

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$, *Труды МИАН*, 2019, том 306, 83–99

DOI: 10.4213/tm3980

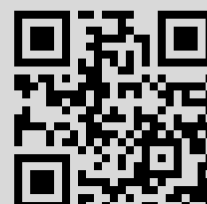
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 86.110.96.133

5 июля 2023 г., 18:17:49



УДК 517.958+517.928.2

Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ *

С. Ю. Доброхотов^{а,б}, В. Е. Назайкинский^{а,б}

Поступило 12.10.2018; после доработки 24.01.2019; принято к публикации 31.05.2019

*Памяти Василия Сергеевича Владимирова
в 95-ю годовщину его рождения*

Получены формулы, выражающие асимптотические собственные функции вырождающегося на концах отрезка оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ через модифицированный канонический оператор Маслова, ранее введенный авторами.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm3980>

ВВЕДЕНИЕ

К волновому уравнению

$$\eta_{tt} - \nabla(D(x)\nabla\eta) = 0, \quad (1)$$

вырождающемуся на границе ∂X области X пространства \mathbb{R}^n , в которой оно рассматривается, приводит, например, линеаризация уравнений мелкой воды в задаче о распространении и набегах на пологий берег длинных волн (таких, как волны цунами) [28, 6, 23]. Здесь $D(x)$ — глубина бассейна в точке x ; относительно нее предполагается, что она обращается в нуль всюду на границе ∂X , которая, таким образом, играет роль берега (скорость распространения волн равна $\sqrt{gD(x)}$, где g — ускорение свободного падения; мы используем систему единиц, в которой $g = 1$). Будем предполагать, что функция $D(x)$ гладкая в замыкании области X и имеет на ∂X нуль первого порядка; с физической точки зрения эти условия означают, что дно бассейна гладкое и полого подходит к берегам под ненулевым углом с горизонталью. Напомним, что из-за вырождения на границе классические краевые условия (типа условий Дирихле или Неймана) на ∂X не описывают области определения, на которых оператор $-\langle \nabla, D(x)\nabla \rangle$ самосопряжен в $L^2(X)$, и не приводят к корректным задачам для уравнения (1). Вопрос о задании краевых условий для вырождающихся операторов изучался во многих работах (см., например, монографию Олейник и Радкевича [22] и приведенную там библиографию). Один из возможных вариантов, естественный с точки зрения теории волн на воде, состоит в том, чтобы потребовать ограниченность интеграла энергии [30, § 33, п. 1], т.е. использовать расширение по Фридрихсу (см. [5, гл. 10, § 3]) минимального оператора, соответствующего дифференциальному выражению $-\langle \nabla, D(x)\nabla \rangle$. Им мы и будем пользоваться. Отметим, что представляют

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10282).

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

^бМосковский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия.

E-mail: dobr@ipmnet.ru (С.Ю. Доброхотов), nazaikinskii@yandex.ru (В.Е. Назайкинский).

интерес и другие самосопряженные расширения. Например, они полезны в задачах о спектральных сериях оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения или на трехмерном сферически симметричном многообразии [24, 25].

Естественно возникающие для уравнения (1) задачи содержат большой параметр — отношение длины волны к горизонтальному размеру бассейна, так что представляют интерес их асимптотические решения. Систематическое применение квазиклассических методов для построения таких решений и связанных с особыми траекториями гамильтоновых систем началось с работы Вукашина и Жевандрова [31] (см. также [33]), в которой был рассмотрен случай $n = 1$. Идеи этой работы были обобщены и развиты в статьях [9–12, 20, 7, 1], где ассоциированные с уравнением (1) лагранжевы многообразия (см. [3]) были регуляризованы с помощью подходящего канонического преобразования, а схема канонического оператора Маслова [17–19] была соединена с квантованием Фока [15] этого канонического преобразования (отметим, что квантованное преобразование оказывается преобразованием Ганкеля). Результатом явилась общая конструкция модифицированного канонического оператора (см. [21]), доставляющего асимптотические решения задач такого рода для уравнений типа (1).

Что касается приложений, в указанных выше работах в основном исследуется задача Коши для уравнения (1). Между тем значительный интерес представляет и задача о гармонических по времени решениях; например, они описывают сейши (стоячие волны) в протяженных бассейнах. Эта задача есть не что иное, как задача о собственных частотах и собственных функциях пространственного оператора $-\langle \nabla, D(x) \nabla \rangle$ в уравнении (1). Именно ей и посвящена настоящая работа. Мы ограничиваемся случаем $n = 1$; случай произвольного n будет рассмотрен в другой работе. Таким образом, речь идет о спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора $L = -\frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx}$ на отрезке $[a, b]$, где гладкая на этом отрезке функция $D(x)$ положительна на интервале (a, b) и имеет простые нули в точках a и b . Точная формулировка задачи приведена в разд. 1, и там же сформулирован основной результат — теорема 1.3.

В разд. 2 приведен численный пример, иллюстрирующий конструкцию.

Асимптотикам для обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками посвящена обширная литература (см., например, монографии [14, 26] и приведенные там ссылки). Соответствующие методы, разумеется, позволяют исследовать рассматриваемую спектральную задачу (и в разд. 3 мы доказываем теорему 1.3 этими методами), однако на многомерный случай ($n > 1$) они автоматически не переносятся. В противоположность этому конструкция асимптотических решений с помощью модифицированного канонического оператора следует одной и той же схеме независимо от размерности. Она имеет еще и то преимущество, что окончательные вычислительно эффективные формулы для асимптотического решения получаются не подбором специального анзаца с последующей подстановкой в уравнение в каждом конкретном случае, а упрощением раз и навсегда доказанных общих формул. Эти два подхода находятся друг к другу в таком же отношении, как канонический оператор Маслова к методу Лангера сшивки асимптотических разложений (см., например, [27, Sect. III.3]) с использованием эталонных уравнений, таких как уравнение Эйри, при решении задач с точками поворота. (По поводу метода сращивания асимптотических разложений см. также [16].)

В разд. 4, 5 мы строим асимптотические квазиклассические собственные функции оператора L при больших значениях спектрального параметра с помощью канонического оператора Маслова. Стандартная схема такой конструкции изложена, например, в [17–19]. Асимптотики строятся по лагранжевым многообразиям, лежащим на поверхности уровня классического гамильтониана задачи — главного символа исходного дифференциального оператора — и автоматически инвариантны относительно гамильтонова векторного поля (см., например, [19, § 8.2]). (В одномерной задаче такое многообразие есть просто линия уровня классического гамильтониана; если она компактна, то это одномерный тор Лиувилля, см. [3, § 49].) Из семейства

компактных инвариантных лагранжевых многообразий выбираются многообразия, удовлетворяющие условиям квантования [2], и асимптотические собственные функции получаются применением канонического оператора к функциям на этих многообразиях, тождественно равным единице.

