \perp A$  следует  $x = 0$ , иначе говоря,  $A^\perp = \{0\}$ .

**Определение 13.13.** Система векторов  $A \subset H$  называется *порождающей*, если  $\overline{\text{Lin} A} = H$ . (Здесь  $H$  — не обязательно гильбертово пространство.)

**Теорема 13.14** (О характеристике ортогонального базиса). Пусть  $\{e_j\}$  — ортогональная система в  $H$  — гильбертовом пространстве. Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $\{e_j\}$  — ортогональный базис.
2.  $\forall x \in H \ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ .
3.  $\{e_j\}$  — порождающая система.
4.  $\{e_j\}$  — полная система.

*Доказательство.*

1.  $(1 \Leftrightarrow 2)$ . Утверждается в теореме Риса-Фишера.

2.  $(1 \Rightarrow 3)$ .  $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(x) e_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j(x) e_j}_{\in \text{Lin}\{e_j\}} \in \overline{\text{Lin}\{e_j\}} \Rightarrow \overline{\text{Lin}\{e_j\}} = H$ .

3.  $(3 \Rightarrow 4)$ .  $\{e_j\}$  — порождающая система, значит,  $\overline{\text{Lin}\{e_j\}} = H$ .  $\{e_j\}^\perp = (\overline{\text{Lin}\{e_j\}})^\perp = H^\perp = \{0\} \Rightarrow \{e_j\}$  — полная.

4.  $(4 \Rightarrow 1)$ .  $x = z + S(x)$ , где  $z \perp e_j \ \forall j$ . Это означает, что  $z = 0$ , так как система полная, и  $x = S(x)$ .

□

**Примеры 13.15.**

1.  $\ell^2$ .  $e_j = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_j, 0, \dots)$ .  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  — ортонормированный базис.

2.  $L^2(0, 2\pi)$ .  $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots\}$  — ортогональный базис. Как доказать, что это действительно базис? Проще всего в данной ситуации проверить, что рассматриваемая система является порождающей. Для этого надо любую функцию из  $L^2(0, 2\pi)$  научиться приближать линейными комбинациями (тригонометрическими многочленами). Таким образом, необходимо доказать, что любая непрерывная функция приближается тригонометрическими многочленами и, кроме того, любая функция из  $L^2(0, 2\pi)$  приближается непрерывной.
3.  $L^2(0, 2\pi)$ .  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — ортогональный базис.
4.  $L^2(0, \pi)$ .  $\{1, \cos t, \cos 2t, \dots\}$  — ортогональный базис.

**Определение 13.16.** Пусть  $X$  — нормированное пространство.  $X$  сепарабельно, если в нём существует счётное всюду плотное множество.

**Замечание 13.17.** Множество  $M$  является всюду плотным в  $X$ , если  $\overline{M} = X$ .

**Примеры 13.18.**

1.  $C(\overline{\Omega})$  — сепарабельное. (Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область.) В этом случае примером счётного всюду плотного множества служит множество многочленов с рациональными коэффициентами.
2.  $L^p(\Omega)$  — сепарабельное ( $1 \leq p < \infty$ ).
3.  $\ell^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ). Пример счётного всюду плотного множества:  $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \mid k \in \mathbb{N}; x_n \in \mathbb{Q}\}$
4.  $\ell^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$  — несепарабельное. Почему? Предположим, что в нём есть счётное всюду плотное множество  $M$ . Рассмотрим  $A \subset \ell^\infty$ :

$$A = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in \{0, 1\}\}$$

Заметим, что:

- a)  $A$  несчётно.
- b)  $\forall x, y \in A : x \neq y \implies \|x - y\| = 1$
- c) Рассмотрим различные элементы  $x_\alpha \in A$  и шары  $B_{\frac{1}{2}}(x_\alpha)$ . Ясно, что эти шары не пересекаются. Но по определению счётного всюду плотного множества каждый из этих шаров должен содержать точку из  $M$  — счётного, в то время как число шаров несчётно. Очевидно, что это невозможно.

**Теорема 13.19** (О существовании ортогонального базиса). Если  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство, то в нём существует ортогональный базис.

