

Versuch 1: Akustik

Jascha Fricker, Benedict Brouwer

March 31, 2022

1 Abstract

In diesem Versuch wird die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen elastischen Medien durch verschieden Versuchsaufbauten bestimmt. Die Schallgeschwindigkeit in Luft wird zum einen durch Laufzeitdifferenz und zum Anderen durch eine stehende Welle bestimmt. Anschließend wird ein Verfahren vorgestellt wie die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern gemessen werden kann.

Contents

1	Abstract	1
2	Theorie	2
3	Phasengeschwindigkeit in Festkörpern	2
3.1	Theorie und experimenteller Aufbau	2
3.2	Ergebnisse	2
3.2.1	Messwerte	2
3.2.2	Messunsicherheiten	3
3.3	Diskussion	4
4	Schallgeschwindigkeit mittels Laufzeitdifferenz	4
4.1	Theorie und experimenteller Aufbau	4
4.2	Ergebnisse	4
5	Schallgeschwindigkeit mittels stehenden Wellen	6
5.1	Theorie und experimenteller Aufbau	6
5.2	Ergebnisse	6
6	Zusammenfassung	6
7	Anhang	7
7.1	Fehlerrechnung	7

2 Theorie

Schall breitet sich in Form einer Welle aus. Diese Welle kann mit der Funktion

$$a(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (1)$$

beschrieben werden. Mit dieser Formel kann die Phasengeschwindigkeit

$$\nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda \quad (2)$$

hergeleitet werden.

3 Phasengeschwindigkeit in Festkörpern

3.1 Theorie und experimenteller Aufbau

In Aufgabe 1 wird die Phasengeschwindigkeit einer longitudinalen Welle in elastischen Festkörpern (Stäben aus verschiedenen Materialien) bestimmt. Nachdem diese am oberen Ende angeschlagen wurden, laufen die Wellenpakete entlang des Stabes und werden an den Enden reflektiert. Durch ein Piezoelement kann an einem Ende mit einem Oszilloskop ein Ausschlag gemessen werden, wenn eine Welle ankommt. Mithilfe der Differenz dieser Ausschläge kann dann die Phasengeschwindigkeit berechnet werden. Es gilt

$$\nu = \frac{2l}{t} \quad (3)$$

da die Welle zweimal die Stablänge zurücklegt. Mit dieser und der Formel für longitudinale Wellen

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4)$$

kann das Elastizitätsmodul des Materials

$$\nu = \frac{2l}{t} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = 4 \frac{l^2}{t^2} \rho \quad (5)$$

berechnet werden.

3.2 Ergebnisse

3.2.1 Messwerte

Zu jedem Material wurde ein mehrmals der Abstand des ersten zum vierten Peak gemessen, um die Genauigkeit zu vergrößern. Da die Messwerte aber immer im Fehlerbereich lagen, wird zur Vereinfachung der Auswertung immer nur ein Messwert betrachtet. Dieser ist in Tabelle 1 angegeben.

	Messig	Kupfer	Aluminium
t für 4 Peaks	2480(6) ms	2360(6) ms	1800(6) ms
Länge l des Stabs	1407(14) mm	1501(14) mm	1502(14) mm
Elastizitätsmodul	99,7(3,3) $\frac{kN}{mm^2}$	130,3(3,3) $\frac{kN}{mm^2}$	67,7(3,3) $\frac{kN}{mm^2}$
Literaturwert (siehe chemie.de)	78 – 123 $\frac{kN}{mm^2}$	120 $\frac{kN}{mm^2}$	70 $\frac{kN}{mm^2}$

Table 1: Messwerte der Zeitdifferenz der Peaks und Länge der Stäbe

3.2.2 Messunsicherheiten

Zeitmessung Das Oszilloskop misst die Zeit mit einer Cursorgenauigkeit von $20ms$. Da das Oszilloskop digital ist, wird eine rechteckige Zufallsverteilung angenommen.

$$a = 20ms \Rightarrow u_{Cursor}(t) = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}ms \quad (6)$$

