Chapitre I

Matrices

I.1 Matrices

Définition I.1.1 *Soient n et $m \in \mathbb{N}$, une matrice A à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (n, m) est un tableau à n lignes et m colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

On note usuellement une matrice par une lettre majuscule et ses coefficients par la lettre minuscule associée. A noter que le coefficient a_{ij} correspond à la ligne i et à la colonne j.
L'ensemble des matrices de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On désignera souvent - dans ce cours- les colonnes d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $\cdots$; $A^{(m)}$, ainsi la $j$ème colonne est :

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad A = \left(A^{(1)} \middle| A^{(2)} \middle| \cdots \middle| A^{(n)} \right)$$

On désignera de même dans ce cours- les lignes d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $\cdots$; $A_{(n)}$, ainsi la $i$ème ligne de A est :

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} — A_{(1)} — \\ — A_{(2)} — \\ \vdots \\ — A_{(n)} — \end{pmatrix}$$

I.2 Quelques matrices particulières

On définit dans ce qui suit un certain nombre de matrices particulières qui seront utilisées tout au long de ce cours.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

1. Si $m = n$ la matrice est dite carrée.
2. Si $n = 1$, la matrice est une *matrice ligne* ou encore un *vecteur ligne*.
   Dans ce cas on ne fait usuellement apparaître qu'un seul indice. A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

3. Si $m = 1$, la matrice est une *matrice colonne* ou encore un ***vecteur colonne***. Dans ce cas on ne fait apparaître qu'un seul indice. En fait on identifie usuellement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

4. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, la matrice est une *matrice diagonale*. C'est à dire que A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   La "diagonale" qui apparaît ici est la *diagonale principale de la matrice*, l'autre diagonale est dénommée *diagonale secondaire* et ne joue en fait aucun rôle.
5. Si tous les coefficients de A sont nuls on dit que A est la *matrice nulle d'ordre* (n, m) notée $0_{n\times m}$ (ou même 0 si aucune confusion n'est à craindre) :

$$0_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si $m = n$, si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et si $a_{ii} = 1$ $(1 \leq i \leq n)$, la matrice est la *matrice identité d'ordre* n On a donc :

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, la matrice est *triangulaire inférieure*. C'est à dire A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, la matrice est dite *triangulaire supérieure*. C'est à dire A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

9. On considérera souvent les matrices "canoniques" ([1]) colonnes d'ordre n suivantes étroitement associées à la notion de **base canonique**. (voir plus loin l'exemple (IV.2.6) dans la sous-section (IV.2).

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; E^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots ; E^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Où donc $E^{(i)}$ désigne la matrice colonne d'ordre n dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{éme}}$:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \leftarrow n^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

En fait $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $\ldots ; E^{(n)}$ ne sont rien d'autre également que les colonnes de la matrice identité d'ordre n : Id_n.

Définition I.2.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit la* transposée *de A notée A^t comme étant la matrice B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ pour } 1 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq i \leq m$$

les lignes de A deviennent donc les colonnes de sa matrice transposée.

Exemple I.2.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 0 \\ 7 & 15 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition I.2.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, une matrice carrée, on dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.*

Exemple I.2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \textit{ est symétrique. } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \\ 7 & 15 & 1 \end{pmatrix} \textit{ n'est pas symétrique.}$$

1. Il n'y a pas de terminologie standard pour ces matrices.

I.3 Somme de matrices, multiplication par un scalaire

Définition I.3.1 *Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit leur* ***somme*** *"$A+B$" comme étant l'élément C de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ donné par*

$$c_{i,j} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

Exemple I.3.2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & b+3 \\ c+0 & d+9 \\ e+8 & f+0 \end{pmatrix}$$

Définition I.3.3 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit le* ***produit*** *$B = \lambda A$ comme étant l'élément B de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ donné par :*

$$b_{i,j} = \lambda a_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

Exemple I.3.4

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \\ \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que :

Proposition I.3.5 $\forall A$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* $\forall \lambda$ *et* $\mu \in \mathbb{K}$

