Функциональный анализ

Ф. Л. Бахарев *

18 октября 2016 г.

Содержание

*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Линейное нормированное пространство

Определение 1.1. Линейное множество L над полем скаляров $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — множество с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющее свойствам:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)\ \forall x, y, z \in L$
2. $x+y = y+x\ \forall x, y, z \in L$
3. Существует элемент 0 такой, что $x+0 = x\ \forall x \in L$
4. Для любого $x \in L$ существует обратный элемент по сложению $-x$ такой, что $-x+x = 0$
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in L$
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y\ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu y\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$

Определение 1.2. $\varphi : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если:

1. $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)+\varphi(y)\ \forall x, y \in L$
2. $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)\ \forall x \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $\varphi(x) \geqslant 0\ \forall x \in L$
4. $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

Если выполнены только первых три свойства, то φ называется полунормой.

Замечание 1.3.

1. $\rho(x, y) = \varphi(x-y)$ — метрика.
2. Если на пространстве задана норма $\|\cdot\|$, то $X = (L, \varphi)$ — нормированное пространство.

Определение 1.4. $x_n \to x$ в X, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Определение 1.5. $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m, n > N$ $\|x_m - x_m\| < \varepsilon$

Замечание 1.6. $x_n \to x \implies \{x_n\}$ — фундаментальная. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 1.7. Нормированное пространство X называется полным, если из фундаментальности последовательности следует существование предела.

Определение 1.8. Пусть $x_n \in X$. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится, если $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ имеет предел $\lim S_n = S$. S называется суммой ряда.

Определение 1.9. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ называется *сходящимся абсолютно*, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ сходится.

Замечание 1.10. Из абсолютной сходимости не следует обычная сходимость.

S_n сходится $\iff |S_n - S_m| \to 0$. Пусть $C_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \|x\|$. C_n сходится $\iff |C_n - C_m| \to 0$. Если мы хотим, чтобы сходимость S_n была равносильна $\|S_n - S_m\| \to 0$, то нам нужна полнота пространства.

Определение 1.11. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (в честь польского математика Стефана Банаха).

Примеры 1.12.

- Евклидово пространство: $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = |x| = \sqrt[n]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ — то же, что ℓ_n^2 с нормой $\|\cdot\|_2$;
- $\ell_n^1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, где $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$;
- $\ell_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$;
- $\ell_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$;
- $C(\overline{\Omega})$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x(t)|$, где Ω — область в $\mathbb{R}^m$. $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω. Ясно, что $\overline{\Omega}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$.

Упражнение 1.13. *Верно ли, что* $\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \|x\|_\infty$*?*

Теорема 1.14. *Пространство* $C(\overline{\Omega})$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_n \in C(\overline{\Omega})$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N \|x_k - x_n\| = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

Возьмём $t \in \overline{\Omega}$. $\{x_n(t)\}$ — числовая последовательность. Тогда получаем $|x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$, отсюда $\{x_n(t)\}$ — фундаментальна, значит существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$.

Проверим, что $\max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, т. е. $x_n \rightrightarrows x$ на $\overline{\Omega}$. Заметим, что $\forall k, n > N$ $|x_k(t) - x_n(t)| < \varepsilon \implies |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Почему же x непрерывна? Потому что равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

□

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. Какую норму на нём выбрать?

- $\varphi_1(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$;
- $\varphi_2(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;
- $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$;
- $\varphi_4(x) = |x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

Заметим, что φ_2 нормой вообще не является, а φ_1 не даёт полноты пространства.

Теорема 1.15. *1. Пространство $(C^1[a,b], \varphi_1)$ не полно.*

2. Пространство $(C^1[a,b], \varphi_3)$ полно.

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Первый аргумент. x — производная непрерывная на $[a,b]$, негладкая. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P такой, что $\max\limits_{[a,b]} |P - x| < \varepsilon$

Второй аргумент. Пусть $[a,b] = [-1,1]$, $x(t) = |t| \notin C^1[a,b]$, $x^\varepsilon(t) = |t|^{1+\varepsilon} \in C^1[a,b]$. $\max |x(t) - x^\varepsilon(t)| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Для доказательства второго утверждения возьмём $x_n \in C^1[a,b]$ — последовательность, фундаментальную относительно φ_3.

$$\varphi_3(x_n - x_k) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0 \implies \begin{cases} \varphi_1(x_n - x_k) \to 0 \\ \varphi_2(x_n - x_k) \to 0 \end{cases} \implies \exists x \in C[a,b], y \in C[a,b]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n - x) \to 0 \iff x_n \rightrightarrows x \text{ на } [a,b] \\ \varphi_1(x_n' - y) \to 0 \iff x_n' \rightrightarrows y \text{ на } [a,b] \end{cases} \implies x \in C^1[a,b], x' = y$$

Отсюда $\varphi_3(x_n - x) \to 0$ □

2 Пространства Лебега

Неравенство Гёльдера

Рассмотрим (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, и числа $p, q > 0$ — сопряжённые показатели, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда верно неравенство:

$$\int\limits_T |x(t)y(t)|\,d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^p\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |y(t)|^q\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство Минковского

Если (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, $p \geqslant 1$, то верно неравенство:

$$\left(\int\limits_T |x(t)|^p\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |y(t)|^q\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \int\limits_T |x(t)y(t)|d\mu(t)$$

Обозначение: $\|x\|_p = (\int\limits_T |x|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Замечание 2.1. Частный случай — $p = q = 2$. Тогда неравенство Гёльдера оказывается неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$\int\limits_T |x(t)| \cdot |y(t)|\,d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^2\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_T |y(t)|^2\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Замечание 2.2. Пусть $T = \mathbb{N}$, и если $M \subset \mathbb{N}$, то $\#M = \operatorname{card} M$ — количество элементов M — будет мерой. Рассмотрим функцию $x : \mathbb{N} \to k$, где k — некоторое поле скаляров. Мы помним, что функция из натуральных чисел называется последовательностью. Как можно вычислять $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n)d\#(n)$? Ясно, что такой интеграл — это ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x(n)$, а суммируемые функции в этом случае будут абсолютно сходящимися рядами. Неравенство Гёльдера будет выглядеть так:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n||y_n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

