SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

1) Eliminação Gaussiana
2) Khalesky
3) Gauss-Jacobi & Gauss-Seidel

I - Eliminação Gaussiana

Objetivo é resolver um sistema de equações lineares através da obtenção da matriz triangular superior!

$$\begin{aligned} 7x + 2y + 6z &= 24 \\ 4x + 10y + 1z &= 27 \\ 5x - 2y + 8z &= 27 \end{aligned}$$

Matriz dos coeficientes / Incógnitas / Termos independentes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Cálculos efetuados com arredondamento a 3 casas decimais!

x	y	z	
7	2	6	24
4	10	1	27
5	-2	8	27

Para aplicação do método, o 1º elemento da diagonal tem de ser unitário. Neste caso dividimos a 1ª linha por 7

1.000	0.286	0.857	3.429
4.000	10.000	1.000	27.000
5.000	-2.000	8.000	27.000

Agora vamos começar a "zerar" os elementos abaixo do 1º elemento da diagonal.
Para a 2ª linha – multiplicamos a 1ª linha por (-4) e somamos à 2ª linha:
(-4)*1+4=0; (-4)*0.286+10=8.856; (-4)*0.857+1=-2.428; (-4)*3.429+27=13.284;
Para a 3ª linha – multiplicamos a 1ª linha por (-5) e somamos à 3ª linha:
(-5)*1+5=0; (-5)*0.283+(-2)=-3.430; (-5)*0.857+1=3.715; (-5)*3.429+27=9.855;

1.000	0.286	0.857	3.429
0.000	8.856	-2.428	13.284
0.000	-3.430	3.715	9.855

Agora vamos transformar o 2º elemento da diagonal em 1.
Neste caso dividimos a 2ª linha por 8.856!

1.000	0.286	0.857	3.429
0.000	1.000	-0.274	1.500
0.000	-3.430	3.715	9.855

Agora vamos a "zerar" os elementos abaixo do segundo elemento da diagonal:
Para a 3ª linha – multiplicamos a 1ª linha por (3.430) e somamos à 3ª linha:
(3.430)*1-3.430=0; (3.430)*-0,274+(3.715)=2.775; (3.430)*1.5+9.855=15;

1.000	0.286	0.857	3.429
0.000	1.000	-0.274	1.500
0.000	0.000	2.775	15.000

Para obter a matriz triangular superior apenas falta transformar o 3° elemento da diagonal em 1. Vamos dividir a 3ª linha por 2.775.

1.000	0.286	0.857	3.429
0.000	1.000	-0.274	1.500
0.000	0.000	1.000	5.405

Neste momento temos o sistema inicial bastante simplificado:

$$1x + 0.286y + 0.857z = 3.429$$

$$1y - 0.274z = 1.500$$

$$1z = 5.405$$

Fazendo as substituições de baixo para cima:

$$1z = 5.405 \qquad z = 5.405$$

$$y - 0.274 \times (5.405) = 1.500 \qquad y = 2.981$$

$$x + 0.286(2.981) + 0.857(5.405) = 3.429 \qquad x = -2.056$$

I - Eliminação Gaussiana

Estabilidade externa – **quando erros nos coeficientes (A+ δa) e erros nos termos independentes (b+ δb) provocam desvios nas incógnitas (x+ δx).**

$$A \times \delta x = \delta b - \delta a \times x$$

Fórmula de Cálculo. O objetivo é calcular δx! δa e δb são dados do problema, neste caso 0.5 e 0.2 respetivamente!

Coluna dos resíduos

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2.056 \\ 2.981 \\ 5.405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.165 \\ 3.165 \\ 3.165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.965 \\ -2.965 \\ -2.965 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.965 \\ -2.965 \\ -2.965 \end{bmatrix}$$

No final temos um problema idêntico ao inicial e por isso podemos aplicar a eliminação de gauss para calcular δx, δy e δz!

7	2	6	-2.965
4	10	1	-2.965
5	-2	8	-2.965

1.000	0.286	0.857	-0.424
4.000	10.000	1.000	-2.965
5.000	-2.000	8.000	-2.965

1.000	0.286	0.857	-0.424
0.000	8.856	-2.428	-1.269
0.000	-3.430	3.715	-0.845

1.000	0.286	0.857	-0.424
0.000	1.000	-0.274	-0.143
0.000	-3.430	3.715	-0.845

1.000	0.286	0.857	-0.424
0.000	1.000	-0.274	-0.143
0.000	0.000	2.775	-1.335

1.000	0.286	0.857	-0.424
0.000	1.000	-0.274	-0.143
0.000	0.000	1.000	-0.481

Fazendo as substituições de baixo para cima:

$$\begin{bmatrix} \delta x = -0.067 \\ \delta y = -0.275 \\ \delta z = -0.481 \end{bmatrix}$$

I - Eliminação Gaussiana

Estabilidade interna – erros de arredondamento na solução. Basicamente é verificado através da substituição dos resultados nas equações iniciais, obtendo os resíduos.

$$\begin{gathered} 7x + 2y + 6z = 24 \\ 4x + 10y + 1z = 27 \\ 5x - 2y + 8z = 27 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 7x + 2y + 6z - 24 = \Delta x \\ 4x + 10y + 1z - 27 = \Delta y \\ 5x - 2y + 8z - 27 = \Delta z \end{gathered}$$

