

Versuch 2: Pendel

Jascha Fricker, Benedict Brouwer

2. April 2022

Abstract

In diesen beiden Versuchsaufbauten werden verschiedene Pendel untersucht. Zum einen wird mit einem Reversionspendel die Erdbeschleunigung g gemessen, zum anderen werden zwei mit einer Feder gekoppelte Pendel untersucht und mit den Messwerten u.a. die Federkonstante berechnet.

Inhaltsverzeichnis

1	Reversionspendel	1
1.1	Experimenteller Aufbau und Theorie	1
1.2	Ergebnisse	2
2	Gekoppelte Pendel	3
2.1	Experimenteller Aufbau und Theorie	3
2.2	Ergebnisse	5
3	Anhang	5
3.1	Fehlerberechnung 1	5

1 Reversionspendel

1.1 Experimenteller Aufbau und Theorie

Ein Reversionspendel hat zwei Aufhängepunkte und zwei Massen, die alle auf einer Geraden liegen. Dabei kann eine Masse verschoben werden. Es gibt zwei Positionen des verschiebbaren Gewichts, an denen die Periode der Schwingung an beiden Aufhängepunkten gleich ist. Für ein Reversionspendel in dieser Konfiguration ist die Periode

$$\tau^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{g} \quad (1)$$

$$\Rightarrow g = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{\tau^2} \quad (2)$$

(Herleitung siehe [3, Abschnitt 1.3]). Daraus ist ersichtlich, dass, wenn dieser Fall eintritt, die Periodendauer unabhängig von der Masse und des Trägheitsmoments ist. So kann mit der Periodendauer und dem Abstand der beiden Aufhängungspunkte l_r die Erdbeschleunigung ausgerechnet werden. Um diese besonderen Positionen der zweiten Masse zu finden, wird im Experiment die Periodendauer mit der Masse an verschiedenen Positionen von beiden Aufhängungen gemessen, um dann mithilfe des Schnittpunkts der Ausgleichgeraden die gewünschten Punkte zu bestimmen.

1.2 Ergebnisse

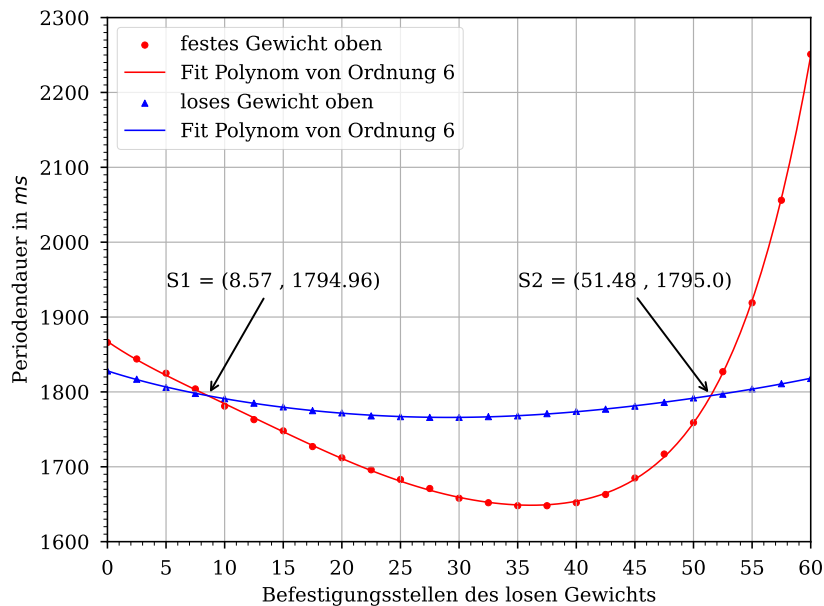


Abbildung 1: Grobe Darstellung der Messdaten (der Abstand ist nur relativ)

Im Graphen 1 wurde die Periodendauer abhängig vom Ort der zweiten Masse für beide Aufhängungspunkte dargestellt. In dem Graphen 2 können die beiden Schnittpunkte der Periodendauer der verschiedenen Aufhängungen nochmal näher gesehen werden. Die Daten wurden mit einem Polynom 6. Grades gefittet. Leider ist dies aber noch nicht genau genug, sodass einige Punkte ausserhalb der Konfidenzintervalls liegen. Dies ist uns aber erst nachher aufgefallen. Für den Fehler der Zeitmessung wurden 2ms angenommen, da in den Messdaten eine maximale Abweichung von 1ms bei verschiedenen Messungen der gleichen Periodendauer vorkam und die Lichtschranke selber auch eine Genauigkeit von 1ms hat. Beachtenswert ist, dass das Pendel eine Zeit braucht bis es sich eingependelt hat und konsistente Messwerte