А неравенство Минковского — так:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n||y_n|\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 2.3. Пространство Лебега $\mathcal{L}^p(T,\mu)$ — это множество $\{x \mid \int\limits_T |x|^p \, d\mu < \infty\}$. Оно линейно: $x, y \in \mathcal{L}^p \implies x + y \in \mathcal{L}^p$ и $\lambda y \in \mathcal{L}^p$

Заметим, что $\|x\|_p = \left(\int\limits_T |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ — полунорма на $\mathcal{L}^p(T,\mu)$. Если $\|x\|_p = 0$, то $x = 0$ почти везде.

Чтобы получить норму, введём следующее отношение эквивалентности:

$$x_1 \sim x_2 \text{ если } x_1 - x_2 = 0 \text{ почти везде.}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^p(T,\mu)\,/_{\sim} = L^p(T,\mu)$$

— это настоящее пространство Лебега. В дальнейшем мы будем считать функции, отличающиеся на множестве меры нуль, одинаковыми.

Замечание 2.4. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ — мера Лебега. Тогда будем обозначать $L^p(T,\mu) = L^p(T)$.

Теорема 2.5. *Пространство* $L^p(T,\mu)$ *полно при* $p \geqslant 1$.

Пример 2.6. Рассмотрим $L^2(0,+\infty)$ и $L^1(0,+\infty)$. Какое из этих пространств является вложением в другое? Возьмём функцию $x(t) = \frac{1}{t+1}$.

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t+1} dt = \infty$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2} dt < \infty$$

Отсюда видно, что $L^2(0,+\infty) \not\subset L^1(0,+\infty)$. Легко придумать и пример, доказывающий отсутствие включения в обратную сторону.

Теорема 2.7 (О вложенности пространств L^p). *Пусть* $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$. *Тогда:*

1. $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.
2. *Если* (T,μ) *— пространство с мерой,* $\mu(T) < \infty$, *то* $L^{p_1}(T,\mu) \supset L^{p_2}(T,\mu)$

Доказательство.

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Хотим проверить, что $x \in \ell^{p_1} \implies x \in \ell^{p_2}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_1} < \infty \implies \exists N \quad \forall j > N \quad |x_j| < 1 \implies |x_j|^{p_1} < |x_j|^{p_2}$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_1} > \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_2} \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_2} < \infty \implies x \in \ell^{p_2}$$

2. Для доказательства второго пункта достаточно применить неравенство Гёльдера.

□

3 Непрерывность. Сжимающее отображение

Определение 3.1. Возьмём отображение $F : X \to Y$, где X и Y — линейные нормированные пространства. F называется непрерывным в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x : \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$$

F называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках X.

Пример 3.2. $X = Y = C[0,1]$, $\|x\|_{C[0,1]} = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Рассмотрим отображение $(F(x))(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$ и докажем, что оно непрерывно.

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^t x_1(s)\,ds - \int\limits_0^t x_2(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [0,1]} \int\limits_0^t |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leqslant \max_{t \in [0,1]} t \cdot \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\|$$

Достаточно взять $\delta = \varepsilon$ и всё доказано.

Определение 3.3. Отображение $F : X \to Y$ называется липшицевым, если существует такое C, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(X_2)\| \leqslant C \cdot \|x_1 - x_2\|$

Заметим, что из липшицевости отображения следует его непрерывность. Достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Определение 3.4. Отображение $F : X \to Y$ называется сжимающим, если существует такое $\gamma < 1$, что $\forall x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \gamma \|x_1 - x_2\|$.

Теорема 3.5 (Банаха о неподвижной точке). *Если пространство X — полное, а отображение F — сжимающее, то существует единственный элемент $x_* \in X$ такой, что $F(x_*) = x_*$. Этот элемент называется неподвижной точкой.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмём *траекторию* точки x_1:

$$x_1, \underbrace{F(x_1)}_{x_2}, \underbrace{F(F(x_1))}_{x_3}, \ldots, \text{ т. е. } x_{n+1} = F(x_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \leqslant \gamma\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \gamma^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leqslant \ldots \leqslant \gamma^{n+1}\underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{\alpha}$$

Таким образом, при $m > n$:

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha\gamma^{m-2} + \alpha\gamma^{m-3} + \ldots +$$

$$+\alpha\gamma^{n-1} \leqslant \sum_{j=n-1}^{\infty} \alpha\gamma^j = \alpha\gamma^{n-1}\frac{1}{1-\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Отсюда получаем, что $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим его за x_*. Ясно, что это и будет неподвижная точка.

Докажем единственность. Пусть x_* и x^* — две неподвижные точки. Тогда:

$$\underbrace{\|F(x_*) - F(x^*)\|}_{\leqslant\gamma\|x_*-x^*\|} = \|x_* - x^*\|$$

Отсюда $\|x_* - x^*\| = 0$, что и требовалось. □

Теорема 3.6. *Пусть пространство* X *— полное,* $F : X \to X$ *и существует* n *такое, что* F^n *— сжимающее. Тогда существует единственная точка* x_* *такая, что* $F(x_*) = x_*$.

