Функциональный анализ

Ф. Л. Бахарев *

6 сентября 2016 г.

Содержание

*Конспект подготовлен студентом Яскевичем С. В.

1 Линейное нормированное пространство

Определение 1.1. Линейное множество L над полем скаляров $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — множество с операциями сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющее свойствам:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)\ \forall x,y,z \in L$
2. $x+y = y+x\ \forall x,y,z \in L$
3. Существует элемент 0 такой, что $x+0 = x\ \forall x \in L$
4. Для любого $x \in L$ существует обратный элемент по сложению $-x$ такой, что $-x+x = 0$
5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\ \forall \lambda, \mu$ — скаляров, $x \in L$
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \lambda y$

Определение 1.2. $\varphi : L \to \mathbb{R}$ называется нормой, если:

1. $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)\varphi(y)$
2. $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$
3. $\varphi(x) \geqslant 0$
4. $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$

Если выполнены только первых три свойства, то φ называется полунормой.

Замечание 1.3.
1. $\rho(x,y) = \varphi(x-y)$ — метрика
2. Если на пространстве задана норма $\|\cdot\|$, то $X = (L,\varphi)$ — нормированное пространство.

Определение 1.4. $x_n \to x$ в X, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Определение 1.5. $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальная последовательность (сходящаяся в себе, последовательность Коши), если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $m,n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N :$ $\forall m,n > N$ $\|x_m - x_m\| < \varepsilon$

Замечание 1.6. $x_n \to x \implies \{x_n\}$ — фундаментальная. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 1.7. Нормированное пространство X называется полным, если из фундаментальности последовательности следует существование предела.

Определение 1.8. Пусть $x_n \in X$. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится, если $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ имеет предел $\lim S_n = S$. S называется суммой ряда.

Определение 1.9. Ряд сходится абсолютно, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x\|$ сходится.

Замечание 1.10. Из абсолютной сходимости не следует обычная сходимость.

S_n сходится $\iff |S_n - S_m| \to 0$. Пусть $C_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \|x\|$. C_n сходится $\iff |C_n - C_m| \to 0$. Если мы хотим, чтобы сходимость S_n была равносильна $\|S_n - S_m\| \to 0$, то нам нужна полнота пространства.

Определение 1.11. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством (в честь польского математика Стефана Банаха).

Примеры 1.12.

- Евклидово пространство: $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = |x| = \sqrt[n]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ — то же, что ℓ_n^2 с нормой $\|\cdot\|_2$
- $\ell_n^1 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, где $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$
- $\ell_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$
- $\ell_n^p = (\mathbb{R}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_p$, $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$
- Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^m$, т. е. ограниченное открытое множество. $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω. Ясно, что $\overline{\Omega}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим пространство $C(\overline{\Omega})$ с нормой $\|x\| = \max_{t\in\overline{\Omega}} |x(t)|$

Упражнение 1.13. *Верно ли, что* $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ *при* $p \to \infty$*?*

Теорема 1.14. *Пространство* $C(\overline{\Omega})$ *полно.*

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $x_n \in C(\overline{\Omega})$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, n > N \|x_k - x_n\| = \max_{t\in\overline{\Omega}} |x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

Возьмём $t \in \overline{\Omega}$. $\{x_n(t)\}$ — числовая последовательность. Тогда получаем $|x_n(t) - x_k(t)| < \varepsilon$, отсюда $\{x_n(t)\}$ — фундаментальна, значит существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$.

Проверим, что $\max\limits_{t\in\overline{\Omega}} |x_n(t) - x(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n \rightrightarrows x$ на $\overline{\Omega}$. Заметим, что $\forall k, n > N |x_k(t) - x_n(t)| < \varepsilon \implies |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon$.

Почему же x непрерывна? Потому что равномерный предел непрерывных функций непрерывен.

□

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Рассмотрим пространство дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. Какую норму на нём выбрать?

- $\varphi_1(x) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$
- $\varphi_2(x) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$
- $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$
- $\varphi_4(x) = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

Заметим, что φ_2 нормой вообще не является, а φ_1 не даёт полноты пространства.

Теорема 1.15.

1. *Пространство* $(C^1[a, b], \varphi_1)$ *не полно;*
2. *Пространство* $(C^1[a, b], \varphi_3)$ *полно;*

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Первый аргумент. x — производная непрерывная на $[a, b]$, негладкая. По теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P такой, что $\max\limits_{[a,b]} |P - x| < \varepsilon$

Второй аргумент. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$, $x(t) = |t| \notin C^1[a, b]$, $x^\varepsilon(t) = |t|^{1+\varepsilon} \in C^1[a, b]$. $\max|x(t) - x^\varepsilon(t)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства второго утверждения возьмём $x_n \in C^1[a, b]$ — последовательность, фундаментальную относительно φ_3.

$$\varphi_3(x_n - x_k) \to 0 \text{ при } n, k \to \infty \implies \begin{cases} \varphi_1(x_n - x_k) \to 0 \\ \varphi_2(x_n - x_k) \to 0 \end{cases} \implies \exists x \in C[a, b], y \in C[a, b]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_n - x) \to 0 \iff x_n \rightrightarrows x \text{ на } [a, b] \\ \varphi_1(x_n' - y) \to 0 \iff x_n' \rightrightarrows y \text{ на } [a, b] \end{cases} \implies x \in C^1[a, b], x' = y$$

Отсюда $\varphi_3(x_n - x) \to 0$ $\square$