**Доказательство.** Пусть  $M$  — счётное всюду плотное множество в  $H$ :  $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $\overline{M} = H$ . Проредим последовательность  $x_j$  так, чтобы все её элементы стали линейно независимы. В результате получим новую последовательность  $M_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \subset M$ . Ясно, что  $\text{Lin } M_1 \supset M$ . Заметим, что  $\overline{\text{Lin } M_1} = H$ , так как оно содержит  $\overline{M}$ , и  $M_1$  линейно независимо. Будем проводить ортогонализацию: Возьмём  $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ . Пусть  $w_2 = y_2 - (y_2, e_1)e_1$ , причём  $(w_2, e_1) = 0$ ,  $w_2 \neq 0$  и  $\text{Lin}\{w_2, e_1\} = \text{Lin}\{y_1, y_2\}$ . Возьмём  $e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$ . Далее, пусть  $w_3 = y_3 - (y_3, e_1)e_1 - (y_3, e_2)e_2$  ( $(w_3, e_1) = (w_3, e_2) = 0$ ,  $w_3 \neq 0$ ,  $\text{Lin}\{w_3, e_1, e_2\} = \text{Lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ ) и берём  $e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$ . И так далее. Получим  $M_2 = \{e_1, e_2, \dots\}$  — ортонормированную систему.  $\overline{\text{Lin } M_2} = \overline{\text{Lin } M_1} = H$ , то есть,  $M_2$  — порождающая система, то есть базис.  $\square$

## 14 Теорема Риса

**Лемма 14.1.** Пусть  $L$  — линейное множество (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $f, g : L \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  — линейные функционалы,  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$ . Тогда существует скаляр  $\alpha$  такой, что  $g(x) = \alpha f(x) \ \forall x$ .

*Доказательство.*

1. Если  $f \equiv 0$ , то  $\text{Ker } f = L = \text{Ker } g \implies g \equiv 0$ .
2. Если  $f \not\equiv 0$ , то  $\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$ . Возьмём  $x \in L$ ,  $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$ .  $f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0) = 0 \implies y \in \text{Ker } f \subset \text{Ker } g \implies g(y) = 0$ . Отсюда  $0 = g(y) = g(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)}g(x_0)$  и  $\forall x$   
 $g(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(x)$ .

□

**Теорема 14.2 (Риса).** Пусть  $H$  — гильбертово пространство.

1.  $\forall y_0 \in H \ \exists f \in H^* : f(x) = (x, y_0), \|f\| = \|y_0\|_H$ .
2.  $\forall f \in H^* \ \exists y_0 \in H : \forall x \in H \ f(x) = (x, y_0)$ .

*Доказательство.*

1.  $f$  линеен, так как скалярное произведение линейно по первому аргументу. Непрерывность  $f$  очевидна из неравенства Коши-Буняковского:

$$|f(x)| = |(x, y_0)| \leq \|y_0\| \|x\| \implies \|f\| \leq \|y_0\|$$

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(y_0)|}{\|y_0\|} = \frac{(y_0, y_0)}{\|y_0\|} = \|y_0\|$$

2. В случае, когда  $f \equiv 0$  ясно, что  $y_0 = 0$ . Иначе:  $\text{Ker } f \neq H$ . Тогда существует  $z \neq 0$  такой, что  $z \perp \text{Ker } f$ . Почему это так? Поскольку  $f$  непрерывен, то  $\text{Ker } f$  — замкнутое множество, значит, на него можно спроецировать вектор. Взяв  $z' \notin \text{Ker } f$ , разложим его на две составляющие, одна из которых ортогональна  $\text{Ker } f$ . Примем её за  $z$ .

Теперь определим  $g$  как  $g(x) = (x, z)$ . Если  $f(x) = 0$ , то  $x \in \text{Ker } f$ , то есть  $x \perp z$ , откуда  $g(x) = 0$  и  $x \in \text{Ker } g$ . Значит,  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$ .

Отсюда по лемме существует  $\alpha$ :  $g(x) = \alpha f(x) \dots$

□

## 15 Сопряжённый оператор

**Теорема 15.1.** Пусть  $U \in B(H, H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство. Тогда существует единственный оператор  $V \in B(H, H)$  такой, что  $\forall x, y \in H \ (Ux, y) = (x, Vy)$ . При этом  $\|V\| \leq \|U\|$ .

**Определение 15.2.**  $V$  называется сопряжённым оператором к  $U$ . Обозначение:  $V = U^*$ .

**Предложение 15.3.** Пусть  $x, y \in H$ . Если  $(x, z) = (y, z) \ \forall z \in H$ , то  $x = y$ .

*Доказательство.* Из условия следует, что  $(x - y, z) = 0 \ \forall z \in H$ , откуда  $x - y \perp x - y$ . □

*Доказательство теоремы.* Возьмём вектор  $y \in H$  и построим по нему функционал  $f \in H^*$ :  $f(x) = (Ux, y)$ . Очевидно, что он линеен. Проверим непрерывность:

$$|f(x)| = |(Ux, y)| \leq \|Ux\| \|y\| \leq (\|U\| \|y\|) \|x\|$$

Мы имеем линейный непрерывный функционал. По теореме Риса существует вектор  $z$ , который его задаёт:  $f(x) = (x, z) \forall x$ . Таким образом:

$$\forall x \quad (Ux, y) = (x, z)$$

Определим  $V(y) = z$ , то есть,  $\forall x, y \quad (Ux, y) = (x, V(y))$ . Проверим, что  $V$  — линейный непрерывный функционал.

