Конспект лекций по математическому анализу

Лектор: Кучерук Екатерина Аркадьевна
Конспектировал : Шура Макаренко

Содержание

Часть VII

Неопределенный интеграл

Лекция 1

7.1 Первообразная функции и неопределенный интеграл

---

def : $f(x)$ определена на некотором промежутке, $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке, если

$$F'(x) = f(x)$$

$\forall x$ из промежутка

Если существует хотя бы 1 первообразная, то их бесконечно много :
$\sqsupset F(x)$ - первообразная $F(x) + C, C = const$ - первообразная

Теорема

$\forall f(x) \in C([a,b]) \ \ \exists F(x) \in C^1([a,b])\ F'(x) = f(x)$ Необходимо $F(x) \in C([a,b])$

Теорема

$\sqsupset F(x)$- первообразная $f(x)$ на некотором промежутке Тогда $\forall$ другая первообразная $f(x)$ может быть записана в виде $F(x) + C$, где $C = const$

Доказательство:

$\sqsupset \Phi(x), F(x)$ - первообразные
$(F(x) - \Phi(x))' = 0 \Leftrightarrow\ F(x) - \Phi(x) = const$

---

def : Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Где $F'(x) = f(x)$, $C = const$, $f(x)$ - подинтегральная функция

7.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$
4. $\int dF(x) = F(x) + C$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
   $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ - однородность
6. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ - аддитивность

7.3 Таблица основных первообразных

1. $\int x^n dx \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
4. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
5. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
6. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
7. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$ a.k.a длинный логарифм и $arcsh$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$
12. $\int shxdx = chx + C$
13. $\int chxdx = shx + C$
14. $\int \frac{1}{ch^2 x} = thx + C$
15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

7.4 Замена в неопределенном интеграле

Теорема

$$\int f(x)dx, \Leftrightarrow x = \varphi(t), \varphi \in C^1([\alpha, \beta]), \quad \exists F(x)$$

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \tag{1}$$

Доказательство

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \int F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$$

Данный факт используется в двух методах - замене переменной ($\to$), внесении под дифференциал ($\leftarrow$)

7.5 Формула интегрирования по частям

$$u = \varphi(x),\ v = \psi(x)\ \in C^1([a,b])$$

$$(\varphi(x)\psi(x))' = \varphi'(x)\psi(x) + \psi'(x)\varphi(x) \Rightarrow uv = \int vdu + \int udv \Leftrightarrow \int udv = uv - \int vdu \tag{2}$$

<u>**Пример:**</u>

$$y' = f(x)g(y)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{g(y)} = \int f(x) \Rightarrow \ln g(y(x)) = F(x) + C$$

Часть VIII

Определенный интеграл

8.2 Определение и условия существования

8.2.1 Интеграл Римана, 1ое def

$$f[a,b] \to \mathbb{R}, C_2 < f < C_1, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

<u>**def**</u> **:** Разбиением P отрезка $[a,b]$ называется конечное множество точек этого отрезка, такие что :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots x_{n-1} < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$i = 1 \cdots n$, $\lambda(P) = max \Delta x_i$ - ранг разбиения

<u>**def**</u> **:** Разбиение P' называется измельчением разбиения P если $P \subset P'$, откуда очевидно, что $\lambda(P') \leq \lambda(P)$

$t = (t_1, t_2 \cdots t_n)$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\sigma(P,t,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ - Сумма Римана

<u>**def**</u> **:** Определенным интегралом функции $f(x)$ называется конечный предел Римановых сумм (если $\exists$)

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,t,P) \tag{3}$$

Или предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall P, t: \;\; \lambda(P) < \delta, \; |I - \sigma(P,t,f)| < \varepsilon$$

Множество $f(x)$ таких что $\exists I$ называются интегрируемыми по Риману : $f(x) \in \Re([a,b])$
Условие ограниченности необходимо т.к. при определенном наборе t_i можно сделать σ сколь угодно большим

8.2.2 Суммы Дарбу, 2ое определение интеграла Римана

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, C_2 < f < C_1, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

$$M = \sup f(x), \quad m = \inf f(x)$$

Затем для разбиения P $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]}$

---

def : $L(P,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ - нижняя сумма Дарбу

$U(P,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ - нижняя сумма Дарбу

Свойства :

1. $L(P,f) \leq U(P,f), \quad \forall P$
2. $m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$
3. Монотонность сумм относительно разбиения ($\sqsupset P \subset P'$ - измельчение)

$$L(P,f) \leq L(P',f) \quad U(P',f) \leq U(P,f)$$

Доказательство

$\sqsupset P'$ отличается от P только одной точкой $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\Delta L = \inf_1 \Delta_1 + \inf_2 \Delta_2 - m_i \Delta x_i \leq 0$$

Далее рекурсивно строим доказательство для $n+1$ точки *Аналогично для* M

---

def : Нижние и верхние интегралы Дарбу соответственно :

$$L(f) = \sup_P L(f,P) = \int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \tag{4}$$

$$U(f) = \inf_P U(f,P) = \int\limits_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \tag{5}$$

Теорема Дарбу

$$L(f) = \lim_{\lambda(P) \to \infty} L(P,f)$$

$$U(f) = \lim_{\lambda(P) \to \infty} U(P,f)$$

Доказательство:

Для L (для U аналогично)

$$L(f) = \lim_{\lambda(P)\to\infty} L(P,f) \quad \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall P \ \ \lambda(P) < \delta$$

$$0 \leq L(f) - L(P,f) < \varepsilon$$

$$L(f) = \sup_P L(P,f) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists P_1 : \ 0 \leq L(f) - L(P,f) < \varepsilon/2$$

P_1 состоит из n_1 точки $\Rightarrow \delta :=\sqsupset P_2 : \ \lambda(P_2) < \delta$

$$P = P_1 \cup P_2 \Rightarrow P - \text{Измельчение}$$

$$0 \leq L(f) - L(P,f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq L(P_1,f) - L(P_2,f) \leq n_1\delta(M-m)$$

Смотри свойств сумм(n_1 интервал длиной δ), добавим в P_2 n_1 точку, причём длина интервалов $P_2 < \delta$

$$0 \leq L(f) - L(P,f) + L(P,f) - L(P_2,f) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

<u>def</u> : Если $L(f) = U(f) = I_D$ - интеграл Римана (второе определение)

<u>Следствие</u>: Критерий Дарбу интегрируемости по Риману - следующие утверждения эквивалентны:

1. $L(f) = U(f)$
2. $\lim\limits_{\lambda(P)\to\infty}(U(P,f) - L(P,f)) = 0$
3. $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists P : 0 \leq \ U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

Доказательство: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ - очевидно

$3 \Rightarrow 1$

$$L(P,f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P,f)$$

Теорема

$$f \in \Re([a,b])\text{def } 1 \Rightarrow \exists I_D$$

Причём $I = I_D$

Доказательство:

$$(\Rightarrow)\forall\varepsilon \ \exists\delta > 0\forall P,t : \ \lambda(P) < \delta$$

$$I - \varepsilon/2 < \sigma(P,f,t) < I + \varepsilon/2$$

Так как I не зависит от выбора t_i, то выбираем inf и sup

$$I - \varepsilon/2 < L(P,f) \leq U(P,f) \leq I + \varepsilon/2$$

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) \le \varepsilon$$

$$(\Leftarrow)\ L(P,f) \le \sigma(P,t,f) \le U(P,f) \to \lambda(P) \to 0 \ \boxed{\text{Милиционеры}}$$

