**长江水质的评价和预测的模型**

**摘 要**

**1 问题的重述**

长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。为此，专家们提出“若不及时拯救，长江生态10年内将濒临崩溃”，并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤。根据题目，解决一下5个问题：

（1）对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。

（2）研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?

（3）假如不采取更有效的治理措施，依照过去10年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10年的情况。

（4）根据预测分析，若未来10年内每年都要求长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制在20%以内，且没有劣Ⅴ类水,那么每年需要处理多少污水？

（5）对解决长江水质污染问题提出切实可行的建议和意见。

**附表: 《地表水环境质量标准》（GB3838—2002**）**中4个主要项目标准限值 单位：mg/L**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **序**  **号** | **分 类**  **标准值**  **项 目** | **Ⅰ类** | **Ⅱ类** | **Ⅲ类** | **Ⅳ类** | **Ⅴ类** | **劣Ⅴ类** |
| **1** | 溶解氧(DO)≥ | 7.5  （或饱和率90%） | 6 | 5 | 3 | 2 | 0 |
| **2** | 高锰酸盐指数(CODMn) ≤ | 2 | 4 | 6 | 10 | 15 | ∞ |
| **3** | 氨氮（NH3-N）≤ | 0.15 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | ∞ |
| **4** | PH值（无量纲） | 6---9 | | | | |  |

**2 模型的假设**

（1）假设长江干流的自然净化能力近似均匀；

（2）假设四川攀枝花龙洞为长江水质观测源头；

（3）高锰酸盐指数和氨氮的降解系数取0.2(单位：1/天)；

（4）假设干流上两观测点之间的水流流速变化均匀；

**3 符号说明**

（1）：PH值；

（2）：溶解氧（DO）浓度；

（3）：高锰酸盐指数(CODMn)指数；

（4）：氨氮（NH3-N）指数；

（5）：第i个样本的第j个指标的值；

（6）：第i个观测点测得的污染物浓度；

**4 问题的建模与求解**

**5.1 问题一：长江水质的主成分分析模型**

**5.1.1 问题一的分析**

对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，采用附件3的数据，因为数据变量较多且题目要求作出定量的综合评价，我们选择使用主成分分析法。实际上，就是在水中的PH值、溶解氧（DO）、高锰酸盐指数(CODMn)和氨氮指数（NH3-N）四类数据的基础上建立一个评价指标，利用该指标对水质情况进行综合评价。

**5.1.2 问题一模型的建立与求解**

**（一）数据的标准化**

将附件3中28个月的数据进行单独处理，为了消除不同变量不同的量纲的影响，先进行标准化。检测样本共有17个，指标共有4个。令为第i个样本的第j个指标的值（i=1,2,3，……，17；j=1,2,3,4），设、、和分别表示各样本在水中的PH值、溶解氧（DO）、高锰酸盐指数(CODMn)和氨氮指数（NH3-N）。做变换：

j=1,2,3,4

得到标准化数据矩阵中第i行第j列的元素，其中，。

由于4个指标值中，溶解氧（DO）浓度与水质呈正相关，而高锰酸盐指数(CODMn)和氨氮（NH3-N）这2中污染物浓度与水质呈负相关，PH值不在6-9之间时为劣V类。为了使这4个指标都与水质的综合得分都呈正相关，将标准化后的指标数据进行以下处理：

、、和分别表示标准化后的PH值、溶解氧（DO）、高锰酸盐指数(CODMn)和氨氮指数（NH3-N）处理后得到新的数据矩阵。在接下来的运算过程中，均使用处理过后的数据。

**（二）计算指标间的相关系数矩阵**

根据相关系数公式可得相关系数矩阵：

以2003年6月的数据为例，得到矩阵R：

*R =*

**（三）计算相关系数矩阵的特征值与特征向量**

求相关系数矩阵R的特征值并排序得：，再求出特征值对应的特征向量，设表示第i个主成分，i=1,2,3,4，可设

以2003年6月的数据为例，得到主成分系数矩阵C与相关系数矩阵的特征值：

C =

表1 相关系数矩阵特征值(已排序)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 特征值 | 贡献率 | 累计贡献率 |
| 1.911059477 | 47.78% | 47.78% |
| 1.050823796 | 26.27% | 74.05% |
| 0.784683453 | 19.62% | 93.66% |
| 0.253433274 | 6.34% | 100.00% |

由此得到4个主成分的线性组合为：

**（四）计算各点位水质综合得分**

由于计算得到的主成分数量较少，为了提高求解的准确度，将4个主成分都纳入计算范围，不做舍去。以4个主成分的方差贡献率p1,p2,p3,p4为权重，令为第i个样本的第j个指标的主成分的值（i=1,2,3，……，17；j=1,2,3,4），设、、和分别表示各样本在水中的PH值、溶解氧（DO）、高锰酸盐指数(CODMn)和氨氮指数（NH3-N）的主成分。

