Функциональный анализ

Ф. Л. Бахарев *

13 сентября 2016 г.

Содержание

*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Линейное нормированное пространство

Определение 1.1. Линейное множество L над полем скаляров $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — множество с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющее свойствам:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x, y, z \in L$
2. $x+y = y+x$ $\forall x, y, z \in L$
3. Существует элемент 0 такой, что $x+0 = x$ $\forall x \in L$
4. Для любого $x \in L$ существует обратный элемент по сложению $-x$ такой, что $-x+x = 0$
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in L$
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu y$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$

Определение 1.2. $\varphi : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если:

1. $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ $\forall x, y \in L$
2. $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$ $\forall x \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $\varphi(x) \geqslant 0$ $\forall x \in L$
4. $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

Если выполнены только первых три свойства, то φ называется полунормой.

Замечание 1.3.

1. $\rho(x, y) = \varphi(x-y)$ — метрика.
2. Если на пространстве задана норма $\|\cdot\|$, то $X = (L, \varphi)$ — нормированное пространство.

Определение 1.4. $x_n \to x$ в X, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $\forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Определение 1.5. $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, то есть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $\forall m, n > N$ $\|x_m - x_m\| < \varepsilon$

Замечание 1.6. $x_n \to x \implies \{x_n\}$ — фундаментальная. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 1.7. Нормированное пространство X называется полным, если из фундаментальности последовательности следует существование предела.

Определение 1.8. Пусть $x_n \in X$. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится, если $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ имеет предел $\lim S_n = S$. S называется суммой ряда.

Определение 1.9. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ называется *сходящимся абсолютно*, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ сходится.

Замечание 1.10. Из абсолютной сходимости не следует обычная сходимость.

S_n сходится $\iff |S_n - S_m| \to 0$. Пусть $C_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \|x\|$. C_n сходится $\iff |C_n - C_m| \to 0$. Если мы хотим, чтобы сходимость S_n была равносильна $\|S_n - S_m\| \to 0$, то нам нужна полнота пространства.

Определение 1.11. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (в честь польского математика Стефана Банаха).

Примеры 1.12.

- Евклидово пространство: $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = |x| = \sqrt[n]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ — то же, что ℓ_n^2 с нормой $\|\cdot\|_2$;
- $\ell_n^1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, где $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$;
- $\ell_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$;
- $\ell_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p, \|x\|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geqslant 1$;
- $C(\overline{\Omega})$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x(t)|$, где Ω — область в $\mathbb{R}^m$. $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω. Ясно, что $\overline{\Omega}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$.

Упражнение 1.13. *Верно ли, что* $\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \|x\|_\infty$*?*

Теорема 1.14. *Пространство* $C(\overline{\Omega})$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_n \in C(\overline{\Omega})$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N \|x_k - x_n\| = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

Возьмём $t \in \overline{\Omega}$. $\{x_n(t)\}$ — числовая последовательность. Тогда получаем $|x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$, отсюда $\{x_n(t)\}$ — фундаментальна, значит существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$.

Проверим, что $\max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, т. е. $x_n \rightrightarrows x$ на $\overline{\Omega}$. Заметим, что $\forall k, n > N$ $|x_k(t) - x_n(t)| < \varepsilon \implies |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Почему же x непрерывна? Потому что равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

□

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. Какую норму на нём выбрать?

- $\varphi_1(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$;
- $\varphi_2(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;
- $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$;
- $\varphi_4(x) = |x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

Заметим, что φ_2 нормой вообще не является, а φ_1 не даёт полноты пространства.

Теорема 1.15. *1. Пространство* $(C^1[a,b], \varphi_1)$ *не полно.*

2. Пространство $(C^1[a,b], \varphi_3)$ *полно.*

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Первый аргумент. x — производная непрерывная на $[a,b]$, негладкая. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P такой, что $\max\limits_{[a,b]} |P - x| < \varepsilon$

Второй аргумент. Пусть $[a,b] = [-1,1]$, $x(t) = |t| \notin C^1[a,b]$, $x^\varepsilon(t) = |t|^{1+\varepsilon} \in C^1[a,b]$. $\max |x(t) - x^\varepsilon(t)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Для доказательства второго утверждения возьмём $x_n \in C^1[a,b]$ — последовательность, фундаментальную относительно φ_3.

$$\varphi_3(x_n - x_k) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0 \implies \begin{cases} \varphi_1(x_n - x_k) \to 0 \\ \varphi_2(x_n - x_k) \to 0 \end{cases} \implies \exists x \in C[a,b], y \in C[a,b]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n - x) \to 0 \iff x_n \rightrightarrows x \text{ на } [a,b] \\ \varphi_1(x_n' - y) \to 0 \iff x_n' \rightrightarrows y \text{ на } [a,b] \end{cases} \implies x \in C^1[a,b], x' = y$$