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ *propriété de distributivité*
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ *propriété de distributivité*
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ *propriété d'associativité restreinte*

Et plus généralement, on a :

Proposition I.3.6 *Muni des deux lois définies ci-dessus - addition et multiplication externe, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

I.4 Multiplication d'une matrice par un vecteur colonne

Définition I.4.1 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $X \in \mathbb{K}^m$ un vecteur colonne, on définit leur produit AX comme étant l'élément Y de $\mathbb{K}^n$ donné par :*

$$\begin{aligned} Y &= AX \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \qquad \text{(I.4.1.1)} \end{aligned}$$

On a donc en fait :

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Remarquons que l'on peut écrire :

$$Y = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_m A^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} x_k \, A^{(k)} \tag{I.4.1.2}$$

$$Y = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \tag{I.4.1.3}$$

et donc $Y = AX$ est une *combinaison linéaire* des colonnes de A. On en déduit immédiatement que :

Proposition I.4.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et soit les matrices colonnes "canoniques" $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots; E^{(m)}$ (voir page 3 point numéro 9) alors :*

$$AE^{(1)} = A^{(1)}, \quad AE^{(2)} = A^{(2)}, \ldots \quad AE^{(i)} = A^{(i)}, \ldots \quad AE^{(m)} = A^{(m)}$$

Exemple I.4.3

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ ex+fy \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

Remarque I.4.4 *Pour des raisons qui doivent paraître évidentes, on dit que l'on effectue une multiplication ligne par colonne.*

Remarque I.4.5 *Remarquons que pour pouvoir effectuer la multiplication, il doit y avoir concordance entre le nombre de colonnes de la matrice et le nombre de composantes (lignes) du vecteur colonne et qu'en termes de types (dimensions) de matrices on a :*

$$(n, m) \times (m, 1) \longrightarrow (n, 1)$$

Remarque I.4.6 ***Attention*** *: Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et soit $X \in \mathbb{K}^m$ un vecteur colonne, alors $AX = BX$ n'implique pas $A = B$ même si X est non nul ! En clair on ne peut pas "simplifier" par X ! Par contre on a :*

Proposition I.4.7 *soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on suppose que :*

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \quad AX = BX$$

Alors :

$$A = B$$

.

Remarque I.4.8 ***Attention*** *: Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et soit X et $Y \in \mathbb{K}^m$ alors $AX = AY$ n'implique pas $X = Y$ même si A est non nulle ! En clair on ne peut pas "simplifier" par A ! Par contre on a :*

Proposition I.4.9 *Soit X et $Y \in \mathbb{K}^m$, on suppose que :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), \quad AX = AY$$

Alors :

$$X = Y$$

.

Proposition I.4.10 *Soit $X \in \mathbb{K}^n$ alors*

$$Id_n X = X$$

Ce qui justifie bien la dénomination de matrice identité.

On vérifie par ailleurs sans peine :

Proposition I.4.11 *$\forall A$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\forall X$ et $X' \in \mathbb{K}^m$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$*

— $(A+B)X = AX + BX$ *propriété de distributivité*

— $A(X+X') = AX + AX'$ *propriété de distributivité*

— $(\lambda A)X = \lambda(AX) = A(\lambda X)$ *propriété d'associativité restreinte*

On vérifie de même que :

Proposition I.4.12 *Soient Λ une matrice diagonale d'ordre n et $X \in \mathbb{K}^n$:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\textit{alors : } \Lambda X = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

les coefficients de X sont donc multipliées respectivement par : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

I.5 Multiplication de Matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, soit $X \in \mathbb{K}^q$ soit $Y = BX$ et soit $Z = AY = (A(BX)$. On a donc $Y \in \mathbb{K}^m$ et $Z \in \mathbb{K}^n$.
On a :

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j \quad 1 \leq k \leq m \quad \text{et} \quad z_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \quad 1 \leq i \leq n \tag{I.5.0.1}$$

d'où alors :

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj})\, x_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

Ceci nous amène donc à la définition suivante :

Définition I.5.1 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, on définit alors le produit $C = AB$ comme étant une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ donnée par :*