该月17个样本的综合得分(i=1,2,3，……，17)，可由矩阵一起求出：

计算28个月各地的水质综合得分，取平均值，得到表2：

表2 各位点水质平均综合得分（已排序）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 点位名称 | 断面情况 | 综合得分 | 排名 |
| 重庆朱沱 | 干流（川-渝省界） | 0.087716055 | 1 |
| 湖北丹江口胡家岭 | 丹江口水库（库体） | 0.042196257 | 2 |
| 湖北宜昌南津关 | 干流（三峡水库出口） | -0.089395163 | 3 |
| 湖南岳阳城陵矶 | 干流 | -0.119389656 | 4 |
| 江苏扬州三江营 | 夹江（南水北调取水口） | -0.141861493 | 5 |
| 江苏南京林山 | 干流（皖-苏省界） | -0.142376863 | 6 |
| 四川宜宾凉姜沟 | 岷江（入长江前） | -0.162185145 | 7 |
| 安徽安庆皖河口 | 干流 | -0.246047254 | 8 |
| 江西九江河西水厂 | 干流（鄂-赣省界） | -0.247134999 | 9 |
| 江西九江蛤蟆石 | 鄱阳湖出口 | -0.2484452 | 10 |
| 四川攀枝花龙洞 | 干流 | -0.257774215 | 11 |
| 湖北武汉宗关 | 汉江（入长江前） | -0.259050227 | 12 |
| 湖南岳阳岳阳楼 | 洞庭湖出口 | -0.284488266 | 13 |
| 四川泸州沱江二桥 | 沱江（入长江前） | -0.389160358 | 14 |
| 湖南长沙新港 | 湘江（洞庭湖入口） | -0.442970302 | 15 |
| 四川乐山岷江大桥 | 岷江（与大渡河汇合前） | -0.694307864 | 16 |
| 江西南昌滁槎 | 赣江（鄱阳湖入口） | -0.758705246 | 17 |

表中的得分越高说明当地水质越好，得分越低表示污染程度越严重。由表6可得：重庆朱沱、湖北丹江口胡家岭、湖北宜昌南津关等地水质较好，污染程度较小；而湖南长沙新港、四川乐山岷江大桥、江西南昌滁槎等地长江水污染严重。从断面情况和排名的关系也可看出：干流水流量大，自洁能力较强，水质普遍好于支流。

**（五）计算近两年长江水质各月的综合得分**

对于长江水质每个月的质量，将（四）中计算出的每月各点位综合得分相加，取算术平均值，即可求出长江各个月份的综合得分。为了方便观察和判断，在算术平均值的基础上加0.5，使数据大于0 ，并作为该月长江水质的综合得分，得到图1：

图1

由图1可得：长江水质随时间的推移有着上下幅度不等的波动，但可以看出总体趋势是得分逐渐减小，亦即长江的水质在不断地变差。

**5.2 问题二：污染源分布的一维水质模型**

**5.2.1 问题二的分析**

一个地区水中的污染物主要来自两个部分：上游污水中未降解的污染物和当地排放污水中的污染物。如图2所示：

高锰酸盐(CODMn)

氨氮（NH3-N）

上游污水

当地排污

图2

要研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区，即需要计算哪些地区当地排污量较大。由上述分析可得当地排污量可由河流中的污染物质量减去上游污水中未降解的污染物质量得到。

**5.2.2 一维水质模型的建立与求解**

**（一）一维水质模型的建立**

一维稳态水质模为：

其中，k为降解系数，u为平均流速，为上游指标，x为上下断面距离。

记第i-1个观测点流至第i个观测点未降解的污染物浓度为，则：

记第i个观测点的总污染物浓度为由5.2.1的结论可得：

=

其中，为第i个观测点的当地排污量。那么有

*-*(\*)

**（二）一维水质模型的求解**

由题意，确定长江对CODMn与NH3-N的降解系数均为0.2，将数据带入式(\*)，即可得出当地排污量的具体数值。

将7个观测点每月的污染物每秒排放量取算术平均值，得到表3：

表3 干流观测点污染物排放统计

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 干流观测点 | CODMn（kg/s) | NH3-N(kg/s) |
| 四川攀枝花龙洞 | 6.435824176 | 0.483868132 |
| 重庆朱沱 | 23.48883322 | 3.944865387 |
| 湖北宜昌南津关 | 40.67528857 | 3.238283268 |
| 湖南岳阳城陵矶 | 53.29002599 | 4.555327384 |
| 江西九江河西水厂 | 35.31567823 | 1.804810013 |
| 安徽安庆皖河口 | 28.13091278 | 3.510371825 |
| 江苏南京林山 | 30.73053216 | 0.97870685 |

