Chapitre IX

Vecteurs propres - Valeurs propres

IX.1 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice

Définition IX.1.1 *On dit que* $\lambda^* \in \mathbb{K}$ *est une* valeur propre *de* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *s'il existe un vecteur* $V \in \mathbb{K}^n$*,* $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ *tel que*

$$AV = \lambda^* V \text{ ce qui s'écrit encore : } (A - \lambda^* Id)V = 0_{\mathbb{K}^n} \tag{IX.1.1.1}$$

Dans ce cas on dit que V est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ^* et que (λ^*, V) est un couple propre de A. On définit alors **l'espace propre associé à la valeur propre** λ^* par :

$$E_{\lambda^*} = \{X \in \mathbb{K}^n / AX = \lambda^* X\}$$

On prouve facilement que E_{λ^*} est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple IX.1.2

$$\textit{Soit } A = \begin{pmatrix} -29 & 12 & 8 \\ -50 & 21 & 14 \\ -40 & 16 & 11 \end{pmatrix} \textit{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors on vérifie sans peine que $AV = 3V$ *et donc* 3 *est une valeur propre de* A *à laquelle on peut associer le vecteur propre* V*.*
On peut déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3*, il faut donc résoudre :* $AX = 3X$ *soit encore* $(A - 3Id)X = 0$ *:*

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -32x_1 & + & 12x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -50x_1 & + & 18x_2 & + & 14x_3 & = & 0 \\ -40x_1 & + & 16x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\sim &\left\{\begin{array}{rcrcrcll} -8x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ -25x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 7L_3 \\ -5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 & \end{array}\right. \\
\sim &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 10x_1 & - & 5x_2 & & & = & 0 \\ -5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\sim &\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & 2x_1 \\ x_3 & = & 5x_1 - 2x_2 \\ & = & x_1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où donc :

$$E_3 = \{(x_1,\ 2x_1,\ x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Soit encore :

$$E_3 = \{\alpha V^3 | \alpha \in \mathbb{R}\} \textit{ avec } V^3 = (1, 2, 1)$$

(V^3) *est donc une base de* E_3 *et donc* $dim(E_3) = 1$*. (On peut bien entendu - en fait - prendre n'importe quel multiple non nul de* V^3 *pour former une base de* E_3*).*

On a donc :

Proposition IX.1.3

- *λ^* est donc valeur propre de A si et seulement si il existe V non nul tel que : $(A - \lambda^* Id)V = 0$.*
- *λ^* est donc valeur propre de A si et seulement si l'équation $(A - \lambda^* Id)X = 0$ admet des solutions non triviales (c'est à dire non nulles).*
- *D'après la proposition (II.3.3) page 15, λ^* est donc valeur propre de A si et seulement si $(A - \lambda^* Id)$ n'est pas inversible et donc si seulement si $det(A - \lambda^* Id) = 0$.*

Chapitre X

Diagonalisation des matrices

X.1 Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on vu dans la proposition (IX.1.3) page 56 que $\lambda^* \in \mathbb{K}$ était valeur propre de A si $A - \lambda^*\, Id_n$ n'est pas inversible. On a a donc d'après le théorème (VII.4.1) 49 :

Proposition X.1.1 *$\lambda^* \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si et seulement si :*

$$det(A - \lambda^*\, Id_n) = 0$$

Ceci nous amène donc naturellement à :

Définition X.1.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ On définit le* **polynôme caractéristique** *de A par :*

$$P_A(\lambda) = d\acute{e}t\ (A - \lambda\, Id_n).$$

Par récurrence et en utilisant la définition du déterminant donnée en (VII.1.1), on montre facilement que le polynôme caractéristique de A est de degré n et que son terme de plus haut degré est $(-1)^n\, \lambda^n$. Par ailleurs il est immédiat en prenant $\lambda = 0$ que :

$$P_A(0) = det(A)$$

On a donc :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont donc toutes les racines de son polynôme caractéristique !

