Функциональный анализ

Ф. Л. Бахарев [*]

25 октября 2016 г.

Содержание

[*] Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Линейное нормированное пространство

Определение 1.1. Линейное множество L над полем скаляров $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — множество с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющее свойствам:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)\ \forall x, y, z \in L$
2. $x+y = y+x\ \forall x, y, z \in L$
3. Существует элемент 0 такой, что $x+0 = x\ \forall x \in L$
4. Для любого $x \in L$ существует обратный элемент по сложению $-x$ такой, что $-x+x = 0$
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in L$
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y\ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu y\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x, y \in L$

Определение 1.2. $\varphi : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если:

1. $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)\ \forall x, y \in L$
2. $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)\ \forall x \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $\varphi(x) \geqslant 0\ \forall x \in L$
4. $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

Если выполнены только первых три свойства, то φ называется полунормой.

Замечание 1.3.

1. $\rho(x, y) = \varphi(x-y)$ — метрика.
2. Если на пространстве задана норма $\|\cdot\|$, то $X = (L, \varphi)$ — нормированное пространство.

Определение 1.4. $x_n \to x$ в X, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Определение 1.5. $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m, n > N$ $\|x_m - x_m\| < \varepsilon$

Замечание 1.6. $x_n \to x \implies \{x_n\}$ — фундаментальная. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 1.7. Нормированное пространство X называется полным, если из фундаментальности последовательности следует существование предела.

Определение 1.8. Пусть $x_n \in X$. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится, если $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ имеет предел $\lim S_n = S$. S называется суммой ряда.

Определение 1.9. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ называется *сходящимся абсолютно*, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ сходится.

Замечание 1.10. Из абсолютной сходимости не следует обычная сходимость.

S_n сходится $\iff |S_n - S_m| \to 0$. Пусть $C_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \|x\|$. C_n сходится $\iff |C_n - C_m| \to 0$. Если мы хотим, чтобы сходимость S_n была равносильна $\|S_n - S_m\| \to 0$, то нам нужна полнота пространства.

Определение 1.11. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (в честь польского математика Стефана Банаха).

Примеры 1.12.

- Евклидово пространство: $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = |x| = \sqrt[n]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ — то же, что ℓ_n^2 с нормой $\|\cdot\|_2$;
- $\ell_n^1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, где $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$;
- $\ell_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$;
- $\ell_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p, \|x\|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geqslant 1$;
- $C(\overline{\Omega})$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x(t)|$, где Ω — область в $\mathbb{R}^m$. $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω. Ясно, что $\overline{\Omega}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$.

Упражнение 1.13. *Верно ли, что* $\|x\|_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \|x\|_\infty$*?*

Теорема 1.14. *Пространство* $C(\overline{\Omega})$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_n \in C(\overline{\Omega})$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N \|x_k - x_n\| = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

Возьмём $t \in \overline{\Omega}$. $\{x_n(t)\}$ — числовая последовательность. Тогда получаем $|x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$, отсюда $\{x_n(t)\}$ — фундаментальна, значит существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$.

Проверим, что $\max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, т. е. $x_n \rightrightarrows x$ на $\overline{\Omega}$. Заметим, что $\forall k, n > N$ $|x_k(t) - x_n(t)| < \varepsilon \implies |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Почему же x непрерывна? Потому что равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

□

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. Какую норму на нём выбрать?

- $\varphi_1(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$;
- $\varphi_2(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$;
- $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$;
- $\varphi_4(x) = |x(a)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

Заметим, что φ_2 нормой вообще не является, а φ_1 не даёт полноты пространства.

Теорема 1.15. *1. Пространство* $(C^1[a,b], \varphi_1)$ *не полно.*

2. Пространство $(C^1[a,b], \varphi_3)$ *полно.*

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Первый аргумент. x — производная непрерывная на $[a,b]$, негладкая. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P такой, что $\max\limits_{[a,b]} |P - x| < \varepsilon$

Второй аргумент. Пусть $[a,b] = [-1,1]$, $x(t) = |t| \notin C^1[a,b]$, $x^\varepsilon(t) = |t|^{1+\varepsilon} \in C^1[a,b]$. $\max |x(t) - x^\varepsilon(t)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Для доказательства второго утверждения возьмём $x_n \in C^1[a,b]$ — последовательность, фундаментальную относительно φ_3.

$$\varphi_3(x_n - x_k) \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0 \implies \begin{cases} \varphi_1(x_n - x_k) \to 0 \\ \varphi_2(x_n - x_k) \to 0 \end{cases} \implies \exists x \in C[a,b], y \in C[a,b]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n - x) \to 0 \iff x_n \rightrightarrows x \text{ на } [a,b] \\ \varphi_1(x_n' - y) \to 0 \iff x_n' \rightrightarrows y \text{ на } [a,b] \end{cases} \implies x \in C^1[a,b], x' = y$$

Отсюда $\varphi_3(x_n - x) \to 0$ □

2 Пространства Лебега

Неравенство Гёльдера

Рассмотрим (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, и числа $p, q > 0$ — сопряжённые показатели, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда верно неравенство:

$$\int\limits_T |x(t)y(t)|\, d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |y(t)|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство Минковского

Если (T, μ) — пространство с мерой, x, y — измеримые функции, $p \geqslant 1$, то верно неравенство:

$$\left(\int\limits_T |x(t)|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |y(t)|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \int\limits_T |x(t)y(t)| d\mu(t)$$

Обозначение: $\|x\|_p = (\int\limits_T |x|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Замечание 2.1. Частный случай — $p = q = 2$. Тогда неравенство Гёльдера оказывается неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$\int\limits_T |x(t)| \cdot |y(t)|\, d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x(t)|^2\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_T |y(t)|^2\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Замечание 2.2. Пусть $T = \mathbb{N}$, и если $M \subset \mathbb{N}$, то $\#M = \operatorname{card} M$ — количество элементов M — будет мерой. Рассмотрим функцию $x : \mathbb{N} \to k$, где k — некоторое поле скаляров. Мы помним, что функция из натуральных чисел называется последовательностью. Как можно вычислять $\int\limits_{\mathbb{N}} x(n)d\#(n)$? Ясно, что такой интеграл — это ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x(n)$, а суммируемые функции в этом случае будут абсолютно сходящимися рядами. Неравенство Гёльдера будет выглядеть так:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n||y_n| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

А неравенство Минковского — так:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n||y_n|\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 2.3. Пространство Лебега $\mathcal{L}^p(T,\mu)$ — это множество $\{x \mid \int\limits_T |x|^p \, d\mu < \infty\}$. Оно линейно: $x, y \in \mathcal{L}^p \implies x + y \in \mathcal{L}^p$ и $\lambda y \in \mathcal{L}^p$

Заметим, что $\|x\|_p = \left(\int\limits_T |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ — полунорма на $\mathcal{L}^p(T,\mu)$. Если $\|x\|_p = 0$, то $x = 0$ почти везде.

