

唯一性定理的两种解释

舒星宇 201632600237

摘要：唯一性定理是电动力学中解决静电问题的重要工具，该定理表述了在满足一定的边界条件下电场的唯一性，似乎从更高维度描述了电场的性质，教材中唯一性定理由反证法得出，看起来逻辑性不够连贯，故本文将其对比了直接推导的方法，以便理解。

关键词：唯一性定理；电场；边界条件

1 概念

唯一性定理是指^[1]：如果静电体系内存在电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 和电介质分布 $\varepsilon(\mathbf{r})$ ，且关系式 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ 成立，则体系的电场由边界条件唯确定。不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件。

2 反证法解释

课本^[2]上采用“假设同一个体系存在有两个解满足唯一性定理的条件再证明两组解完全相同得出。证明方法结合自己的理解进行修改后如下：

首先令

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

则由

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}; \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

得

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

在两均匀区域的边界上

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j$$

在整个区域 V 的边界 S 上

$$\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0$$

由于边界上的连续性，考虑边界上的情况

$$\oint_S (\varphi' - \varphi'')(\mathbf{D}' - \mathbf{D}'') \cdot d\mathbf{S} = 0$$

令^[3]

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = (\varphi' - \varphi'')(\mathbf{D}' - \mathbf{D}'')$$

原式可简化为

$$\oint \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

同时

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{r}) d\tau$$

由于

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'; \mathbf{D}'' = \varepsilon \mathbf{E}''$$

原式又可改写为

$$\int_V \varepsilon(\mathbf{r}) |\mathbf{E}' - \mathbf{E}''|^2 d\tau$$

在现实中

$$\varepsilon \geq 1$$

$$\therefore \mathbf{E}' = \mathbf{E}''$$

3 推导法解释

在推导前先明确三个引理：

引理一：在无电荷的空间里电势不可能有极大值和极小值。

引理二：若所有导体的电势为 0，则导体以外空间的电势处处为 0。

引理三：若所有导体都不带电，则各导体的电势都相等。

其中，引理二和引理三可推论：所有导体都不带电的情况下，静电场唯一性定理理论推导静电场唯一性定理理论推导空间各处的电势和导体一样，等于同一个常量。

那么。如果给定每个导体的电势的情形，在同一组边值条件中，电势分布也相同，则电场也相同。

4 思考

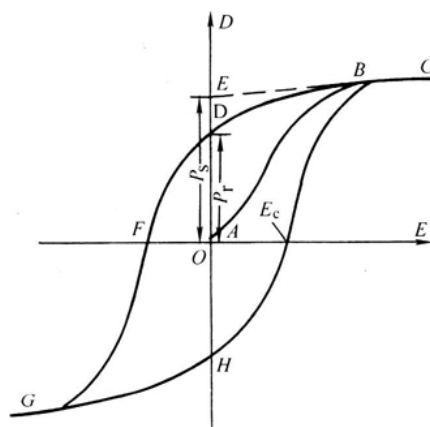
对比两种方法，在推导法中也有反证法的影子，最后的“相同”是由如果不相同则与事实不符而来，相比而言，虽然反证法一开始被提出更难，但是一旦从反证法切入，后来的证明更加连贯自然，所以我认为反证法更好的解释了

唯一性定理。

5 讨论

在唯一性定理证明条件中，有一个假设是： \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 是一一对应的，即推导过程中的 $\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}'$; $\mathbf{D}'' = \varepsilon \mathbf{E}''$ 如果出现了一个 \mathbf{E} 对应有两个 \mathbf{D} 的情况，似乎唯一性定理的会出现分歧。

查阅资料，类似磁滞回线，确实有一些材料存在 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 不了一一对应的情况。即“电滞回线”



电滞回线

此时， \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的关系不止与边界条件有关，还与“历史”相关，虽然此时在数学上唯一性定理被破坏了，但是在物理上还是可以通过观测其“历史”来唯一确定其状态，对唯一性定理进行弥补。

6 应用

唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足 Poisson 方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

镜像法是一种解析静电学问题的基本工具^[4]。对于静电学问题，镜像法将原本问题的某些元素改换为假想电荷，同时保证仍然满足定解问题原有的的边界条件例如，给定一个由一片无限平面导体和一个点电荷构成的物理系统，这无限平面导体可以被视为一片镜子，在镜子里面的镜像电荷与镜子外面的点电荷，所形成的新系统，可以使得导体平面上的电场垂直于导体，与原本系统等价。借此方法，我们可以将问题简化，很容易地计算出导体外的电势、导体的

表面感应电荷密度、总感应电荷等等。而镜像法的有效性是唯一性定理的必然结果。

参考文献:

[1] 维基百科编者. 唯一性定理[G/OL]. 维基百科, 2018(20180810)[2018-08-10].

<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%94%AF%E4%B8%80%E6%80%A7%E5%AE%9A%E7%90%86&oldid=50811272>.

[2]郭顾鸿 (1997) 电动力学. 第三版, 高等教育出版社, 北京, 16.

[3]周磊. 电动力学讲义[2013-11-06]

[4]维基百科编者. 鏡像法[G/OL]. 维基百科, 2019(20190211)[2019-02-11].

<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%8F%A1%E5%83%8F%E6%B3%95&oldid=53150200>.