Доказательство. Если F^n сжимающее, то существует (и единственна) неподвижная точка: $F^n(x_*) = x_*$. Условие теоремы подразумевает, что если F переводит точку x_* в некоторую точку x_1, которую, в свою очередь, переводит в x_2, то через n итераций точка x_{n-1} снова переходит в x_*. Отсюда следует, что точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — тоже неподвижные точки F^n. Но по теореме Банаха такая точка у F^n только одна, следовательно, $x_* = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$. □

Пример 3.7 (Интегральное уравнение Фредгольма I рода). Пусть нам даны функции $K(s,t)$ и $a(t)$. Мы хотим найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$x(t) = a(t) + \int_{s_1}^{s_2} K(s,t)x(s)\,ds$$

Будем рассматривать частный случай, в котором $K \in C([0,1] \times [0,1])$, $a \in C[0,1]$. Задача — найти $x \in C[0,1]$ такое, что

$$x(t) = a(t) + \int_0^t K(s,t)x(s)\,ds$$

Предложение 3.8. *Это уравнение имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : C[0,1] \to C[0,1]$.

$$(F(x))(t) = a(t) + \int_0^t K(s,t)x(s)\,ds$$

Заметим, что оно, вообще говоря, не является сжимающим. Рассмотрим также $(F_0(x))(t) = \int_0^t K(s,t)x(s)\,ds$.

Обратим внимание на несколько важных свойств:

- $F_0(x) - F_0(y) = F_0(x-y)$
- $F(x) - F(y) = F_0(x) - F_0(y)$
- $F^n(x) - F^n(y) = F(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x)) - F_0(F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0^n(x-y)$

$$(F_0(x-y))(t) = \int_0^t K(s_1,t)(x(s_1)-y(s_1))\,ds_1$$

$$(F_0^2(x-y))(t) = \int_0^t K(s_2,t)\int_0^{s_2} K(s_1,s_2)(x(s_1)-y(s_1))\,ds_1\,ds_2$$

$$\dots$$

$$(F_0^n(x-y))(t) = \int_0^t K(s_n,t)\int_0^{s_n} K(s_{n-1},s_n)\int_0^{s_{n-1}}\dots\int_0^{s_2} K(s_1,s_2)(x(s_1)-y(s_1))\,ds_1\,ds_2\dots ds_n$$

Получаем:

$$\|F_0^n(x-y)\| = \max_{t\in[0,1]} |(F_0^n(x-y))(t)| \leqslant M^n\|x-y\| \max_{t\in[0,1]} \int_0^t\int_0^{s_n}\int_0^{s_{n-1}}\dots\int_0^{s_3}\int_0^{s_2} ds_1\,ds_2\dots ds_n \leqslant \frac{M^n}{n!}\|x-y\|$$

Здесь $M = \max|K|$. Коэффициент $\frac{M^n}{n!}$ стремится к нулю, а это значит, что F_0^n — сжимающее, следовательно, существует неподвижная точка. $\square$

Пример 3.9. Допустим, что мы хотим решить дифференциальное уравнение $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, $y(0) = y_0$, $a, b \in C[0,1]$ на промежутке $[0,1]$. Это уравнение имеет единственное решение $y \in C^1[0,1]$. Как это доказать? Рассмотрим интегральное уравнение:

$$x(t) = \int_0^t a(s)x(s)\,ds + B(t)$$

По предыдущей теореме существует $x \in C[0,1]$, решающее это уравнение. Для этого уравнения также верны утверждения:

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, где $b(t) = B'(t)$;
- $x(0) = B(0)$.

Для решения исходной задачи достаточно выбрать B такое, что $B' = b$ и $B(0) = y_0$. Откуда взять непрерывную дифференцируемость y?

$$b \in C[0,1] \implies B \in C^1[0,1],$$

$$x \in C[0,1],\ a \in C[0,1] \implies \int_0^t xa \in C^1[0,1]$$

Таким образом всё доказано.

4 Линейные операторы

Определение 4.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Отображение $U: X \to Y$ называется линейным, если:

1. $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$
2. $U(\lambda x) = \lambda U(x)$, где λ — скаляр, $x \in X$

Замечание 4.2. Ясно, что выполнение обоих этих свойств равносильно $U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 U(x_1) + \lambda_2 U(x_2)$.

Замечание 4.3. В дальнейшем будем обозначать $U(x)$ как Ux.

Предложение 4.4 (Свойства линейных отображений).

1. *$U(0) = 0$;*
2. *$U(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U x_j$;*
3. *Если $M \subset X$ — линейное множество, то множество $U(M)$ линейно в Y. Если $M \subset X$ — выпуклое множество, то множество $U(M)$ выпукло в Y;*
4. *Если $N \in Y$ — линейное (выпуклое), то $U^{-1}(N)$ — линейное (выпуклое). Частный случай: если $N = \{0\}$, то множество $U^{-1}(N) = U^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} U$ — линейное в X;*
5. *$\operatorname{Ker} U = \{0\} \iff U$ инъективно;*
6. *Если U — линейная биекция, то U^{-1} — линейное;*
7. *Пусть $U_1, U_2 : X \to Y$ — линейные. Тогда $U_1 + U_2$, λU_1 тоже линейны;*
8. *Если $X \xrightarrow{U} Y \xrightarrow{V} Z$, то композиция $V \circ U$ линейна.*

Определение 4.5. Множество M называется выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in M$ отрезок $[x_1, x_2]$ лежит в M.

Доказательство предложения. Докажем выпуклость в свойстве 3.

$$y_1, y_2 \in U(M) \implies \exists x_1, x_2 \in M : Ux_1 = y_1,\ Ux_2 = y_2$$

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = \lambda U x_1 + (1-\lambda) U x_2 = U(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\in M}) \in U(M)$$

В свойстве 4:

$$x_1, x_2 \in U^{-1}(N) \implies Ux_1, Ux_2 \in N \implies \forall \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 U x_1 + \lambda_2 U x_2 \in N \implies$$

$$\implies U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in N \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in U^{-1}(N)$$

В свойстве 6 биективность U означает, что $\forall y_1, y_2\ \exists x_1, x_2$ такие, что $Ux_1 = y_1$, $Ux_2 = y_2$. Отсюда $U^{-1}(y_1 + y_2) = U^{-1}(Ux_1 + Ux_2) = U^{-1}(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = U^{-1}(x_1) + U^{-1}(x_2)$.