К сожалению, непосредственно применить эту схему к нашей задаче нельзя по следующим причинам. Гамильтониан, соответствующий оператору L , имеет вид $H(x, p) = p^2 D(x)$, и линия уровня $\{(x, p): H(x, p) = 1\}$ *некомпактна* (она состоит из двух компонент, уходящих по импульсу на $\pm\infty$ при $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow b$, причем уход в системе Гамильтона происходит за конечное время, т.е. не выполнено условие “полноты потока”). Сама по себе некомпактность лагранжева многообразия еще не является, вообще говоря, препятствием к построению на нем канонического оператора Маслова: хотя основные монографии, излагающие его теорию, определяют его для случая компактных лагранжевых многообразий (или по крайней мере только на функциях с компактным носителем на лагранжевом многообразии), все основные конструкции без особого труда переносятся на случай, когда проекция лагранжева многообразия на конфигурационное пространство — пространство переменных x — является собственной (т.е. полный прообраз любого компактного множества при этой проекции компактен). Однако в нашем случае и последнее условие не выполнено (например, некомпактен прообраз самого отрезка $[a, b]$); именно поэтому обычный канонический оператор Маслова не позволяет получить асимптотическое решение рассматриваемой задачи и встает вопрос о его модификации, который был решен в цитированных выше работах [9–12, 20, 7, 1].

Основная геометрическая идея модифицированного канонического оператора состоит в том, чтобы компактифицировать рассматриваемое лагранжево многообразие, добавив к нему определенным образом “точки на бесконечности”. Разумеется, проделать это нужно с сохранением лагранжевости, а значит, нужно не только расширить само лагранжево многообразие, но и вложить фазовое пространство в более широкое симплектическое пространство — новое фазовое пространство Φ , содержащее такие точки на бесконечности. Вся эта конструкция применительно к конкретной рассматриваемой задаче подробно описывается в разд. 4. Здесь отметим только, что точки, добавляемые при компактификации лагранжева многообразия, оказываются фокальными точками проекции лагранжева многообразия на отрезок $[a, b]$ (точками, где ее дифференциал вырождается), т.е. в терминологии книги [4] *лагранжевыми особенностями*. В [4], впрочем, рассматриваются только лагранжевы особенности в стандартном фазовом пространстве — кокасательном расслоении. Наше же новое фазовое пространство не изоморфно стандартному (в частности, оно не является локально тривиальным расслоением над конфигурационным пространством), так что эти лагранжевы особенности уместно назвать *нестандартными*. Соответственно их образ при проекции — граница $\{a, b\}$ отрезка $[a, b]$ — представляет собой *нестандартную каустическую*.

В окрестности каждой из указанных фокальных точек на фазовом пространстве Φ имеются естественные канонические координаты (доставляемые самой его конструкцией). Они связаны со стандартными координатами (x, p) каноническим преобразованием, имеющим особенность в слое над соответствующей точкой границы. Квантованное (по Фоку) обратное каноническое преобразование оказывается одной из форм преобразования Ганкеля; локальные асимптотические решения получаются применением этого преобразования к быстро осциллирующим экспонентам. Полученные в результате представления локальных асимптотических решений с помощью осциллирующих по большому параметру интегралов специального вида удается вычислить, пользуясь результатами работы [8], и в итоге получаются два квазиклассических асимптотических решения, выраженных через функцию Бесселя сложного аргумента; одно из них годится всюду, кроме окрестности точки a , а другое — всюду, кроме окрестности точки b . Условие квантования гарантирует согласованность этих двух асимптотических решений на их общей области определения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

На отрезке $[a, b]$ рассмотрим задачу

$$L\eta = \omega^2\eta, \quad L = -\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}, \quad (1.1)$$

относительно неизвестной функции $\eta = \eta(x)$ и числа $\omega \geq 0$ (собственной частоты), где функция $D(x)$ обладает следующими свойствами: $D(x) \in C^\infty([a, b])$, $D(x) > 0$ на интервале (a, b) , $D(a) = D(b) = 0$ и $D'(a)D'(b) < 0$. Оператор L в соответствии со сказанным выше во введении будем понимать как расширение по Фридрихсу в пространстве $L^2([a, b])$ оператора, задаваемого дифференциальным выражением $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ на пространстве $C_0^\infty((0, 1))$. Эквивалентным образом можно определить оператор L как замыкание в $L^2([a, b])$ оператора, порождаемого указанным дифференциальным выражением на пространстве $C^\infty([0, 1])$ (см., например, [10, предложение 1], где это утверждение доказано для модельного оператора в двумерном случае).

Задача (1.1) описывает стоячие волны частоты ω в одномерном бассейне переменной глубины $D(x)$. Нас интересуют ее асимптотические решения при больших ω . Дадим прежде всего соответствующее

Определение 1.1. Последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ положительных чисел, стремящуюся к бесконечности, будем называть *асимптотической серией собственных частот* задачи (1.1), если существует последовательность $\{\eta_n(x)\}_{n=1}^\infty$ функций из области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L таких, что

$$\|\eta_n\|_{L^2([a, b])} = \Theta(1), \quad \|L\eta_n - \omega_n^2\eta_n\|_{L^2([a, b])} = O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

(Напомним, что запись $f = \Theta(g)$ означает, что в указанной области изменения переменных и параметров отношение f/g равномерно ограничено сверху и снизу положительными постоянными.) Функции $\eta_n(x)$ будем называть *асимптотическими собственными функциями* задачи (1.1) (и оператора L).

Следующее предложение, обосновывающее содержательность понятия асимптотической серии собственных частот, по существу является частным случаем теоремы 2.6 из [19, гл. VIII], и потому его доказательство мы опускаем.

Предложение 1.2. Если $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ — серия асимптотических собственных частот задачи (1.1), то существуют собственные частоты $\bar{\omega}_n$ этой задачи такие, что

$$\bar{\omega}_n = \omega_n + O\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Сформулируем теперь наш основной результат. Определим функцию (действие)

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{D(\xi)}}, \quad a \leq x_0, x \leq b. \quad (1.4)$$

Так как нули функции $D(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$ простые, интеграл (1.4) всегда сходится, причем функции $S(a, x)/\sqrt{D(x)}$ и $S(x, b)/\sqrt{D(x)}$ гладкие на полуинтервалах $[a, b)$ и $(a, b]$ соответственно.

Теорема 1.3. Последовательность чисел

$$\omega_n = \frac{\pi}{S(a, b)} \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

является асимптотической серией собственных частот задачи (1.1). Соответствующие асимптотические собственные функции $\eta_n(x)$ можно выбрать таким образом, чтобы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ имели место соотношения

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi\omega_n} J_0(\omega_n S(a, x)) \left(\frac{S(a, x)}{\sqrt{D(x)}} \right)^{1/2} + \hat{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right) & \text{при } x \in [a, b - \varepsilon], \\ (-1)^n \sqrt{2\pi\omega_n} J_0(\omega_n S(x, b)) \left(\frac{S(x, b)}{\sqrt{D(x)}} \right)^{1/2} + \hat{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right) & \text{при } x \in [a + \varepsilon, b], \end{cases} \quad (1.6)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а выражение $\hat{O}(\omega_n^{-1})$ понимается следующим образом: мы пишем $f_n(x) = \hat{O}(\omega_n^{-1})$ при $x \in K$, если при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ существует не зависящая от n постоянная C_k такая, что

$$\left| \left(\omega_n^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k f_n(x) \right| \leq C_k \omega_n^{-1}, \quad x \in K, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

2. ПРИМЕР

Проиллюстрируем теорему численным примером. Все величины будем предполагать безразмерными, причем $g = 1$, $a = -1$, $b = 1$, а задающая глубину функция $D(x)$ определяется формулой

$$D(x) = 0.3(1 - x^2)(x^2 + 0.179x + 0.597). \quad (2.1)$$

График функции $-D(x)$ показан на рис. 1. На рис. 2 изображены асимптотические собственные функции различных порядков n , построенные в соответствии с формулами (1.6), а на рис. 3 — в более крупном масштабе поведение асимптотических собственных функций вблизи левого конца отрезка $[-1, 1]$. Из этих рисунков видно, что, в то время как вдали от концов отрезка асимптотические собственные функции остаются ограниченными ($O(1)$) с ростом номера и соответственно частоты, вблизи концов отрезка их значения растут с ростом номера n . Значения асимптотических собственных функций η_n для $n = 1, \dots, 100$ на левом конце отрезка показаны на рис. 4. Они растут с ростом n как $\sqrt{n} \asymp \sqrt{\omega_n}$, и мы можем заключить, что “каустика” специального типа на границе отрезка в этой задаче является в некотором смысле более сильной, чем каустика, связанная с простыми точками поворота в квантовомеханических задачах — там каустике отвечает функция Эйри, и значения ψ -функции на каустике растут не быстрее $h^{-1/6}$ (где h — постоянная Планка; в нашей задаче ее аналогом служит величина ω^{-1}).

