INFO0502 TD1

Exercice 1 Système

$P = \{ A, B, C \}$

$C = \{ \neg, \wedge, \vee \}$

$S = \{), (\}$

$B = P \cup C \cup S$

F : ensemble des mots (formules) f de la forme :

1. $f = X, X \in P$
2. $f = \neg G$ avec $G \in F$
3. $f = (G\alpha H)$ avec $\alpha \in \{ \wedge, \vee \}$ et $G, H \in F^2$

1)	$f = ((A \Rightarrow B) \wedge C)$	invalide (car implication)
2)	$f = B \wedge A$	invalide (manque les parenthèses)
3)	$f = ((A \Leftrightarrow B) \vee A)$	invalide (car équivalence)
4)	$f = ((C \vee A) \vee B)$	valide
5)	$f = \neg A$	valide
6)	$f = \neg (A \vee C)$	valide
7)	$f = (A \neg B)$	invalide (car $\alpha \in \{\wedge, \vee\}$)
8)	$f = \neg (A \Rightarrow B)$	invalide (car implication)
9)	$f = (((B \wedge \neg A) \vee)(\neg C \wedge \neg B))$	invalide (la disjonction est suivie par une parenthèse fermante)
10)	$f = \neg ((A \wedge B) \vee (\neg A \vee B))$	valide

Correction 1) $f = ((\neg A \vee B) \wedge C)$

Correction 2) $f = (B \wedge A)$

Correction 3) $f = (((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee A)$

Correction 8) $f = \neg (\neg A \vee B)$

Arborescence (le 7) correspond à la formule 8 et le 8) correspond à la formule 10) :

```
1)        ( ∧ )
      ( ∨ )       C
    ¬     B
    A
2)    ( ∧ )
    B     A
3)                        ( ∨ )
            ( ∨ )                   A
     ( ∧ )         ( ∧ )
    A   B        ¬       ¬
                 A       B
4)        ( ∨ )
      ( ∨ )       B
    C     A
5)  ¬
    A
6)    ¬              ( ∧ )
     ( ∨ )          ¬     ¬
    A   C           A     C
7)    ¬               ( ∧ )
     ( ∨ )          A     ¬
    ¬    B                B
    A
```

8)

```
            ¬                         (∧)
          (∨)                   (∨)         (∧)
     (∧)       (∨)           ¬     ¬       A     ¬
    A   B     ¬     B        A     B             B
              A
```

3)

estValide(Formule f)
  Si estVariable(f[0]) et taille(f) == 1
    retourner vrai ;
  Si estNegation(f[0])
    retourner estValide(substring(f, 1)) ;
  alpha = getAlpha(f) ;
  Si alpha == -1
    retourner faux ;
  Sinon
    retourner estValide(substring(f, 1, alpha)
      et estValide(substring(f, alpha+1, taille(f)-1) ;

Exercice 2 : Equivalences

F ~ G si et seulement si $\vdash$ (F <=> G)

1. (A <=> B) ~ ((A => B) ∧ (B => A))

A	B	(A => B)	(B => A)	F	G	F <=> G
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

2. (A ∨ (B ∨ C)) ~ ((A ∨ B) ∨ C)   Vrai : associativité du ∨ (cf. annexe 1)
3. (A ∨ (B ∧ C)) ~ ((A ∨ B) ∧ (A ∨ C))   Vrai : distributivité du ∨ sur le (cf. annexe 1)

4. (A => (B => C)) ~ ((A ∧ B) => C)

A	B	C	(A ∧ B)	(B => C)	F	G	F <=> G
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. (B => (A => B)) ~ ((A => B) => (A => C))

A	B	C	(A => B)	(A => C)	F	G	F <=> G

0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

D'après l'annexe 2, si on a :

⊦ (B => (A = > B) SA1

$\overline{\delta}$/(A) = $\overline{\delta}$/(B) = 1 et $\overline{\delta}$/(C) = 0

alors la formule ((A => B) => (A=x)) est fausse

¬⊦ ((B => (A => B)) <=> ((A => B) => (A=x)))

