

# Асимптотики длинных нелинейных распространяющихся волн в одномерном бассейне с пологими берегами.

Minenkov D.S.\*    Votiakova M.M.†

## Аннотация

Рассматривается задача Коши для одномерной системы нелинейных уравнений мелкой воды с переменным дном  $D(x)$  в протяженном бассейне, ограниченном с двух сторон берегами (где дно вырождается  $D(a) = 0$ ), или берегом и стенкой. Построены коротковолновые асимптотики линеаризованной системы в виде бегущей локализованной волны. После применения к построенным функциям простой параметрической или явной замены, предложенной в недавних статьях (Доброхотов, Миненков, Назайкинский, 2022 и Доброхотов, Калиниченко, Миненков, Назайкинский, 2023) получаются асимптотики исходной нелинейной задачи. На построенных семействах функций исследуется соотношение амплитуды и длины волны, при котором не происходит обрушения волны при накате на берег.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	4
1.2	Линеаризованная система мелкой воды . . . . .	4
1.3	Решение линеаризованной системы . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Модельный пример: случай ровного наклонного дна</b>	<b>7</b>
2.1	Разложение по стоячим волнам (метод Фурье) . . . . .	7
2.2	Разложение по распространяющимся волнам (метод продолжения)	9
2.3	Асимптотические решения нелинейной системы уравнений мел- кой воды над ровным наклонным дном . . . . .	12

---

\*minenkov.ds@gmail.com; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

†votiakova.mm@phystech.edu; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

<b>3</b>	<b>Асимптотические решения линейной задачи в случае дна об-</b>	
	<b>щего вида</b>	<b>14</b>
3.1	Разложение по стоячим волнам . . . . .	15
3.2	Асимптотика в виде бегущей волны . . . . .	17
3.3	Доказательство основных утверждений . . . . .	20
3.3.1	Доказательство Леммы 1 <small>lem_as</small> . . . . .	20
3.3.2	Доказательство Леммы 2 <small>lem_map</small> . . . . .	22
3.3.3	Доказательство Теоремы 1 <small>prop_running_lin_d</small> . . . . .	23
3.4	Пример. Случай параболического дна . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Асимптотические решения нелинейной системы уравнений мел-</b>	
	<b>кой воды</b>	<b>27</b>
4.1	Замена для выравнивания границы . . . . .	27
4.2	Связь критического значения амплитуды с длиной волны . . . . .	30
4.2.1	Численный анализ критической амплитуды для ровного наклонного дна . . . . .	31
4.2.2	Численный анализ критической амплитуды для параболи- ческого дна . . . . .	32

# 1 Введение

## 1.1 Постановка задачи

Система мелкой воды может описывать как волновые, так и вихревые решения (см. [1]). Если ограничиться волновым случаем, то бегущим волнам соответствует такое явление как цунами [1–3], а стоячим – сейши [4–6]. В случае бегущих волн, при отдалении от источника у решения образуется фронт волны, который касается береговой линии, так что около берега, в некоторых случаях, задачу приближенно можно считать локально одномерной и использовать для ее анализа одномерную систему мелкой воды.

В данной статье мы ограничимся одномерным случаем, когда система мелкой воды для возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$  и скорости  $u(x, t)$  имеет вид:

$$\eta_t + ((D(x) + \eta)u)_x = 0, \quad u_t + g\eta_x + uu_x = 0. \quad (1.1) \quad \text{eq\_sh}$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения, функция  $D(x)$  определяет профиль дна бассейна, причем положительные значения соответствуют глубине под невозмущенной поверхностью, отрицательные – берегу. Система рассматривается в области с подвижной границей (линией уреза) и мы будем рассматривать два случая: 1) бассейн  $x \in (a, b)$ , ограниченный берегом  $D(a) = 0, D'(a) \neq 0$  и вертикальной стенкой при  $x = b$ , и 2) бассейн  $x \in (a, d)$  с двумя берегами  $D(a) = D(d) = 0, D(x) > 0, D'(a) \neq 0, D'(d) \neq 0$ . В случае 2) через  $x = b$  будем обозначать точку максимальной глубины  $D(b) = \max_x D(x)$ . На берегу ставится условие на подвижную линию уреза  $x_{a,d}(t)$ :

$$\eta(x_a(t), t) + D(x_a(t)) = 0, \quad \eta(x_d(t), t) + D(x_d(t)) = 0; \quad (1.2) \quad \text{in\_sh}$$

в случае 1) непроницаемой стенке в точке  $x = b$  соответствует условие Неймана:

$$u|_{x=b} = 0 \Leftrightarrow \eta_x|_{x=b} = 0. \quad (1.3) \quad \text{in\_wa}$$

Для системы <sup>(eq\\_shallow)</sup>(1.1) с граничными условиями <sup>(in\\_shore)</sup>(1.2) (или <sup>(in\\_shore)</sup>(1.2) при  $y = a$  и <sup>(in\\_wall)</sup>(1.3)) мы рассмотрим задачу Коши с локализованными начальными условиями

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x) = \varepsilon V\left(\frac{x - x_0}{\mu}\right), \quad u|_{t=0} = u_0(x) = \varepsilon W\left(\frac{x - x_0}{\mu}\right), \quad (1.4) \quad \text{in\_1}$$

где малые параметры  $0 < \mu \ll 1$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  отвечают за длину и амплитуду волны начального возмущения. Начальные условия общего вида порождают две разбегающиеся волны. Для простоты будем рассматривать случай, когда функции  $V, W$  порождают одну волну.

## 1.2 Линеаризованная система мелкой воды

Кэрриер и Гринспен [7] свели систему мелкой воды <sup>(eq\\_shallow)</sup>(1.1) в случае ровного наклонного дна к линейной, что позволило строить точные решения исходной

нелинейной системы. Эту замену можно представить в виде точечного преобразования (см. [8], а также [9, 10]), что позволяет выразить решение нелинейной системы в параметрическом виде. В цикле работ [11–14] замена Кэрриера–Гринспена была обобщена на семейство одномерных систем типа (1.1)<sup>eq\_shallow</sup>, что позволило строить точные решения для волн в узких каналах с линейно меняющейся глубиной. В случае неровного дна в тех или иных предположениях асимптотики для одномерной системы были построены в [15–17].

В работе [18] предложен метод построения асимптотик нелинейной системы в одномерном и двумерном случаях, использующий решения линеаризованной системы. Именно, предлагается сделать замену переменных, “выравнивающих” подвижную границу, например такую:  $t = \tau, x = \mathcal{X}(y, \tau), \eta(x, t) = N(y, \tau), u(x, t) = U(y, \tau)$ , где  $x = \mathcal{X}(y, \tau)$  является решением уравнения

$$D(\mathcal{X}(y, \tau)) = D(y) - N(y, \tau)\rho(y). \quad (1.5) \quad \text{trans}$$

Здесь  $\rho(y)$  – некоторая срезающая функция, равная единице в окрестности берегов  $x = a, d$  и нулю в окрестности точек  $D'(x) = 0$  и в окрестности стенки  $x = b$ . В результате такой замены система (1.1)<sup>eq\_shallow</sup> переходит в систему с малой нелинейностью, которая определена в фиксированной области  $\Omega = [a, b]$  для задачи со стенкой и  $\Omega = [a, d]$  для задачи с двумя берегами. В главном (с точностью до  $O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) полученные уравнения совпадают с линеаризованной системой мелкой воды над неровным дном (которая сводится к волновому уравнению с волновой скоростью  $c(y) = \sqrt{gD(y)}$ ):

$$N_\tau + (D(y)U)_y = 0, \quad U_\tau + gN_y = 0, \quad N|_{\tau=0} = N_0(y), \quad U|_{\tau=0} = U_0(y), \quad \Leftrightarrow \quad (1.6) \quad \text{eq_li}$$

$$\hat{\square}_c N := N_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial y}(c^2(y)\frac{\partial}{\partial y}N) = 0, \quad N|_{\tau=0} = N_0(y), \quad N_\tau|_{\tau=0} = -(D(y)U_0(y))_y, \quad (1.7) \quad \text{eq_wa}$$

$$U(y, \tau) = U_0(y) - \int_0^\tau gN_y(y, t)dt. \quad (1.8) \quad \text{sol_1}$$

Заметим, что для линейной системы (1.6)<sup>eq\_lin\_D</sup> в точках  $y = a, y = d$ , являющихся прообразами подвижной границы (1.2)<sup>in\_shore</sup>, нужно поставить условие ограниченности энергии (см. [19–22])  $E(t) < \infty$ , где энергия для линеаризованной системы мелкой воды и волнового уравнения равна соответственно:

$$E_{sw}^2 = \|gN\|_{L^2}^2 + \|c(y)U\|_{L^2}^2 < \infty, \quad E_{wave}^2 = \|N_\tau\|_{L^2}^2 + \|c(y)N_y\|_{L^2}^2 < \infty. \quad (1.9) \quad \text{in_en}$$

Эти условия отсекают неограниченные решения, так что можно вместо них потребовать  $|N(a, \tau)| < \infty, |U(a, \tau)| < \infty, |N(d, \tau)| < \infty, |U(d, \tau)| < \infty$ .

В работе [23] таким образом исследованы асимптотики одномерных стоячих волн в задаче (1.1)<sup>eq\_shallow</sup>, (1.3)<sup>in\_wall</sup> или (1.2)<sup>in\_shore</sup>. При этом вместо точного решения лине-

аризованной системы (1.6) предлагается использовать коротковолновые асимптотики по малой длине волны<sup>1</sup>, которые замена (1.5) переведет в приближенное решение исходной нелинейной задачи. В случае использования асимптотик (в отличие от использования точных решений (1.6)) доказательства того, что получаются формальные асимптотики нелинейной задачи пока нет. Дополнительная сложность такого доказательства заключается в том, что при рассмотрении асимптотик линейной задачи возникает дополнительный малый параметр  $0 < \mu \ll 1$ , отвечающий за длину волны (помимо амплитуды  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), так что надо рассматривать согласованный предел  $\mu \rightarrow 0$  и  $\varepsilon = O(\mu^{1/\kappa})$ . Несмотря на отсутствие строгого доказательства в [18] сформулирована естественная гипотеза (см. также [24]), что полученные формулы хорошо приближают нелинейные волны при таких соотношениях параметров  $\mu$  и  $\varepsilon$ , когда не происходит обрушения волны. При этом оценить критическое соотношение параметров можно по якобиану замены (1.5): он не должен вырождаться на асимптотиках линейной задачи.

### 1.3 Решение линеаризованной системы

Как видно, исследование задачи для системы мелкой воды сводится к решению (или построению асимптотик) задачи для линеаризованной системы (1.6), (1.4), (1.9) для двух берегов или (1.9) и условие Неймана на стенке. Напомним (см. [25, гл. 2, п. 2-3]), что решение задачи Коши для волнового уравнения с постоянной скоростью  $N_{\tau\tau} - c^2 N_{yy} = 0$  с условием Неймана на стенках  $N_y(0, t) = N_y(b, t) = 0$  и начальным условием  $N(y, 0) = V(y)$ ,  $N_\tau(y, 0) = 0$ ,  $\text{supp} V \subset (0, b)$  ищется одним из двух основных способов: разложением в ряд Фурье по стоячим модам  $N^n(y, \tau) = \cos(\pi n c \tau / b) \cos(\pi n y / b)$  с коэффициентами  $a_n : V(y) = \sum_n a_n \cos(\pi n y / b)$  (метод Фурье или по-другому – разделения переменных), и представлением в виде ряда распространяющихся волн с профилем  $V(y)$  (формула Даламбера и метод продолжения):

$$N(y, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n N^n(y, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{+, -} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (V(2bm \pm y - c\tau) + V(2mb \pm y + c\tau)).$$

Заметим, что при разложении по бегущим волнам в рассматриваемой области в каждый момент времени попадает лишь конечное число слагаемых.

В данной работе мы строим приближенные решения в виде бегущих волн для задачи (1.1), (1.4), (1.9) (при наличии стенки также добавляется условие Неймана из (1.3)) двумя указанными способами, причем метод продолжения оказывается существенно проще для реализации. Для источника специального вида можно выразить асимптотики в виде элементарных функций, аналогично семейству решений для ровного наклонного дна (см. [8, 26]). Используя указан-

<sup>1</sup>Волны цунами и сейши, длинные по сравнению с глубиной водоема, являются в то же время короткими по сравнению с размерами бассейна.

ные асимптотики с простыми формулами, мы исследуем соотношения параметров  $\mu, \varepsilon$  при которых замена не “обрушается” – т.е. не вырождается якобиан замены. На решениях выбранного типа критическая амплитуда имеет порядок  $\varepsilon = O(\mu^\kappa)$ , где  $\kappa \approx 2$  (см. в [27] аналогичный результат для волны похожей на сглаженную “ступеньку” – функцию Хевисайда).

Структура статьи следующая. В п. 2 для случая ровного наклонного дна со стенкой на глубине выводятся асимптотики линеаризованной задачи, точно удовлетворяющие уравнению и приближенно – условию Неймана на стенке. В п. 2.3 <sup>sec\_exact\_nonlin</sup> обсуждаются замены для построения асимптотического решения исходной нелинейной задачи, а также <sup>sec\_asymp</sup> обсуждается вопрос амплитуды, при которой происходит обрушение волны. В п. 3 <sup>sec\_parabolic</sup> приводятся асимптотические формулы для линеаризованной задачи в случае дна общего вида. Для случая параболического дна п. 3.4 <sup>sec\_d\_nonlin</sup> обсуждается вопрос получения точного решения в виде бегущей волны, разложением по стоячим волнам с использованием полиномов Лежандра. В п. 4 <sup>sec\_amplitude</sup> построены асимптотические решения нелинейной задачи. Здесь же, на примере параболического дна, мы сравниваем поведение нелинейных волн, полученных с помощью точного решения и с помощью асимптотик линейной задачи. В п. 4.2 для построенных асимптотик в виде бегущей волны исследуется связь длины волны и пороговой амплитуды волны, при которой происходит обрушение.

## 2 Модельный пример: случай ровного наклонного дна

В этом разделе рассматривается модельный пример ровного наклонного дна, на котором проиллюстрированы основные идеи статьи: выписаны асимптотические решения в виде бегущей волны для линеаризованной и нелинейной задач, а также обсуждается условие обрушения нелинейного решения.

