郭硕鸿《电动力学》课后答案

电动力学答案

第一章　电磁现象的普遍规律

1. 根据算符∇的微分性与向量性，推导下列公式：

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\tfrac{1}{2}\nabla A^2-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

解：（1）$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c)+\nabla(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}_c)$

$$=\boldsymbol{B}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

（2）在（1）中令$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$得：

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A},$$

所以　$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\tfrac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

即　$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\tfrac{1}{2}\nabla A^2-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

2. 设u是空间坐标x,y,z的函数，证明：

$$\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u\quad,\quad\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u},\quad\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

证明：

（1）$$\nabla f(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f(u)}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$$

（2）$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\frac{\partial A_x(u)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(u)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(u)}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_z)\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z)=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$$

（3）$$\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z\\ \mathrm{d}A_x/\mathrm{d}u & \mathrm{d}A_y/\mathrm{d}u & \mathrm{d}A_z/\mathrm{d}u\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z})\boldsymbol{e}_x+(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x})\boldsymbol{e}_y+(\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y})\boldsymbol{e}_z$$

$$=[\frac{\partial A_z(u)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(u)}{\partial z}]\boldsymbol{e}_x+[\frac{\partial A_x(u)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(u)}{\partial x}]\boldsymbol{e}_y+[\frac{\partial A_y(u)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(u)}{\partial y}]\boldsymbol{e}_z$$

$$=\nabla\times\boldsymbol{A}(u)$$

3. 设$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$为源点$\boldsymbol{x}'$到场点$\boldsymbol{x}$的距离，$\boldsymbol{r}$的方向规定为从

源点指向场点。

（1）证明下列结果，并体会对源变量求微商与对场变量求微商的关系：

$\nabla r=-\nabla' r=\boldsymbol{r}/r$ ； $\nabla(1/r)=-\nabla'(1/r)=-\boldsymbol{r}/r^3$ ； $\nabla\times(\boldsymbol{r}/r^3)=0$ ；

$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^3)=-\nabla'\cdot(\boldsymbol{r}/r^3)=0$ ， $(r\neq 0)$。

（2）求 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ ， $\nabla\times\boldsymbol{r}$ ， $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$ ， $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ ， $\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$ 及

$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$ ，其中 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{E}_0$ 均为常向量。

（1）证明： $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

① $\nabla r=(1/r)[(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z]=\boldsymbol{r}/r$

$\nabla' r=(1/r)[-(x-x')\boldsymbol{e}_x-(y-y')\boldsymbol{e}_y-(z-z')\boldsymbol{e}_z]=-\boldsymbol{r}/r$

可见 $\nabla r=-\nabla' r$

② $$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r=-\frac{1}{r^2}\nabla r=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla' r=-\frac{1}{r^2}\nabla' r=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

可见 $\nabla(1/r)=-\nabla'(1/r)$

③ $$\nabla\times(\boldsymbol{r}/r^3)=\nabla\times[(1/r^3)\boldsymbol{r}]=\nabla(1/r^3)\times\boldsymbol{r}+(1/r^3)\nabla\times\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\nabla r\times\boldsymbol{r}+0=-\frac{3}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r}=0$$

④ $$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^3)=\nabla\cdot[(1/r^3)\boldsymbol{r}]=\nabla(1/r^3)\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=-\frac{3}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{3}{r^3}=0\quad,\qquad (r\neq 0)$$

（2）解：

① $$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z)\cdot[(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z]=3$$

② $$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x-x' & y-y' & z-z'\end{vmatrix}=0$$

③ $$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z})[(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z]$$

$$=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{a}$$

④ $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$

因为，$\boldsymbol{a}$ 为常向量，所以，$\nabla\times\boldsymbol{a}=0$， $(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}=0$，

又 $\because\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$

⑤ $\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_0\cdot[\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$

$\boldsymbol{E}_0$ 为常向量，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0=0$，而 $\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}$，

所以 $\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$

⑥ $\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=[\nabla\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\times\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$

4. 应用高斯定理证明 $\int_V \mathrm{d}V\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$，应用斯托克斯（Stokes）定理证明 $\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\varphi$

证明：（I）设 $\boldsymbol{c}$ 为任意非零常矢量，则

$$\boldsymbol{c}\cdot\int_V \mathrm{d}V\nabla\times\boldsymbol{f}=\int_V \mathrm{d}V[\boldsymbol{c}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})]$$

根据矢量分析公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$，

令其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}$，便得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{c})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{c}$$

所以 $$\boldsymbol{c}\cdot\int_V \mathrm{d}V\nabla\times\boldsymbol{f}=\int_V \mathrm{d}V[\boldsymbol{c}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})]=\int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})=\oint(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{c})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\oint\boldsymbol{c}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f})=\boldsymbol{c}\cdot\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$$

因为 $\boldsymbol{c}$ 是任意非零常向量，所以

$$\int_V \mathrm{d}V\nabla\times\boldsymbol{f}=\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$$

（II）设 $\boldsymbol{a}$ 为任意非零常向量，令 $\boldsymbol{F}=\varphi\boldsymbol{a}$，代入斯托克斯公式，得

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1}$$

（1）式左边为：$$\int_S\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S[\nabla\varphi\times\boldsymbol{a}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{a}]\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int_S\nabla\varphi\times\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S\boldsymbol{a}\times\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=-\int_S\boldsymbol{a}\cdot\nabla\varphi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi \tag{2}$$

（1）式右边为：$$\oint\varphi\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}\cdot\oint\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3}$$

所以 $$\boldsymbol{a}\cdot\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\boldsymbol{a}\cdot\oint\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4}$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 为任意非零常向量，所以

$$\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\oint\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

5. 已知一个电荷系统的偶极矩定义为 $\boldsymbol{p}(t)=\int_V\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'\mathrm{d}V'$，利用电荷守恒定律 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 证明 $\boldsymbol{p}$ 的变化率为：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)\mathrm{d}V$

证明：方法（I）

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'\mathrm{d}V'=\int_V\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}']\mathrm{d}V'=\int_V\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}V'=-\int_V(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'\mathrm{d}V'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_1=-\int_V(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})x_1'\cdot\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}V'=-\int_V x_1'(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}V'=\int_V[-\nabla'\cdot(x_1'\boldsymbol{J})+(\nabla'x_1')\cdot\boldsymbol{J}]\mathrm{d}V'$$

$$= -\oint_S x_1'\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' + \int_V J_{x_1}\mathrm{d}V'$$

因为封闭曲面 S 为电荷系统的边界，所以电流不能流出这边界，故

$$\oint_S x_1'\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = 0，\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{e}_1 = \int_V J_{x1}\mathrm{d}V'$$

同理 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{e}_2 = \int_V J_{x2}\mathrm{d}V'$， $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{e}_3 = \int_V J_{x3}\mathrm{d}V'$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V'$

方法（II）

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}V' = \int_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{x}']\mathrm{d}V' = \int_V \frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}V' = -\int_V (\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}V'$$

根据并矢的散度公式$\nabla\cdot(\boldsymbol{fg}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$得：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') = (\nabla\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{J}\cdot\nabla)\boldsymbol{x}' = (\nabla\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{J}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\int_V \nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' + \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V' = -\oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') + \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V' = \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V'$$

6. 若 $\boldsymbol{m}$ 是常向量，证明除 $R=0$ 点以外，向量 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R})/R^3$ 的旋度等于标量 $\varphi = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}/R^3$ 的梯度的负值，即 $\nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$，其中 R 为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点。

证明： $\because \nabla(1/r) = -\boldsymbol{r}/r^3$

$$\therefore \nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}) = -\nabla\times[\boldsymbol{m}\times(\nabla\frac{1}{r})] = \nabla\times[(\nabla\frac{1}{r})\times\boldsymbol{m}]$$

$$= (\nabla\cdot\boldsymbol{m})\nabla\frac{1}{r} + (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r} - [\nabla\cdot(\nabla\frac{1}{r})]\boldsymbol{m} - [(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\boldsymbol{m}$$

$$= (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r} - [\nabla^2\frac{1}{r}]\boldsymbol{m}$$

其中 $\nabla^2(1/r) = 0$， （$r\neq 0$）

$$\therefore \nabla\times\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}，\qquad (r\neq 0)$$

又 $\nabla\varphi = \nabla(\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}) = -\nabla[\boldsymbol{m}\cdot(\nabla\dfrac{1}{r})]$

$$= -\boldsymbol{m}\times[\nabla\times(\nabla\frac{1}{r})] - (\nabla\frac{1}{r})\times(\nabla\times\boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)(\nabla\frac{1}{r}) - [(\nabla\frac{1}{r})\cdot\nabla]\boldsymbol{m}$$

$$= -(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)(\nabla\frac{1}{r})$$

所以，当 $r\neq 0$ 时，$\nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$

7. 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球，介质的电容率为 ε，使介质球内均匀带静止自由电荷 ρ_f，求：（1）空间各点的电场；（2）极化体电荷和极化面电荷分布。

解：（1）设场点到球心距离为 r。以球心为中心，以 r 为半径作一球面作为高斯面。

由对称性可知，电场沿径向分布，且相同 r 处场强大小相同。

当 $r<r_1$ 时，$D_1=0$， $E_1=0$。

当 $r_1<r<r_2$ 时， $4\pi r^2 D_2=\frac{4}{3}\pi(r^3-r_1^3)\rho_f$

$\therefore D_2=\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3r^2}$ ， $E_2=\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^2}$ ，

向量式为 $\boldsymbol{E}_2=\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$

当 $r>r_2$ 时， $4\pi r^2 D_3=\frac{4}{3}\pi(r_2^3-r_1^3)\rho_f$

$\therefore D_3=\frac{(r_2^3-r_1^3)\rho_f}{3r^2}$ $E_3=\frac{(r_2^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon_0 r^2}$

向量式为 $\boldsymbol{E}_3=\frac{(r_2^3-r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$

（2）当 $r_1<r<r_2$ 时，

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{D}_2-\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2)=-\nabla\cdot(\boldsymbol{D}_2-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\boldsymbol{D}_2)$$

$$=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\boldsymbol{D}_2=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$$

当 $r=r_1$ 时，

$$\sigma_p=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\boldsymbol{D}_2)=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}_2\Big|_{r=r_1}=0$$

当 $r=r_2$ 时，

$$\sigma_p=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}_2=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}_2\Big|_{r=r_2}=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\frac{r_2^3-r_1^3}{3r_2^2}\rho_f$$

8. 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有恒定均匀自由电流 $\boldsymbol{J}_f$，导体的磁导率为 μ，求磁感应强度和磁化电流。

解：（1）以圆柱轴线上任一点为圆心，在垂直于轴线平面内作一圆形闭合回路，设其半径为 r。由对称性可知，磁场在垂直于轴线的平面内，且与圆周相切。

当 $r<r_1$ 时，由安培环路定理得：$\boldsymbol{H}_1=0$ ， $\boldsymbol{B}_1=0$

当 $r_1<r<r_2$ 时，由环路定理得：$2\pi r H_2=J_f\pi(r^2-r_1^2)$

所以 $H_2=\frac{J_f(r^2-r_1^2)}{2r}$ ， $B_2=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r}J_f$

向量式为 $\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r}J_f\hat{\boldsymbol{e}}_\theta=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J}_f\times\boldsymbol{r}$

当 $r>r_2$ 时，$2\pi r H_3=J_f\pi(r_2^2-r_1^2)$

所以 $H_3=\dfrac{J_f(r_2^2-r_1^2)}{2r}$ ， $B_3=\dfrac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r}J_f$

向量式为 $\boldsymbol{B}_3=\dfrac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r}J_f\hat{\boldsymbol{e}}_\theta=\dfrac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J}_f\times\boldsymbol{r}$

（**2**）当 $r_1<r<r_2$ 时，磁化强度为

$$\boldsymbol{M}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{H}_2=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{(r^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J}_f\times\boldsymbol{r}$$

所以 $\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}=\nabla\times[(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{H}_2]=(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\nabla\times\boldsymbol{H}_2=(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{J}_f$

在 $r=r_1$ 处，磁化面电流密度为

$$\alpha_M=\frac{1}{2\pi r_1}\oint\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

在 $r=r_2$ 处，磁化面电流密度为

$$\alpha_M=0-\frac{1}{2\pi r_2}\oint\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2r_2^2}J_f$$

向量式为 $\boldsymbol{\alpha}_M=-(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\dfrac{(r_2^2-r_1^2)}{2r_2^2}\boldsymbol{J}_f$

9. 证明均匀介质内部的体极化电荷密度 ρ_p 总是等于体自由电荷密度 ρ_f 的 $-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)$ 倍。

证明：在均匀介质中 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon/\varepsilon_0-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}$

所以 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)(1/\varepsilon)\nabla\cdot\boldsymbol{D}$

$$=-[(\varepsilon-\varepsilon_0)/\varepsilon]\rho_f=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$$

10. 证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等方向相反(但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律)

证明：线圈1在线圈2的磁场中受的力：

$$d\boldsymbol{F}_{12}=I_1d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{B}_2,$$

而 $\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{l_2}\dfrac{I_2d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}$ ，

$$\therefore\boldsymbol{F}_{12}=\oint\limits_{l_1}\oint\limits_{l_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1d\boldsymbol{l}_1\times(I_2d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint\limits_{l_1}\oint\limits_{l_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1\times(d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint\limits_{l_1}\oint\limits_{l_2}d\boldsymbol{l}_2\left(d\boldsymbol{l}_1\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)-\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\boldsymbol{l}_1\cdot d\boldsymbol{l}_2)\tag{1}$$

同理可得线圈2在线圈1的磁场中受的力：

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1} d\boldsymbol{l}_1\left(d\boldsymbol{l}_2\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right)-\frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}(d\boldsymbol{l}_2\cdot d\boldsymbol{l}_1) \tag{2}$$

(1)式中：

$$\oint_{l_1}\oint_{l_2} d\boldsymbol{l}_2\left(d\boldsymbol{l}_1\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)=\oint_{l_2} d\boldsymbol{l}_2\oint_{l_1} d\boldsymbol{l}_1\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}=\oint_{l_2} d\boldsymbol{l}_2\oint_{l_1}\frac{dr_{12}}{r_{12}^2}=\oint_{l_2} d\boldsymbol{l}_2\cdot(-\frac{1}{r_{12}})\bigg|_{一周}=0$$

同理(2)式中： $$\oint_{l_2}\oint_{l_1} d\boldsymbol{l}_1\left(d\boldsymbol{l}_2\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right)=0$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\boldsymbol{l}_1\cdot d\boldsymbol{l}_2)$$

11. 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为l_1和l_2，电容率为ε_1和ε_2，今在两板接上电动势为 $\mathscr{E}$ 的电池，求：（1）电容器两极板上的自由电荷面密度ω_{f1}和ω_{f2}；（2）介质分界面上的自由电荷面密度ω_{f3}。(若介质是漏电的，电导率分别为σ_1和σ_2 当电流达到恒定时，上述两物体的结果如何？)

解： 忽略边缘效应，平行板电容器内部场强方向垂直于极板，且介质中的场强分段均匀，分别设为$\boldsymbol{E}_1$和$\boldsymbol{E}_2$，电位移分别设为$\boldsymbol{D}_1$和$\boldsymbol{D}_2$，其方向均由正极板指向负极板。当介质不漏电时，介质内没有自由电荷，因此，介质分界面处自由电荷面密度为

$$\omega_{f3}=0$$

取高斯柱面，使其一端在极板 A 内，另一端在介质 1 内，由高斯定理得：

$$D_1=\omega_{f1}$$

同理，在极板 B 内和介质 2 内作高斯柱面，由高斯定理得：

$$D_2=-\omega_{f2}$$

在介质 1 和介质 2 内作高斯柱面，由高斯定理得：

$$D_1=D_2$$

所以有 $E_1=\dfrac{\omega_{f1}}{\varepsilon_1}$ ， $E_2=\dfrac{\omega_{f1}}{\varepsilon_2}$