Attention même si A est une matrice réelle, il est possible qu'elle admette des valeurs propres complexes non réelles !
$P_A(\lambda)$ étant un polynôme de degré n, il admet dans $\mathbb{C}$, n racines (qui ne sont pas nécessairement distinctes) : Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \dots, (\lambda - \alpha_n) \tag{X.1.2.1}$$

C'est ce qu'on nomme le théorème de d'Alembert.
Mais en regroupant les racines égales, cela s'écrit encore (de façon, moins compliqué qu'il n'y parait) : il existe des entiers strictement positifs :

$$p, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p \text{ tels que } \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p = n$$

et il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tous distincts tels que l'on puisse écrire :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\gamma_1}(\lambda - \lambda_2)^{\gamma_2}, \dots, (\lambda - \lambda_p)^{\gamma_p}. \tag{X.1.2.2}$$

Par exemple si :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1)^{10}\lambda(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1+2i)) \\ &\quad (\lambda-(1-2i))(\lambda-(1-2i))(\lambda-(1-2i))(\lambda-9) \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$P_A(\lambda) = (-1)^{10}(\lambda-0)(\lambda-3)^2(\lambda-(1-2i))^3(\lambda-(1+2i))^3(\lambda-9) \tag{X.1.2.3}$$

Définition X.1.3 *La puissance γ_i qui apparaît dans (X.1.2.2) est par définition la* multiplicité de la valeur propre λ_i*. les valeurs propres de multiplicité* 1 *sont dites* simples*, les valeurs propres de multiplicité* 2 *sont dites* doubles*, etc...*

Ainsi dans (X.1.2.3) 3 est de multiplicité 2, $(1-2i)$ et $(1+2i)$ sont de multiplicité 3 et 0 et 9 sont simples.
On peut maintenant formuler :

Proposition X.1.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ alors :*

- *A admet dans $\mathbb{C}$ exactement n valeurs propres, chaque valeur propre étant comptée autant de fois que sa multiplicité.([1])*
- *A admet dans $\mathbb{K}$ au plus n valeurs propres. distinctes.([1])*

Pratiquement, pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, on calcule le polynôme caractéristique et ses racines λ_i sont les valeurs propres de la matrice. La recherche des vecteurs propres se fait en résolvant alors le système $AY_i = \lambda_i Y_i$.

Exemple X.1.5 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$*, alors* $P_A(s) = \begin{vmatrix} 5-s & 2 \\ 2 & 2-s \end{vmatrix}$ *Soit donc*
$P_A(s) = (5-s)(2-s) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6)$.
On obtient donc 2 valeurs propres réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 6$, qui sont donc simples. On détermine les vecteurs propres associés :

- $\lambda = 1$,
  $(A - \lambda I)Y = 0 \sim \left\{ \begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{array} \right. \sim \{y_2 = -2y_1$
  Le sous-espace propre associé E_1 est donné par :
  $E_1 = \{\alpha(1,-2) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ *qui est de dimension* 1*, engendré par* $v_1 = (1,-2)$.
- $\lambda = 6$, $(A - \lambda I)Y = 0 \sim \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = 0 \\ 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{array} \right. \sim \{y_1 = 2y_2$
  Le sous-espace propre associé E_6 est donné par :
  $E_6 = \{\alpha(2,1) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ *qui est de dimension* 1*, engendré par* $v_6 = (2,1)$.

On constate sur cet exemple toutes les propriétés qui ont été énoncées : p_A est un polynôme de degré 2, il existe toujours une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée. (Si votre calcul de vecteurs propres vous conduisait à la seule solution $y_1 = y_2 = 0$, ce ne serait pas possible, vous auriez commis une erreur de calcul auparavant).

Exemple X.1.6 *Soit à nouveau la matrice A considérée dans l'exemple (IX.1.2) page 55 :*

$$A = \begin{pmatrix} -29 & 12 & 8 \\ -50 & 21 & 14 \\ -40 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

1. En particulier si A est une matrice réelle, A peut admettre des valeurs propres complexes non réelles, si on se place alors dans $\mathbb{C}$, alors "on a toutes les valeurs propres" de A, par contre si on reste dans $\mathbb{R}$, on n'est pas assuré d'avoir toutes les valeurs propres de A.

Alors :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -29-\lambda & 12 & 8 \\ -50 & 21-\lambda & 14 \\ -40 & 16 & 11-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & 8 \\ 6-2\lambda & 21-\lambda & 14 \\ 3-\lambda & 16 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 8 \\ 2 & 21-\lambda & 14 \\ 1 & 16 & 11-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 12 & 8 \\ 0 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)((\lambda+3)(\lambda-3)+8) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