Лекция 2

Пример: Функция Дарбу

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases} ,Ł(f) = 0, U(f) = 1$$

8.3 Критерий Лебега интегрируемой функции

def : Колебание функции на множестве:

$$\omega(f,E) = \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{x\in E}(f) = \sup_{x',x''\in E} |f(x') - f(x'')|$$

Критерий Дарбу:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i < \varepsilon$$

В терминах колебаний

$$E_1 \supset E_2 \Rightarrow \omega(f,E_1) \le \omega(f,E_2)$$

Откуда из ограниченности следует *определение колебания функции в точке*:

$$\omega(f,x_0) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f,U_\delta(x_0))$$

$$\boxed{\text{Определение непрерывности функции в точке } x_0 : \omega(f,x_0) = 0}$$

$$(\Rightarrow)\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \forall x \in U(x_0)|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Правило треугольника

$$\forall x',x'' : \quad f(x') - f(x'') < |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0 - f(x'')| < 2\varepsilon$$

$$(\Leftarrow)\forall\varepsilon\ \exists\delta > 0 : \quad \forall 0 < \delta' < \delta$$

$$\omega(f,U_\delta(x_0)) < \varepsilon$$

Дальше расписываем по опредлению - ннтегрируемость:

$$\forall\varepsilon\exists P : \sum_{k=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i < \varepsilon$$

Рассмотри равномерно непрерывные функции (непрывные на отрезках = компактах)

$$\sqsupset P\ \lambda(P) < \delta \ \ \forall\varepsilon\exists\delta > 0$$

$$\forall x',x'' : \ |x' - x''| < \delta \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\Delta x_i = \varepsilon(b-a) < \varepsilon'$$

$$f \in C[a,b] \Rightarrow f \in \Re[a,b]$$

Откуда заметим, что :

1. множество интегрируемых функций не пусто
2. Получили достаточное условие интегрирования

Однако непрерывность не является необходимым условием интегрируемости

Теорема

f монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in \Re[a,b]$

Доказательство:

$$\sqsupset f - \text{ монотонно возрастает, определим} M_i, = \sup = f(x_i) \quad m_i = \inf = f(x_{i-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = \sum_{k=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i$$

Теперь прижимаем малым интервалом, который перебивает разрывы в силу их ограниченности:

$$\sqsupset \lambda(P) = \delta, \quad \delta < \Delta x_i \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Переходим к пределу по определению, где δ - б/м, $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta f(x_i) = f(b) - f(a) \Rightarrow$ ограничена

$$\lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = 0$$

Множество меры нуль

---

def : $E \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры нуль в смысле Лебега (по Лебегу) если:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \{J_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad J_k = (\alpha_k, \beta_k), \quad \begin{cases} E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \mu(E) = 0 \tag{6}$$

Где модуль обозначает длину: ($|J_k| = \beta_k - \alpha_k$)

Свойства множеств меры нуль

1. Точка или конечно множество точек на $\mathbb{R}$ - множество меры нуль: берём открытую окрестность с малымδ, меньшего наперед заданного ε
2. $$\{A_i\}_{i \in \Omega \text{нбчс}}, \; \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i \in \Omega} A_i\right) = 0$$

   Аналогично (1), но $\varepsilon' = \varepsilon/N$, N - конечное

3.
$$B \subset A, \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$$

Те же фрукты: для каждого множества сумма длин его отрезков меньше $\varepsilon/2^i$, где i его номер $\Rightarrow$ сумма прогрессии равна ε

4.
$$a < b, \quad \mu([a,b]) \neq 0$$

Доказательство

По свойству компакта получаем конечное множество, модуль суммы длин которого по определению не меньше $(b-a)$:

$$(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} |J_{j_k}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_k|$$

Где $\{J_{j_k}\}$ - конечное подпокрытие $\{J_k\}$, доказываем по математической индукции:

$$N = 1, \quad (\beta - \alpha) < (b-a)$$

Далее рассмотрим крайний интервал для $N+1$ интервалов, содержащий a, исходя из полноты покрытия $\beta_{j_0} \in$ остатку, который можно покрыть N интервалами (α_{j_0} левее a)

$$\sum_{j=1}^{N+1} = (\beta_{j_0} - \alpha_{j_0}) + \sum_{j=1}^{N} \leq (\beta_{j_0} - \alpha_{j_0}) + (b - \beta_{j_0}) \leq (b-a)$$

Фанфакты:

(a) в определении множества меры ноль (6) можно брать отрезки, а не интервалы

(b) Длина отрезка равна длине интервала(можно раздвинуть умножив интервал на λ, далее разница в константу позволяет все равно сделать сумму сколь угодно маленькой)

---

def : Если некоторое свойство выполняется на множестве Ω/E, где $\mu(E) = 0$, то говорят что такое свойство выполняется почти везде

Критерий Лебега

$$f \in \Re[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} 1) f \text{ ограничена на } [a,b] \\ 2) f \text{ непрервына почти везде на } [a,b] \end{cases}$$

Доказательство:

E - множество точек разрыва

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in [a,b] : \omega(f,x) \geq \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Достаточно показать, что E_n - множество меры нуль, тогда E - тоже множество меры нуль, поэтому фиксируем n

$$(\Rightarrow) \; f \in \Re[a,b] \Leftrightarrow \forall \; \varepsilon > 0 \quad \exists P : \sum_{k=1}^{n} \omega(f,[x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k < \varepsilon$$

$\sqsupset$ P такое, что выполняется критерий Дарбу, $x_n \in E$, Рассмотрим все случаи

$$x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \omega(f, \cup_\delta(x)) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \geq \frac{1}{n}$$

$$x = x_k \Rightarrow \text{ либо } \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \geq \frac{1}{3n} \text{ либо } \omega(f, [x_k, x_{k+1}]) \geq \frac{1}{3n}$$

От противного: правило треугольника для x', x'' в окрестности x_k запишем неравенство модулей

$$|f(x)f(x")| \leq |f(x'') - f(x)| + |f(x') - f(x)| < \frac{2}{3n} \Rightarrow \omega(f, \cup_\delta(x)) \leq \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}$$

Противоречие

Теперь когда мы знаем что у всех точек разрыва колебание мало, покажем что мы можем сделать Δx_k меньше наперед заданного ε

$$\Omega = \{k : \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) < \frac{1}{3n}\} \Rightarrow E_n \subset \bigcup_{i \in \Omega} [x_{k-1}, x_k]$$

$$\sum_{k \in \Omega} \Delta x_k = 3n \sum_{k \in \Omega} \frac{1}{3n} \Delta x_k \leq 3n \sum_{k=1}^{n} \Delta\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) x_k < 3n\varepsilon = \varepsilon' \Rightarrow \mu(E) = 0$$