Da die Differenz jedoch mit zwei Cursor gemessen wird, gilt:

$$u_t(t) = \sqrt{2} \cdot u_{Cursor}(t) = 10\sqrt{\frac{2}{3}}ms \quad (7)$$

Länge Die Länge wurde mit einem Zollstock gemessen. Im Aufgabenblatt wird die Herstellungsgenauigkeit

$$u_H(l) = a + b \cdot L = 0,6mm + 0,4\frac{mm}{m} \cdot L = 1,4mm \quad (8)$$

angegeben, da L bei Messing Kupfer und Aluminium $2m$ ist. Für die Ablesegenauigkeit gilt

$$u_A(l) = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}mm, \quad (9)$$

da der Zollstock jeden Millimeter ein Strich hat und eine Dreiecksverteilung angenommen wird. Daraus folgt:

$$u_l = \sqrt{u_H(l)^2 + u_A(l)^2} = \sqrt{\frac{173}{120}}mm \quad (10)$$

Fehlerfortpflanzung Es gilt:

$$E = 4\frac{l^2}{t^2}\rho \quad (11)$$

$$(12)$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned}
u(\bar{E}) &= \sqrt{\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right]_{\bar{l}, \frac{\bar{t}}{3}, \bar{\rho}}^2 u_t(\bar{t})^2 + \left[\frac{\partial E}{\partial l}\right]_{\bar{l}, \bar{t}, \bar{\rho}}^2 u_l(\bar{l})^2 + \left[\frac{\partial E}{\partial \rho}\right]_{\bar{l}, \bar{t}, \bar{\rho}}^2 u_\rho(\bar{\rho})^2} \\
&= \sqrt{64 \frac{\bar{l}^4 \bar{\rho}^2}{\frac{\bar{t}}{3}^6} \cdot u_t(\bar{t})^2 + 64 \frac{\bar{l}^2 \bar{\rho}^2}{\frac{\bar{t}}{3}^4} \cdot u_l(\bar{l})^2 + 16 \frac{\bar{l}^4}{\frac{\bar{t}}{3}^4} \cdot u_\rho(\bar{\rho})^2} \\
&= \sqrt{64 \frac{\bar{l}^4 \bar{\rho}^2}{\frac{\bar{t}}{3}^6} \cdot \frac{200}{3} ms + 64 \frac{\bar{l}^2 \bar{\rho}^2}{\frac{\bar{t}}{3}^4} \cdot \frac{173}{120} mm + 16 \frac{\bar{l}^4}{\frac{\bar{t}}{3}^4} \cdot u_\rho(\bar{\rho})^2} \quad (13)
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel und der Angabe in der Aufgabenstellung lassen sich die Unsicherheiten ausrechnen.

3.3 Diskussion

Wie Tabelle 1 zeigt, liegen der Literaturwert beim Messing und Aluminium innerhalb des Konfidenzintervalls. Da Messing eine Legierung ist, ist in der Literatur nur eine Spanne angegeben. Nur wenn man die genaue Legierung kennt, kann ein eindeutiger Literaturwert gefunden werden. Auffällig ist, dass der Literaturwert von Kupfer außerhalb des Konfidenzintervalls liegt. Wir wissen nicht, wo genau diese Diskrepanz herkommt, aber in Frage kommen würde, dass auch zum Kupfer andere Metalle zugefügt wurden. Das erklärt auch die verschiedenen Literaturwerte, die wir gefunden haben. (Literaturwerte von $110 - 130 \frac{kN}{mm^2}$)

4 Schallgeschwindigkeit mittels Laufzeitdifferenz

4.1 Theorie und experimenteller Aufbau

In Aufgabe 2 wird die Schallgeschwindigkeit in der Luft durch den Laufzeitunterschied der Schallwellen einer Schallquelle zu zwei unterschiedlich weit entfernten Mikrofonen Δt im Vergleich zu Abstand dieser Mikrophone s gemessen. Dadurch, dass dies bei verschiedenen Abständen gemessen wird, kann ein systematischer Fehler in der Abstandsmessung d herausgerechnet werden.

$$v \cdot \Delta t_n = s_n + d \quad (14)$$

4.2 Ergebnisse

Im Graph 1 sieht man anhand der Steigung die Schallgeschwindigkeit. Man kann erkennen, dass die Ausgleichsgerade nicht durch den Ursprung geht. Das liegt daran, dass der Mikrofonabstand systematisch um eine Konstante

