Exercice 8 - *Extrait d'examen* -

Soit :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de S, que peut-on en déduire sur l'inversibilité de S ?
2. Par la méthode de Cramer, résoudre l'équation $Sx = b$, on donnera les calculs intermédiaires (la solution est à coefficients entiers, vérifier le résultat).
3. Par la méthode de Cramer, déterminer $U = S^{-1}$, on donnera les calculs intermédiaires.
4. Utiliser la matrice U pour retrouver la solution de $Sx = b$.

1, $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(S) = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \times ((4 \times 4) - (2 \times 4)) - 2 \times ((2 \times 4) - (0 \times 4)) + 2 \times ((2 \times 2) - (0 \times 4))$

$= 2 \times 8 - 2 \times 8 + 2 \times 4$

$\boxed{= 8}$

$\det(S) \neq 0$, alors S est inversible

2, Calculons Δ_1, Δ_2, Δ_3

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 12 & 4 & 4 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4 \times (16 - 8) - 2 \times (48 - 40) + 2 \times (24 - 40).$

$= 32 - 16 - 32$

$\boxed{= -16}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(48-40) - 4(8) + 2\times(20)$$

$$= 16 - 32 + 40$$

$$\boxed{= 24}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(40-24) - 2\times(20) + 4(4)$$

$$= 16 - 40 + 16$$

$$\boxed{= 8}$$

Donc les solution de l'équation sont :

$$y_1 = \frac{D_1}{det(S)} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$y_2 = \frac{D_2}{det(S)} = \frac{24}{8} = 3$$

$$y_2 = \frac{D_3}{det(S)} = \frac{8}{8} = 1.$$

$$S = \{(-2, 3, 1)\}.$$

3, $U = S^{-1}$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)}\left[\mathrm{Com}(S)\right]^T$$

Calculons $\mathrm{Com}(S)$.

$$\mathrm{Com}(S) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc $S^{-1} = \frac{1}{\det(S)}\left[\mathrm{Com}(S)\right]^T$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4, la solution $Sx = b$ est $x = S^{-1} \times b \sim x = al$.

On a $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $al\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

donc $x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 - 12 + 0 \\ -8 + 24 - 10 \\ 4 - 12 + 10 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien $x = al$.