Теперь в обратную сторону

$$(\Leftarrow) \mu(E) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists \{J_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \varepsilon$$

Представим отрезок $[a,b]$ как объединение δ_x окрестностей непрерывных точек с запасом для колебаний (в три раза больше) с нашем множеством меры ноль

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} \cup_{\delta_x}(x) \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

Поскольку отобранные нами точки - точки непрерывности, то по определению

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_x > 0 \ \omega(f, \cup_{3\delta_x}) < \varepsilon$$

По свойству компакта найдем конечное подпокрытие:

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{N_1} \cup_{\delta_{x_j^*}}(x_j^*) \bigcup_{l=1}^{N_2} J_{k_l}, \quad \delta = min \ \ \delta_{x_j^*}, \quad P : \lambda(P) < \delta \Rightarrow \Delta x_k < \delta$$

Теперь разобьем сумму: у отобранных нами точек непрерывности колебание очень мало, а у точек из отрезков, попавших в три-дельта окрестность x_j^*(т.е. имеющих пересечение с дельта окрестностью) это свойство сохраняется (по записанному условию непрерывности). Те же точки, у которых это условие не выполняется, лежат полностью в $\cup J_k \Rightarrow$, а их колебании не превосходит супремума и инфемума функции

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sum_1 + \sum_2 \Rightarrow \begin{cases} \sum_1 < \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k < \varepsilon(b-a) \\ \sum_2 < (M-m) \sum \Delta x'_k < (M-m) \sum\limits_{l=1}^{N_2} |J_{k_l}| \end{cases} < \varepsilon' = const$$

Классы интегрируемых функций

1. Интегрируемость композиции

$$f \in \Re[a,b], \quad m = \inf f \quad M = \sup f \quad g \in C[m,M] \Rightarrow g \circ f \in \Re[a,b]$$

Доказывается через сохранение непрерывности и ограничение множества разрывов композиции множеством точек разрыва f

2. Однородность

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad f, g \in \Re[a,b] \Rightarrow \lambda f + g \in \Re[a,b]$$

Очевидно из пункта 1

3. Интегрируемость произведения

$$f, g \in \Re[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \Re[a,b]$$

Очевидно из пункта 1

4. Интегрируемость модуля (композиция функций)

5. Интегрируемость подотрезков

$$f \in \Re[a,b] \Rightarrow \forall [c,d] \subset [a,b] \quad f \in \Re[c,d]$$

Доказывается из соображений неуменьшения количества точек разрыва и все ограниченности

6. Аддитивность определенного интеграла

$$f \in \Re[a,b] \quad f \in \Re[b,c] \Rightarrow f \in \Re[a,c]$$

Доказывается через факт неувеличения мощности множества точек разрыва при счётном количестве объединяемых множеств и замечания о том что объединение двух отрезков с равными границами это отрезок с расширенными границами

Лекция 3

8.4 Основные свойства определенного интервала

8.4.1 Простейшие свойства

1. Равенство почти везде

$$f, g \in \Re[a,b], \quad f(x) = g(x) \textit{ почти везде на } [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство: предел Римановых сумм при (см. стр. 5) выборе точек отрезка, значения на которых равны (их не может не быть равных, так как иначе целый отрезок $f(x)$ не равен $g(x)$ $\Rightarrow$ мера множество таких точек не 0) *Замечание*

1) важно что обе функции интегрируемы

2) $f(x) = 0$ почти везде $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = 0$

2. Смена пределов интегрирования

$$a > b, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx \qquad (x_{i-1} - x_i) = -(x_i - x_{i-1})$$

3. Аддитивность определенного интервала по промежутку

$$a < b < c \quad \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

   Опять смотрим сумму Римана, только в середине интервала берем точку b

4. Линейность интегралов относительно функции

$$\forall \lambda > 0 \;\; f, g \in \Re[a,b] \quad \int\limits_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \lambda \int\limits_a^b g(x)dx$$

   При доказательстве разбиваем сумму Римана на две подсуммы

8.4.2 Монотонность интеграла относительно функции

Теорема

$$\varphi(x) \in \Re[a,b], a < b, \varphi(x) > (\geq) 0 \Rightarrow \int\limits_a^b \varphi(x)dx > (\geq) 0$$

Доказательство:

$\boxed{\geq}$ Очевидно, т.к. суммы Римана неотрицательная для $\varphi(x)$

$\boxed{>}$ $\Rightarrow$ От противного

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0 = \lim_{\lambda(P) = \to \infty} U(P, \varphi) = \textit{Верхняя сумма Дарбу}$$

Рассмотрим супремумы функций, среди них есть хотя бы один меньший ε_1 (иначе $U(P,\varphi) > \varepsilon_1(b-a)$)

$$\forall \varepsilon_1 \; \exists P : U(P, \varphi) < \varepsilon_1(b-a) \Rightarrow \exists M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \varphi(x) < \varepsilon_1$$

Теперь выберем этот отрезок: $[x_{i-1}, x_i] = [a_1, b_1]$

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx + \int\limits_a^{a_1} \varphi(x)dx + \int\limits_{b_1}^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \Rightarrow \int\limits_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx = 0$$

Повторим с $\varepsilon_2 > 0$ на $[a_1, b_1]$, поэтому по лемме о вложенных отрезка существует единственная точка , принадлежащее всем отрезкам $\varepsilon_k = 1/k \to 0 \Rightarrow 0 < \varphi(c) < \varepsilon_k$ и милиционеры говорят что есть нулевая точка, противоречие

Следствия

1. Функция неотрицательная на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow$ функция равна нулю почти везде на $[a,b]$. Доказывается из соображений невозможности существования непрерывной функции в ненулевой точке(Есть точка непрерывности $\Rightarrow$ по лемме о сохранении знака есть положительный отрезок $\Rightarrow$ интеграл не ноль)

2. Сравнение верно и для интегралов:$f > (\geq) g \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > (\geq) \int\limits_a^b g(x)dx$ (рассматриваем разность функций $\varphi(x) = f(x) - g(x)$)

3. Интеграл ограничен минимальным и максимальным значением функций $(m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a))$

4. Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля $(|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a))$

8.4.3 Первая теорема о среднем

Первая теорема о среднем

$$f, g \in \Re[a,b], \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad g(x) \geq (\leq) 0 \text{ на } [a,b]$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

Доказательство:

Заменим функцию $f(x)$ на её максимум(M) и минимум(m) на интервале, оценим интеграл:

$$m \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int\limits_a^b g(x)dx \Rightarrow$$

Далее заметим, что если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$ то $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ т.к тогда $g(x) = 0$ почти везде на [a,b], иначе

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M \Rightarrow \mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = const \in [m, M]$$

<u>**Следствие 1**</u>

$$f \in \Re[a,b], \quad \exists \mu \in [m, M] \int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \ \exists c \in [a,b] f(c) = \mu$$

В силу непрерывности точка c существует

8.5 Интегрирование и дифференцирование

def : Интегралом с переменным верхним пределом называется

$$f \in \Re[a,b], \quad \forall x \in [a,b], \quad F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Интегрируемость и непрерывность

