

Электромагнитный отклик метаматериалов

Макаренко Александр, Новиков Кирилл, Пуговкин Владимир, Забавский Иван,
научные руководители: Лапин Михаил, Щербаков Алексей¹

¹ Университет ИТМО, Новый Физтех, Санкт-Петербург, 199034, Россия

В работе анализируется метаматериал представляющий собой структуру из *RLC* колец, каждое из которых ведёт себя как резонатор по отношению к внешнему ЭМ полю. Для описания системы принципиально применялся дискретный подход, рассмотрены изотропные и анизотропные структуры с различной геометрией элементов. На языке python написана программа, позволяющая рассчитывать принципиально важные параметры описанного метаматериала. В экспериментальной части работы собрана анизотропная структура из *RL* колец, описан подход для измерения её взаимодействия с внешним ЭМ полем внутри волновода .

I. ВВЕДЕНИЕ

Одним из признаков развития человеческой цивилизации является стремление создать или построить что-то, чего нет в естественной среде. На протяжении многих веков человек получал выгоду из природных материалов. Со временем технологии развивались и появлялись новые методы синтеза различных веществ. Вскоре люди добрались до молекулярного и атомного уровня. Однако шагнуть дальше, чем игра с атомами, не получилось, поэтому стоило придумать какую-то композиционную структуру, которая могла бы обладать свойствами, которые не могут существовать в привычной нам природе. Так появились метаматериалы [1], [2] - искусственно сформированные и особым образом структурированные среды, обладающие выгодными свойствами. Есть множество концепций метаматериала, однако в большинстве случаев метаматериал представляет собой симметричную конструкцию, которая напоминает привычный нам кристалл, состоящий из неких структурных единиц - "метаатомов". Исследование метаматериалов активно началось в 2000х. Так как наибольший интерес в данной области представляют электромагнитные свойства новых структур, довольно логично в качестве модели "метаатома" выбрать CLR контур, который на практике можно реализовать в качестве маленького проводящего кольца с искусственно добавленной емкостью (*SRR* - Split ring resonator). Подобные метаматериалы привлекают внимание сообщества как возможность создания среды с отрицательной магнитной проницаемостью, что в свою очередь может использоваться для "идеальной линзы"[3]. Было показано [4], [5], что *SRR* структура может быть использована именно с такой целью. Так же такая линза была опробована для улучшения разрешающих характеристик МРТ [6].

В данной работе мы приводим модель [7], описывающую ЭМ свойства метаматериала из периодически расположенных круговых проводящих элементов. В эксперименте используется анизотропная структура, состоящая из металлических колец. Зная геометрию структуры и параметры одного элемента мы можем получить эффективную магнитную проница-

емость описываемого материала. С целью её прямого измерения структура помещается внутрь волновода.

Так же на языке python переписан код использующийся в [8] для описания ЭМ отклика изотропных CLR структур, это было сделано с целью ускорения численного моделирования для точного изучения структур, состоящего из большого (около 10^6) числа элементов. В дальнейшем авторы собираются провести аналогичный эксперимент для изотропной структуры и метаматериалов состоящих из *SRR*, с целью дальнейших исследований, применяющих описанный код

(**ССЫЛКА НА ПРЕЗЕНТАЦИЮ УДАЛИТЬ ПЕРЕД ОТПРАВКОЙ ОТЧЕТА:** Ссылка на Google Slides, Ссылка на Overleaf)

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

A. Магнитный отклик структуры

Рассматриваемая структура представляет собой периодическую решетку из проводящих колец. Кольца находятся на параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z. Сами плоскости можно сдвигать образуя различные пространственные конфигурации решетки.

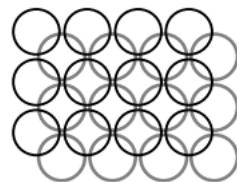
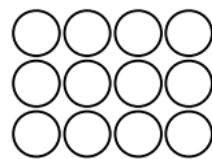


Рис. 1. Изображение из статьи [7], проекции одних из возможных пространственных ориентаций структуры

Следуя подходу описанному в [7] напряженность магнитного поля в данной точке пространства можно найти как сумму внешнего поля и полей от токов, индуцированных на кольцах

$$H_{mic}(r) = H_0 + \sum_n H_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (1)$$

Где H_i определяется из закона Био-Савара.