### 2.1 Разложение по стоячим волнам (метод Фурье)

Рассмотрим линейную систему над ровным наклонным дном  $D(y) = \gamma y$ :

$$N_\tau + (\gamma y U)_y = 0, \quad U_\tau + g N_y = 0. \quad (2.1) \quad \text{eq\_li}$$

Обозначим характерные масштабы по высоте волны, волновой скорости и времени:  $D_0 = \gamma b$ ,  $c_0 = \sqrt{g D_0}$  и  $T_0 = b/c_0 = \sqrt{b/\gamma g}$ .

Любое решение задачи (2.1), (1.3) <sup>eq\_lin</sup> с конечной энергией <sup>in\_energy</sup> (1.9), которое отсекает неограниченные решения, раскладывается по стоячим волнам (см. [7, 28,

29]):

$$N^J(y, \tau) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n N^{\omega_n}(y, \tau), \quad U^J(y, \tau) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n U^{\omega_n}(y, \tau). \quad (2.2) \quad \boxed{\text{sol}_s}$$

$$N^{\omega_n}(y, \tau) = \varepsilon D_0 \sqrt{\omega_n T_0} e^{-i\theta} e^{-i\omega_n \tau} \mathbf{J}_0(2\omega_n T_0 \sqrt{\frac{y}{b}}), \quad (2.3) \quad \boxed{\text{sol}_M}$$

$$U^{\omega_n}(y, \tau) = i\varepsilon c_0 \sqrt{\omega_n T_0} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}} e^{-i\theta} e^{-i\omega_n \tau} \mathbf{J}_1(2\omega_n T_0 \sqrt{\frac{y}{b}}). \quad (2.4) \quad \boxed{\text{sol}_U}$$

Для выполнения условий  $(\text{I.3})^{\text{in wall}}$ , частоты  $\omega_n$  должны быть равны

$$\omega_n = \frac{\mu_{1,n} \sqrt{\gamma g}}{2\sqrt{b}}, \quad J_\nu(\mu_{\nu,n}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5) \quad \boxed{\text{Sp1}}$$

Здесь  $\mu_{1,n}$ ,  $n = 1, \dots$  – нули функции Бесселя  $\mathbf{J}_1$ , при больших  $n$  справедлива асимптотика:  $\mu_{1,n} \approx \pi(n + 1/4)$ . При этом характерно, что практически “большие”  $n$  начинаются уже с  $n = 1$ , когда  $|\mu_{1,1} - 5\pi/4|/\mu_{1,1} \leq 2.5\%$ . Чтобы получить решение задачи Коши, нужно разложить начальные условия в ряд Фурье по системе  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\xi_n = (\sqrt{b}\mathbf{J}_0(\mu_{1,n}))^{-1} \mathbf{J}_0(2\omega_n T_0 \sqrt{y/b})$  собственных функций самосопряженного оператора  $\hat{L} = -\frac{\partial}{\partial y} \gamma y \frac{\partial}{\partial y}$  с областью определения, соответствующей условиям  $(\text{I.9})$ ,  $(\text{I.3})^{\text{in energy wall}}$  (см. [16, 22, 30]). Эти собственные функции ортогональны в  $L_2[0, b]$ , т.к. отвечают различным собственным значениям  $\lambda_n = \omega_n^2$  самосопряженного оператора, норма функций равна единице  $\|\xi_n\|_{L_2[0,b]}^2 = 1$ .

**Утверждение 1.** *Решение задачи Коши для системы  $(2.1)^{\text{eq lin}}$  с краевыми условиями  $(\text{I.9})$ ,  $(\text{I.3})^{\text{in energy wall}}$  и вещественными начальными функциями  $N^0(x), U^0(x) = (d/dx)N^1(x)$  равно*

$$N(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x) (c_n \cos(\omega_n t) + b_n \omega_n \sin(\omega_n t)), \quad (2.6)$$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n(x) \left(-\frac{c_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)\right); \quad (2.7)$$

где  $b_n, c_n \in \mathbb{R}$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье начальных функций:

$$N^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n(x), \quad c_n = \langle N^0(x), \xi_n(x) \rangle_{L_2[0,b]} = \int_0^b N^0(x) \xi_n(x) dx, \quad (2.8)$$

$$N^1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi_n(x), \quad b_n = \langle N^1(x), \xi_n(x) \rangle_{L_2[0,b]} = \int_0^b N^1(x) \xi_n(x) dx. \quad (2.9)$$

*Доказательство.* Доказательство тривиально, решение строиться стандартным образом с помощью разделения переменных и разложения в ряд Фурье по собственным функциям самосопряженного оператора, см. например [21].  $\square$

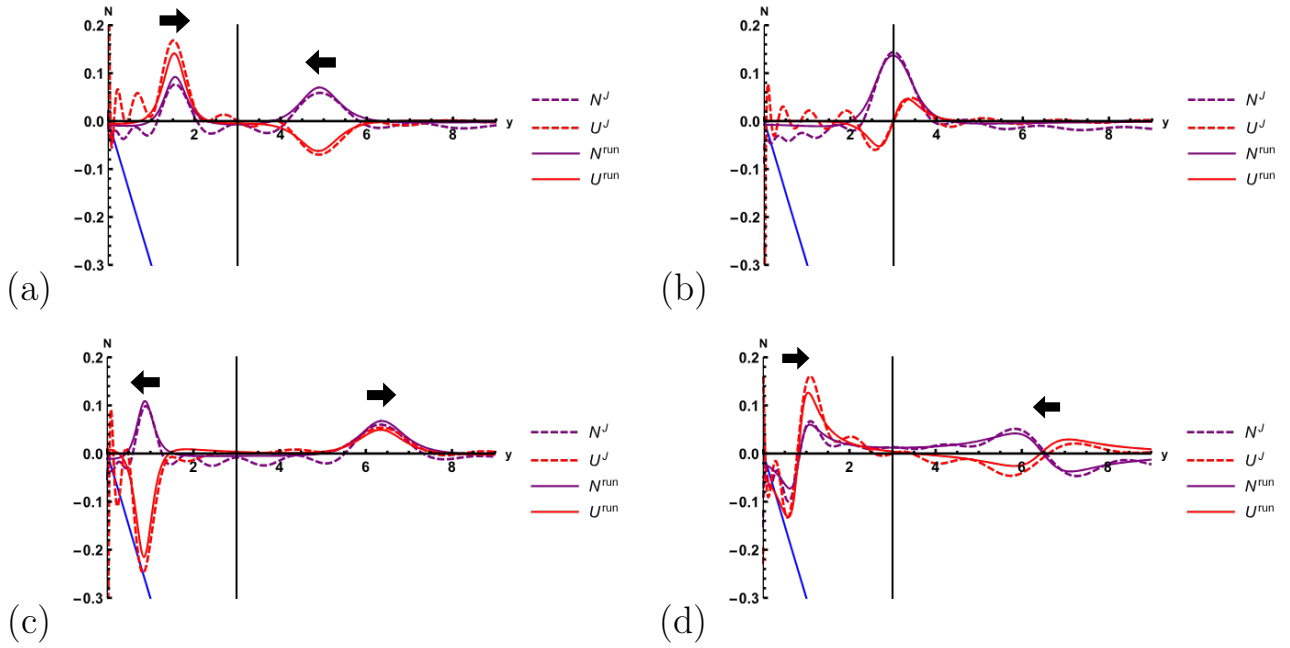


Рис. 1 - На рисунке изображены кривые для случая ровного наклонного дна  $D(y) = \gamma y, \gamma = 0.3$  (синяя прямая) при  $g = 1$  со стенкой при  $y = b, b = 3$  (черная вертикальная прямая): возвышение свободной поверхности  $N(y, \tau)$  (фиолетовые) и скорость  $U(y, \tau)$  (красные). Точное решение (2.2) в виде разложения по  $n_0 = 9$  стоячим волнам (штриховые) рассчитано при  $c_n = \frac{A}{\sqrt{w_n}}, n = 1, 2, \dots, n_0, A = 0.0625, \theta = -\frac{\pi}{4}, \varepsilon = 0.8$ ; асимптотика (2.15) (сплошные линии) – при  $\theta = -\frac{\pi}{4}, \varepsilon = 0.8, \mu = 0.2$ . Стрелками отмечено направление движения волны. Моменты времени: (a)  $\tau = 4.56$ , (b)  $\tau = 6.52$ , (c)  $\tau = 9.22$ , (d)  $\tau = 16$ .

img\_s

**Пример.** На рис. 1 изображены решения (2.1) в виде функций  $N^J(y, \tau)$ ,  $U^J(y, \tau)$ , описываемых разложением (2.2) по  $n_0 = 9$  стоячим волнам при значениях  $c_n = \frac{A}{\sqrt{w_n}}, n = 1, 2, \dots, n_0, A = 0.0625, b = 3, \gamma = 0.3, g = 1, \theta = -\frac{\pi}{4}, \varepsilon = 0.8$ . Рисунок иллюстрирует отражение точного решения, задаваемого конечной суммой, и метаморфозу профиля волны при отражении от стенки и берега. Несмотря на то, что суммируется достаточно большое количество стоячих волн ( $n_0 = 9$ ), полной локализованности добиться не удастся, для этого понадобилось бы суммировать весь ряд.

## 2.2 Разложение по распространяющимся волнам (метод продолжения)

Для линеаризованной системы над ровным наклонным дном (2.1) известно семейство точных решений в виде бегущей волны, полученных в [8]. Выпишем для полноты изложения соответствующее утверждение.

**Утверждение 2.** (см. [8, Утв. 2])



## 1. Следующие функции<sup>2</sup>

$$\mathcal{N}(X, T) = \frac{1 + iT}{((1 + iT)^2 + 4X)^{3/2}}, \quad \mathcal{U}(X, T) = \frac{2i}{((1 + iT)^2 + 4X)^{3/2}}, \quad (2.10)$$

а также их вещественные или мнимые части являются решением безразмерного уравнения (2.1)<sup>eq\_lin</sup> при  $g = 1, \gamma = 1$ .

2. Пусть  $b$  – характерный масштаб для переменной  $y$ ,  $D_0 = \gamma b$ ,  $c_0 = \sqrt{gD_0}$  и  $T_0 = b/c_0 = \sqrt{b/\gamma g}$  – характерная высота волны, скорость распространения и время соответственно,  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  – произвольные безразмерные параметры, отвечающие за амплитуду, длину волны и форму профиля волны соответственно. Следующие функции (а также их вещественные или мнимые части) являются решением линеаризованной системы (2.1)<sup>eq\_lin</sup> над дном  $D(y) = \gamma y$ :

$$N_0^{run}(y, \tau) = \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \mathcal{N}\left(\frac{y}{\mu^2 b}, \frac{\tau}{\mu T_0}\right), \quad (2.11)$$

$$U_0^{run}(y, \tau) = \frac{\varepsilon}{\mu} c_0 e^{-i\theta} \mathcal{U}\left(\frac{y}{\mu^2 b}, \frac{\tau}{\mu T_0}\right). \quad (2.12)$$

**Замечание 1.** В формулах (2.10)<sup>sol\_ansatz</sup> ветвь корня будем выбирать таким образом, чтобы при  $T \in \mathbb{R}$  аргумент подкоренного выражения лежал в диапазоне  $\text{Arg}((1 + iT)^2 + 4X) \in (-\pi, \pi)$ .

Функции (2.11), (2.12)<sup>sol\_N\_lin, sol\_db\_lim, slop\_run</sup> описывают набег и отражение волны от берега. Чтобы дополнительно удовлетворить условию на стенке (1.3)<sup>lin\_wall</sup>, воспользуемся методом продолжений и будем искать асимптотику в виде ряда от таких функций. При малых  $0 < \mu \ll 1$  волны (2.11), (2.12)<sup>sol\_N\_lin, sol\_db\_lim, slop\_run</sup> локализованы в окрестности точки (фронта волны)

$$Z(\tau) = \frac{\gamma g \tau^2}{4}, \quad (2.13)$$

и время, за которое фронт волны проходит расстояние от берега до стенки, равно  $T_1 = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{\gamma g}}$ . Рассмотрим 2 волны, набегающие с бесконечности одна за другой с временной задержкой, равной  $2T_1$ , тогда, после того как первая волна отразится от берега, ее фронт встретится с фронтом второй волны у стенки – в точке  $y = b$ . При отражении от берега происходит метаморфоза профиля волны (см. [8, 16, 31]), которую надо учесть во второй волне, и тогда сумма этих двух волн будет асимптотически удовлетворять условию на стенке (1.3)<sup>lin\_wall</sup>. Именно, в пределе  $\mu \rightarrow 0+$  справедлива асимптотика (доказательство будет приведено в п. 3 сразу для случая дна общего вида)<sup>sec\_asymp</sup>:

$$U_0^{run}(b, T_1 + \delta) = iU_0^{run}(b, -T_1 + \delta)(1 + O(\mu)). \quad (2.14)$$

<sup>2</sup>Эти выражения понадобятся нам в дальнейшем в качестве анзаца для построения асимптотик линейной системы (1.6)<sup>eq\_lin\_D</sup> в случае дна общего вида.

**Утверждение 3.** Пусть  $N^{run}(y, \tau), U^{run}(y, \tau)$  заданы формулами (2.11), (2.12). Рассмотрим бесконечную сумму волн, последовательно набегающих на берег с промежутком  $2T_1$ :

$$N^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k N_0^{run}(y, \tau - 2kT_1) \right), \quad (2.15)$$

$$U^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k U_0^{run}(y, \tau - 2kT_1) \right).$$

1. Для каждого  $y, \tau$  ряды (2.15) сходятся, причем в каждый момент времени  $\tau$  существенный вклад в сумму на интервале  $y \in [0, b]$  дает лишь конечное число слагаемых (не больше двух, для которых  $|\tau - 2kT_1| \leq T_1 + \delta$ , для сколь угодно малого  $\delta$ , не зависящего от  $\mu$ ), а все остальные слагаемые в совокупности равны  $O(\mu^2)$  при  $\mu \rightarrow 0+$  (по равномерной норме).
2. Функции (2.15) точно удовлетворяют уравнению (2.1) и приближенно удовлетворяют условию Неймана (1.3):  $U^{run}(b, \tau) = O(\mu^{3/2})$  при  $\mu \rightarrow 0+$ .