Чтобы получить норму, введём следующее отношение эквивалентности:

$$x_1 \sim x_2 \text{ если } x_1 - x_2 = 0 \text{ почти везде.}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^p(T,\mu)\,/_{\sim} = L^p(T,\mu)$$

— это настоящее пространство Лебега. В дальнейшем мы будем считать функции, отличающиеся на множестве меры нуль, одинаковыми.

Замечание 2.4. Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ — мера Лебега. Тогда будем обозначать $L^p(T,\mu) = L^p(T)$.

Теорема 2.5. *Пространство* $L^p(T,\mu)$ *полно при* $p \geqslant 1$.

Пример 2.6. Рассмотрим $L^2(0,+\infty)$ и $L^1(0,+\infty)$. Какое из этих пространств является вложением в другое? Возьмём функцию $x(t) = \frac{1}{t+1}$.

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t+1} dt = \infty$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(t+1)^2} dt < \infty$$

Отсюда видно, что $L^2(0,+\infty) \not\subset L^1(0,+\infty)$. Легко придумать и пример, доказывающий отсутствие включения в обратную сторону.

Теорема 2.7 (О вложенности пространств L^p). *Пусть* $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$. *Тогда:*

1. $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.

2. *Если* (T,μ) *— пространство с мерой,* $\mu(T) < \infty$, *то* $L^{p_1}(T,\mu) \supset L^{p_2}(T,\mu)$

Доказательство.

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Хотим проверить, что $x \in \ell^{p_1} \implies x \in \ell^{p_2}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_1} < \infty \implies \exists N \quad \forall j > N \quad |x_j| < 1 \implies |x_j|^{p_1} < |x_j|^{p_2}$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_1} > \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^{p_2} \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{p_2} < \infty \implies x \in \ell^{p_2}$$

2. Для доказательства второго пункта достаточно применить неравенство Гёльдера.

$\square$

3 Непрерывность. Сжимающее отображение

Определение 3.1. Возьмём отображение $F : X \to Y$, где X и Y — линейные нормированные пространства. F называется непрерывным в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x : \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$$

F называется непрерывным, если оно непрерывно во всех точках X.

Пример 3.2. $X = Y = C[0, 1]$, $\|x\|_{C[0,1]} = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Рассмотрим отображение $(F(x))(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$ и докажем, что оно непрерывно.

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int\limits_0^t x_1(s)\,ds - \int\limits_0^t x_2(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [0,1]} \int\limits_0^t |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leqslant \max_{t \in [0,1]} t \cdot \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\|$$

Достаточно взять $\delta = \varepsilon$ и всё доказано.

Определение 3.3. Отображение $F : X \to Y$ называется липшицевым, если существует такое C, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(X_2)\| \leqslant C \cdot \|x_1 - x_2\|$

Заметим, что из липшицевости отображения следует его непрерывность. Достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Определение 3.4. Отображение $F : X \to Y$ называется сжимающим, если существует такое $\gamma < 1$, что $\forall x_1, x_2 \in X$ выполнено $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \gamma \|x_1 - x_2\|$.

Теорема 3.5 (Банаха о неподвижной точке). *Если пространство X — полное, а отображение F — сжимающее, то существует единственный элемент $x_* \in X$ такой, что $F(x_*) = x_*$. Этот элемент называется неподвижной точкой.*

Доказательство. Докажем существование. Возьмём *траекторию* точки x_1:

$$x_1, \underbrace{F(x_1)}_{x_2}, \underbrace{F(F(x_1))}_{x_3}, \ldots, \text{ т. е. } x_{n+1} = F(x_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \leqslant \gamma \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \gamma^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leqslant \ldots \leqslant \gamma^{n+1} \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{\alpha}$$

Таким образом, при $m > n$:

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha\gamma^{m-2} + \alpha\gamma^{m-3} + \ldots +$$

$$+\alpha\gamma^{n-1} \leqslant \sum_{j=n-1}^{\infty} \alpha\gamma^j = \alpha\gamma^{n-1}\frac{1}{1-\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Отсюда получаем, что $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим его за x_*. Ясно, что это и будет неподвижная точка.

Докажем единственность. Пусть x_* и x^* — две неподвижные точки. Тогда:

$$\underbrace{\|F(x_*) - F(x^*)\|}_{\leqslant \gamma \|x_* - x^*\|} = \|x_* - x^*\|$$

Отсюда $\|x_* - x^*\| = 0$, что и требовалось. □

Теорема 3.6. *Пусть пространство* X *— полное,* $F : X \to X$ *и существует* n *такое, что* F^n *— сжимающее. Тогда существует единственная точка* x_* *такая, что* $F(x_*) = x_*$.

Доказательство. Если F^n сжимающее, то существует (и единственна) неподвижная точка: $F^n(x_*) = x_*$. Условие теоремы подразумевает, что если F переводит точку x_* в некоторую точку x_1, которую, в свою очередь, переводит в x_2, то через n итераций точка x_{n-1} снова переходит в x_*. Отсюда следует, что точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — тоже неподвижные точки F^n. Но по теореме Банаха такая точка у F^n только одна, следовательно, $x_* = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$. □

Пример 3.7 (Интегральное уравнение Фредгольма I рода). Пусть нам даны функции $K(s,t)$ и $a(t)$. Мы хотим найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$x(t) = a(t) + \int\limits_{s_1}^{s_2} K(s,t)x(s)\,ds$$

Будем рассматривать частный случай, в котором $K \in C([0,1] \times [0,1])$, $a \in C[0,1]$. Задача — найти $x \in C[0,1]$ такое, что

$$x(t) = a(t) + \int\limits_0^t K(s,t)x(s)\,ds$$

Предложение 3.8. *Это уравнение имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : C[0,1] \to C[0,1]$.

$$(F(x))(t) = a(t) + \int\limits_0^t K(s,t)x(s)\,ds$$

Заметим, что оно, вообще говоря, не является сжимающим. Рассмотрим также $(F_0(x))(t) = \int\limits_0^t K(s,t)x(s)\,ds$.