为方便观察，将表7绘制成图标，得到图3：

图3 干流观测点污染物排放统计

根据表3和图3可得：高锰酸盐（CODMn）主要污染源在湖南岳阳城陵矶和湖北宜昌南津关，氨氮（NH3-N）主要污染源在湖南岳阳城陵矶、重庆朱沱和安徽安庆皖河口。

**5.3 问题三：水质预测的灰色预测模型和二元回归模型**

**5.3.1 问题三的分析**

站在人类的立场，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，主要是分析未来长江可饮用水的水量变化的趋势，即研究第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类水水量总和占总水量的百分比之和。根据常识，该百分比之和与该年长江总流量和废水排放总量有关。每年的长江总流量可看做近似相等，废水排放总量可用灰色预测模型找出其变化趋势。最终可饮用水的百分比与长江总流量和废水排放量的关系可用二元回归模型求得。

**5.3.2 废水排放总量的灰色预测模型的建立与求解**

**（一）GM（1,1）模型的建立**

已知参考数据列，1次累加生成序列（1-AGO）

式中：*。*

的均值生成序列

式中：。

建立灰微分方程：

相应的白化微分方程为：

。

记*u=,Y=,B=*，则由最小二乘法，求得使*J(u)=(Y-Bu)*达到最小值的u的估计值为

按白化微分方程建立GM(1,1)模型，得到预测值：

*,k=0,1,……，n-1,……*

且

**（二）检验预测值**

（1）残差检验。令残差为，计算

式中，如果对所有的，则认为到达较高的要求。

（2）级比偏差值检验。首先由参考数据计算，计算出级比，再用发展系数α求出相应的级比偏差：

如果对于所有的<0.2,则认为达到一般要求；如果对所有的<0.1，则认为达到较高的要求。

**（三）未来10年废水排放总量变化趋势的预测**

以表示过去十年的年度废水排放量，利用GM(1,1)模型求解，得到表4和图4：

表4 未来十年年度废水排放量预测值

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
| 污水量（亿吨） | 303.0122 | 322.5221 | 343.2881 | 365.3912 | 388.9175 |
| 年份 | **2010** | **2011** | **2012** | **2013** | **2014** |
| 污水量（亿吨） | 413.9585 | 440.6118 | 468.9812 | 499.1772 | 531.3174 |

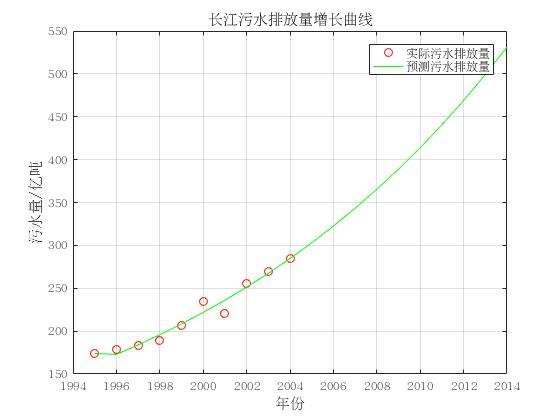


图4

对预测值进行检验，得到表5：

表5 预测值检验

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 相对残差Q检验 | 方差比C检验 | 小误差概率P检验 |
| Q=0.0234 | C =0.187 | P =1 |

由表9可得：残差|ε(k)|<0.1，级比偏差值|ρ(k)|<0.1，两者均达到较高的要求，可认为得到的未来十年年度排水量预测值可信较高。

**5.3.3 预测可饮用水总量的二元回归模型的建立与求解**

记为未来第i年饮用水百分比，记表示未来第i年废水排放量，记为第i年长江的总流量。与*、*的关系可用二元回归模型表示：

(\*\*)

其中，、、为待定参数。

利用matlab的regress函数，对每一年的枯水期、丰水期、水文年的干流、支流、全流域进行二元回归分析，结果如表6：

表6. 可饮用水回归参数

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 水期 | 枯水期 | | | 丰水期 | | | 水文年 | | |
| 参数 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 全流域 | -0.1405 | 0.0018 | 89.0214 | -0.1907 | 0.0008 | 113.2105 | -0.1489 | 0.0016 | 96.8386 |
| 干流 | -0.3123 | 0.0036 | 112.0766 | -0.2428 | 0.002 | 116.026 | -0.1846 | 0.0039 | 85.1549 |
| 支流 | -0.0419 | 0.0005 | 76.4087 | -0.148 | 0.0001 | 109.1528 | -0.1015 | 0.0002 | 97.4869 |