**Доказательство.** Построенные функции удовлетворяют уравнению (2.1) по построению. В том, что касается свойств рядов, это утверждение является частным случаем (при  $D(x) = \gamma x$ ) теоремы 1, сформулированной и доказанной в п. 3.  $\square$

**Замечание 2.** Для удобства компьютерной реализации, можно переписать суммы в (2.15), добавив гладкую срезающую функцию, (например, так:  $\varrho(t) = 1, t \in [-5T_1/4, 5T_1/4]$  и  $\varrho(t) = 0, |t| \geq 7T_1/4$ ) которая будет занулять ненужные слагаемые:

$$N^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k N_0^{run}(y, \tau - 2kT_1) \varrho(\tau - 2kT_1) \right) (1 + O(\mu)),$$

$$U^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k U_0^{run}(y, \tau - 2kT_1) \varrho(\tau - 2kT_1) \right) (1 + O(\mu)).$$

Такие суммы будут мало отличаться от исходных, а при подстановке в уравнения (2.1) дадут малую невязку.

**Замечание 3.** Метаморфоза профиля волны при отражении от берега связана с преобразованием Гильберта и учтена в формулах с помощью индекса Маслова  $k$ , входящего в множитель  $e^{-ik\pi/2}$ . Индекс определяется  $\bmod 4$ , так что функция, задаваемая рядом (2.15) — периодическая, с периодом  $8T_1$ . И хотя точное решение, представляемое в виде суммы (ряда) по стоячим волнам (2.2) периодическим не является, на временах порядка  $O(1)$  асимптотика (2.15), приближает некоторое точное решение.

Для дальнейшего изложения нам будет полезна связь асимптотик в виде бегущей волны с разложением по стоячим волнам. Решения системы (2.1) в

неограниченной области в виде бегущей волны можно представить в виде интеграла по стоячим волнам (2.3), (2.4), когда частота  $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$  может быть любой (не только удовлетворяющим условию квантования):

$$N(y, \tau) = \int_0^\infty \tilde{V}(\omega) N^\omega(y, \tau) d(\omega T_0), \quad U(y, \tau) = \int_0^\infty \tilde{V}(\omega) U^\omega(y, \tau) d(\omega T_0). \quad (2.16)$$

Этот интеграл можно рассматривать как преобразование Фурье  $F_{\omega \rightarrow \tau}$  или как преобразование Ханкеля  $H_{\omega \rightarrow y}$ . Чтобы полученные функции были гладкими, нужно, чтобы  $|\tilde{V}(\omega)| < C\omega^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  убывала быстрее любой степени при  $\omega \rightarrow \infty$ , и для заданного начального условия можно найти его прообраз преобразования Ханкеля  $\tilde{V}$ . В частности, если взять

$$\tilde{V}(\omega) = \mu^2 \sqrt{\omega T_0} e^{-\mu \omega T_0}, \quad (2.17)$$

то получатся функции (2.11), (2.12).

**Пример.** На рис. 1 изображены асимптотики (2.1) в виде функций  $N^{run}(y, \tau)$ ,  $U^{run}(y, \tau)$ , описываемых формулами (2.15), при значениях  $b = 3$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $g = 1$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\mu = 0.2$ . Проиллюстрированы свойства решения, связанные с изменением профиля при отражении от границ.

### 2.3 Асимптотические решения нелинейной системы уравнений мелкой воды над ровным наклонным дном

Если применить к точному решению (2.2) замену “выравнивающую границу” (например, (1.5)), то, согласно [18, теор. 2], получится асимптотика (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) нелинейной задачи (1.1), (1.2), (1.3).

Замена (1.5) в случае ровного наклонного дна принимает вид:

$$\tau = t, \quad x = \mathcal{X}(y, t) := y - \frac{1}{\gamma} N(y, t) \rho(y), \quad \eta(x, t) = N(y, t), \quad u(x, t) = U(y, t). \quad (2.18)$$

с некоторой срезающей функцией  $\rho(y)$ , равной единице в окрестности берегов  $x = a$  и нулю в окрестности стенки  $x = b$ . Эта замена определяет асимптотическое решение  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$  в параметрическом виде по заданному решению линеаризованной задачи  $N(y, \tau)$ ,  $U(y, \tau)$ .

На практике удобнее использовать замену, предложенную в [23], приближающую (1.5) и приводящую к явно заданным функциям  $y = \mathcal{Y}(x, t)$ ,  $\eta(x, t) = N(\mathcal{Y}(x, t), t)$ ,  $u(x, t) = U(\mathcal{Y}(x, t), t)$ , где (для достаточно малого  $\delta > 0$  и той же срезающей функции  $\rho(y)$ )

$$x_\delta(x) = \max\{\delta, x\}, \quad (2.19)$$

$$\mathcal{Y}(x, t) = x_\delta \frac{\gamma x + N(0, t)}{\gamma x_\delta - \rho(x_\delta) N(x_\delta, t) + N(0, t)}.$$

В случае уравнения <sup>(eq\_shallow)</sup>(1.1) с ровным наклонным дном определенным на полупрямой (без стенки), замена Кэрриера–Гринспена обеспечивает точную линеаризацию системы мелкой воды. Приведем эту замену в форме, полученной в [8]:

$$\begin{aligned} t = \mathcal{T}_{CG}(y, \tau) &:= \tau + \frac{1}{\gamma g} U(y, \tau), \quad x = \mathcal{X}_{CG}(y, \tau) := y - \frac{1}{\gamma} N(y, \tau) + \frac{1}{2\gamma g} U(y, \tau)^2, \\ \eta(x, t) &= N(y, \tau) - \frac{1}{2g} U^2(y, \tau), \quad u(x, t) = U(y, \tau). \end{aligned} \quad (2.20) \quad \boxed{\text{trans}}$$

Якобиан замены равен

$$J_{CG}(y, \tau) := \frac{\partial(x, t)}{\partial(y, \tau)} = 1 - \frac{1}{\gamma} N_y + \frac{1}{\gamma g} (U_\tau + U U_y) + \frac{1}{\gamma^2 g} (N_\tau U_y - N_y U_\tau). \quad (2.21) \quad \boxed{J}$$

Условие корректности замены Carrier–Greenspan (невырожденность якобиана замены (2.21)) совпадает с условием существования решения нелинейной задачи, когда волна накатывает на берег без обрушения. Якобианы других замен, тем более в ситуации с дном общего вида, не дают точный ответ на вопрос существования решения нелинейной задачи. Тем не менее обрушение решения происходит при тех же порядках величин  $\mu, \varepsilon$ , при которых может вырождаться якобиан замены <sup>(trans\_param)</sup>(1.5) или <sup>(trans\_iter\_slop)</sup>(2.19), что для ровного наклонного дна это можно проверить непосредственно.

Именно назовем *критической амплитудой* минимальное значение параметра  $\varepsilon$ , при котором происходит обрушение нелинейной волны. Естественнo предположить, что при критическом значении амплитуды обрушение происходит в точке  $y = 0$  в какой-то момент времени. Заметим, что из линейной системы <sup>(eq\_lin)</sup>(2.1)  $U_\tau(0, \tau) = -g N_y(0, \tau)$ ,  $N_\tau(0, \tau) = -\gamma U(0, \tau)$ . Тогда на берегу якобиан замены (2.21) принимает вид

$$J_1 = J_{CG}(0, \tau) = \left(1 - \frac{N_y(0, \tau)}{\gamma}\right)^2. \quad (2.22) \quad \boxed{J\_sho}$$

Якобиан замены <sup>(trans\_param\_x)</sup>(2.18) равен:

$$J_2 = \mathcal{X}_y(0, \tau) = 1 - \frac{N_y(0, \tau)}{\gamma}, \quad (2.23) \quad \boxed{J\_sho}$$

а для замены <sup>(trans\_iter\_slop)</sup>(2.19) якобиан принимает вид:

$$J_3 = \mathcal{Y}_x(0, t) = \frac{1}{1 - \frac{N(\delta, t) - N(0, t)}{\gamma \delta}} = \frac{1}{1 - \frac{N_y(0, t)}{\gamma} + O(\delta)}. \quad (2.24) \quad \boxed{J\_sho}$$

Как можно видеть,  $J_1 = J_2^2$  и  $J_2 = \frac{1}{J_3} + O(\delta)$ , так что якобиан замены Кэрриера–Гринспена <sup>(J\_shore\_CG)</sup>(2.22) (т.е. условие существования решения нелинейной

задачи) вырождается в точке берега при тех же условия, что и якобиан  $J_{shore\_param}$  (2.23) и почти при тех же условиях, что  $J_{shore\_explicit}$  (2.24).

При наличии стенки замена Кэрриера–Гринспена не позволяет линейризовать задачу полностью: после замены условие на стенке становится нелинейным. Тем более в случае дна общего вида нет удобного критерия существования нелинейного решения. Соответственно, условие на обрушение мы будем оценивать по якобианам “приближенных” замен  $trans\_param$  (2.18) или  $trans\_iter\_slop$  (2.19), т.е. будем исследовать значение амплитуды  $\varepsilon^*$ , при котором происходит вырождение якобианов  $J_1$  или  $J_2$  на решении  $N$  в какой-то момент времени, что приводит к условию:

$$\varepsilon^* \approx \frac{\gamma}{\max_{\tau}(N_y(0, \tau)/\varepsilon)}. \quad (2.25) \quad \text{def\_c}$$

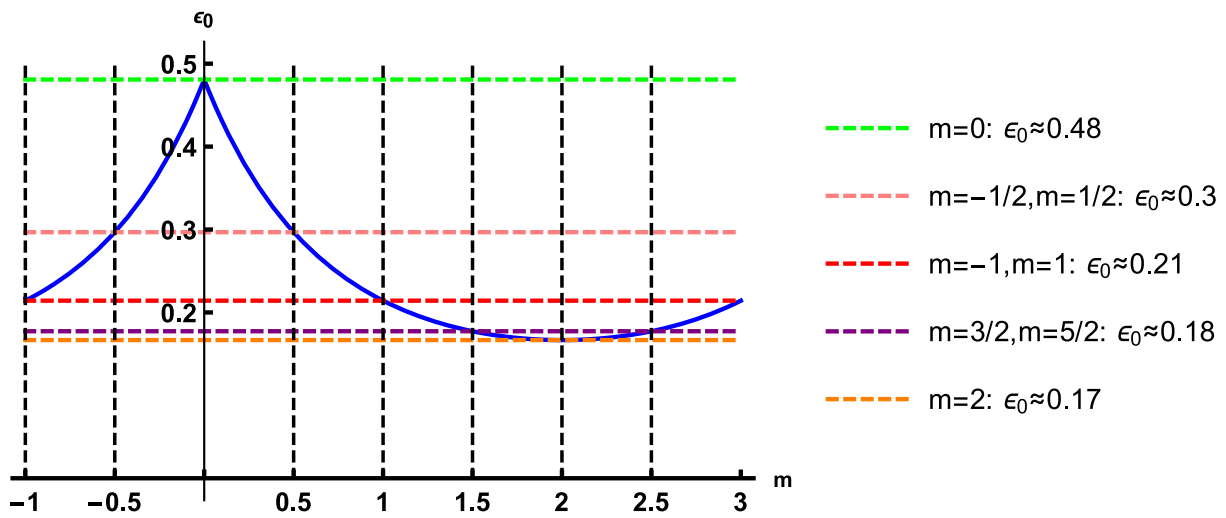


Рис. 2 - График зависимости  $\epsilon(\theta)$ , где критическая амплитуда  $\varepsilon^* = \epsilon_0(\theta)\mu^2$ ,  $\theta = \frac{\pi m}{2}$ . Критическая амплитуда вычислена для вещественной части решения  $Re(N_0^{run}(y, \tau))$  при  $g = 1, \gamma = 1, b = 2$  и произвольном  $\mu$ .  $sol\_N\_lin\_slop$   $img\_p$

**Пример.** На рис. 2 исследована зависимость критической амплитуды  $\varepsilon^*$  для вещественной части решения  $Re(N_0^{run}(y, \tau))$  от длины волны  $\mu$  в случае  $g = 1, \gamma = 1, b = 2$ . Она равна  $\varepsilon^* = \epsilon(\theta)\mu^2$ , где  $\theta = \frac{\pi m}{2}$  – параметр, отвечающий за форму профиля волны, и зависимость  $\epsilon(\theta)$  изображена на рис. 2. Критическая амплитуда вычислена для вещественной части решения  $Re(N_0^{run}(y, \tau))$ , причем она не зависит на  $\mu$ .  $img\_param$   $sol\_N\_lin\_slop\_run$

### 3 Асимптотические решения линейной задачи в случае дна общего вида

В этом разделе рассматривается случай дна общего вида и строятся асимптотические решения в виде бегущей волны для линейризованной задачи с двумя берегами или берегом и стенкой.  $c\_asympt$

### 3.1 Разложение по стоячим волнам

В случае дна общего вида  $D(x)$ , асимптотики стоячих волн в линейной задаче  $(1.1)$  с условиями  $(1.2)$  или  $(1.3)$  имеют вид (см. [30])  $N(y, \tau) = \cos(\omega_n \tau) \xi_n(y) (1 + O(\omega_n^{-1}))$ , где  $(\omega_n, \xi_n)$  – асимптотики собственных чисел и асимптотические собственные функции (квазимоды) оператора  $\hat{L}_c := -\frac{\partial}{\partial y} c^2(y) \frac{\partial}{\partial y}$  с соответствующей областью определения. Квазимоды также выражаются через функции Бесселя, но от сложного аргумента. Именно, определим функции, равные времени распространения фронта волны от берега  $a$  или  $d$  до точки  $y$ :

$$S_{a,d}(y) = \left| \int_{a,d}^y \frac{dz}{\sqrt{gD(z)}} \right|, \quad y \in [a, d], \quad (3.1) \quad \boxed{\text{S}}$$

а также обратные функции

$$y = Z_{a,d}(\tau) : \quad S_{a,d}(y) = |\tau|. \quad (3.2) \quad \boxed{\text{Z}}$$

Соответственно, обозначим через  $T_1$  время прохождения от берега  $y = a$  до стенки  $y = b$ , а в случае двух берегов обозначим через  $T_2$  время прохождения от берега  $y = a$  до берега  $y = d$ :

$$T_1 = S_a(b), \quad T_2 = S_a(d) = S_d(a), \quad (3.3) \quad \boxed{\text{T12}}$$

тогда  $S_d(y) = T_2 - S_a(y)$ ,  $y \in [a, d]$  и соответственно  $Z_a(\tau) = Z_d(\tau - T_2)$ ,  $\tau \in [0, T_2]$ .