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j} + \cdots + a_{im} \times b_{mj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj} \quad \textit{pour } 1 \leq i \leq n \textit{ et } 1 \leq j \leq q. \end{aligned} \tag{I.5.1.1}$$

On a donc en reprenant les notations précédentes :

$$(AB)X = CX = A(BX) \qquad \forall X \in \mathbb{K}^q$$

Proposition I.5.2 *Aves les notations précédentes, il est immédiat que les colonnes de $C = AB$ sont obtenues en multipliant à gauche les colonnes de B par A.*
Les colonnes de $C = AB$ sont $AB^{(1)}, AB^{(2)}, \cdots, AB^{(q)}$:

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AB^{(1)} & AB^{(2)} & \cdots & AB^{(q)} \end{array} \right)$$

au sens de la multiplication matrice par vecteur colonne précédemment définie.

Remarques I.5.3 — *la multiplication, matrice par vecteur colonne est un cas particulier de la multiplication matricielle.*

— *Pour pouvoir effectuer la multiplication "AB", il doit y avoir concordance entre le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B.*

— *Le produit d'une matrice de type (n,m) par une matrice de type (m,q) donne une matrice (n,q) :*

$$(n,m)\times(m,q)\longrightarrow(n,q)$$

Exemple I.5.4

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\\ b_{41} & b_{42}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}\end{pmatrix}$$

A est une matrice $(3,4)$ et B une matrice $(4,2)$ le produit $C=AB$ est donc une matrice $(3,2)$. Soit C la matrice résultat du produit, pour obtenir par exemple C_{21} on multiplie terme à terme les éléments de la deuxième ligne de A par les éléments de la première colonne de B et on en fait la somme.

On montre facilement :

Proposition I.5.5 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors :*

$$A\,Id_m=A \qquad \textit{et} \qquad Id_n\,A=A$$

Ce qui justifie à nouveau l'appellation de *matrice Identité*.
Il est à nouveau facile de montrer :

Proposition I.5.6 *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et soit Λ une matrice diagonale d'ordre m :*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m\end{pmatrix}$$

alors :

$$A\Lambda \;=\; \left(\lambda_1 A^{(1)} \middle| \lambda_2 A^{(2)} \middle| \cdots \middle| \lambda_m A^{(m)}\right)$$

c'est à dire que les colonnes de A sont donc multipliées respectivement par : $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$:

$$A\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1\,a_{11} & \lambda_2\,a_{12} & \cdots & \lambda_m\,a_{1m}\\ \lambda_1\,a_{21} & \lambda_2\,a_{22} & \cdots & \lambda_m\,a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1\,a_{n1} & \lambda_2\,a_{n2} & \cdots & \lambda_m\,a_{nm}\end{pmatrix}$$

Il est à nouveau facile de montrer :

Proposition I.5.7 *Soit Λ une matrice diagonale d'ordre n et soit $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:*

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

alors :

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} - \lambda_1 A_{(1)} - \\ - \lambda_2 A_{(2)} - \\ \vdots \\ - \lambda_n A_{(n)} - \end{pmatrix}$$

c'est à dire que les lignes de A sont donc multipliées respectivement par : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda_1\, a_{11} & \lambda_1\, a_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_1\, a_{1m} \\ \lambda_2\, a_{21} & \lambda_2\, a_{22} & \cdots & \cdots & \lambda_2\, a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n\, a_{n1} & \lambda_n\, a_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda_n\, a_{nm} \end{pmatrix}$$

On vérifie par ailleurs sans peine :

Proposition I.5.8 *Propriétés standards :*

- *propriété de distributivité :*
  $\forall A$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) \quad (A+B)C = AC + BC$
- *propriété de distributivité :*
  $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* B *et* $C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) \quad A(B+C) = AB + AC$
- *propriété d'associativité :*
  $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \quad A(BC) = (AB)C$