由于 $\mathscr{E}=\int E\cdot \mathrm{d}l=\dfrac{\omega_{f1}}{\varepsilon_1}l_1+\dfrac{\omega_{f1}}{\varepsilon_2}l_2=\omega_{f1}(\dfrac{l_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{l_2}{\varepsilon_2})$

所以 $\omega_{f1}=-\omega_{f2}=\mathscr{E}\Big/(\dfrac{l_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{l_2}{\varepsilon_2})$

当介质漏电时，重复上述步骤，可得：

$$D_1=\omega_{f1},\quad D_2=-\omega_{f2},\quad D_2-D_1=\omega_{f3}$$

$$\therefore\quad \omega_{f3}=-\omega_{f1}-\omega_{f2}$$

介质 1 中电流密度 $\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1=\sigma_1\boldsymbol{D}_1/\varepsilon_1=\sigma_1\omega_{f1}/\varepsilon_1$

介质 2 中电流密度 $\boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2=\sigma_2\boldsymbol{D}_2/\varepsilon_2=\sigma_2(\omega_{f1}+\omega_{f3})/\varepsilon_2$

由于电流恒定，$\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_2$，

$$\therefore \quad \sigma_1\omega_{f1}/\varepsilon_1=\sigma_2(\omega_{f1}+\omega_{f3})/\varepsilon_2$$

$$\therefore \quad \omega_{f3}=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}(\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2})\omega_{f1}=(\frac{\varepsilon_2\sigma_1}{\sigma_2\varepsilon_1}-1)\omega_{f1}$$

再由 $\mathscr{E}=\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=E_1l_1+E_2l_2$ 得

$$\mathscr{E}=\frac{\omega_{f1}}{\varepsilon_1}l_1+\frac{\varepsilon_2\sigma_1\omega_{f1}}{\varepsilon_2\sigma_2\varepsilon_1}=\frac{\omega_{f1}}{\varepsilon_1}(l_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}l_2)$$

$$\therefore \quad \omega_{f1}=\frac{\varepsilon_1}{l_1+\sigma_1 l_2/\sigma_2}\mathscr{E}=\frac{\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}\mathscr{E}$$

$$\omega_{f2}=-(\omega_{f1}+\omega_{f3})=-\frac{\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}\mathscr{E}$$

$$\omega_{f3}=\frac{\sigma_1\varepsilon_2-\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}\mathscr{E}$$

12.证明：

（1）当两种绝缘介质的分界面上不带面自由电荷时，电场线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

其中 ε_1 和 ε_2 分别为两种介质的介电常数，θ_1 和 θ_2 分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

（2）当两种导电介质内流有恒定电流时，分界面上电场线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

其中 σ_1 和 σ_2 分别为两种介质的电导率。

证明：（1） 由 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续，得

$$E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2 \qquad (1)$$

交界面处无自由电荷，所以 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量连续，即

$$D_1\cos\theta_1=D_2\cos\theta_2$$

$$\varepsilon_1E_1\cos\theta_1=\varepsilon_2E_2\cos\theta_2 \qquad (2)$$

（1）、（2）式相除，得

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

（2） 当两种电介质内流有恒定电流时

$$\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1 \quad , \quad \boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2$$

由 $\boldsymbol{J}$ 的法向分量连续，得

$$\sigma_1E_1\cos\theta_1=\sigma_2E_2\cos\theta_2 \qquad (3)$$

（1）、（3）式相除，即得

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

13.试用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流情况下，导体内电场线总是平行于导体表面。

证明：（1）设导体外表面处电场强度为 $\boldsymbol{E}$，其方向与法线之间夹角为θ，则其切向分量为 $E\sin\theta$。在静电情况下，导体内部场强处处为零，由于在分界面上 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续，所以

$$E\sin\theta = 0$$

因此 $\theta = 0$

即 $\boldsymbol{E}$ 只有法向分量，电场线与导体表面垂直。

（2）在恒定电流情况下，设导体内表面处电场方向与导体表面夹角为α，则电流密度 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ 与导体表面夹角也是α。导体外的电流密度 $\boldsymbol{J}' = 0$，由于在分界面上电流密度的法向分量连续，所以

$$\sigma E\sin\alpha = 0$$

因此 $\alpha = 0$

即 $\boldsymbol{J}$ 只有切向分量，从而 $\boldsymbol{E}$ 只有切向分量，电场线与导体表面平行。

14.内外半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱形电容器，单位长度荷电为 λ_f，板间填充电导率为σ的非磁性物质。

（1）证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，因此内部无磁场。

（2）求 λ_f 随时间的衰减规律。

（3）求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度。

（4）求长度 l 的一段介质总的能量耗散功率，并证明它等于这段的静电能减少率。

解：（1）以电容器轴线为轴作一圆柱形高斯面，其半径为 r，长度为 L，其中

$$a < r < b$$

则由高斯定理得： $2\pi rL\cdot D = \lambda_f\cdot L$ （1）

所以 $D = \dfrac{\lambda_f}{2\pi r}$ ， $J_D = \dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t}$ （2）

再由电流连续性方程得：$2\pi rL\cdot J_f = -\partial q/\partial t = -L(\partial\lambda_f/\partial t)$ （3）

所以 $J_f = -\dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t} = -J_D$ （4）

即 J_f 与 J_D 严格抵消，因此内部无磁场。

（2）由 $\boldsymbol{J}_f = \sigma\boldsymbol{E}$ 得： $J_f = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}D = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{\lambda_f}{r}$ （5）

联立（2）（4）（5）得 $\dfrac{\mathrm{d}\lambda_f}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\lambda_f = 0$ （6）

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\lambda_f}{\lambda_f} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathrm{d}t = 0$

$$\lambda_f = Ce^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \quad （7）$$

设初始条件为 $\lambda_f\big|_{t=0} = \lambda_{f0}$，则由（7）式得 $C = \lambda_{f0}$

所以，$\lambda_f = \lambda_{f0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ （8）

（3） $p=\sigma E^2=\sigma\cdot\left(\dfrac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2$ （9）

（4） 将上式在长度为 l 的一段介质内积分，得

$$P=\int_V\sigma\cdot\left(\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2\mathrm{d}V=\int_a^b\sigma\cdot\left(\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\sigma\lambda_f^2 l}{2\pi\varepsilon^2}\ln\frac{b}{a} \tag{10}$$

由 $w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 得：

$$W=\frac{1}{2}\int_V w\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_a^b\varepsilon\left(\frac{\lambda_f}{2\pi\varepsilon r}\right)^2\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r=\frac{\lambda_f^2 l}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda_f l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda_f}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

由（6）（10）（11）得 ： $P=-\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

即总的能量耗散功率等于这段介质的静电能减少率。

第二章 静电场

1. 一个半径为 R 的电介质球，极化强度为 $\boldsymbol{P}=K\boldsymbol{r}/r^2$，电容率为 ε 。

（1）计算束缚电荷的体密度和面密度：

（2）计算自由电荷体密度；

（3）计算球外和球内的电势；

（4）求该带电介质球产生的静电场总能量。

解：（1） $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-K\nabla\cdot(\boldsymbol{r}/r^2)=-K[(1/r^2)\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla(1/r^2)]=-K/r^2$

$$\sigma_p=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=R}=K/R$$

（2） $\boldsymbol{D}_{内}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\varepsilon/(\varepsilon-\varepsilon_0)$

$$\rho_f=\nabla\cdot\boldsymbol{D}_{内}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{P}/(\varepsilon-\varepsilon_0)=\varepsilon K/(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2$$

（3） $\boldsymbol{E}_{内}=\boldsymbol{D}_{内}/\varepsilon=\boldsymbol{P}/(\varepsilon-\varepsilon_0)$

$$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{\boldsymbol{D}_{外}}{\varepsilon_0}=\frac{\int\rho_f\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\varphi_{外}=\int_r^\infty\boldsymbol{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\varepsilon KR}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}$$

$$\varphi_{内}=\int_r^R\boldsymbol{E}_{内}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_R^\infty\boldsymbol{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}(\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$$

（4） $$W=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon K^2}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}\int_0^R\frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2K^2R^2}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}\int_R^\infty\frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{r^4}$$

$$= 2\pi\varepsilon R(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})(\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0})^2$$

2. 在均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球，试用分离变量法求下列两种情况的电势：（1）导体球上接有电池，使球与地保持电势差 Φ_0；
（2）导体球上带总电荷 Q

解：（1）该问题具有轴对称性，对称轴为通过球心沿外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 方向的轴线，取该轴线为极轴，球心为原点建立球坐标系。

当 $R > R_0$ 时，电势 φ 满足拉普拉斯方程，通解为

$$\varphi = \sum_n (a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}) P_n(\cos\theta)$$

因为无穷远处 $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$，$\varphi \to \varphi_0 - E_0 R\cos\theta = \varphi_0 - E_0 R P_1(\cos\theta)$

所以 $a_0 = \varphi_0$，$a_1 = -E_0$，$a_n = 0$，$(n \ge 2)$

当 $R \to R_0$ 时，$\varphi \to \Phi_0$

所以 $$\varphi_0 - E_0 R_0 P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \Phi_0$$

即：$\varphi_0 + b_0 / R_0 = \Phi_0$，$b_1 / R_0^2 = E_0 R_0$

所以 $b_0 = R_0(\Phi_0 - \varphi_0)$，$b_1 = E_0 R_0^3$，$b_n = 0, (n \ge 2)$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - E_0 R\cos\theta + R_0(\Phi_0 - \varphi_0)/R + E_0 R_0^3 \cos\theta / R^2 & (R > R_0) \\ \Phi_0 & (R \le R_0) \end{cases}$$

（2）设球体待定电势为 Φ_0，同理可得

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - E_0 R\cos\theta + R_0(\Phi_0 - \varphi_0)/R + E_0 R_0^3 \cos\theta / R^2 & (R > R_0) \\ \Phi_0 & (R \le R_0) \end{cases}$$

当 $R \to R_0$ 时，由题意，金属球带电量 Q

$$Q = \oint -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{R=R_0} \mathrm{d}S = \varepsilon_0 \int (E_0\cos\theta + \frac{\Phi_0 - \varphi_0}{R_0} + 2E_0\cos\theta) R_0^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 R_0(\Phi_0 - \varphi_0)$$

所以 $(\Phi_0 - \varphi_0) = Q / 4\pi\varepsilon_0 R_0$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - E_0 R\cos\theta + Q/4\pi\varepsilon_0 R + (E_0 R_0^3 / R^2)\cos\theta & (R > R_0) \\ \varphi_0 + Q/4\pi\varepsilon_0 R & (R \le R_0) \end{cases}$$

3. 均匀介质球的中心置一点电荷 Q_f，球的电容率为 ε，球外为真空，试用分离变量法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较。

提示：空间各点的电势是点电荷 Q_f 的电势 $Q_f / 4\pi\varepsilon R$ 与球面上的极化电荷所产生的电势的迭加，后者满足拉普拉斯方程。

解：（一）分离变量法

空间各点的电势是点电荷 Q_f 的电势 $Q_f / 4\pi\varepsilon R$ 与球面上的极化电荷所产生的电势的

迭加。设极化电荷产生的电势为φ'，它满足拉普拉斯方程。在球坐标系中解的形式为：

$$\varphi'_{内}=\sum_n(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi'_{外}=\sum_n(c_nR^n+\frac{d_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

当$R\to\infty$时，$\varphi'_{外}\to 0$，$\therefore c_n=0$。

当$R\to 0$时，$\varphi'_{内}$为有限，$\therefore b_n=0$。

所以 $\varphi'_{内}=\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)$ ， $\varphi'_{外}=\sum_n\frac{d_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$

由于球对称性，电势只与R有关，所以

$a_n=0,\quad (n\geq 1)\qquad d_n=0,\quad (n\geq 1)$

$\varphi'_{内}=a_0$， $\varphi'_{外}=d_0/R$

所以空间各点电势可写成$\varphi_{内}=a_0+Q_f\big/4\pi\varepsilon R$

$$\varphi_{外}=d_0/R+Q_f\big/4\pi\varepsilon R$$

当$R\to R_0$时，由 $\varphi_{内}=\varphi_{外}$ 得： $a_0=d_0/R_0$

由 $\varepsilon\frac{\partial\varphi_{内}}{\partial n}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_{外}}{\partial n}$得：$\frac{Q_f}{4\pi R_0^2}=\frac{\varepsilon_0Q_f}{4\pi\varepsilon R_0^2}+\frac{\varepsilon_0d_0}{R_0^2}$，$d_0=\frac{Q_f}{4\pi}(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon})$

则 $a_0=\frac{Q_f}{4\pi R_0}(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon})$

所以 $\varphi_{内}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\frac{Q_f}{4\pi R_0}(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon})$

$$\varphi_{外}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}+\frac{Q_f}{4\pi R}(\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{1}{\varepsilon})=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R}$$

（二）应用高斯定理

在球外，$R>R_0$ ，由高斯定理得：$\varepsilon_0\oint\boldsymbol{E}_{外}\cdot d\boldsymbol{s}=Q_{总}=Q_f+Q_p=Q_f$，（整个导体球的束缚电荷$Q_p=0$），所以 $\boldsymbol{E}_{外}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{e}_r$ ，积分后得：

$$\varphi_{外}=\int_R^\infty\boldsymbol{E}_{外}\cdot d\boldsymbol{R}=\int_R^\infty\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R^2}dR=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R}$$

在球内，$R<R_0$ ，由介质中的高斯定理得：$\varepsilon\oint\boldsymbol{E}_{内}\cdot d\boldsymbol{s}=Q_f$，所以

$\boldsymbol{E}_{内}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R^2}\boldsymbol{e}_r$ ，积分后得：

$$\varphi_{内}=\int_R^{R_0}\boldsymbol{E}_{内}\cdot d\boldsymbol{R}+\int_{R_0}^\infty\boldsymbol{E}_{外}\cdot d\boldsymbol{R}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R}-\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon R_0}+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0R}$$

结果相同。

4. 均匀介质球（电容率为ε_1）的中心置一自由电偶极子$\boldsymbol{p}_f$，球外充满了另一种介质（电容率为ε_2），求空间各点的电势和极化电荷分布。

解：以球心为原点，$\boldsymbol{p}_f$的方向为极轴方向建立球坐标系。空间各点的电势可分为三种电荷的贡献，即球心处自由电偶极子、极化电偶极子及球面上的极化面电荷三部分的贡献，其中电偶极子产生的总电势为$\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_1R^3$。所以球内电势可写成：$\varphi_i=\varphi'_i+\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_1R^3$；球外电势可写成：$\varphi_o=\varphi'_o+\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_1R^3$

其中φ'_i和φ'_o为球面的极化面电荷激发的电势，满足拉普拉斯方程。由于对称性，φ'_i和φ'_o均与ϕ无关。考虑到$R\to0$时φ'_i为有限值；$R\to\infty$时$\varphi'_o\to0$，故拉普拉斯方程的解为：

$$\varphi'_i=\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\qquad(R\le R_0)$$

$$\varphi'_o=\sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\qquad(R\ge R_0)$$