Решение в виде стоячей волны существует при выполнении условия квантования

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_m} \left( \frac{m}{4} + n \right) (1 + O(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4) \quad \boxed{\text{quant}}$$

где  $m = 2$  в случае двух берегов и  $m = 1$  в случае берега и вертикальной стенки – приращение индекса Маслова (который в рассматриваемом случае представляет собой обобщение индекса Морса) при прохождении фронта от одного берега до другого и обратно или от берега до стенки и обратно.

Обозначим через  $y_0 = b - a$ ,  $D_0 = D(b)$ ,  $T_0 = y_0 / \sqrt{D_0 g}$  и  $c_0 = \sqrt{D_0 g}$  – характерные горизонтальный масштаб, высоту волны, время и скорость распространения соответственно. Главный член асимптотики определяется формулами (для некоторого  $\delta > 0$ , не зависящего от  $\varepsilon, \mu$ ):

$$N^{\omega_n}(y, \tau) = \begin{cases} N_a^{\omega_n}(y, \tau) (1 + O(\omega_n^{-1})), & y \in [a, d - \delta] \\ N_d^{\omega_n}(y, \tau) (1 + O(\omega_n^{-1})), & y \in [a - \delta, d], \end{cases} \quad (3.5) \quad \boxed{\text{sol}_N}$$

$$U^{\omega_n}(y, \tau) = \begin{cases} U_a^{\omega_n}(y, \tau) (1 + O(\omega_n^{-1})), & y \in [a, d - \delta] \\ U_d^{\omega_n}(y, \tau) (1 + O(\omega_n^{-1})), & y \in [a - \delta, d], \end{cases} \quad (3.6) \quad \boxed{\text{sol}_U}$$

где представления у левого и правого берегов равны (при обозначении  $\alpha_a = 0$ ,  $\alpha_d = 1$ )

$$N_{a,d}^{\omega_n}(y, \tau) = (-1)^{\alpha_{a,d}n} \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \frac{\sqrt{\omega_n S_{a,d}(y)}}{(D(y)/D_0)^{1/4}} e^{-i\omega_n \tau} \mathbf{J}_0(\omega_n S_{a,d}(y)), \quad (3.7)$$

$$U_{a,d}^{\omega_n}(y, \tau) = (-1)^{\alpha_{a,d}(n+1)} i \varepsilon e^{-i\theta} c_0 \frac{\sqrt{\omega_n S_{a,d}(y)}}{(D(y)/D_0)^{3/4}} e^{-i\omega_n \tau} \mathbf{J}_1(\omega_n S_{a,d}(y)) \quad (3.8)$$

В случае одного берега и вертикальной стенки асимптотика определяется на всем интервале  $y \in [a, b]$  с помощью функций  $N_a^{run}$ ,  $U_a^{run}$ ,  $S_a$ .

**Утверждение 4.** (см. [30, Теорема 1.3])

1. Числа  $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$  (3.4) приближают при  $\omega_n \rightarrow \infty$  собственные числа  $\tilde{\omega}_n$  оператора  $\hat{L}_c$  с граничными условиями (1.9) (при  $m = 2$ ) и с граничными условиями (1.3) (при  $m = 1$ ):

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + O(\omega_n^{-1}). \quad (3.9)$$

2. Последовательность пар  $\{\omega_n, N_{a,d}^{\omega_n}\}_{n=1}^{\infty}$  определяет квазимоды, т.е. при подстановке в волновое уравнение (1.7) получается малая невязка при  $\omega_n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\|\hat{\square}_c N^{\omega_n}\|_{L^2(\Omega)}}{\|N^{\omega_n}\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\hat{L}_c N^{\omega_n} - \omega_n^2 N^{\omega_n}\|_{L^2(\Omega)}}{\|N^{\omega_n}\|_{L^2(\Omega)}} = O(1), \quad (3.10)$$

где  $\Omega = [a, b]$  для случая берега и стенки и  $\Omega = [a, d]$  для случая двух берегов. 3. Функции  $N_{a,d}^{\omega_n}, U_{a,d}^{\omega_n}$  приближенно удовлетворяют второму уравнению в системе (1.6) при  $\omega_n \rightarrow \infty$ .

$$- \int g \frac{\partial}{\partial y} N_{a,d}^{\omega_n}(y, \tau) d\tau = - \frac{ig}{\omega_n} \frac{\partial}{\partial y} N_{a,d}^{\omega_n}(y, \tau) = U_{a,d}^{\omega_n} (1 + O(\omega_n^{-1})). \quad (3.11)$$

4. В случае берега и стенки:  $U_a^{\omega_n}$  при  $m = 1$  приближенно удовлетворяют условию Неймана (1.3) при  $\omega_n \rightarrow \infty$ :

$$|U_a^{\omega_n}(b, \tau)| = O(\omega_n^{-1/2}). \quad (3.12)$$

**Доказательство.** Пункты 1 и 2 доказаны в [30, Теорема 1.3], после чего пункты 3 и 4 проверяются прямым расчетом, учитывая что при  $m = 1$  формула (3.4) связана с асимптотикой нулей функции Бесселя  $\mathbf{J}_1(\mu_{1,n}) = 0$ :  $\omega_n S_a(b) = \mu_{1,n}(1 + O(\omega_n^{-1}))$ .  $\square$

Сумма стоячих волн (аналогично (2.2)) определяет непериодическую по времени асимптотику, которая тем не менее может фокусироваться в определенные моменты и вести себя как бегущая волна.

## 3.2 Асимптотика в виде бегущей волны

Здесь мы сформулируем основные утверждения, доказательство которых вынесено в следующую секцию (п. <sup>sec\_proof</sup>3.3).

Построим асимптотику в виде бегущей волны, аналогично п. <sup>sec\_x\_running</sup>2.2. Рассмотрим интеграл <sup>as\_integral</sup>(2.16) от функций <sup>sol\_N\_w\_sol\_stan\_lin\_stan</sup>(3.7) и (3.8) по всем частотам с интегрируемой весовой функцией  $\tilde{V}(\omega)$ :  $N(y, \tau) = \int_0^\infty \tilde{V}(\omega) N^\omega d(\omega T_0)$ . Такой интеграл будет определять локализованную функцию, являющуюся асимптотикой уравнения <sup>eq\_lin\_p</sup>(1.6). В частности, если взять функцию <sup>v-gen</sup>(3.13) (с заменой  $\gamma = D_0/y_0$ ,  $b = y_0$ )

$$\tilde{V}(\omega) = \mu^2 \sqrt{\omega T_0} e^{-\mu \omega T_0}, \quad (3.13) \quad \text{V\_gen}$$

то интеграл также можно будет выразить в элементарных функциях:

$$N_{a,d}^{run}(y, \tau) = \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \left( \frac{S_{a,d}(y)}{T_0} \sqrt{\frac{D_0}{D(y)}} \right)^{1/2} \mathcal{N} \left( \frac{S_{a,d}^2(y)}{4\mu^2 T_0^2}, \frac{\tau}{\mu T_0} \right), \quad (3.14) \quad \text{sol\_N}$$

$$U_{a,d}^{run}(y, \tau) = \frac{\varepsilon}{2\mu} c_0 e^{-i\theta} \left( \frac{S_{a,d}(y)}{T_0} \sqrt{\frac{D_0}{D(y)}} \right)^{3/2} \mathcal{U} \left( \frac{S_{a,d}^2(y)}{4\mu^2 T_0^2}, \frac{\tau}{\mu T_0} \right) (1 + O(\mu)). \quad (3.15) \quad \text{sol\_U}$$

Обозначим амплитуду  $A_{a,d}(y) = \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \left( \frac{S_{a,d}(y)}{T_0} \sqrt{\frac{D_0}{D(y)}} \right)^{1/2}$ . Анализируя интеграл в <sup>s</sup>(3.1), легко проверить, что для гладкой  $D(y) : D(a) = D(d) = 0, D'(a) \neq 0, D'(d) \neq 0$  амплитудные функции  $A_{a,d}(y)$  будут аналитическими в окрестности  $y = a$  и  $y = d$  соответственно, причем  $A_a(a) = \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \sqrt{\frac{2D_0}{y_0 D'(a)}}$ ,  $A_d(d) = \varepsilon D_0 e^{-i\theta} \sqrt{\frac{2D_0}{y_0 D'(d)}}$ .

**Лемма 1.** Зафиксируем сколь угодно малый параметр  $0 < \delta < (b - a)/2$ , не зависящий от  $\mu \rightarrow 0$ , и определим области  $\Omega_a = [a, d - \delta]$ ,  $\Omega_b = [a + \delta, d]$ , в которых будем рассматривать функции <sup>sol\_N\_lin\_gen\_run</sup>(3.14) и (3.15) с индексами  $a$  и  $d$  соответственно. Под нормой будем понимать равномерную норму на соответствующем интервале, например,  $\|\text{Re} N_a^{run}\| = \|\text{Re} N_a^{run}\|_{C(\Omega_a)} = \max_{y \in \Omega_a} |\text{Re} N_a^{run}(y, \tau)|$ . Обозначим также  $\tilde{T}_a = S_a(d - \delta)$ ,  $\tilde{T}_b = S_d(a + \delta)$ .  
1. Вещественные части функций <sup>sol\_N\_lin\_gen\_run</sup>(3.14) и (3.15) описывают бегущую волну, причем существенное возмущение в точке  $y \in \Omega_{a,d}$  наблюдается на временах  $\tau = \pm S_{a,d}(y) + O(\mu)$ . Именно, справедливы следующие оценки при  $\mu \rightarrow 0$  и  $n, l = 0, 1, \dots$ :

(a) для норм при  $|\tau| = O(\mu)$ :

$$\|\mu^{n+2l} \text{Re} \frac{\partial^{n+l} N_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp 1, \quad \|\mu^{n+2l} \text{Re} \frac{\partial^{n+l} U_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \frac{1}{\mu}; \quad (3.16) \quad \text{as\_no}$$



при  $\mu \ll |\tau| < \tilde{T}_{a,d}$ :

$$\|\mu^{n+2l} \operatorname{Re} \frac{\partial^{n+l} N_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \left(\frac{\mu}{|\tau|}\right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad \|\mu^{n+2l} \operatorname{Re} \frac{\partial^{n+l} U_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{|\tau|}\right)^{l+\frac{3}{2}}; \quad (3.17)$$

(b) для значений этих функций вдали от фронта, когда  $\lambda := ||\tau| - S_{a,d}(y)| \gg \mu$ , при  $|\tau| = O(\mu)$ :

$$|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} N_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}| = O\left(\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2l+3}\right), \quad |\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} U_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}| = O\left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2l+3}\right); \quad (3.18)$$

при  $|\tau| \gg \mu$ :

$$|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} N_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}| = O\left(\left(\frac{\mu}{|\tau|}\right)^{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+\frac{3}{2}}\right), \quad |\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} U_{a,d}^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}| = O\left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{|\tau|}\right)^{l+\frac{3}{2}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l+\frac{3}{2}}\right). \quad (3.19)$$

2. Функции (3.14) и (3.15) (а так же их вещественные или мнимые части) определяют формальное асимптотическое решение системы (1.6) в областях  $y \in \Omega_a$  и  $y \in \Omega_d$  соответственно, а именно при подстановке (3.14) в волновое уравнение (1.7) получается малая невязка  $R_{a,d} = \square_c N_{a,d}^{run}$ , а функция  $U_{a,d}^{run}$  приближает решение второго уравнения в (1.7) для заданного  $N_{a,d}^{run}$ .

$$R_{a,d}(y, \tau) = \frac{(D(y)A'_{a,d}(y))'}{A_{a,d}(y)} N_{a,d}^{run}(y, \tau), \quad \frac{\|\operatorname{Re} R_{a,d}(y, \tau)\|}{\|\operatorname{Re} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} N_{a,d}^{run}\|} = O(\mu^2), \quad (3.20)$$

$$-g \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} N_{a,d}^{run}(y, t) dt = U_{a,d}^{run}(y, \tau)(1 + O(\mu)). \quad (3.21)$$

Доказательство утверждений будет дано в следующей секции (п. 3.3).

Используя формулы (3.14), (3.15) можно сконструировать асимптотику задачи (1.6) для бассейна с двумя берегами (1.9) или берегом и стенкой (1.3). Для этого сформулируем следующую лемму о сшивке этих функций вдали от берега.

**Лемма 2.** Рассмотрим параметр  $0 < \delta < (d-a)/2$ , не зависящий от  $\mu$  и малый  $\lambda = o(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

1. При  $y \in [a + \delta, d - \delta]$  справедливы асимптотические равенства при  $\mu \rightarrow 0$ :  
(a) для  $\tau = S_a(y) + O(\lambda)$ :

$$N_a^{run}(y, \tau) = (-i)N_d^{run}(y, \tau - T_2)(1 + O(\mu + \lambda)), \quad (3.22)$$

$$U_a^{run}(y, \tau) = (-i)U_d^{run}(y, \tau - T_2)(1 + O(\mu + \lambda));$$

(b) для  $\tau = -S_a(y) + O(\lambda)$ :

$$N_d^{run}(y, \tau + T_2) = (-i)N_a^{run}(y, \tau)(1 + O(\mu + \lambda)), \quad (3.23)$$

$$U_d^{run}(y, \tau + T_2) = (-i)U_a^{run}(y, \tau)(1 + O(\mu + \lambda)).$$

2. При  $y = b$  и справедливо асимптотическое равенство при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$U_a^{run}(b, T_1 + \lambda) = iU_a^{run}(b, -T_1 + \lambda)(1 + O(\mu + \lambda)). \quad (3.24)$$

Зададим гладкую срезающую функцию  $\varrho_a(y) \in [0, 1]$ , равную единице в  $\delta$ -окрестности  $y = a$  и равную нулю в  $\delta$ -окрестности  $y = b$  для некоторого  $0 < \delta < \frac{d-a}{2}$ , и определим функции

$$N^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( (-i)^{2k} N_a^{run}(y, \tau - 2kT_2) \varrho_a(y) + (-i)^{2k+1} N_d^{run}(y, \tau - (2k+1)T_2) (1 - \varrho_a(y)) \right), \quad (3.25)$$

$$U^{run}(y, \tau) = \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( (-i)^{2k} U_a^{run}(y, \tau - 2kT_2) \varrho_a(y) + (-i)^{2k+1} U_d^{run}(y, \tau - (2k+1)T_2) (1 - \varrho_a(y)) \right). \quad (3.26)$$

В случае задачи с берегом и стенкой (1.6), (1.3), достаточно суммы по функциям  $N_a^{run}, U_a^{run}$ .

$$N^{run} = \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k N_a^{run}(y, \tau - 2kT_1), \quad U^{run} = \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^k U_a^{run}(y, \tau - 2kT_1). \quad (3.27)$$

**Теорема 1.** Положим  $\Omega = [a, d]$  для случая двух берегов или  $\Omega = [a, b]$  для случая берега и стенки и будем рассматривать равномерную норму на соответствующем интервале:  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(\Omega)}$ . Зафиксируем достаточно малые  $\delta \in (0, (d-a)/2)$  и  $\delta_\tau \in (0, T_1/2)$ , не зависящие от  $\mu \rightarrow 0$ , и рассмотрим гладкую срезающую функцию  $\varrho_a(y)$ , равную единице в  $\delta$ -окрестности  $y = a$  и равную нулю в  $\delta$ -окрестности  $y = d$ .

