Resolução de sistemas de equações não lineares

AULA 03 – MNUM 2020

Resolução de sistemas de equações não lineares
Picard-peano

1 - Fazer transformação das equações

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - 5x + 1 = 0 & (g_1) \\ x + 3\ln(x) - y^2 = 0 & (g_2) \end{cases}$$

$y = g_1(x,y)$, vamos resolver uma equação em ordem a y

$x = g_2(x,y)$, e a outra em ordem a x

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x} \\ x = -3\ln(x) + y^2 \end{cases}$$

2 – Testar a convergência, substituindo x e y pelo guess (x_0,y_0)

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| < 1 \qquad \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| < 1$$

NOTA: Se a transformação não cumprir o critério de convergência, devem tentar nova transformação!

3 – Aplicar o método, utilizando g_1 e g_2 para calcular novas aproximação a y e x.

x	y	g1(x,y)	g2(x,y)
4	4	4.18	2.86
4.180	2.86		

NOTA: Critério de paragem deve ser respeitado para as duas incógnitas em simultâneo, i.e., só paramos quando a precisão for atingida para as duas incógnitas.

Resolução de sistemas de equações não lineares
Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Aplicável a uma única equação! Utilizamos no cálculo do zero de uma equação simples.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f_1(x_n,y_n) \cdot f'_{2,y}(x_n,y_n) - f_2(x_n,y_n) \cdot f'_{1,y}(x_n,y_n)}{f'_{1,x}(x_n,y_n) \cdot f'_{2,y}(x_n,y_n) - f'_{2,x}(x_n,y_n) \cdot f'_{1,y}(x_n,y_n)} \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{f_2(x_n,y_n) \cdot f'_{1,x}(x_n,y_n) - f_1(x_n,y_n) \cdot f'_{2,x}(x_n,y_n)}{f'_{1,x}(x_n,y_n) \cdot f'_{2,y}(x_n,y_n) - f'_{2,x}(x_n,y_n) \cdot f'_{1,y}(x_n,y_n)} \end{cases}$$

Fórmula a utilizar na resolução de sistemas de equações

Matriz Jacobiana

f_1 – primeira função do sistema
$f'_{1,x}$ – derivada da função f1 em ordem a x
$f'_{1,y}$ – derivada da função f1 em ordem a y
f_1 – primeira função do sistema
$f'_{2,x}$ – derivada da função f1 em ordem a x
$f'_{2,y}$ – derivada da função f1 em ordem a y

Resolução de sistemas de equações não lineares
Método de Newton

Aplicando ao exemplo da aula:

$$\begin{cases} f_1: & 2x^2 + xy - 5x + 1 = 0 \\ f_2: & x + 3\ln(x) - y^2 = 0 \end{cases}$$

$f'_{1,x}$ – derivada da função f1 em ordem a x $\longrightarrow$ $4x - y - 5$

$f'_{1,y}$ – derivada da função f1 em ordem a y $\longrightarrow$ $-x$

$f'_{2,x}$ – derivada da função f1 em ordem a x $\longrightarrow$ $1 + 3/x$

$f'_{2,y}$ – derivada da função f1 em ordem a y $\longrightarrow$ $-2y$

x	y	f1(x,y)	f2(x,y)	$f'_{1,x}$	$f'_{1,y}$	$f'_{2,x}$	$f'_{2,y}$
4	4	-3	-7.84	7	-4	1.75	-8
3.85	2.98						