Доказательства остальных свойств тривиальны. □

Теорема 4.6 (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения). *Пусть $U: X \to Y$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывен;*

2. *U непрерывен в нуле;*

3. *Образ любого ограниченного множества ограничен;*

4. *Существует C такое, что $\forall x \in X$ выполняется $\|U_x\|_Y = C\|x\|_X$.*

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$. Тривиально.

- $4 \Rightarrow 1$. $\|Ux_1 - Ux_2\| \leqslant C\|x_1 - x_2\|$. Это влечёт липшицевость и, как следствие, непрерывность.

- $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность в нуле означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\|x\| < \delta \implies \|Ux\| < \varepsilon$. Ограниченность множества M в X означает, что $\exists R : N \subset B_R(0) = \{\|x\| \leqslant R\}$. Таким образом, $x \in M \implies \|x\| \leqslant R$. $\|\frac{\delta}{2R}x\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta \implies \|U(\frac{\delta}{2R}x)\| < \varepsilon$. Отсюда $\|Ux| \leqslant \frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta} \implies Ux \in B_{\frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta}}(0)$. То есть, $U(M)$ ограничено.

- $3 \Rightarrow 4$. $B_1(0)$ — ограниченное множество. Тогда $U(B_1(0))$ — ограничено, т. е. существует такое C, что $U(B_1(0)) \subset B_C(0)$. Если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ux\| \leqslant C$. Теперь возьмём произвольное x. $x' = \frac{x}{\|x\|} \in B_1(0) \implies \|Ux'\| \leqslant C$. Но $\|Ux\| = \|U\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ux\|$. Отсюда $\|Ux\| \leqslant C\|x\|$.

□

Определение 4.7. Пусть $U : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Тогда нормой оператора U называется величина $\|U\| = \inf\{C \mid \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}$.

Замечание 4.8. В формулировке определения инфимум и минимум совпадают (это можно доказать, перейдя к пределу в неравенстве $\|Ux\| \leqslant C\|x\|$).

Замечание 4.9. Выполнено неравенство $\|Ux\|_Y \leqslant \|U\| \cdot \|x\|_X$. В частности, $\frac{\|Ux\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \|U\|$ $\forall x \in X$, т. е. можно записать $\|U\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$.

Теорема 4.10 (Об эквивалентных способах определения нормы оператора). *Пусть $U : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Тогда:*

$$\|U\| = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}}_{A} = \underbrace{\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U_x\|}_{B} = \underbrace{\sup_{\|x\| < 1} \|U_x\|}_{C} = \underbrace{\sup_{\|x\| = 1} \|U_x\|}_{D}$$

Замечание 4.11. Так как замкнутость и ограниченность, вообще говоря, неравносильна компактности (за исключением конечномерных пространств), в $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ux\|$ максимум может и не достигаться.

Доказательство теоремы. Очевидно, что $B \geqslant C$ и $B \geqslant D$.

$$B = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, x \neq 0} \|Ux\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A$$

Докажем, что $D \geqslant A$. Возьмём $x' = \frac{x}{\|x\|}$, тогда $\|x'\| = 1$ и $\|Ux\| \leqslant D$. $\|U(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$. Итак, $\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D$, тогда и $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$. Осталось проверить, что $C \geqslant A$. Возьмём $x \neq 0$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $x' = \frac{x}{\|x\|(1+\varepsilon)}$. Тогда $\|x\| < 1$. Отсюда следует, что $\|Ux'\| \leqslant C \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|(1+\varepsilon)} \leqslant C \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant C(1+\varepsilon)$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получим $A = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant C$. □

5 Пространства линейных непрерывных операторов

Определение 5.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Возьмём $B(X,Y) = \{U : X \to Y,\ U \text{ — линейно, непрерывно}\}$. Это *линейное пространство.*

Теорема 5.2 (О свойствах операторной нормы)**.** $U, V \in B(X,Y)$.

1. $\|U\| \geqslant 0$, $\|U\| = 0 \iff U = 0$;
2. $\|\lambda U\| = |\lambda|\|U\|$ *(λ — скаляр);*
3. $\|U+V\| \leqslant \|U\| + \|V\|$;
4. $W \in B(Y,Z)$. $WU \in B(X,Z)$, $\|WU\| \leqslant \|W\|\|U\|$.

Доказательство.

1. Неотрицательность очевидна. Если $\|U\| = 0$, то $\|Ux\| \leqslant 0 \cdot \|x\| \implies \|Ux\| = 0\ \forall x$;
2. $\|\lambda U\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\lambda U)(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ux\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|=1} \|U_x\| = |\lambda|\|U\|$;
3. $x \in X$. $\|(U+V)(x) = \|Ux + Vx\| \leqslant \|Ux\| + \|Vx\| \leqslant \|U\|\|x\| + \|V\|\|x\| = (\|U\| + \|V\|)\|x\|$
4. $x \in X$. $\|(WU)(x)\| = \|W(U(x))\| \leqslant \|W\| \cdot \|Ux\| \leqslant \|W\|\|U\|\|x\|$.

$\square$

Теорема 5.3 (О полноте пространства операторов)**.** *Если Y полно, то $B(X,Y)$ полно.*

Доказательство. Возьмём фундаментальную последовательность линейных непрерывных отображений $U_n \in B(X,Y)$, то есть $\|U_n - U_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m,n > N$ $\|U_n - U_m\| < \varepsilon$. Это означает, что $\|(U_n - U_m)(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Следовательно, $\{U_n x\}$ фундаментальна в Y. Обозначим $Ux = \lim\limits_{n\to\infty} U_n x$. Мы хотим проверить, что U непрерывно, линейно и что есть сходимость.