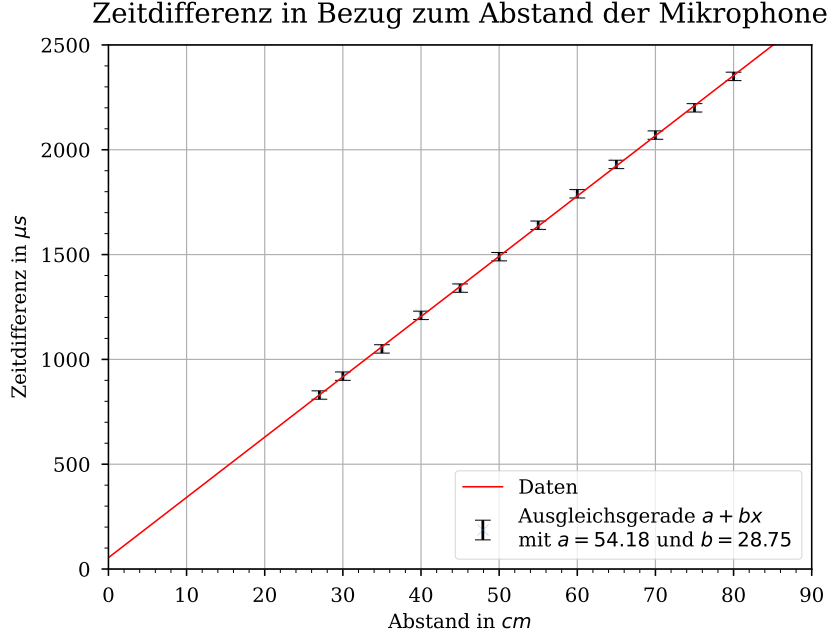


Figure 1: Laufzeitunterschied der Schallwellen

($-1,88\text{cm}$) abweicht, da die Mikrofone unterschiedlich gebaut und unterschiedlich in die Vorrichtung eingespannt waren. Die Steigung der Ausgleichsgeraden beträgt $28,75 \frac{\mu\text{s}}{\text{cm}}$. Daraus folgt dass die Schallgeschwindigkeit

$$\nu = \frac{1}{28,75 \frac{\mu\text{s}}{\text{cm}}} = 347,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (15)$$

beträgt. Auch mit dem Literaturwert und der Raumtemperatur von $295,3\text{K}$ kann die Schallgeschwindigkeit

$$\nu_T \frac{T}{T_0} = 331,5 \sqrt{\frac{285,3}{273,15}} = 344,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (16)$$

berechnet werden. Diese liegt sehr nahe an der gemessen Schallgeschwindigkeit.

κ kann anhand von ν , dem der Gaskonstante $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ der Temperatur $T = 295,3$ und der molaren Masse $M = 28,96 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ berechnet werden.

$$\nu = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \Rightarrow \kappa = \frac{\nu^2 M}{RT} = 1,42 \quad (17)$$

Frequenz	500(2)Hz	1000(4)Hz	2000(30)Hz
Steigung	34,4(1,2) $\frac{cm}{n}$	17,28(71) $\frac{cm}{n}$	8,56(31) $\frac{cm}{n}$
Geschwindigkeit	345,6(14,3) $\frac{m}{s}$	342,2(13,5) $\frac{m}{s}$	344,0(12,0) $\frac{m}{s}$

5 Schallgeschwindigkeit mittels stehenden Wellen

5.1 Theorie und experimenteller Aufbau

In Aufgabe 3 wird die Phasengeschwindigkeit durch das Erzeugen und Messen einer stehenden Welle in einem Rohr bestimmt, dessen Länge mit einem Stopfen verändert werden kann. In dieser überlagern sich die gegeneinander laufenden Wellen, die am Ende vom Stopfen reflektiert werden. Stehende Wellen entstehen nur, wenn das Rohr eine bestimmte Länge hat und somit beim am Stopfen ein Knoten und bei der Öffnung ein Bauch entsteht, also wenn

$$l = \frac{2n+1}{4}\lambda = \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{\nu}{f} \quad (18)$$

gilt. Wenn also die Lautstärke im Mikrofon am Rohranfang maximal wird, entsteht dort ein Bauch und die Gleichung (18) gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta l = l_n + 1 - l_n &= \frac{2n+3}{4}\lambda - \frac{2n+1}{4}\lambda \\ &= \frac{\nu}{2f} \\ \Rightarrow \nu &= 2f \cdot \Delta l \end{aligned} \quad (19)$$

Somit kann mit der Differenz der verschiedenen Rohrlängen, bei denen eine stehende Welle entsteht, die Schallgeschwindigkeit ausgerechnet werden.