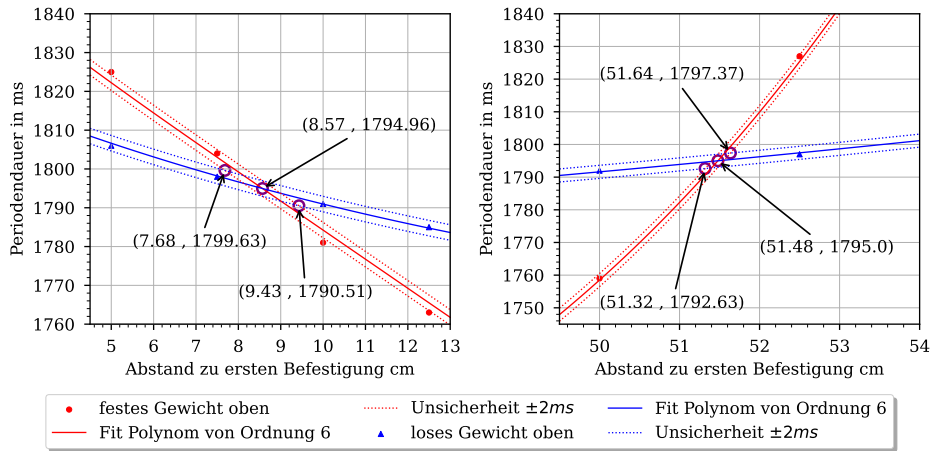


Abbildung 2: Genauere Darstellung der Schnittpunkte

	Schnittpunkt 1	Schnittpunkt 2
Periodendauer	1794,96(456)ms	1795,00(234)ms
Erdbeschleunigung	9,803(51)m s ⁻²	9,802(26)m s ⁻²
gewichtetes Mittel	$g = 9,802(23)m s^{-2}$	

Tabelle 1: Ergebnisse

gemessen werden können. Der Abstand der beiden Aufhängungspunkte l_r beträgt 800,0(11)cm.

Der in München vom International Gravimetric Bureau gemessene Wert von $g = 9,807232m s^{-2}$ [2] liegt eindeutig im Konfidenzintervall unserer Messungen, die in Tabelle 1 dargestellt sind, und sogar relativ nahe am berechneten Wert.

2 Gekoppelte Pendel

2.1 Experimenteller Aufbau und Theorie

In diesem Experiment wurden zwei Pendel beobachtet, die mit einer Feder auf einer einstellbaren Höhe verbunden wurden. Solche Pendel haben zwei Fundamentalschwingungen. Die gleichphasige Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{gl} = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (3)$$

der Schwingung wird nur durch das Trägheitsmoments J , die Masse m und dem Abstand l des Schwerpunkts zur Aufhängung bestimmt. Die

gegenphasige Schwingung mit Winkelgeschwindigkeit.

$$\omega_{geg} = \sqrt{\frac{mgl + 2\kappa r^2}{J}} \quad (4)$$

beeinflusst hingegen auch die Feder κ und der Befestigungsabstand r letzterer. In diesem Versuch müssen drei Messreihen aufgenommen werden: Eine gleichphasige, eine gegenphasige und eine mit Schwebung.

In **Aufgabe 11** soll der Kopplungsgrad K bestimmt werden. Diesen bestimmt man mithilfe der beiden Winkelgeschwindigkeiten

$$K = \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \quad \text{Siehe: [3, Formel (35)]} \quad (5)$$

der gleichphasigen und gegenphasigen Schwingung.

In **Aufgabe 12** sollen aus der Schwebung mithilfe der Schwebungskreisfrequenz ω_S und der mittleren Kreisfrequenz ω_M zuerst die Grundschwingungsfrequenzen

$$\omega_{geg} = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} + \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} = \omega_M + \omega_S \quad (6)$$

$$\omega_{gl} = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} - \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} = \omega_M - \omega_S \quad (7)$$

ausgerechnet werden (Siehe: [3, Formel (34)]). Um dann wieder den Kopplungsgrad nach Formel (5) zu bestimmen.