$$(x, V(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = (Ux, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} (Ux, y_1) + \overline{\alpha_2} (Ux, y_2) =$$

$$\overline{\alpha_1} (x, V(y_1)) + \overline{\alpha_2} (x, V(y_2)) = (x, \alpha_1 V(y_1) + \alpha_2 V(y_2))$$

Так как это выполнено для любого  $x$ , то  $V(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 V(y_1) + \alpha_2 V(y_2)$

Непрерывность  $V$ :

$$\|Vx\|^2 = (Vx, Vx) = (UVx, x) \leq \|UVx\| \cdot \|x\| \leq \|U\| \|Vx\| \|x\|$$

$$\|Vx\| \leq \|U\| \|x\|$$

Отсюда  $\|V\| \leq \|U\|$  и непрерывность доказана.

Докажем единственность  $V$ . Пусть существуют  $V_1, V_2$  такие, что  $\forall x, y \quad (x, V_1 y) = (Ux, y) = (x, V_2 y)$ . Ясно, что  $\forall y \quad V_1 y = V_2 y$ .  $\square$

**Предложение 15.4** (Свойства сопряжённого оператора).

$$0. I^* = I, 0^* = 0, P_L^* = P_L.$$

$$1. (U^*)^* = U.$$

$$2. \|U^*\| = \|U\|.$$

$$3. (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)^* = \overline{\alpha_1} U_1^* + \overline{\alpha_2} U_2^*.$$

$$4. U, V \in B(H, H). \text{ Тогда } (VU)^* = U^* V^*.$$

$$5. U \in B(H, H), U^{-1} \in B(H, H). \text{ Тогда } \exists (U^*)^{-1} \in B(H, H), \text{ причём } (U^*)^{-1} = (U^{-1})^*.$$

$$6. (\text{Формула двойственности}) (U(H))^\perp = \text{Ker } U^*, (U^*(H))^\perp = \text{Ker } U.$$

$$7. (\text{Ker } U^*)^\perp = \overline{U(H)}, (\text{Ker } U)^\perp = \overline{U^*(H)}$$

*Доказательство.*

0. Очевидно.

$$1. \forall x, y \quad (Ux, y) = (x, U^*y), \text{ откуда } \underbrace{(U^*y, x)}_{(y, U^{**}x)} = (y, Ux) \quad \forall x, y.$$

$$2. \|U\| \geq \|U^*\| \geq \|U^{**}\| = \|U\|.$$

$$3. (x, (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)^* y) = ((\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2)x, y) = \alpha_1 ((U_1 x, y) + \alpha_2 (U_2 x, y)) = \alpha_1 (x, U_1^* y) + \alpha_2 (x, U_2^* y) = (x, \overline{\alpha_1} U_1^* y + \overline{\alpha_2} U_2^* y).$$

4.  $(x, (VU)^*y) = (VUx, y) = (Ux, V^*y) = (x, U^*V^*y)$ .
5.  $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ .  $(U^{-1})^*U^* = U^*(U^{-1})^* = I^* = I$ , откуда  $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$ .
6.  $x \in \text{Ker } U^* \iff U^*x = 0 \iff \forall y \in H(y, U^*x) = 0 \iff \forall y(Uy, x) = 0 \iff x \perp U(H) \iff x \in (U(H))^\perp$ .
7. Следует из предыдущего свойства с учётом  $(L^\perp)^\perp = \bar{L}$ .

□

**Определение 15.5.** Оператор  $U$  называется замкнутым, если  $\overline{U(H)} = U(H)$ . В этом случае  $(\text{Ker } U^*)^\perp = U(H)$ .

**Замечание 15.6.** Рассмотрим задачу  $Ux = f$ . Для каких  $f$  существует решение?  $f \in U(H)$ , то есть  $f \perp \text{Ker } U^*$  — это условие разрешимости.

**Пример 15.7.** Рассмотрим оператор:  $Ux(t) = \int_{\Omega} K(s, t)x(s) ds$ , где  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ ,  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .  
 $U : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$(Ux, y) = \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} K(s, t)x(s) ds \right) \overline{y(t)} dt = \int_{\Omega} x(s) \underbrace{\int_{\Omega} K(s, t)\overline{y(t)} dt}_{\overline{U^*y(s)}} ds = (x, U^*y)$$

## 16 Собственные числа и собственные векторы

**Определение 16.1.** Пусть  $X$  — линейное нормированное пространство,  $U \in B(X, X)$  — оператор.  $\lambda$  называется собственным числом оператора  $U$ , если существует  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  такой, что  $Ux = \lambda x$ .  $x$  называется собственным вектором.  $X_\lambda = \{x \in X \mid Ux = \lambda x\} = \text{Ker}(U - \lambda I)$  — собственное подпространство.  $\dim X_\lambda$  называется кратностью собственного числа  $\lambda$ .