Donc pas d'équivalence logique

Exercice 3 : Formes normales

1. $F = ((A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg C \wedge B)) \sim (\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge B) \sim B \wedge (\neg A \vee \neg C)$

A	**B**	**C**	**$(\neg A \vee \neg C)$**	**F**
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

$FNCD_F = (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$

$FNCD_{\neg F} = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

$FNCC_F = \neg FNCD_{\neg F} = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

2. $F = (((A \wedge \neg B) \vee C) \Rightarrow A)$

A	**B**	**C**	**$(A \wedge \neg B)$**	**$((A \wedge \neg B) \vee C)$**	**F**
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$FNCD_F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

$FNCD_{\neg F} = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

$FNCC_F = \neg FNCD_{\neg F} = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$

3. $F = (\neg(A \Leftrightarrow \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg B))$

A	**B**	**C**	**$(A \Leftrightarrow \neg B)$**	**$\neg(A \Leftrightarrow \neg B)$**	**$(C \wedge \neg B)$**	**F**
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

$FNCD_F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
$FNCD_{\neg F} = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$
$FNCC_F = \neg FNCD_{\neg F} = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

4. $F = (A \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \sim ((A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \sim ((A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)) \sim (A \wedge \neg B)$

$FNCD_F = (A \wedge \neg B)$
$FNCD_{\neg F} = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$FNCC_F = \neg FNCD_{\neg F} = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$

5. $F = (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

C'est une tautologie.
$FNCD_F = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$FNCC_F = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ illogique

Exercice 4 : Formules particulières

1. $F = (A \vee \neg A)$ satisfaisable (tautologie)
2. $F = (A \wedge \neg A)$ insatisfaisable (antilogie)
3. $F = \neg(A \wedge \neg A)$ satisfaisable (tautologie)
4. $F = (A \wedge (A \Rightarrow \neg B))$ satisfaisable (tautologie)
5. $F = (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ satisfaisable (équivaut : A ou non B)
6. $F = (A \Rightarrow (A \vee B))$ satisfaisable (tautologie)
7. $F = (((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ satisfaisable (tautologie)
8. satisfaisable (équivaut : $A \Leftrightarrow B$)
9. $F = ((A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (A \Longleftrightarrow B))$ satisfaisable (ex. : vraie si A et B sont vrais)

INFO0502 TD2

Exercice 1 : Karnaugh

2. $F = ((A \lor C) \Rightarrow \neg(C \land (B \Rightarrow D)))$

A	B	C	D	A v C	$B \Rightarrow D$	$\neg(C \land (B \Rightarrow D))$	F
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	0
	10	0	1	1	0

En rouge : 2^3 valeurs inutiles (correspond à la valeur de $\neg C$)
En bleu: 2^1 valeurs inutiles (correspond à la valeur de $B \land C \land \neg D$)
Donc $F = \neg C \lor (B \land C \land \neg D)$

En bleu et pourpre (rouge+bleu) : 2^2 valeurs inutiles (correspond à la valeur de $B \land \neg D$)
Donc $F = \neg C \lor (B \land \neg D)$

3. $F = ((A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (C \vee (D \Rightarrow (B \Leftrightarrow A))))$

A	B	C	D	$A \Leftrightarrow C$	$B \Leftrightarrow A$	$D \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)$	$C \vee (D \Rightarrow (B \Leftrightarrow A))$	F
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

		AB			
		00	01	11	10
	00	<u>**1**</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>**1**</u>
CD	01	**1**	0	1	**1**
	11	**1**	1	1	**1**
	10	<u>**1**</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>**1**</u>

en rouge : C
en bleu : A
en gras : $\neg B$
en souligné : $\neg D$

Donc $F = A \vee \neg B \vee C \vee \neg D = ((A \vee C) \vee \neg(B \wedge D))$

4. F = $(\neg(A \uparrow D) \downarrow ((C \vee D) \Rightarrow A))$

A	B	C	D	$\neg(A \uparrow D)$	$(C \vee D)$	$((C \vee D) \Rightarrow A)$	F
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