Mit den gegebenen (Theorie-) Daten in **Aufgabe 13** [3] (Masse Pendelgewicht $M_P = 1,080(20)\text{kg}$, Masse Stange $M_S = 0,160(5)\text{kg}$, Abstand Gewicht-Aufhängung $l = 0,968(10)\text{m}$ und Länge $l_0 = 0,030(20)\text{m}$ lassen sich Trägheitsmoment

$$J = 1,202(52)\text{kg m}^2 \quad (8)$$

und Drehmomentkonstante

$$D = 11,06(30)\text{N m} \quad (9)$$

ausrechnen (Fehlerberechnung siehe [1, Formel (19)]) und damit ω_{geg} und K mithilfe der Formeln [3, (30)] und [3, (35)] berechnen:

$$K = \frac{\kappa r^2}{D + \kappa r^2} \quad (10)$$

$$\omega_{geg} = \sqrt{\frac{D + 2\kappa r^2}{J}} \quad (11)$$

2.2 Ergebnisse

Die verschiedenen Kreisfrequenzen wurden bestimmt, indem die jeweiligen Theoriekurven mit geeigneten Bounds an die Daten gefittet wurden, sodass sowohl die Frequenz als auch die Unsicherheit ausgegeben werden konnte.

Messreihe gleichphasige und gegenphasige Schwingung In Graphen 2.2 wurden die anhand der in Aufgabe 5 bestimmten Messreihen berechneten ω_{geg} und ω_{gl} mit ihren Fehlern aufgetragen (farbige Fehlerbalken). Der Theoriewert der gleichphasigen Schwingung $\omega_{gl}^T = 3,033(52)$, der mithilfe von (9) und (8) berechnet wurde, unterscheidet sich leider sehr stark von unseren Messwerten. Wir vermuten, dass die angegebenen Daten nicht die Realbedingungen des Versuchs widerspiegeln. Dieser Fehler führt auch zu Abweichungen des Theoriewerts in der Graphen, sowie bei der Berechnung von κ .

Feder	Abstand r in cm	ω_{geg} in rad s^{-1}	ω_{gl} in rad s^{-1}	K
1	1	3.31242(13)	3.21499(13)	0.03(31)
1	2	3.53409(16)	3.21621(16)	0.09(29)
1	3	3.862746(99)	3.216022(99)	0.18(26)
2	1	3.34592(31)	3.21525(31)	0.04(30)
2	2	3.64872(37)	3.21635(37)	0.13(28)
2	3	4.08610(17)	3.21665(17)	0.23(24)

Tabelle 2: gleichphasige und gegenphasige Kreisfrequenz mit Kopplungsgrad

Messreihe Schwebung Auch mit den anhand von ω_M und ω_S der Schwebung (Siehe Tabelle ?) berechneten ω_{geg} und ω_{gl} kann der Kopplungsgrad K berechnet werden, jedoch sind hier, wie im Graphen ? zu sehen ist (schwarze Fehlerbalken), größere Ungenauigkeiten

3 Anhang

3.1 Fehlerberechnung 1

Unsicherheit l_r : l_r wurde mit einem Metalllineal gemessen werden. Deshalb kann mithilfe von [1, Gleichung (40)] und [1, Tabelle 5] die Unsicherheit des Lineals (Länge $L=1\text{m}$)

$$u(L) = 0.5\text{mm} \quad (12)$$

und mit [1, Tabelle 1] die Ablesegenauigkeit

$$u_a = \frac{0.5\text{mm}}{2\sqrt{3}} = 0.15\text{mm} \quad (13)$$

berechnet werden. Das Metallineal hat jede 0.5mm ein Ablesestrich. Die Unsicherheiten werden zur Gesamtunsicherheit

$$u_l = \sqrt{u(L)^2 + u_a^2} = 0.52\text{mm} \quad (14)$$

zusammengefasst.

Unsicherheit τ : Die Unsicherheiten wurden mithilfe von der Formel in der Aufgabenstellung [3, Aufgabe 8] berechnet.

Unsicherheiten von g_1 und g_2 : Mit der Formel 2 kann die allgemeinen Formel für Fehlerfortpflanzung [1, Formel (20)] für diesen Fall angepasst werden:

$$\begin{aligned} u(\bar{g}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_r}\right)^2 u(l_r)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 u(\theta)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16\pi^4}{\theta^2} u(l_r)^2 + \frac{64\pi^4 l_r^2}{\theta^3} u(\theta)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Gewichteter Mittelwert: Der Gewichtete Mittelwert und seine Unsicherheit wurde mithilfe von Formeln (29) bis (32) im ABW Skript[1] berechnet. da u_{int} mit 0.023ms^{-2} größer als $u_{ext} = 0.00019\text{ms}^{-2}$ ist, wird u_{int} als Ungenauigkeit angenommen.

Literatur

- [1] Technische Universität München. Hinweise zur Beurteilung von Messungen, Messergebnissen und Messunsicherheiten (ABW). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/org/ABW.pdf>, März 2021.
- [2] Andreas Lindau Roman Schwartz. Das europäische gravitationszonenkonzept nach welmec für eichpflichtige waagen.
- [3] Technische Universität München. Aufgabenstellung Pendel (PEN). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/PEN.pdf>, August 2021.