Чисмодфизпроц. Семестр 6.

1 Уравнение переноса, разностная аппроксимация, характеристики, устойчивость

Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса, с заданными $T, a(x), v(x), f(x)$:

$$u_t - c(x,t)u_x = f(x,t), \quad t \in [0,T], \quad u|_{t=0} = v^0(x). \tag{1.1}$$

Рассмотрим 3 варианта постановки задачи:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x \in \mathbb{R},\\
&(2) \quad c(x) > 0: \quad x \in (-\infty, 0], \quad u|_{x=0} = v^1(t),\\
&(3) \quad c(x) < 0: \quad x \in [0, \infty), \quad u|_{x=0} = v^1(t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим простейшие явные схемы (|_) и (_|). Для этого зафиксируем интервал $x \in [a,b]$, определим $\tau = T/N, t^n = n\tau, n = 0,...,N;$ $x \in [0,R], h = R/M, x_m = mh, m = 0,...,M,$ $c_m^n = c(x_m, t^n), f_m^n = f(x_m, t^n)$.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n, \quad n = 0,...,N-1, \quad m = 0,...,M-1, \tag{1.2}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0, \quad n = 0,...,N-1, \quad m = 1,...,M, \tag{1.3}$$

Для их замыкания нужно поставить начальные условия

$$u_m^0 = v^0(x_m), \quad m = 0,...,M, \tag{1.4}$$

и граничные условия: рассмотрим три варианта (нужно выбрать в зависимости от задачи):

$$u_0^n = u_M^n, \quad n = 1,...,N; \tag{1.5}$$

$$u_M^n = v^1(t^n), \quad n = 1,...,N; \tag{1.6}$$

$$u_0^n = v^1(t^n), \quad n = 1,...,N. \tag{1.7}$$

!!! Обратите внимание: необходимо согласовать (1) начальное и граничное условие (если граничное условие периодично, то и начальное должно быть периодично); (2) граничные условия в разностной задаче и в дифференциальной; (3) выбранная схема должна соответствовать “физике” задачи, а именно направлению распространению характеристик ,определяемых знаком $c(x)$.

Еще можно рассмотреть симметричную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \quad n = 0,...,N-1, \quad m = 1,...,M-1, \tag{1.8}$$

для ее замыкания нужно 2 граничных условия (значения на одной из границ можно определять по схеме (|_) или (_|), в зависимости от границы).

У явных схем могут быть проблемы с устойчивостью, поэтому рассмотрим также неявные схемы:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-c_m^n\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_m^{n+1}}{h}=f_m^n,\quad n=0,...,N-1,\quad m=0,...,M-1, \tag{1.9}$$
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-c_m^n\frac{u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{h}=f_m^n,\quad n=0,...,N-1,\quad m=1,...,M. \tag{1.10}$$

При расчете неявных схем, надо на каждом временном слое n решать систему (СЛАУ) на все числа $u_m^n, m=0,...,M$ сразу. К счастью, это можно сделать методом прогонки (см. [1, глава 2, § 5]), т.к. матрица двухдиагональная.

Задача 1. *Выбрать дифференциальную задачу и соответственно сформулировать разностную задачу с помощью явной и неявной схемы. Посчитать порядок аппроксимации выбранных схем по τ и h (см. [1, глава 5, § 11]), исследовать на устойчивость (см. [1, глава 5, § 12; глава 8, § 25]), запрограммировать, сравнить с точным решением и проанализировать результат. Почему у разностного решения уменьшается амплитуда со временем?*

2 Уравнения матфизики

I. Волновое уравнение.

Рассмотрим волновое уравнение и задачу Коши (I.1) в неограниченной области или начально-краевую задачу (I.2):

$$u_{tt}-(c^2(x)u_x)_x=f(x,t), \tag{2.1}$$
$$u|_{t=0}=u^0(x),\quad u_t|_{t=0}=u^1(x). \tag{2.2}$$

В случае начально-краевой также добавляются граничные условия: Дирихле, Неймана или смешанные. Например, условия Дирихле и Неймана имеют вид соответственно:

$$u|_{x=0}=u^l(t),\quad u|_{x=a}=u^r(t). \tag{2.3}$$
$$u_x|_{x=0}=u^l(t),\quad u_x|_{x=a}=u^r(t). \tag{2.4}$$

Для решения волнового уравнения можно использовать схему (I.a) “крест” (явная, см. [1, гл.8, § 25, пример 7]) или (I.b) “T” (неявная):

$$(I.a)\quad \frac{1}{\tau^2}(u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1})-\Lambda_{xx}^h[u_n^k]=f_k^n,\quad n=1,...,N-1,\quad k=1,...,K-1; \tag{2.5}$$
$$(I.b)\quad \frac{1}{\tau^2}(u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1})-(c_n^k)^2\Lambda_{xx}^h[u_n^{k+1}]=f_k^n,\quad n=1,...,N-1,\quad k=1,...,K-1. \tag{2.6}$$

