

Dokumentácia zápočtového programu – Goldbergov algoritmus

Goldbergov algoritmus

je algoritmus na nájdenie maximálneho toku v sieti $F = (G, c, s, t)$, kde:

- $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- $s \in V$ a $t \in V$ sú vybrané vrcholy *zdroj (source)* resp. *stok (sink)*,
- $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je upravený tok v F (nemusi spĺňať Kirchhoffov zákon),
- $x_f: V \rightarrow \mathbb{R}$ je *prebytková (excess)* funkcia vzhľadom k toku f , definovaná $x_f(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$
- $r_f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ je funkcia zostatkovej kapacity vzhľadom k toku f definovaná $c_f(e) = c(e) - f(e)$
- $G_f = (V, E_f)$ označuje *sieť rezerv (residual network)* G vzhľadom k f

Algoritmus tiež používa funkciu $h: V \rightarrow \mathbb{N}$, ktorá označuje tzv. *výšku vrcholu (label)*, ktorá spĺňa:
 $h(u) \leq h(v) + 1$ pre všetky $(u, v) \in E_f$, $h(s) = |V|$, $h(t) = 0$

Inicializácia: $h(s) = |V|$, $h(v) = 0$ pre $v \neq s$

Vytvoríme sieť rezerv z danej siete vypočítaním rezerv a pridaním spätných hrán

Nastavíme $f(s, v) = c(s, v)$ pre každý vrchol v pripojený hranou k s

Operácie:

$\text{push}(u, v)$: Prevedenie prebytku po hrane (u, v)

$\Delta = \min(x_f(u), r(u, v))$

$r(u, v) = r(u, v) - \Delta$

$r(v, u) = r(v, u) + \Delta$

$x_f(u) = x_f(u) - \Delta$

$x_f(v) = x_f(v) + \Delta$

$\text{relabel}(v)$: Zvýšenie vrcholu

$h(v) = h(v) + 1$

Algoritmus:

While existuje vrchol u : $x_f(u) > 0$:

 if existuje hrana (u, v) : $r(u, v) > 0$ a $h(u) > h(v)$

$\text{push}(u, v)$

 else

$\text{relabel}(u)$

Implementácia

Reprezentácia dát

Typ Node si uchováva informáciu o jednej hrane: jej unikátne číslo, výšku a prebytok.

Typ Edge uchováva informáciu o jednej hrane siete rezerv: číslo začiatočného vrcholu, číslo koncového vrcholu, kapacitu hrany a rezervu hrany.

Typ Graph uchováva informáciu o sieti: zdroj, stok, zoznam vrcholov a zoznam hrán.

Prehľad funkcií

Hlavnou funkciou programu je funkcia `goldberg`, ktorá berie graf, inicializuje ho a volá funkciu `pushRelabel`, kým existuje v sieti nejaký vrchol s prebytkom.

Funkcia `pushRelabel` vykonáva jeden krok algoritmu: pokúsi sa nájsť vrchol s prebytkom (pomocou funkcie `nodesWithExcess`), ak ho nenájde vráti pôvodný graf. Ak taký vrchol nájde, potom zoberie prvý nájdený a pokúsi sa nájsť hranu v sieti rezerv, ktorá má rezervu a "klesá". Ak takú nájde potom vráti upravený graf po operácií push pozdĺž prvej takej nájdenej hrany. Ak takú hranu nenájde, potom vráti upravený graf po operácií relabel na nájdenom vrchole s prebytkom.

Funkcia `initialize` inicializuje sieť rezerv: volá funkcie `initializePreFlow` a `transferFlowSource`.

Funkcia `initializePreFlow` nastaví výšku zdroja na počet vrcholov a jeho prebytok na dostatočne veľkú hodnotu (súčet kapacít všetkých hrán v grafe) a pridá hranu (v, u) s rovnakou kapacitou a nulovou rezervou pre každú hranu (u, v) , pokiaľ ešte v grafe nie je $(c(v, u) := c(u, v)$ a $r(v, u) := 0$) za pomoci funkcie `addReverseEdges`.

Funkcia `relabel` berie graf a vrchol a vráti upravený graf, kde je zvýšená výška daného vrcholu o 1. Funkcia `push` berie graf a hranu a vráti upravený graf, kde vykonal jednu operáciu push pozdĺž danej hrany.

Funkcia `numToNode` berie zoznam vrcholov a číslo, vráti `Just`(vrchol s daným číslom) alebo `Nothing`, pokiaľ žiadny vrchol také číslo nemá. Na to používa pomocnú funkciu `find`.

Do programu sú tiež vstavané pomocné funkcie na testovanie: funkcia `nthIteration` berie graf a číslo, vracia výsledný graf po n iteráciách Goldbergovho algoritmu.

Testovacie dáta

Program obsahuje dve siete pre testovanie. Graf `gr` je jednoduchá sieť s piatimi vrcholmi a celočíselnými kapacitami. Funkcia `t1n` resp. `t1e` vypíše vrcholy resp. hrany grafu `gr` po ukončení goldbergovho algoritmu. Graf `gr2` je zložitejší, jeho náčrt sa dá nájsť v priloženom súbore `gr2.png`. Má obdobné testovacie funkcie `t2n`, `t2e`. V zozname vrcholov výsledku má zdroj „náhodný“ prebytok, stok má kladný prebytok, kt. je hodnotou maximálneho toku a ostatné vrcholy majú nulový prebytok.