1. (Линейность U). $U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lim U_n x_1 + \alpha_2 \lim U_n x_2 = \alpha_1 U x_1 + \alpha_2 U x_2$
2. (Нерерывность U). Возьмём любое $\varepsilon > 0$, N, $\forall m,n > N$, $\forall x \in X$. $\|U_n x - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \implies \|Ux - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. $\|Ux\| = \|(Ux - U_m x) + U_m x\| \leqslant \|(Ux - U_m x)\| + \|U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\| + \|U_m\|\|x\|$. Отсюда $\|U\| \leqslant \varepsilon + \|U_m\|$.
3. (Сходимость U_n к U). $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m,n > N\ \forall x \in X$ $\|U_n x - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Устремив n к бесконечности, получим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m > N\ \forall x \in X$ $\|Ux - U_m x\| = \|(U - U_m)(x)\| \leqslant \|x\|$ $\implies \|U - U_m\| \leqslant \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m > N$ $\|U - U_m\| \leqslant \varepsilon$, т. е. $U_n \to U$ в $B(X,Y)$.

$\square$

Следует отметить важный частный случай.

Определение 5.4. $B(X, \text{поле скаляров }) = X^*$ называется *сопряжённым пространством к* X. $f \in X^*$ называется *линейным непрерывным функционалом.*

Норма функционала определяется как $\|f\| = \inf\{C \mid |f(x)| \leqslant C\|x\|\} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

6 Корректно разрешимые задачи

Рассмотрим отображение $A : X \to Y$. Мы хотим решить уравнение $Ax = f$. f — какие-то известные данные.

В общей постановке вопроса корректная разрешимость означает три вещи:

- Решение существует для любого f.
- Решение единственно.
- Устойчивость: если $f_n \to f$, то для решений верно, что $x_n \to x$. (Здесь $Ax_n = f_n$, $Ax = f$.)

В частном случае, когда X и Y — линейные нормированные пространства и A — линейное отображение, вышеописанные условия равносильны тому, что $A^{-1} \in B(Y, X)$.

Замечание 6.1. Самый простой пример корректно разрешимой задачи — случай, когда оператор A тождественен.

Теорема 6.2 (Об обратимости оператора, близкого к тождественному). *Если $B \in B(X, X)$, X — полное и $\|B\| < 1$, то существует оператор $(I \pm B)^{-1} \in B(X, X)$. ($I$ — тождественный оператор.)*

Доказательство. Приведём два способа доказать эту теорему.

1. Возьмём уравнение $(I - B)x = f$. Надо доказать, что для любого $f \in X$ существует единственный $x \in X$, решающий это уравнение. Это равносильно $x = f + Bx = g(x)$. Заметим, что x удовлетворяет уравнению тогда и только тогда, когда x — неподвижная точка отображения g. Проверим, что g — сжимающее. $\|g(x_1) - g(x_2)\| = \|(f + Bx_1) - (f + Bx_2)\| = \|Bx_1 - Bx_2\| \leqslant \underbrace{\|B\|}_{<1} \cdot \|x_1 - x_2\|$.

   Теперь проверим устойчивость. Пусть $f_n \to f$, $(I - B)x_n = f_n$, $(I - B)x = f$. Нужно проверить, что $x_n \to x$. $x_n = f_n + Bx_n$, $x = f + Bx$.

   $$\|x_n - x\| = \|f_n + Bx_n - f - Bx\| \leqslant \|f_n - f\| + \|Bx_n - Bx\| \leqslant \|f_n - f\| + \|B\| \cdot \|x_n - x\|$$

   Отсюда

   $$0 \leqslant \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x_n - x\| \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} \implies \|x_n - x\| \to 0$$

2. Докажем формулу $(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + B^2 + \ldots$. Необходимо проверить, что этот ряд сходится. Докажем, что он сходится абсолютно, то есть $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \ldots < \infty$. Заметим, что $\|B^k\| \leqslant \|B\|^k$. Отсюда $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \ldots \leqslant \|I\| + \|B\| + \|B\|^2 + \ldots$. Но это — геометрическая прогрессия, она сходится. Частичные суммы: $S_n = I + B + \ldots B^{n-1}$, $(I - B)S_n = S_n(I - B) = I - B^n \xrightarrow[n \to \infty]{} I$. Мы воспользовались полнотой пространства, утверждая, что абсолютная сходимость влечёт сходимость ряда.

$\square$

Теорема 6.3 (Об обратимости оператора, близкого к обратимому). *Пусть $U \in B(X, Y)$ — линейное отображение и существует $B^{-1} \in B(Y, X)$. Кроме того,* X **или** Y *— полное пространство. Рассмотрим $V \in B(X, Y)$ такой, что $\|V\| < \|U^{-1}\|^{-1}$. Тогда существует $(U + V)^{-1} \in B(Y, X)$.*

Доказательство. $U + V = U(I_X + U^{-1}V)$ (или $(I_Y + VU^{-1})U$). Оператор U обратим, обратный к нему оператор непрерывен. Получаем $\|U^{-1}V\| \leqslant \|U^{-1}\| \cdot \|V\| < 1$. $\square$

7 Линейные непрерывные функционалы

Вспомним, что если X — нормированное пространство, то $X^* = B(X, \text{поле скаляров})$ называется сопряжённым к X пространством. Норма функционала определяется как $\|f\| = \inf\{C \mid |f(x)| \leqslant C\|x\|\} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