Вводя среднюю намагниченность среды $M = n_0 SI$ автор получает выражение для магнитной индукции поля в такой системе:

$$B = \mu_0 \left(H_0 + \frac{2}{3} M \right) \quad (2)$$

В свою очередь через стандартные обозначения

$B = \mu_0 \mu H$, $B = \mu_0 (H + M)$ получаем

$$\mu = \frac{B}{B - \mu_0 M} \quad (3)$$

Далее вводя импеданс для связи ЭДС индукции в кольцах с токами текущими в них

Мы получаем итоговое выражение для эффективной магнитной проницаемости метаматериала:

$$\mu = \frac{\frac{iZ}{\omega \mu_0 r_0} + \sum - \frac{2}{3} \pi^2 r_0^3 n_0}{\frac{iZ}{\omega \mu_0 r_0} + \sum + \frac{1}{3} \pi^2 r_0^3 n_0} \quad (4)$$

Где $Z = -i\omega L + \frac{i}{\omega C} + R$ - собственный импеданс одного кольца, C - емкость проводника (в случае проводящих колец без искусственно добавленной емкости соответствующее слагаемое стремится к 0), ω - частота наведенного магнитного поля, r_0 - радиус кольца, n_0 - концентрация колец, \sum - безразмерная величина определяющаяся геометрией образца и отвечающая за взаимную индукцию различных колец. $\sum = \sum_{n' \neq n} J(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n)$

$$J(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2}{4\pi A(\varphi_1, \varphi_2)} \quad (5)$$

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = (\rho^2 + z^2 + 2r_0^2(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + 2\rho r_0(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1))^{1/2}$$

ρ, z - компоненты вектора \mathbf{r} в цилиндрических координатах.

$L = \mu_0 r_0 \left(\ln \frac{8r_0}{l} - 1.75 \right)$ - индуктивность витка с током толщиной l .

Таким образом мы обладаем возможностью численного определения эффективной магнитной проницаемости анизотропного метаматериала, состоящего из проводящих колец.

B. Методы моделирования

В рамках моделирования нас так же интересовало поведение систем, состоящих из кольцевых резонаторов (SRR). С целью ускоренного расчёта их параметров был оптимизирован метод из работы [8]. Основной задачей в ней является расчёт матрицы импедансов для периодического пространственного расположения маленьких CLR резонаторов.

Первоначально разделим матрицу импедансов на диагональные элементы, известные из параметров установки, и остальные, где взаимная индуктивность зависит только от геометрии системы, причем связанная с взаимной индуктивностью M следующим образом:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_0 + i\omega \mathbf{M}$$

Поскольку кольца в системе находятся достаточно близко и при этом имеют соразмерную радиусу по порядку толщину, то считать кольцо линейным витком с током уже нельзя. В результате упрощений в литературе [9] применяется следующие формулы для вычисления взаимных индуктивностей в параллельном и ортогональном случаях ориентации колец соответственно:

$$L^p(\Delta b, \Delta z) = \int_0^{2\pi} A_\varphi \frac{r_2(r_2 + \Delta b \cos \alpha)}{\Delta \rho_p} d\alpha$$

$$L^o(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \int_0^{2\pi} A_\varphi \frac{r_2 \Delta y \cos \alpha}{\Delta \rho_o} d\alpha$$

Более подробно преобразование описано в приложении А 1.

III. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

A. Отладка

Основной задачей численного моделирования является просчитыванием взаимных импедансов и токов, индуцированных внешним полем на каждом кольце, исходя из чего представляется реальным просчитать все остальные параметры системы. Чтобы верифицировать результаты моделирования, в силу трудности проведения практического эксперимента, необходимо было сравнить результаты с уже проверенным моделированием известных структур.

Для первоначального анализа была выбрана структура в виде "линзы" из метаматериала над которой было единственное большое кольцо диаметром 3 дюйма на расстоянии одной ячейки от наибольшей плоскости структуры, опираясь на литературу [8].

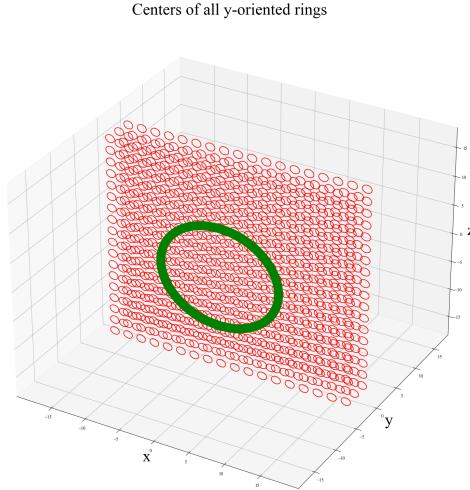


Рис. 2. Схема основа на линзе для МРТ из статьи [8], состоящей из 3х типов плоскостей (см. Приложение В), на рисунке представлен результат запаковки в написанной модели - боковые поверхности у меньших сторон параллелепипеда отсутствуют, зеленым цветом выделено замеряющая ответный импеданс системы катушки

Создание структуры проводится для параллелепипеда размером $n_x \times n_y \times n_z = 18 \times 3 \times 18$ с размером элементарной ячейки равной a и радиусом r (Для упрощения расчетов $a = 2$ у.е. в координатах программы, что эквивалентно 1.5 см, $r = 0.33a$)

Важно отметить, что расчитываемые индуктивности зависят только от взаимного расположения колец, которая в силу запаковки повторяется, - тогда достаточно удобных ходом является создание словаря, содержащего все вычисленные значения интеграла, связанные с расстоянием между кольцами и их взаимной ориентацией. В том числе можно учитывать симметрию по перестановке ориентаций и осей, что в сумме с предыдущим методом более чем в 10 раз ускорило работу программы.