由此
$$\varphi_i=\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_1R^3+\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\qquad(R\le R_0)\tag{1}$$

$$\varphi_o=\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_1R^3+\sum_n b_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\qquad(R\ge R_0)\tag{2}$$

边界条件为：
$$\varphi_i\big|_{R=R_0}=\varphi_o\big|_{R=R_0}\tag{3}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_o}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}\tag{4}$$

将（1）（2）代入（3）和（4），然后比较$P_n(\cos\theta)$的系数，可得：

$$a_n=0,\quad b_n=0\qquad(n\ne1)$$

$$a_1=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f/2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3$$

$$b_1=a_1R_0^3=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f/2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)$$

于是得到所求的解为：

$$\varphi_i=\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1R^3}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_fR\cos\theta}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}$$

$$=\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1R^3}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}\qquad(R\le R_0)$$

$$\varphi_o=\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1R^3}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f\cos\theta}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^2}=\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_1R^3}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$=\frac{3\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^3}\qquad(R\ge R_0)$$

在均匀介质内部，只在自由电荷不为零的地方，极化电荷才不为零，所以在球体内部，只有球心处存在极化电荷。

$$\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\nabla\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}] = -\nabla\cdot[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\boldsymbol{D}] = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1)\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

$$=(\varepsilon_0/\varepsilon_1-1)\rho_f$$

所以 $\boldsymbol{p}_p = (\varepsilon_0/\varepsilon_1-1)\boldsymbol{p}_f$

在两介质交界面上，极化电荷面密度为

$$\sigma_p = \boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2) = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{E}_i - (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{E}_\text{o}$$

$$=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial R}\bigg|_{R_0} + (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_\text{o}}{\partial R}\bigg|_{R_0}$$

由于 $\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_i}{\partial R}\Big|_{R_0} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_\text{o}}{\partial R}\Big|_{R_0}$，所以

$$\sigma_p = \varepsilon_0(\frac{\partial\varphi_i}{\partial R}-\frac{\partial\varphi_\text{o}}{\partial R})\bigg|_{R_0} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}\cos\theta$$

5. 空心导体球壳的内外半径为 R_1 和 R_2，球中心置一偶极子 $\boldsymbol{p}$ 球壳上带电 Q，求空间各点的电势和电荷分布。

解：以球心为原点，以 $\boldsymbol{p}$ 的方向为极轴方向建立球坐标系。在 $R<R_1$ 及 $R>R_2$ 两均匀区域，电势满足拉普拉斯方程。通解形式均为

$$\sum_n (a_nR^n + \frac{b_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

当 $R\to\infty$ 时，电势趋于零，所以 $R>R_2$ 时,电势可写为

$$\varphi_\text{o} = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta) \qquad (1)$$

当 $R\to 0$ 时，电势应趋于偶极子 $\boldsymbol{p}$ 激发的电势：

$$\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{R}/4\pi\varepsilon_0R^3 = p\cos\theta/4\pi\varepsilon_0R^2$$

所以 $R<R_1$ 时，电势可写为

$$\varphi_i = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2} + \sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta) \qquad (2)$$

设球壳的电势为 φ_s,则

$$\varphi_\text{o}\big|_{R_2} = \sum_n \frac{b_n}{R_2^{n+1}}P_n(\cos\theta) = \varphi_s \qquad (3)$$

$$\varphi_i\big|_{R_1} = p\cos\theta/4\pi\varepsilon_0R_1^2 + \sum_n a_nR_1^nP_n(\cos\theta) = \varphi_s \qquad (4)$$

由(3)得： $b_0 = \varphi_sR_2$ ； $b_n = 0 \quad (n\neq 0)$

由(4)得： $a_0 = \varphi_s$ ； $a_1 = -p/4\pi\varepsilon_0R_1^3$ ； $a_n = 0 \quad (n\neq 0,\ 1)$

所以 $\varphi_\text{o} = \varphi_sR_2/R \qquad (5)$

$$\varphi_i = p\cos\theta/4\pi\varepsilon_0R^2 + \varphi_s - pR\cos\theta/4\pi\varepsilon_0R_1^3 \qquad (6)$$

再由 $\int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_o}{\partial R} \cdot d\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \frac{\varphi_s R_2}{R^2} 4\pi R^2 = Q$ 得：

$$\varphi_s = Q / 4\pi\varepsilon_0 R_2 \tag{7}$$

将(7)代入(5)(6)得：

$$\varphi_o = Q / 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (R > R_2)$$

$$\varphi_i = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{pR\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{Q}{R_2} - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R_1^3})$$

在 $R = R_2$ 处，电荷分布为：

$$\sigma = D_n = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_o}{\partial R}\bigg|_{R_2} = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

在 $R = R_1$ 处，电荷分布为：

$$\sigma' = -D_n = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial R}\bigg|_{R_1} = -\frac{3p\cos\theta}{4\pi R_1^3}$$

6. 在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷 ρ_f 的绝缘介质球（电容率为 ε ），求空间各点的电势。

解： 以球心为原点，以 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为极轴方向建立球坐标系。将空间各点的电势看作由两部分迭加而成，一部分 φ_1 为绝缘介质球内的均匀自由电荷产生，另一部分 φ_2 为外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 及 $\boldsymbol{E}_0$ 感应的极化电荷产生。前者可用高斯定理求得，后者满足拉普拉斯方程。由于对称性，φ_2 的形式为

$$\sum_n (a_n R^n + b_n R^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta)$$

对于 φ_1，当 $R > R_0$ 时，由高斯定理得：

$$D_1 = \rho_f R_0^3 / 3R^2 \quad , \quad E_1 = \rho_f R_0^3 / 3\varepsilon_0 R^2$$

当 $R < R_0$ 时，由高斯定理得：

$$D_2 = \rho_f R / 3 \quad , \quad E_2 = \rho_f R / 3\varepsilon$$

φ_1 的球外部分： $\varphi_{o1} = \int_R^{R_0} (\rho_f R_0^3 / 3\varepsilon_0 R^2) dR + \int_{R_0}^0 (\rho_f R / 3\varepsilon) dR$

$$= \rho_f R_0^3 / 3\varepsilon_0 R - \rho_f R_0^2 / 3\varepsilon_0 - \rho_f R_0^2 / 6\varepsilon \tag{1}$$

φ_1 的球内部分： $\varphi_{i1} = \int_R^0 E_2 \cdot dR = \int_R^0 (\rho_f R / 3\varepsilon) dR = -\rho_f R^2 / 6\varepsilon$ （2）

对于 φ_2，当 $R \to \infty$ 时，$\varphi_2 \to -E_0 R\cos\theta$，所以

$$\varphi_{o2} = -E_0 R\cos\theta + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \qquad (R > R_0)$$

当 $R \to 0$ 时，φ_2 为有限，所以

$$\varphi_{i2} = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \qquad (R < R_0)$$

边界条件为：$R=R_0$ 时，$\varphi_{o2}=\varphi_{i2}$，$\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi_{o2}}{\partial R}\right|_{R_0}=\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi_{i2}}{\partial R}\right|_{R_0}$。即：

$$\begin{cases}-E_0R_0\cos\theta+\sum_n b_nR_0^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=\sum_n a_nR_0^nP_n(\cos\theta)\\ -E_0R_0\cos\theta-\varepsilon_0\sum_n(n+1)b_nR_0^{-(n+2)}P_n(\cos\theta)=\varepsilon\sum_n na_nR_0^{n-1}P_n(\cos\theta)\end{cases}$$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，解得：

$$a_1=-3\varepsilon_0E_0/(\varepsilon+2\varepsilon_0)$$

$$b_1=(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0R_0^3/(\varepsilon+2\varepsilon_0)$$

$$a_n=b_n=0\qquad(n\neq1)$$

所以 $\varphi_{o2}=-E_0R\cos\theta+(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0R_0^3\cos\theta/(\varepsilon+2\varepsilon_0)R^2\qquad(R>R_0)$ (3)

$$\varphi_{i2}=-3\varepsilon_0E_0R\cos\theta/(\varepsilon+2\varepsilon_0)\qquad(R<R_0)\tag{4}$$

由(1) (2) (3) (4)得:

$$\varphi=\begin{cases}-\frac{\rho_fR_0^2}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)+\frac{\rho_fR_0^3}{3\varepsilon_0R}-E_0R\cos\theta+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0R_0^3\cos\theta}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)R^2}&(R\geq R_0)\\ -\frac{\rho_fR^2}{6\varepsilon}-\frac{3\varepsilon_0E_0R\cos\theta}{\varepsilon+2\varepsilon_0}&(R\leq R_0)\end{cases}$$

7. 在一很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 $\boldsymbol{J}_{f0}$。今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳恒时电流分布和面电荷分布，讨论 $\sigma_1>>\sigma_2$ 及 $\sigma_2>>\sigma_1$ 两种情况的电流分布的特点。

解： 本题虽然不是静电问题，但当电流达到稳定后，由于电流密度 $\boldsymbol{J}_{f0}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 成正比（比例系数为电导率），所以 $\boldsymbol{E}_0$ 也是稳定的。这种电场也是无旋场，其电势也满足拉普拉斯方程，因而可以用静电场的方法求解。

(1) 未放入小球时，电流密度 $\boldsymbol{J}_{f0}$ 是均匀的，由 $\boldsymbol{J}_{f0}=\sigma_2\boldsymbol{E}_0$ 可知，稳恒电场 $\boldsymbol{E}_0$ 也是一个均匀场。因此在未放入小球时电解液中的电势 φ_0 便是均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电势。放入小球后，以球心为原点，$\boldsymbol{E}_0$ 的方向为极轴方向，建立球坐标系。为方便起见，以坐标原点为电势零点。在稳恒电流条件下，$\partial\rho/\partial t=0$，所以：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0\tag{1}$$

由(1)式可推出稳恒电流条件下的边界条件为:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1)=0\tag{2}$$

设小球内的电势为 φ_1，电解液中的电势为 φ_2，则在交界面上有：

$$\varphi_1|_{R_0}=\varphi_2|_{R_0}\tag{3}$$

$$\sigma_1\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right|_{R=R_0}=\sigma_2\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right|_{R=R_0}\tag{4}$$

将 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 代入(1)，得：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{E})=-\sigma\nabla^2\varphi=0$$

可见 φ 满足拉普拉斯方程

考虑到对称性及 $R\to\infty$ 时 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}_0$，球外电势的解可写成：

$$\varphi_2=-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R\cos\theta+\sum_n\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\qquad(R>R_0)\tag{5}$$

其中利用了 $\boldsymbol{J}_{f0}=\sigma_2\boldsymbol{E}_0$。

考虑到 $R\to 0$ 时电势为有限值，球内电势的解可写成：

$$\varphi_1=\sum_n a_nR^nP_n(\cos\theta)\qquad(R<R_0)\tag{6}$$

因为选 $R=0$ 处为电势零点，所以 $a_0=0$，将(5) (6)代入(3) (4)得：

$$-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R_0\cos\theta+\sum_n\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_n a_nR_0^nP_n(\cos\theta)\tag{7}$$

$$\sigma_2[-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}\cos\theta-\sum_n(n+1)\frac{b_n}{R_0^{n+2}}P_n(\cos\theta)]=\sigma_1\sum_n na_nR_0^{n-1}P_n(\cos\theta)\tag{8}$$

由(7)(8)两式可得:

$$a_1=-3J_{f0}/(\sigma_1+2\sigma_2)\quad,\qquad b_1=(\sigma_1-\sigma_2)J_{f0}R_0^3/(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2$$

$$a_n=0,\quad b_n=0\qquad(n\neq1)$$

所以： $\varphi_1=-3J_{f0}R\cos\theta/(\sigma_1+2\sigma_2)=-3\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R}/(\sigma_1+2\sigma_2)\qquad(R\le R_0)$

$$\varphi_2=-J_{f0}R\cos\theta/\sigma_2+(\sigma_1-\sigma_2)J_{f0}R_0^3\cos\theta/(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2R^2$$

$$=-\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R}/\sigma_2+(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R}/(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2R^3\qquad(R\ge R_0)$$

由此可得球内电流密度:

$$\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1=-\sigma_1\nabla\varphi_1=3\sigma_1\nabla(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})/(\sigma_1+2\sigma_2)=3\sigma_1\boldsymbol{J}_{f0}/(\sigma_1+2\sigma_2)$$

电解液中的电流密度为:

$$\boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2=-\sigma_2\nabla\varphi_2$$

$$=\boldsymbol{J}_{f0}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{(\sigma_1+2\sigma_2)}[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{R^3}]$$

(2)两导体交界面上自由电荷面密度

$$\omega_f=\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\varepsilon_0\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{J}_2/\sigma_2-\boldsymbol{J}_1/\sigma_1)$$

$$=3(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_0J_{f0}\cos\theta/(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2$$

(3) 当 $\sigma_1>>\sigma_2$，即球的电导率比周围电解液的电导率大的多时，

$$(\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_1+2\sigma_2)\approx1\quad,\qquad 3\sigma_1/(\sigma_1+2\sigma_2)\approx3$$

所以， $\boldsymbol{J}_1\approx3\boldsymbol{J}_{f0}$

$$\boldsymbol{J}_2\approx\boldsymbol{J}_{f0}+(R_0^3/R^3)[3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^2-\boldsymbol{J}_{f0}]$$

$$\omega_f\approx3\varepsilon_0J_{f0}\cos\theta/\sigma_2$$

当 $\sigma_1<<\sigma_2$ 时，同理可得：

$$\boldsymbol{J}_1\approx0$$

$$\boldsymbol{J}_2\approx\boldsymbol{J}_{f0}-(R_0^3/2R^3)[3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^2-\boldsymbol{J}_{f0}]$$

$$\omega_f \approx -3\varepsilon_0 J_{f0}\cos\theta/2\sigma_2$$

8. 半径为 R_0 的导体球外充满均匀绝缘介质 ε，导体球接地，离球心为 a 处（$a>R_0$）置一点电荷 Q_f，试用分离变量法求空间各点电势，证明所得结果与电象法结果相同。

解：以球心为原点，以球心到点电荷的连线为极轴建立球坐标系。将空间各点电势看作由两部分迭加而成。一是介质中点电荷产生的电势

$$\varphi_1 = Q_f/4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta},$$

二是球面上的感应电荷及极化面电荷产生的 φ_2。后者在球内和球外分别满足拉普拉斯方程。考虑到对称性，φ_2 与 ϕ 无关。

由于 $R\to 0$ 时，φ_2 为有限值，所以球内的 φ_2 解的形式可以写成

$$\varphi_{i2} = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \qquad (1)$$

由于 $R\to\infty$ 时，φ_2 应趋于零，所以球外的 φ_2 解的形式可以写成

$$\varphi_{o2} = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \qquad (2)$$

由于 $\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta} = (1/a)\sum_n (R/a)^n P_n(\cos)$

$$\varphi_1 = (Q_f/4\pi\varepsilon a)\sum_n (R/a)^n P_n(\cos) \qquad (3)$$

当 $R\le R_0$ 时，$\varphi_{内} = \varphi_1 + \varphi_{i2}$

$$= (Q_f/4\pi\varepsilon a)\sum_n (R/a)^n P_n(\cos) + \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta) \qquad (4)$$

当 $R>R_0$ 时，$\varphi_{外} = \varphi_1 + \varphi_{o2}$

$$= (Q_f/4\pi\varepsilon a)\sum_n (R/a)^n P_n(\cos) + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \qquad (5)$$