	AB				
		00	01	11	10
	00	0	0	0	0
CD	01	**1**	**1**	0	0
	11	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	0	0
	10	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0

en gras : $D \wedge \neg A$
en souligné : $C \wedge \neg A$

Donc F = $((D \wedge \neg A) \vee (C \wedge \neg A)) = ((D \vee C) \wedge \neg A)$

5. $F = \neg((A \vee B) \Leftrightarrow ((C \downarrow D) \uparrow (B \Rightarrow A))$

A	B	C	D	$(A \vee B)$	$(C \downarrow D)$	$(B \Rightarrow A)$	$((C \downarrow D) \uparrow (B \Rightarrow A))$	$(A \vee B) \Leftrightarrow ((C \downarrow D) \uparrow (B \Rightarrow A)$	F
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

	AB				
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	1
	01	1	0	0	0
	11	**1**	0	*1*	0
	10	**1**	0	*1*	0

en rouge : $\neg A \wedge \neg B \wedge C$
en gras : $\neg A \wedge \neg B \wedge D$
en souligné : $A \wedge \neg C \wedge \neg D$
en italique : $A \wedge B \wedge C$

Donc $F = (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge D) \vee (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Exercice 3/4 : Principe de résolution 1/2

1. si Alice et Bernard sont coupables alors Carlos est coupable
2. si Alice est coupable alors au moins un des deux Bernard ou Carlos est coupable
3. si Carlos est coupable alors Dominique est coupable
4. si Alice est innocent alors Carlos est coupable.

1. $(A \wedge B) \Rightarrow C$
2. $A \Rightarrow (B \vee C)$
3. $C \Rightarrow D$
4. $\neg A \Rightarrow C$

A	B	C	D	1	2	3	4	$1 \vee 2 \vee 3 \vee 4$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \quad \Leftrightarrow \quad C \wedge D$

	AB				
		00	01	11	10
CD	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Exercice 5 : Principe de résolution 3

modus ponens : $\{ A \Rightarrow B, A \} \vDash B$
$A \Rightarrow B$
$\sim \neg A \vee B$
$\sim A \wedge \neg B$ (système inverse)
$\sim \neg B$ (système inverse)
$\sim B$

modus tollens : $\{ A \Rightarrow B, \neg B \} \vDash \neg A$
$A \Rightarrow B$
$\sim \neg A \vee B$
$\sim A \wedge \neg B$ (système inverse)
$\sim B$ (système inverse)
$\sim \neg A$

syllogisme : $\{ A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \} \vDash A \Rightarrow C$
...

Exercice 2 : Théorème de la déduction - Herbrand

1. $\vdash ((A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A)))$
$\vdash \equiv \ \vDash$

schémas d'axiomes SA1 : $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ (cf. annexe 2.4)
$\vDash (A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A))$
$\vDash ((A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A))))$
par modus ponens
$\vDash ((A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A)))$

2. $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$

schémas d'axiomes SA2 : $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ (cf. annexe 2.4)
$\vDash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ *SA1*
$\vDash ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A)))$
par modus ponens
$\vDash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$

INFO0502 TD3

Exercice 1 : Variables Termes Formules

1. F = Q(a) (a constante)
2. F = P(x, y) (x et y libres)
3. F = Q(s(x)) ∧ P(q(s(y)), s(x)) (x et y libres)
4. F = ∀yP(y, z) (y libre, z liée)
5. F = ∃z(P(z, a) ∧ Q(z)) (z liée, a constante)
6. F = Q(y) ∧ (∀x(P(x, z))) (x libre, y liée, z liée)
7. F = ∀y(P(x, y) ∧ ∀xQ(x)) (x liée, y libre)
8. F = ((∃xP(x, v) ⇒ ∀y∃xP(x, y)) ∧ (∃x∀yP(x, y))) ⇒ ∀y∃xP(x, y) (v const, x et y liées ?)
9. F = (P(y) ⇒ ∀zP(z)) ⇒ ((∃xP(x) ⇒ P(y)) ⇒ (∃xP(x) ⇒ ∀zP(z))) (y libre, x et z liées)
10. F = (P(x, y) ⇒ (∃xP(x, r) ∨ R(f(x)))) ⇒ (Q(a, z) ⇒ R(x, z)) (a constante, x liée, r y z libres)

