SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- I) Eliminação Gaussiana
- 2) Khalesky
- 3) Gauss-Jacobi & Gauss-Seidel

Métodos Numéricos FEUP 2020/2021

I - Eliminação Gaussiana

Objetivo é resolver um sistema de equações lineares através da obtenção da matriz triangular superior!

7x + 2y + 6z = 24
4x + 10y + 1z = 27
5x - 2y + 8z = 27

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Incógnitas

independentes [24]

Termos

$$b = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Cálculos efetuados com arredondamento a 3 casas decimais!

X	У	Z	
7	2	6	24
4	10	1	27
5	-2	8	27

Para aplicação do método, o 1° elemento da diagonal tem de ser unitário. Neste caso dividimos a 1ª linha por 7

Agora vamos começar a "zerar" os elementos abaixo do 1° elemento da diagonal.

Para a 2ª linha — multiplicamos a 1ª linha por (-4) e somamos à 2ª linha:

(-4)*1+4=0; (-4)*0.286+10=8.856; (-4)*0.857+1=-2.428; (-4)*3.429+27=13.284;

Para a 3ª linha — multiplicamos a 1ª linha por (-5) e somamos à 3ª linha:

(-5)*1+5=0; (-5)*0.283+(-2)=-3.430; (-5)*0.857+1=3.715; (-5)*3.429+27=9.855;

Agora vamos transformar o 2° elemento da diagonal em 1. Neste caso dividimos a 2ª linha por 8.856!

	0.286		
0.000	1.000	-0.274	1.500
0.000	-3.430	3.715	9.855

Agora vamos a "zerar" os elementos abaixo do segundo elemento da diagonal: Para a 3^a linha – multiplicamos a 1^a linha por (3.430) e somamos à 3^a linha: (3.430)*1-3.430=0; (3.430)*-0.274+(3.715)=2.775; (3.430)*1.5+9.855=15;

Para obter a matriz triangular superior apenas falta transformar o 3° elemento da diagonal em 1. Vamos dividir a 3ª linha por 2.775.

Neste momento temos o sistema inicial bastante simplificado:



$$1x + 0.286y + 0.857z = 3.429$$

$$1y - 0.274z = 1.500$$
Fazendo as substituições de baixo para cima:

1z = 5.405



$$1z = 5.405$$
 $z = 5.405$

$$y - 0.274 \times (5.405) = 1.500$$
 $y = 2.981$

$$x + 0.286(2.981) + 0.857(5.405) = 3.429$$
 $x = -2.056$

I - Eliminação Gaussiana

Estabilidade externa – quando erros nos coeficientes (A+ δ a) e erros nos termos independentes (b+ δ b) provocam desvios nas incógnitas (x+ δ x).

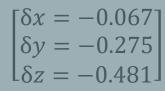
$$A \times \delta x = \delta b - \delta a \times x$$

Fórmula de Cálculo. O objetivo é calcular $\delta x!$ δa e δb são dados do problema, neste caso 0.5 e 0.2 respetivamente!

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2.056 \\ 2.981 \\ 5.405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.165 \\ 3.165 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.965 \\ -2.965 \\ -2.965 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.965 \\ -2.965 \\ -2.965 \end{bmatrix}$$

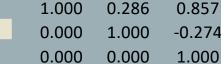
No final temos um problema idêntico ao inicial e por isso podemos aplicar a eliminação de gauss para calcular δx , δy e δz !





Fazendo as substituições de baixo para cima:







-0.424

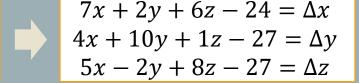
-0.143

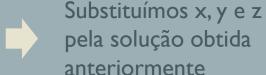
I - Eliminação Gaussiana

Estabilidade interna – erros de arredondamento na solução. Basicamente é verificado através da substituição dos resultados nas equações iniciais, obtendo os resíduos.

$$7x + 2y + 6z = 24$$

 $4x + 10y + 1z = 27$
 $5x - 2y + 8z = 27$





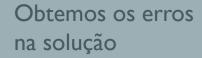
$$x = -2.056$$

 $y = 2.981$
 $z = 5.405$



$$7 \times (-2.056) + 2 \times (2.981) + 6 \times 5.405 - 24 = \Delta x$$

 $4 \times (-2.056) + 10 \times (2.981) + 1 \times (5.405) - 27 = \Delta y$
 $5 \times (-2.056) - 2 \times (2.981) + 8 \times 5.405 - 27 = \Delta z$



$$\Delta x = 0$$

$$\Delta y = -0.009$$

$$\Delta z = -0.002$$

2 -Método de Khalesky

Objetivo é resolver um sistema de equações lineares através da decomposição LU!

$$7x + 2y + 6z = 24$$

 $4x + 10y + 1z = 27$
 $5x - 2y + 8z = 27$

$$7x + 2y + 6z = 24$$

$$4x + 10y + 1z = 27$$

$$5x - 2y + 8z = 27$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando as seguintes fórmulas, será possível calcular as matrizes L e U!

$$L_{i1} = a_{i1}$$

$$U_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \times U_{kj}$$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \times U_{kj} \qquad \qquad U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \times \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \times U_{kj} \right] \qquad \text{necessário calcular uma linha de U!}$$
• É fundamental perceber a lógica dos somatórios!