1. Для каждого  $y, \tau$  ряды (3.25), (3.26), (3.27) сходятся, причем в каждый момент времени  $\tau$  лишь конечное число слагаемых (не больше двух, отвечающих таким индексам  $k$ , что  $|\tau - 2kT_1| \leq T_1 + \delta_\tau$  или  $|\tau - kT_2| \leq T_2$ ) дает существенный вклад в сумму. Именно, справедливы следующие оценки при  $\mu \rightarrow 0$ : (a) для норм функций  $N^{run}, U^{run}$  при временах  $\tau$ , соответствующих набегу на берег, когда для некоторого  $k$ :  $\tau = 2kT_1 + O(\mu)$  или  $\tau = kT_2 + O(\mu)$ :

$$\|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} N^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp 1, \quad \|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} U^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \frac{1}{\mu}; \quad (3.28)$$

и при временах  $\tau$ , соответствующих распространению волны вдали от берега, когда  $t := \min_k |\tau - 2kT_1| \gg \mu$  в случае берега и стенки или  $t := \min_k |\tau - kT_2| \gg \mu$  в случае двух берегов:

$$\|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} N^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \left(\frac{\mu}{t}\right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad \|\mu^{n+2l} \frac{\partial^{n+l} U^{run}}{\partial \tau^n \partial y^l}\| \asymp \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{t}\right)^{l+\frac{3}{2}}; \quad (3.29)$$

(b) а также для остаточных частей рядов (3.25), (3.26), (3.27) соответственно:

$$\sum_{k:|\tau-2kT_2|>T_2} (|N_a^{run}(y, \tau - 2kT_2)\varrho_a(y)| + \quad (3.30) \quad \text{as\_su}$$

$$|N_d^{run}(y, \tau - (2k + 1)T_2)(1 - \varrho_a(y))|) = O(\mu^2),$$

$$\sum_{k:|\tau-2kT_2|>T_2} (|U_a^{run}(y, \tau - 2kT_2)\varrho_a(y)| + \quad (3.31) \quad \text{as\_su}$$

$$|U_d^{run}(y, \tau - (2k + 1)T_2)(1 - \varrho_a(y))|) = O(\mu^2),$$

$$\sum_{k:|\tau-2kT_1|>T_1+\delta_\tau} |N_a^{run}(y, \tau - 2kT_1)| = O(\mu^2),$$

$$\sum_{k:|\tau-2kT_1|>T_1+\delta_\tau} |U_a^{run}(y, \tau - 2kT_1)| = O(\mu^2).$$

2. Функции (3.25) и (3.26) являются формальным асимптотическим решением системы (1.6) в случае двух берегов (1.9), а функции (3.27) – в случае берега и стенки (1.3). Именно, при подстановке  $N^{run}$  в волновое уравнение (1.7) получается малая невязка  $R$  при  $\mu \rightarrow 0+$ :

$$\frac{\|R\|}{\|\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} N^{run}\|} = O(\mu^2), \quad - \int_{-\infty}^{\tau} g \frac{\partial}{\partial y} N^{run}(y, t) dt = U^{run}(y, \tau)(1 + O(\mu)); \quad (3.32) \quad \text{as\_er}$$

и при подстановке  $U^{run}$  из (3.27) в условие Неймана получается малая невязка при  $\mu \rightarrow 0+$ :

$$|U^{run}(b, \tau)| = O(\mu^{3/2}). \quad (3.33) \quad \text{as\_er}$$

**Замечание 4.** Построенные асимптотики (3.25), (3.26), (3.27) в виде бегущей волны являются периодическими функциями с периодом  $8T_1$  и  $4T_2$  соответственно. Периодического решения с таким периодом быть не может, но на временах  $\tau = O(1)$  (т.е. на протяжении нескольких периодов) при  $\mu \rightarrow 0$  асимптотики приближают точное решение. На больших же временах  $\tau \gg 1$  локализованное решение неизбежно распадается в сумму стоячих волн.

**Замечание 5.** Поскольку в суммах (3.25), (3.26), (3.27) в каждый момент времени существенный вклад вносят лишь несколько слагаемых, то для упрощения компьютерной реализации имеет смысл добавить соответствующие срезающие функции по времени.

### 3.3 Доказательство основных утверждений

#### 3.3.1 Доказательство Леммы I

Перейдем к безразмерным переменным:  $N = \tilde{N}D_0\varepsilon, U = \tilde{U}c_0\varepsilon, y = \tilde{y}y_0, \tau = \tilde{\tau}T_0$ . Далее в доказательстве будем рассматривать только безразмерные переменные и знак “тильды” для простоты опускаем.

1. Доказательство получается прямым расчетом, сначала проведем его для вещественной части  $N_a^{run}(y, \tau)$ . Начнем с оценок вблизи фронта, когда  $\lambda = |\tau| - S_a(y) = O(\mu)$ . При  $|\tau| = O(\mu)$  (и следовательно  $S_a(y) = O(\mu)$ ) получаем

$$|N_a^{run}(y, \tau)| = \frac{S_a(y)}{\sqrt{D(y)}} \left| \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta}(1 + i\frac{\tau}{\mu})}{(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{(S_a(y)-\tau)(S_a(y)+\tau)}{\mu^2})^{3/2}} \right| = O(1),$$

а при  $|\tau| \gg \mu$  (и следовательно  $S_a(y) \sim |\tau|$ ) справедливо

$$|N_a^{run}(y, \tau)| = \frac{S_a(y)}{\sqrt{D(y)}} \left| \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} i \frac{\tau}{\mu} (1 + O(\frac{\mu}{|\tau|}))}{(\frac{2i\tau}{\mu} + \frac{2\lambda|\tau|}{\mu})^{3/2}} \right| = O(\sqrt{\frac{\mu}{|\tau|}}).$$

При этом для каждого  $\tau, \theta$  можно подобрать  $y = y_{1,2}(\mu)$ , так чтобы  $|N_a^{run}(y_1, \tau)| \asymp 1$  при  $\tau = O(\mu)$  и  $|N_a^{run}(y_2, \tau)| \asymp \sqrt{\mu/|\tau|}$  при  $|\tau| \gg \mu$ .

Теперь рассмотрим ситуацию вдали от фронта, когда  $\lambda \gg \mu$ . При  $\tau = O(\mu)$  (тогда  $S_a \sim \lambda$ ) справедливо

$$|N_a^{run}(y, \tau)| = \frac{S_a(y)}{\sqrt{D(y)}} \left| \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta}(1 + i\frac{\tau}{\mu})}{(\frac{S_a(y)^2}{\mu^2}(1 + O(\frac{\mu}{\lambda})))^{3/2}} \right| = O((\frac{\mu}{\lambda})^3),$$

а при  $|\tau| \gg \mu$  ( $|S_a(y)| + |\tau| \gg \mu$ ):

$$|N_a^{run}(y, \tau)| = \frac{S_a(y)}{\sqrt{D(y)}} \left| \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} i \frac{\tau}{\mu} (1 + O(\frac{\mu}{|\tau|}))}{(\frac{\lambda(|S_a(y)| + |\tau|)}{\mu}(1 + O(\frac{\mu}{\lambda})))^{3/2}} \right| = O(\sqrt{\frac{\mu}{|\tau|}} (\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{3}{2}}).$$

Для получения оценок на производные, заметим, что

$$\begin{aligned} \mu^n \frac{\partial^n N_a^{run}}{\partial \tau^n} &= \operatorname{Re} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j \leq \frac{n+1}{2}} \frac{A_{nj}(y)(1 + i\frac{\tau}{\mu})^{n-2j+1}(1 + O(\mu))}{(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{(S_a(y)-\tau)(S_a(y)+\tau)}{\mu^2})^{n-j+3/2}}, \\ \mu^n \frac{\partial^n U_a^{run}}{\partial \tau^n} &= \operatorname{Re} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j \leq \frac{n}{2}} \frac{B_{nj}(y)(1 + i\frac{\tau}{\mu})^{n-2j}(1 + O(\mu))}{\mu(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{(S_a(y)-\tau)(S_a(y)+\tau)}{\mu^2})^{n-j+3/2}}, \\ \mu^{n+2k} \frac{\partial^{n+k} N_a^{run}}{\partial \tau^n \partial y^k} &= \operatorname{Re} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j \leq \frac{n+1}{2}} \frac{(2S_a(y)S'_a(y))^k A_{nj}(y)(1 + i\frac{\tau}{\mu})^{n-2j+1}(1 + O(\mu))}{(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{(S_a(y)-\tau)(S_a(y)+\tau)}{\mu^2})^{k+n-j+3/2}}, \\ \mu^{n+2k} \frac{\partial^{n+k} U_a^{run}}{\partial \tau^n \partial y^k} &= \operatorname{Re} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j \leq \frac{n}{2}} \frac{(2S_a(y)S'_a(y))^k B_{nj}(y)(1 + i\frac{\tau}{\mu})^{n-2j}(1 + O(\mu))}{\mu(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{(S_a(y)-\tau)(S_a(y)+\tau)}{\mu^2})^{k+n-j+3/2}}, \end{aligned}$$

после чего проведем вычисления, аналогичные предыдущим.

Объединяя приведенные выкладки получим требуемые оценки на норму функции и значение вдали от фронта. Оценки для  $N_d^{run}$ , а также для  $U_{a,d}^{run}$  получаются аналогично.

2. Теперь проверим, что функции  $N_{a,d}^{run}$  из (3.14) дают малую невязку при подстановке в (1.7). Воспользуемся методом эталонных уравнений: для любых  $\mu > 0, \varepsilon > 0$  функция  $N(y, \tau) = \varepsilon \mu^2 \mathcal{N}(y/\mu^2, \tau/\mu)$ , где  $\mathcal{N}$  определена в (2.10), является решением волнового уравнения  $N_{\tau\tau} - (yN_y)_y = 0$ . Для уравнения (1.6) будем искать быстроменяющиеся асимптотики при  $\mu \rightarrow 0$  в виде  $N(y, \tau, \mu) = A(y)\mathcal{N}(\Phi(y)/\mu^2, \tau/\mu)(1 + O(\mu))$ , где Функции  $\Phi, A$  определим из условия малости невязки  $R$  (ниже “медленные” переменные равны  $Y = \Phi(y)/\mu^2, T = \tau/\mu$ ):

$$R = \frac{A(y)}{\mu^2} \mathcal{N}_{TT}(Y, T) - \frac{A(y)D(y)\Phi'(y)^2}{\mu^4} \mathcal{N}_{YY}(Y, T) - \\ - \frac{A(y)}{\mu^2} \mathcal{N}_Y(Y, T) \left( D'(y)\Phi'(y) + 2D(y)\frac{A'(y)}{A(y)}\Phi'(y) + D(y)\Phi''(y) \right) + (D(y)A'(y))'\mathcal{N}(Y, T).$$

Невязка будет мала, когда первые три слагаемых составят эталонное волновое уравнение, для чего нужно потребовать

$$\frac{D(y)\Phi'(y)^2}{\mu^2} = \frac{\Phi(y)}{\mu^2}, \quad D'(y)\Phi'(y) + 2D(y)\frac{A'(y)}{A(y)}\Phi'(y) + D(y)\Phi''(y) = 1.$$

Переобозначим  $\Phi(y) = S_\gamma(y)^2/4$  и после интегрирования получим

$$S_\gamma(y) := \left| \int_\gamma^y \frac{dy}{\sqrt{D(y)}} \right|, \quad A_\gamma(y) = \varepsilon \left( \frac{S_\gamma(y)}{\sqrt{D(y)}} \right)^{1/2}.$$

Если выбрать  $\gamma = a$  (или  $\gamma = d$ ), то амплитуда будет аналитической функцией в области  $\Omega_a$  ( $\Omega_d$ ).

В результате для невязки получаем оценку:

$$R_{a,d} = \frac{(D(y)A'(y))'}{A(y)} N_{a,d}^{run}(y, \tau) \Rightarrow \frac{\|R_{a,d}\|_C}{\left\| \frac{\partial^2 N_{a,d}^{run}}{\partial \tau^2} \right\|_C} = O(\mu^2).$$

Наконец, интегрируя второе уравнение в системе мелкой воды (1.1), получим:  $\int_{-\infty}^\tau \frac{\partial N_{a,d}^{run}(y, t)}{\partial y} dt = U_{a,d}^{run}(y, \tau)(1 + O(\mu))$ .

### 3.3.2 Доказательство Леммы 2 <sup>lem\_map</sup>

1. Рассмотрим случай с берегом и стенкой и докажем (3.22) (асимптотика (3.23) доказывается аналогично). Рассмотрим  $\tau \in [\delta_1, T_2 - \delta_1]$  для некоторого  $\delta_1 > 0$ , не зависящего от  $\mu$ , и  $y$  вблизи фронта  $y = y_1 + \lambda, y_1 = Z_a(\tau) = Z_d(\tau - T_2), \lambda = o(1)$  и разложим  $N_a^{run}(y, \tau)$  и  $N_d^{run}(y, \tau - T_2)$  в ряд по  $\lambda$ . Принимая во внимание разложение фазовой функции  $S_a(y_1 + \lambda) = \tau + \frac{\lambda}{\sqrt{D(y_1)}} + O(\lambda^2)$ ,

$S_d(Z_d(\tau - T_2) + \lambda) = T_2 - \tau - \frac{\lambda}{\sqrt{D(y_1)}} + O(\lambda^2)$ , получим:

$$\begin{aligned} N_a^{run}(y, \tau) &= \frac{\varepsilon \frac{i\tau}{\mu} \left( \frac{\tau}{\sqrt{D(y_1)}} \right)^{1/2} (1 + O(\mu + \lambda))}{(2i \frac{\tau}{\mu} + \frac{2\tau\lambda}{\mu^2 \sqrt{D(y_1)}})^{3/2}} = \frac{i\varepsilon \mu^2 \sqrt{D(y_1)} (1 + O(\mu + \lambda))}{(2i\mu \sqrt{D(y_1)} + 2\lambda)^{3/2}}; \\ N_d^{run}(y, \tau - T_2) &= \frac{-(T_2 - \tau)^{3/2} i\varepsilon \mu^2 \sqrt{D(y_1)} (1 + O(\mu + \lambda))}{(T_2 - \tau)^{3/2} (-2i\mu \sqrt{D(y_1)} - 2\lambda)^{3/2}} \\ &= \frac{-1}{e^{-3i\pi/2}} N_a^{run}(y, \tau) (1 + O(\mu + \lambda)) = i N_a^{run}(y, \tau) (1 + O(\mu + \lambda)). \end{aligned}$$

Соотношения при  $\tau \in (-T_2, 0)$ , а также для  $U_{a,d}^{run}$  и (3.23) <sup>as\_mapping\_da</sup> доказываются аналогично.