Les valeurs propres de A sont donc 3 (que l'on connaissait déjà), -1 et 1, elles sont toutes réelles et il n'y en a pas d'autre !
Notons ici tout particulièrement la première transformation effectuée pour calculer le polynôme caractéristique, il n'est pas conseillé en général de développer "brutalement" le polynôme caractéristique*, ainsi dans notre cas on obtiendrait alors un polynôme de degré 3 dont il faudrait déterminer les racines ..., la transformation utilisée fait ici directement apparaître une racine et on a donc ici au pire une équation du second degré à résoudre ! Malheureusement, il n' y pas de méthodes miracles pour trouver les transformations à effectuer.*

Il est possible de prouver :

Proposition X.1.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A de multiplicité γ, soit alors E_λ le sous-espace propre associé alors :*

$$1 \leq dim(E_\lambda) \leq \gamma$$

En particulier si la valeur propre λ est simple l'espace propre associé est de dimension 1.

X.2 Diagonalisation

Définition X.2.1 *On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans K s'il existe une matrice $\Lambda \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ diagonale et une matrice P inversible telle que :*

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{ou ce qui est équivalent} \quad \Lambda = P^{-1}AP \tag{X.2.1.1}$$

C'est à dire que A doit être semblable *à une matrice diagonale.*

On a déjà vu cela dans l'exemple en (VI.3.5) page 43. Si on exhibe une matrice diagonale Λ et une matrice inversible P toutes deux d'ordre n telles que (X.2.1.1) soit vérifiée, on dit que l'**on a diagonalisé** A ou encore qu'on a réduit A à une forme diagonale.
Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, supposons que l'on puisse former une base

$$\mathcal{B} = (V^1, V^2, \ldots, V^n)$$

de $\mathbb{K}^n$ avec des vecteurs propres de A. Soit alors ϕ l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui même définie par $\phi(X) = AX$ ([2]). alors on a :

$$\phi(V^1) = \lambda_1 V^1, \quad \phi(V^2) = \lambda_2 V^2, \ldots, \phi(V^n) = \lambda_n V^n$$

2. A est donc la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^n$

où bien entendu :
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres associés à $V^1, V^2, \ldots, V^n$. Il s'en suit immédiatement que :

$$\Lambda = mat(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et on a donc bien effectué la diagonalisation car d'après le théorème du changement de base (VI.3.1) on a : $\Lambda = P^{-1}AP$ où $P = Pass(\mathcal{B}_c, \mathcal{B})$
Réciproquement, si il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P toutes deux d'ordre n telles que l'équation X.2.1.1 soit vérifiée, cela s'écrit encore :

$$AP = PD$$

et pour $1 \leq k \leq n$ alors en termes de colonnes on a $(AP)^{(k)} = (PD)^{(k)}$ soit donc d'après la proposition (I.5.6) page 7 : $AP^{(k)} = PD^{(k)} = \lambda_k P^{(k)}$ et il s'en suit que $P^{(k)}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k. Et comme la matrice P est inversible $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)}$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. On a donc démontré :

Théorème X.2.2 *Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ est qu'il existe une base $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $AY_i = \lambda_i Y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.*

Et il est alors fondamental de souligner :

Remarque X.2.3 *On a donc alors :*

$$\Lambda = P^{-1}AP \quad ou \quad A = P\Lambda P^{-1}$$

$$avec \quad P = Pass(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}, \mathcal{B})$$

Où $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ([3]).
Et où :

$$\Lambda = mat(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Attention l'ordre des vecteurs propres dans $\mathcal{B}$ doit correspondre à l'ordre des valeurs propres sur la diagonale de Λ !

ATTENTION ! Comme il a déjà été dit une matrice carrée réelle est un "cas particulier" de matrice complexe et peut donc admettre une ou plusieurs valeurs propres non réelles, il peut alors se trouver qu'une telle matrice réelle soit diagnonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$! On verra ainsi en exercice que la matrice d'une rotation centrée à l'origine d'angle $\theta(\neq k\pi)$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, on peut en particulier vérifier que ses valeurs propres ne sont pas réelles.
En fait on peut démontrer :

Théorème X.2.4 *Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable dans $\mathbb{K}$ est que toutes ses valeurs propres soient dans $\mathbb{K}$ (ce qui est donc automatiquement vérifié, si on se place dans $\mathbb{C}$) et que pour toute valeur propre λ de A la dimension de l'espace propre associé soit égal à la multiplicité de cette valeur propre.*
Dans ces conditions on obtient alors une base de $\mathbb{K}^n$ en réunissant dans une seule famille des bases respectives de tous les espaces propres, on se retrouve donc alors dans la situation du théorème X.2.2 !