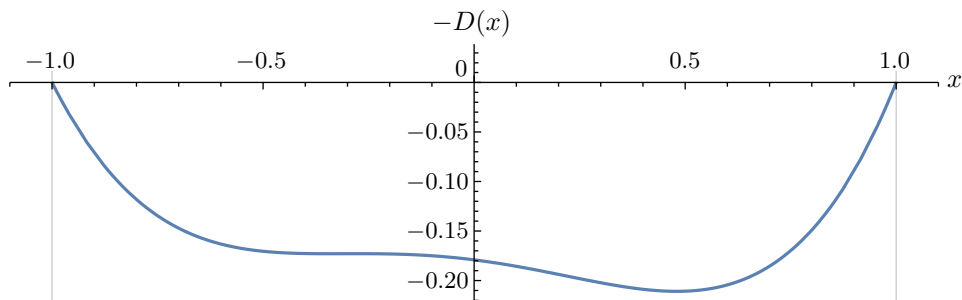


Рис. 1. Дно бассейна

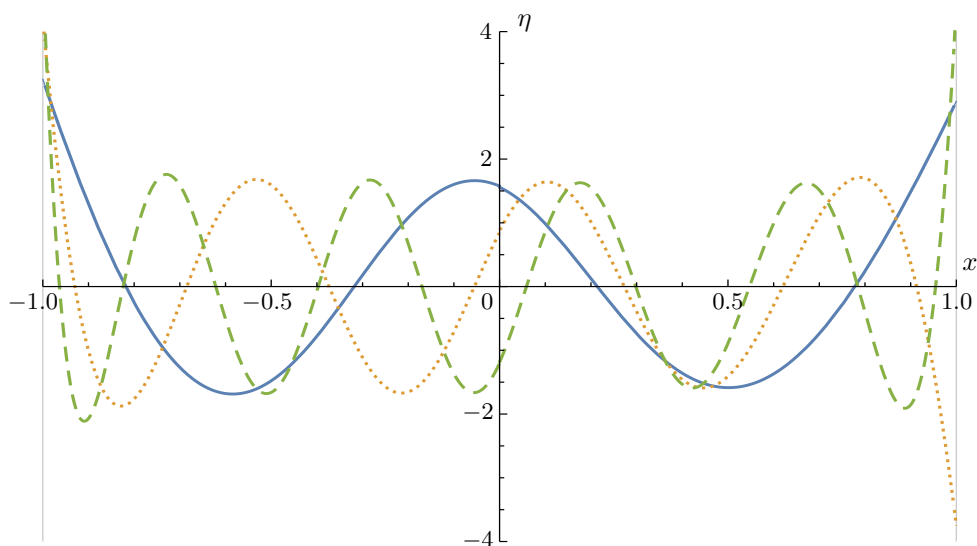


Рис. 2. Асимптотические собственные функции 4-го порядка (сплошная линия), 7-го порядка (пунктирная линия) и 10-го порядка (штриховая линия)

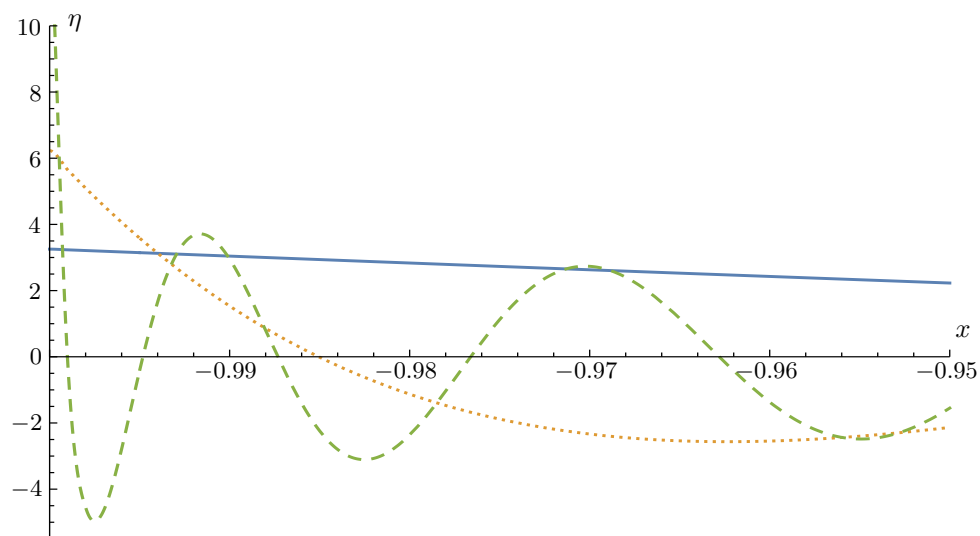


Рис. 3. Асимптотические собственные функции 4-го порядка (сплошная линия), 16-го порядка (пунктирная линия) и 64-го порядка (штриховая линия) вблизи левого конца отрезка

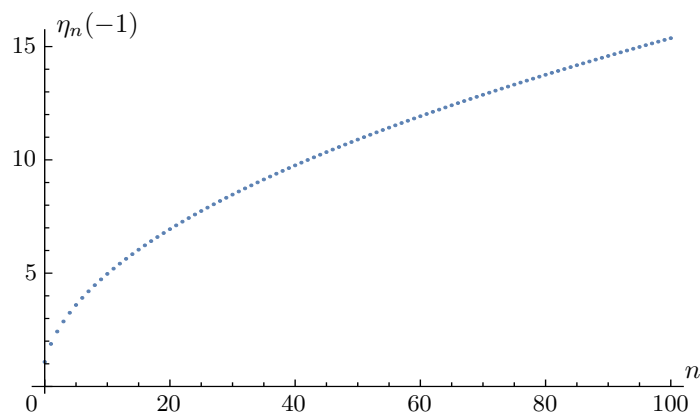


Рис. 4. Значения собственных функций η_n , $n = 1, \dots, 100$, в левом конце отрезка

3. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

После того как формулы (1.6) для асимптотических собственных функций $\eta_n(x)$ задачи (1.1) предъявлены (неважно, выведены они тем или иным образом или угаданы), доказать теорему 1.3 проще всего непосредственными вычислениями. Тем не менее приведем сначала элементарный вывод этих формул (близкие рассуждения для сходной задачи имеются в [14, гл. IV, § 5]). Для этого воспользуемся методом эталонных уравнений [26, гл. II, § 3].

