MINF0402 Série 2 - Algorithmique

Préliminaires :

- un tableau A de type (n,m) est un tableau à n lignes et m colonnes, $A(i,j)$ désigne l'élément de la $i$ème ligne et $j$ème colonne ; mathématiquement ici, un tel tableau est considéré comme une matrice et ses éléments notés alors $a_{i,j}$
- On peut aussi considérer des tableaux mono-dimensionnels de longueur n : $A(i)$ désigne alors le $i$ème élément du tableau A. Mathématiquement on les considère comme des vecteurs (usuellement colonnes) à n composantes, a_i désignant alors le $i$ème élément du vecteur A. (Remarque sous Scilab - proche du langage matriciel - , on a des tableaux mono-dimensionnels lignes et des tableaux mono-dimensionnels colonnes)
- Attention, les indices commencent toujours à 1.

Exercice 1 (Algorithmique élémentaire : Addition matricielle)

A, B, C désignant des tableaux de type de type (n,m), construire l'algorithme effectuant la somme matricielle $A+B$ et rangeant le résultat dans C.

Exercice 2 (Algorithmique élémentaire : Produit scalaire)

A et B désignant deux tableaux mono-dimensionnels de longueur n, construire l'algorithme effectuant le produit scalaire correspondant $A \bullet B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Exercice 3 (Algorithmique élémentaire : multiplication matricielle)

A désignant un tableau de type (n,m), B un tableau de type (m,q) et C un tableau de type (n,q), construire l'algorithme effectuant la multiplication matricielle AB et rangeant le résultat dans C.

Exercice 4 (Algorithmique : systèmes triangulaires.)

A désignant un tableau de type (n,n) et b, X et Y des tableaux monodimensionnels associés à des vecteurs colonnes à n composantes.

1. Construire un algorithme qui sur la donnée de A et b et n renvoie dans X la solution de $Ax = b$, lorsque A correspond à une matrice triangulaire inférieure inversible.
2. Construire un algorithme qui sur la donnée de A et b et n renvoie dans X la solution de $Ax = b$, lorsque A correspond à une matrice triangulaire supérieure inversible.

Exercice 5 (Algorithmique : Réduction de Gauss.)

A désignant un tableaux de type (n,n) correspondant à une matrice et b un tableau monodimensionnel correspondant à un "vecteur colonne" à n composantes.

Ecrire l'algorithme qui sur la donnée de A et b et n correspondant à l'équation linéaire $Ax = b$, (où l'inconnue x est donc un "vecteur colonne" à n composantes) renvoie la transformation de l'équation précédente en un système triangulaire supérieur équivalent : $Ux = y$ (où donc la matrice U est triangulaire supérieure), en utilisant la méthode de réduction de Gauss. La matrice U étant alors directement stockée dans A et y dans b ce qui est en fait le plus naturel. On suppose donc que A (initial) correspond à une matrice inversible et que l'on peut effectuer la méthode de Gauss systématique sans permutation de ligne (ou colonnes).

Exercice 6 (Algorithmique : Réduction de Gauss des systèmes tridiagonaux)

On veut résoudre le système linéaire $Mx = d$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

On a donc ici une matrice dite tridiagonale. On suppose donc que M correspond à une matrice inversible et que l'on peut effectuer la méthode de Gauss systématique sans permutation de ligne (ou colonnes).

a, b, c, d et x sont des tableaux monodimensionnels de longueur n de même que e et f définis ci dessous. La matrice M n'est pas formée, ce serait un gaspillage d'espace mémoire.

Il est à noter que a_1 et c_n sont inutilisés, mais conservez le dimensionnement à n et surtout ne changez pas les notations.

1. Montrer que l'on peut se ramener à un système de la forme :

$$\begin{cases} x_i &= e_i x_{i+1} + f_i \qquad 1 \le i \le n-1 \\ x_n &= f_n \end{cases}$$

   Où l'on donnera les expressions récurentes définissant les e_i, $(1 \le i \le n-1)$ et les f_i, $(1 \le i \le n)$. (e_n est inutilisé)
2. Donner l'algorithme de la méthode.

——— • **FIN** • ———