**Теорема 16.2.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство, оператор  $U$  самосопряжён. Тогда:

1. Все собственные числа оператора  $U$  вещественны.
2. Если  $\lambda, \mu$  — собственные числа,  $\lambda \neq \mu$  и  $x, y$  — соответствующие им собственные векторы, то  $x \perp y$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\lambda$  — собственное число,  $x$  — собственный вектор.

$$\lambda \|x\|^2 = (\lambda x, x) = (Ux, x) = (x, Ux) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

Отсюда  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

- 2.

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ux, y) = (x, Uy) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

Отсюда  $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$ .

□

**Предложение 16.3.** Если  $\lambda$  — собственное число оператора  $U$ , то  $\|U\| \geq |\lambda|$ .

*Доказательство.*

$$\|U\| = \sup \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Uy\|}{\|y\|} = \frac{|\lambda| \|y\|}{\|y\|} = |\lambda|$$

□



## 17 Компактность

**Определение 17.1.** Пусть  $X$  — нормированное пространство,  $A \subset X$ . Множество  $A$  называется компактным, если в любой последовательности  $\{x_n\} \subset A$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow x \in A$ .

**Замечание 17.2.** Если  $A$  — компактно, то оно замкнуто и ограничено. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Определение 17.3.** Множество  $A$  называется *предкомпактным*, или *относительно компактным*, если  $\bar{A}$  компактно. Или, что равносильно, для любой последовательности  $\{x_n\} \subset A$  существует последовательность номеров  $n_k$  такая, что  $x_{n_k} \rightarrow x \in X$ .

**Пример 17.4.** В  $\mathbb{R}^n$  предкомпактность равносильно ограниченности.

**Предложение 17.5** (Критерий Хаусдорфа). Пусть  $X$  — нормированное пространство,  $A \subset X$ .  $A$  компактно тогда и только тогда, когда  $A$  замкнуто и для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

**Определение 17.6.** Множество  $M$  называется  $\varepsilon$ -сетью для множества  $A$ , если  $A \subset \bigcup_{x \in M} B_\varepsilon(x)$  или, что то же самое,  $\forall a \in A \exists x \in M: |x - a| < \varepsilon$ .

Любое множество является  $\varepsilon$ -сетью для самого себя.

**Замечание 17.7.** Конечная  $\varepsilon$ -сеть — это  $\varepsilon$ -сеть из конечного числа точек.

**Замечание 17.8.** В определении  $\varepsilon$ -сети можно требовать, чтобы сама  $\varepsilon$ -сеть  $M$  была подмножеством  $A$ , а можно не требовать. Критерий Хаусдорфа при этом остаётся в силе. Если есть  $M \subset X$  —  $\varepsilon$ -сеть  $A$  из конечного числа элементов  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , то существует  $2\varepsilon$ -сеть из  $k$  элементов  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A$ . Достаточно выбрать  $a_j \in A$  такие, что  $\|a_j - m_j\| < \varepsilon$ .

**Следствие 17.9.** Множество  $A$  предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  у  $A$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

**Предложение 17.10.** Множество  $A \subset X$  предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  у  $A$  существует предкомпактная  $\varepsilon$ -сеть.

*Доказательство.*

1. ( $\Rightarrow$ ) Очевидно, так как конечное множество всегда компактно.
2. ( $\Leftarrow$ ) Возьмём предкомпактную  $\varepsilon$ -сеть  $M_\varepsilon$  множества  $A$ . Тогда существует  $N_\varepsilon$  — предкомпактная  $\varepsilon$ -сеть для  $M_\varepsilon$ , откуда  $N_\varepsilon$  —  $2\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

□

**Теорема 17.11** (Арцела-Асколли). Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область. Рассмотрим пространство  $X = C(\bar{\Omega})$  и множество  $A \subset C(\bar{\Omega})$ .  $A$  предкомпактно тогда и тогда, когда выполняются оба условия:

1.  $A$  ограничено (возможно, равномерно ограничено), то есть существует  $C$  такое, что  $\forall x \in A \max_{t \in \bar{\Omega}} |x(t)| \leq C$
2.  $A$  равностепенно непрерывно.

Вспомним, что равномерная непрерывность функции  $x$  означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall s, t \in \overline{\Omega} \quad |s - t| < \delta \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$$

Равностепенная непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in A \quad \forall s, t \in \overline{\Omega} \quad |s - t| < \delta \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$$

Таким образом, по  $\varepsilon$  строится  $\delta$ , общее для всех  $x \in A$ .