Вычисляя матрицу \mathbf{M} , которая зависит только от геометрии, можем считать ее лишь единожды и далее использовать как табличную для нашей конфигурации колец - однако для преобразования этой матрицы к импедансной необходимо каждый элемент умножить на $j\omega$, что приводит к 2196² лишних операций для каждой частоты, поэтому удобнее решать другое матричное уравнение:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V} \iff \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V} \cdot \frac{1}{i\omega}, \quad M_{nn} = \frac{R}{i\omega} + L - \frac{1}{\omega^2 C}$$

Где элементы на диагоналях получаем преобразованием матрицы импедансов. Затем, получив значения тока на каждом кольце, можем вычислить импеданс и

сравнить импеданс(см. Приложение В), измеряемый на трехдюймовом кольце, нормируя ток на тот ток, что течет в этом же кольце:

$$Z^{coil} = \sum_{i=1}^n Z_{N,i} \frac{I_i}{I_N}$$

Где N - номер трехдюймового кольца.

B. Расчет параметров собственной структуры

Далее нас интересовал расчёт магнитного отклика анизотропной системы металлических колец без емкости, так как именно такую систему мы могли реализовать на практике.

Существенным отличием рассматриваемой структуры являются как отсутствие емкости у созданных колец, и, соответственно, резонансов у структуры, так и ее анизотропия по направлениям. Схематически были рассмотрены две структуры - с гексагональной запаковкой и кубической, последняя и была реализована на практике.

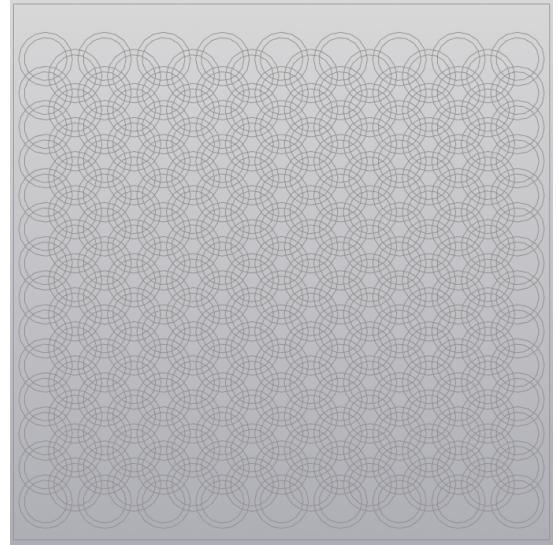


Рис. 3. Одним из важных параметров системы является сдвиг каждого слоя относительно друг друга - однако производство такого материала требует большой точности, что и послужило причиной опоры на кубическую структуру.

Для моделирования использовались следующие теоретически расчитанные значения индуктивности колец $L = 4$ нГн, сопротивления $R = 926$ мкОм. В зависимости от частоты наведенного напряжения был построен график зависимости магнитной проницаемости такой структуры по формуле (4):

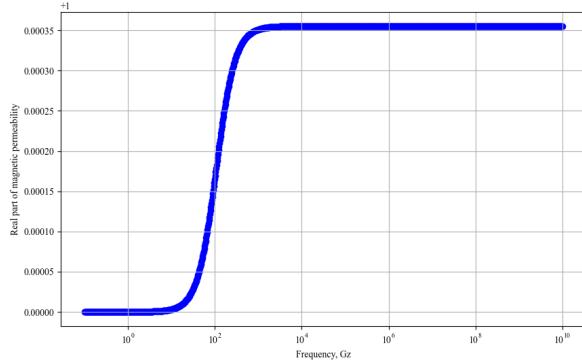


Рис. 4. График зависимости магнитной проницаемости от частоты наведенного напряжения - изменение магнитной проницаемости системы происходит, однако крайне несущественно.