Пример 7.1 (Функционалы в пространстве Лебега). Рассмотрим $L^p(T, \mu)$, причём $1 < p < \infty$. Возьмём q — сопряжённый показатель такой, что $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Возьмём также $y_0 = L^q(T, \mu)$. Определим функционал f формулой $f(x) = \int\limits_T x(t)y_0(t)\, d\mu(t)$. Нам нужно проверить, что это действительно функционал, что он непрерывен (линейность очевидна). Чтобы этот функционал был функционалом, необходимо, чтобы подынтегральная функция была суммируемой. Для этого воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int\limits_T |x(t)y_0(t)|\, d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |y_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y_0\|_q \cdot \|x\|_p < \infty$$

$$|f(x)| \leqslant \underbrace{\|y_0\|_q}_{=C} \cdot \|x\| \implies \|f\| \leqslant \|y_0\|_q$$

Проверим, что $\|f\| \geqslant \|y_0\|_q$.

$$x_0(t) = \frac{|y_0|^q}{y_0} = |y_0|^{q-1}\frac{|y_0|}{y_0} = |y_0|^{q-1}\operatorname{sign} y_0 \implies x_0 y_0 = |y_0|^q$$

$$|f(x_0)| = \left|\int\limits_T x_0 y_0\right| = \int\limits_T |y_0|^q$$

Но так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $(q-1)p = q$.

$$\|x_0\|_p = \left(\int\limits_T |x_0|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_T |y_0|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_T |y_0|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_p} = \frac{\int\limits_T |y_0|^q}{\left(\int\limits_T\right.} \ldots$$

Таким образом, $L^q(T, \mu) \hookrightarrow L^q(T, \mu)^*$, $y_0 \mapsto f$ и $\|y_0\|_q = \|f\|$. Имеет место *изометрическое вложение*, и даже более того, биекция.

Пример 7.2. Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$. Пусть $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\, dt$. Снова хотим доказать, что это функционал, что он непрерывен и линеен. Для непрерывности достаточно установить, что $|f(x)| \equiv C\|x\|$.

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t||x(t)|\, dt \leqslant \max|x| \int\limits_{-1}^{1} |t|\, dt = \|x\| \implies \|f\| \leqslant 1$$

Непрерывность доказана. Теперь возьмём функцию $x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon}, & |t| \leqslant \varepsilon \\ -1, & t \leqslant -\varepsilon \end{cases}$.

$$f(x_\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} tx_\varepsilon(t)\, dt = \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\right)|t|\, dt + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t^2}{\varepsilon}\, dt = 1 + O(\varepsilon)$$

Получаем, что $\|f\| \geqslant \frac{f(x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$. Теперь возьмём $y_0 \in L^1(-1,1)$, $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} y_0(t)x(t)\,dt$.

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |y_0||x| \leqslant \|x\| \int\limits_{-1}^{1} |y_0| \leqslant \|y_0\|_1 \cdot \|x\|_C$$

Значит, f — линейный непрерывный функционал. $\|f\| = \|y_0\|_1$, $x_0(t) = \operatorname{sign} y_0 \notin C$.

Упражнение 7.3. *Пусть* $\delta(x) = x(0)$. *Доказать, что* $\delta \notin L^1(-1,1)$, *то есть не существует* $y_0 \in L^1(-1,1)$ *такого, что* $\forall x \in C[-1,1]$ $\int\limits_{-1}^{1} y_0(t)x(t)\,dt = x(0)$

Теорема 7.4. $(c_0)^* = \ell^1$

Напомним, что $\ell^\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \|x\|_\infty = \sup\limits_{j\geqslant 1} |x_j| < \infty\}$ и $c_0 = \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0\}$, $c_0 \subset \ell^\infty$. При этом $\|x\|_{c_0} = \|x\|_\infty$. c_0 — полное нормированное пространство.

Рассмотрим $L_{\text{fin}} \subset \ell^\infty$ такое, что $x \in L_{\text{fin}}$, если у x лишь конечное число ненулевых координат. Отметим, что L_{fin} является линейной оболочкой векторов $e_1, e_2, \ldots$, где $e_k = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots)$. Также $\overline{L_{\text{fin}}} = c_0$

- $x \in c_0 \implies \exists x^{(n)} \in L_{\text{fin}}$: $x^{(n)} \to \infty$, где $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. $\|x - x^{(n)}\| = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_\infty = \sup\limits_{j\geqslant n+1} |x_j|$.
- c_0 замкнуто.

Доказательство.

1. Возьмём $y^{(0)} \in \ell^1$, где $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots)$ и $\|y^{(0)}\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j^{(0)}| < \infty$. Построим по нему функционал на c_0.

   ...

   Мы построили вложение $\ell^1 \hookrightarrow (c_0)^*$, $y^{(0)} \mapsto f$.

2. Пусть нам дан функционал $f \in (c_0)^*$. Мы хотим построить по нему $y \in \ell^1$. Положим $f(e_j) = y_j$ $(y = (y_1, y_2, \ldots))$. Нам нужно проверить, что $y \in \ell^1$ и что $\forall x\ f(x) = \sum x_j y_j$. Возьмём $z^{(n)} = (\operatorname{sign} y_1, \operatorname{sign} y_2, \ldots, \operatorname{sign} y_n, 0, 0, \ldots)$. $|f(z^{(n)}| \leqslant \|f\| \cdot \|z^{(n)}\|_\infty \leqslant \|f\|$. Но левая часть неравенства равна $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j|$. Из неравенства следует, что ряд сходится, отсюда $y \in \ell^1$.

   Покажем теперь, что $\forall x\ f(x) = \sum x_j y_j$. пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$.

   $$f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

   Левая часть стремится к $f(x)$, так как $\sum\limits_{j=1}^{n} = x_j e_j \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

□

8 Интегральные операторы. Часть I

Что такое интегральный оператор? Допустим, у нас есть функция двух переменных $K(s,t)$, называемая *ядром интегрального оператора* (не путать с ядром оператора). Оператор действует следующим образом: он берёт функцию $x(s)$ и преобразует её в функцию $(Ux)(t)$ по формуле $(Ux)(t) = \int K(s,t)x(s)$ (множество интегрирования и мера определяются отдельно). Какими свойствами должна обладать функция K, чтобы этот оператор был «хорошим»?