因为导体球接地，所以 $\varphi_{内} = 0$ （6）

$$\varphi_{外}\big|_{R_0} = \varphi_{内}\big|_{R_0} = 0 \qquad (7)$$

将（6）代入（4）得: $a_n = -Q_f/4\pi\varepsilon a^{n+1}$ （8）

将（7）代入（5）并利用（8）式得: $b_n = -Q_f R_0^{2n+1}/4\pi\varepsilon a^{n+1}$ （9）

将（8）（9）分别代入（4）（5）得:

$$\varphi_{内} = 0 \qquad (R\le R_0) \qquad (10)$$

$$\varphi_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}} - \frac{R_0 Q_f}{a\sqrt{R^2+(R_0^2/a)^2+2RR_0^2\cos\theta/a}}\right], \quad (R\ge R_0) \qquad (11)$$

用镜像法求解：设在球内 r_0 处的像电荷为 Q'。由对称性，Q' 在球心与 Q_f 的连线上，根据边界条件：球面上电势为 0，可得：（解略）

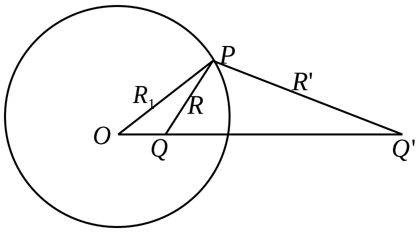
$$r_0 = R_0^2/a, \qquad Q' = -R_0 Q_f/a$$

所以空间的电势为

$$\varphi_{外}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\frac{Q_f}{r_1}+\frac{Q'}{r_2})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}[\frac{Q_f}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{R_0Q_f}{a\sqrt{R^2+(R_0^2/a)^2+2RR_0^2\cos\theta/a}}]\quad(R\ge R_0)$$

9. 接地的空心导体球的内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 a 处($a<R_1$)置一点电荷 Q。用镜像法求电势。导体球上的感应电荷有多少？分布在内表面还是外表面？

解：假设可以用球外一个假想电荷 Q' 代替球内表面上感应电荷对空间电场的作用，空心导体球接地，球外表面电量为零，由对称性，Q' 应在球心与 Q 的连线上。



考虑球内表面上任一点 P，边界条件要求：

$$Q/R+Q'/R'=0\qquad(1)$$

式 R 为 Q 到 P 的距离，R'为 Q' 到 P 的距离，因此，对球面上任一点，应有

$$R'/R=-Q'/Q=常数\qquad(2)$$

只要选择 Q' 的位置，使 $\Delta OQ'P\sim\Delta OPQ$，则

$$R'/R=R_1/a=常数\qquad(3)$$

设 Q' 距球心为 b，则 $b/R_1=R_1/a$，即 $b=R_1^2/a$　　(4)

由（2）（3）两式得：$Q'=-R_1Q/a$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{R_1Q/a}{\sqrt{R^2+R_1^4/a^2-2R_1^2R\cos\theta/a}}]$$

导体内电场为零，由高斯定理可知球面上的感应电荷为 $-Q$，分布于内表面。

由于外表面没有电荷，且电势为零，所以从球表面到无穷远没有电场，$\varphi_{外}=0$。

10. 上题的导体球壳不接地，而是带总电荷 Q_0，或使具有确定电势 φ_0，试求这两种情况的电势。又问 φ_0 与 Q_0 是何种关系时，两情况的解是相等的？

解：由上题可知，导体球壳不接地时，球内电荷 Q 和球的内表面感应电荷 $-Q$ 的总效果是使球壳电势为零。为使球壳总电量为 Q_0，只需满足球外表面电量为 Q_0+Q 即可。因此，导体球不接地而使球带总电荷 Q_0 时，可将空间电势看作两部分的迭加，一是 Q 与内表面的 $-Q$ 产生的电势 φ_1，二是外表面 Q_0+Q 产生的电势 φ_2。

$$\varphi_{1内}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{R_1Q/a}{\sqrt{R^2+R_1^4/a^2-2R_1^2R\cos\theta/a}}],\quad(R<R_1)$$

$\varphi_{1外}=0$，　$(R\ge R_1)$；　$\varphi_{2内}=(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0R_2$，　$(R<R_2)$；

$\varphi_{2外}=(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0R$，　$(R\ge R_2)$，所以

$$\varphi=(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0R\qquad(R\ge R_2)$$

$$\varphi=(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0R_2\qquad(R_1\le R\le R_2)$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{R_1Q/a}{\sqrt{R^2+R_1^4/a^2-2R_1^2R\cos\theta/a}}+\frac{Q+Q_0}{R_2}],(R\le R_1)$$

由以上过程可见，球面电势为 $(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0R_2$。

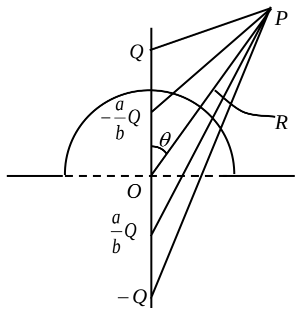
若已知球面电势 φ_0，可设导体球总电量为 Q'_0，则有：

$$(Q+Q'_0)/4\pi\varepsilon_0 R_2=\varphi_0，\text{即：}(Q+Q'_0)/4\pi\varepsilon_0=\varphi_0 R_2$$

电势的解为：

$$\varphi=\begin{cases}\varphi_0 R_2/R & (R\geq R_2)\\ \varphi_0 & (R_1\leq R\leq R_2)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\dfrac{R_1 Q/a}{\sqrt{R^2+R_1^4/a^2-2R_1^2 R\cos\theta/a}}\right]+\varphi_0 \\ (R\leq R_1)\end{cases}$$

当 φ_0 和 Q_0 满足 $\varphi_0=(Q+Q_0)/4\pi\varepsilon_0 R_2$ 时，两种情况的解相同。



11. 在接地的导体平面上有一半径为a的半球凸部（如图），半球的球心在导体平面上，点电荷Q位于系统的对称轴上，并与平面相距为b（b>a），试用电象法求空间电势。

解：如图，根据一点电荷附近置一无限大接地导体平板和一点电荷附近置一接地导体球两个模型，可确定三个镜像电荷的电量和位置。

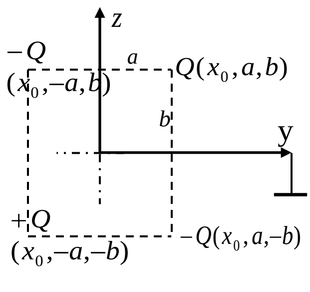
$$Q_1=-\frac{a}{b}Q，\ \boldsymbol{r}_1=\frac{a^2}{b}\boldsymbol{e}_z；\ Q_2=\frac{a}{b}Q，\ \boldsymbol{r}_2=-\frac{a^2}{b}\boldsymbol{e}_z；$$

$Q_3=-Q$，$\boldsymbol{r}_3=-b\boldsymbol{e}_z$，所以

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+b^2+2Rb\cos\theta}}+\frac{a}{b\sqrt{R^2+\dfrac{a^4}{b^2}+2\dfrac{a^2}{b}R\cos\theta}}\right.$$

$$\left.+\frac{a}{b\sqrt{R^2+\dfrac{a^4}{b^2}-2\dfrac{a^2}{b}R\cos\theta}}\right]，\quad (0\leq\theta<\pi/2\quad，\quad R>a)$$

12. 有一点电荷Q位于两个互相垂直的接地导体平面所围成的直角空间内，它到两个平面的距离为a和b，求空间电势。

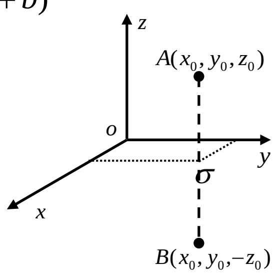


解：用电像法，可以构造如图所示的三个象电荷来代替两导体板的作用。

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-a)^2+(z-b)^2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-a)^2+(z+b)^2}}$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+a)^2+(z-b)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+a)^2+(z+b)^2}}\right]\quad，\quad (y,z>0)$$

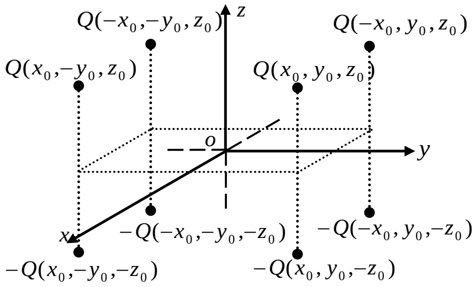


13. 设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为σ的液体。取该两平面为xz面和yz面在 (x_0,y_0,z_0) 和 $(x_0,y_0,-z_0)$

两点分别置正负电极并通以电流I，求导电液体中的电势。

解：本题的物理模型是，由外加电源在A、B两点间建立电场，使溶液中的载流子运动形成电流I，当系统稳定时，属恒定场，即$\partial\rho/\partial t=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$。对于恒定的电流，可按静电场的方式处理。于是在A点取包围A的高斯面，则

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=Q/\varepsilon,$$



由于$I=\oint\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$，所以

$I/\sigma=Q/\varepsilon$

可得：$Q=I\varepsilon/\sigma$ 。

同理，对B点有：$Q_B=-I\varepsilon/\sigma=-Q$

又，在容器壁上，$j_n=0$，即无电流穿过容器壁。

由$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$可知，当$j_n=0$时，$E_n=0$。

所以可取如右图所示电像，其中上半空间三个像电荷Q，下半空间三个像电荷$-Q$，容器内的电势分布为：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{Q_i}{r_i}\right)=\frac{I}{4\pi\sigma}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

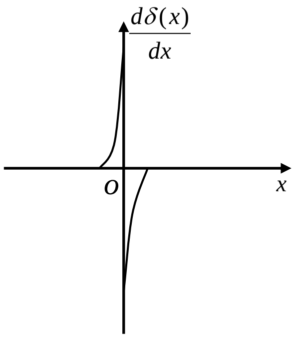
$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\Bigg]$$

14. 画出函数$d\delta(x)/dx$的图，说明$\rho=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})$是一个位于原点的偶极子的电荷密度。



解：（1）$\delta(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & ,\ \boldsymbol{x}\neq 0\\ \infty & ,\ \boldsymbol{x}=0\end{cases}$

$$\frac{d\delta(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x+\Delta x)-\delta(x)}{\Delta x}$$

1）$x\neq 0$时，$d\delta(x)/dx=0$

2）$x=0$时，***a***）对于$\Delta x>0$，$\dfrac{d\delta(x)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-\infty}{\Delta x}=-\infty$

b）对于$\Delta x<0$，$\dfrac{d\delta(x)}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-\infty}{\Delta x}=+\infty$

图象如右图所示。

$$\rho=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})=-(p_{x1}\partial/\partial x_1+p_{x2}\partial/\partial x_2+p_{x3}\partial/\partial x_3)\delta(\boldsymbol{x})$$

$$\int \rho \boldsymbol{x} dV = -\int (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} dV = -\int (p_{x1}\partial/\partial x_1 + p_{x2}\partial/\partial x_2 + p_{x3}\partial/\partial x_3)\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} dV$$

其中第一项为：

$$-\int [(p_{x1}\frac{\partial}{\partial x_1})\delta(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{x} dV = -\int p_{x1}\frac{\partial}{\partial x_1}(\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3))(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$= -\int p_{x1}\frac{\partial\delta(x_1)}{\partial x_1}\delta(x_2)\delta(x_3)(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3)dx_1dx_2dx_3 = -\boldsymbol{e}_1\int p_{x1}x_1\frac{d\delta(x_1)}{dx_1}dx_1$$

应用 $\frac{d(t\delta(t))}{dt} = \delta(t) + t\frac{d\delta(t)}{dt}$，即 $t\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d(t\delta(t))}{dt} - \delta(t)$，可得：

$$-\boldsymbol{e}_1\int p_{x1}x_1\frac{d\delta(x_1)}{dx_1}dx_1 = -\boldsymbol{e}_1\int p_{x1}d(x_1\delta(x_1)) + \boldsymbol{e}_1\int p_{x1}\delta(x_1)dx_1$$

$$= -\boldsymbol{e}_1 p_{x1}x_1\delta(x_1) + \boldsymbol{e}_1 p_{x1} = \boldsymbol{e}_1 p_{x1} \qquad (\boldsymbol{x}=0)$$

同理可得另外两项分别为 $\boldsymbol{e}_2 p_{x2}$ 及 $\boldsymbol{e}_3 p_{x3}$，所以，$\int \rho \boldsymbol{x} dV = \boldsymbol{p}$，即 $\boldsymbol{p}$ 是一个位于原点的偶极子的电荷密度。

15. 证明：（1）$\delta(ax) = \delta(x)/a \quad (a>0)$，（若 $a<0$，结果如何？）

（2）$x\delta(x) = 0$

证明：1) 显然，当 $x \neq 0$ 时，$\delta(ax) = \delta(x)/a$ 成立；又

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)\frac{d(ax)}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)d(ax) = \frac{1}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1$$

所以 $\delta(ax) = \delta(x)/a$ 在全空间成立。

若 $a<0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-ax)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-ax)\frac{d(-ax)}{-a} = -\frac{1}{a}$

即，$\delta(ax) = -\delta(x)/a$

所以 $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ 在全空间成立。

2) 由 $\delta(x)$ 的选择性证明。

$\because \quad |x\delta(x)| = |x|\delta(x) \geq 0$，而 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\delta(x)dx = |x|\big|_{x=0} = 0$

$\therefore \quad |x|\delta(x) = 0$，进而 $x\delta(x) = 0$

16. 一块极化介质的极化矢量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$，根据偶极子静电势的公式，极化介质所产生的静电势为 $\varphi = \int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dV'$，另外根据极化电荷公式 $\rho_p = -\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$ 及 $\sigma_p = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}$，极化介质所产生的电势又可表为 $\varphi = -\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 r}dV' + \oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot d\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 r}$，试证明以上两表达式是等同的。

证明：由第一种表达式得

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)dV'$$

$$\because \quad \nabla'\cdot\left(\boldsymbol{P}\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\therefore \quad \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'+\int_V\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}\right)dV'\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'+\oint_S\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{S}'\right],$$

所以，两表达式是等同的。

实际上，继续推演有：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\int_V\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}dV'+\oint_S\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\cdot dS'\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V\frac{\rho_p}{r}dV'+\oint_S\frac{\sigma_p}{r}\cdot dS'\right]$$

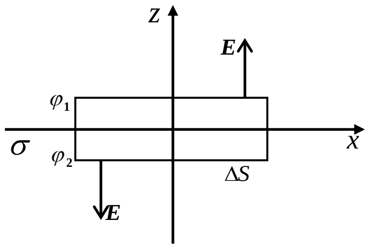
刚好是极化体电荷的总电势和极化面电荷产生的总电势之和。

17. 证明下述结果，并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化。

（1）在面电荷两侧，电势法向微商有跃变，而电势是连续的。

（2）在面偶极层两侧，电势有跃变 $\varphi_2-\varphi_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}/\varepsilon_0$，而电势的法向微商是连续的。

（各带等量正负面电荷密度± σ 而靠的很近的两个面，形成面偶极层，而偶极矩密度 $\boldsymbol{P}=\lim\limits_{\substack{\sigma\to\infty\\ l\to 0}}\sigma\boldsymbol{l}$）