Обратим внимание на несколько важных свойств:

- $F_0(x) - F_0(y) = F_0(x-y)$
- $F(x) - F(y) = F_0(x) - F_0(y)$
- $F^n(x) - F^n(y) = F(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x)) - F_0(F^{n-1}(y)) = F_0(F^{n-1}(x) - F^{n-1}(y)) = F_0^n(x-y)$

$$(F_0(x-y))(t) = \int\limits_0^t K(s_1,t)(x(s_1) - y(s_1))\,ds_1$$

$$(F_0^2(x-y))(t) = \int\limits_0^t K(s_2,t)\int\limits_0^{s_2} K(s_1,s_2)(x(s_1)-y(s_1))\,ds_1\,ds_2$$

$$\dots$$

$$(F_0^n(x-y))(t) = \int\limits_0^t K(s_n,t)\int\limits_0^{s_n} K(s_{n-1},s_n)\int\limits_0^{s_{n-1}}\dots\int\limits_0^{s_2} K(s_1,s_2)(x(s_1)-y(s_1))\,ds_1\,ds_2\dots ds_n$$

Получаем:

$$\|F_0^n(x-y)\| = \max_{t\in[0,1]}|(F_0^n(x-y))(t)| \leqslant M^n\|x-y\|\max_{t\in[0,1]}\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_n}\int\limits_0^{s_{n-1}}\dots\int\limits_0^{s_3}\int\limits_0^{s_2} ds_1\,ds_2\dots ds_n \leqslant \frac{M^n}{n!}\|x-y\|$$

Здесь $M = \max|K|$. Коэффициент $\frac{M^n}{n!}$ стремится к нулю, а это значит, что F_0^n — сжимающее, следовательно, существует неподвижная точка. □

Пример 3.9. Допустим, что мы хотим решить дифференциальное уравнение $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$, $y(0) = y_0$, $a, b \in C[0,1]$ на промежутке $[0,1]$. Это уравнение имеет единственное решение $y \in C^1[0,1]$. Как это доказать? Рассмотрим интегральное уравнение:

$$x(t) = \int\limits_0^t a(s)x(s)\,ds + B(t)$$

По предыдущей теореме существует $x \in C[0,1]$, решающее это уравнение. Для этого уравнения также верны утверждения:

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, где $b(t) = B'(t)$;
- $x(0) = B(0)$.

Для решения исходной задачи достаточно выбрать B такое, что $B' = b$ и $B(0) = y_0$. Откуда взять непрерывную дифференцируемость y?

$$b \in C[0,1] \implies B \in C^1[0,1],$$

$$x \in C[0,1],\ a \in C[0,1] \implies \int\limits_0^t xa \in C^1[0,1]$$

Таким образом всё доказано.

4 Линейные операторы

Определение 4.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Отображение $U : X \to Y$ называется линейным, если:

1. $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$
2. $U(\lambda x) = \lambda U(x)$, где λ — скаляр, $x \in X$

Замечание 4.2. Ясно, что выполнение обоих этих свойств равносильно $U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 U(x_1) + \lambda_2 U(x_2)$.

Замечание 4.3. В дальнейшем будем обозначать $U(x)$ как Ux.

Предложение 4.4 (Свойства линейных отображений).

1. $U(0) = 0$;
2. $U(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j U x_j$;
3. *Если $M \subset X$ — линейное множество, то множество $U(M)$ линейно в Y. Если $M \subset X$ — выпуклое множество, то множество $U(M)$ выпукло в Y;*
4. *Если $N \in Y$ — линейное (выпуклое), то $U^{-1}(N)$ — линейное (выпуклое). Частный случай: если $N = \{0\}$, то множество $U^{-1}(N) = U^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} U$ — линейное в X;*
5. $\operatorname{Ker} U = \{0\} \iff U$ *инъективно;*
6. *Если U — линейная биекция, то U^{-1} — линейное;*
7. *Пусть $U_1, U_2 : X \to Y$ — линейные. Тогда $U_1 + U_2$, λU_1 тоже линейны;*
8. *Если $X \xrightarrow{U} Y \xrightarrow{V} Z$, то композиция $V \circ U$ линейна.*

Определение 4.5. Множество M называется выпуклым, если для любых $x_1, x_2 \in M$ отрезок $[x_1, x_2]$ лежит в M.

Доказательство предложения. Докажем выпуклость в свойстве 3.

$$y_1, y_2 \in U(M) \implies \exists x_1, x_2 \in M : Ux_1 = y_1,\ Ux_2 = y_2$$

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = \lambda U x_1 + (1-\lambda) U x_2 = U(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\in M}) \in U(M)$$

В свойстве 4:

$$x_1, x_2 \in U^{-1}(N) \implies Ux_1, Ux_2 \in N \implies \forall \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 U x_1 + \lambda_2 U x_2 \in N \implies$$

$$\implies U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in N \implies \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in U^{-1}(N)$$

В свойстве 6 биективность U означает, что $\forall y_1, y_2\ \exists x_1, x_2$ такие, что $Ux_1 = y_1$, $Ux_2 = y_2$. Отсюда $U^{-1}(y_1 + y_2) = U^{-1}(Ux_1 + Ux_2) = U^{-1}(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = U^{-1}(x_1) + U^{-1}(x_2)$.

Доказательства остальных свойств тривиальны. □

Теорема 4.6 (Эквивалентные условия непрерывности линейного отображения). *Пусть $U:\ X \to Y$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *U непрерывен;*

2. *U непрерывен в нуле;*

3. *Образ любого ограниченного множества ограничен;*

4. *Существует C такое, что $\forall x \in X$ выполняется $\|U_x\|_Y = C\|x\|_X$.*

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$. Тривиально.

- $4 \Rightarrow 1$. $\|Ux_1 - Ux_2\| \leqslant C\|x_1 - x_2\|$. Это влечёт липшицевость и, как следствие, непрерывность.

- $2 \Rightarrow 3$. Непрерывность в нуле означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\|x\| < \delta \implies \|Ux\| < \varepsilon$. Ограниченность множества M в X означает, что $\exists R : N \subset B_R(0) = \{\|x\| \leqslant R\}$. Таким образом, $x \in M \implies \|x\| \leqslant R$. $\|\frac{\delta}{2R}x\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta \implies \|U(\frac{\delta}{2R}x)\| < \varepsilon$. Отсюда $\|Ux| \leqslant \frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta} \implies Ux \in B_{\frac{\varepsilon \cdot 2R}{\delta}}(0)$. То есть, $U(M)$ ограничено.

- $3 \Rightarrow 4$. $B_1(0)$ — ограниченное множество. Тогда $U(B_1(0))$ — ограничено, т. е. существует такое C, что $U(B_1(0)) \subset B_C(0)$. Если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ux\| \leqslant C$. Теперь возьмём произвольное x. $x' = \frac{x}{\|x\|} \in B_1(0) \implies \|Ux'\| \leqslant C$. Но $\|Ux\| = \|U\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ux\|$. Отсюда $\|Ux\| \leqslant C\|x\|$.

$\square$

Определение 4.7. Пусть $U : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Тогда нормой оператора U называется величина $\|U\| = \inf\{C \mid \|Ux\| \leqslant C\|x\|\}$.

Замечание 4.8. В формулировке определения инфимум и минимум совпадают (это можно доказать, перейдя к пределу в неравенстве $\|Ux\| \leqslant C\|x\|$).

Замечание 4.9. Выполнено неравенство $\|Ux\|_Y \leqslant \|U\| \cdot \|x\|_X$. В частности, $\frac{\|Ux\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant \|U\|$ $\forall x \in X$, т. е. можно записать $\|U\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$.