*Доказательство теоремы.* Мы докажем только необходимость. Возьмём  $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть  $M \subset A$ :  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Мы можем построить  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  и взять  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$ .  $\forall x \in A \exists j$ :  $\|x_j - x\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall s, t \in \overline{\Omega} : |s - t| < \delta$ . Получаем:

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_j(s)| + |x_j(s) - x_j(t)| + |x_j(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

## 18 Компактные операторы

**Определение 18.1.** Оператор  $U \in B(X, Y)$  называется компактным, если образ любого ограниченного  $M \subset X$  является предкомпактным в  $Y$ .

**Предложение 18.2** (Свойства компактных операторов).

1.  $U$  компактен  $\iff U(B_X)$  предкомпактен. ( $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ )
2.  $U$  компактен  $\iff$  образ любой ограниченной последовательности  $\{x_k\} \subset X$  имеет  $n_k$  такие, что  $U(x_{n_k})$  сходится в  $Y$ .
3. Если  $U_1, U_2 \in B(X, Y)$  компактны, то  $U_1 + U_2$  и  $\lambda U$  компактны.
4. Рассмотрим  $U \in B(X, Y)$ ,  $B(Y, Z)$ . Если  $U$  компактен, то  $VU$  компактен. Если  $V$  компактен, то  $VU$  компактен.
5. Тождественный оператор  $I \in B(X, X)$  компактен тогда и только тогда, когда  $\dim X < \infty$ .
6. Если  $U \in B(X, Y)$  конечного ранга, то есть  $\dim U(X) < \infty$ , то  $U$  компактен.
7. Если  $U_n, U \in B(X, Y)$ ,  $U_n \rightarrow U$ ,  $U_n$  — компактны, то  $U$  тоже компактен.
8. Если  $U \in B(H, H)$  — компактный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ , то  $U^*$  — компактен. (Более общий случай этого утверждения называется теоремой Шаудера).

*Доказательство.*

1.  $(\Rightarrow)$  Очевидно.

$(\Leftarrow)$  Так как  $M$  ограничено, то существует  $R$  такое, что  $M \subset B_R = RB_X$ .  $U(M) \subset RU(B_X)$ . Но  $U(B_X)$  —  $\frac{\varepsilon}{R}$ -сеть.

2.  $(\Rightarrow)$   $M = \{x_k\}$  — ограниченное множество, отсюда  $U(M) = \{Ux_k\}$  предкомпактно в  $Y$ , значит, из последовательности  $y_k = Ux_k \in U(M)$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
- $(\Leftarrow)$  Возьмём  $y_k \in U(M)$ . Существует  $x_k \in M$  такое, что  $y_k = Ux_k$ . Значит,  $\{x_k\}$  — ограниченная последовательность в  $X$ , и существует  $n_k$  такое, что  $Ux_{n_k}$  сходится. Тогда  $y_{n_k} = Ux_{n_k}$ .
3. Упражнение.
4. Докажем для компактного  $U$ .  $\forall U \in B(X, Z)$ . Возьмём ограниченную последовательность  $\{x_k\} \subset X$ . Подействуем на неё оператором  $U$ :  $\{Ux_k\} \subset Y$ .  $\exists n_k$ :  $Ux_{n_k}$  сходится в  $Y$ . Значит,  $VUx_{n_k}$  тоже сходится. Теперь рассмотрим случай компактного  $V$ . Аналогично возьмём ограниченную последовательность  $\{x_k\} \subset X$ .  $\{Ux_k\}$  ограничена в  $Y$ , значит,  $\exists n_k$  такие, что  $V(Ux_{n_k})$  сходится в  $Z$ .
5. Докажем для случая гильбертова пространства. Достаточность очевидна из анализа. Пусть  $H$  — бесконечномерное гильбертово пространство. Существуют  $e_1, e_2, \dots$  такие, что  $(e_j, e_k) = \delta_{j,k}$ . Последовательность  $\{e_j\}$  ограничена, но извлечь из неё сходящуюся подпоследовательность нельзя, так как всегда  $\|e_j - e_k\| = \sqrt{2}$ , из чего следует, что единичный шар  $B_H$  не предкомпактен и из первого свойства оператор  $U$  некомпактен.
6. Очевидно.
7. Известно, что множества  $U_n(B_X)$  предкомпактны. Мы хотим доказать, что  $U(B_X)$  предкомпактно, то есть, для любого  $\varepsilon > 0$  существует предкомпактная  $\varepsilon$ -сеть для  $U(B_X)$ , то есть существует  $n$  такое, что  $\|U_n - U\| < \varepsilon$  или, что то же самое,  $\forall x \in X$   $\|Ux - U_n x\| < \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon$ . Тогда  $U_n(B_X)$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $U(B_X)$ .
8. Возьмём  $\{x_n\}$  — ограниченную последовательность. Мы хотим выделить такую последовательность номеров  $n_k$ , что  $U_{n_k}^*$  сходится.

$$\|U^*x\|^2 = (U^*x, U^*x) = (UU^*x, x) \leq \|UU^*x\| \cdot \|x\|$$

Возьмём произвольные  $m, n$ . Имеет место оценка:

$$\|U^*x_n - U^*x_m\|^2 \leq \|UU^*x_n - UU^*x_m\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

По свойству 4  $UU^*$  — компактный оператор, то есть, существует  $n_k$  такое, что  $UU^*x_{n_k}$  сходится, что завершает доказательство.