Из интегрируемости функции следует непрерывность ее интеграла

$$f \in \Re[a,b] \Rightarrow F(x) \in C[a,b]$$

Доказательство:

Доказываем по определению: смотрим на приращение функции

$$\Delta F(x_0) = F(x) - F(x_0) = \int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$$

Оцениваем сверху

$$|\Delta F(x_0)| \leq \int\limits_{x_0}^x |f(t)|dt \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|(x-x_0) = M|(x-x_0)|, \quad M = const$$

$$\Downarrow$$

$$x \to x_0 \Rightarrow \Delta F(x_0) \to 0 \Rightarrow \quad \text{функция непрерывная} \quad \forall x, x_0 \in [a,b]$$

Теорема о дифференцируемости в интеграла

Если x_0 - точка непрерывности в $f(x) \in \Re[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0

Доказательство:

Рассмотрим приращение функции, затем по определению представляем в нужной форме приращение, выделяя $f(x_0)\Delta x$

$$\Delta F(x_0) = \int\limits_{x_0}^x = \int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt + \boxed{\int\limits_{x_0}^x f(x_0)dt} = f(x_0)(x-x_0) = f(x_0)\Delta x$$

Теперь докажем что остаток $\overline{o}(f(x_0)\Delta x)$

$$0 \leq \left|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \leq \sup_{t\in[x_0,x]} |(f(t) - f(x_0))||\Delta x| \to \overline{o}(1)\cdot\Delta x = \overline{o}(\Delta x)$$

Теорема о существовании первообразной, равной интегралу с переменным верхним пределом

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists \Phi(x) = F(x) + C, \quad C = const$$

Где $F(x)$ - интеграл с переменным верхним пределом. Доказывается очевидно из соображений того что производная в каждой точке равна $f(x)$ по определению неопределенного интеграла и теореме о множестве первообразных

---

def : Обобщенной первообразной называется $\Phi(x)$ такое что $\Phi'(x) = f(x)$ за исключением конечного числа точек

Теорема о кусочно непрерывной функции

Если $f(x)$ - кусочно непрерывна на $[a,b]$ (за исключением конечного числа точек) $\Rightarrow \exists$ обобщенная первообразная на $[a,b]$

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C = F(x) + C$$

Доказательство:

Рассмотрим все точки непрерывности, в них $\exists F'(x_0) = f(x_)$ за исключением конечного количества точек $\Rightarrow$, при этом очевидно $f(x) \in \Re[a,b]$ за счёт непрерывности

Основная формула интегрального счисления

Формула Ньютона-Лейбница: $f \in C[a,b]$ (кусочно), $\Phi(x)$- обобщенная первообразная

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство:

Просто по определению подставляем a и b в обобщенную первообразную, выражаем константу

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \begin{cases} F(a) = 0 \\ F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(a) = C \\ \Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + C \end{cases} \Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(t)dt$$

8.5.1 Формулы интегрирования по частям и замены переменной в неопределенном интеграле

Формула интегрирования по частям доказывается абсолютно аналогично (2)

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x) \Rightarrow r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \qquad (7)$$

Доказательство

Рекурсивно запускаем ряд Тейлора от $f(x) - f(a)$ по определению через интеграл с переменным верхним пределом с внесением под дифференциал и берем по частям

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^b f'(t)d(x-t) = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \int_a^x \frac{1}{2}f''(t)d((x-t)^2)\dots = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

Замечание

$(x-t)^n \geq 0 \Rightarrow, t \in [a, x]$ Остаток в форме Лагранжа по теореме о среднем:

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\int_a^b (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Первая теорема о замене переменной

Согласованы концы отрезков и условия гладкости функций

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b], \quad \begin{cases} \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b \\ \varphi \in C^1[a, b] \\ f \in C[a, b] \end{cases} \qquad \Rightarrow f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta](\in \Re[a, b])$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство:

Заметим, что функция вида $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in C[a, b]$, после чего берем производную от $F(\varphi(t))$, $F'(x) = f(x)$ и пользуемся Ньютоном Лейбницем: не зря же мы знаем пределы:

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Вторая теорема о замене переменной

Концы отрезков несогласованны, но есть **строгая** монотонность $\varphi(t)$

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b], \quad \begin{cases} \varphi(t) - \ \textit{строго монотонна} \\ \varphi \in C^1[a, b] \\ f \in C[a, b] \end{cases} \qquad \Rightarrow f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta](\in \Re[a, b])$$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство:

Здесь доказываем по определению сумм Римана: т.к. $\varphi(t)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке, в том числе равномерно непрерывна на отрезке, то P' на t бежит к нулю вместе с разбиением P на x:

$$\begin{cases} t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta, & \eta_k \in [t_{k-1}, t_k] \\ x_0 = a < x_1 \dots < x_n = b, & \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \end{cases} \quad, \varphi(\eta_k) = \xi_k, \varphi(t_k) = x_k$$

Важно что любой набор ξ дает любой набор η

$$\sigma(P, f, t) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\eta_k))(x_k - x_{k-1})$$

Сейчас воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа чтобы выразить Δx_k через η_k

$$x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

Теперь вроде все хорошо, но $\tau_k \neq \eta_k$, поэтому мы добавим и вычтем $\varphi'(\eta_k)$ и покажем что τ_k почти не отличается от η_k

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\eta_k))(\varphi'(\tau_k))\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\eta_k))(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\eta_k))\Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\eta_k))\varphi'(\eta_k)\Delta t_k$$

Вторая сумма в точности Риманов интеграл, теперь покажем что первая сумма бежит к первой. В принципе это довольно очевидно по Критерию Дарбу через колебания для функций $\varphi'(t)$: при $\lambda(P) \to 0$ $\varphi'(\eta_k) - \varphi'(\tau_k) = \overline{o}(1)$, откуда $f(\varphi(\eta_k))(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\eta_k))\Delta t_k = \overline{o}(f(\varphi(\eta_k))\Delta t_k)$

Заметим что важно для строгости прижать $f(\varphi(\eta_k))$ константой в виде супремума функций и уже тогда рассматривать $\varphi'(t)$

Тогда в пределе на ранге разбиения стремящемся к нулю получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\eta_k))\varphi'(\eta_k)\Delta t_k + \overline{o}(f(\varphi(\eta_k))\Delta t_k) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

8.5.2 Лемма и вторая теорема о среднем

Вторая теорема о среднем

Основывается на лемме:

$$\begin{cases} f, g \in \Re[a, b] \\ g \geq 0 \text{ на } [a, b] \\ g \text{ невозр на } [a, b] \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_{a}^{\xi} f(x)dx$$

Сама же теорема звучит так:

$$\begin{cases} f, g \in \Re[a, b] \\ g \text{ монотонна на } [a, b] \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_{a}^{\xi} f(x)dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)dx$$

Доказательство:

Вообще говоря для доказательства леммы заметим, что) $\int\limits_a^{\xi} f(x)dx = F(\xi), \xi \in [a,b]$, где $F'(x) = f(x)$, поэтому достаточно доказать что мы можем зажать интеграл между максимальным значением $g(x)$ и максимумом и минимумом первообразной. Поэтому чтобы перейти к первообразной $f(x)$, распишем интеграл как сумму интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x) - g(x_{i-1}))dx + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_{i-1})dx$$

Теперь рассмотрим первую сумму: прижимаем ее максимумом $f(x)$ и показываем что $g(x) - g(x_{i-1}) = \omega(g, [x_{i-1}, x])$ и тогда по Критерию Дарбу через колебания $\to 0$, получается что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = g(x_0)(F(x_1) - F(x_0)) + g(x_1)(F(x_2) - F(x_1)) \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i))] - g(x_0)F(x_0) + g(x_{n-1})F(x_n)$$

Заметив что $F(x_0) = F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, оценим сумму сверху и снизу, заменив $F(x_i)$ т.к. все слагаемые положительные

$$m = \inf_{x \in [a,b]} |F(x)|, \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} |F(x)| \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} [F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i))] - g(x_0)F(x_0) + g(x_{n-1})F(x_n) \leq$$
$$\leq M(g_0 - g_1 + g_1 \cdots - g_{n-1} + g_{n-1}) = Mg(x_0) = Mg(a)$$

Заметим,что наша сумма в пределе все еще равна интегралу, поэтому аналогично:

$$mg(a) \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a) =$$

Откуда из непрерывности первообразной следует, что

$$\exists \xi : \quad \xi \in [a,b], \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = F(\xi)g(a) = g(a) \int\limits_a^{\xi} f(x)dx$$

Замечание: если $g(x)$ невозрастающая, то проводим аналогичные операции с $\Phi(x) = \int\limits_x^b f(t)dt$, получаем что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int\limits_{\xi}^b f(x)dx$$

После доказательства следует очевидное доказательство теоремы через рассмотрение функции $g(x) - g(b)$:

$$\int\limits_a^b f(x)(g(x) - g(b))dx = [g(a) - g(b)] \int\limits_a^\xi f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b) \left[\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^\xi f(x)dx \right] =$$

$$= g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b) \left[- \int\limits_b^a f(x)dx - \int\limits_a^\xi f(x)dx \right] = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx - g(b) \int\limits_b^\xi f(x)dx =$$

$$= g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b) \int\limits_b^\xi f(x)d$$

Лекция 4

8.6 Приложения определенного интеграла

8.6.1 Формула Валлиса (Уоллиса)

$$J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

Чтобы найти данный интеграл, выразим его рекурсивно сам через себя, используя формулу интегрирования по частям:

$$J_n = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)d(cos(x)) = -\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx =$$

$$(n-1)\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))\sin^{n-2}(x)dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

Заметим что результат зависит от четности n, поэтому распишем интеграл

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots}{(2m)(2m-2)\cdots} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Теперь зная заметим что интеграл убывает с возрастанием n т.к. $\sin x < 1$:

$$\sin^{n+1} x < \sin^n x < \sin^{n-1} x$$

$$J_{n+1} < J_n < J_{n-1}$$

Подставим интегралы, оценим число π:

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$$

Упростив получаем

$$\frac{1}{2m+1}\left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2m}\left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2$$

Теперь рассмотрим разность и покажем что последовательности идут к одному и тому же пределу

$$0 \le a_m - b_m = \left(\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1}\right) = a_m\frac{1}{2m} \to 0$$

Откуда предел последовательностей существует и равен числу $\pi/2$

8.6.2 Интегральные неравенства Гельдера и Коши-Буняковского

Неравенство Гельдера:

$$x_i, y_i \ge 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^p)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

Перепишем их в интегральной форме, расписав интеграл через суммы Римана по определению, и заметив что $\Delta x_i = \Delta(x_i)^{1/p} \cdot \Delta(x_i)^{1/q}$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k \le \lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)^p\Delta x_k\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)^q\Delta x_k\right)^{1/q}$$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int\limits_a^b f(x)^p dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b g(x)^q dx\right)^{1/q}$$

Если $p, q = 2$, то это называется неравенством Коши-Буняковского

8.6.3 Лемма Римана Лебега

---

def : Интеграл от комплексной функции

$$u(x), v(x) \in \Re[a,b], \quad f(x) = u(x) + iv(x), \quad f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\int\limits_a^v f(x)dx = \int\limits_a^b u(x)dx + i\int\limits_a^b v(x)dx$$

Утверждение

$$f \in \Re[a,b], \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Доказательство

Рассматриваем интеграл, пользуясь формулой Эйлера, а так же тем что реальная часть модуля равна модулю:

$$\sqsupset \quad \int_a^b f(x)dx = C = |C|e^{i\varphi} \Rightarrow |C| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = Ce^{-i\varphi} =$$

$$= Re(Ce^{-i\varphi}) = Re(\int_a^b f(x)e^{-i\varphi}dx) = \int_a^b Re(f(x)e^{-i\varphi})dx \leq \int_a^b |f(x)e^{-i\varphi}|dx$$

Лемма Римана Лебега

$$f \in \Re[a,b], \quad \omega \to \pm\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx \to 0$$

Доказательство:

Повторяем уже опробованный трюк с представлением интеграла в виде суммы интегралов на каком то разбиении, вычитаем минимумы и оцениваем обе суммы по модулю:

$$m_k = \inf_{f(x)\in[x_{k-1},x_k]}$$

$$\int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)e^{i\omega x}dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - m_k)e^{i\omega x}dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k e^{i\omega x}dx$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - m_k)e^{i\omega x}dx \Rightarrow |S_1| \leq \sum_{k=1}^n |\omega(f,[x_{k-1},x_k])e^{i\omega x}| \to 0$$

Теперь пользуясь критерием Дарбу через колебания замечаем что первая сумма бежит к нулю, вторую сумму оцениваем, вынося инфемумы за знак интеграла:

$$|S_2| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k e^{i\omega x}dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\omega x}dx\right| \leq \sum_{k=1}^n |m_k| \int_{x_{k-1}}^{x_k} |e^{i\omega x}|dx$$

Затем проинтегрировав выражение заметим, что числитель не превосходит по модулю двойки, затем покажем что при любом определенном разбиении при $\omega \to \infty$ вторая сумма бежит к нулю

$$\sum_{k=1}^n |m_k| \int_{x_{k-1}}^{x_k} |e^{i\omega x}|dx = \sum_{k=1}^n |m_k| \frac{|e^{i\omega x}|}{\omega}\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k} \leq \sum_{k=1}^n m_k \frac{|e^{i\omega x_k}| + |e^{i\omega x_{k-1}}|}{\omega} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2m_k}{\omega}$$

Поскольку для нашего конкретного разбиения $\sum\limits_{k=1}^n m_k = const$, то сумма бежит к нулю

$$\forall P,\ \forall\varepsilon \quad \exists\delta > 0 : \quad |\omega| > \delta \Rightarrow \int_a^b f(x)e^{i\omega x}dx = S_1 + S_2 \leq \varepsilon$$