1. Рассмотрим прежде всего следующее модельное уравнение на полупрямой:

$$(x\eta'(x))' + \omega^2\eta = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty). \quad (3.1)$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что при всяком вещественном ω оно имеет гладкое в нуле точное решение

$$\eta(x) \equiv \eta(x, \omega) = J_0(2\omega\sqrt{x}).$$

Это связано с тем, что замена $\eta(x) = v(2\omega\sqrt{x})$ сводит уравнение (3.1) к уравнению Бесселя

$$v''(z) + \frac{v'(z)}{z} + v(z) = 0. \quad (3.2)$$

2. Рассмотрим теперь общее уравнение (1.1) на полуинтервале $[a, b]$ и попытаемся асимптотически привести его подходящей заменой к эталонному уравнению (3.2). Рассуждая по аналогии с выводом в [26, гл. II, § 3, п. 6] анзаца Черри для уравнения с регулярной особенностью $y'' + [\omega^2 Q(x)/x + (1 - m^2)/(4x^2)]y = 0$, будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\eta(x) \equiv \eta(x, \omega) = \varphi(x)v(\omega S(x)), \quad (3.3)$$

где $S(x)$ и $\varphi(x)$ — подлежащие определению функции на полуинтервале $[a, b]$. Подставляя анзац (3.3) в уравнение (1.1), получаем (аргументы у всех функций, кроме v , опущены)

$$(D\eta')' + \omega^2\eta = \omega^2\varphi \left\{ v''(\omega S)[(S')^2 D] + \frac{v'(\omega S)}{\omega S} \left[D'SS' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} DSS' + DSS'' \right] + v(\omega S) \right\} + R,$$

где в R вошли члены, в которых функция v не продифференцирована ни разу. Чтобы равенство нулю выражения в фигурных скобках превратилось в уравнение Бесселя (3.2) для $v(\xi)$, очевидно, необходимо потребовать, чтобы

$$(S')^2 D = 1, \quad D'SS' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} DSS' + DSS'' = 1. \quad (3.4)$$

Из первого уравнения получаем (выбирая для S' положительный знак)

$$S' = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad S'' = -\frac{D'}{2D^{3/2}}, \quad S(x) = S(x_0, x) \quad (3.5)$$

(где x_0 — пока что не определенная постоянная). Подставляя теперь эти соотношения во второе уравнение в (3.4), получаем

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{S'}{S} - \frac{1}{4} \frac{D'}{D},$$

откуда

$$\varphi(x) = C \left(\frac{S(x_0, x)}{\sqrt{D(x)}} \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

где C — ненулевая постоянная. Функция (3.6) должна быть гладкой на всем полуинтервале $[a, b]$, включая точку a , поэтому в (3.5) следует положить $x_0 = a$. Если теперь в качестве

решения уравнения (3.2) взять функцию Бесселя $v(z) = J_0(z)$, то функция (3.3) окажется гладкой на полуинтервале $[a, b)$, так как $S(a, x)$ представляется как произведение квадратного корня $\sqrt{x-a}$ на гладкую положительную функцию, а функция Бесселя $J_0(z)$ четна. Итак, мы получили требуемый анзац решения на $[a, b)$; аналогичные рассуждения можно применить и на полуинтервале $(a, b]$. Резюмируя сказанное в данном пункте, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.1. *Функции*

$$\begin{aligned} u_1(x, \omega) &= \sqrt{2\pi\omega} J_0(\omega S(a, x)) \left(\frac{S(a, x)}{\sqrt{D(x)}} \right)^{1/2}, & x \in [a, b), \\ u_2(x, \omega) &= (-1)^n \sqrt{2\pi\omega} J_0(\omega S(x, b)) \left(\frac{S(x, b)}{\sqrt{D(x)}} \right)^{1/2}, & x \in (a, b], \end{aligned} \quad (3.7)$$

удовлетворяют на соответствующих полуинтервалах уравнениям

$$\begin{aligned} Lu_j - \omega^2 u_j &= R_j, & j = 1, 2, \\ R_1 &= \sqrt{\omega} J_0(\omega S(a, x)) Q_1(x), & R_2 = \sqrt{\omega} J_0(\omega S(x, b)) Q_2(x), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где Q_1 и Q_2 — не зависящие от ω гладкие функции на $[a, b)$ и $(a, b]$ соответственно.

3. Докажем теперь, что при выполнении условий квантования (1.5) функции u_1 и u_2 мало отличаются друг от друга на их общей области определения.

Лемма 3.2. *Пусть $K \Subset [a, b]$. Тогда $u_1(x, \omega_n) - u_2(x, \omega_n) = \hat{O}(\omega_n^{-1})$ при $x \in K$.*

Доказательство. Существует такая постоянная $C > 0$ (зависящая от множества K), что $S(a, x) \geq C$ и $S(x, b) \geq C$ при $x \in K$. Поэтому аргументы функции Бесселя $J_0(z)$ в формуле (3.7) велики при $x \in K$ и больших ω и мы можем воспользоваться известной асимптотикой функции $J_0(z)$ при больших вещественных z (см., например, [26, гл. I, § 4]):

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

причем оценка $O(1/z)$ выдерживает дифференцирование по z произвольное число раз. Применяя эту формулу, получаем, что на множестве K имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u_1(x, \omega_n) &= \frac{2 \cos(\omega_n S(a, x) - \pi/4)}{\sqrt[4]{D(x)}} + \hat{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right), \\ u_2(x, \omega_n) &= (-1)^n \frac{2 \cos(\omega_n S(x, b) - \pi/4)}{\sqrt[4]{D(x)}} + \hat{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right). \end{aligned}$$

Остается заметить, что в силу условий квантования (1.5)

$$\begin{aligned} \cos\left(\omega_n S(a, x) - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\omega_n S(a, b) - \omega_n S(x, b) - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\omega_n S(a, b) - \frac{\pi}{2} - \omega_n S(x, b) + \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\pi n - \omega_n S(x, b) + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n \cos\left(\omega_n S(x, b) - \frac{\pi}{4}\right). \quad \square \end{aligned}$$

4. Зафиксируем теперь некоторые числа r_1 и r_2 такие, что $a < r_1 < r_2 < b$, и возьмем гладкое разбиение единицы $1 = e_1(x) + e_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ такое, что $e_1(x) = 1$ при $x \in [a, r_1]$, а $e_2(x) = 1$ при $x \in [r_2, b]$. Положим

$$\eta_n(x) = e_1(x) u_1(x, \omega_n) + e_2(x) u_2(x, \omega_n). \quad (3.10)$$

Лемма 3.3. *Функции $\eta_n(x)$ являются асимптотическими собственными функциями задачи (1.1), отвечающими асимптотической серии собственных частот (1.5).*

Доказательство. Несложное вычисление с использованием леммы 3.2 показывает, что

$$\|\eta_n\|_{L^2([a,b])} = \sqrt{2S(a,b)} + O\left(\frac{1}{\omega_n}\right),$$

так что выполнено первое условие в (1.2). Далее,

$$\begin{aligned} (L - \omega_n^2)\eta_n(x) &= e_1(x)(L - \omega_n^2)u_1(x, \omega_n) + e_2(x)(L - \omega_n^2)u_2(x, \omega_n) + \\ &+ [L, e_1(x)](u_1(x, \omega_n) - u_2(x, \omega_n)) = \\ &= e_1(x)R_1(x, \omega_n) + e_2(x)R_2(x, \omega_n) + [L, e_1(x)](u_1(x, \omega_n) - u_2(x, \omega_n)), \end{aligned}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор, а функции $R_1(x, \omega)$ и $R_2(x, \omega)$ определены в лемме 3.1. Коммутатор $[L, e_1(x)]$ представляет собой дифференциальный оператор первого порядка, коэффициенты которого равны нулю вне отрезка $[r_1, r_2]$, а разность $u_1(x, \omega_n) - u_2(x, \omega_n)$ на этом же отрезке есть $\hat{O}(\omega_n^{-1})$ согласно лемме 3.2. Поэтому L^2 -норма третьего слагаемого в последнем равенстве есть $O(1)$. Из явных формул (3.8) для функций $R_1(x, \omega)$ и $R_2(x, \omega)$ и свойств функции Бесселя нетрудно заключить, что и первые два слагаемых имеют L^2 -норму порядка $O(1)$. Таким образом, выполнено второе условие в (1.2). Лемма 3.3 доказана, а вместе с ней и основная теорема 1.3. \square

4. РАСШИРЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА, КОМПАКТИФИКАЦИЯ ЛАГРАНЖЕВА МНОГООБРАЗИЯ И КВАНТОВАННОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В этом и следующем разделах мы покажем, как результаты теоремы 1.3 получаются с помощью модифицированного канонического оператора Маслова (см. [21]). В данном разделе неформально объясняется, каким образом и на основе каких идей строится модифицированный канонический оператор.

Разделим уравнение (1.1) на ω^2 и перепишем его в виде

$$\hat{H}\eta = \eta, \quad \text{где} \quad \hat{H} = \hat{p}D(x)\hat{p}, \quad \hat{p} = -ih\frac{d}{dx}, \quad (4.1)$$

$h = \omega^{-1}$ — малый параметр. Итак, требуется (в квазиклассическом приближении) найти те значения параметра $h \rightarrow 0$, при которых оператор \hat{H} имеет собственное значение 1. Первым шагом решения задачи на собственные значения методом канонического оператора [17–19] является построение лагранжева многообразия¹, лежащего на поверхности уровня отвечающей задаче функции Гамильтона. (Такое многообразие автоматически инвариантно относительно гамильтонова векторного поля.) В рассматриваемом одномерном случае функция Гамильтона имеет вид $H(x, p) = D(x)p^2$, а поверхность уровня $\{(x, p): H(x, p) = 1\}$ есть просто кривая, которая имеет ту же размерность, что и требуемое лагранжево многообразие, а значит, с необходимостью должна совпадать с последним. Итак, мы получаем лагранжево многообразие Λ_0 , задаваемое формулой

$$p = \pm \frac{1}{\sqrt{D(x)}}, \quad x \in (a, b). \quad (4.2)$$

(Для описанного выше примера оно показано на рис. 5.) К сожалению, лагранжево многообразие Λ_0 некомпактно, ибо функции (4.2) имеют в точках a и b особенности, связанные с вырождением оператора \hat{H} на концах отрезка. Более того, проекция этого многообразия на

¹То есть многообразия половинной размерности в фазовом пространстве, на касательном пространстве которого симплектическая форма тождественно равна нулю.

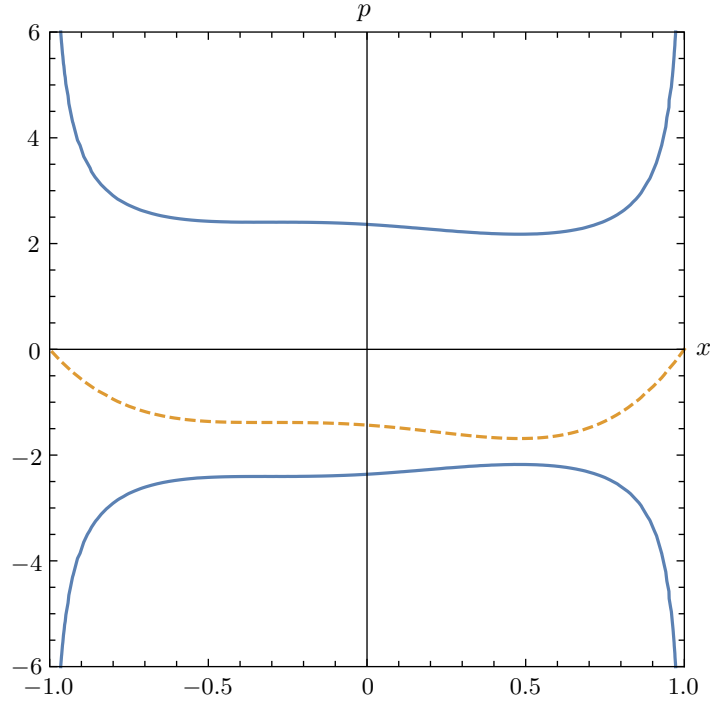


Рис. 5. Сингулярное лагранжево многообразие Λ_0 (сплошная линия) и дно бассейна (штриховая линия)

отрезок $[a, b]$ не является собственной. Именно поэтому “стандартный” канонический оператор тут неприменим и его конструкцию необходимо модифицировать.

Одна из основных идей этой модификации состоит в расширении фазового пространства таким образом, чтобы замыкание Λ многообразия Λ_0 в расширенном пространстве оказалось гладким компактным лагранжевым многообразием без края. Опишем эту процедуру применительно к рассматриваемой задаче. Исходное фазовое пространство есть кокасательное расслоение $T^*(a, b) \simeq (a, b) \times \mathbb{R}$ интервала (a, b) ; координаты на нем обозначим стандартным образом через (x, p) . Рассмотрим сначала левый конец a интервала (a, b) . Введем на $T^*(a, b)$ при малых $x - a > 0$ и больших $|p|$ новые координаты (θ, q) , где $\theta > 0$ и $q \neq 0$, с помощью преобразования $g: T_0^*\mathbb{R}_+ \rightarrow T_0^*\mathbb{R}_+$, $(x, p) \mapsto (\theta, q)$ (где T_0^*M — кокасательное расслоение к M с выброшенным нулевым сечением), задаваемого формулами

$$\theta = p^2(x - a), \quad q = -\frac{1}{p}. \quad (4.3)$$

Обратное преобразование g^{-1} имеет вид

$$x = a + q^2\theta, \quad p = -\frac{1}{q}. \quad (4.4)$$

Преобразование g является каноническим; действительно,

$$\omega^2 \equiv dp \wedge dx = \frac{dq}{q^2} \wedge (2q\theta dq + q^2 d\theta) = dq \wedge d\theta.$$

Фундаментальные же 1-формы в старых и новых координатах отличаются на дифференциал функции $2px = -2q\theta$:

$$\omega^1 \equiv p dx = -\frac{1}{q}(2q\theta dq + q^2 d\theta) = -2\theta dq - q d\theta = q d\theta - 2d(q\theta).$$