□

## 19 Примеры компактных операторов

1. Рассмотрим пространства  $X = C^1[0, 1]$  и  $Y = C[0, 1]$  с оператором вложения  $j : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ,  $jx = x$ . Этот оператор будет компактным. Вспомним нормы в рассматриваемых пространствах:

$$\|x\|_{C^1} = \max |x'| + \max |x|; \quad \|x\|_C = \max |x|$$

Предкомпактно ли  $j(B_X)$ ? Воспользуемся теоремой Арцела-Асколли, показав равномерную непрерывность:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in j(B_X) \quad \forall s, t \in [0, 1] : |s - t| < \delta \quad |x(s) - x(t)| < \varepsilon$$

Здесь  $x \in j(B_X)$  влечёт  $\max |x'| \leq 1$ . Взяв  $\delta = \varepsilon$ , получим  $|s - t| < \varepsilon$ , откуда  $|x(s) - x(t)| = |x'(\xi)||s - t| \leq |s - t|$ .

2. Аналогично, пусть  $X = C^1[0, 1]$ ,  $Y = L^2(0, 1)$  и  $j' : C^1[0, 1] \rightarrow L^2(0, 1)$ ,  $j'x = x$ . Оператор  $j$  также компактен.
3. Интегральный оператор с непрерывным ядром. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\overline{\Omega}$  — компакт. Рассматриваем пространства  $C(\overline{\Omega})$ ,  $L^2(\Omega)$ . Пусть  $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$  — ядро. Рассмотрим интегральный оператор  $(Ux)(t) = \int_{\Omega} K(s, t)x(s) ds$ . Проверим компактность оператора  $U$  при действии его из  $L^2(\Omega)$  в  $C(\overline{\Omega})$ . Компактность при действии  $C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$  и  $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  будет следствием. Воспользуемся теоремой Арцела-Асколи. Пусть  $B_X$  — шар в  $L^2(\Omega)$ .  $U(B_X)$  предкомпактен в  $C(\overline{\Omega})$ .

$$|Ux(t_1) - Ux(t_2)| \leq \int_{\Omega} |K(s, t_1) - K(s, t_2)| |x(s)| ds \leq \underbrace{\|x\|_2}_{\leq 1} \cdot \left( \int_{\Omega} |K(s, t_1) - K(s, t_2)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : |t_1 - t_2| < \delta \implies \left( \int_{\Omega} |K(s, t_1) - K(s, t_2)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Другой способ доказательства заключается в приближении  $U$  конечномерными операторами. Существует многочлен  $P$  такой, что  $\|P - K\|_{C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} < \varepsilon$ . Рассмотрим конечномерный оператор  $U_P x(t) = \int_{\Omega} P(s, t)x(s) ds$  с вырожденным ядром  $P(s, t) =$

$$\sum_{k=1}^N a_k(s)b_k(t). \text{ Тогда будет иметь место } \|U - U_P\| \leq C_{\varepsilon}.$$

4. Интегральный оператор с ядром со слабой особенностью. Пусть ядро  $K(s, t) = \frac{A(s, t)}{|s - t|^{\alpha}}$ , где  $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$  и  $\alpha < m$  — размерности пространства  $\mathbb{R}^m$ . Докажем, что операторы  $U \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$  и  $U \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$  компактны. Рассмотрим  $K_n$ :

$$K_n(s, t) = \begin{cases} K(s, t), & \text{если } |s - t| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{A(s, t)}{(\frac{1}{n})^{\alpha}}, & \text{если } |s - t| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$K_n$  — непрерывные ядра, и соответствующие им операторы  $U_n$  будут компактными.

$$|Ux(t) - U_n x(t)| = \left| \int_{\Omega} (K(s, t) - K_n(s, t))x(s) ds \right| = \left| \int_{\Omega \cap B_{\frac{1}{n}}(t)} \right| = *$$

Для случая  $C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$ :

$$\begin{aligned} * &\leq \|x\| \cdot \int_{\Omega \cap B_{\frac{1}{n}}(t)} 2|K(s, t)| ds \leq 2\|x\| \cdot \|A\|_{C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} \cdot \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} \frac{1}{|s - t|^{\alpha}} ds \leq \\ &\leq 2\|x\| \cdot \|A\| \cdot \frac{(\frac{1}{n})^{m-\alpha}}{m-\alpha} \cdot |\Omega| \end{aligned}$$