8.6.4 Геометрические приложения определенного интеграла

---

def : Аддитивной функцией промежутка называется такая функция, что:

$$\Phi : \{[\alpha, \beta]\} \to \mathbb{R}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$$

$$\Phi([\alpha, \beta]) = \Phi([\alpha, \gamma]) + \Phi([\gamma, \beta])$$

Свойства аддитивной функции промежутка

1. $\Phi(\alpha, \alpha) = 0$
2. $\Phi(\alpha, \beta) = -\Phi(\beta, \alpha)$
3. $\Phi(\alpha, \beta) \geq 0, \alpha < \beta$

Утверждение $\Phi(\alpha, \beta)$ - аддитивная функция промежутка на $[a, b]$
Тогда если $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $f(x) \in \Re[a, b]$

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leq \Phi(\alpha, \beta) \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \Rightarrow \Phi(a, b) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Доказательство

Доказывается легко через расписывание сумм на разбиении ($\sqsupset P$ - разбиение), тогда слева и справа оказываются верхние и нижние суммы Дарбу

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b, \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$$m_k \Delta x_k \leq \Phi(x_{k-1}, x_k) \leq M_k \Delta x_k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \Phi(x_{k-1}, x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$f \in \Re[a, b] \Downarrow \lambda(P) \to 0$$

$$\int\limits_a^{\bar{b}} f(x)dx \leq \Phi([a, b]) \leq \int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

a) **Длина спрямляемой кривой**

$$\varphi : [\alpha, \beta] \ \textit{непр} \ \to \mathbb{R}^n, \quad \overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \varphi(t), \quad x_k(t) \in C[a, b]$$

φ называется путём (в случае биекции простым), где $r(t)$ - функция расстояния до точки на кривой $\varphi(t)$ ($\varphi(t)$ называется носителем пути)

Гладким путем называется $\overline{r}(t) \in C[a, b]$

$$\dot{\overline{r}} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta \overline{r}(t)}{\Delta t}$$

def : Длинной кривой называется предел ломаной при ранге разбиения стремящемся к нулю:

$$S(L) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} ||\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t-i)||$$

Если предел существует, кривая называется спрямляемой

Аддитивность длин спрямляемых кривых

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ t_0 \in [a,b], \Gamma_1 = \varphi(a,t_0), \quad \Gamma_2 = \varphi(t,b), \quad \Gamma = \varphi(a,b)$$

Если Γ_1, Γ_2 - спрямляемые, то Γ спрямляема, причем $S(\Gamma_1) + S(\Gamma_2) = S(\Gamma)$. Доказывается по определению аддитивной функции промежутка и спрямляемой кривой

Утверждение о скорости и пути

$$\varphi \in C^1[a,b], \quad L = \varphi(a,b) \Rightarrow S(L) = \int_a^b ||\dot{\overline{r}}||dt, \quad ||v|| = ||\dot{\overline{r}}||$$

Доказывается через аддитивность длины кривой и верхние и нижние интегралы Дарбу прижиманием сверху и снизу максимальными скоростями

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} ||v||(b-a) \leq S(L) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} ||v||(b-a)$$

Длина кривой в полярных координатах, важно: φ не путь!

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow ||v|| = \sqrt{\dot{(x)}^2 + \dot{(y)}^2} =$$

$$= \sqrt{(\dot{(r)}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi))^2 + (\dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi))^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}$$

Далее заметим, что вместо прямоугольников в классических суммах Дарбу здесь нужно провести рассуждения с маленькими цилиндрами длины dx площадью $\pi f^2(\xi_k)$

$$\boxed{S(L) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}d\varphi \qquad (8)}$$

Лекция 5

b) **Площадь криволинейной трапеции**

Рассмотрим связное множество $D \subset \mathbb{R}^2$

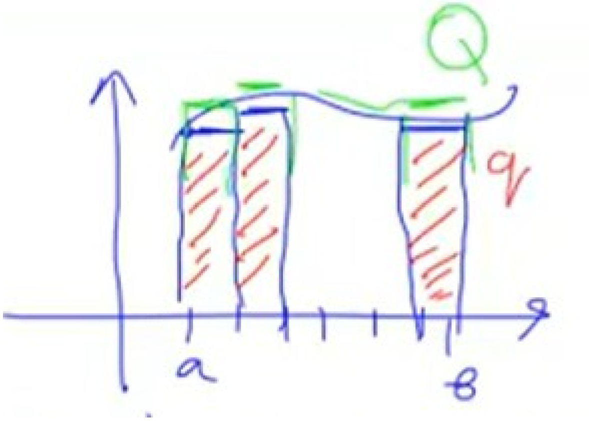
---

def : Нижней площадью $\underline{S}(D) = \sup S(q)$ называем максимальный по площади подмногоугольник множества D, Верхней площадью $\overline{S}(D) = \inf(S(Q))$ назовем минимальный описанный многоугольный вокруг D. Если $\underline{S}(D) = \overline{S}(D)$, то будем говорить что D квадрируема и $S(D) = \overline{S}(D) = \underline{S}(D)$

Свойства:

1) $D = D' \cup D'', D' \cap D'' = \varnothing \Rightarrow S(D) = S(D') + S(D'')$
2) $D' \subset D \Rightarrow S(D') \leq S(D'')$
3) $S(D) \geq 0$

Заметим что площадь криволинейной трапеции - площадь под графиком функции, где верхние и нижние суммы Дарбу соответствуют верхним и нижним площадям, так же очевидно является аддитивной функцией промежутка



---

def :

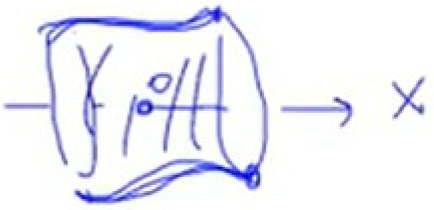
$$\begin{cases} \int\limits_a^b f(x)dx - \text{Алгебраическая площадь} \\ \int\limits_a^b |f(x)|dx - \text{Собственная площадь} \end{cases}$$

---

c) **Объем тела вращения**

---

def : Определим $V(D)$ аналогично площади $S(D)$ - совпадение описанных и вписанных объемов многогранников, проводим аналогичные рассуждения про объем тела вращения графика функции вокруг оси