IV. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

A. Описание образца

За основу элементарных ячеек в нашем метаматериале были взяты проводящие кольца. Геометрические размеры образца в итоге определились способом измерения эффективной магнитной проницаемости (см. секцию IV C). Кольца внутри образца расположены на параллельных плоскостях. Для определения реализуемых на практике размеров колец была проведена первичная их травка (см секцию IV B). На основе этого были выбраны внутренний и внешний радиусы проводящего слоя $r_{in} = 1\text{мм}$, $r_{out} = 1.5\text{мм}$ соответственно, период решетки $a = 4.5\text{мм}$, расстояние между параллельными плоскостями $b = 1\text{мм}$.

B. Производство структуры

В первую очередь была поставлена задача оценить диапазон структур, которые возможно анализировать на практике. Доступным способом реализации структуры колец является их химическая вытравка на медных печатных платах, однако точность такого метода сильно зависит от оборудования.

Поэтому первый эксперимент заключался в вытравке большого количества разных колец, блоками упакованных в гексагональную структуры так же для оценки точности расстояния между кольцами.

На образец краска переносится с помощью термической обработки фотобумаги (см. приложение B 2), затем происходит вытравка в нагретом водном растворе хлорного железа. После оценки результатов в больших масштабах была проведена травка квадратной запаковки колец, так как гексагональная структура с трудом переводилась на границы платы.



Рис. 5. В эксперименте было замечено, что удовлетворительная толщина кольца оценивается примерно в 0.5мм, тогда радиус кольца был выбран минимально возможным для максимизации плотности колец в упаковке, равным 1.5мм

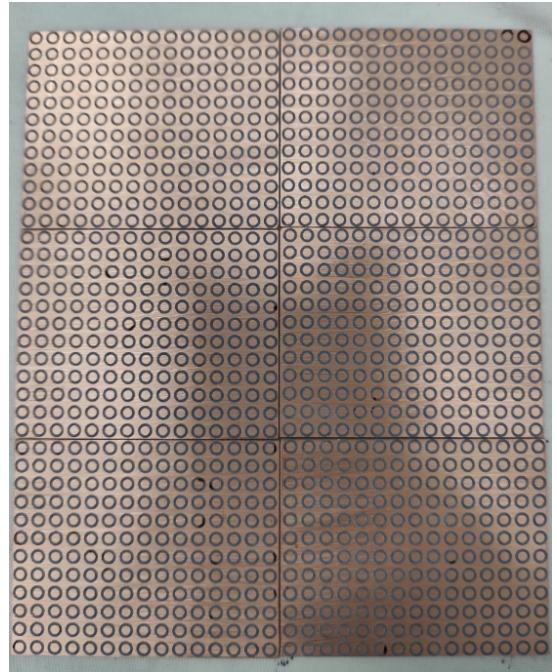


Рис. 6. 6 слоев ортогонально упакованных колец

C. Работа с волноводом

Для определения эффективной магнитной проницаемости собранного образца было решено использовать волновод. Такой подход был выбран ввиду простоты непосредственного измерения искомого параметра. Однако он, в свою очередь, накладывает ограничения на размеры образца - он должен полностью заполнять волновод. В связи с этим итоговый образец имеет размеры $52 \times 66 \times 34$ мм. В одной плоскости лежат 12×15 колец, всего плоскостей 34.

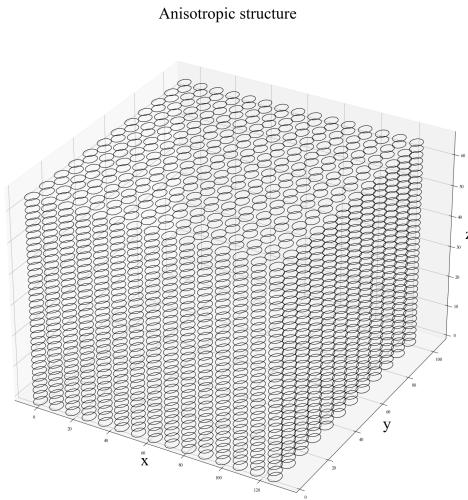


Рис. 7. 3D Модель образца

Из теории распространения волн в волноводе (см Приложение А 2) мы получаем, что магнитная проницаемость заполняющего волновод вещества:

$$\mu = \left(\frac{\pi c}{a\omega_{cr}} \right)^2 \quad (6)$$

Где a - продольный размер волновода, c - скорость света, ω_{cr} - минимальная частота волны, которую мы можем наблюдать в волноводе.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было изучено взаимодействие множества проводящих колец, реализованы методы оптимизиро-

ванного решения задачи на нахождении параметров такой дискретной структуры - от упрощения численных расчетов с помощью представления неравномерного тока как суперпозиции двух линейных [9], создания словаря во избежания повторного вычисления интегралов и других использований симметрии, до преобразования матричных уравнений, что многократно ускорило скорость вычисления.