Для случая  $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ :

$$* \leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t) - K_n(s, t)| |x(s)| ds \leq 2 \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t)| |x(s)| ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t)|^{\frac{1}{2}} |K(s, t)|^{\frac{1}{2}} |x(s)| ds \leq 2 \underbrace{\left( \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t)| ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq C \left( \frac{1}{n} \right)^{m-\alpha}} \left( \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t)| \cdot |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\|U_n x - Ux\|^2 \leq C \left( \frac{1}{n} \right)^{m-\alpha} \int_{\Omega} \int_{B_{\frac{1}{n}}(t)} |K(s, t)| |x(s)|^2 ds dt = \\
&= C \left( \frac{1}{n} \right)^{m-\alpha} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \chi_{B_{\frac{1}{n}}(t)}(s) K(s, t) |x(s)|^2 ds dt = \dots
\end{aligned}$$

## 20 Собственные числа и собственные векторы компактных самосопряжённых операторов

**Определение 20.1.** Пусть  $U : X \rightarrow X$  — оператор,  $U \in B(X, X)$ .  $\lambda$  называется собственным числом оператора  $U$ , если существует такое  $x \neq 0$  (называемое собственным вектором), что  $Ux = \lambda x$ .

**Предложение 20.2.**

1.  $|\lambda| \leq \|U\|$ ;
2. Если  $U = U^*$ , то  $\lambda \in \mathbb{R}$  (для гильбертова пространства).
3. Если  $U = U^*$ ,  $Ux = \lambda x$ ,  $Uy = \mu y$  и  $\lambda \neq \mu$ , то  $x \perp y$ .

**Лемма 20.3.** Если  $U \in B(H, H)$ , где  $H$  — гильбертово пространство, и  $U = U^*$ , то  $\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|$

*Доказательство.* Пусть  $\sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)| = A$ .

1.  $|(Ux, x)| \leq \|Ux\| \cdot \|x\| \leq \|U\| \cdot \|x\|^2 \implies A \leq \|U\|$ .
2.  $U = U^* \implies (Ux, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x$ , так как  $(Ux, x) = (x, Ux) = \overline{(Ux, x)}$
3.  $\forall x \in H \quad |(Ux, x)| \leq A \|x\|^2 \iff |(U(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|})| \leq A$
4. Возьмём  $x, y \in H$ .

$$(U(x+y), x+y) = (Ux, x) + \underbrace{(Ux, y) + (Uy, x)}_{2\operatorname{Re}(Ux, y)} + (Uy, y)$$

$$(U(x-y), x-y) = (Ux, x) - (Ux, y) - (Uy, x) + (Uy, y)$$

$$|4\operatorname{Re}(Ux, y)| = |(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)| \leq A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2A(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Положим теперь  $y = t \cdot Ux$ .

$$4t\|Ux\|^2 \leq 2A(\|x\|^2 + t^2\|Ux\|^2)$$

$$(4t - 2At^2)\|Ux\|^2 \leq 2A\|x\|^2$$

Взяв  $t = \frac{1}{A}$ , получим:

$$\left( \frac{4}{A} - \frac{2}{A} \right) \|Ux\|^2 \leq 2A\|x\|^2 \implies \|Ux\|^2 \leq A^2\|x\|^2 \implies \|U\| \leq A$$

□

**Теорема 20.4.** Если  $U \in B(H, H)$  — компактный самосопряжённый оператор на гильбертовом пространстве  $H$ , то у него существует собственное число. Более того, это собственное число равно  $\|U\|$  или  $-\|U\|$ .

*Доказательство.* Воспользуемся самосопряжённостью.  $\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|$ . Это значит, что существует последовательность на единичной сфере  $\{x_k\}$ ,  $\|x_k\| = 1$  такая, что  $(Ux_k, x_k) \rightarrow \mu$ ,  $\mu = \pm\|U\|$ . Докажем, что она сходится.

$$0 \leq \|Ux_k - \mu x_k\|^2 = \underbrace{(Ux_k, Ux_k)}_{\|Ux_k\|^2 \leq \|U\|^2 \cdot \|x_k\|^2 = \mu^2} - \underbrace{((Ux_k, \mu x_k) + (\mu x_k, Ux_k))}_{2\mu(Ux_k, x_k) \rightarrow 2\mu^2} + \underbrace{|\mu|^2 \|x_k\|^2}_1 \rightarrow 0$$

Мы получили, что  $Ux_k - \mu x_k = \eta_k \rightarrow 0$ . Самое время воспользоваться компактностью. Выделим подпоследовательность  $n_k$  такую, что  $Ux_{n_k}$  сходится. Получим, что  $\mu x_{n_k}$  тоже сходится. Перейдём к пределу в  $Ux_{n_k} - \mu x_{n_k} = \eta_{n_k}$ :  $Ux_0 - \mu x_0 = 0$ . Заметим, что  $x_0 \neq 0$ , потому что  $\|x_0\| = 1$ . Получили  $\mu = \pm\|U\|$ , что и требовалось. □