2. В случае берега и стенки, чтобы (асимптотически) удовлетворить условию на стенке, нужно доказать (3.24) <sup>as\_mapping\_wall</sup>. Поскольку функции локализованные, то достаточно проверить это для небольшого интервала по времени  $\tau = T_1 + \lambda$ ,  $|\lambda| \ll 1$ :

$$\begin{aligned} U_a^{run}(b, T_1 + \lambda) &= \frac{2i(S_a(b)/\sqrt{D(b)})^{3/2}}{(1 + \frac{2i\tau}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}(S_a(b)^2 - \tau^2))^{3/2}} = \frac{2i\mu^3(1 + O(\mu + \lambda))T_1^{3/2}}{T_1^{3/2} D(b)^{3/4} (2i\mu - 2\lambda)^{3/2}}, \\ U_a^{run}(b, -T_1 + \lambda) &= \frac{2i\mu^3(1 + O(\mu + \lambda))T_1^{3/2}}{T_1^{3/2} D(b)^{3/4} (-2i\mu + 2\lambda)^{3/2}} = -i U_a^{run}(b, T_1 + \lambda) (1 + O(\mu + \lambda)). \end{aligned}$$

### 3.3.3 Доказательство Теоремы 1 <sup>prop\_running\_lin\_D</sup>

Перейдем к безразмерным переменным, применив замену  $N = \tilde{N}D_0$ ,  $U = \tilde{U}c_0$ ,  $y = \tilde{y}y_0$ ,  $\tau = \tilde{\tau}T_0$ . Дальше в доказательстве будем рассматривать только безразмерные величины и знак “тильды” для простоты опускаем.

1. Проверим, что в случае берега и стенки формулы для  $N^{run}$  (3.27) <sup>as\_piece\_N\_running\_D</sup> определяют локализованные функции и что в каждый момент времени существенный вклад в суммы вносит не более двух слагаемых. Рассмотрим  $y \in [a, b]$ , для  $\tau : |\tau - 2kT_1| > T_1 + \delta_\tau$  справедливо  $\lambda_k = ||\tau - 2kT_1| - S_a(y)| > |\tau - 2kT_1| - T_1 + \delta_\tau > \delta_\tau$ . Теперь воспользуемся оценками вдали от фронта (3.19) <sup>as\_localized\_2</sup> леммы 1, <sup>lem\_as</sup> что даст:

$$\begin{aligned} \sum_{k: |\tau - 2kT_1| > T_1 + \delta_\tau} |N_a^{run}(y, \tau - 2kT_1)| &\leq \\ &\leq C \sum_{k: |\tau - 2kT_1| > T_1 + \delta_\tau} \frac{\mu^2}{|\tau - 2kT_1|^{1/2} (|\tau - 2kT_1| - T_1 + \delta_\tau)^{3/2}} \leq \\ &\leq 2C \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left( \frac{\mu^2}{(T_1 + 2kT_1)^{1/2} (\delta_\tau + 2kT_1)^{3/2}} \right) = O(\mu^2). \end{aligned}$$

(Здесь и далее под  $C$  будем понимать некоторые константы, не зависящие от  $\mu$ , вообще говоря разные в разных местах.) Таким образом, в каждый момент времени существенный вклад в сумму вносят не более двух слагаемых для  $k : |\tau - 2kT_1| \leq T_1 + \delta_\tau$ . При этом одно существенное слагаемое есть всегда, а два могут быть только при  $\tau = T_1 + o(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , когда справедливы оценки (3.24). В силу оценок (3.16), (3.17) простыми вычислениями, аналогичными выводу (3.22), (3.24) в лемме 2, проверяются оценки (3.28), (3.29) для нормы  $\|N^{run}\|$  в соответствующие моменты времени. Те же рассуждения приводят к оценкам на функции  $U^{run}$ , и на производные.

В случае двух берегов отметим только, что благодаря срезающей функции при  $|\tau| \geq T_2$  функция  $\varrho_a(y)N_a^{run}(y, \tau)$  не равна нулю лишь при таких  $y$ , что  $\lambda = |\tau - S_a(y)| \geq \delta_1$  для некоторого  $\delta_1$  не зависящего от  $\mu \rightarrow 0$  (и то же верно для  $(1 - \varrho_a(y))N_d^{run}(y, \tau)$ ), после чего оценки для норм и остатков получаются аналогично случаю берега и стенки.

2. Рассмотрим случай двух берегов и оценим норму невязки  $\|R\| = \|R\|_{C(\Omega)}$ :

$$\begin{aligned} \|R\| &= \|\hat{\square}_c N^{run}\| = \|\text{Re}(R_1 + R_2 + R_3)\| \leq \|R_1\| + \|R_2\| + \|R_3\|, \\ R_1 &= \varrho_a(y) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^{2k} \hat{\square}_c N_a^{run}(y, \tau - 2kT_2) + \\ &\quad + (1 - \varrho_a(y)) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i)^{2k+1} \hat{\square}_c N_d^{run}(y, \tau - (2k+1)T_2), \\ R_2 &= [\hat{L}_c, \varrho_a(y)] \left( \sum_{k: |\tau - 2kT_2| > T_2} (-i)^{2k} N_a^{run}(y, \tau - 2kT_2) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k: |\tau - (2k+1)T_2| > T_2} (-i)^{2k+1} N_d^{run}(y, \tau - (2k+1)T_2) \right); \\ R_3 &= (-i)^{2k} [\hat{L}_c, \varrho_a(y)] (N_a^{run}(y, t) - \text{sign}(t)(-i)N_d^{run}(y, t - \text{sign}(t)T_2)); \\ &\quad t = \tau - 2kT_2 \in [-T_2, T_2]. \end{aligned}$$

где  $[\hat{L}, \varrho_a(y)] = D(y)\varrho_a''(y) + D'(y)\varrho_a'(y) + 2D(y)\varrho_a'(y)\frac{\partial}{\partial y}$  — коммутатор, являющийся в данном случае дифференциальным оператором первого порядка, тождественно равным нулю в  $\delta$ -окрестности берегов  $y = a$  и  $y = d$ .

Первая часть невязки  $R_1$  мала в силу явной формулы для невязки (3.20) из леммы 1 (где нужно положить  $\Omega_a = \text{supp}(\varrho_a) \subset [a, d - \delta]$ ,  $\Omega_d = \text{supp}(1 - \varrho_a) \subset [a + \delta, d]$ ) и только что доказанной оценки для суммы (3.30) из первого пункта теоремы:

$$\begin{aligned} \|R_1\|_{C(\Omega)} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\|N_a^{run}(y, \tau - 2kT_2)\|_{C(\Omega_a)} + \|N_d^{run}(y, \tau - (2k+1)T_2)\|_{C(\Omega_d)}) = \\ &= O(\|N^{run}\|_{C(\Omega)}) = O(\mu^2 \|N_{\tau\tau}^{run}\|_{C(\Omega)}). \end{aligned}$$

Малость  $R_2$  доказывается аналогично малости остаточной части суммы. Именно, при  $|\tau| > T_2$ , для любого  $y \in \Omega_a$ :  $\lambda(y, \tau) = |\tau - S_a(y)| \geq |\tau| - T_2 + \delta_1$

для некоторого  $\delta_1 > 0$ , не зависящего от  $\mu$ , поэтому, согласно оценке вдали от фронта (3.19) из леммы 1, получаем:

$$\|R_2\|_{C(\Omega)} \leq C\mu^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{(T_2 + kT_2)^{1/2}(\delta_1 + kT_2)^{3/2}} = O(\mu^2).$$

Оценим  $R_3$ . Пусть для определенности  $t = \tau - 2kT_2 > 0$ , для отрицательного  $t$  рассуждения те же. Поскольку  $\varrho'_a(y)$  равно нулю в  $\delta$ -окрестности  $y = a$  и  $y = d$ , то достаточно рассмотреть  $t \in [\delta_1, T_2 - \delta_1]$  для некоторого  $\delta_1 > 0$ , не зависящего от  $\mu \rightarrow 0$ . При  $y : |t - S_a(y)| = O(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$  из оценок вдали от фронта (3.19) получаем  $R_3 = O(\mu^2)$ , так что остается случай вблизи фронта  $y = Z_a(t) + \lambda, \lambda = o(1)$ . Применяя коммутатор в  $R_3$ , получим

$$\begin{aligned} [\hat{L}, \varrho_a(y)](N_a^{run}(y, t) + iN_d^{run}(y, t - T_2)) &= R_4 + R_5, \\ R_4 &= \varrho'_a(y)(B_a(y)\mathcal{N}(\frac{S_a(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t}{\mu}) + iB_d(y)\mathcal{N}(\frac{S_d(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t - T_2}{\mu})), \\ R_5 &= \frac{\varrho'_a(y)}{\mu^2 \sqrt{D(y)}} \left( S_a(y)^{3/2} \mathcal{N}_Y(\frac{S_a(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t}{\mu}) - iS_d(y)^{3/2} \mathcal{N}_Y(\frac{S_d(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t - T_2}{\mu}) \right). \end{aligned}$$

Здесь  $B_{a,d}(y)$  – некоторые гладкие функции, не зависящие от  $\mu$ , а при дифференцировании  $\mathcal{N}$  учтено соотношение  $S'_a(y) = -S'_d(y) = 1/\sqrt{D(y)}$ . Для  $R_4$  сразу получаем  $\|R_4\|_{C(\Omega)} = O(\|N^{run}\|)$ . Для оценки  $R_5$  проведем вычисления как в лемме 2. Для  $y = y_1 + \lambda, y_1 = Z_a(t) = Z_d(t - T_2)$  разложим  $N_{a,d}^{run}(y, t)$  в ряд Тейлора по малому  $\lambda = o(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$ . С учетом разложения фазовой функции  $S_a(y_1 + \lambda) = t + \frac{\lambda}{\sqrt{D(y_1)}} + O(\lambda^2)$ ,  $S_d(y_1 + \lambda) = T_2 - t - \frac{\lambda}{\sqrt{D(y_1)}} + O(\lambda^2)$  получим:

$$\begin{aligned} S_a(y)^{3/2} \mathcal{N}_Y(\frac{S_a(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t}{\mu}) &= \frac{(1 + \frac{it}{\mu})S_a(y)^{3/2}}{(1 + 2i\frac{t}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}(S_a(y)^2 - t^2))^{5/2}} = \\ &= \frac{\frac{it^{5/2}}{\mu}(1 + O(\mu + \lambda))}{(2i\frac{t}{\mu} + \frac{2t\lambda}{\mu^2 \sqrt{D(y_1)}})^{5/2}} = \frac{i\mu^{3/2}(1 + O(\mu + \lambda))}{(2i + \frac{2\lambda}{\mu \sqrt{D(y_1)}})^{5/2}}; \\ S_d(y)^{3/2} \mathcal{N}_Y(\frac{S_d(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t - T_2}{\mu}) &= \frac{(1 + \frac{i(t-T_2)}{\mu})S_d(y)^{3/2}}{(1 + 2i\frac{t-T_2}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}(S_d(y)^2 - (t - T_2)^2))^{5/2}} = \\ &= \frac{-i\mu^{3/2}(T_2 - t)^{5/2}(1 + O(\mu + \lambda))}{(T_2 - t)^{5/2}(-2i - \frac{2\lambda}{\mu \sqrt{D(y_1)}})^{5/2}} = \\ &= -iS_a(y)^{3/2} \mathcal{N}_Y(\frac{S_a(y)^2}{4\mu^2}, \frac{t}{\mu})(1 + O(\mu + \lambda)). \end{aligned}$$



И таким образом, сумма будет мала:

$$|R_5| = \frac{\mu^{3/2}}{\mu^2(2i + \frac{2\lambda}{\mu\sqrt{D(y_1)}})^{5/2}} O(\mu + \lambda) = O(\sqrt{\mu}),$$

что соответствует норме  $\|N^{run}\|$  при соответствующем  $\tau : t \in [\delta_1, T_2 - \delta_1]$ .

Объединяя оценки для  $R_{1,2,3}$  получим требуемое для случая двух берегов.

Для случая берега и стенки невязка состоит из суммы, аналогичной  $R_1$ , так что малость невязки получается использованием формулы (3.20) из леммы 1 и оценки на остаточную часть (3.31) из первого пункта теоремы.

### 3.4 Пример. Случай параболического дна

Рассмотрим бассейн с параболическим дном  $D(y) = 1 - y^2$  и возьмем  $g = 1$ . Тогда линеаризованная безразмерная система мелкой воды имеет вид:

$$N_\tau + ((1 - y^2)U)_y = 0, \quad U_\tau + N_y = 0, \quad (3.34) \quad \text{eq\_lin\_par}$$

Ее точные решения в виде стоячих волн определяются с помощью полиномов Лежандра (степени  $k$ )  $P_k(y) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dy^k} (y^2 - 1)^k$  следующим образом:

$$N^{\omega_k}(y, \tau) = \varepsilon e^{-i\theta} e^{-i\omega_k \tau} P_k(y), \quad U^{\omega_k}(y, \tau) = -i \frac{\varepsilon}{\omega_k} e^{-i\theta} e^{-i\omega_k \tau} P'_k(y), \quad \omega_k = \sqrt{k(k+1)}. \quad (3.35) \quad \text{sol\_L}$$

Составив линейную комбинацию таких решений с полиномами Лежандра разных степеней, можно получить точное решение уравнения (3.34) в виде бегущей волны. Например, можно взять следующую комбинацию:

$$N^P(y, \tau) = \sum_{k=2}^{n_0} \frac{A}{k} N^{\omega_k}(y, \tau), \quad U^P(y, \tau) = \sum_{k=2}^{n_0} \frac{A}{k} U^{\omega_k}(y, \tau). \quad (3.36) \quad \text{sol\_L}$$

На рис. 3, рис. 4 изображены решения (3.36) при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.23$ ,  $A = 0.67$  и асимптотики (3.25) при  $\varepsilon = 0.23$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $g = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = \frac{3\pi}{2}$ . Решение через (3.36) изображено в момент времени, когда произошла фокусировка стоячих волн, так что на некотором интервале времени  $\tau = O(1)$  это решение ведет себя как бегущая волна. Спустя какое-то время эта бегущая волна снова “рассыпается” на отдельные волны.