Substituímos x, y e z pela solução obtida anteriormente

$$\begin{gathered} x = -2.056 \\ y = 2.981 \\ z = 5.405 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 7 \times (-2.056) + 2 \times (2.981) + 6 \times 5.405 - 24 = \Delta x \\ 4 \times (-2.056) + 10 \times (2.981) + 1 \times (5.405) - 27 = \Delta y \\ 5 \times (-2.056) - 2 \times (2.981) + 8 \times 5.405 - 27 = \Delta z \end{gathered}$$

Obtemos os erros na solução

$$\begin{gathered} \Delta x = 0 \\ \Delta y = -0.009 \\ \Delta z = -0.002 \end{gathered}$$

2 -Método de Khalesky

Objetivo é resolver um sistema de equações lineares através da decomposição LU!

$$\begin{aligned} 7x + 2y + 6z &= 24 \\ 4x + 10y + 1z &= 27 \\ 5x - 2y + 8z &= 27 \end{aligned} \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando as seguintes fórmulas, será possível calcular as matrizes L e U!

$$L_{i1} = a_{i1} \qquad U_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \times U_{kj} \qquad U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \times \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \times U_{kj} \right]$$

- O cálculo tem de ser feito de forma ordenada, isto é, por cada coluna de L é necessário calcular uma linha de U!
- É fundamental perceber a lógica dos somatórios!

Sendo que i identifica o número da linha e j o número da coluna!

2 - Método de Khalesky

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad L_{i1} = a_{i1} \qquad U_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \qquad L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} \times U_{kj} \qquad U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \times \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \times U_{kj} \right]$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Começamos pela coluna 1 de L e linha 1 de U

$$L_{11} = a_{11} = 7 \qquad U_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{7} = 0.286$$

$$L_{21} = a_{21} = 4$$

$$U_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{6}{7} = 0.857$$

$$L_{31} = a_{31} = 5$$

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & L_{22} & 0 \\ 5 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se a coluna 2 de L e linha 2 de U

$$L_{22} = a_{22} - L_{21} \times U_{12} = 10 - 4 \times 0.286 = 8.857$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31} \times U_{12} = -2 - 5 \times 0.286 = -3.428$$

$$U_{23} = \frac{1}{L_{22}} \times (a_{23} - L_{21} \times U_{13}) = \frac{1}{8.857} \times (1 - 4 \times 0.857) = 0.274$$

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.428 & L_{33} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resta o último elemento de L

$$L_{33} = a_{33} - (L_{31} \times U_{13} + L_{32} \times U_{23})$$
$$= 8 - (5 \times 0.857 + (-3.428) \times 0.274) = 8.857$$

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.429 & 2.774 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos L e U completas!

2 - Método de Khalesky

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 4 & 10 & 1 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{b}= \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Agora vamos dar um passo intermédio onde calculamos Y (uma variável "temporária").

$$L \times Y = b$$

Fazendo as contas de cima para baixo:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 8.857 & 0 \\ 5 & -3.429 & 2.774 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 7 \times Y1 = 24 \\ 4 \times Y2 + 8.857 \times Y3 = 27 \\ 5 \times Y1 - 3.429 \times Y2 + 2.774 \times Y3 = 27 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Y1 = 3.429 \\ Y2 = 1.500 \\ \mathrm{Y}3 = 5.407 \end{array}}$$

Finalmente utilizamos Y e U para calcular x (incógnitas)

$$\mathrm{U} \times x = Y$$

Fazendo as contas de baixo para cima:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.286 & 0.857 \\ 0 & 1 & -0.274 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.249 \\ 1.500 \\ 5.407 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x + 0.286y + 0.857z = 3.429 \\ y - 0.274z = 27 \\ z = 5.407 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = -2.058 \\ y = 2.983 \\ \mathrm{z} = 5.407 \end{array}}$$

3 - Métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

Resolução de sistema de equações lineares através de cálculo iterativo, partindo de valores iniciais!

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

Método de Gauss - Jacobi

$$x_1^k = \frac{7 - {x_2}^{k-1} - {x_3}^{k-1}}{3}$$

$$x_2^k = \frac{4 - {x_1}^{k-1} - 2{x_3}^{k-1}}{4}$$

$$x_3^k = \frac{5 - 2{x_2}^{k-1}}{5}$$

Método de Gauss - Seidel

$$x_1^k = \frac{7 - {x_2}^{k-1} - {x_3}^{k-1}}{3}$$

$$x_2^k = \frac{4 - {x_1}^{k} - 2{x_3}^{k-1}}{4}$$

$$x_3^k = \frac{5 - 2{x_2}^{k}}{5}$$

Solução

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (2,0,1)}$$

Critério de Paragem:

$|x1^{k-1} - x1^{k}|$ & $|x2^{k-1} - x2^{k}|$ & $|x3^{k-1} - x3^{k}| < 10^{-5}$

- k representa o número da iteração!
- No método de Gauss-Jacobi calculamos x1,x2 e x3 com os valores da iteração anterior;
- No método de Gauss-Seidel, só x1 é calculado com os valores da iteração anterior, depois no cálculo de x2 já utiliza o valor de x1 atualizado e no cálculo de x3 já utiliza o valor de x2 atualizado!

Condição de convergência: o coeficiente das incógnitas tem de ser diagonalmente dominante, ou seja, o módulo de cada elemento da diagonal tem de ser superior à soma dos restantes elementos da linha!

Mais exercícios…

1 – Dado o seguinte sistema de equações:

a) resolva utilizando o método da eliminação gaussiana;

b) analise a estabilidade interna considerando δa=0.1 e δb=0.05;

c) resolva aplicando o método de khalesky;

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 &= 30 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 &= 54 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 &= 86 \\ 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 &= 126 \end{aligned}$$

Solução

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -2, 4, 0)}$$