证明：1）如图，由高斯定理可得：$2E\cdot\Delta S=\sigma\cdot\Delta S/\varepsilon_0$，

$$\therefore \quad E=\sigma/2\varepsilon_0,$$

$$\varphi_2-\varphi_1=(\sigma/2\varepsilon_0)z-(\sigma/2\varepsilon_0)z=0$$

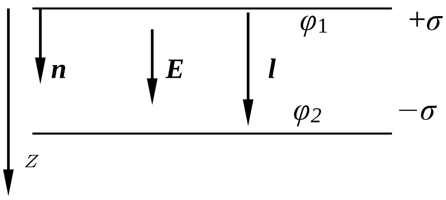
即，电势是连续的，但是

$$\partial\varphi_1/\partial n_1=\boldsymbol{E}_{1n}=\boldsymbol{e}_z\sigma/2\varepsilon_0,$$

$$\partial\varphi_2/\partial n_2=\boldsymbol{E}_{2n}=-\boldsymbol{e}_z\sigma/2\varepsilon_0$$

$$\therefore \quad \partial\varphi_1/\partial n_1-\partial\varphi_2/\partial n_2=\sigma/\varepsilon_0$$

即，电势法向微商有跃变



2）如图，由高斯定理可得：$E=\boldsymbol{e}_z\sigma/\varepsilon_0$

$$\therefore \quad \varphi_2-\varphi_1=\lim_{l\to 0}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{l}=\lim_{l\to 0}\sigma\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}/\varepsilon_0$$

$$=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}/\varepsilon_0$$

又 $\partial\varphi_1/\partial n=\boldsymbol{E}$，$\partial\varphi_2/\partial n=\boldsymbol{E}$

$\therefore \quad \partial\varphi_1/\partial n-\partial\varphi_2/\partial n=0$，即电势的法向微商是连续的。

18. 一个半径为 R_0 的球面，在球坐标 $0<\theta<\pi/2$ 的半球面上电势为 φ_0 在 $\pi/2<\theta<\pi$ 的半球面上电势为 $-\varphi_0$，求空间各点电势。

提示：$\int_0^1 P_n(x)dx=\left.\dfrac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}\right|_0^1$，$P_n(1)=1$，

$$P_n(0)=\begin{cases}0 \quad ,（n=\text{奇数}） \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} \quad ,（n=\text{偶数}）\end{cases}$$

解：由题意，球内外电势均满足拉普拉斯方程：$\nabla^2\varphi_{内}=0$；$\nabla^2\varphi_{外}=0$

球内电势在 $r\to 0$ 时为有限，球外电势在 $r\to\infty$ 时为0，所以通解形式为：

$$\varphi_{内}=\sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta) \quad ,\quad \varphi_{外}=\sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \quad 。$$

在球面上，$\varphi_{内}\big|_{r=R_0}=\varphi_{外}\big|_{r=R_0}$，即 $\varphi\big|_{r=R_0}=f(\theta)=\begin{cases}\varphi_0, & (0\le\theta<\pi/2) \\ -\varphi_0, & (\pi/2<\theta\le\pi)\end{cases}$

将 $f(\theta)$ 按球函数展开为广义傅立叶级数，$f(\theta)=\sum_n f_n P_n(\cos\theta)$

则 $a_n R_0^n=b_n R_0^{-(n+1)}=f_n$，下面求 f_n。

$$f_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\theta)P_n(\cos\theta)d\cos\theta=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\varphi\big|_{R_0}P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2n+1}{2}[\int_0^{\pi/2}\varphi_0 P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta-\int_{\pi/2}^{\pi}\varphi_0 P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta]$$

$$=-\frac{2n+1}{2}[\varphi_0\int_1^0 P_n(x)dx-\varphi_0\int_0^{-1}P_n(x)dx]=\frac{2n+1}{2}\varphi_0[\int_0^1 P_n(x)dx+\int_0^{-1}P_n(x)dx]$$

由于 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$，所以

$$f_n=\frac{2n+1}{2}\varphi_0[\int_0^1 P_n(x)dx+(-1)^{n+1}\int_0^1 P_n(x)dx]=\frac{2n+1}{2}\varphi_0[1+(-1)^{n+1}]\int_0^1 P_n(x)dx$$

当n为偶数时，$f_n=0$；

当n为奇数时，
$$f_n=\frac{2n+1}{2}\varphi_0[1+1]\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}\bigg|_0^1=\varphi_0[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]\big|_0^1$$

$$=\varphi_0[-P_{n+1}(0)+P_{n-1}(0)]=\varphi_0(-1)^{n-1/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n+1)}(2n+1)$$

$$a_n=f_n/R_0^n=\frac{\varphi_0}{R_0^n}(-1)^{n-1/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n+1)}(2n+1)$$

$$b_n=f_n R_0^{(n+1)}\ \varphi_0 R_0^{n+1}(-1)^{n-1/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n+1)}(2n+1)$$

至此，可写出球内外的电势为

$$\varphi_{内}=\sum\varphi_0(-1)^{n-1/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n+1)}(2n+1)(\frac{r}{R_0})^n P_n(\cos\theta),\quad (n\text{为奇数},\ r<R_0)$$

$$\varphi_{外}=\sum\varphi_0(-1)^{n-1/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n+1)}(2n+1)(\frac{R_0}{r})^{n+1}P_n(\cos\theta),\quad (n\text{为奇数},\ r>R_0)$$

第三章 静磁场

1. 试用 $\boldsymbol{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$，写出 $\boldsymbol{A}$ 的两种不同表示式，证明二者之差为无旋场。

解：$\boldsymbol{B}_0$ 是沿 z 方向的均匀恒定磁场，即 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z$，由矢势定义 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 得

$\partial A_z/\partial y-\partial A_y/\partial z=0$；$\partial A_x/\partial z-\partial A_z/\partial x=0$；$\partial A_y/\partial x-\partial A_x/\partial y=B_0$

三个方程组成的方程组有无数多解，如：

① $A_y=A_z=0$，$A_x=-B_0y+f(x)$ 即：$\boldsymbol{A}=[-B_0y+f(x)]\boldsymbol{e}_x$；

② $A_x=A_z=0$，$A_y=B_0x+g(y)$ 即：$\boldsymbol{A}=[B_0x+g(y)]\boldsymbol{e}_y$

解①与解②之差为 $\Delta\boldsymbol{A}=[-B_0y+f(x)]\boldsymbol{e}_x-[B_0x+g(y)]\boldsymbol{e}_y$

则 $\nabla\times(\Delta\boldsymbol{A})=(-\partial A_y/\partial z)\boldsymbol{e}_x+(\partial A_x/\partial z)\boldsymbol{e}_y+(\partial A_y/\partial x-\partial A_x/\partial y)\boldsymbol{e}_z=0$

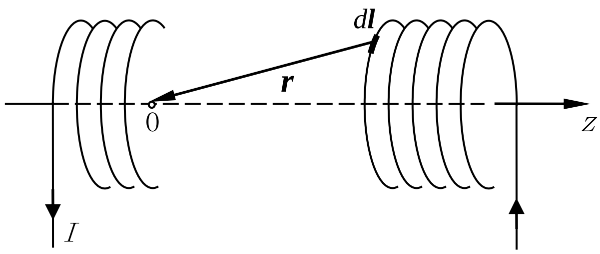
这说明两者之差是无旋场

2. 均匀无穷长直圆柱形螺线管，每单位长度线圈匝数为 n，电流强度 I，试用唯一性定理求管内外磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解：根据题意，取螺线管的中轴线为 z 轴。本题给定了空间中的电流分布，故可由

$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}dV'$ 求解磁场分布，又 $\boldsymbol{J}$ 只分布于导线上，所以

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$



1)螺线管内部：由于螺线管是无限长理想螺线管，所以其内部磁场是均匀强磁场，故只须求出其中轴线上的磁感应强度，即可知道管内磁场。由其无限长的特性，不妨取场点为坐标原点建立柱坐标系。

$\boldsymbol{r}=-a\cos\phi'\boldsymbol{e}_x-a\sin\phi'\boldsymbol{e}_y-z'\boldsymbol{e}_z$， $d\boldsymbol{l}=-ad\phi'\sin\phi'\boldsymbol{e}_x+ad\phi'\cos\phi'\boldsymbol{e}_y$

$$d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=(-ad\phi'\sin\phi'\boldsymbol{e}_x+ad\phi'\cos\phi'\boldsymbol{e}_y)\times(-a\cos\phi'\boldsymbol{e}_x-a\sin\phi'\boldsymbol{e}_y-z'\boldsymbol{e}_z)$$

$$=-az'\cos\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_x-az'\sin\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_y+a^2d\phi'\boldsymbol{e}_z$$

取 $z'\sim z'+dz'$ 的一小段，此段上分布有电流 $nIdz'$

$$\therefore\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{nIdz'(-az'\cos\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_x-az'\sin\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_y+a^2d\phi'\boldsymbol{e}_z)}{(a^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}}nI\boldsymbol{e}_z=\frac{nI\mu_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(z'/a)}{[1+(z'/a)^2]^{3/2}}=n\mu_0I\boldsymbol{e}_z$$

2)螺线管外部：由于螺线管无限长，不妨就在过原点而垂直于轴线的平面上任取一点 $P(\rho,\phi,0)$ 为场点，其中 $\rho>a$。

$$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=\sqrt{(\rho\cos\phi-a\cos\phi')^2+(\rho\sin\phi-a\sin\phi')^2+z'^2}$$

$$=\sqrt{\rho^2+a^2+z'^2-2a\rho\cos(\phi-\phi')}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'=(\rho\cos\phi-a\cos\phi')\boldsymbol{e}_x+(\rho\sin\phi-a\sin\phi')\boldsymbol{e}_y+z'\boldsymbol{e}_z$$

$$d\boldsymbol{l}=-ad\phi'\sin\phi'\boldsymbol{e}_x+ad\phi'\cos\phi'\boldsymbol{e}_y$$

$$d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=-az'\cos\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_x-az'\sin\phi'd\phi'\boldsymbol{e}_y+[a^2-a\rho\cos(\phi'-\phi)]d\phi'\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 nI}{4\pi}\left[\boldsymbol{e}_x\int_0^{2\pi}d\phi'\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{az'\cos\phi'}{r^3}dz'+\boldsymbol{e}_y\int_0^{2\pi}d\phi'\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{az'\sin\phi'}{r^3}dz'+\boldsymbol{e}_z\int_0^{2\pi}d\phi'\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2-a\rho\cos(\phi'-\phi)}{r^3}dz'\right]$$

$$=0$$

3. 设有无限长的线电流 I 沿 z 轴流动，在 $z<0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$z>0$ 区域为真空，试用唯一性定理求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，然后求出磁化电流分布。

解：设$z>0$区域磁感应强度和磁场强度为 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{H}_1$；$z<0$区域为 $\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{H}_2$，由对称性可知 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 均沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向。由于 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续，所以 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2=H\boldsymbol{e}_\theta$。由此得到 $\boldsymbol{B}_{1n}=\boldsymbol{B}_{2n}=0$，满足边值关系，由唯一性定理可知，该结果为唯一正确的解。

以 z 轴上任意一点为圆心，以 r 为半径作一圆周，则圆周上各点的 $\boldsymbol{H}$ 大小相等。根据安培环路定理得：$2\pi rH=I$，即 $H=I/2\pi r$，$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2=(I/2\pi r)\boldsymbol{e}_\theta$

$\therefore\boldsymbol{B}_1=\mu_1\boldsymbol{H}_1=(\mu_0 I/2\pi r)\boldsymbol{e}_\theta$，(z>0)；

$\boldsymbol{B}_2=\mu_2\boldsymbol{H}_2=(\mu I/2\pi r)\boldsymbol{e}_\theta$，(z<0)。

在介质中 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}_2/\mu_0-\boldsymbol{H}_2=(I/2\pi r)(\mu/\mu_0-1)\boldsymbol{e}_\theta$

所以，介质界面上的磁化电流密度为：

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}=(I/2\pi r)(\mu/\mu_0-1)\boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_z=(I/2\pi r)(\mu/\mu_0-1)\boldsymbol{e}_r$$

总的感应电流：$I=\oint\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}(I/2\pi r)(\mu/\mu_0-1)\boldsymbol{e}_\theta\cdot rd\varphi\boldsymbol{e}_\theta=I(\mu/\mu_0-1)$，

电流在 $z<0$ 区域内，沿 z 轴流向介质分界面。

4. 设 $x<0$ 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$x>0$ 空间为真空，今有线电流 I 沿 z 轴流动，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：假设本题中的磁场分布仍呈轴对称，则可写作

$$\boldsymbol{B}=(\mu' I/2\pi r)\boldsymbol{e}_\phi$$

它满足边界条件：$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$ 及 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}=0$。由此可得介质中：

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{B}/\mu=(\mu' I/2\pi\mu r)\boldsymbol{e}_\phi$$

由 $\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$ 得：

在$x<0$ 的介质中 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\mu' I}{2\pi r}\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}\boldsymbol{e}_\phi$ ，

则：$I_M=\oint\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}=\dfrac{\mu' I}{2\pi r}\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}r\int_0^{\pi}d\phi+0\int_{\pi}^{2\pi}d\phi=\dfrac{I\mu'(\mu-\mu_0)}{2\mu\mu_0}$

再由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\mu_0(I+I_M)/2\pi r=(\mu' I/2\pi r)\boldsymbol{e}_\phi$ 可得 $\mu'=2\mu\mu_0/(\mu+\mu_0)$，所以

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\mu\mu_0 I/(\mu+\mu_0)\pi r$，$I_M=(\mu-\mu_0)I/(\mu+\mu_0)$ （沿 z 轴）

5. 某空间区域内有轴对称磁场。在柱坐标原点附近已知 $B_z\approx B_0-C(z^2-\rho^2/2)$，其中 B_0 为常量。试求该处的 B_ρ。

提示：用$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，并验证所得结果满足$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$。

解：由于$\boldsymbol{B}$具有对称性，设$\boldsymbol{B}=B_\rho\boldsymbol{e}_\rho+B_z\boldsymbol{e}_z$， 其中 $B_z=B_0-C(z^2-\rho^2/2)$

$\because\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，$\therefore\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\dfrac{\partial}{\partial z}B_z=0$，即：$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)-2cz=0$，

$\therefore\rho B_\rho=cz\rho^2+a$（常数）。

当$\rho\to 0$时，B_ρ为有限，所以 $a=0$；$B_\rho=cz\rho$，即：

$$\boldsymbol{B}=cz\rho\boldsymbol{e}_\rho+[B_0-c(z^2-\rho^2/2)]\boldsymbol{e}_z \qquad (1)$$

因为$\boldsymbol{J}=0$，$\boldsymbol{D}=0$，所以 $\nabla\times\boldsymbol{B}=0$，即$(\partial B_\rho/\partial z-\partial B_\rho/\partial\rho)\boldsymbol{e}_\theta=0$ （2）

直接验证可知，（1）式能使（2）式成立，所以$B_\rho=cz\rho$，$(c$为常数$)$

6. 两个半径为a的同轴圆形线圈，位于$z=\pm L$面上。每个线圈上载有同方向的电流I。

（1）求轴线上的磁感应强度。

（2）求在中心区域产生最接近于均匀常常时的L和a的关系。

提示：用条件$\partial^2B_z/\partial z^2=0$

解：1） 由毕—萨定律，L 处线圈在轴线上 z 处产生的磁感应强度为

$\boldsymbol{B}_1=B_{1z}\boldsymbol{e}_z$，

$$B_{1z}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{|Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}|}{r^3}\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia^2}{[a^2+(z-L)^2]^{3/2}}\int d\theta=\frac{1}{2}\mu_0Ia^2\frac{1}{[(z-L)^2+a^2]^{3/2}}$$