Теорема 4.10 (Об эквивалентных способах определения нормы оператора). *Пусть $U : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Тогда:*

$$\|U\| = \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}}_{A} = \underbrace{\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U_x\|}_{B} = \underbrace{\sup_{\|x\| < 1} \|U_x\|}_{C} = \underbrace{\sup_{\|x\| = 1} \|U_x\|}_{D}$$

Замечание 4.11. Так как замкнутость и ограниченность, вообще говоря, неравносильна компактности (за исключением конечномерных пространств), в $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ux\|$ максимум может и не достигаться.

Доказательство теоремы. Очевидно, что $B \geqslant C$ и $B \geqslant D$.

$$B = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, x \neq 0} \|Ux\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1,\, x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = A$$

Докажем, что $D \geqslant A$. Возьмём $x' = \frac{x}{\|x\|}$, тогда $\|x'\| = 1$ и $\|Ux\| \leqslant D$. $\|U(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$. Итак, $\frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant D$, тогда и $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|}$. Осталось проверить, что $C \geqslant A$. Возьмём $x \neq 0$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $x' = \frac{x}{\|x\|(1+\varepsilon)}$. Тогда $\|x\| < 1$. Отсюда следует, что $\|Ux'\| \leqslant C \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|(1+\varepsilon)} \leqslant C \implies \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant C(1+\varepsilon)$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получим $A = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \leqslant C$. $\square$

5 Пространства линейных непрерывных операторов

Определение 5.1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним полем скаляров. Возьмём $B(X, Y) = \{U : X \to Y,\ U$ — линейно, непрерывно$\}$. Это *линейное пространство.*

Теорема 5.2 (О свойствах операторной нормы). $U, V \in B(X, Y)$.

1. $\|U\| \geqslant 0$, $\|U\| = 0 \iff U = 0$;

2. $\|\lambda U\| = |\lambda|\|U\|$ (λ — *скаляр*);

3. $\|U + V\| \leqslant \|U\| + \|V\|$;

4. $W \in B(Y, Z)$. $WU \in B(X, Z)$, $\|WU\| \leqslant \|W\|\|U\|$.

Доказательство.

1. Неотрицательность очевидна. Если $\|U\| = 0$, то $\|Ux\| \leqslant 0 \cdot \|x\| \implies \|Ux\| = 0\ \forall x$;

2. $\|\lambda U\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\lambda U)(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ux\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|=1} \|U_x\| = |\lambda|\|U\|$;

3. $x \in X$. $\|(U + V)(x) = \|Ux + Vx\| \leqslant \|Ux\| + \|Vx\| \leqslant \|U\|\|x\| + \|V\|\|x\| = (\|U\| + \|V\|)\|x\|$

4. $x \in X$. $\|(WU)(x)\| = \|W(U(x))\| \leqslant \|W\| \cdot \|Ux\| \leqslant \|W\|\|U\|\|x\|$.

$\square$

Теорема 5.3 (О полноте пространства операторов). *Если* Y *полно, то* $B(X, Y)$ *полно.*

Доказательство. Возьмём фундаментальную последовательность линейных непрерывных отображений $U_n \in B(X, Y)$, то есть $\|U_n - U_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N$ $\|U_n - U_m\| < \varepsilon$. Это означает, что $\|(U_n - U_m)(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Следовательно, $\{U_n x\}$ фундаментальна в Y. Обозначим $Ux = \lim\limits_{n\to\infty} U_n x$. Мы хотим проверить, что U непрерывно, линейно и что есть сходимость.

1. (Линейность U). $U(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lim U_n x_1 + \alpha_2 \lim U_n x_2 = \alpha_1 U x_1 + \alpha_2 U x_2$

2. (Нерерывность U). Возьмём любое $\varepsilon > 0$, N, $\forall m, n > N$, $\forall x \in X$. $\|U_n x - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \implies \|Ux - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. $\|Ux\| = \|(Ux - U_m x) + U_m x\| \leqslant \|(Ux - U_m x)\| + \|U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\| + \|U_m\|\|x\|$. Отсюда $\|U\| \leqslant \varepsilon + \|U_m\|$.

3. (Сходимость U_n к U). $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m, n > N\ \forall x \in X$ $\|U_n x - U_m x\| \leqslant \varepsilon\|x\|$. Устремив n к бесконечности, получим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m > N\ \forall x \in X$ $\|Ux - U_m x\| = \|(U - U_m)(x)\| \leqslant \|x\|$ $\implies \|U - U_m\| \leqslant \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$: $\forall m > N$ $\|U - U_m\| \leqslant \varepsilon$, т. е. $U_n \to U$ в $B(X, Y)$.

$\square$

Следует отметить важный частный случай.

Определение 5.4. $B(X, \text{поле скаляров }) = X^*$ называется *сопряжённым пространством к* X. $f \in X^*$ называется *линейным непрерывным функционалом.*

Норма функционала определяется как $\|f\| = \inf\{C \mid |f(x)| \leqslant C\|x\|\} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

6 Корректно разрешимые задачи

Рассмотрим отображение $A : X \to Y$. Мы хотим решить уравнение $Ax = f$. f — какие-то известные данные.

В общей постановке вопроса корректная разрешимость означает три вещи:

- Решение существует для любого f.
- Решение единственно.
- Устойчивость: если $f_n \to f$, то для решений верно, что $x_n \to x$. (Здесь $Ax_n = f_n$, $Ax = f$.)

В частном случае, когда X и Y — линейные нормированные пространства и A — линейное отображение, вышеописанные условия равносильны тому, что $A^{-1} \in B(Y, X)$.

Замечание 6.1. Самый простой пример корректно разрешимой задачи — случай, когда оператор A тождественен.

Теорема 6.2 (Об обратимости оператора, близкого к тождественному). *Если* $B \in B(X, X)$*,* X *— полное и* $\|B\| < 1$*, то существует оператор* $(I \pm B)^{-1} \in B(X, X)$*. (*$I$ *— тождественный оператор.)*

Доказательство. Приведём два способа доказать эту теорему.

1. Возьмём уравнение $(I - B)x = f$. Надо доказать, что для любого $f \in X$ существует единственный $x \in X$, решающий это уравнение. Это равносильно $x = f + Bx = g(x)$. Заметим, что x удовлетворяет уравнению тогда и только тогда, когда x — неподвижная точка отображения g. Проверим, что g — сжимающее. $\|g(x_1) - g(x_2)\| = \|(f + Bx_1) - (f + Bx_2)\| = \|Bx_1 - Bx_2\| \leqslant \underbrace{\|B\|}_{<1} \cdot \|x_1 - x_2\|$.