В результате была получена численная модель, верифицированная на данных предыдущих исследований, способная теоретически рассчитать все необходимые параметры системы, однако параметры системы для получения диамагнитного эффекта были подобраны недостаточно точно.

Был создан ряд экспериментальных образцов, по оценке которых была определена оптимальные в производстве параметры структуры, позволяющие получить более чем 6000 колец в одной структуре.

Подготовлена теория и материал для оценки параметров такой структуры в волноводах, однако сам эксперимент в силу трудности взаимодействия с волноводами поставлен не был, поэтому и сопоставить результаты численного моделирования с экспериментом затруднительно.

В дальнейшем планируется использовать созданный образец для определения его отклика на внешнее магнитное поле, сравнение этого результата с полученным в результате моделирования. Так же будет проводится работа со структурами из SRR, с целью верификации написанной программы на основе собственных данных. Дальнейшая оптимизация кода для расчёта структур из ещё большего количества элементов.

-
- [1] M. Lapine and S. Tretyakov, Contemporary notes on metamaterials, *Microwaves, Antennas & Propagation*, IET **1**, 3 (2007).
 - [2] L. Solymar, E. Shamonina, L. Solymar, and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials* (Oxford University Press, Oxford, England, UK, 2009).
 - [3] J. B. Pendry, Negative Refraction Makes a Perfect Lens, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
 - [4] M. J. Freire and R. Marqués, Planar magnetoinductive lens for three-dimensional subwavelength imaging, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 182505 (2005).
 - [5] M. J. Freire, R. Marques, and L. Jelinek, Experimental demonstration of a $\mu=-1$ metamaterial lens for magnetic resonance imaging, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 231108 (2008).
 - [6] R. R. A. Syms, L. Solymar, and I. R. Young, Three-frequency parametric amplification in magneto-inductive ring resonators, *Metamaterials* **2**, 122 (2008).
 - [7] M. Gorkunov, M. Lapine, E. Shamonina, and K. H. Ringhofer, Effective magnetic properties of a composite material with circular conductive elements, *Eur. Phys. J. B* **28**, 263 (2002).
 - [8] M. Lapine, L. Jelinek, R. Marques, and M. J. Freire, Exact modelling method for discrete finite metamaterial lens, *Microwaves, Antennas & Propagation*, IET **4**, 1132 (2010).
 - [9] M. Lapine, L. Jelinek, M. J. Freire, and R. Marqués, Realistic metamaterial lenses: Limitations imposed by discrete structure, *Phys. Rev. B* **82**, 165124 (2010).

Приложение А: Краткие сведения из литературы по теме проекта

1. Теория для численного моделирования

Код, используемый для расчета структур из проводящих колец так же как и структур из CLR хранится на GitHub:

https://github.com/broshura/Discrete_Model_Of_Metamaterial_Lens

Основой теоретической части является расчет взаимной индуктивности двух колец с токами I_n и I_m по поверхности следующим образом:

$$M_{nm} = \frac{\mu}{4\pi I_n I_m} \int_S \int_{S'} \frac{\mathbf{K}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{K}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS dS'$$

Где μ - магнитная проницаемость вещества, а K представляют собой плотности поверхностного тока, имеющие Максвелловское распределение вдоль перпендикулярного направления полоски кольца:

$$K_\varphi(\rho) = \frac{2I}{\omega\pi\sqrt{1 - \left(\frac{\rho - r_0}{\omega/2}\right)^2}}$$

Токи I_n, I_m же вдоль кольца в силу симметрии и большой длины волны ($a/\lambda = 0.0005$) можно считать постоянными.

Однако такой расчет с Максвелловской плотностью токов тратит значительные ресурсы на вычисления, а линейная аппроксимация не дает результатов нужной точности при достаточно близких кольцах. Хорошем же способом аппроксимации, представленном в статье[9] является представление широкого кольца как пары коаксиальных тонких витков с токами на некотором расстоянии от края $r = r_0 \pm \gamma\omega$, где ω - толщина полоски, а коэффициент γ сильно зависит от геометрии кольца, но слабо от взаимного расположения - для колец в нашей системе $\gamma \approx 0.7$.

Таким образом, эффективно индуктивное взаимодействие пары толстых колец можно представить как среднюю линейную взаимную индуктивность для 2 пар (+ для внешнего и - для внутреннего) витков с током:

$$M_{nm} = \frac{L_{nm}^{++} + L_{nm}^{+-} + L_{nm}^{-+} + L_{nm}^{--}}{4} \quad (\text{A1})$$

Где в силу равенства радиусов пары колец $L_{nm}^{+-} = L_{nm}^{-+}$, что в итоге значительно уменьшит время расчета в сравнении с нелинейной плотностью поверхностного тока - L_{nm} можно достаточно просто выразить через эллиптические интегралы.