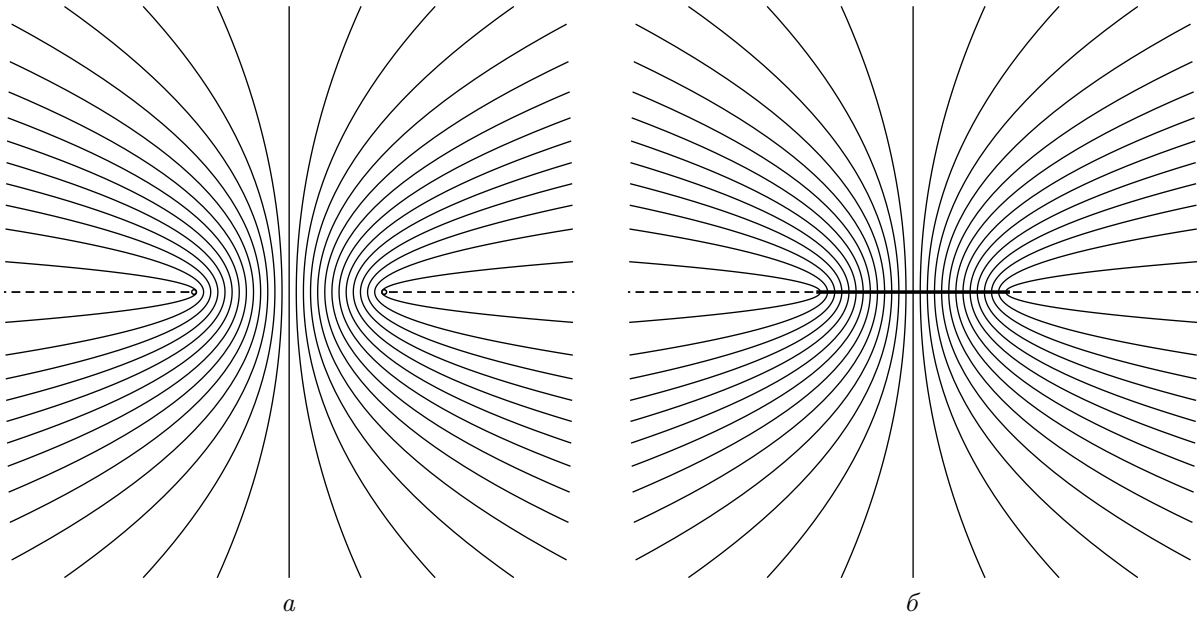


Рис. 6. Фазовое пространство Φ (а) и его проекция на отрезок $[-1, 1]$ (б) в изображении на плоскости переменных (ξ, η) согласно формулам (4.6). Маленькими кружочками обозначены выколотые точки. Тонкие сплошные линии — слои кокасательного расслоения $T^*(0, 1)$. Штриховые линии — добавленные полупрямые (слои над концами -1 и $+1$ отрезка $[-1, 1]$). На рис. б отрезок $[-1, 1]$ (жирная линия) наложен на плоскость $\mathbb{R}_{\xi, \eta}^2$ таким образом, что его внутренность $(-1, 1)$ вкладывается в тотальное пространство кокасательного расслоения $T^*(0, 1)$ как нулевое сечение, а слои этого расслоения пересекают $(-1, 1)$ в точности в тех точках, в которые они переходят при естественной проекции на базу

Расширим фазовое пространство, добавив к нему открытую полупрямую — множество точек, которое в новых координатах (q, θ) , $\theta > 0$, задается уравнением $q = 0$. Аналогичную конструкцию сделаем для правого конца b отрезка $[a, b]$, добавив тем самым к фазовому пространству еще одну полупрямую. Полученное *расширенное фазовое пространство* обозначим через Φ . Очевидно, что $T^*(a, b)$ плотно в Φ и его дополнение

$$\Phi_\infty = \Phi \setminus T^*(a, b) \simeq (0, \infty) \sqcup (0, \infty) \quad (4.5)$$

представляет собой дизъюнктивное объединение двух добавленных “идеальных” полупрямых. Далее заметим, что проекция $T^*(a, b) \rightarrow (a, b)$ в координатах (θ, q) , отвечающих левому (соответственно правому) концу отрезка², задается формулой $(\theta, q) \mapsto a + q^2\theta$ (соответственно $(\theta, q) \mapsto b - q^2\theta$) и продолжается по непрерывности до проекции $\Phi \rightarrow [a, b]$, причем две полупрямые, составляющие Φ_∞ , отображаются в точки a и b .

Опишем пространство Φ наглядно, считая для простоты, что $a = -1$ и $b = 1$.

Предложение 4.1. *Отображение $T^*(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{(\xi, \eta)}^2$, $(x, p) \mapsto (\xi, \eta)$, задаваемое формулами*

$$\xi = x(1 + p^2(1 - x^2)), \quad \eta = p(1 - x^2), \quad (4.6)$$

продолжается по непрерывности до диффеоморфизма $\Phi \rightarrow \mathbb{R}_{\xi, \eta}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ фазового пространства Φ на плоскость с двумя выколотыми точками (рис. 6).

Предложение 4.1 доказывается рутинными вычислениями, которые мы опустим.

²Во избежание недоразумений отметим, что это две разные, друг с другом не связанные системы координат, определенные в двух разных областях на Φ .

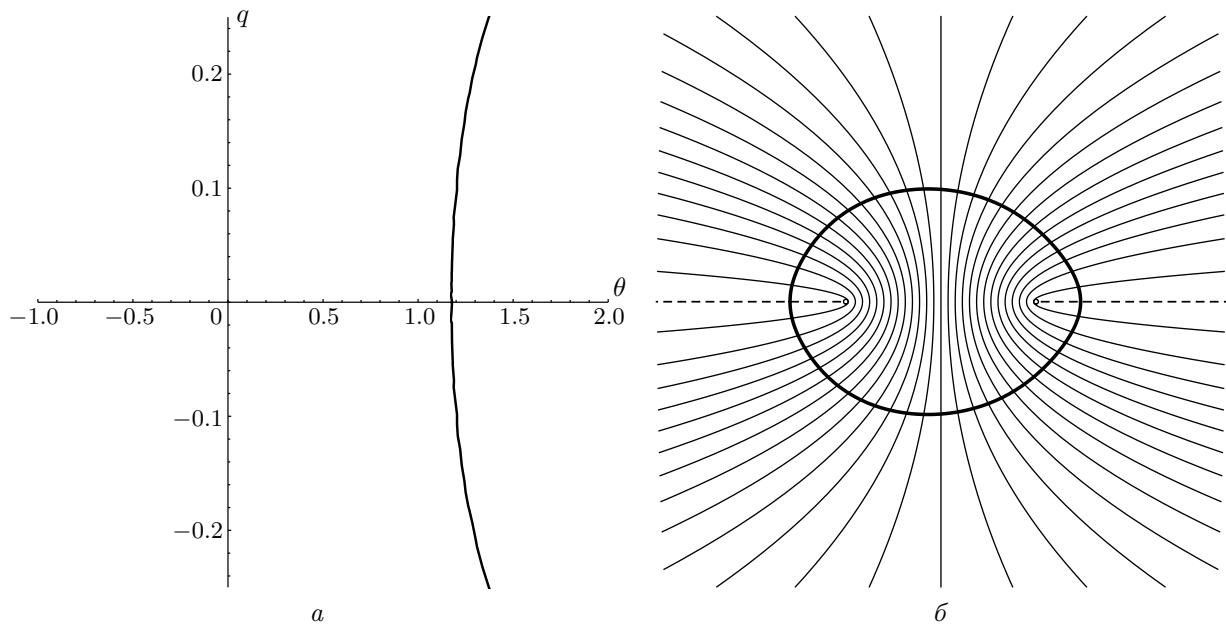


Рис. 7. Компактное лагранжево многообразие $\Lambda \subset \Phi$: a — в координатах (q, θ) , отвечающих левому концу отрезка $[a, b]$; b — в изображении фазового пространства Φ на плоскости (ξ, η)

Нетрудно убедиться в том, что функция Гамильтона продолжается по непрерывности до гладкой функции на фазовом пространстве Φ . Далее, замыкание исходного лагранжево многообразия Λ_0 в пространстве Φ оказывается гладким одномерным лагранжевым многообразием Λ , диффеоморфным окружности. В координатах (ξ, η) оно изображается кривой (рис. 7), которая может быть параметрически задана формулами

$$\xi = t \left(1 + \frac{1 - t^2}{D(t)} \right), \quad \eta = \pm \frac{1 - t^2}{\sqrt{D(t)}}, \quad t \in [-1, 1]. \quad (4.7)$$

Многообразие Λ покрывается четырьмя координатными картами, две из которых (не пересекающиеся с Φ_∞) суть карты с координатой x (они называются *неособыми картами*), а две другие (каждая из которых покрывает одну из двух особых точек) суть карты с соответствующей координатой q (называемые *регулярными особыми картами*). Модифицированный канонический оператор склеивается из локальных канонических операторов в указанных картах. В неособых картах он имеет стандартный вид (см., например, [18]) и задается ВКБ-функциями от переменной x , а в регулярных особых картах строится по схеме, которую мы сейчас опишем неформально.