   Теперь проверим устойчивость. Пусть $f_n \to f$, $(I - B)x_n = f_n$, $(I - B)x = f$. Нужно проверить, что $x_n \to x$. $x_n = f_n + Bx_n$, $x = f + Bx$.

   $$\|x_n - x\| = \|f_n + Bx_n - f - Bx\| \leqslant \|f_n - f\| + \|Bx_n - Bx\| \leqslant \|f_n - f\| + \|B\| \cdot \|x_n - x\|$$

   Отсюда

   $$0 \leqslant \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \|x_n - x\| \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} \implies \|x_n - x\| \to 0$$

2. Докажем формулу $(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + B^2 + \ldots$. Необходимо проверить, что этот ряд сходится. Докажем, что он сходится абсолютно, то есть $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \ldots < \infty$. Заметим, что $\|B^k\| \leqslant \|B\|^k$. Отсюда $\|I\| + \|B\| + \|B^2\| + \ldots \leqslant \|I\| + \|B\| + \|B\|^2 + \ldots$. Но это — геометрическая прогрессия, она сходится. Частичные суммы: $S_n = I + B + \ldots B^{n-1}$, $(I - B)S_n = S_n(I - B) = I - B^n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$. Мы воспользовались полнотой пространства, утверждая, что абсолютная сходимость влечёт сходимость ряда.

□

Теорема 6.3 (Об обратимости оператора, близкого к обратимому). *Пусть* $U \in B(X, Y)$ *— линейное отображение и существует* $B^{-1} \in B(Y, X)$*. Кроме того,* X **или** Y *— полное пространство. Рассмотрим* $V \in B(X, Y)$ *такой, что* $\|V\| < \|U^{-1}\|^{-1}$*. Тогда существует* $(U + V)^{-1} \in B(Y, X)$*.*

Доказательство. $U + V = U(I_X + U^{-1}V)$ (или $(I_Y + VU^{-1})U$). Оператор U обратим, обратный к нему оператор непрерывен. Получаем $\|U^{-1}V\| \leqslant \|U^{-1}\| \cdot \|V\| < 1$. □

7 Линейные непрерывные функционалы

Вспомним, что если X — нормированное пространство, то $X^* = B(X, \text{поле скаляров})$ называется сопряжённым к X пространством. Норма функционала определяется как $\|f\| = \inf\{C \mid |f(x)| \leqslant C\|x\|\} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$.

Пример 7.1 (Функционалы в пространстве Лебега). Рассмотрим $L^p(T, \mu)$, причём $1 < p < \infty$. Возьмём q — сопряжённый показатель такой, что $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Возьмём также $y_0 = L^q(T, \mu)$. Определим функционал f формулой $f(x) = \int\limits_T x(t)y_0(t)\,d\mu(t)$. Нам нужно проверить, что это действительно функционал, что он непрерывен (линейность очевидна). Чтобы этот функционал был функционалом, необходимо, чтобы подынтегральная функция была суммируемой. Для этого воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int\limits_T |x(t)y_0(t)|\,d\mu(t) \leqslant \left(\int\limits_T |x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |y_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y_0\|_q \cdot \|x\|_p < \infty$$

$$|f(x)| \leqslant \underbrace{\|y_0\|_q}_{=C} \cdot \|x\| \implies \|f\| \leqslant \|y_0\|_q$$

Проверим, что $\|f\| \geqslant \|y_0\|_q$.

$$x_0(t) = \frac{|y_0|^q}{y_0} = |y_0|^{q-1}\frac{|y_0|}{y_0} = |y_0|^{q-1}\operatorname{sign} y_0 \implies x_0y_0 = |y_0|^q$$

$$|f(x_0)| = \left|\int\limits_T x_0y_0\right| = \int\limits_T |y_0|^q$$

Но так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $(q-1)p = q$.

$$\|x_0\|_p = \left(\int\limits_T |x_0|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_T |y_0|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_T |y_0|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_p} = \frac{\int\limits_T |y_0|^q}{\Bigl(\int\limits_T} \dots$$

Таким образом, $L^q(T, \mu) \hookrightarrow L^q(T, \mu)^*$, $y_0 \mapsto f$ и $\|y_0\|_q = \|f\|$. Имеет место *изометрическое вложение*, и даже более того, биекция.

Пример 7.2. Рассмотрим пространство $C[-1, 1]$. Пусть $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt$. Снова хотим доказать, что это функционал, что он непрерывен и линеен. Для непрерывности достаточно установить, что $|f(x)| \equiv C\|x\|$.

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |t||x(t)|\,dt \leqslant \max|x| \int\limits_{-1}^{1} |t|\,dt = \|x\| \implies \|f\| \leqslant 1$$

Непрерывность доказана. Теперь возьмём функцию $x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon}, & |t| \leqslant \varepsilon \\ -1, & t \leqslant -\varepsilon \end{cases}$.

$$f(x_\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} tx_\varepsilon(t)\,dt = \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\right)|t|\,dt + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t^2}{\varepsilon}\,dt = 1 + O(\varepsilon)$$

Получаем, что $\|f\| \geqslant \frac{f(x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$. Теперь возьмём $y_0 \in L^1(-1,1)$, $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} y_0(t)x(t)\,dt$.

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |y_0||x| \leqslant \|x\| \int\limits_{-1}^{1} |y_0| \leqslant \|y_0\|_1 \cdot \|x\|_C$$

Значит, f — линейный непрерывный функционал. $\|f\| = \|y_0\|_1$, $x_0(t) = \operatorname{sign} y_0 \notin C$.

Упражнение 7.3. *Пусть* $\delta(x) = x(0)$. *Доказать, что* $\delta \notin L^1(-1,1)$, *то есть не существует* $y_0 \in L^1(-1,1)$ *такого, что* $\forall x \in C[-1,1]$ $\int\limits_{-1}^{1} y_0(t)x(t)\,dt = x(0)$

Теорема 7.4. $(c_0)^* = \ell^1$

Напомним, что $\ell^\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \|x\|_\infty = \sup\limits_{j \geqslant 1} |x_j| < \infty\}$ и $c_0 = \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \lim\limits_{j \to \infty} x_j = 0\}$, $c_0 \subset \ell^\infty$. При этом $\|x\|_{c_0} = \|x\|_\infty$. c_0 — полное нормированное пространство.

Рассмотрим $L_{\text{fin}} \subset \ell^\infty$ такое, что $x \in L_{\text{fin}}$, если у x лишь конечное число ненулевых координат. Отметим, что L_{fin} является линейной оболочкой векторов $e_1, e_2, \ldots$, где $e_k = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots)$. Также $\overline{L_{\text{fin}}} = c_0$

- $x \in c_0 \implies \exists x^{(n)} \in L_{\text{fin}}$: $x^{(n)} \to \infty$, где $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. $\|x - x^{(n)}\| = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_\infty = \sup\limits_{j \geqslant n+1} |x_j|$.
- c_0 замкнуто.

Доказательство.