Рассматривая теперь в целом систему кольц мы для расчета токов мы приходим к системе линейных уравнений, которая легко записывается в матричном виде:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

Где под \mathbf{Z} подразумевается матрица взаимных импедансов, симметричная относительно диагонали, \mathbf{I}, \mathbf{V} вектора токов и наведенного напряжения на каждое кольцо. В данной работе рассматривалось взаимодействие структуры в наведенном индуктивном поле катушки с током, что позволяет рассчитывать взаимную индукцию аналогичным формуле (A1) способом, добавляя столбец и строку для откликающегося кольца Z_c .

$$Z_{nm} = j\omega M_{nm} = Z_{mn}$$

$$Z_{nn} = \begin{cases} Z_0 = R + i\omega L + 1/i\omega C, & 1 < n < N + 1 \\ Z_c = R_c + i\omega L, & n = N + 1 \end{cases}$$

Выразим в явном виде расчет взаимной индуктивности для линейных токов в рассматриваемых случаях - параллельной и ортогональной ориентации соответственно.

$$L^p(\Delta b, \Delta z) = \int_0^{2\pi} A_\varphi \frac{r_2(r_2 + \Delta b \cos \alpha)}{\Delta \rho_p} d\alpha \quad (\text{A2})$$

$$L^o(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \int_0^{2\pi} A_\varphi \frac{r_2 \Delta y \cos \alpha}{\Delta \rho_o} d\alpha \quad (\text{A3})$$

Где условные обозначения:

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{\frac{r_1}{\Delta \rho}} \left(\frac{(2 - \varkappa^2)\mathcal{K}(\varkappa) - 2\mathcal{E}(\varkappa)}{\varkappa} \right) \\ (\Delta b)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ (\Delta \rho)_p^2 &= (\Delta b)^2 + r_2^2 + 2r_2 \Delta b \cos \alpha \\ (\Delta \rho)_o^2 &= (\Delta y)^2 + (\Delta x - r_2 \sin \alpha)^2 \\ \varkappa_p^2 &= \frac{4r_1 \Delta \rho_p}{(\Delta \rho_p + r_1)^2 + (\Delta z)^2} \\ \varkappa_o^2 &= \frac{4r_1 \Delta \rho_o}{(\Delta \rho_o + r_1)^2 + (\Delta z - r_2 \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

И полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\varkappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha}} \\ \mathcal{E}(\varkappa) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

2. Теория волноводов

Волновод - искусственный канал способный поддерживать распространяющиеся в нем волны. В нашем случае мы будем использовать экранированный волновод, стенки которого хорошо отражают волны, в результате чего энергия поля передается с пренебрежимо малыми потерями. Такие волноводы изготавливаются из металлов с большой проводимостью. Из закона Ома:

$$E = \frac{j}{\lambda} \quad (A4)$$

и при $\lambda \rightarrow \infty$ можно записать граничные условия на стенах волновода:

$$\begin{cases} E_t = 0 \\ H_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, выполнены условия на разделе границ сред, а именно:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1n} = H_{2n} \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим $TE - s$ - поляризованную волну в общем случае, то есть вектор напряженности может иметь компоненты, направленные вдоль осей x и y . Эти компоненты, однако, не являются независимыми, а связаны соотношением:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Соотношение вытекает напрямую из теоремы Гаусса, где $0 < x < a$, $0 < y < b$, а a, b соответствующие параметры сечения волновода. Тогда запишем граничные условия на стенах волновода:

$$E_x \Big|_{y=0} = 0, \quad E_x \Big|_{y=b} = 0 \quad E_y \Big|_{x=0} = 0, \quad E_y \Big|_{x=a} = 0 \quad (4)$$

Рассмотрим волну, бегущую вдоль оси z :

$$E = E_0(x, y) \exp(ik_z z - i\omega t) \quad (5)$$

Затем давайте подставим волну в уравнение Геймгольца, которое описывает движение волны в среде, где отсутствуют свободные заряды и токи проводимости:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (6)$$

Подставив (5) в (6) получим:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_0 = 0 \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет решение вида:

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ E_y = A_y \cos(k_y y) \sin(k_x x) \end{cases} \quad (8)$$

Чтобы наше решение удовлетворяло граничным условиям, положим, что:

$$\begin{cases} k_x = \frac{\pi n}{a} & n \in \mathbb{Z} \\ k_y = \frac{\pi m}{b} & m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (9)$$

Волна задаваемая уравнением (8) называется TE_{nm} -волной. Из уравнения (4) можем записать связь для амплитуд

$$k_x A_x + k_y A_y = 0 \quad (10)$$

Теперь учтем (9), тогда имеем

$$nA_x + mA_y = 0 \quad (11)$$

Теперь давайте подставим уравнение (8) и в (7) и учтем граничные условия:

$$\frac{w^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} + k_z^2 \quad (12)$$