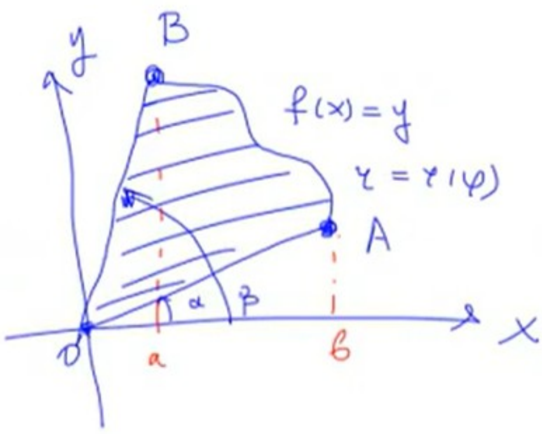


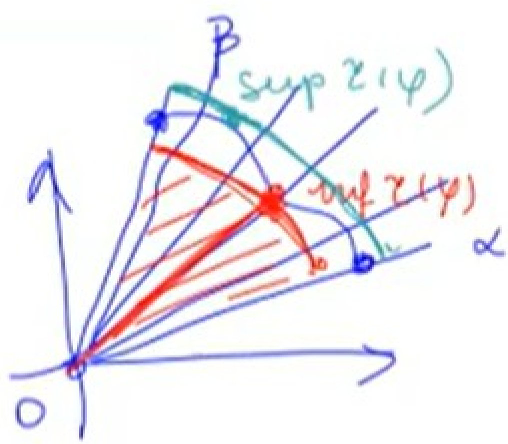
$$(b-a)\pi(\inf_{x\in[a,b]} f(x))^2 \le V(a,b) \le \pi(\sup_{x\in[a,b]} f(x))^2(b-a) \Rightarrow V(a,b) = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx \tag{9}$$

d) **Площадь криволинейного сектора**

$$f:[a,b]\to\mathbb{R},\quad f\in C[a,b]: \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \quad y = f(x) \Leftrightarrow r = r(\varphi)$$

3





Аналогично рассматриваем максимальный вписанный и минимальный описанный сектора, где площадь сектора $S = r^2\varphi/2$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi \tag{10}$$

8.6.5 Гиперболические функции

Будет скоро (наверное, когда оптимизирую производство своих рисунков)

8.7 Несобственные интегралы

8.7.1 Несобственные интегралы первого рода

---

def :

$$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \forall b > a f \in \Re[a, b]$$

Несобственным интегралом первого рода называется

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(x)$$

В том случае, если такой предел существует и конечный, интеграл называется сходящимся. Заметим, что в таком случае "хвост"интеграла должен стремиться к нулю:

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = 0$$

Если предел несобственного интеграла первого рода не существует или бесконечен, то интеграл называют расходящимся.

Если $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, то интеграл определяется аналогично

Для существования интеграла с бесконечными пределами необходимо, чтобы функция была интегрируема на всем множестве $\mathbb{R}$ существовали небесконечные оба выше описанных предела:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

---

def : Интегралом в смысле главного значения (интегралом в случае Коши) называется:

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$$

Замечание:

$$\exists \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \exists v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\nexists \in \mathbb{R} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \nexists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Лекция 6

Лекция 7

Часть IX

Ряды

9.8 Основные числовые понятия

9.8.1 Определения

---

def : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a_n - общий член ряда

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ - частичная сумма ряда, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_n$ - остаток ряда

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_n = S_n$, Если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, то ряд называют сходящимся, если $\nexists$ или ∞ - расходящимся

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ При q < 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{11}$$

$$\exists \lim_{n\ ri\infty} = \frac{1}{1-q} = S$$

При q > 1 расходится

Необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$$

Но не достаточное условие

Пример: Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad 0 < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

9.8.2 Простейшие свойства и условия сходимости числовых рядов

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходящиеся ряды

   $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + \lambda b_n)$ - так же сходятся

   a_n, b_n - расходятся $\Rightarrow \boxed{?}$

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm 1 + q^n)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ - расходится

$$\sqsupset \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) - \text{ пусть сходится, разобьем на пару:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n + (-b_n))$$

2. Сгруппированные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \Rightarrow \underline{a_1 + a_2 + a_3 \cdots a_m}_{A_1} + a_{m+1} \cdots$$

Утверждение 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_k \text{ сх} \tag{12}$$

Доказательство

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} A_k = a_1 + a_2 \cdots + a_{n_m} = S_{n_m} \to S = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Обратное верно не всегда

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Утверждение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ сх}, \forall k\ \forall n', n'' \quad a_{n'} \cdot a_{n''} \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{сходится к тому же пределу} \tag{13}$$

То есть слагаемые одного знака

Доказательство:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} A_k \to \sigma \ \ \exists$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sigma_{m_0} + a_{nm_0} + \cdots \textit{неполное } A_{m_0+1}$$

$$S_n = \sigma_{m_0} + \underline{O}(A_{m_0+1}) \to \sigma$$

Утверждение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n - cx, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \exists C > 0 : \forall k |\{a_{n_k}\}| < C, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n cx \tag{14}$$

Доказательство:

Выносим $\sup a_{n_m}$ в остатке суммы: $S_n = \sigma_{m_0} + a_{n_m} \dots \leq \sigma_{m_0} + C \sup a_{m_0} \to \sigma$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n cx \quad \forall m = const \Leftrightarrow r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_n\ cx$$

Доказательство

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_m + r_m \to S_m + r_m \Rightarrow r_m = S - S_m = const$$

Замечание: это свойство позволяет при изучении сходимости ряда выбрасывать из него конечное число слагаемых, что не скажется на сходимости ряда

Следствие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cx \Leftrightarrow r_m \to 0, m \to \infty$$

$$n \to \infty \Rightarrow S - S_m = r_m \Rightarrow r_m = 0$$

Обратное доказывается аналогично

4. **Критерий Коши**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cx \Leftrightarrow \exists \in \mathbb{R} \lim_{n\to\infty} S_n \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N\ \forall p > 0 |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \tag{15}$$

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\ cx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cx$$

Доказательство

Записать критерий Коши

9.9 Знакопостоянные ряды

Знакопостоянными рядами считаем те, которые стабилизируются начиная с какого то момента

9.9.1 Интегральный признак

$$a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Критерий сходимости знакопостоянного ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$- сходится $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ограничена сверху

Доказательство:

Функция монотонная возрастает и ограничена сверху, следовательно существует конечный предел S_n

Интегральный признак Коши

$$f : [0, +\infty] \to [1, +\infty] \ \ \forall n \ f(n) = a_n \Rightarrow \exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Доказательство:

$$f \textit{неубывающая} \ \Rightarrow \forall b > 1 \ \ f \in \Re[a, b]$$

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx \leq f(n) = a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Далее если сходится ряд, то интеграл ограничен, соответственно сходится

Если сходится интеграл, то $S_n + 1$ ограничена сверху $\Rightarrow$ сходится по свойствам рядам

Геометрическая интерпретация - функция и верхняя сумма Дарбу $\Rightarrow$ *Верхние треугольники составляют не более чем* a_1

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \begin{cases} p > 1 \ \textit{Сходится} \\ p \leq 1 \ \textit{Расходится} \end{cases}$$

Таким образом можно (заменой переменной, например) поджимать ряды интегралом

9.9.2 Признаки сравнения

Первый признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b)n, \forall n \quad 0 \le a_n \le b_n$$

Доказательство:

1. b_n сходится $\Rightarrow a_n$ ограничено, сходится
2. a_n расходится $\Rightarrow b_n$ расходится - неограничено
3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \Rightarrow$ сходимость одинаковая

Второй признак сравнения :

$$a_n \sim k \cdot \frac{1}{n^p} \Leftrightarrow \qquad \textit{Сходимости аналогчины}$$

Третий признак сравнения

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad a_n, b_n > 0$$

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \;\, cx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\, cx$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\, pacx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \;\, pacx$$

9.9.3 Признаки Даламбера и Коши

Признак Даламбера

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$

1. $d < 1 \;\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $d > 1 \;\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