1. Возьмём $y^{(0)} \in \ell^1$, где $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots)$ и $\|y^{(0)}\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j^{(0)}| < \infty$. Построим по нему функционал на c_0.

   ...

   Мы построили вложение $\ell^1 \hookrightarrow (c_0)^*$, $y^{(0)} \mapsto f$.

2. Пусть нам дан функционал $f \in (c_0)^*$. Мы хотим построить по нему $y \in \ell^1$. Положим $f(e_j) = y_j$ $(y = (y_1, y_2, \ldots))$. Нам нужно проверить, что $y \in \ell^1$ и что $\forall x\ f(x) = \sum x_j y_j$. Возьмём $z^{(n)} = (\operatorname{sign} y_1, \operatorname{sign} y_2, \ldots, \operatorname{sign} y_n, 0, 0, \ldots)$. $|f(z^{(n)}| \leqslant \|f\| \cdot \|z^{(n)}\|_\infty \leqslant \|f\|$. Но левая часть неравенства равна $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |y_j|$. Из неравенства следует, что ряд сходится, отсюда $y \in \ell^1$.

   Покажем теперь, что $\forall x\ f(x) = \sum x_j y_j$. пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$.

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

   Левая часть стремится к $f(x)$, так как $\sum\limits_{j=1}^{n} = x_j e_j \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

□

8 Интегральные операторы. Часть I

Что такое интегральный оператор? Допустим, у нас есть функция двух переменных $K(s,t)$, называемая *ядром интегрального оператора* (не путать с ядром оператора). Оператор действует следующим образом: он берёт функцию $x(s)$ и преобразует её в функцию $(Ux)(t)$ по формуле $(Ux)(t) = \int K(s,t)x(s)$ (множество интегрирования и мера определяются отдельно). Какими свойствами должна обладать функция K, чтобы этот оператор был «хорошим»?

8.1 Интегральные операторы в пространствах Лебега

Будем рассматривать переменные s на множестве S с мерой ν и t на множестве T с мерой μ, а также функцию $K : S \times T \to$ поле скаляров, притом измеримую. Пусть x — также измеримая функция на S, $(Ux)(t) = \int\limits_S K(s,t)x(s)\,d\nu(s)$. Какие условия нужно наложить на функцию K, чтобы оператор U действовал из $L^p(s,\nu)$ в $L^r(T,\mu)$ и был непрерывен?

$$\int\limits_T |(Ux)(t)|^r \leqslant \int\limits_T \left(\int\limits_S |K(s,t)||x(s)|\,ds\right)^r dt \leqslant \int\limits_T \left(\left(\int\limits_S |K(s,t)| \cdots\right.\right.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8.1 (О гёльдеровских условиях непрерывности). *Если* $\int\limits_T \left(\int\limits_S |K|^q\,ds\right)^{\frac{r}{q}} dt < \infty$*, то* U *действует непрерывно из* $L^p(s,\nu)$ *в* $L^r(T,\mu)$*.*

Пусть $p = 2$, $r = 2$, то есть $q = 2$. Тогда:

$$\int\limits_T\int\limits_S |K(s,t)|^2\,ds\,dt < \infty \iff K \in L^2(S\times T, \nu\times\mu)$$

и $\|U\| \leqslant \|K\|_{L^2(S\times T,\nu\times\mu)}$. Операторы, удовлетворяющие таким условиям, называются операторами Гильберта-Шмидта, а K — ядром Гильберта-Шмидта.

Замечание 8.2. Существуют линейные непрерывные интегральные операторы, не являющиеся операторами Гильберта-Шмидта.

8.2 Тест Шура

Теорема 8.3 (Тест Шура). *Пусть* $(Ux)(t) = \int\limits_S K(s,t)x(s)\,d\nu(s)$*. Предположим, что существуют строго положительные функции* $\varphi : S \to \mathbb{R}$*,* $\psi : T \to \mathbb{R}$ *и числа* $A, B \in \mathbb{R}$ *такие, что:*

1. $\int\limits_S |K(s,t)|\varphi(s)\,d\nu(s) \leqslant A\psi(t)$ *для почти всех* $t \in T$*.*
2. $\int\limits_T |K(s,t)|\psi(s)\,d\mu(s) \leqslant B\varphi(s)$ *для почти всех* $s \in S$*.*

Тогда U *— линейный непрерывный оператор из* $L^2(S,\nu)$ *в* $L^2(T,\mu)$*.*

Доказательство.

$$|(Ux)(t)| \leqslant \int\limits_S \sqrt{|K(s,t)|\varphi(s)}\sqrt{\frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}}\,d\nu(s) \leqslant \underbrace{\left(\int\limits_S |K(s,t)|\varphi(s)\,ds\right)^{\frac12}}_{\leqslant A\psi(t)} \left(\int\limits_S \frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}\,ds\right)^{\frac12}$$

$$\int_T |(Ux)(t)|^2\,dt \leqslant \int_T A\psi(t)\int_S \frac{|K(s,t)||x(s)|^2}{\varphi(s)}\,ds\,dt$$

□

Упражнение 8.4.

1. *$S = T = (0,1)$ с мерой Лебега, $K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{|s-t|}}$. Заметим, что получается оператор, не являющийся оператором Гильберта-Шмидта, так как $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{|s-t|\,ds\,dt} = +\infty$. Придумать тест Шура для этого случая.*
2. *$S = T = \mathbb{R}$, $K(s,t) = e^{-(s+t)^2}$. Является U оператором Гильберта-Шмидта, и, если нет, является ли он непрерывным?*
3. *$S = T = (0,+\infty)$, $K(s,t) = e^{-st}$. Установить непрерывность U с помощью теста Шура.*
4. *$S = T = \mathbb{N}$, $\nu = \mu = \#$, $K : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда оператор U равен $\sum_{j=1}^{\infty} K_{ij}x_j$.*

Теорема 8.5 (Тест Шура в дискретном случае). *Пусть существуют $\varphi_j > 0$, $\psi_i > 0$, A, B такие, что*

1. *$\sum |K_{ij}|\varphi_j \leqslant A\psi_i \ \forall i \in \mathbb{N}$*
2. *$\sum |K_{ij}|\psi_j \leqslant B\varphi_j \ \forall j \in \mathbb{N}$*

Тогда $U : \ell^2 \to \ell^2$ непрерывен и $\|U\| \leqslant \sqrt{AB}$.