- O cálculo tem de ser feito de forma ordenada, isto é, por cada coluna de L é necessário calcular uma linha de U!

Sendo que i identifica o número da linha e j o número da coluna!

2 - Método de Khalesky

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_{i1} = a_{i1} \\ U_{1j} = \frac{a_{1j}}{I} \end{array} \qquad L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \times U_{kj} \qquad U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \times \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \times U_{kj} \right]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Começamos pela coluna I de L e linha I de U

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & L_{22} & 0 \\ 5 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se a coluna 2 de L e linha 2 de U

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.428 & L_{33} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resta o último elemento de L

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.429 & 2.774 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = a_{11} = 7$$
 $U_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{7} = 0.286$ $L_{21} = a_{21} = 4$ $U_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{6}{7} = 0.857$ $L_{31} = a_{31} = 5$

$$L_{22} = a_{22} - L_{21} \times U_{12} = 10 - 4 \times 0.286 = 8.857$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31} \times U_{12} = -2 - 5 \times 0.286 = -3.428$$

$$U_{23} = \frac{1}{L_{22}} \times (a_{23} - L_{21} \times U_{13}) = \frac{1}{8.857} \times (1 - 4 \times 0.857) = 0.274$$

$$\begin{vmatrix} L_{33} = a_{33} - (L_{31} \times U_{13} + L_{32} \times U_{23}) \\ = 8 - (5 \times 0.857 + (-3.428) \times 0.274) = 8.857 \end{vmatrix}$$

Já temos L e U completas!

2 - Método de Khalesky

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Agora vamos dar um passo intermédio onde calculamos Y (uma variável "temporária").

$$L \times Y = b$$

Fazendo as contas de cima para baixo:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.429 & 2.774 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \times Y1 = 24 \\ 4 \times Y2 + 8.857 \times Y3 = 27 \\ 5 \times Y1 - 3.429 \times Y2 + 2.774 \times Y3 = 27 \\ 5 \times Y1 - 3.429 \times Y2 + 2.774 \times Y3 = 27 \\ \end{bmatrix}$$

$$Y1 = 3.429 \\ Y2 = 1.500 \\ Y3 = 5.407$$

Finalmente utilizamos Y e U para calcular x (incógnitas)

$$U \times x = Y$$

Fazendo as contas de baixo para cima:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.249 \\ 1.500 \\ 5.407 \end{bmatrix}$$

$$x + 0.286y + 0.857z = 3.429$$

$$y - 0.274z = 27$$

$$z = 5.407$$

$$x = -2.058$$

$$y = 2.983$$

$$z = 5.407$$

3 - Métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

Resolução de sistema de equações lineares através de cálculo iterativo, partindo de valores iniciais!

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_2 + 5x_3 = 5$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

Método de Gauss - Jacobi

$$x_1^k = \frac{7 - x_2^{k-1} - x_3^{k-1}}{3}$$

$$x_2^k = \frac{4 - x_1^{k-1} - 2x_3^{k-1}}{4}$$

$$x_3^k = \frac{5 - 2x_2^{k-1}}{5}$$

Método de Gauss - Seidel

$$x_1^k = \frac{7 - x_2^{k-1} - x_3^{k-1}}{3}$$
$$x_2^k = \frac{4 - x_1^k - 2x_3^{k-1}}{4}$$
$$x_3^k = \frac{5 - 2x_2^k}{5}$$

<u>Solução</u>

$$(x_1, x_2, x_3) = (2,0,1)$$

Critério de Paragem:

$$|x|^{k-1} - x|^k | |x|^{k-1} -$$

- k representa o número da iteração!
- No método de Gauss-Jacobi calculamos x1,x2 e x3 com os valores da iteração anterior;
- No método de Gauss-Seidel, só x1 é calculado com os valores da iteração anterior, depois no cálculo de x2 já utiliza o valor de x1 atualizado e no cálculo de x3 já utiliza o valor de x2 atualizado!

Condição de convergência: o coeficiente das incógnitas tem de ser diagonalmente dominante, ou seja, o módulo de cada elemento da diagonal tem de ser superior à soma dos restantes elementos da linha!

Mais exercícios...

- I Dado o seguinte sistema de equações:
 - a) resolva utilizando o método da eliminação gaussiana;
- b) analise a estabilidade interna considerando δa =0.1 e δb =0.05;
 - c) resolva aplicando o método de khalesky;

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 30$$

$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 = 54$$

$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 = 86$$

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 = 126$$

Solução

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -2, 4, 0)$$