где n и $m \in \mathbb{Z}$. Однако стоит заметить, что n и m не могут быть равны нулю одновременно, так как в противном случае $E \equiv 0$. Критическая частота в волноводе напрямую зависит от его геометрических размеров и определяет минимальную частоту, с которой волна сможет распространяться в нем. В нашем случае получим, что при:

$$\begin{cases} a > b & \omega_{cr} = \frac{\pi c}{a} \\ a < b & \omega_{cr} = \frac{\pi c}{b} \end{cases} \quad (13)$$

Приложение В: Изображения, графики

1. Численное моделирование

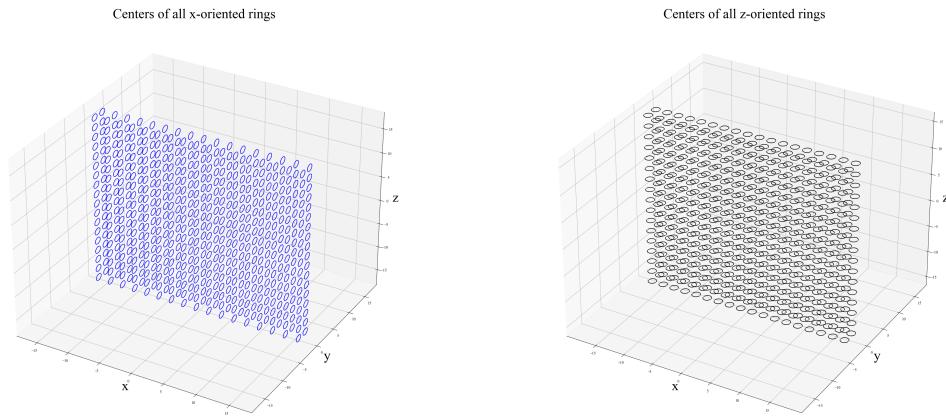


Рис. 8. Изображение расположения остальных колец в структуре, используемой для верификации расчетов.

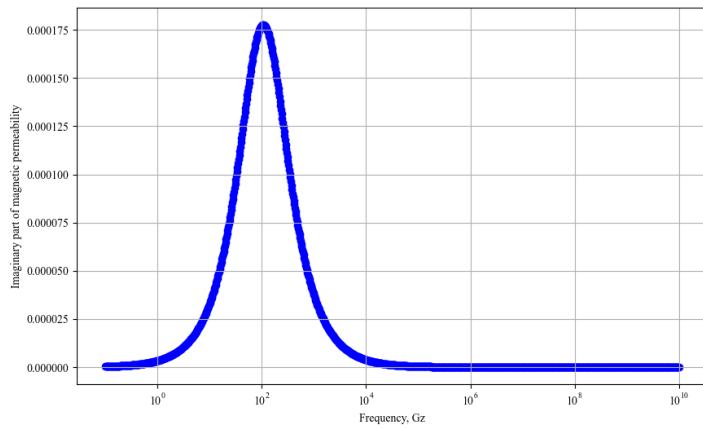


Рис. 9. График зависимости мнимой части магнитной проницаемости структуры от частоты наведенного напряжения

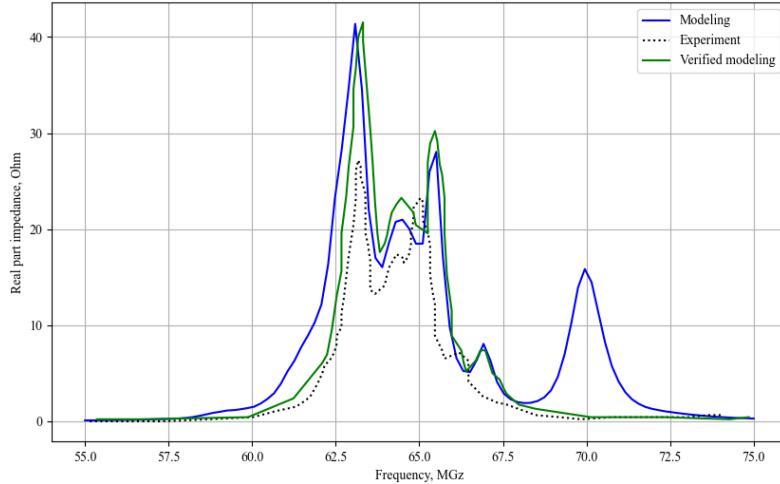


Рис. 10. График зависимости импеданса, измеряемого катушкой, от частоты напряжения на этой катушке (мнимая часть) и аналогичной, проверенный на практике [9].