Пример 8.6 (Оператор Харди). Оператор Харди H действует в пространстве $L^2(0,+\infty)$:

$$(Hx)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds$$

Частный случай: $H : \ell^2 \to \ell^2$ и $(Hx)_k = \frac{1}{k}(x_1 + \ldots + x_k)$ (среднее арифметическое).
Применим тест Шура.

$$\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds = \int_0^\infty K(s,t)x(s)\,ds$$

где $K(s,t) = \frac{1}{t}\chi_{[0,t]}(s) = \frac{1}{t}\chi_{[s,+\infty)(t)}$. Возьмём $\varphi(s) \equiv 1$. Тогда

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\varphi(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t ds = 1$$

Взяв $\psi(t) \equiv 1$, получим

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}\,dt = \infty$$

Значит, такое ψ не подходит. Возьмём $\psi(t) = t^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{s^{-\alpha}}{\alpha}$$

В качестве $\varphi(s)$ возьмём $s^{-\alpha}$.

$$\int_0^\infty |K(s,t)|\varphi(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t s^{-\alpha}\,ds = \frac{1}{t}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha}$$

Заметим, что при этом должно быть $\alpha < 1$. Кроме того,

$$\|H\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \quad \forall \alpha \in (0,1) \implies \|H\| \leqslant 2$$

Упражнение 8.7. *Доказать, что* $\|H\| = 2$.

8.3 Интегральные операторы с непрерывным ядром

Будем рассматривать ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, пространство $L^2(\Omega)$ и пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$. Пусть также у нас есть функция $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $K \in C(\overline{\Omega})$, $\|K\|_{C(\overline{\Omega})} = M$.

Теорема 8.8. *Рассмотрим оператор* U *такой, что* $(Ux)(t) = \int\limits_\Omega K(s,t)x(s)\,ds$. *Верно, что* $U \in B(L^2(\Omega), C(\overline{\Omega}))$.

Доказательство. Докажем, что если $x \in L^2(\Omega)$, то $Ux \in C(\overline{\Omega})$. (Здесь непрерывность x не гарантируется.)

$$|Ux(t_1) - Ux(t_2)| = \left|\int_\Omega K(s,t_1) - K(s,t_2)x(s)\,ds\right| \leqslant \left(\int_\Omega |K(s,t_1) - K(s,t_2)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$$

По теореме Кантора K равномерно непрерывно на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \underbrace{|(s_1,t_1) - (s_2,t_2)|}_{\sqrt{|s_1-s_2|^2+|t_1-t_2|^2}} < \delta \implies |K(s_1,t_1) - K(s_2,t_2)| < \varepsilon$$

Если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $|K(s,t_1) - K(s,t_2)| < \varepsilon$, отсюда $|Ux(t_1) - Ux(t_2) < \varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2$
Теперь докажем, что $\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C\|x\|_{L^2(\Omega)}$.

$$\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{t\in\overline{\Omega}}\left|\int_\Omega K(s,t)x(s)\,ds\right| \leqslant \max_{t\in\overline{\Omega}}\left(\int_\Omega |K(s,t)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leqslant (M^2 \cdot |\Omega|)^{\frac{1}{2}}\|x\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Рассмотрим оператор вложения $j : C(\overline{\Omega}) \to L^2(\Omega)$, $x \mapsto x$. Справедливо следствие:

Следствие 8.9. *1.* $jU \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$

2. $Uj \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$

Доказательство. Заметим, что $C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$.

$$\left(\int_\Omega |x(s)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\|x\|^2_{C(\overline{\Omega})} \cdot |\Omega|\right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

Получаем

$$\|x\|_{L^2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\|jx\|_{L^2(\Omega)} = \|x\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \cdot \|x\|_{C(\overline{\Omega})}$$

То есть j непрерывен.

$$C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega) \xrightarrow{U} C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

□

8.4 Операторы со слабой особенностью

Рассмотрим оператор $Ux(t) = \int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds$, причём K — ядро со слабой особенностью, а $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область.

Определение 8.10. K — ядро со слабой особенностью, если оно представляется в виде:

$$K(s,t) = \frac{A(s,t)}{|s-t|^{\alpha}}$$

Здесь $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $\alpha < m$

Пример 8.11. $\Omega = (0,1)$, $K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{|s-t|}}$

Замечание 8.12. Предположим, что $K(s,t) = \frac{a(s,t)}{|s-t|^{\alpha}}$, $\alpha < m$, a — ограниченная функция, непрерывная вне диагонали множества $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, то есть в точках (s,t) таких, что $s \neq t$. Тогда K — ядро со слабой особенностью. Почему? Можно записать $K(s,t) = \frac{a(s,t)|s-t|^{\delta}}{|s-t|^{\alpha+\delta}}$, где $\alpha + \delta < m$. $A(s,t) = a(s,t)|s-t|^{\delta}$ непрерывно на $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$

Почему особенность «слабая»? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем лемму.

Лемма 8.13. *Пусть у нас есть шар $B(0,\rho) \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $\int\limits_{B(0,\rho)} \frac{dx}{|x|^{\alpha}}$ конечен тогда и только тогда, когда $\alpha < m$.*

Доказательство. Вычислим этот интеграл.

$$\int\limits_{B(0,\rho)} \frac{dx}{|x|^{\alpha}} = \int\limits_0^{\rho} \int\limits_{S_1(0)} r^{m-1} \frac{1}{r^{\alpha}}\,d\theta\,dr = |S_1| \int\limits_0^{\rho} r^{m-\alpha-1}\,dr = |S_1| \frac{r^{m-\alpha}}{m-\alpha}\bigg|_0^{\rho} = |S_1| \frac{\rho^{m-\alpha}}{m-\alpha}$$

□

Теорема 8.14. *Пусть U — оператор со слабой особенностью: $Ux(t) = \int\limits_{\Omega} K(s,t)x(s)\,ds$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $U \in B(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.*

Доказательство. Применим тест Шура. Возьмём функцию $\varphi(s) \equiv 1$.

$$\int\limits_{\Omega} |K(s,t)|\,ds = \int\limits_{\Omega} \frac{|A(s,t)|}{|s-t|^{\alpha}}\,ds \leqslant M \cdot \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|s-t|^{\alpha}}\,ds \leqslant M \cdot \int\limits_{B_d(t)} \frac{ds}{|s-t|^{\alpha}} \leqslant M \cdot \int\limits_{B_d(0)} \frac{dz}{|z|^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \frac{d^{m-\alpha}}{m-\alpha}$$

Здесь $A \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $\|A\|_{C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})} = M$, $d = \operatorname{diam} \overline{\Omega}$

Получаем, что $\psi(t) = 1$. □

Теорема 8.15. *В условиях предыдущей теоремы также верно* $U \in B(C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$.