3. pour obtenir P il suffit donc d'écrire $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ en colonnes

On en déduit comme cas particulier :

Proposition X.2.5 *Une condition suffisante pour que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable dans $\mathbb{K}$, est qu'elle admette n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ toutes distinctes. Ce qui revient à dire que ses n valeurs propres sont dans $\mathbb{K}$ et sont simples.*

En effet dans ce cas, les valeurs propres sont donc toutes simples et les espaces propres associés de dimension 1 puisque comprise entre 1 et 1 d'après la proposition (X.1.7).

Exemple X.2.6 *Reprenons l'exemple X.1.5 :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \textit{ avec } P_A(\lambda) = (s-1)(s-6)$$

Les valeurs propres sont donc simples et réelles : la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ d'après la proposition (X.2.5). Par ailleurs, soient $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (v^1,\ v^6)$, formée par les vecteurs propres de A et $P = Pass(\mathcal{B}_\mathcal{C}, \mathcal{B})$ alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a (sans calcul) :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple X.2.7 *Soit donc à nouveau la matrice de l'exemple X.1.6*

$$A = \begin{pmatrix} -29 & 12 & 8 \\ -50 & 21 & 14 \\ -40 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

Alors on a vu que :

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Toutes les valeurs propres sont simples, la matrice est donc diagonalisable d'après la proposition (X.2.5). On a vu dans l'exemple IX.1.2 que :

$$E_3 = \{\alpha V^3 | \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{avec } V^3 = (1,2,1)$$

Et facilement on peut trouver que

$$E_{-1} = \{\alpha V^{-1} | \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{avec } V^{-1} = (1,1,2)$$

$$E_1 = \{\alpha V^1 | \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{avec } V^1 = (-2,-5,0)$$

Soit $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit alors en reprenant les notations de (VI.3.5) page 43 (!) :

$$\mathcal{B} = (b^1,\ b^2,\ b^3) = (V^3,\ V^{-1},\ V^1)$$

' et soit $P = Pass(\mathcal{B}_\mathcal{C}, \mathcal{B})$

$$P = Pass(\mathcal{B}_\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci est obtenu sans calcul !
(Cependant le calcul avait été déjà effectué dans l'exemple (VI.3.5) page 43 !)

Exemple X.2.8 ***Une matrice non diagonalisable***
Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 50 & 23 & 9 \\ -34 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & -4 & -2 \\ 50 & 23-\lambda & 9 \\ -34 & -12 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -2 \\ 50 & 5-\lambda & 9 \\ -34 & -10+2\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -2 \\ 50 & 1 & 9 \\ -34 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -2 \\ 50 & 1 & 9 \\ 66 & 0 & 17-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & -2 \\ 66 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((-6-\lambda)(17-\lambda)+132) \\
&= (5-\lambda)(-102-11\lambda+\lambda^2+132) = (5-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+30) = (5-\lambda)^2(6-\lambda)
\end{aligned}$$

Toutes les valeurs propres sont réelles, 6 *est valeur propre simple et* 5 *est valeur propre double (c'est à dire de multiplicité 2).* 6 *étant valeur propre simple la dimension de son espace propre est* 1 *d'après la proposition (X.1.7) (page 59) Par contre, d'après cette même proposition, la dimension de l'espace propre* E_5 *associé à la valeur propre* 5 *est comprise entre* 1 *et* 2*. D'après le théorème (X.2.4)* A *sera donc diagonalisable si et seulement si la dimension de* E_5 *est égale à la multiplicité de* 5 *c'est à dire* 2*.*
Déterminons E_5 *: On doit donc résoudre* $(A-5Id)X = 0$ *soit donc :*

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -11x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 50x_1 & + & 18x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ -34x_1 & - & 12x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + 9L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
\sim &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -11x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \\ -x_1 & & & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\sim &\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_3 & = & -2x_2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc :

$$E_5 = \{(\alpha(0,1,-2)|\alpha \in \mathbb{R}\}$$

Une base de E_5 *est donc* $((0,1,-2))$ *Cet espace est donc seulement de dimension* 1 *; il s'en suit que la matrice* A *n'est pas diagonalisable (ni dans* $\mathbb{R}$ *ni dans* $\mathbb{C}$*).*

Il existe un cas particulier important : celui des matrices symétriques :

Théorème X.2.9 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$*, si* A *est symétrique alors toutes ses valeurs propres sont réelles et de plus* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*.*

FIN