由此模型，可以对长江未来十年的可饮用水所占百分比进行预测。将5.3.2中结果与上表结果代入(\*\*)式，可得到表7：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
| 枯水期 | 全流域 | 64.26 | 61.52 | 58.60 | 55.49 | 52.19 |
| 干流 | 53.06 | 46.97 | 40.49 | 33.58 | 26.24 |
| 支流 | 68.66 | 67.84 | 66.97 | 66.05 | 65.06 |
| 丰水期 | 全流域 | 63.34 | 59.62 | 55.66 | 51.45 | 46.96 |
| 干流 | 62.24 | 57.51 | 52.46 | 47.10 | 41.39 |
| 支流 | 65.30 | 62.41 | 59.34 | 56.06 | 52.58 |
| 水文年 | 全流域 | 67.55 | 64.65 | 61.55 | 58.26 | 54.76 |
| 干流 | 67.81 | 64.20 | 60.37 | 56.29 | 51.95 |
| 支流 | 68.71 | 66.73 | 64.62 | 62.38 | 59.99 |
| 年份 | | **2010** | **2011** | **2012** | **2013** | **2014** |
| 枯水期 | 全流域 | 48.67 | 44.92 | 40.94 | 36.70 | 32.18 |
| 干流 | 18.42 | 10.09 | 1.23 | -8.20 | -18.24 |
| 支流 | 64.01 | 62.89 | 61.71 | 60.44 | 59.09 |
| 丰水期 | 全流域 | 42.18 | 37.10 | 31.69 | 25.93 | 19.80 |
| 干流 | 35.31 | 28.83 | 21.95 | 14.61 | 6.81 |
| 支流 | 48.88 | 44.93 | 40.73 | 36.26 | 31.51 |
| 水文年 | 全流域 | 51.03 | 47.06 | 42.84 | 38.34 | 33.56 |
| 干流 | 47.33 | 42.40 | 37.17 | 31.59 | 25.66 |
| 支流 | 57.45 | 54.74 | 51.86 | 48.80 | 45.54 |

表7

可以看出，无论是枯水期、丰水期还是整个水文年，可饮用水的占比都在逐年下降，甚至在2013年之后，枯水期将出现没有可饮用水的情况发生。据此，治理长江的污染问题已经迫在眉睫。

**5.4 问题四：每年需要处理的污水量求解**

**5.4.1 问题四的分析**

在5.3中，已经求出每年可饮用水占比与污水排放量、河流总流量的线性关系，则同理可设每年IV类、V类占比与劣V类占比都是关于污水排放量、河流总流量的二元一次表达式。根据题设写出满足题设的不等式，由此反解出允许排出污水量的最大值，再与预测的排污量作差，即可求出需要处理的污水量。

**5.4.2 需处理的污水量求解**

根据题意，I、II、III类水的占比需要大于80%，IV类、V类要小于20%，劣V类水的占比要为0，则可以列出以下不等式：

其中为可饮用水占比的二元线性回归参数，为劣V类占比的二元线性回归参数，饮用水占百分比，为劣V类水占百分比，表示废水排放量，为长江的总流量。

解以上三个不等式，取可行解中最大值，即为排放量的最大限度。计算结果为每年最大排污量为203.63亿吨。那么根据表4预测的数据即可得出每年需要处理的污水量如表8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
| 需要处理的污水量（亿吨） | 99.38 | 118.89 | 139.65 | 161.76 | 185.28 |
| 年份 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 |
| 需要处理的污水量（亿吨） | 210.32 | 236.98 | 265.35 | 295.54 | 327.68 |

**5.5 问题五：对解决长江水质污染问题的建议和意见**

（1）严格控制污染物排放总量。

继续削减工业污染,对钢铁、电力、化工、煤炭等重点污染行业推广废水循环闭路的零排放制度,切实加强对污染排放单位审核和监督。

（2）完善城市排水系统,提高城市污水处理的技术水平。缺水城市在规划污水处理设施的同时安排回用设施的建设,开展污水的深度处理。

（3）做好长江沿岸的绿化工作,植树造林,减少水土流失。

（4）科学合理地调配水资源。

保证[生态用水](https://www.baidu.com/s?wd=%E7%94%9F%E6%80%81%E7%94%A8%E6%B0%B4&tn=SE_PcZhidaonwhc_ngpagmjz&rsv_dl=gh_pc_zhidao),开发利用水资源应以保护水环境功能为前提,兼顾水资源上、下流域的需求,要按照水资源可开发总量来发放许可证。

**5 模型评价**

**6 参考文献**

[1] 一维水质模型，<https://wenku.baidu.com/view/98149b1fff00bed5b9f31dd0.html>

[2] 解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见

https://zhidao.baidu.com/question/521070537402025685.html

**7 附录**