На этих рисунках мы не ставим целью приблизить решение (3.36) асимптотикой (3.25) или, наоборот, разложить локализованную в начальный момент волну (3.25) по стоячим волнам (3.36) (что конечно же можно сделать). Здесь мы сравниваем качественное поведение асимптотики в виде бегущей волны (3.25) и точного решения (3.36) на интервале времени, когда произошла фокусировка стоячих волн. В частности, на рис. 3 проиллюстрирована метаморфоза

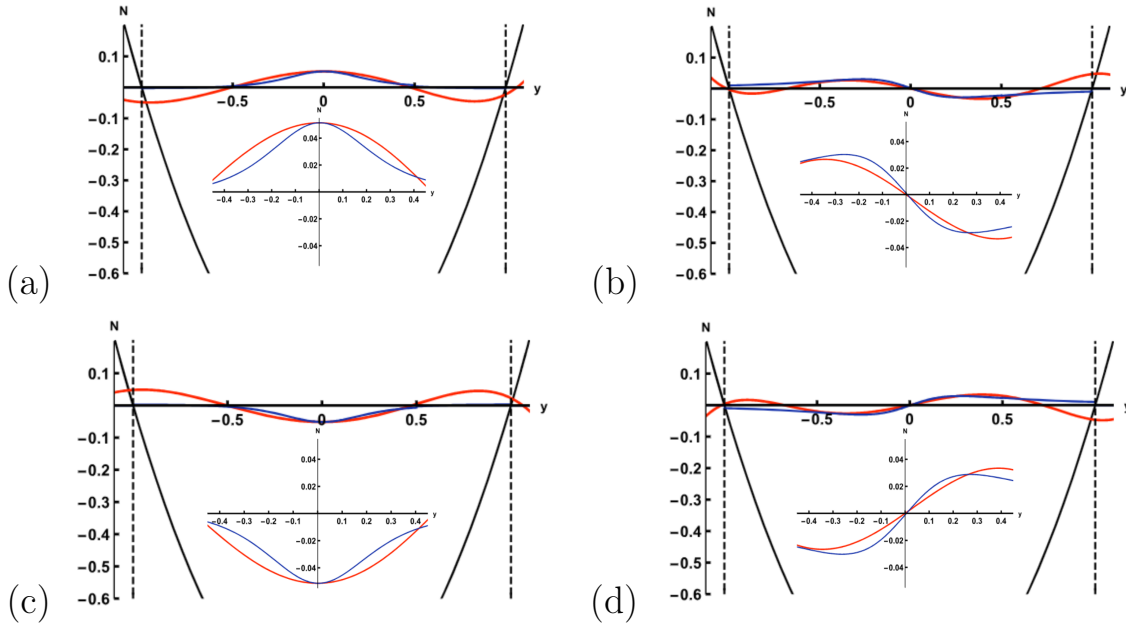


Рис. 3 - На рисунке изображены кривые для возвышения свободной поверхности в случае параболического дна  $D(y) = 1 - y^2$  (черная кривая) при  $g = 1$ : точное решение (3.36) (красное) рассчитано при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.23$ ,  $A = \frac{2}{3}$ , (a)  $\tau = 1.4$ ,  $\theta = 0$ , (b)  $\tau = 1.33$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , (c)  $\tau = 1.4$ ,  $\theta = \pi$ , (d)  $\tau = 1.33$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , асимптотическое решение (3.25) (синее) - при  $\varepsilon = 0.23$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = \frac{3\pi}{2}$ , (a)  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ , (b)  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ , (c)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , (d)  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

профиля при отражении волн от берега, похожая на переход из “шапочки в N-волну”, а на рис. 4 при отражении профиль волны либо не меняется, либо меняет знак, т.е. эти функции соответствуют собственным функциям преобразования Гильберта с собственными значениями  $\pm 1$ .

#### 4 Асимптотические решения нелинейной системы уравнений мелкой воды

В этом разделе обсуждаются асимптотические формулы для бегущей нелинейной волны в общем случае.

##### 4.1 Замена для выравнивания границы

После того, как точное или асимптотическое решение линеаризованной системы (1.6) построено, асимптотика нелинейной системы получается с помощью замены. Для этого можно использовать, например, замену (1.5), которая позволит задать асимптотику нелинейной задачи в параметрическом виде по решению линейной задачи.

На практике удобнее использовать явную замену, предложенную в [23],

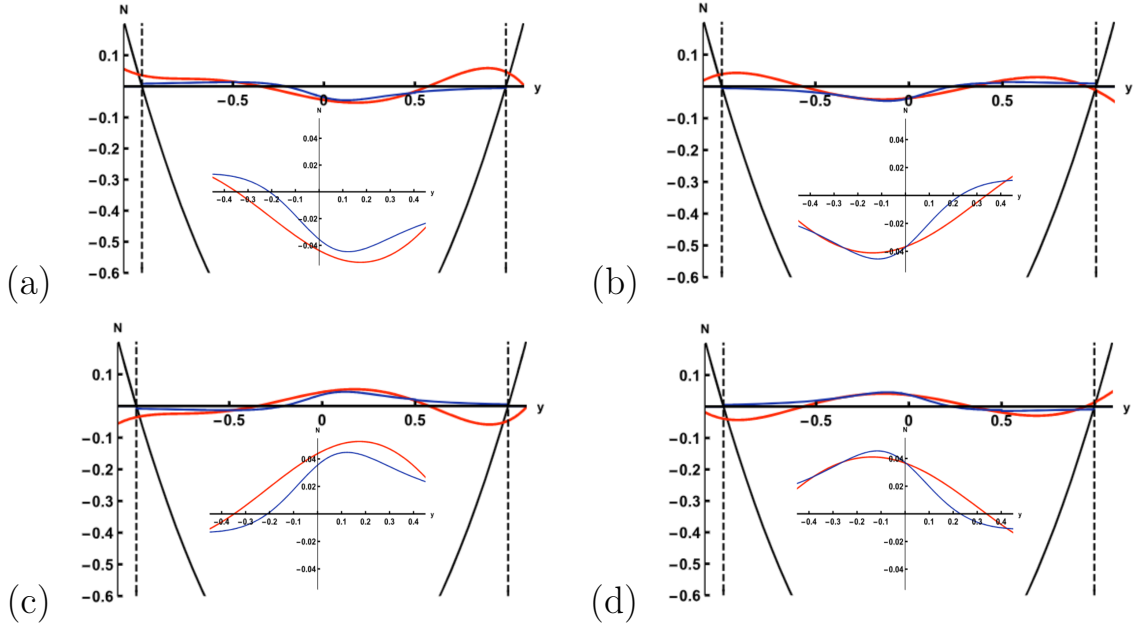


Рис. 4 - На рисунке изображены кривые для возвышения свободной поверхности в случае параболического дна  $D(y) = 1 - y^2$  (черная кривая) при  $g = 1$ : точное решение (3.36) (красное) рассчитано при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.23$ ,  $A = \frac{2}{3}$ , (a)  $\tau = 1.4$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ , (b)  $\tau = 1.33$ ,  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ , (c)  $\tau = 1.4$ ,  $\theta = \pi$ , (d)  $\tau = 1.33$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , асимптотическое решение (3.25) (синее) - при  $\varepsilon = 0.23$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = \frac{3\pi}{2}$ , (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , (c)  $\theta = \pi$ , (d)  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

img\_L

приближающую (1.5) и приводящую к явным функциям  $y = \mathcal{Y}(x, t)$ ,  $\eta(x, t) = N(\mathcal{Y}(x, t), t)$ ,  $u(x, t) = U(\mathcal{Y}(x, t), t)$ , где (для достаточно малого  $\delta > 0$  и той же срезающей функции  $\rho(y)$ , что и в (1.5)):

$$x_\delta(x) = \begin{cases} \max\{a + \delta, x\}, & x \leq b, \\ \min\{d - \delta, x\}, & x \geq b, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{Y}(x) = \begin{cases} a + (x_\delta - a) \frac{D(x) + N(a, t)}{D(x_\delta) - \rho(x_\delta)N(x_\delta, t) + N(a, t)}, & x \leq b, \\ d + (x_\delta - d) \frac{D(x) + N(d, t)}{D(x_\delta) - \rho(x_\delta)N(x_\delta, t) + N(d, t)}, & x \geq b. \end{cases}$$

Заметим, что при  $\delta \rightarrow 0$  получаем в пределе  $\mathcal{Y} \sim (D(x) + N(0, t))/(D'(0) - N_y(0, t))$ . На практике  $\delta$  стоит выбирать меньше амплитуды волны, например  $\delta = \varepsilon^2 \ll \mu^4$ .

**Утверждение 5.** (см. [18, теорема 2]) При достаточно малой амплитуде  $\varepsilon \ll 1$  применение замены (1.5) или (4.1) к точному решению (например, к  $N^P$  (3.36) для параболического дна или  $N^J$  (2.2) для ровного наклонного), даст асимптотику  $\text{mod } O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  исходной нелинейной задачи (1.1) с соответствующими условиями на границе:

$$\eta(x, t) = N(\mathcal{Y}(x, t), t)(1 + O(\varepsilon)), \quad u(x, t) = U(\mathcal{Y}(x, t), t)(1 + O(\varepsilon)).$$

*Доказательство.* Это утверждение является частным случаем [18, теорема 2] для конкретных примеров функции дна, соответствующих точных решений и линеаризующей замены.  $\square$

Основная идея (см. также [23]) в том, чтобы для приближенного описания нелинейного набега применять замену (4.1) к коротковолновой асимптотике линеаризованной задачи, а не только лишь к точному решению. Строгое доказательство того, что в результате получится асимптотика нелинейной задачи существенно осложняется тем, что в задаче присутствуют два малых параметра, и надо рассматривать их согласованный предел. “На физическом уровне строгости” понятно, что для каждого (в том числе малого)  $\mu$  можно подобрать достаточно малое  $\varepsilon$ , при котором невязки будут малы. Таким образом, в первую очередь интересен вопрос, при каком соотношении длины волны и амплитуды  $\varepsilon^*(\mu)$  замена (4.1) может быть корректно применена к линейным асимптотикам, построенным в п. 3. Анализ для случая ровного наклонного дна (приведенный в п. 2.3) позволяет выдвинуть гипотезу, что и условие существования нелинейного решения даст близкие соотношения амплитуды и длины волны, а при меньших амплитудах  $\varepsilon \ll \varepsilon^*(\mu)$  полученные формулы определяют асимптотику нелинейной задачи.

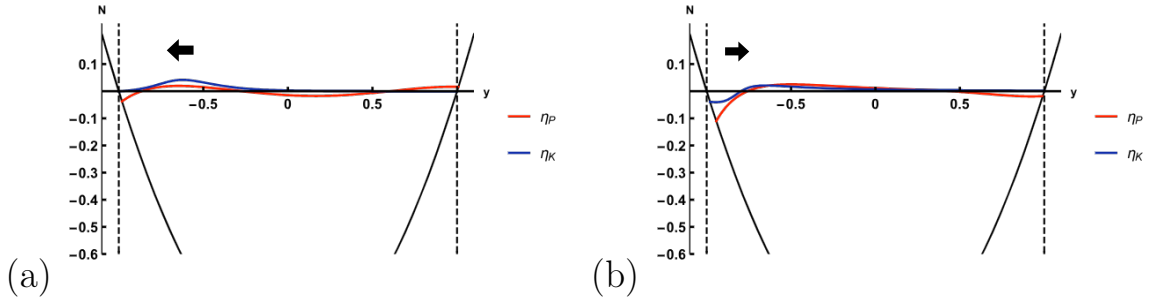


Рис. 5 - На рисунке изображены асимптотики возвышения свободной поверхности (синяя и красная кривые) нелинейной задачи в случае параболического дна  $D(y) = 1 - y^2$  (черная кривая) при  $g = 1$ , задаваемые функцией  $\eta(x, t) = N(\mathcal{Y}(x, t), t)$ , где  $\mathcal{Y}(x, t)$  определяется из (4.1) с  $\delta = 0.001$ , а функция  $N(y, \tau)$  строится двумя способами: (1) разложением по стоячим волнам (3.36) (красная) при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.17$ ,  $A = \frac{2}{3}$ ,  $\theta = 0$  в моменты времени (a)  $\tau = 2.03$ , (b)  $\tau = 3.6$ , и (2) по формуле (3.25) (синяя) – при  $\varepsilon = 0.17$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$  в моменты времени (a)  $\tau = 5.34$ , (b)  $\tau = 6.91$ . Стрелками отмечено направление движения волны.  $\square$

На рис. 5 изображены нелинейные набег на берег и отражение от него в случае параболического дна  $D(x) = 1 - x^2$ . Они иллюстрируются графиками функций  $N(Y(x), \tau)$ , где  $Y(x)$  определяется из (4.1),  $\delta = 0.001$ , а функции  $N(y, \tau)$ : из (3.36) рассчитана при  $g = 1$ ,  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.23$ ,  $A = \frac{2}{3}$ , из (3.25) – при  $\varepsilon = 0.23$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = \frac{3\pi}{2}$ .