Exercice 2 : Interprétation

1. F = ∀x∀y∀z((R(x, y) ∧ R(y, z)) ⇒ R(x, z)) *vrai*
2. F = ∀x∀y(¬R(x, y) ⇔ (x = y ∨ R(y, x))) *vrai*
3. F = ∀x¬R(x, x) *vrai*
4. F = ∀x∃yR(x, y) *faux si borne supérieure*
5. F = ∀x∃yR(y, x) *faux si borne inférieure*
6. F = ∀x∀y((∃z(R(x, z) ∧ R(z, y))) ⇔ R(x, y)) *faux si non-continu*

D = N, IP = R(x, y) signifie x < y
Vraies : 1, 2, 3, 4 Fausses : 5, 6

D = R, IP = R(x, y) signifie x < y
Vraies : 1, 2, 3, 4, 5, 6

D = R +, IP = R(x, y) signifie x < y
Vraies : 1, 2, 3, 4, 6 Fausse : 5

D = un nombre fini de petits lapins, IP = R(x, y) signifie x est plus mignon que y
Vraies : 1, 2, 3 Fausses : 4, 5, 6 *en fait, certaines sont indécidables*

Exercice 3 : Prénexe

1) ∀x((∃yR(x, g(y, z))) ⇒ ∀yS(z, h(x, y, z)))
∀x((∀y¬R(x, g(y, z))) ∨ ∀yS(z, h(x, y, z)))
∀x∀y(¬R(x, g(y, z)) ∨ S(z, h(x, y, z)))

2) ∀yR(z, y) ⇒ ∀zS(z, y))
∀y(¬R(z, y) ⇒ ∀zS(z, y)))
∀y(¬R(x, y) ⇒ ∀zS(z, y)))
∀y∀z(¬R(x, y) ∨ S(z, y)))

3) ∀z(P(x, y) ⇔ ∃x(P(z, x) ∧ P(x, z)))
∀z((¬P(x, y) ∧ ∀x(¬P(z, x) ∨ ¬P(x, z))) ∨ (P(x, z) ∧ ∃x(P(z, x) ∧ P(x, z))
∀z(∀x((¬P(u, y) ∧ (¬P(z, x) ∨ ¬P(x, z))) ∨ ∃x(P(u, y) ∧ P(z, x) ∧ P(x, z)))
∀z∀x∃w((¬P(u, y) ∧ (¬P(z, x) ∨ ¬P(x, z))) ∨ (P(u, y) ∧ P(z, w) ∧ P(w, z)))
f(z) = w *(skolémisation partielle)*
∀z∀x((¬P(u, y) ∧ (¬P(z, x) ∨ ¬P(x, z))) ∨ (P(u, y) ∧ P(z, f(z)) ∧ P(f(z), z)))

4) ∀x∀y((R(x, y) ∨ ¬S(y, x)) ⇔ ∃zT(x, y, z))

5) ∃x(P(x, y) ⇒ ∃y∀z(P(y, z) ∧ P(z, z)) ⇒ ∀y(P(x, y) ∧ Q(x, y) ⇒ (Q(x, z) ∧ Q(z, z))))

INFO0502 TD4

Exercice 1 : Skolem

$\exists x \exists y \forall z \exists w \forall u \exists v((R(x, y) \Rightarrow ((\neg P(z, u, v)) \vee K(w))) \wedge G(v))$
$\exists x \exists y \forall z \exists w \forall u \exists v((\neg R(x, y) \vee ((\neg P(z, u, v)) \vee K(w))) \wedge G(v))$
$x = a$, $y = b$
$\forall z \exists w \forall u \exists v((\neg R(a, b) \vee ((\neg P(z, u, v)) \vee K(w))) \wedge G(v))$
$w = f(z)$, $v = g(z, u)$
$\forall z \forall u((\neg R(a, b) \vee ((\neg P(z, u, g(z, u))) \vee K(f(z)))) \wedge G(g(z, u)))$

