Чисмодфизпроц.

1 Решение ОДУ

1.1 Разностны схемы для ОДУ и особенности аппроксимации

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ, с заданными a, T, b и $f(t)$:

$$\dot{u} + au = f(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = b. \tag{1.1}$$

Рассмотрим также две схемы ($\tau = T/N, t^n = n\tau, n = 0, ..., N$):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + au^n = f(t^n), \quad n = 0, ..., N-1, \quad u^0 = b. \tag{1.2}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + au^n = f(t^n), \quad n = 1, ..., N-1, \quad u^0 = b, \quad \frac{u^1 - u^0}{\tau} + a\frac{u^1 + u^0}{2} = f(t^{1/2}). \tag{1.3}$$

Задача 1. *Решить уравнение* (1.1) *и схемы* (1.2)-(1.3) *аналитически, проанализировать результат. Посчитать порядок аппроксимации схем* (1.2)-(1.3).

Задача 2. *Запрограммировать схемы для разных τ и разных a, нарисовать графики и сравнить численные решения с точным.*

Задача 3. *Показать с помощью графиков, что схема* (1.3) *лучше, чем* (1.2) *(см. [1, гл.4, пар.8]). Показать, что схема* (1.2) *лучше, чем* (1.3) *(см. [2, гл.8, пар.7, стр.390-...]). Объяснить.*

1.2 Нахождение характеристик

Рассмотрим (заданную) функцию $c(x) > 0$ – скорость распространения линейных одномерных волн. Уравнение характеристик

$$\dot{x} = c(x), \quad x(0) = a \tag{1.4}$$

определяет функцию $X(t, a)$ (ее физический смысл: $X(t, a)$ – точка до которой дойдет возмущение из точки a за время t). Уравнение (1.4) разрешается в квадратурах и его решение $X(t, a)$ определяется неявно из уравнения:

$$t = T(X(t, a), a) := \int_a^{X(t,a)} \frac{dx}{c(x)}. \tag{1.5}$$

Задача 4. *Задать $c(x)$, для которой интеграл $T(x, a)$ в* (1.5) *берется в элементарных функциях и вычислить его (можно использовать* **Integrate[...]**[1]*). После этого разрешить уравнение* (1.5)

[1]Здесь и далее используются команды в Wolfram Mathematica

относительно X (аналитически, возможно с помощью **Solve[...]***). В результате получится аналитическое выражение для решения уравнения характеристик* (1.4)*. Построить графики $c(x)$, полученной функции $X(t,a)$ и ее производной по параметру $X_a(t,a)$ (см.* **Plot[...], Manipulate[...], D[...]***).*

Задача 5. *Написать программу для вычисления интеграла $T(x,a)$, обратной функции $X(t,a)$ с помощью базовых комманд (***For[...], If[...], Sum[...]** *и т.п). Производную по параметру можно получить с помощью конечной разности, а для построения графика по точкам можно использовать* **ListLinePlot[...]***. Сравнить полученную функцию с конечно-разностным решением задачи* (1.4) *напрямую, с помощью схем из п. 1.1 (на графике, ессно).*

Задача 6. *Повторить две предыдущие задачи, используя высокоуровневые процедуры пакета* **NIntegrate[...], NSolve[...], FindRoot[...], NDSolve[...]***. Для получения гладкой функции (а также для вычисления обратной) можно использовать* **Interpolation[...]***. Строить графики часто удобно в параметрическом виде:* **ParametricPlot[...]***.*

2 Решение уравнений в частных производных

2.1 Волновое уравнение с переменой скоростью

В статье [3] рассматривается задача Коши (отвечающую "поршневой" модели цунами) для волнового уравнения (1.1)-(1.2) с переменной скоростью $c(x) > 0$:

$$\hat{\Box}_c \eta := \big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L}\big)\eta = 0, \quad \hat{L} := -\frac{\partial}{\partial x} c^2(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \eta|_{t=0} = \eta^0(x) = V(\frac{x-a}{\mu}), \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \tag{2.1}$$

Там построены асимптотики по малому параметру $\mu \to 0+$ этой задачи – см. формулы (2.1) - (2.7), асимптотики придставлены в двух видах: (2.5) и (2.6).

Задача 7. *Подставить одну из асимптотических формул в волновое уравнение и посчитать невязку.*

Задача 8. *Запрограммировать обе формулы и сравнить друг с другом.*

Задача 9. *Посчитать невязку численно (ессно, для заданных значений параметров, включая mu), сравнить численную невязку с вычисленной аналитически в задаче 7 и с самой асимптотической формулой, а также со старшим членом в уравнении – u_{tt} (нарисовать 4 кривые на одном графике).*

2.2 Связь с уравнением переноса

Оператор $\hat{L}$ симметричный и положительно определенный, при правильно выбранной области определения он будет самосопряженным в пространстве L^2, тогда можно определить квадратный корень $\hat{l} = \hat{L}^{1/2}$: $\hat{l}^2 \equiv \hat{L}$ (см. введение в [4]) и факторизовать волновое уравнение:

$$-i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L} = -\big(i\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}\big)\big(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{l}\big) = -\big(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{l}\big)\big(i\frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}\big). \tag{2.2}$$

Рассмотрим три оператора:

$$\hat{a} := c(x)\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{a}^* := \frac{\partial}{\partial x} \circ c(x), \quad \hat{a}_W := \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^*), \tag{2.3}$$

и уравнение переноса с каждым из них:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta - \hat{a}\eta = \frac{\partial}{\partial t}\eta - c(x)\frac{\partial}{\partial x}\eta = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta - \hat{a}^*\eta = \frac{\partial}{\partial t}\eta - \frac{\partial}{\partial x}(c(x)\eta) = 0; \quad .... \tag{2.4}$$

Заметим, что $(\hat{a})^* = \hat{a}^*$, и что $(\hat{a}_W)^* = \hat{a}_W$ – самосопряженный.