同理，−L 处线圈在轴线上 z 处产生的磁感应强度为：

$$\boldsymbol{B}_2=B_{2z}\boldsymbol{e}_z,\quad B_{2z}=\frac{1}{2}\mu_0Ia^2\frac{1}{[(z+L)^2+a^2]^{3/2}}\text{。}$$

所以，轴线上的磁感应强度：

$$\boldsymbol{B}=B_z\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{2}\mu_0Ia^2\left\{\frac{1}{[(z-L)^2+a^2]^{3/2}}+\frac{1}{[(z+L)^2+a^2]^{3/2}}\right\} \qquad (1)$$

2）因为 $\nabla\times\boldsymbol{B}=0$ ，所以 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=0$；

又因为$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，所以 $\nabla^2\boldsymbol{B}=0$ ，$\partial^2B_z/\partial z^2=0$。代入（1）式并化简得：

$$5(L-z)^2[(L-z)^2+a^2]^{-7/2}-[(L-z)^2+a^2]^{-5/2}+5(L+z)^2[(L+z)^2+a^2]^{-7/2}-$$
$$-[(L+z)^2+a^2]^{-5/2}=0$$

将 z=0 带入上式得：$5L^2=L^2+a^2$， $\therefore L=a/2$

7. 半径为a的无限长圆柱导体上有恒定电流$\boldsymbol{J}$均匀分布于截面上，试解矢势$\boldsymbol{A}$的微分方程。设导体的磁导率为μ_0，导体外的磁导率为μ。

解：矢势所满足的方程为：

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{A}_{内}=-\mu_0\boldsymbol{J} & ,\ (r<a)\\ \nabla^2\boldsymbol{A}_{外}=0 & ,\ (r>a)\end{cases}$$

自然边界条件：$r\to 0$时，$\boldsymbol{A}_{内}$有限。

边值关系：$\boldsymbol{A}_{内}\big|_{r=a}=\boldsymbol{A}_{外}\big|_{r=a}$；$\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}_{内}\big|_{r=a}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}_{外}\big|_{r=a}$

选取柱坐标系，该问题具有轴对称性，且解与 z 无关。令

$$\boldsymbol{A}_{内}=A_{内}(r)\boldsymbol{e}_z\text{，}\quad \boldsymbol{A}_{外}=A_{外}(r)\boldsymbol{e}_z\text{，}$$

代入微分方程得：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{内}(r)}{\partial r})=-\mu_0 J\text{；}\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{外}(r)}{\partial r})=0$$

解得：$A_{内}(r)=-\dfrac{1}{4}\mu_0 J r^2+C_1\ln r+C_2$；$A_{外}(r)=C_3\ln r+C_4$

由自然边界条件得 $C_1=0$，

由 $\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}_{内}|_{r=a}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}_{外}|_{r=a}$ 得：$C_3=-\dfrac{\mu}{2}Ja^2$，

由 $\boldsymbol{A}_{内}\big|_{r=a}=\boldsymbol{A}_{外}\big|_{r=a}$ 并令其为零，得：$C_2=\dfrac{1}{4}\mu_0 Ja^2$，$C_4=\dfrac{\mu}{2}Ja^2\ln a$。

$$\therefore \boldsymbol{A}_{内}=\frac{1}{4}\mu_0\boldsymbol{J}(a^2-r^2)\text{；}\quad \boldsymbol{A}_{外}=\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{J}a^2\ln\frac{a}{r}$$

8. 假设存在磁单极子，其磁荷为 Q_m，它的磁场强度为 $\boldsymbol{H}=Q_m\boldsymbol{r}/4\pi\mu_0 r^3$。给出它的矢势的一个可能的表示式，并讨论它的奇异性。

解：$\boldsymbol{H}=\dfrac{Q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\dfrac{Q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

由 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=\dfrac{Q_m}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$ 得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r\sin\theta}[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\phi}]=\dfrac{Q_m}{4\pi r^2}\\ \dfrac{1}{r}[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\phi}-\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)]=0\\ \dfrac{1}{r}[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta-\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}]=0\end{cases}\qquad(1)$$

令 $A_r=A_\theta=0$, 得：$\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)=\dfrac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}$

$$\therefore\sin\theta A_\phi=\int_0^\theta\frac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}d\theta\text{，}\quad A_\phi=\frac{Q_m}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\qquad(2)$$

显然 A_ϕ 满足(1)式，所以磁单极子产生的矢势 $\boldsymbol{A}=\dfrac{Q_m}{4\pi}\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$

讨论：当 $\theta\to 0$ 时，$\boldsymbol{A}\to 0$；

当 $\theta\to\pi/2$ 时，$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{e}_\phi Q_m/4\pi r$；

当 $\theta\to\pi$ 时，$\boldsymbol{A}\to\infty$，故 $\boldsymbol{A}$ 的表达式在 $\theta=\pi$ 具有奇异性，此时 $\boldsymbol{A}$ 不合理。

9. 将一磁导率为 μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 内，求总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和诱导磁矩 $\boldsymbol{m}$。(对比 P49 静电场的例子。)

解：根据题意，以球心为原点建立球坐标，取 H_0 的方向为 $\boldsymbol{e}_z$，此球体被外加磁场磁化后，产

生一个附加磁场，并与外加均匀场相互作用，最后达到平衡，呈现轴对称。

本题所满足的微分方程为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m1}=0 \quad , \quad (R<R_0)\\ \nabla^2\varphi_{m2}=0 \quad , \quad (R>R_0)\end{cases} \tag{1}$$

自然边界条件：$\varphi_{m1}\big|_{R=0}$为有限；$\varphi_{m2}\big|_{R=\infty}=-H_0R\cos\theta$。

衔接条件：在 $R=R_0$ 处满足 $\varphi_{m1}=\varphi_{m2}$ 及 $\mu\partial\varphi_{m1}/\partial R=\mu_0\partial\varphi_{m2}/\partial R$

由自然边界条件可确定方程组（1）的解为：

$$\varphi_{m1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)；\quad \varphi_{m2}=-H_0R\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}d_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

由两个衔接条件，有：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)=-H_0R\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}d_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$

$$\mu\sum_{n=0}^{\infty}a_nnR^{n-1}P_n(\cos\theta)=-\mu_0H_0\cos\theta-\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nR^{-(n+2)}P_n(\cos\theta)$$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，解得：$a_1=-3\mu_0H_0/(\mu+2\mu_0)$；

$d_1=(\mu-\mu_0)H_0R_0^3/(\mu+2\mu_0)$； $\quad a_n=d_n=0$，$(n\neq1)$

即：$\varphi_{m1}=-3\mu_0H_0R\cos\theta/(\mu+2\mu_0)$，（$R<R_0$）

$\varphi_{m2}=-H_0R\cos\theta+(\mu-\mu_0)H_0R_0^3\cos\theta/(\mu+2\mu_0)R^2$，（$R>R_0$）

$$\therefore \boldsymbol{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=3\mu_0\boldsymbol{H}_0/(\mu+2\mu_0)$$

$$\boldsymbol{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=\boldsymbol{H}_0+\frac{(\mu-\mu_0)}{\mu+2\mu_0}R_0^3[\frac{3(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{H}_0}{R^3}]$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\mu\boldsymbol{H}_1=3\mu\mu_0\boldsymbol{H}_0/(\mu+2\mu_0), \quad (R<R_0)\\ \mu_0\boldsymbol{H}_2=\mu_0\boldsymbol{H}_0+\dfrac{(\mu-\mu_0)}{\mu+2\mu_0}\mu_0R_0^3[\dfrac{3(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{H}_0}{R^3}], \quad (R<R_0)\end{cases}$$

在$R<R_0$区域内，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{H}_1=3(\mu-\mu_0)\boldsymbol{H}_0/(\mu+2\mu_0)$

$$\therefore \boldsymbol{m}=\int_V\boldsymbol{M}dV=(4\pi/3)R_0^3\boldsymbol{M}=4\pi(\mu-\mu_0)R_0^3\boldsymbol{H}_0/(\mu+2\mu_0)$$

10. 有一个内外半径为 R_1 和 R_2 的空心球，位于均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 内，球的磁导率为 μ，求空腔内的场 $\boldsymbol{B}$，讨论 $\mu>>\mu_0$ 时的磁屏蔽作用。

解：根据题意，以球心为原点，取球坐标，选取$\boldsymbol{H}_0$的方向为$\boldsymbol{e}_z$，在外场$\boldsymbol{H}_0$的作用下，空心球被磁化，产生一个附加磁场，并与原场相互作用，最后达到平衡，$\boldsymbol{B}$的分布呈现轴对称。磁标势的微分方程为：

$\nabla^2\varphi_{m1}=0 \quad (R<R_1)$ ；$\nabla^2\varphi_{m2}=0 \quad (R_1<R<R_2)$ ；$\nabla^2\varphi_{m3}=0 \quad (R>R_2)$

自然边界条件：$\varphi_{m1}\big|_{R=0}$为有限；$\varphi_{m3}\big|_{R=\infty}=-H_0R\cos\theta$。

衔接条件：$\varphi_{m1}\big|_{R=R1}=\varphi_{m2}\big|_{R=R1}$ ； $\quad \mu_0\partial\varphi_{m1}/\partial R\big|_{R=R1}=\mu\partial\varphi_{m2}/\partial R\big|_{R=R1}$；

$\varphi_{m2}\big|_{R=R2}=\varphi_{m3}\big|_{R=R2}$； $\quad \mu_0\partial\varphi_{m3}/\partial R\big|_{R=R2}=\mu\partial\varphi_{m2}/\partial R\big|_{R=R2}$

由轴对称性及两个自然边界条件，可写出三个泛定方程的解的形式为：

$$\varphi_{m1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)\text{；}\qquad \varphi_{m2}=\sum_{n=0}^{\infty}[(b_nR^n+c_nR^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)\text{；}$$

$$\varphi_{m3}=-H_0R\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}d_nR^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

因为泛定方程的解是把产生磁场的源$\boldsymbol{H}_0$做频谱分解而得出的，分解所选取的基本函数系是其本征函数系$\{P_n(\cos\theta)\}$。在本题中源的表示是：

$$-H_0R\cos\theta=-H_0RP_1(\cos\theta)$$

所以上面的解中， $a_n=b_n=c_n=d_n=0$，$(n\neq1)$

解的形式简化为： $\varphi_{m1}=a_1R\cos\theta$；

$$\varphi_{m2}=(b_1R+c_1R^{-2})\cos\theta\text{；}$$

$$\varphi_{m3}=-H_0R\cos\theta+d_1R^{-2}\cos\theta$$

代入衔接条件得： $a_1R_1=b_1R_1+c_1R_1^{-2}$， $b_1R_2+c_1R_2^{-2}=-H_0R_2+d_1R_2^{-2}$，

$\mu_0a_1=\mu(b_1-2c_1R_1^{-3})$， $\mu(b_1-2c_1R_2^{-3})=-\mu_0H_0-2\mu_0d_1R_2^{-3}$。

解方程组得：

$$a_1=\frac{6\mu\mu_0H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3-(2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3},$$

$$b_1=\frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3-(2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3},$$

$$c_1=\frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_1^3R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3-(2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3},$$

$$d_1=\frac{(2\mu+\mu_0)(\mu-\mu_0)(R_1^3-R_2^3)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3-(2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}\text{。}$$

从而，空间各点磁标势均可确定。空腔内：

$$\boldsymbol{B}_1=\mu_0\boldsymbol{H}_1=-\mu_0\nabla\varphi_{m1}=a_1\cos\theta\boldsymbol{e}_r-a_1\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta=-\mu_0a_1\boldsymbol{e}_z$$

当$\mu>>\mu_0$时， $a_1\approx0$，所以$\boldsymbol{B}_1\approx0$。即空腔中无磁场，类似于静电场中的静电屏蔽。

11. 设理想铁磁体的磁化规律为$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}_0$，其中$\boldsymbol{M}_0$是恒定的与$H$无关的量。今将一个理想铁磁体做成的均匀磁化球（$\boldsymbol{M}_0$为常值）浸入磁导率为$\mu'$的无限介质中，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：根据题意，取球心为原点，建立球坐标系，以$\boldsymbol{M}_0$的方向为$\boldsymbol{e}_z$，本题具有轴对称的磁场分布，磁标势的微分方程为：

$$\nabla^2\varphi_{m1}=0\quad(R<R_0)\quad;\qquad\nabla^2\varphi_{m2}=0\quad(R>R_0)$$

自然边界条件： $\varphi_{m1}\big|_{R=0}$为有限； $\varphi_{m2}\big|_{R=\infty}=0$。

衔接条件： $\varphi_{m1}\big|_{R=R0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R0}$ ；

$$\mu\partial\varphi_{m1}/\partial R\big|_{R=R0}-\mu'\partial\varphi_{m2}/\partial R\big|_{R=R0}=\mu_0M_0\cos\theta\text{；}$$

由轴对称性及两个自然边界条件，可写出拉普拉斯方程通解的形式为：

$$\varphi_{m1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n P_n(\cos\theta)\text{；}\qquad \varphi_{m2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n R^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)\text{；}$$

代入衔接条件，比较 $P_n(\cos\theta)$ 各项的系数，得：

$a_n=b_n=0$，$(n\neq 1)$；$a_1=\mu_0 M_0/(2\mu'+\mu)$；$b_1=\mu_0 M_0 R_0^3/(2\mu'+\mu)$

$\therefore \varphi_{m1}=\mu_0 M_0 R\cos\theta/(2\mu'+\mu)$，　　$(R<R_0)$

$\varphi_{m2}=\mu_0 M_0 R_0^3\cos\theta/(2\mu'+\mu)R^2$，$(R>R_0)$

由此　$\boldsymbol{B}_1=\mu_0\boldsymbol{H}_1+\mu_0 M_0=2\mu'\mu_0 M_0/(2\mu'+\mu)$

$$\boldsymbol{B}_2=-\mu'\nabla\varphi_{m2}=\frac{\mu'\mu_0 R_0^3}{2\mu'+\mu}\left[\frac{3(\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\frac{\boldsymbol{M}_0}{R^3}\right]$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}2\mu'\mu_0 M_0/(2\mu'+\mu) & (R<R_0)\\ \dfrac{\mu'\mu_0 R_0^3}{2\mu'+\mu}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{M}_0}{R^3}\right] & (R>R_0)\end{cases}$$

又　$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\big|_{R0}=\mu_0(\boldsymbol{\alpha}_M+\boldsymbol{\alpha})$，（其中 $\boldsymbol{\alpha}=0$）将$\boldsymbol{B}$的表达式代入，得：

$\boldsymbol{\alpha}_M=-\boldsymbol{e}_\phi 3\mu' M_0\sin\theta/(2\mu'+\mu_0)$

12. 将上题的永磁球置入均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，结果如何？

解：根据题意假设均匀外场 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向与M_0的方向相同，定为坐标 z 轴方向。磁标势的微分方程为：

$$\nabla^2\varphi_{m1}=0\quad(R<R_0)\quad;\qquad \nabla^2\varphi_{m2}=0\quad(R>R_0)$$

自然边界条件：$\varphi_{m1}\big|_{R=0}$为有限；$\varphi_{m2}\big|_{R=\infty}=-H_0 R\cos\theta$。

衔接条件：　$\varphi_{m1}\big|_{R=R0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R0}$；

$\mu\partial\varphi_{m1}/\partial R\big|_{R=R0}-\mu_0\partial\varphi_{m2}/\partial R\big|_{R=R0}=\mu_0 M_0\cos\theta$；