**Замечание 20.5.** Пусть  $U$  — компактный самосопряжённый оператор на гильбертовом пространстве и  $\lambda_1$  — его собственное число:  $|\lambda_1| = \|U\|$ ,  $e_1$  — соответствующий ему собственный вектор:  $\|e_1\| = 1$ .  $Ue_1 = \lambda_1 e_1 \in \text{Lin}\{e_1\}$ . Возьмём  $x \perp \text{Lin}\{e_1\}$ . Тогда  $Ux \perp \text{Lin}\{e_1\}$ , так как:

$$(Ux, e_1) = (x, Ue_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0$$

Пусть  $H_1 = \{e_1\}^\perp$ .  $U(H_1) \subset U_1$  и  $U_1 = U|_{H_1}$  — компактный самосопряжённый оператор на  $H_1$ , у которого существует собственное число  $\lambda_2$ :

$$|\lambda_2| = \|U_1\| = \sup_{x \in H_1, \|x\|=1} |(Ux, x)| = \sup_{x \perp e_1, \|x\|=1} |(Ux, x)|$$

Пусть  $e_2$  — собственный вектор, соответствующий  $\lambda_2$ ,  $H_2 = \{e_1, e_2\}^\perp$ ,  $U(H_2) \subset H_2$ ,  $U|_{H_2} = U_2$  — компактный самосопряжённый оператор на  $U_2$ , у которого существует собственное число  $\lambda_3$ :  $|\lambda_3| = \|U_2\| = \sup_{x \perp \{e_1, e_2\}, \|x\|=1} |(Ux, x)|$ , и пусть  $e_3$  — собственный вектор, ему соответствующий.

Мы получили последовательность собственных чисел  $\lambda_i$  и собственных векторов  $e_i$

**Теорема 20.6.** Пусть  $U$  — компактный самосопряжённый оператор на гильбертовом пространстве. Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  множества вида  $[-\|U\|, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \|U\|]$  содержат лишь конечное количество собственных чисел.

*Доказательство.* Если собственных чисел в таком множестве бесконечно много, то существует последовательность  $\lambda_k \rightarrow \lambda \in [-\|U\|, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \|U\|]$  ( $\lambda_k$  — различные собственные числа). Пусть  $e_k$  — соответствующие нормированные собственные векторы, попарно ортогональные. Выделим подпоследовательность  $n_k$  такую, что  $Ue_{n_k}$  сходится.  $\frac{1}{\lambda_{n_k}} Ue_{n_k} = e_{n_k}$ , отсюда  $e_{n_k}$  сходится, что невозможно для ортонормированных векторов. □

**Теорема 20.7.** Пусть  $U$  — компактный самосопряжённый оператор на гильбертовом пространстве. Тогда все ненулевые собственные числа имеют конечную кратность.

Вспомним, что кратность собственного числа есть размерность собственного подпространства  $H_\lambda = \text{Ker}(U - \lambda I) = \{x | Ux = \lambda x\}$ .

*Доказательство теоремы.* Пусть  $\lambda \neq 0$  — собственное число  $U$ .  $\text{Ker}(U - \lambda I) = \text{Ker}\left(I - \frac{1}{\lambda}U\right)$  — имеет конечную размерность по теореме Фредгольма. □

**Замечание 20.8.** Процедура из замечания 20.5 собирает все ненулевые собственные числа. Возможны два варианта:

1.  $\lambda_j \neq 0, \lambda_j \rightarrow 0$ .
2. Начиная с некоторого  $j$  все собственные числа будут нулевыми.

**Теорема 20.9** (Гильберта-Шмидта). Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $U$  — компактный оператор на нём. Рассмотрим упорядоченную последовательность собственных чисел  $\{\lambda_j\}$ :  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_k| \rightarrow 0$ ; собственные векторы  $e_1, e_2, \dots$ ,  $(e_j, e_k) = \delta_{j,k}$ . Любой  $x \in H$  можно разложить в ряд Фурье:

$$x = z + \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j$$

При этом  $z \in \text{Ker } U$

*Доказательство.* Будем пользоваться обозначениями из замечания 20.5. Рассмотрим частичную сумму  $x_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$ . Заметим, что  $x - x_n \in H_n$ , то есть  $x - x_n \perp e_1, \dots, e_n$ . Это означает, что  $\|U(x - x_n)\| \leq \|U_n\| \cdot \|x - x_n\| = |\lambda_{n+1}| \cdot \|x - x_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \cdot \|x\| \rightarrow 0$ .

$$x = z + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$Ux = Uz + \lim_{n \rightarrow \infty} Ux_n$$

$$Uz = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ux - Ux_n) = 0$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью  $U$ . □