$\forall y(\exists x R(x, f(y)) \Rightarrow S(z, g(x, c)))$
$\forall y(\forall x \neg R(x, f(y)) \vee S(z, g(x, c)))$
$\forall y(\forall x \neg R(x, f(y)) \vee S(z, g(u, c)))$

Exercice 2 : Herbrand

1) $\{ P(a), \neg P(x) \vee P(f(x)) \}$

$H_0 = \{ a \}$ *(les constantes du système)*
$H_1 = H_0 \cup \{ f(a) \}$ *(union de H_0 avec ?)*
$H_2 = H_1 \cup \{ f(f(a)) \}$
…
$H_\infty = \{ a, f^n(a), \forall n \in N^* \}$ *(univers de Herbrand)*

Base de Herbrand : $\{ P(a), \neg P(a), \neg P(f^n(a)), P(f^m(a)) \ \forall n,m \in N^* \}$
Première interprétation : $\{ P(a), \neg P(a) \vee \neg P(f(a)) \}$
Deuxième interprétation : $\{ P(a), \neg P(f^{32}(a)) \vee \neg P(f^{33}(a)) \}$

2) $\{ P(x), R(x) \vee Q(y, x), \neg Q(y, y) \}$

$H_0 = \{ a \} = H_\infty$ *(on ajoute une constante) (univers de Herbrand)*
$H_1 = H_0 \cup \{ \varnothing \}$ *(union de H_0 avec l'ensemble vide)*

Base de Herbrand : $\{ P(a), R(a) \vee Q(a, a), \neg Q(a, a) \}$
Seule interprétation : $\{ P(a), R(a) \vee Q(a, a), \neg Q(a, a) \}$

3) $\{ P(f(x)) \vee Q(a), Q(g(b)) \vee \neg P(y) \}$

$H_0 = \{ a, b \}$ *(les constantes du système)*
$H_1 = H_0 \cup \{ f(a), f(b) \}$ *(union de H_0 avec ?)*
…
$H_\infty = \{ a, b, f^n(a), f^m(b), \forall n,m \in N^* \}$

Base de Herbrand :
$\{ Q(a), Q(g(b)), P(f^n(a)), P(f^m(b)), \neg P(a), \neg P(b), \neg P(f^m(a)), \neg P(f^l(b)), \forall n,m,k,l \in N^* \}$

Exercice 3 : Résolution

1) Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler.
2) Les dragons verts peuvent voler.
3) Un dragon est vert s'il a au moins un parent vert ou rose.

1. les dragons sans enfant sont heureux
2. les dragons verts sont heureux

D = un nombre fini de dragons
H/1 : être heureux
F/1 : savoir voler
V/1 : être vert
R/1 : être rose
E/2 : être enfant de

1) $\forall x \forall y((E(y, x) \wedge F(y)) \Rightarrow H(x))$
2) $\forall x(V(x) \Rightarrow F(x))$
3) $\forall x \exists y(((V(y) \vee R(y)) \wedge E(x, y)) \Rightarrow V(x))$

1. $\forall x(\neg \exists y E(y, x) \Rightarrow H(x)) \rightarrow \forall x(\forall y \neg E(y, x) \Rightarrow H(x))) \rightarrow \forall x \forall y(\neg E(y, x) \Rightarrow H(x)))$

¬1) $\forall x \forall y(\neg E(y, x) \vee \neg F(y) \vee H(x))$
¬2) $\forall x(\neg V(x) \vee F(x))$
¬3) $\forall x \exists y(((\neg V(y) \wedge \neg R(y)) \vee \neg E(x, y)) \vee V(x))$

$\Leftrightarrow \Rightarrow \neg \wedge \vee \vdash \models \equiv \forall \exists \cup \cap \in \infty$