解得满足自然边界条件的解是：

$\varphi_{m1}=a_1 R\cos\theta$，$(R<R_0)$

$\varphi_{m2}=-H_0 R\cos\theta+d_1 R^{-2}\cos\theta$，$(R>R_0)$

代入衔接条件，得：$a_1 R_0=-H_0 R_0+d_1 R_0^{-2}$

$\mu_0 H_0+2\mu_0 d_1 R_0^{-3}+\mu a_1=\mu_0 M_0$

解得：　$a_1=(\mu_0 M_0-3\mu_0 H_0)/(\mu+2\mu_0)$

$d_1=[\mu_0 M_0+(\mu-\mu_0)H_0]R_0^3/(\mu+2\mu_0)$

$\therefore \varphi_{m1}=(\mu_0 M_0-3\mu_0 H_0)R\cos\theta/(\mu+2\mu_0)$，$(R<R_0)$

$\varphi_{m2}=-H_0 R\cos\theta+[\mu_0 M_0+(\mu-\mu_0)H_0]R_0^3\cos\theta/[(\mu+2\mu_0)R^2]$，$(R>R_0)$

$\boldsymbol{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=-\mu_0(\boldsymbol{M}_0-3\boldsymbol{H}_0)/(\mu+2\mu_0)$

$\boldsymbol{B}_1=\mu\boldsymbol{H}_1+\mu_0\boldsymbol{M}_0=3\mu\mu_0\boldsymbol{H}_0/(\mu+2\mu_0)+2\mu_0^2\boldsymbol{M}_0/(\mu+2\mu_0)$，$(R<R_0)$

$\boldsymbol{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=\boldsymbol{H}_0+3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^5-\boldsymbol{m}/R^3$，

其中　$\boldsymbol{m}=[\mu_0\boldsymbol{M}_0+(\mu-\mu_0)\boldsymbol{H}_0]R_0^3/(\mu+2\mu_0)$

$$\boldsymbol{B}_2 = \mu_0 \boldsymbol{H}_2 = \mu_0[\boldsymbol{H}_0 + 3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^5 - \boldsymbol{m}/R^3],\ (R > R_0)$$

13. 有一个均匀带电的薄导体壳其半径为 R_0，总电荷为 Q，今使球壳绕自身某一直径以角速度 ω 转动，求球内外的磁场 $\boldsymbol{B}$。

提示：本题通过解 $\boldsymbol{A}$ 或 φ_m 的方程都可以解决，也可以比较本题与§5 例 2 的电流分布得到结果。

解：根据题意，取球体自转轴为 z 轴，建立球坐标系。磁标势的微分方程为：

$$\nabla^2\varphi_{m1} = 0 \quad (R < R_0)\quad ; \qquad \nabla^2\varphi_{m2} = 0 \quad (R > R_0)$$

自然边界条件：$\varphi_{m1}\big|_{R=0}$ 为有限；$\varphi_{m2}\big|_{R=\infty} = 0$。

衔接条件：$(\partial\varphi_{m2}/\partial\theta - \partial\varphi_{m1}/\partial\theta)/R\big|_{R=R0} = -\sigma = -Q\omega\sin\theta/4\pi R_0$ ；

$$\mu\partial\varphi_{m1}/\partial R\big|_{R=R0} = \mu_0\partial\varphi_{m2}/\partial R\big|_{R=R0};$$

其中 $\sigma = Q\omega\sin\theta/4\pi R_0$ 是球壳表面自由面电流密度。

解得满足自然边界条件的解是：

$$\varphi_{m1} = a_1 R\cos\theta,\ (R < R_0)$$

$$\varphi_{m2} = b_1 R^{-2}\cos\theta,\ (R > R_0)$$

代入衔接条件，得：$a_1 R_0 - b_1 R_0^{-2} = -Q\omega/4\pi R_0$； $a_1 + 2b_1 R_0^{-3} = 0$

解得： $a_1 = -Q\omega/6\pi R_0$， $b_1 = Q\omega R_0^2/12\pi$

$$\therefore \varphi_{m1} = -Q\omega R\cos\theta/6\pi R_0,\ (R < R_0)$$

$$\varphi_{m2} = Q\omega R_0^2\cos\theta/12\pi R^2,\ (R > R_0)$$

$$\therefore \boldsymbol{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = Q\boldsymbol{\omega}/6\pi R_0$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \mu_0\boldsymbol{H}_1 = \mu_0 Q\boldsymbol{\omega}/6\pi R_0,\ (R < R_0)$$

$$\boldsymbol{H}_2 = -\nabla\varphi_{m2} = [3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^5 - \boldsymbol{m}/R^3]/4\pi,$$

其中 $\boldsymbol{m} = QR_0^2\boldsymbol{\omega}/3$

$$\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\boldsymbol{H}_2 = \mu_0[3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^5 - \boldsymbol{m}/R^3]/4\pi,\ (R > R_0)$$

14. 电荷按体均匀分布的刚性小球，其总电荷为 Q，半径为 R_0，它以角速度 ω 绕自身某一直径转动，求（1）它的磁矩；（2）它的磁矩与自转角动量之比（设质量 M_0 是均匀分布的）。

解：1) 磁矩 $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})dV$

又 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} = R\boldsymbol{e}_r$， $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \rho\boldsymbol{v} = \dfrac{Q}{(4\pi/3)R_0^3}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\frac{3Q}{4\pi R_0^3}\int \boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})R^2\sin\theta dR d\theta d\phi = \frac{1}{2}\frac{3Q\omega}{4\pi R_0^3}\int(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\phi)R^4\sin^2\theta dR d\theta d\phi$$

又 $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_\theta = \sin\theta\boldsymbol{e}_z + \cos\theta(-\cos\phi\boldsymbol{e}_x - \sin\phi\boldsymbol{e}_y)$

$$\therefore \boldsymbol{m} = \frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R_0}[\sin\theta\boldsymbol{e}_z + \cos\theta(-\cos\phi\boldsymbol{e}_x - \sin\phi\boldsymbol{e}_y)]R^4\sin^2\theta dR$$

$$= \frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\boldsymbol{e}_z\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R_0}R^4\sin^3\theta dR = \frac{QR_0^2}{5}\boldsymbol{\omega}$$

2)自转动量矩：

$$\boldsymbol{L}=\int d\boldsymbol{L}=\int \boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{P}=\int \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{v}dm=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int \boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})dV$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r)R^2\sin\theta dRd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^4\omega(-\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z)\sin\theta dRd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^4\omega\sin\theta(-\boldsymbol{e}_\theta)\sin\theta dRd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0\omega}{4\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R_0}[\sin\theta\boldsymbol{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\boldsymbol{e}_x-\sin\phi\boldsymbol{e}_y)R^4\sin^2\theta dR$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\boldsymbol{\omega}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R_0}R^4\sin^3\theta dR=\frac{2M_0R_0^2}{5}\boldsymbol{\omega}$$

$$\therefore \boldsymbol{m}/\boldsymbol{L}=Q/2M_0$$

15. 有一块磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的小永磁体，位于一块磁导率非常大的实物的平坦界面附近的真空中，求作用在小永磁体上的力 $\boldsymbol{F}$ 。

解：根据题意，因为无穷大平面的μ很大，则在平面上所有的$\boldsymbol{H}$均和平面垂直，类比于静电场，构造磁矩$\boldsymbol{m}$关于平面的镜像$\boldsymbol{m}'$，则外场为：

$$\boldsymbol{B}_e=-\mu_0\nabla\varphi_m$$

而 $$\varphi_m=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi r^3}=\frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$$\therefore \boldsymbol{B}_e=-\mu_0\frac{m}{4\pi}(-\frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r-\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta)=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

$\boldsymbol{m}$受力为：

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_e\Big|_{\substack{r=2a\\ \theta=\alpha}}=-\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4}(1+\cos^2\alpha)\boldsymbol{e}_z$$

第四章 电磁波的传播

1. 考虑两列振幅相同、偏振方向相同、频率分别为$\omega+\mathrm{d}\omega$和$\omega-\mathrm{d}\omega$的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播。

（1）求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波。

（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。

解：根据题意，设两列波的电场表达式分别为：

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\cos(k_1z-\omega_1t)；\quad \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\cos(k_2z-\omega_2t)$$

则合成波为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})[\cos(k_1z-\omega_1t)+\cos(k_2z-\omega_2t)]$

$$=2\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\cos(\frac{k_1+k_2}{2}z-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{k_1-k_2}{2}z-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$$

其中 $k_1=k+dk$， $k_2=k-dk$； $\omega_1=\omega+d\omega$， $\omega_2=\omega-d\omega$

所以 $\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\cos(kz-\omega t)\cos(dk\cdot z-d\omega\cdot t)$

用复数表示 $\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\cos(dk\cdot z-d\omega\cdot t)\exp[i(kz-\omega t)]$

相速由 $\phi=kz-\omega t$ 确定，$v_p=dz/dt=\omega/k$

群速由 $\phi'=dk\cdot z-d\omega\cdot t$ 确定，$v_g=dz/dt=d\omega/dk$

2. 一平面电磁波以 $\theta=45°$ 从真空入射到 $\varepsilon_r=2$ 的介质，电场强度垂直于入射面，求反射系数和折射系数。

解：设 $\boldsymbol{n}$ 为界面法向单位矢量，$\langle\boldsymbol{S}\rangle$、$\langle\boldsymbol{S}'\rangle$、$\langle\boldsymbol{S}''\rangle$ 分别为入射波、反射波和折射波的玻印亭矢量的周期平均值，则反射系数 R 和折射系数 T 定义为：

$$R=\left|\frac{\langle\boldsymbol{S}'\rangle\cdot\boldsymbol{n}}{\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\boldsymbol{n}}\right|=\frac{E_0'^2}{E_0^2}, \qquad T=\left|\frac{\langle\boldsymbol{S}''\rangle\cdot\boldsymbol{n}}{\langle\boldsymbol{S}\rangle\cdot\boldsymbol{n}}\right|=\frac{n_2\cos\theta'' E_0''^2}{n_1\cos\theta E_0^2}$$

又根据电场强度垂直于入射面的菲涅耳公式，可得

$$R=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}\right)^2, \qquad T=\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\cos\theta''}{(\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta'')^2}=1-R$$

根据折射定律可得：$\theta''=30°$，代入上式，得

$$R=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}, \qquad T=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

3. 有一可见平面光波由水入射到空气，入射角为 60°，证明这时将会发生全反射，并求折射波沿表面传播的相速度和透入空气的深度。设该波在空气中的波长为 $\lambda_0=6.28\times10^{-5}$ cm，水的折射率为 n=1.33。

解：由折射定律得，临界角 $\theta_c=\arcsin(1/1.33)=48.75°$，所以当平面光波以60°角入射时，将会发生全反射。

由于 $k_x''=k\sin\theta$

所以折射波相速度 $v_p=\omega''/k_x''=\omega/k\sin\theta=v_{\text{水}}/\sin\theta=c/n\sin\theta=\sqrt{3}c/2$

透入空气的深度为

$$\kappa^{-1}=\lambda_1/2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}=6.28\times10^{-5}/2\pi\sqrt{\sin^2 60^\circ-(3/4)^2}\approx1.7\times10^{-5}\text{cm}$$

4. 频率为 ω 的电磁波在各向异性介质中传播时，若 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 仍按 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ 变化，但 $\boldsymbol{D}$ 不再与 $\boldsymbol{E}$ 平行（即 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 不成立）。

（1）证明 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$，但一般 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq0$。

（2）证明 $\mathbf{D}=[k^2\mathbf{E}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{k}]/\omega^2\mu$。

（3）证明能流 $\boldsymbol{S}$ 与波矢 $\boldsymbol{k}$ 一般不在同一方向上。

证明：1）麦氏方程组为：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4}$$

由（4）式得： $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}=i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}=i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$

$$\therefore\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{5}$$

同理由（3）式得：$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0$ （6）

由（2）式得： $\nabla\times\boldsymbol{H}=[\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]\times\boldsymbol{H}_0=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-i\omega\boldsymbol{D}$

$$\therefore\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}/\omega=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}/\omega\mu \quad (7)$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B})/\omega\mu=0 \quad (8)$$

由（1）式得：$\nabla\times\boldsymbol{E}=[\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]\times\boldsymbol{E}_0=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=-i\omega\boldsymbol{B}$

$$\therefore\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}/\omega \quad (9)$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}/\omega=0 \quad (10)$$

由（5）、（8）可知：$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}$；$\boldsymbol{D}\perp\boldsymbol{B}$；$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{k},\boldsymbol{E},\boldsymbol{D}$共面。

又由（6）可知：$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{D}$，所以，当且仅当$\boldsymbol{E}//\boldsymbol{D}$时，$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{k}$。

所以，各向异性介质中，一般$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq0$。

2）将（9）式代入（7）式，便得：

$$\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})/\omega^2\mu=[k^2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}]/\omega^2\mu$$

3）由（9）式得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}/\omega\mu$

$$\therefore\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})/\omega\mu=[E^2\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}]/\omega\mu$$

由于一般情况下$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq0$，所以 $\boldsymbol{S}$ 除了$\boldsymbol{k}$ 方向的分量外，还有 $\boldsymbol{E}$ 方向的分量，即能流 $\boldsymbol{S}$ 与波矢 $\boldsymbol{k}$ 一般不在同一方向上。

5. 有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播，一个波沿 x 方向偏振，另一个沿 y 方向偏振，但相位比前者超前$\pi/2$，求合成拨的偏振。反之，一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振？

解：偏振方向在 x 轴上的波可记为

$$E_x=A_0\cos(\omega t-kz)=A_0\cos(\omega t-\varphi_{0x})$$

在 y 轴上的波可记为

$$E_y=A_0\cos(\omega t-kz+\pi/2)=A_0\cos(\omega t-\varphi_{0y})$$

$$\Delta\varphi=\varphi_{0y}-\varphi_{0x}=\pi/2$$

合成得轨迹方程为：

$$E_x^2+E_y^2=A_0^2[\cos^2(\omega t-\varphi_{0x})+\cos^2(\omega t-\varphi_{0y})]$$

$$=A_0^2[\cos^2(\omega t-\varphi_{0x})+\sin^2(\omega t-\varphi_{0x})]=A_0^2$$

所以，合成的振动是一个圆频率为ω的沿 z 轴方向传播的右旋圆偏振。反之一个圆偏振可以分解为两个偏振方向垂直，同振幅，同频率，相位差为$\pi/2$的线偏振的合成。

6. 平面电磁波垂直射到金属表面上，试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热。

证明：设在 $z>0$ 的空间中是金属导体，电磁波由 $z<0$ 的空间中垂直于导体表面入射。已知导体中电磁波的电场部分表达式是：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-\alpha z}e^{i(\beta x-\omega t)}$$

于是，单位时间内由 $z=0$ 表面的单位面积进入导体的能量为：$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，

其中 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}/\omega\mu=(\beta+i\alpha)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}/\omega\mu$

$\boldsymbol{S}$的平均值为 $\langle S\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\beta E_0^2/2\omega\mu$

在导体内部： $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=\sigma\boldsymbol{E}_0e^{-\alpha z}e^{i(\beta x-\omega t)}$

金属导体单位体积消耗的焦耳热的平均值为：$dQ=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{J}^*\times\boldsymbol{E})=\sigma E_0^2e^{-2\alpha z}/2$