8.1 Интегральные операторы в пространствах Лебега

Будем рассматривать переменные s на множестве S с мерой ν и t на множестве T с мерой μ, а также функцию $K : S \times T \to$ поле скаляров, притом измеримую. Пусть x — также измеримая функция на S, $(Ux)(t) = \int\limits_S K(s,t)x(s)\,d\nu(s)$. Какие условия нужно наложить на функцию K, чтобы оператор U действовал из $L^p(s,\nu)$ в $L^r(T,\mu)$ и был непрерывен?

$$\int\limits_T |(Ux)(t)|^r \leqslant \int\limits_T \left(\int\limits_S |K(s,t)||x(s)|\,ds\right)^r dt \leqslant \int\limits_T \left(\left(\int\limits_S |K(s,t)| \cdots\right.\right.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8.1 (О гёльдеровских условиях непрерывности). *Если* $\int\limits_T \left(\int\limits_S |K|^q\,ds\right)^{\frac{r}{q}} dt < \infty$, *то* U *действует непрерывно из* $L^p(s,\nu)$ *в* $L^r(T,\mu)$.

Пусть $p = 2$, $r = 2$, то есть $q = 2$. Тогда:

$$\int\limits_T \int\limits_S |K(s,t)|^2\,ds\,dt < \infty \iff K \in L^2(S \times T, \nu \times \mu)$$

и $\|U\| \leqslant \|K\|_{L^2(S\times T,\nu\times\mu)}$. Операторы, удовлетворяющие таким условиям, называются операторами Гильберта-Шмидта, а K — ядром Гильберта-Шмидта.

Замечание 8.2. Существуют линейные непрерывные интегральные операторы, не являющиеся операторами Гильберта-Шмидта.

8.2 Тест Шура

Теорема 8.3 (Тест Шура). *Пусть* $(Ux)(t) = \int\limits_S K(s,t)x(s)\,d\nu(s)$. *Предположим, что существуют строго положительные функции* $\varphi : S \to \mathbb{R}$, $\psi : T \to \mathbb{R}$ *и числа* $A, B \in \mathbb{R}$ *такие, что:*

1. $\int\limits_S |K(s,t)|\varphi(s)\,d\nu(s) \leqslant A\psi(t)$ *для почти всех* $t \in T$.
2. $\int\limits_T |K(s,t)|\psi(s)\,d\mu(s) \leqslant B\varphi(s)$ *для почти всех* $s \in S$.

Тогда U *— линейный непрерывный оператор из* $L^2(S,\nu)$ *в* $L^2(T,\mu)$.

Доказательство.

$$|(Ux)(t)| \leqslant \int\limits_S \sqrt{|K(s,t)|\varphi(s)}\sqrt{\frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}}\,d\nu(s) \leqslant \underbrace{\left(\int\limits_S |K(s,t)|\varphi(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leqslant A\psi(t)} \left(\int\limits_S \frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_T |(Ux)(t)|^2\,dt \leqslant \int_T A\psi(t) \int_S \frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}\,ds\,dt$$

□

Упражнение 8.4.

1. *$S = T = (0,1)$ с мерой Лебега, $K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{|s-t|}}$. Заметим, что получается оператор, не являющийся оператором Гильберта-Шмидта, так как $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{|s-t|\,ds\,dt} = +\infty$. Придумать тест Шура для этого случая.*
2. *$S = T = \mathbb{R}$, $K(s,t) = e^{-(s+t)^2}$. Является U оператором Гильберта-Шмидта, и, если нет, является ли он непрерывным?*
3. *$S = T = (0,+\infty)$, $K(s,t) = e^{-st}$. Установить непрерывность U с помощью теста Шура.*
4. *$S = T = \mathbb{N}$, $\nu = \mu = \#$, $K : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда оператор U равен $\sum\limits_{j=1}^{\infty} K_{ij}x_j$.*

Теорема 8.5 (Тест Шура в дискретном случае). *Пусть существуют $\varphi_j > 0$, $\psi_i > 0$, A, B такие, что*

1. *$\sum |K_{ij}|\varphi_j \leqslant A\psi_i\ \forall i \in \mathbb{N}$*
2. *$\sum |K_{ij}|\psi_j \leqslant B\varphi_j\ \forall j \in \mathbb{N}$*

Тогда $U : \ell^2 \to \ell^2$ непрерывен и $\|U\| \leqslant \sqrt{AB}$.

Пример 8.6 (Оператор Харди). Оператор Харди H действует в пространстве $L^2(0,+\infty)$:

$$(Hx)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds$$

Частный случай: $H : \ell^2 \to \ell^2$ и $(Hx)_k = \frac{1}{k}(x_1 + \ldots + x_k)$ (среднее арифметическое).
Применим тест Шура.

$$\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds = \int_0^\infty K(s,t)x(s)\,ds$$

где $K(s,t) = \frac{1}{t}\chi_{[0,t]}(s) = \frac{1}{t}\chi_{[s,+\infty)(t)}$. Возьмём $\varphi(s) \equiv 1$. Тогда

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\varphi(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t ds = 1$$

Взяв $\psi(t) \equiv 1$, получим

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\,dt = \infty$$

Значит, такое ψ не подходит. Возьмём $\psi(t) = t^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{s^{-\alpha}}{\alpha}$$

В качестве $\varphi(s)$ возьмём $s^{-\alpha}$.

$$\int\limits_0^{\infty} |K(s,t)|\varphi(s)\,ds = \frac{1}{t}\int\limits_0^{t} s^{-\alpha}\,ds = \frac{1}{t}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha}$$

Заметим, что при этом должно быть $\alpha < 1$. Кроме того,

$$\|H\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \quad \forall\alpha \in (0,1) \implies \|H\| \leqslant 2$$

Упражнение 8.7. *Доказать, что* $\|H\| = 2$.