5.2 Ergebnisse

Der Graph 2 stellt die Positionen des Stopfen für die Maxima dar. Mit der Steigung Δt und der Formel (19) kann die Schallgeschwindigkeit ausgerechnet werden. Die Unsicherheit der Ausgleichsgeraden wird mithilfe der Formeln im Anhang bestimmt. Beim Oszilloskop wurde bei 1kHz eine Schwankung von $\pm 2Hz$, bei $2kHz \pm 30Hz$ und bei $0.5kHz \pm 2Hz$ beobachtet.

Der gewichtete Mittelwert (Formel siehe Anhang) ist $\bar{x} = 344,03 \frac{m}{s}$. Er hat eine interne Unsicherheit $u_{int} = 0,16 \frac{m}{s}$ und eine größere externe und somit Gesamtunsicherheit (Siehe ABW-Skript) $u_{ext} = 0,95 \frac{m}{s}$. Damit stimmt die Schallgeschwindigkeit mit der in (15) und der in (16) überein.

6 Zusammenfassung

Die Schallgeschwindigkeit lässt sich mit verschiedenen Methoden messen. Beide Messungen waren sehr genau, da bei den stehenden Wellen nur etwa

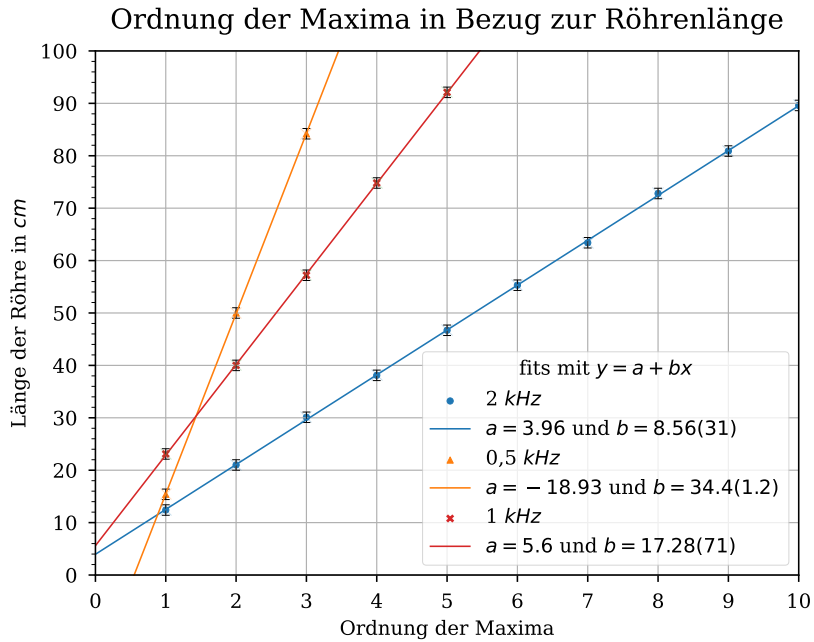


Figure 2: Rohrlänge bei unterschiedlichen Frequenzen

0.3% Unsicherheit bleibt und die Laufzeitmessung nur minimale Fehlerbalken hat. Bei beiden Messarten liegt der Literaturwert innerhalb der Unsicherheit. Bis auf Kupfer, wo eine größere Abweichung gemessen wurde, kann auch bei Festkörpern die Phasengeschwindigkeit relativ genau bestimmt werden. Das lässt unter anderem auch Rückschlüsse auf die Materialbeschaffenheit zu. So könnte wahrscheinlich bei Messing mit dem Elastizitätsmodul die Legierung bestimmt werden.

7 Anhang

7.1 Fehlerrechnung

Lineare Regression Die Ausgleichsgeraden der Graphen wurden so gezeichnet dass

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) \quad (20)$$

minimal ist. Die Unsicherheit der Steigung a_1 lässt sich mit

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{S}{n-2}} \quad (21)$$

$$D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (22)$$

und der Formel

$$u(a_1) = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}} \quad (23)$$

berechnen.

Gewichteter Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (24)$$

$$\text{mit : } w_i = \frac{1}{u(x_i)^2} \quad (25)$$