Здесь разностный оператор второй производной по пространству при постоянном $c(x)=c$ имеет вид

$$\Lambda_{xx}^h[u_n^k]:=\frac{c^2}{h^2}(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k), \tag{2.7}$$

а при переменном см. [1, стр.32, снизу]

$$\widetilde{\Lambda}^h_{xx}[u^k_n] := \frac{1}{h}\left(\frac{(c^k_{n+1/2})^2}{h}(u^k_{n+1}-u^k_n) - \frac{(c^k_{n-1/2})^2}{h}(u^k_n-u^k_{n-1})\right), \quad c^k_{n+1/2} := c(k\tau,(n+1/2)h). \tag{2.8}$$

В любом случае схема дополняется начальными условиями (при $k=1,2$) и граничными условиями. Причем для задачи (I.2) граничные условия определяются физическими условиями (2.3) или (2.4), а для задачи (I.1) – фиктивными граничными условиями. В качестве фиктивных для волнового уравнения можно использовать нулевые Дирихле или Неймана (если область достаточно большая) или условия периодичности:

$$u^k_0 = u^k_N, \quad u^k_1 - u^k_0 = u^k_N - u^k_{N-1}, \quad k = 2, ..., K. \tag{2.9}$$

Замечание 1. *Если схема явная (a), то лучше решать задачу для $x \in \mathbb{R}^2$ или даже $x \in \mathbb{R}^3$ (иначе слишком просто) с соответствующими изменениями в схеме, начальных и граничных условиях. Неявную схему можно и для $x \in \mathbb{R}$, причем обращать матрицу удобно прогонкой для скорости. Неявную схему для $x \in \mathbb{R}^2$ можно взять в виде схемы расщепления (см. [1, глава 10, § 31, схема (9)]).*

II. Параболическое уравнение.

Для параболического уравнения рассматриваем (II.1) задачу Коши в неограниченной области или (II.2) начально-краевую задачу

$$u_t = (c^2(x)u_x)_x + f(x,t), \tag{2.10}$$

$$u|_{t=0} = u^0(x). \tag{2.11}$$

Для (II.2) дополнительно ставим условия Дирихле (2.3), или Неймана (2.4), или Робена, или даже разные условия на разных границах.

Можно решать задачу с помощью (a) явной схемы [1, гл.8, § 25, пример 4], (b) неявной схемы [1, гл.8, § 25, пример 5] или (c) схемы с расщеплением, решаемой прогонкой [1, глава 10, § 31, схема (9)]. Начальные условия для $k=0$ соответствуют физическим, а ситуация с граничными условиями для задачи (II.1) и (II.2) – та же, что и для волнового уравнения.

Если решать явной схемой, то нужно брать по крайней мере $x \in \mathbb{R}^2$.

III. Эллиптическое уравнение.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона (или Лапласа $f = 0$):

$$(c^2(x)u_x)_x = f(x,t). \tag{2.12}$$

Задача – (2) внутренняя или внешняя, граничные условия Дирихле, или Неймана, или .... Можно даже рассматривать уравнение Пуассона (1) в неограниченной области для финитной правой части.

Можно решать с помощью (b) неявной схемы [1, гл. 11, § 34, (3)]. Либо методом установления:

$$v_t = (c^2(x)v_x)_x - f(x,t), \quad v|_{t=0} = v^0(x), \quad u(x) = \lim_{t\to\infty} v(x,t), \tag{2.13}$$

где граничные условия – те же, что и для (2.12), а начальные условия – любые (хотя можно подобрать так, чтобы сходилось побыстрее). Задачу (2.13) в свою очередь можно решять явной схемой (II.a) или схемой расщепления (II.c). (Решать неявной схемой (II.b), чтобы получить решение (2.12) бессмысленно.) Также можно попробовать схемы с переменным шагом по времени [1, гл. 11, § 36-37].

Также любую из трех перечисленных задач можно решать методом (ё): с помощью нейросеток.

Задача 2. *Поставить задачу (I, II или III в возможных вариантах 1,2,... и a,b,..., не пересекаясь с одногрупниками), решить, построить графики, ответить на исследовательский вопрос. Оформить в виде презентации, примерно так: 1) титул, 2) постановка физической задачи, 3) описание способа численного решения 4) анализ схемы: аппроксимация и устойчивость 5) графики с результатами и анализ: ответ на исследовательский вопрос.*

Список литературы

[1] **С.К. Годунов, В.С. Рябенький**, Разностные схемы. Введение в теорию. Изд. 2-е доп. и пер. Москва, Наука, 1977.

[2] **Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков**, Численные методы. Изд. 8-е (электронное). Москва, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.