8.3 Интегральные операторы с непрерывным ядром

Будем рассматривать ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, пространство $L^2(\Omega)$ и пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$. Пусть также у нас есть функция $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $K \in C(\overline{\Omega})$, $\|K\|_{C(\overline{\Omega})} = M$.

Теорема 8.8. *Рассмотрим оператор* U *такой, что* $(Ux)(t) = \int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds$. *Верно, что* $U \in B(L^2(\Omega), C(\overline{\Omega}))$.

Доказательство. Докажем, что если $x \in L^2(\Omega)$, то $Ux \in C(\overline{\Omega})$. (Здесь непрерывность x не гарантируется.)

$$|Ux(t_1) - Ux(t_2)| = \left|\int\limits_{\Omega} K(s,t_1) - K(s,t_2)x(s)\,ds\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |K(s,t_1) - K(s,t_2)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$$

По теореме Кантора K равномерно непрерывно на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, то есть:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad \underbrace{|(s_1,t_1) - (s_2,t_2)|}_{\sqrt{|s_1-s_2|^2+|t_1-t_2|^2}} < \delta \implies |K(s_1,t_1) - K(s_2,t_2)| < \varepsilon$$

Если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $|K(s,t_1) - K(s,t_2)| < \varepsilon$, отсюда $|Ux(t_1) - Ux(t_2) < \varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2$
Теперь докажем, что $\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C\|x\|_{L^2(\Omega)}$.

$$\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{t\in\overline{\Omega}}\left|\int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds\right| \leqslant \max_{t\in\overline{\Omega}}\left(\int\limits_{\Omega} |K(s,t)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leqslant (M^2 \cdot |\Omega|)^{\frac{1}{2}}\|x\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Рассмотрим оператор вложения $j : C(\overline{\Omega}) \to L^2(\Omega)$, $x \mapsto x$. Справедливо следствие:

Следствие 8.9. *1.* $jU \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$

2. $Uj \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$

Доказательство. Заметим, что $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$.

$$\left(\int\limits_{\Omega} |x(s)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\|x\|^2_{C(\overline{\Omega})} \cdot |\Omega|\right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

Получаем

$$\|x\|_{L^2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\|jx\|_{L^2(\Omega)} = \|x\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

То есть j непрерывен.

$$C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega) \xrightarrow{U} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

□

8.4 Операторы со слабой особенностью

Рассмотрим оператор $Ux(t) = \int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds$, причём K — ядро со слабой особенностью, а $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 8.10. K — ядро со слабой особенностью, если оно представляется в виде:

$$K(s,t) = \frac{A(s,t)}{|s-t|^\alpha}$$

Здесь $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $\alpha < m$

Пример 8.11. $\Omega = (0,1)$, $K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{|s-t|}}$

Замечание 8.12. Предположим, что $K(s,t) = \frac{a(s,t)}{|s-t|^\alpha}$, $\alpha < m$, a — ограниченная функция, непрерывная вне диагонали множества $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, то есть в точках (s,t) таких, что $s \neq t$. Тогда K — ядро со слабой особенностью. Почему? Можно записать $K(s,t) = \frac{a(s,t)|s-t|^\delta}{|s-t|^{\alpha+\delta}}$, где $\alpha + \delta < m$. $A(s,t) = a(s,t)|s-t|^\delta$ непрерывно на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$

Почему особенность «слабая»? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем лемму.

Лемма 8.13. *Пусть у нас есть шар* $B(0,\rho) \subset \mathbb{R}^m$. *Тогда* $\int\limits_{B(0,\rho)} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\alpha < m$.

Доказательство. Вычислим этот интеграл.

$$\int\limits_{B(0,\rho)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(0)} r^{m-1}\frac{1}{r^\alpha}\,d\theta\,dr = |S_1|\int\limits_0^\rho r^{m-\alpha-1}\,dr = |S_1|\frac{r^{m-\alpha}}{m-\alpha}\Big|_0^\rho = |S_1|\frac{\rho^{m-\alpha}}{m-\alpha}$$

□

Теорема 8.14. *Пусть* U *— оператор со слабой особенностью:* $Ux(t) = \int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. *Тогда* $U \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

Доказательство. Применим тест Шура. Возьмём функцию $\varphi(s) \equiv 1$.

$$\int\limits_{\Omega} |K(s,t)|\,ds = \int\limits_{\Omega} \frac{|A(s,t)|}{|s-t|^\alpha}\,ds \leqslant M \cdot \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|s-t|^\alpha}\,ds \leqslant M \cdot \int\limits_{B_d(t)} \frac{ds}{|s-t|^\alpha} \leqslant M \cdot \int\limits_{B_d(0)} \frac{dz}{|z|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \frac{d^{m-\alpha}}{m-\alpha}$$

Здесь $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $\|A\|_{C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})} = M$, $d = \operatorname{diam}\overline{\Omega}$

Получаем, что $\psi(t) = 1$. □

Теорема 8.15. *В условиях предыдущей теоремы также верно* $U \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$.

Доказательство. 1. $x \in C(\overline{\Omega}) \implies Ux \in C(\overline{\Omega})$

2. $\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C\|x\|_{C(\overline{\Omega})}$

$$|(Ux)(t)| = \left| \int\limits_{\Omega} \frac{A(s,t)}{|s,t|^{\alpha}} x(s)\,ds \right| \leqslant M \cdot \|x\| \int\limits_{\Omega} \frac{ds}{|s-t|^{\alpha}} \leqslant \frac{Md^{m-a}}{m-\alpha}\|x\|.$$

□