Remarque I.5.9 (le produit matriciel est non commutatif) *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, *on peut donc effectuer le produit* AB *mais si on veut pouvoir effectuer le produit* BA *il faut que de plus* $q = n$ *on alors* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *et* $BA \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$. *On ne peut alors alors comparer* AB *et* BA *que si elles sont de même taille - c'est à dire si* $n = m = q$. *Dans ce cas on a donc :* $A, B, AB, BA \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. *Mais même dans ce cas, a priori (sauf cas particulier)* AB *et* BA *sont distinctes.*

Contre-exemple I.5.10 (le produit matriciel est non commutatif)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

I.6 Multiplications particulières

Proposition I.6.1 *Transformations sur les colonnes :*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *et* $X \in \mathbb{K}^m$ *un vecteur colonne, soit* $Y = AX$ *le vecteur colonne de* $\mathbb{K}^n$ *on a :*

$$Y = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A^{(1)} & A^{(2)} & \cdots & A^{(m)} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_m A^{(m)} \end{pmatrix}$$

Proposition I.6.2 *Transformations sur les colonnes :*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *et* $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *(carrée donc) où tous les coefficients de* M *sont nuls, sauf éventuellement ceux de sa k-ieme colonne,* M *est donc de la forme spécifique indiquée,* $B = MA$ *est du même type que* A *et est donnée par : alors :*

$$B = MA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} - A_{(1)} - \\ \vdots \\ - A_{(k)} - \\ \vdots \\ - A_{(n)} - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \alpha_1 A_{(k)} - \\ - \alpha_2 A_{(k)} - \\ \vdots \\ - \alpha_n A_{(k)} - \end{pmatrix}$$

En d'autres termes les lignes de $B = MA$ sont obtenues à partir de la k-ième ligne de A multipliée par respectivement $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$

Il est facile de montrer :

Proposition I.6.3 *Transformations sur les lignes :*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (une matrice ligne d'ordre n) : $M = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ Alors $B = MA \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ (une matrice ligne d'ordre m donc) est obtenue comme une combinaison linéaire des lignes de A avec les coefficients de M :

$$B = MA = \begin{matrix} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ \ \end{matrix} \begin{pmatrix} - A_{(1)} - \\ - A_{(2)} - \\ \vdots \\ - A_{(n)} - \end{pmatrix} = \left(\alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \cdots + \alpha_n A_{(n)}\right)$$

On en déduit facilement :

Proposition I.6.4 *Transformations sur les lignes :*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (carrée donc) où tous les coefficients de M sont nuls, sauf éventuellement ceux de sa k-ieme ligne, M est donc de la forme spécifique indiquée :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & (\textit{ligne } k) & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $B = MA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (de même type que A) est une matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la k-ieme qui vaut : $\alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \cdots + \alpha_n A_{(n)}$:

$$B = MA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha_1 A_{(1)} + \alpha_2 A_{(2)} + \cdots + \alpha_n A_{(n)} & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\textit{ligne } k)$$

I.7 Matrices inversibles

Définition I.7.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, (c'est à dire une matrice carrée). On dit que A est inversible, si il existe une matrice notée A^{-1} telle*

$$(a)\ AA^{-1} = Id_n \quad et \quad (b)\ A^{-1}A = Id_n \tag{I.7.1.1}$$

En fait, il suffit d'avoir l'une de ces égalités et l'autre est alors automatiquement vérifiée.([2]) On montre par ailleurs facilement que si une matrice est inversible son inverse est unique. Les exercices correspondant seront vus dans le chapître suivant.

Remarque I.7.2 *Les matrices non carrées ne sont jamais inversibles. En fait il est dans certains cas possible d'obtenir l'une des égalités mais jamais les deux, plus précisément si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*

- *si $n < m$ il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $BA = Id_m$*
- *si $m < n$ il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que $AB = Id_n$.*

2. La démonstration n'est cependant pas triviale

I.8 Matrices orthogonales

Définition I.8.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, (c'est à dire une matrice carrée). On dit que A est orthogonale si*

$$AA^t = Id_n \text{ ou } A^tA = Id_n$$

En fait, il suffit d'avoir l'une de ces égalités et l'autre est alors automatiquement vérifiée, cela bien entendu découle de ce qui précède puisque qu'alors on a $A^t = A^{-1}$