Если бы локальные асимптотические решения, отвечающие регулярной особой карте, были функциями от переменной θ , то их можно было бы записать через стандартный канонический оператор (поскольку регулярную особую карту можно трактовать как лагранжево многообразие в фазовом пространстве \mathbb{R}^2 с координатами (θ, q) , а его, в свою очередь, как кокасательное расслоение к прямой \mathbb{R} с координатой θ). Разумеется, нам нужны функции от переменной x , а не θ . Чтобы перейти от функций от θ к функциям от x , нужно воспользоваться обратным преобразованием g^{-1} от переменных (θ, q) к переменным (x, p) . Само это преобразование есть преобразование фазового пространства, и к функциям от θ его применить непосредственно невозможно. Для этого нужно воспользоваться *квантованным по Фоку каноническим преобразованием* $T[g^{-1}]$.

Напомним (для одномерного случая) соответствующее определение, введенное в знаменитой статье Фока [15].

Пусть $g: (\theta, q) \mapsto (x, p)$ — каноническое преобразование, заданное невырожденной производящей функцией $S(x, q)$ (т.е. вторая производная $S_{xq}(x, q)$ не обращается в нуль) по формулам

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial q}(x, q), \quad p = \frac{\partial S}{\partial x}(x, q).$$

Тогда квантованное каноническое преобразование $T(g): u(\theta) \mapsto [T(g)u](x)$ есть интегральный оператор

$$[T(g)u](x) = \int K(x, \theta) u(\theta) d\theta$$

с ядром

$$K(x, \theta) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{i(S(x, q) - \theta q)/h} \sqrt{\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial q}(x, q)} dq.$$

Применим это определение к преобразованию g^{-1} , задаваемому формулой (4.4) (для простоты считая, что $a = 0$). Производящую функцию этого преобразования можно взять в виде

$$S(x, q) = -\frac{x}{q},$$

откуда получаем (при соответствующем выборе знаков при извлечении квадратного корня)

$$K(x, \theta) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x/q + \theta q)/h} \frac{dq}{q}.$$

При $x > 0$ и $\theta > 0$ этот интеграл условно сходится как в нуле, так и на бесконечности. Используя формулу Мелера–Сонина (см. [32, § 6.21, Eq. (12)]), нетрудно доказать, что

$$K(x, \theta) = -\frac{i}{h} J_0\left(\frac{2\sqrt{x\theta}}{h}\right). \quad (4.8)$$

Таким образом, преобразование $T(g)$ есть не что иное, как одна из форм преобразования Ганкеля (см. [13, Sect. 8.1]).

Итак, локальные асимптотические решения, отвечающие окрестностям фокальных точек, т.е. регулярным особым картам, представляются в виде преобразования Ганкеля, примененного к функциям от переменной θ , заданным обычным каноническим оператором на многообразии Λ в координатах (θ, q) . В частности, если, как в нашем примере, многообразие Λ в этих координатах хорошо проецируется на ось q , то ответ будет содержать композицию преобразования Ганкеля и преобразования Фурье, примененную к обычной ВКБ-функции (быстро осциллирующей экспоненте, умноженной на некоторую амплитуду) от переменной q . В следующем разделе мы остановимся на этих формулах более подробно.

5. ВЫРАЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЧЕРЕЗ МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Опишем теперь более точно, как строится асимптотическое решение задачи (1.1). Оно дается модифицированным каноническим оператором K_{Λ}^h на лагранжевом многообразии $\Lambda \subset \Phi$, снабженном инвариантной относительно гамильтонова векторного поля мерой $d\tau$. Именно, справедлива следующая

Теорема 5.1. *Модифицированный канонический оператор на Λ существует для последовательности значений $h = 1/\omega_n$ малого параметра h , где ω_n задано формулой (1.5). Функции*

$$\eta_n(x) = [K_\Lambda^{1/\omega_n} 1](x) \quad (5.1)$$

являются асимптотическими собственными функциями задачи (1.1), отвечающими асимптотической серии собственных частот (1.5).

Доказательство. Модифицированный канонический оператор на Λ определен при выполнении условия квантования

$$\frac{2}{\pi h} \int_\gamma \omega^1 \equiv \text{ind } \gamma \pmod{4}$$

для любого цикла γ из набора базисных циклов на многообразии Λ (см. [1, п. 1.4]). На рассматриваемом многообразии Λ , диффеоморфном окружности, имеется единственный базисный цикл γ , заданный самим многообразием Λ , причем $\text{ind } \gamma = 2$. Действительно, согласно [1, п. 1.4] индекс $\text{ind } \gamma$ цикла γ есть сумма индексов пересечения цикла γ с $\Lambda_\infty = \Lambda \cap \Phi_\infty$ и с циклом особенностей многообразия Λ относительно поляризации в Φ , образованной вертикальными прямыми $\{dx = 0\}$ в точках, не лежащих на Φ_∞ , и прямыми $\{dq = 0\}$ в точках из Φ_∞ . Несложно видеть, что цикл особенностей нашего многообразия Λ пуст, а индекс пересечения с Λ_∞ равен 2. Остается заметить, что

$$\int_\gamma \omega^1 = 2S(a, b).$$

Далее, из теоремы о коммутации [21, теорема 6] следует, что

$$(\hat{H} - 1)|_{h=\omega_n^{-1}} \eta_n = -i\omega_n^{-1} [K_\Lambda^{1/\omega_n} P_1 1](x) + \hat{O}(\omega_n^{-2}) = \hat{O}(\omega_n^{-2}),$$

где P_1 — оператор переноса на Λ , представляющий собой в нашем случае оператор дифференцирования вдоль гамильтонова векторного поля (так как субглавный символ оператора \hat{H} , как оператора, записанного в дивергентной форме, равен нулю). Умножая это соотношение на ω_n^2 , получаем второе условие в (1.2). Что касается первого условия в (1.2), то оно следует из стандартного в теории канонического оператора соотношения

$$\|K_\Lambda^h \varphi\|_{L^2([a,b])} = \|\varphi\|_{L^2(\Lambda; d\tau)} + O\left(\frac{1}{h}\right)$$

(где подразумевается, что рассматриваются только те значения параметров, при которых выполнены условия квантования), известного как “почти унитарность” канонического оператора. Теорема доказана. \square

Опишем теперь, как выглядит доставляемое каноническим оператором решение в регулярной особой карте, отвечающей левому концу интервала.