Исследование распространения быстроменяющихся решений $\eta^0(x,\mu) : (\mu\frac{\partial}{\partial x})^n\eta^0 = O(1)$ с волновой скоростью $c(x)$ – это то же, что распространение решений $\eta^0(X)$ с медленно меняющейся скоростью $c(\mu X)$ (быстрая x и медленная X координаты связаны так: $x = \mu X$).

Утверждение 1. *При медленно меняющейся волновой скорости $\tilde{c} = c(\mu x)$ операторы $i\hat{a}, i\hat{a}^*$ и $i\hat{a}_W$ приближают $\hat{l} = \sqrt{\hat{L}}$, а именно*

$$\Box_{\tilde{c}} = \big(\frac{\partial}{\partial t} \pm \hat{a}\big)\big(\frac{\partial}{\partial t} \mp \hat{a}^*\big) + O(\mu) = \big(\frac{\partial}{\partial t} \pm \hat{a}^*\big)\big(\frac{\partial}{\partial t} \mp \hat{a}\big) + O(\mu),$$
$$\Box_{\tilde{c}} = \big(\frac{\partial}{\partial t} \pm \hat{a}_W\big)\big(\frac{\partial}{\partial t} \mp \hat{a}_W\big) + O(\mu^2).$$

Задача 10. *Заметим, что коммутатор $[c(\mu x), \frac{\partial}{\partial x}] := \hat{a} - \hat{a}^* = -\mu c'(\mu x)$, $[\frac{\partial}{\partial x}, c(\mu x)] := \hat{a}^* - \hat{a} = \mu c'(\mu x)$. Доказать утверждение 1.*

Задача 11. *Решить задачу Коши $\eta|_{t=0} = \frac{1}{2}\eta^0(x)$ для уравнения переноса* (2.4) *с каждым из операторов $\hat{a}, \hat{a}^*, \hat{a}_W$.*

Задача 12. *Сравнить (точные) решения из предыдущей задачи с асимптотиками волнового уравнения из задачи 8.*

2.3 Линеаризованная система мелкой воды: точные решения и асимптотики

См. точные решения и замену для случая ровного наклонного дна: [5, 6]. Про линеаризацию – см. [7]. Про асимптотики линеаризованной задачи: [8, 9, 10].

Задача 13. *Проверить, что формулы [10, eq. (2.3-2.4), eq. (2.10-2.12)] (или из оригинальной статьи – [5]) определяют точные решения для случая ровного наклонного дна (подставить в систему мелкой воды или волновое уравнение и продифференцировать).*

Задача 14. *Закодить точные решения линеаризованной мелкой воды в виде стоячих или бегущих волн и исследовать влияние параметров.*

Задача 15. *Проверить что замена Кэрриера–Гринспена (в виде точечного преобразования [5]) переводит нелинейную систему в линейную точно – в случае ровного наклонного дна. Применить к точным решениям линеаризованной систмы замену Кэрриера–Гринспена (проверить, что якобиан замены не вырождается) и получить точные решения нелинейной задачи. Закодить, нарисовать, исследовать.*

Список литературы

[1] **С.К. Годунов, В.С. Рябенький**, Разностные схемы. Введение в теорию. Изд. 2-е доп. и пер. Москва, Наука, 1977.

[2] **Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков**, Численные методы. Изд. 8-е (электронное). Москва, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.

[3] **S. Yu. Dobrokhotov, S. O. Sinitsyn, B. Tirozzi**, Asymptotics of Localized Solutions of the One-Dimensional Wave Equation with Variable Velocity. I. The Cauchy Problem, *Russian Journal of Mathematical Physics* 14 1 (2007) 28–56.

[4] **В.П. Маслов**, Операторные методы, Москва: Наука, 1973.

[5] **Доброхотов С. Ю., Тироцци Б.** Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$, *УМН* 65 1 (391) (2010) 185–186.

[6] **Доброхотов С. Ю., Медведев С. Б., Миненков Д. С.** О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука $c^2 = x$, *Матем. заметки* 93 5 (2013) 725–736.

[7] **S. Y. Dobrokhotov, D. S. Minenkov, and V. E. Nazaikinskii** Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach *Russ. J. Math. Phys.* 29 (2022) 28–36

[8] **S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii**, Nonstandard Lagrangian Singularities and Asymptotic Eigenfunctions of the Degenerating Operator $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ *Proc. Steklov Inst. Math.* 306 (2019) 74–89

[9] **С. Ю. Доброхотов, В. А. Калиниченко, Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский**, Асимптотики дл инных стоячих волн в одномерных бассейнах с пологими берегами: теория и эксперимент, *Прикладная математика и механика* 87 2 (2023) 157–175.

[10] **D. S. Minenkov, M. M. Votiakova**, Asymptotics of Long Nonlinear Propagating Waves in a One-Dimensional Pool with Gentle Shores, *Russ. J. Math. Phys.*, 30 4 (2023)