Отсюда $\varphi_3(x_n - x) \to 0$ □

2 Пространства Лебега

Неравенство Гёльдера

Рассмотрим (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, и числа $p, q > 0$ — сопряжённые показатели, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда верно неравенство:

$$\int\limits_T |x(t)y(t)|\, d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |y(t)|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство Минковского

Если (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, $p \geqslant 1$, то верно неравенство:

$$\left(\int\limits_T |x(t)|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |y(t)|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \int\limits_T |x(t)y(t)| d\mu(t)$$

Обозначение: $\|x\|_p = (\int\limits_T |x|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Замечание 2.1. Частный случай — $p = q = 2$. Тогда неравенство Гёльдера оказывается неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$\int\limits_T |x(t)| \cdot |y(t)|\, d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^2\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_T |y(t)|^2\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Замечание 2.2. Пусть $T = \mathbb{N}$, и если $M \subset \mathbb{N}$, то $\#M = \operatorname{card} M$ — количество элементов M — будет мерой. Рассмотрим функцию $x : \mathbb{N} \to k$, где k — некоторое поле скаляров. Мы помним, что функция из натуральных чисел называется последовательностью. Как можно вычислять $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n) d\#(n)$? Ясно, что такой интеграл — это ряд $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x(n)$, а суммируемые функции в этом случае будут абсолютно сходящимися рядами. Неравенство Гёльдера будет выглядеть так:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n||y_n| \leqslant \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

А неравенство Минковского — так:

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n||y_n| \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 2.3. Пространство Лебега $\mathcal{L}^p(T, \mu)$ — это множество $\{x \mid \int\limits_T |x|^p \, d\mu < \infty\}$. Оно линейно: $x, y \in \mathcal{L}^p \implies x + y \in \mathcal{L}^p$ и $\lambda y \in \mathcal{L}^p$

Заметим, что $\|x\|_p = \left(\int\limits_T |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ — полунорма на $\mathcal{L}^p(T, \mu)$. Если $\|x\|_p = 0$, то $x = 0$ почти везде.

Чтобы получить норму, введём следующее отношение эквивалентности:

$$x_1 \sim x_2 \text{ если } x_1 - x_2 = 0 \text{ почти везде.}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^p(T, \mu) /_{\sim} = L^p(T, \mu)$$

— это настоящее пространство Лебега. В дальнейшем мы будем считать функции, отличающиеся на множестве меры нуль, одинаковыми.

Замечание 2.4. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ — мера Лебега. Тогда будем обозначать $L^p(T, \mu) = L^p(T)$.

Теорема 2.5. *Пространство* $L^p(T, \mu)$ *полно при* $p \geqslant 1$.

Пример 2.6. Рассмотрим $L^2(0, +\infty)$ и $L^1(0, +\infty)$. Какое из этих пространств является вложением в другое? Возьмём функцию $x(t) = \frac{1}{t+1}$.

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t+1} dt = \infty$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2} dt < \infty$$

Отсюда видно, что $L^2(0, +\infty) \not\subset L^1(0, +\infty)$. Легко придумать и пример, доказывающий отсутствие включения в обратную сторону.

Теорема 2.7 (О вложенности пространств L^p). *Пусть* $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$. *Тогда:*

1. $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.

2. *Если* (T, μ) *— пространство с мерой,* $\mu(T) < \infty$, *то* $L^{p_1}(T, \mu) \supset L^{p_2}(T, \mu)$

Доказательство.

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Хотим проверить, что $x \in \ell^{p_1} \implies x \in \ell^{p_2}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_1} < \infty \implies \exists N \quad \forall j > N \quad |x_j| < 1 \implies |x_j|^{p_1} < |x_j|^{p_2}$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_1} > \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_2} \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_2} < \infty \implies x \in \ell^{p_2}$$

2. Для доказательства второго пункта достаточно применить неравенство Гёльдера.

□

3 Непрерывность. Сжимающее отображение

Определение 3.1. Возьмём отображение $F : X \to Y$, где X и Y — линейные нормированные пространства. F называется непрерывным в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x : \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$$

F называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках X.

Пример 3.2. $X = Y = C[0,1]$, $\|x\|_{C[0,1]} = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Рассмотрим отображение $(F(x))(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$ и докажем, что оно непрерывно.

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^t x_1(s)\,ds - \int\limits_0^t x_2(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t \int\limits_0^t |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leqslant \max_t t \cdot \|x_1 - x_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$$

Достаточно взять $\delta = \varepsilon$ и всё доказано.

Определение 3.3. Отображение $F : X \to Y$ называется липшицевым, если существует такое C, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(X_2)\| \leqslant C \cdot \|x_1 - x_2\|$

Заметим, что из липшицевости отображения следует его непрерывность. Достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Определение 3.4. Отображение $F : X \to Y$ называется сжимающим, если существует такое $\gamma < 1$, что $\forall x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \gamma \|x_1 - x_2\|$.