Пусть лагранжево многообразие над $[a, a+r)$, где r достаточно мало, имеет вид $\Lambda = \Lambda_+ \cup \cup \alpha_\infty \cup \Lambda_-$, где α_∞ — точка на бесконечности (т.е. при $q = 0$), а Λ_\pm задаются уравнениями

$$q = \pm \sqrt{D(x)}, \quad x > 0.$$

Определим функции

$$\tau_\pm(x) = \pm S(a, x).$$

Их можно считать функциями на Λ_{\pm} соответственно, и вместе они задают действие τ на Λ , равное нулю в точке α_{∞} . Поскольку многообразие Λ лежит на уровне $\{H(x, p) = 1\}$ гамильтониана $H(x, p) = D(x)p^2$, действие τ (с точностью до постоянной) совпадает с временем вдоль траекторий гамильтоновой системы, и в качестве инвариантной меры на Λ можно взять $d\mu = d\tau$. Будем использовать τ в качестве координаты на Λ и обозначим задающие многообразие Λ в координатах (x, p) и (θ, q) функции через

$$x = X(\tau), \quad p = P(\tau), \quad q = Q(\tau), \quad \theta = \Theta(\tau).$$

Точка α_{∞} покрывается регулярной особой картой U с координатой q . Через $\tau(q)$ и $\theta(q) = \Theta(\tau(q))$ обозначим выражение действия и координаты θ через координату q в карте $U \subset \Lambda$, а через m обозначим индекс Маслова карты U (см. [1, п. 1.7]).

Пусть

$$\theta_{\min} = \min_{\tau \in U} \Theta(\tau), \quad \theta_{\max} = \max_{\tau \in U} \Theta(\tau),$$

и пусть $\chi \in C_0^{\infty}((0, \infty))$ — срезающая функция такая, что

$$\chi(\theta) = 1 \quad \text{при} \quad \theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}].$$

Канонический оператор в регулярной особой карте U задается интегральной формулой [21]

$$[K_{\Lambda}^h A](x) = \frac{e^{i\pi/4 - i\pi m/2}}{(2\pi h)^{1/2} h} \iint J_0\left(\frac{2\sqrt{x\theta}}{h}\right) e^{i[\tau(q) - q(\theta + \theta(q))]/h} \frac{\chi(\theta) A(\tau(q))}{|Q'(\tau(q))|^{1/2}} d\theta dq.$$

Упростим это выражение, следуя вычислениям, проделанным в двумерном случае в [1]. Пользуясь интегральным представлением функции Бесселя

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos \phi} d\phi,$$

перепишем эту формулу в виде

$$[K_{\Lambda}^h A](x) = \frac{e^{i\pi/4 - i\pi m/2}}{(2\pi h)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi h} \iint e^{i[\tau(q) - q(\theta + \theta(q)) + 2\sqrt{x\theta} \cos \phi]/h} \frac{\chi(\theta) A(\tau(q))}{|Q'(\tau(q))|^{1/2}} d\theta dq \right\} d\phi.$$

Вычисление внутреннего интеграла по методу стационарной фазы дает с точностью до младших членов

$$[K_{\Lambda}^h A](x) = \frac{e^{i\pi/4 - i\pi m/2}}{(\pi h)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{i\tau/h} A(\tau) \left| \frac{X(\tau)}{Q(\tau)X'(\tau)} \right|^{1/2} \right\}_{\tau=T(2\sqrt{x} \cos \phi)} d\phi,$$

где

$$T(\sigma) = \begin{cases} \tau_+ \left(\frac{\sigma^2}{4} \right), & \text{если } \sigma > 0, \\ \tau_- \left(\frac{\sigma^2}{4} \right), & \text{если } \sigma \leq 0, \end{cases}$$

а вычисление этого интеграла по методу статьи [8], в свою очередь, приводит к формуле

$$[K_{\Lambda}^h A](x) = [\tilde{K}_U^h A](2\sqrt{x_1}) + [\tilde{K}_U^h A](-2\sqrt{x_1}) + O(h),$$

где оператор \tilde{K}_U^h задается формулой

$$[\tilde{K}_U^h A](\sigma) = e^{i\pi/4 - i\pi m/2} \left| \frac{\pi T(\sigma)}{2hX'(T(\sigma))} \right|^{1/2} \mathbf{J}\left(\frac{T(\sigma)}{h}\right) A(T(\sigma)),$$

в которой

$$\mathbf{J}(r) = J_0(r) + iJ_1(r)$$

(ср. [29]). В итоговой формуле члены, содержащие функцию $J_1(r)$, взаимно уничтожаются, и мы получаем первую формулу в (1.6).

Аналогично получается и вторая. Несложные рассуждения, опирающиеся на метод стационарной фазы, показывают, что эти формулы справедливы не только в окрестности соответствующих концов интервала, но и в указанных в (1.6) областях.

Благодарности. Авторы благодарны А.И. Шафаревичу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Простые асимптотики обобщенного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеge длинных волн на берег // Мат. заметки. 2018. Т. 104, № 4. С. 483–504.
2. Арнольд В.И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1, № 1. С. 1–14.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
4. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений: Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
6. Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. V. 4, N 1. P. 97–109.
7. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 5. С. 710–731.
8. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Об асимптотике интеграла типа Бесселя, имеющего приложения в теории набега волн на берег // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 6. С. 828–835.
9. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B. Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity. I // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17, N 4. P. 434–447.
10. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Тироцци Б. Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 67–90.
11. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B. Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, N 4. P. 389–401.
12. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Толченников А.А. Равномерная асимптотика граничных значений решения линейной задачи о набеge волн на пологий берег // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 5. С. 700–715.
13. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Tables of integral transforms. Based, in part, on notes left by Harry Bateman. New York: McGraw-Hill, 1954. V. 2. (Bateman Manuscript Project. Calif. Inst. Technol.). Рус. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2: Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970.
14. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
15. Фок В.А. О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике // Вестн. Ленингр. ун-та. Физика. Химия. 1959. № 16. С. 67–70.
16. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
17. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.

18. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
19. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.: Наука, 1978.
20. Назайкинский В.Е. Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 153–156.
21. Назайкинский В.Е. Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 261–276.
22. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНТИ, 1971. (Итоги науки. Математика. Мат. анализ. 1969).
23. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996.
24. Ратю Т., Филатова Т.А., Шафаревич А.И. Некомпактные лагранжевы многообразия, соответствующие спектральным сериям оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения // ДАН. 2012. Т. 446, № 6. С. 618–620.
25. Ratiu T.S., Suleimanova A.A., Shafarevich A.I. Spectral series of the Schrödinger operator with delta-potential on a three-dimensional spherically symmetric manifold // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, N 3. P. 326–335.
26. Славянов С.Ю. Асимптотика решений одномерного уравнения Шрёдингера. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
27. Solimeno S., Crosignani B., DiPorto P. Guiding, diffraction, and confinement of optical radiation. Orlando: Acad. Press, 1986. Рус. пер.: Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. М.: Мир, 1989.
28. Stoker J.J. Water waves: The mathematical theory with applications. New York: Interscience, 1957.
29. Synolakis C.E. On the roots of $f(z) = J_0(z) - iJ_1(z)$ // Q. Appl. Math. 1988. V. 46, N 1. P. 105–107.
30. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1981.
31. Vukašinac T., Zhevandrov P. Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9, N 3. P. 371–381.
32. Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1944. Рус. пер.: Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Ч. 1.
33. Zhevandrov P. Edge waves on a gently sloping beach: uniform asymptotics // J. Fluid Mech. 1991. V. 233. P. 483–493.