Чисмодфизпроц. Семестр 6.

1 Уравнение переноса, разностная аппроксимация, характеристики, устойчивость

Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса, с заданными $T, a(x), v(x), f(x)$:

$$u_t - c(x,t)u_x = f(x,t), \quad t \in [0,T], \quad u|_{t=0} = v^0(x). \tag{1.1}$$

Рассмотрим 3 варианта постановки задачи:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x \in \mathbb{R},\\
&(2) \quad c(x) > 0: \quad x \in (-\infty, 0], \quad u|_{x=0} = v^1(t),\\
&(3) \quad c(x) < 0: \quad x \in [0, \infty), \quad u|_{x=0} = v^1(t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим простейшие явные схемы (|_) и (_|). Для этого зафиксируем интервал $x \in [a,b]$, определим $\tau = T/N, t^n = n\tau, n = 0, ..., N$; $x \in [0,R], h = R/M, x_m = mh, m = 0, ..., M$, $c_m^n = c(x_m, t^n), f_m^n = f(x_m, t^n)$.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n, \quad n = 0, ..., N-1, \quad m = 0, ..., M-1, \tag{1.2}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0, \quad n = 0, ..., N-1, \quad m = 1, ..., M, \tag{1.3}$$

Для их замыкания нужно поставить начальные условия

$$u_m^0 = v^0(x_m), \quad m = 0, ..., M, \tag{1.4}$$

и граничные условия: рассмотрим три варианта (нужно выбрать в зависимости от задачи):

$$u_0^n = u_M^n, \quad n = 1, ..., N; \tag{1.5}$$

$$u_M^n = v^1(t^n), \quad n = 1, ..., N; \tag{1.6}$$

$$u_0^n = v^1(t^n), \quad n = 1, ..., N. \tag{1.7}$$

!!! Обратите внимание: необходимо согласовать (1) начальное и граничное условие (если граничное условие периодично, то и начальное должно быть периодично); (2) граничные условия в разностной задаче и в дифференциальной; (3) выбранная схема должна соответствовать “физике” задачи, а именно направлению распространению характеристик ,определяемых знаком $c(x)$.

Еще можно рассмотреть симметричную схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \quad n = 0, ..., N-1, \quad m = 1, ..., M-1, \tag{1.8}$$

для ее замыкания нужно 2 граничных условия (значения на одной из границ можно определять по схеме (|_) или (_|), в зависимости от границы).

У явных схем могут быть проблемы с устойчивостью, поэтому рассмотрим также неявные схемы:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} = f_m^n, \quad n = 0, ..., N-1, \quad m = 0, ..., M-1, \tag{1.9}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - c_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = f_m^n, \quad n = 0, ..., N-1, \quad m = 1, ..., M. \tag{1.10}$$

При расчете неявных схем, надо на каждом временном слое n решать систему (СЛАУ) на все числа $u_m^n, m = 0, ..., M$ сразу. К счастью, это можно сделать методом прогонки (см. [1, глава 2, § 5]), т.к. матрица двухдиагональная.

Задача 1. *Выбрать дифференциальную задачу и соответственно сформулировать разностную задачу с помощью явной и неявной схемы. Посчитать порядок аппроксимации выбранных схем по τ и h (см. [1, глава 5, § 11]), исследовать на устойчивость (см. [1, глава 5, § 12; глава 8, § 25]), запрограммировать, сравнить с точным решением и проанализировать результат. Почему у разностного решения уменьшается амплитуда со временем?*

Список литературы

[1] **С.К. Годунов, В.С. Рябенький**, Разностные схемы. Введение в теорию. Изд. 2-е доп. и пер. Москва, Наука, 1977.

[2] **Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков**, Численные методы. Изд. 8-е (электронное). Москва, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.