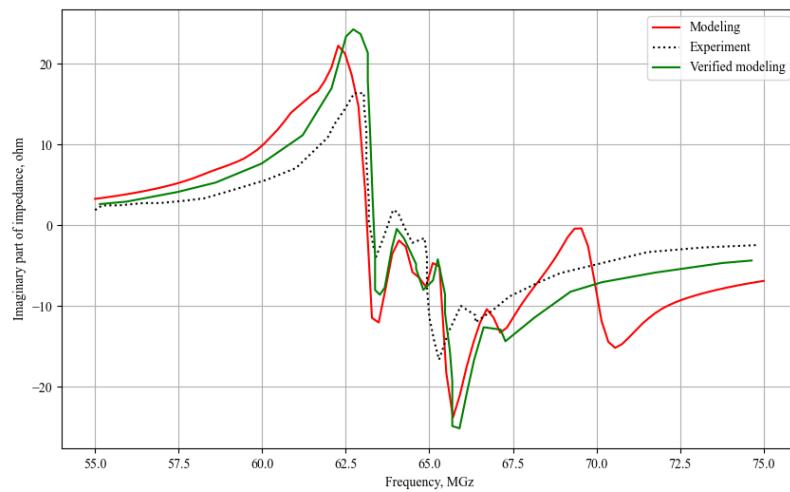


Рис. 11. График зависимости импеданса, измеряемого катушкой, от частоты напряжения на этой катушке (мнимая часть). и аналогичной, проверенный на практике [9]

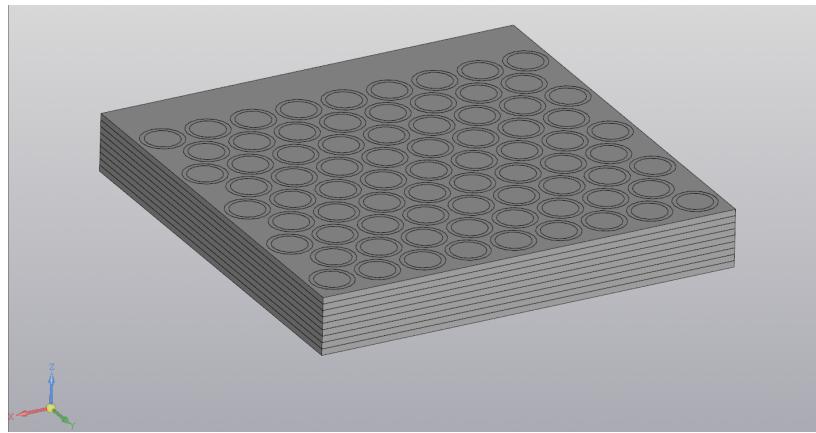


Рис. 12. Модель анизотропной гексагональной структуры со сдвигами

2. Экспериментальные результаты

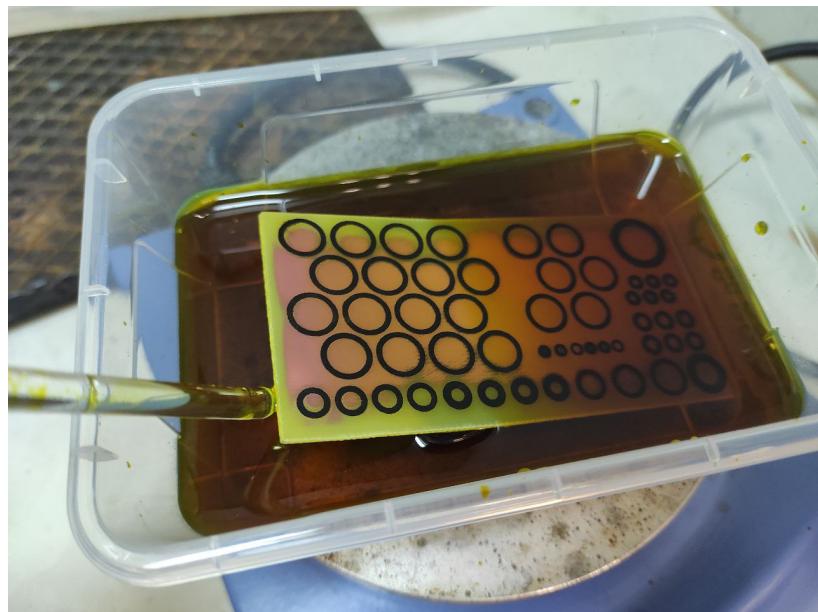


Рис. 13. Процесс травки колец



Рис. 14. Оборудование, использованное для вытравки колец - водный раствор хлорного железа, утюг, фотобумага, печатные платы, лазерный принтер