Доказательство. 1. $\forall x \in C(\overline{\Omega})$ $Ux \in C(\overline{\Omega})$

2. $\|Ux\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C\|x\|_{C(\overline{\Omega})}$

   Будем доказывать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall t_1, t_2 \in \overline{\Omega}$ такого, что $|t_1 - t_2| < \delta$, $|Ux(t_1) - Ux(t_2)| < \varepsilon$

$$Ux(t_1) - Ux(t_2) = \int\limits_{\Omega} (K(s, t_1) - K(s, t_2))x(s)\, ds$$

   Возьмём ρ такое, что $|t_1 - t_2| < \rho$. Разобьём область Ω на три части:

$$\Omega = \underbrace{(\Omega \backslash (B_{\frac{\rho}{2}}(t_1) \cup B_{\frac{\rho}{2}}(t_2))}_{\Omega_{1,2}} \cup \underbrace{(B_{\frac{\rho}{2}}(t_1) \cap \Omega)}_{\Omega_1} \cup \underbrace{(B_{\frac{\rho}{2}}(t_2) \cap \Omega)}_{\Omega_2}$$

$$\Big| \int\limits_{\Omega_1} \dots \Big| \leqslant \int\limits_{\Omega_1} |K(s, t_1) - K(s, t_2)||x(s)|\, ds \leqslant \|x\|_{C(\overline{\Omega}}\Big(\int\limits_{\Omega_1} |K(s, t_1)|\, ds + \int\limits_{\Omega_1} |K(s, t_2)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \|x\| \Big(\int\limits_{\Omega_1} \frac{ds}{|s - t_1|^{\alpha}} + \int\limits_{\Omega_1} \frac{ds}{|s - t_2|^{\alpha}} \Big) \leqslant M \cdot \|x\| \cdot |S_1| \Big(\frac{(\frac{\rho}{2})^{m-\alpha}}{m - \alpha} + \frac{(\frac{3\rho}{2})^{m-\alpha}}{m - \alpha} \Big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Big| \int\limits_{\Omega_{1,2}} \dots \Big| \leqslant \|x\| \int\limits_{\Omega_{1,2}} \left| \frac{A(s, t_1)}{|s - t_1|^{\alpha}} - \frac{A(s, t_2)}{|s - t_2|^{\alpha}} \right| ds =$$

$$= \|x\| \int\limits_{\Omega_{1,2}} \left| \frac{A(s, t_1)|s - t_2|^{\alpha} - A(s, t_2)|s - t_1|^{\alpha}}{|s - t_1|^{\alpha}|s - t_2|^{\alpha}} \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x\|}{(\frac{\rho}{2})^{2\alpha}} \underbrace{\int\limits_{\Omega} |A(s, t_1)|s - t_2|^{\alpha} - A(s, t_2)|s - t_1|^{\alpha}\, ds}_{\xrightarrow[t_1 - t_2 \to 0]{} 0}$$

   ...(пропущено полдоски)

$$\widetilde{\varepsilon} = \|x\|^{-1} \Big(\frac{\rho}{2}\Big)^{2\alpha} |\Omega|^{-1} \frac{\varepsilon}{2}$$

   Отсюда находим $\widetilde{\delta}$. В результате $\delta = \frac{\widetilde{\delta}}{\sqrt{2}}$.

□

9 Скалярное произведение

Пусть X — линейное множество над полем скаляров $\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Определение 9.1. $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется скалярным произведением, если:

1. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
3. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

4. $\varphi(x,x) \geqslant 0 \ \forall x \in X$, $\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0$

Предложение 9.2 (Свойства скалярного произведения).

1. $\varphi\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y\Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(x_j, y)$

2. $\varphi\Big(x, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\Big) = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \varphi(x, y_j)$

3. *Неравенство Коши-Буняковского:* $|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$

4. $p(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$ *является нормой.*

Доказательство. Докажем свойство 2.

$$\varphi(x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j) = \overline{\varphi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, x)} = \overline{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(y_j, x)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \varphi(x, y_j)$$

Докажем неравенство Коши-Буняковского. Возьмём какой-нибудь скаляр λ.

$$0 \leqslant \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \varphi(x,x) + \varphi(x, \lambda y) + \varphi(\lambda y, x) + \varphi(\lambda y, \lambda y) =$$

$$= \varphi(x,x) + \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \underbrace{\lambda(y,x)}_{\lambda\overline{\varphi(x,y)}} + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}\varphi(y,y)}_{|\lambda|^2\varphi(y,y)}$$

Выберем λ следующим образом: $\lambda = t\varphi(x,y)$ $(t \in \mathbb{R})$. Тогда получим:

$$= \varphi(x,x) + 2t|\varphi(x,y)|^2 + t^2|\varphi(x,y)|^2\varphi(y,y)$$

Дискриминант этого трёхчлена $D = 4|\varphi(x,y)|^4 - |\varphi(x,y)|^2\varphi(x,x)\varphi(y,y) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$.

В свойстве 4 проверим аксиомы нормы:

1. $p(x) \geqslant 0$, $p(x) = 0 \iff x = 0$

2. $p(\lambda x) = \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\varphi(x,x)} = |\lambda|\sqrt{\varphi(x,x)} = |\lambda| p(x)$

3. Требуется $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

$$\sqrt{(\varphi(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{(\varphi(y,y)} \iff$$

$$\iff \varphi(x+y, x+y) \leqslant \varphi(x,x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} + \varphi(y,y) \iff$$

$$\iff \underbrace{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}_{2\operatorname{Re}\varphi(x,y)} \leqslant 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$$

$$2\operatorname{Re}\varphi(x,y) \leqslant 2|\varphi(x,y)| \leqslant 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$$

□

Замечание 9.3. В пространстве со скалярным произведением можно естественным образом завести норму.

Определение 9.4. Пространство со скалярным произведением (X, φ) называется унитарным. Полное унитарное пространство называется гильбертовым (обозначается H).

Предложение 9.5 (Непрерывность скалярного произведения). *Если* $x_n \to x$, $y_n \to y$, *то* $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Доказательство.

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leqslant |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$$

□

Предложение 9.6. *Пусть* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ *— сходящийся ряд в* H *— гильбертовом пространстве. Тогда* $\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j, y\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j, y)$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$, $S_n \to S$. Тогда $(S_n, y) \to (S, y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j, y\right)$.

$$(S_n, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j, y\right) = \sum_{j=1}^{n} (x_j, y) \to \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, y)$$

□

Предложение 9.7 (Тождество параллелограмма). $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Доказательство. Упражнение □

Пример 9.8. Рассмотрим пространство $X = C[0, 1]$, функции $x(t) = 1$ и $y(t) = t$. $\|x + y\| = 2$, $\|x - y\| = 1$, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$. Отсюда $2^2 + 1^2 = 2 \cdot (1^2 + 1^2)$ — неверно. Из этого следует, что в пространстве $C[0, 1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с естественной нормой.

Предложение 9.9 (Формула восстановления). *Если пространство унитарное, то в нём можно восстановить скалярное произведение по норме. Для вещественного случая:*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Для комплексного случая:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2)$$

Доказательство. Упражнение. □

Пример 9.10. В пространстве $L^2(T, \mu)$:

$$(x, y) = \int\limits_T x(t)\overline{y(t)}\, d\mu(t)$$

$$\sqrt{(x, x)} = \left(\int\limits_T |x(t)|^2\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$