作积分：$Q=\frac{1}{2}\sigma E_0^2\int_0^\infty e^{-2\alpha z}dz=\sigma E_0^2/4\alpha$ 即得界面上单位面积对应的导体中消耗的平均焦耳热。

又因为 $\alpha\beta=\omega\mu\sigma/2$，所以 $Q=\sigma E_0^2/4\alpha=\beta E_0^2/2\omega\mu$，原题得证。

7. 已知海水的 $\mu_r=1$，$\sigma=1\mathrm{S\cdot m^{-1}}$，试计算频率 ν 为 50，10^6 和 10^9Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度。

解：取电磁波以垂直于海水表面的方式入射，透射深度为：

$$\delta=1/\alpha=\sqrt{2/\omega\mu\sigma}=1/\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}$$

由于 $\mu_r=1$，所以 $\mu=\mu_0$，$\delta=1/\sqrt{\pi\nu\mu_0\sigma}$

1）当 $\nu=50\,\mathrm{Hz}$ 时，$\delta_1=1/\sqrt{\pi\times50\times4\pi\times10^{-7}\times1}=72\,\mathrm{m}$

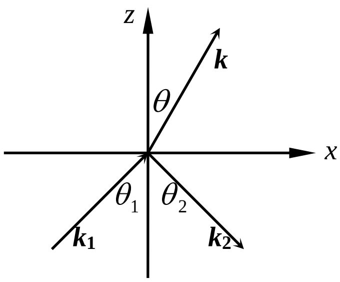
2）当 $\nu=10^6\,\mathrm{Hz}$ 时，$\delta_2=1/\sqrt{\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times1}\approx0.5\,\mathrm{m}$

3）当 $\nu=10^9\,\mathrm{Hz}$ 时，$\delta_3=1/\sqrt{\pi\times10^9\times4\pi\times10^{-7}\times1}\approx16\,\mathrm{mm}$

8. 平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上，入射角为 θ_1。求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度。若导电介质为金属，结果如何？

提示：导电介质中的波矢量 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 只有 z 分量。（为什么？）

解：根据题意,取入射面为 xz 平面，z 轴沿分界面法线方向，如图所示。



设导体中的电磁波表示为：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$

而 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+i\boldsymbol{\alpha}$

上式中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足：

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\omega\mu\varepsilon/2 \tag{2}$$

根据边界条件得：

$$k_x=\beta_x+i\alpha_x=k_{1x}=k_1\sin\theta_1=(\omega\sin\theta_1)/c \tag{3}$$

$$k_y=\beta_y+i\alpha_y=k_{1y}=0 \tag{4}$$

$\therefore\ \alpha_x=0$，$\beta_x=(\omega\sin\theta_1)/c$，$\alpha_y=0$，$\beta_y=0$。

将结果代入（1）、（2）得：

$$(\omega\sin\theta_1)^2/c^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{5}$$

$$\alpha_z\beta_z=\omega\mu\varepsilon/2 \tag{6}$$

解得：$\beta_z^2=\frac{1}{2}(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1-\omega^2\mu\varepsilon)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$

$$\alpha_z^2=-\frac{1}{2}(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

其相速度为：$v=\omega/\beta=\omega/\sqrt{\beta_x^2+\beta_z^2}$。衰减深度为：$1/\alpha=1/\alpha_z$。

如果是良导体，k^2 的实部与其虚部相比忽略，则：

$$\begin{cases}(\omega\sin\theta_1)^2/c^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=0\\ \alpha_z\beta_z=\omega\mu\varepsilon/2\end{cases}$$

$$\therefore \beta_z^2 = -\frac{\omega^2}{2c^2}\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^4}{c^4}\sin^4\theta_1 + \omega^2\mu^2\sigma^2\right)^{1/2}$$

$$\alpha_z^2 = \frac{\omega^2}{2c^2}\sin^2\theta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^4}{c^4}\sin^4\theta_1 + \omega^2\mu^2\sigma^2\right)^{1/2}$$

9. 无限长的矩形波导管，在 z=0 处被一块垂直插入的理想导体平板完全封闭，求在 $z=-\infty$ 到 z=0 这段管内可能存在的波模。

解：在此结构的波导管中，电磁波的传播满足亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} = 0，\quad k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}，\quad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

电场的三个分量通解形式相同，均为：

$$E(x,y,z) = (C_1\sin k_x x + D_1\cos k_x x)(C_2\sin k_y y + D_2\cos k_y y)(C_3\sin k_z z + D_3\cos k_z z)$$

边界条件为：

在 $x=0$ 及 $x=a$ 两平面：$E_y = E_z = 0$，$\partial E_x/\partial x = 0$

在 $y=0$ 及 $y=b$ 两平面：$E_x = E_z = 0$，$\partial E_y/\partial y = 0$

在 $z=0$ 平面：$E_x = E_y = 0$，$\partial E_z/\partial z = 0$

由此可得：$E_x = A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z$

$E_y = A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z$

$E_z = A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z$

波数满足：$k_x = m\pi/a$，$k_y = n\pi/b$，（$m,n = 0,1,2\cdots\cdots$）

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = \omega^2/c^2$$

振幅满足：$A_1 m\pi/a + A_2 n\pi/b + A_3 k_z = 0$

综合上述各式，即得此种波导管中所有可能电磁波的解。

10. 电磁波 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)e^{i(k_z z-\omega\cdot t)}$ 在波导管中沿 z 方向传播，试使用 $\nabla\times\boldsymbol{E} = i\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 证明电磁场所有分量都可用 $E_x(x,y)$ 及 $H_z(x,y)$ 这两个分量表示。

证明：沿 z 轴传播的电磁波其电场和磁场可写作：

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \boldsymbol{E}(x,y)e^{i(\boldsymbol{k}_z z-\omega t)}，\qquad \boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \boldsymbol{H}(x,y)e^{i(\boldsymbol{k}_z z-\omega t)}$$

由麦氏方程组得：$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t = i\omega\mu_0\boldsymbol{H}$，$\quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t = -i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

写成分量式：$\partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = \partial E_z/\partial y - ik_z E_z = i\omega\mu_0 H_x$ （1）

$\partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x = ik_z E_x - \partial E_z/\partial x = i\omega\mu_0 H_y$ （2）

$\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = i\omega\mu_0 H_z$

$\partial H_z/\partial y - \partial H_y/\partial z = \partial H_z/\partial y - ik_z H_y = -i\omega\varepsilon_0 E_x$ （3）

$\partial H_x/\partial z - \partial H_z/\partial x = ik_z H_x - \partial H_z/\partial x = -i\omega\varepsilon_0 E_y$ （4）

$\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y = -i\omega\varepsilon_0 E_z$ （5）

由（2）（3）消去 H_y 得：$E_x = (-\omega\mu_0\partial H_z/\partial y - k_z\partial E_z/\partial x)/i(\omega^2/c^2 - k_z^2)$

由（1）（4）消去 H_x 得：$E_y = (\omega\mu_0\partial H_z/\partial x - k_z\partial E_z/\partial y)/i(\omega^2/c^2 - k_z^2)$

由（1）（4）消去 E_y 得：$H_x = (-k_z\partial H_z/\partial x + \omega\varepsilon_0\partial E_z/\partial y)/i(\omega^2/c^2 - k_z^2)$

由（2）（3）消去E_x 得：$H_y=(-k_z\partial H_z/\partial y-\omega\varepsilon_0\partial E_z/\partial x)/i(\omega^2/c^2-k_z^2)$

11. 写出矩形波导管内磁场 $\boldsymbol{H}$ 满足的方程及边界条件。

解：对于定态波，磁场为：$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$

由麦氏方程组 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ 得：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\nabla^2\boldsymbol{H}=-\nabla^2\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{E}$$

又$\because\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t=i\omega\mu\boldsymbol{H}$

$\therefore-\nabla^2\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{E}=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{H}$

所以 $\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0$，$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ 即为矩形波导管内磁场H满足的方程

由　$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 得：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=0$，$H_n=0$

利用 $\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}$ 和电场的边界条件可得：$\partial H_t/\partial n=0$

边界条件为：$H_n=0$，$\partial H_t/\partial n=0$

12. 论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{0n} 波。

证明：已求得波导管中的电场 $\boldsymbol{E}$ 满足:

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{ik_z z}$$
$$E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y e^{ik_z z}$$
$$E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y e^{ik_z z}$$

由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}$ 可求得波导管中的磁场为:

$$H_x=-(i/\omega\mu)(A_3k_y-iA_2k_z)\sin k_x x\cos k_y y e^{ik_z z}\tag{1}$$
$$H_y=-(i/\omega\mu)(iA_1k_z-A_3k_x)\cos k_x x\sin k_y y e^{ik_z z}\tag{2}$$
$$H_z=-(i/\omega\mu)(A_2k_x-A_1k_y)\cos k_x x\cos k_y y e^{ik_z z}\tag{3}$$

本题讨论TM波，故$H_z=0$，由（3）式得：$(A_2k_x-A_1k_y)=0$　（4）

1）若 $n=0$，$m\neq0$ 则 $k_y=n\pi/b=0$，$k_x=m\pi/a\neq0$　（5）

代入（4）得：$A_2=0$　（6）

将（5）（6）代入（1）（2）得：$H_x=H_y=0$

2）若 $m=0$，$n\neq0$ 则 $k_x=0$，$k_y=n\pi/b\neq0$　（7）

代入（4）得：$A_1=0$　（8）

将（7）（8）代入（1）（2）得：$H_x=H_y=0$

因此，波导中不可能存在TM_{m0} 和TM_{0n} 两种模式的波。

13. 频率为 $30\times10^9\,\mathrm{Hz}$ 的微波，在 $0.7\mathrm{cm}\times0.4\mathrm{cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？在 $0.7\mathrm{cm}\times0.6\mathrm{cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？

解：1）波导为 $0.7\mathrm{cm}\times0.4\mathrm{cm}$，设 $a=0.7\mathrm{cm}$，$b=0.4\mathrm{cm}$

由 $\nu_c=\dfrac{\omega_c}{2\pi}=\dfrac{c}{2}\sqrt{(\dfrac{m}{a})^2+(\dfrac{n}{b})^2}$ 得：

当m=1，n=1时，$\nu_{c1}=4.3\times10^{10}\,\mathrm{Hz}>\nu$

当m=1，n=0时，$\nu_{c2}=2.1\times10^{10}\,\mathrm{Hz}<\nu$

当m=0，n=1时，$\nu_{c3}=3.7\times10^{10}\,\mathrm{Hz}>\nu$

所以此波可以以TE10 波在其中传播。

2）波导为$0.7\mathrm{cm}\times0.6\mathrm{cm}$，设$a=0.7\mathrm{cm}$，$b=0.6\mathrm{cm}$

由$\nu_c=\dfrac{\omega_c}{2\pi}=\dfrac{c}{2}\sqrt{(\dfrac{m}{a})^2+(\dfrac{n}{b})^2}$ 得：

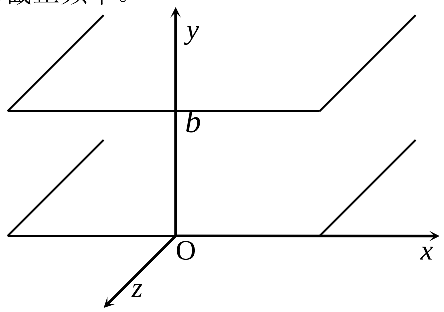
当m=1，n=1时，$\nu_{c1}=3.3\times10^{10}\,\mathrm{Hz}>\nu$

当m=1，n=0时，$\nu_{c2}=2.1\times10^{10}\,\mathrm{Hz}<\nu$

当m=0，n=1时，$\nu_{c3}=2.5\times10^{10}\,\mathrm{Hz}<\nu$

所以此波可以以TE10 和TE01 两种波模在其中传播。

14. 一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行于板面的 z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率。



解：在导体板之间传播的电磁波满足亥姆霍兹方程：

$$(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}=0$$

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

令$U(x,y,z)$ 是$\boldsymbol{E}$的任意一个直角分量，

由于$\boldsymbol{E}$在 x 方向上是均匀的，所以

$$U(x,y,z)=U(y,z)=Y(y)Z(z)$$

在 y 方向由于有金属板作为边界，所以取驻波解；在 z 方向是无界空间，取行波解。

所以通解为：$U(x,y,z)=(C_1\sin k_y y+D_1\cos k_y y)e^{ik_z z}$

由边界条件：$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$ 和 $\partial E_n/\partial n=0$ 定解，得到

$$E_x=A_1\sin(n\pi y/b)e^{i(k_z z-\omega t)};$$

$$E_y=A_2\cos(n\pi y/b)e^{i(k_z z-\omega t)};$$

$$E_z=A_3\sin(n\pi y/b)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

且 $k^2\omega^2/c^2=n^2\pi^2/b^2+k_z^2$，（$n=0,1,2,\cdots\cdots$）

又由$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$得：$A_1$ 独立，与A_2，A_3 无关，$A_2 n\pi/b=ik_z A_3$

令k_z=0 得截止频率：$\omega_c=n\pi c/b$

15. 证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等。

证明：设谐振腔的三边长度分别为a，b，c，则谐振腔中电场$\boldsymbol{E}$的分布为：

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z$$

$$E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z$$

$$E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z$$

振幅满足：$A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$，波数满足：$k_x=m\pi/a$，$k_y=n\pi/b$，

$k_z=p\pi/c$，　$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$　　（$m,n,p=0,1,2\cdots\cdots$）

电场能量密度：$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$

对时间的平均值为：

$$\overline{w}_e=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D})]=\tfrac{1}{4}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{D})$$

$$=\varepsilon(A_1^2\cos^2k_xx\sin^2k_yy\sin^2k_zz+A_2^2\sin^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz+A_3^2\sin^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz)/4$$

于是谐振腔中电场能量对时间的平均值为：

$$\overline{W}_e=\int_V\overline{w}_edV=\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c\overline{w}_edz=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

由$\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}$ 可求得谐振腔中的磁场为：

$$H_x=-(i/\omega\mu)(A_3k_y-A_2k_z)\sin k_xx\cos k_yy\cos k_zz$$

$$H_y=-(i/\omega\mu)(A_1k_z-A_3k_x)\cos k_xx\sin k_yy\cos k_zz$$

$$H_z=-(i/\omega\mu)(A_2k_x-A_1k_y)\cos k_xx\cos k_yy\sin k_zz$$

磁场能量密度：$w_m=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$

对时间的平均值为：

$$\overline{w}_m=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B})]=\tfrac{1}{4}\mathrm{Re}(\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B})$$

$$=\frac{1}{4\omega^2\mu}[(A_3k_y-A_2k_z)\sin^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz+$$

$$+(A_1k_z-A_3k_x)\cos^2k_xx\sin^2k_yy\cos^2k_zz+$$

$$+(A_2k_x-A_1k_y)\cos^2k_xx\cos^2k_yy\sin^2k_zz]$$

谐振腔中磁场能量的时间平均值为：

$$\overline{W}_m=\int_V\overline{w}_mdV=\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c\overline{w}_mdz$$

$$=\frac{abc}{32\omega^2\mu}[(A_3k_y-A_2k_z)^2+(A_1k_z-A_3k_x)^2+(A_2k_x-A_1k_y)^2]$$

因为$A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0$，所以

$$\overline{W}_m=\frac{abc}{32\omega^2\mu}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(k_x^2+k_y^2+k_z^2)$$

$$=\frac{abck^2}{32\omega^2\mu}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)=\frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)$$

即$\overline{W}_e=\overline{W}_m$