Доказательство:

$$\sqsupset d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} <, \quad \exists \forall N \ \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q^{n+1}}{q_n} \Rightarrow \textit{ По третьему признаку сравнения сходится}$$

$\boxed{\text{Важно: q} < 1}$ Обратное доказывается аналогично

Признак Коши

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$:

1. $k < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх
2. $k > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх
3. $k = 1 \Rightarrow \boxed{?}$

Доказательство:

Основывается на третьем признаке сравнения:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \exists\ \forall n > N \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow a_n \leq q^n$$

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится $\Rightarrow$ по первому признаку сходимости Обратное доказывается аналогично

Непредельная форма Даламбера Коши

Аналогичны, но без пределов

Лекция 8

9.9.4 Признаки Куммера, Раабе, Бертрана, Гаусса

Признак Куммера

$$\forall n \ \{c_n\}^{\infty}, c_n > 0$$
$$\textit{Если } \exists N \ \ \forall n \quad \varkappa_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n-1}$$

1. $\varkappa_n \geq q > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{сх}$
2. $\varkappa_n \leq 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расх $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ расх

Доказательство:

$$N = 1, \ \forall n \geq N \quad \sqsupset \varkappa_n \geq q > 0$$

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq q a_{n+1} > 0$$

$(c_n a_n)^{\infty}$ *монотонно убывает, положителен* $\Rightarrow$ *Существует конечный пределе* $c_n a_n$

$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq q a_{n+1} > 0 \Rightarrow$ *Поджат сверху* $c a_n$ *по первому признаку сходится*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \ \textit{расх} \ \varkappa_n \leq 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n} \tag{16}$$

По третьему признаку сходится

Предельная форма

Если существует и конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa_n = \varkappa$, то

1. $\varkappa > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $\varkappa < 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$расх

Следствия

$$c_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \textit{расх} \quad \varkappa_n \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} \Rightarrow \frac{1}{a} - 1 > 0 \ \textit{сх, иначе расходится}$$

Гармонический ряд

$$c_n = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{расходится}$$
$$\varkappa_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1$$

Признак Раабе (предельная форма):

Если существует и конечный $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, иначе расходится $(n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \rho_n)$

$\boxed{\text{Признак Раабе сильнее Даламбера(определенность при единице)}}$

Признак Бертрама

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \ln n\rho_n = \beta \Rightarrow \begin{cases} \beta > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{сходится} \\ \beta < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{расходится} \end{cases}$$

Признак Гаусса

$$\exists N\ \forall n > N$$
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \theta_n \textit{ огранчиена}$$

1. $$\boxed{\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_n\ \textit{сх}} \qquad (17)$$

2. $$\boxed{\lambda < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_n\ \textit{расх}} \qquad (18)$$

3. $$\boxed{\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mu > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \textit{сх} \\ \mu < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \textit{расх} \end{cases}} \qquad (19)$$

Доказательство

1, 3 $\Rightarrow$ очевидно по признаку Даламбера (см. стр. 32)

2 $\Rightarrow \rho_n = \mu + \frac{\theta_n}{n^{\varepsilon}} \Rightarrow$ признак Раабе (см стр. 35)

$$\beta_n = \ln n(\rho_n - 1) = \ln n\frac{\theta_n}{n^{\varepsilon}} \Rightarrow \beta < 1 \textit{ряд расходится}$$

9.10 Знакопеременные ряды

Нельзя найти такое N, чтобы $\forall n > N \quad a_n$ имеет один и тот же знак

---

def : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a(t)=a_n \quad t\in[n,n+1] \quad \forall x \ \in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}:\ x\in[n,n+1)$$

Покажем, что сходимость ряда равносильна сходимости кусочно непрерывного $\int\limits_1^{\infty} a(t)dt$

Утв :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} a(t)dt$$

Доказательство

$$(\Rightarrow)\ \exists \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\int\limits_1^{x} a(t)dt = S_{n-1} + a_n(x-n), \quad 0\le(x-n)\le 1 \to a_n(x-n)\to 0 \Rightarrow\ \exists \int\limits_1^{\infty} a(t)dt = S$$

$$(\Leftarrow)\ \ \exists \int\limits_1^{\infty} a(t)dt \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists A>1 \forall\ \ x'x''>A\ \ |\int\limits_{x'}^{x''} a(t)dt|<\varepsilon$$

$$\sqsupset x'=n, \quad x-n+p\ \ \forall p>0, N=[A]$$

$$\int\limits_n^{n+p} a(t)dt = |S_{n+p}-S-n| = |\sum_{k=n}^{n+p-1} a_k| < \varepsilon \Rightarrow \textit{По критерию Коши}$$

Признак Дирихле

$$\lessdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

$$\begin{cases} \exists C\ \ \forall N\ \ |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \le C \\ b_n \textit{монотонно убывает} \\ b_n \to 0 \end{cases}$$

Доказательство

$$a_n \to a(t), \quad b_n \to b(t), \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} a|t|b|t|dt$$

$$\left|\int\limits_1^{x} a(t)dt\right| = |A_{n-1}+a_n(x-n)| \le |A_{n-1}| + |a_n| \le C+2C = 3C(|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \le 2C)$$

$$\Rightarrow\ \ \forall x\ \ \ \left|\int\limits_1^{x} a(t)dt\right| \le 3C$$

Но b_n бежит к нулю, значит по признаку Дирихле $\int\limits_1^{\infty} a(t)b(t)dt$ сходится

9.10.1 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

---

def :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n, b_n \geq 0 \ \ \forall n$$

Называется знакочередующимся рядом (Рядом Лейбница)

Признак Лейбница

Если $b_n \to 0$, то знакочередующийся ряд сходится

Доказательство:

$$\begin{cases} a_n = (-1)^{n+1} \\ b_n = b_n \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2+(-1)^n}{n} \quad \textit{Ряд Лейбница}$$

Монотонность отсутствует $\Rightarrow$ признак Лейбница **не работает**

Теорема об остатке знакочередующегося ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ сходится $\Rightarrow \quad r_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k = (-1)^{m+1}b_{m+1}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 1$

Доказательство:

Покажем, что сумма ряда не превосходит первого члена и положительна:

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + b_{2k+1} - b_{2k+2} + \cdots$$

Заметим, что все сгруппированные ряды сходятся и $b_n \to 0$ монотонно $\Rightarrow$ попарно сгруппируем b_n

$$\sum_{k=1}^{n}A_k = \sum_{k=1}^{n}b_{2k+1} - b_{2k+2}, \quad A_k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}A_k \geq 0 \Rightarrow A_k \to S$$

Теперь сгруппируем со сдвигом на 1 элемент

$$\sum_{k=1}^{n}A_k = \sum_{k=1}^{n}-b_{2k} - b_{2k+1} \ \leq A_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}A_k \to S \Rightarrow 0 \leq S \leq b_1,$$

Рассмотрим r_m как последнюю сумму $\Rightarrow 0 \leq r_m < b_{m+1} \Rightarrow r_m = \theta b_{m+1}, \quad \theta \in [0,1]$