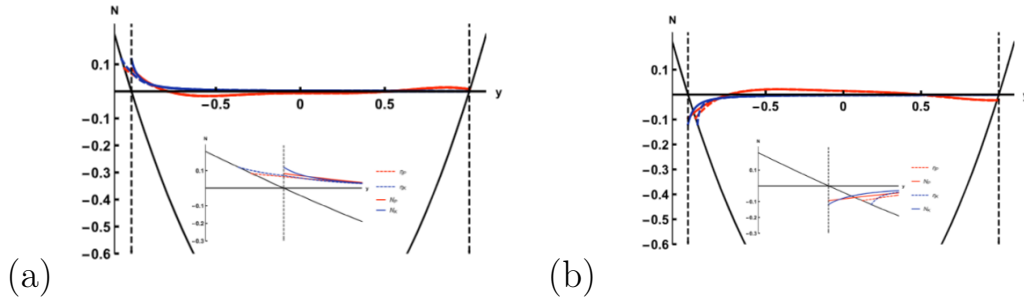


Рис. 6 - На рисунке изображены кривые для возвышения свободной поверхности линеаризованной задачи  $N(y, \tau)$  (сплошные кривые) и нелинейной  $\eta(x, t) = N(\mathcal{Y}(x, t), t)$  (штриховые) – в случае параболического дна  $D(y) = 1 - y^2$  (черная кривая) при  $g = 1$ .  $\mathcal{Y}(x, t)$  определяется из (4.1) при  $\delta = 0.001$ , а функция  $N(y, \tau)$  задается двумя способами: (1) разложением по стоячим волнам (3.36) (красная) при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.17$ ,  $A = \frac{2}{3}$ ,  $\tau = 2.97$ , (a)  $\theta = 0$  или (b)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , и (2) по формуле (3.25) (синяя) – при  $\varepsilon = 0.17$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $S_d(y) = \pi/2 - \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = 2\pi$ , (a)  $\theta = -\frac{3\pi}{4}$  или (b)  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ . На увеличенной картинке показана область вблизи берега.

На рис. 6 изображены максимальные нелинейные набеги на берег, а также соответствующие им линейные набеги, в случае параболического дна  $D(x) = 1 - x^2$ . Они иллюстрируются графиками  $N(Y(x), \tau)$  и  $N(y, \tau)$ , где  $Y(x)$  определяется из (4.1),  $\delta = 0.001$ , а функции  $N(y, \tau)$ : из (3.36) рассчитана при  $n_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 0.17$ ,  $A = \frac{2}{3}$ ,  $\tau = 2.97$ , из (3.25) (синяя) – при  $\varepsilon = 0.17$ ,  $S_a(y) = \pi/2 + \arcsin y$ ,  $b = 0$ ,  $\mu = 0.359$ ,  $\tau = 2\pi$ .

На этих рисунках проиллюстрированы свойства решения линейной (1.6), (1.9) и нелинейной задач (1.1), (1.2), связанные с преобразованием профиля волны и условием на подвижной границе.

## 4.2 Связь критического значения амплитуды с длиной волны

В этом пункте мы исследуем вопрос, при каких соотношениях длины волны  $\mu$  и амплитуды  $\varepsilon$  замена (4.1) корректно определена. Так же как в п. 2.3 будем искать критическую амплитуду  $\varepsilon^*(\mu)$  как минимальную амплитуду (для соответствующего семейства асимптотик линейной задачи), при которой якобиан замены (1.5) обращается в нуль на берегу в какой-то момент времени:

$$\varepsilon^* = \frac{D'(a)}{\max_{\tau} (N_y(a, \tau)/\varepsilon)}. \quad (4.2)$$

Соответственно, при меньших значениях амплитуды  $\varepsilon < \varepsilon^*$  замену можно корректно применить.

### 4.2.1 Численный анализ критической амплитуды для ровного наклонного дна

Вычислим критическое значение амплитуды в случае дна вида  $D(x) = \gamma x$  из условия (4.2). Для поиска максимума исследуем стационарные точки  $N(X(y), T(\tau)) = \text{Re} \left( \varepsilon D_0 \exp \frac{-i\pi m}{2} \frac{1+iT}{((1+iT)^2+4X)^{3/2}} \right)$ , которые определяются из условия  $N_y T = 0$ . Его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{P_8(T)}{Q_8(T)} &= 0, \\ P_8(T) &= (T^2 - 1) \left( 8(T^5 - 6T^3 + T) \sin(\pi m) + (T^2 + 1)^3 \right) \\ &\quad + (T^8 - 28T^6 + 70T^4 - 28T^2 + 1) \cos(\pi m), \\ Q_8(T) &= (T^2 - 1) \left( (T^6 - 15T^4 + 15T^2 - 1) \sin(\pi m) - 2T(3T^4 - 10T^2 + 3) \cos(\pi m) \right). \end{aligned}$$

В числителе стоит полином  $P_8(T)$  восьмой степени, три его корня задаются уравнениями:

$$\begin{aligned} T_1 &= -\tan\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{\sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left(-9\sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right)}{9\sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}} \\ &\quad + \sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}, \\ T_2 &= -\tan\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{(1 - i\sqrt{3}) \sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left(-9\sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right)}{18\sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) \sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}, \\ T_3 &= -\tan\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{(1 + i\sqrt{3}) \sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left(-9\sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right)}{18\sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \sec\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sqrt[3]{-\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)}, \end{aligned}$$

а оставшиеся 5 являются корнями полинома

$$P_5(T; a) = T^5 + 5aT^4 - 10T^3 - 10aT^2 + 5T + a = 0, \quad a = \tan\left(\frac{\pi m}{2}\right).$$

Эти корни можно найти следующим образом. Определим функцию

$$\mathcal{A}(T) = -\frac{T^5 - 10T^3 + 5T}{5T^4 - 10T^2 + 1}. \quad (4.3)$$

Тогда  $P_5(T, \mathcal{A}(T)) = 0$ , т.е. один корень  $T_0(a)$  полинома  $P_5(T; a)$  в зависимости от  $a$  можно определить параметрически:  $T_0(a) = t, a = \mathcal{A}(t)$ . После чего оставшиеся корни можно найти по общим формулам как корни полинома четвертой степени  $P_4(T)$ :  $P_5(T; a) = (T - T_0(a))P_4(T; a)$ .

Тогда, максимальное значение  $N_y(0, T)$  ищется как максимум из значений в краевых и стационарных точках. Результат численных расчетов был описан

в примере п.2.3. Отметим, что вычисления проводятся при помощи аналитических расчетов пакета Wolfram Mathematica (см. <https://wolfram.com/>).

#### 4.2.2 Численный анализ критической амплитуды для параболического дна

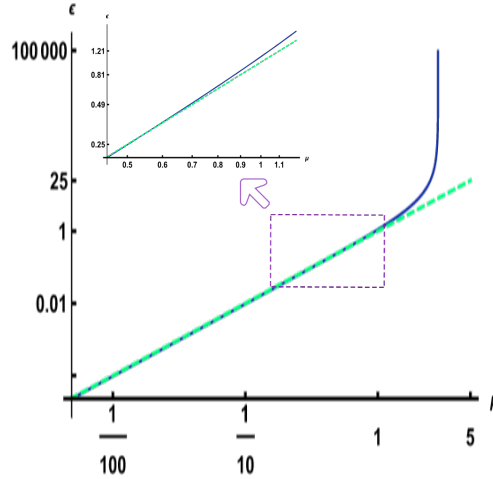


Рис. 7 - Логарифмический график зависимости (полученной численно) критической амплитуды решения нелинейной задачи, представленного в виде Канонического оператора, от длины волны (синий). Логарифмический график функции  $\varepsilon = \mu^2$  (зеленый). Хорошее совпадение для длины волны, представляющей собой малый параметр ( $\mu \ll 1$ ).

Для решения (3.36), записанного через полиномы Лежандра, условие (4.2) определяет критическую амплитуду для каждого значения  $n$  (степени полинома). Если считать длиной волны величину  $\mu = \frac{2}{\sqrt{n_0(n_0+1)}}$ , то можно исследовать зависимость критической амплитуды от длины волны. Результаты численного анализа приведены на рис.8.

Для решения (3.25), записанного с помощью канонического оператора Маслова, условие (4.2) определяет зависимость амплитуды  $\varepsilon$  от длины волны  $\mu$ . Результаты численного анализа приведены на рис.7.

В обоих случаях численный анализ определяет следующую связь малых параметров  $\varepsilon \asymp \mu^\kappa$ ,  $\kappa \approx 2$ .

#### Благодарности

Авторы благодарны С.Ю. Доброхотову за ценные обсуждения и поддержку. Работа выполнена в рамках гранта РНФ 21-11-00341.



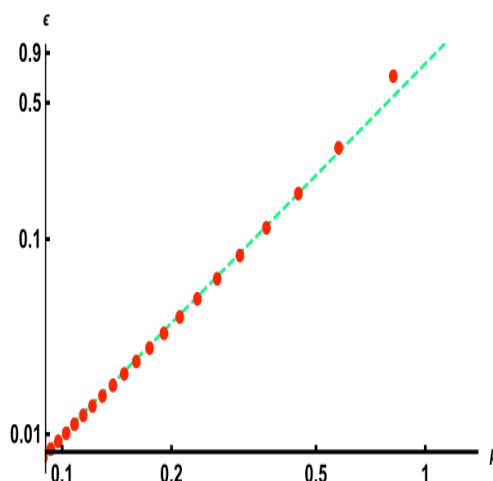


Рис. 8 - Красные точки отображают логарифмическую зависимость критической амплитуды решения нелинейной задачи, представленного в виде суммы полиномов Лежандра (амплитуда получена численно), от длины волны. Логарифмический график функции  $\varepsilon = 0.79\mu^{1.9}$  (зеленый). Хорошее совпадение для длины волны, представляющей собой малый параметр ( $\mu \ll 1$ ).

img\_c

## Список литературы

- [Stoker] [1] J. J. Stoker, *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1958 (reprinted in 1992)
- [novskii] [2] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, Нижний Новгород, ИПФ РАН, 1996
- [tenskii] [3] L.N. Sretensky, *Theory of Fluid Wave Motions* (Nauka, Moscow, 1977)
- [Sturova] [4] S.V. Smirnov, K.M. Kucher, N.G. Granin, I.V. Sturova, 2014, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, Vol. 50, No. 1, pp. 92–102.
- [inovich] [5] A. B. Rabinovich, *Seiches and Harbor Oscillations*, Handbook of Coastal and Ocean Engineering, pp. 193–236 (2009) DOI: 10.1142/9789813204027\_0011
- [senyeva] [6] Арсеньева Н. М. Сейши на озерах СССР / Н. М. Арсеньева, Л. К. Давыдов, Л. Н. Дубровина, Н. Г. Конкина. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.
- [CG] [7] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, *J. Fluid Mech.* **4** (1958) 97–109
- [DT10] [8] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью  $c = \sqrt{x}$ , *УМН* **65** **1** (391) (2010) 185–186.
- [edvedev] [9] С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков, О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука  $c^2 = x$ , *Матем. заметки* **93** **5** (2013) 725–736



- Chirkunov [10] Yu. A. Chirkunov, S. Yu. Dobrokhotov, S. B. Medvedev, D. S. Minenkov, Theoretical and Mathematical Physics, 2014, 178:3, 278–298
- Pelinovsky09 [11] I. Didenkulova, E. Pelinovsky, Non-dispersive traveling waves in inclined shallow water channels, *Phys. Lett. A* **373** **42** (2009) 3883
- Pelinovsky14 [12] A. Rybkin, E. Pelinovsky, I. Didenkulova, Non-linear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier–Greenspan approach. *Journal of Fluid Mechanics* **748** (2014) 416–432
- Pelinovsky17 [13] D. Anderson, M. Harris, H. Hartle, et al., Run-Up of Long Waves in Piecewise Sloping U-Shaped Bays, *Pure Appl. Geophys.* **174** (2017) 3185
- Pelinovsky21 [14] A. Rybkin, D. Nicolsky, E. Pelinovsky, M. Buckel, The Generalized Carrier–Greenspan Transform for the Shallow Water System with Arbitrary Initial and Boundary, *Conditions. Water Waves.* **3** **9** (2021)
- Brocchini [15] M. Antuono, M. Brocchini, The Boundary Value Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations, *Studies in Applied Mathematics* **119** **1** (2007) 73–93
- Min12 [16] Д. С. Миненков, Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью, *Матем. заметки* **92** **5** (2012) 721–730
- Chugunov20 [17] V. A. Chugunov, S. A. Fomin, W. Noland, B. R. Sagdiev, Tsunami runup on a sloping beach, *Comp and Math Methods* **2:e1081** (2020)
- DMN22 [18] S.Y. Dobrokhotov, D.S. Minenkov, V.E. Nazaikinskii, Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach. *Russ. J. Math. Phys.* **29** 28–36 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1061920822010034>
- OlRadk [19] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. 1969, ВИНТИ, М., 1971, 7–252
- VZh [20] T. Vukašinac and P. Zhevandrov, Geometric Asymptotics for a Degenerate Hyperbolic Equation, *Russ. J. Math. Phys.* **9** **3** (2002) 371–381
- Vladimirov [21] В. С. Владимиров, Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1981.
- Solomyak [22] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Ленинград, Ленинградский Университет, 1980

- [DKMN23] [23] С. Ю. Доброхотов, В. А. Калининченко, Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский, Асимптотики длинных стоячих волн в одномерных бассейнах с пологими берегами: теория и эксперимент, *???? ?? ? ???* (2023)
- [Min17] [24] D. S. Minenkov, Asymptotics near the shore for 2D shallow water over sloping planar bottom, *Days on Diffraction (DD), St. Petersburg* (2017) 240–243
- [maraskii] [25] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 1977, . - Изд. 5-е, испр. - М.: Наука.
- [DSZ10] [26] С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, “Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения”, Матем. заметки, **88**(6) (2010), 942–945
- [ADD18] [27] A. V. Aksenov, S. Yu. Dobrokhotov, K. P. Druzhkov, Exact Step-Like Solutions of One-Dimensional Shallow-Water Equations over a Sloping Bottom, *Mathematical Notes* **104** **6** (2018) 915–921
- [Lamb] [28] Sir Horace Lamb. The University Press, 1932 - Hydrodynamics - 738 pages
- [Chrystal] [29] Chrystal (1906). XXV.—On the Hydrodynamical Theory of Seiches. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 41, pp 599–649 doi:10.1017/S0080456800035523
- [\_Bessel] [30] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимиров, Тр. МИАН, 306, МИАН, М., 2019, 83–99; Proc. Steklov Inst. Math., 306 (2019), 74–89
- [iMazova] [31] E. N. Pelinovsky, R. Kh. Mazova, *Natural Hazards*, **6** **3** (1992) 227–249
- [ADN18] [32] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Простые асимптотики обобщенного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и их приложения в линейной задаче о набеге длинных волн на берег, *Матем. заметки* **104** **4** (2018) 483–504