

Versuch 4: Pohlsches Rad

Jascha Fricker, Benedict Brouwer

7. April 2022

Einleitung

In diesen Versuch wird ein gedämpfter harmonischer Oszillator untersucht. Harmonische Oszillatoren sind ein wichtiges Modell in der Physik, da sie sehr viele Systeme in der realen Welt beschreiben können. Ein berühmtes Thema sind z. B. Resonanzkatastrophen, bei denen große Bauwerke in ihrer Eigenschwingung angeregt werden. Genau solche Schwingungen eines getriebenen Harmonischen Oszillators werden auch in diesem Versuch untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Stromabhängigkeit der Dämpfungskonstanten	2
1.1	Theorie	2
1.2	Experimenteller Aufbau	2
1.3	Auswertung	2
1.4	Ergebnisse	2
2	Schwingungsverhalten bei gegebener Dämpfung	4
2.1	Theorie	4
2.2	Experimenteller Aufbau	5
2.3	Auswertung	5
2.4	Ergebnis	5
2.4.1	Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante	5
2.4.2	Resonanzkurve	7
3	Diskussion	8
4	Anhang	8
4.1	Berechnung von ω_d und Fehlerfortpflanzung	8

1 Stromabhängigkeit der Dämpfungskonstanten

1.1 Theorie

Je nachdem wie stark ein harmonischer Oszillator gedämpft wird, ändert sich seine Schwingfrequenz. Ein gedämpfter harmonischer Oszillator hat die Bewegungsgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_d t - \beta), \quad (1)$$

mit Kreisfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \lambda^2} \quad (2)$$

(Drehmoment Θ und Federkonstante k) und β als Phasenverschiebung. Diese kann aus der Differentialgleichung der Kräfte hergeleitet werden (siehe Aufgabenblatt [2, (5)]). Bei der in diesem Experiment benutzten Wirbelstrombremse ist die Dämpfungskonstante λ proportional zum Quadrat des Stroms I durch die Bremse.

$$\lambda = \kappa \cdot I^2. \quad (3)$$

mit κ als Proportionalitätsfaktor.

1.2 Experimenteller Aufbau

Die Stromstärke der Wirbelstrombremse wurde mit einem Labornetzteil eingestellt und mit einem VC130 Multimeter gemessen. Nachdem das Pohlsche Rad fast maximal ausgelenkt worden war, wurde der Winkel des Pohlschen Rades abhängig von der Zeit mit einem Hall Sensor gemessen und direkt digital aufgenommen.

1.3 Auswertung

Um die Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante abhängig von der Stromstärke zu bestimmen, wurde auf jede Messreihe einzeln die Theoriekurve 5 mit der Funktion `optimize.curve_fit` der Pythonbibliothek `scipy` gefittet und auch die Unsicherheit ausgerechnet. Mit diesen 2x15 Datenpunkten können jetzt die Zusammenhänge zwischen ω_d , λ und I untersucht werden.

1.4 Ergebnisse

In Graph 1 ist beispielhaft gezeigt, wie die Messdaten und die gefittete Theoriekurve aussehen. Die ausgelesenen Dämpfungskonstanten wurden in Graph 2 gegen die Dämpfungsstromstärke geplottet und mit der Theoriekurve (3) gefittet. Für die Berechnung wurden nur die Fehler der Fits berücksichtigt.

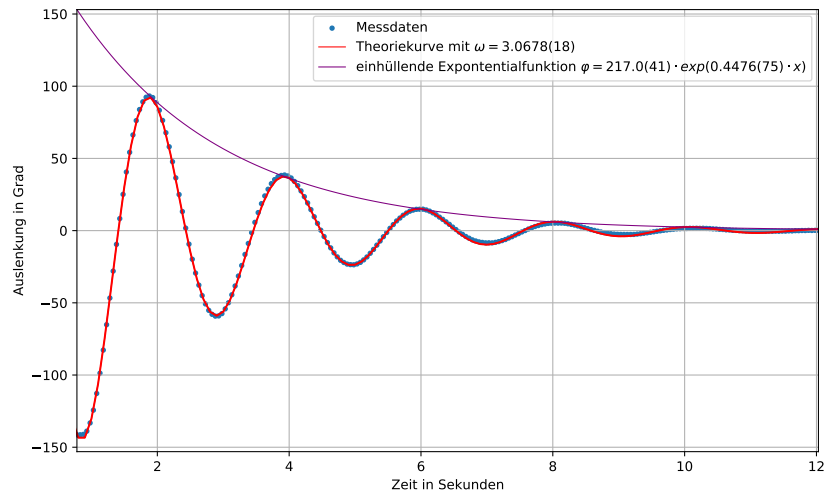


Abbildung 1: Beispielmessung

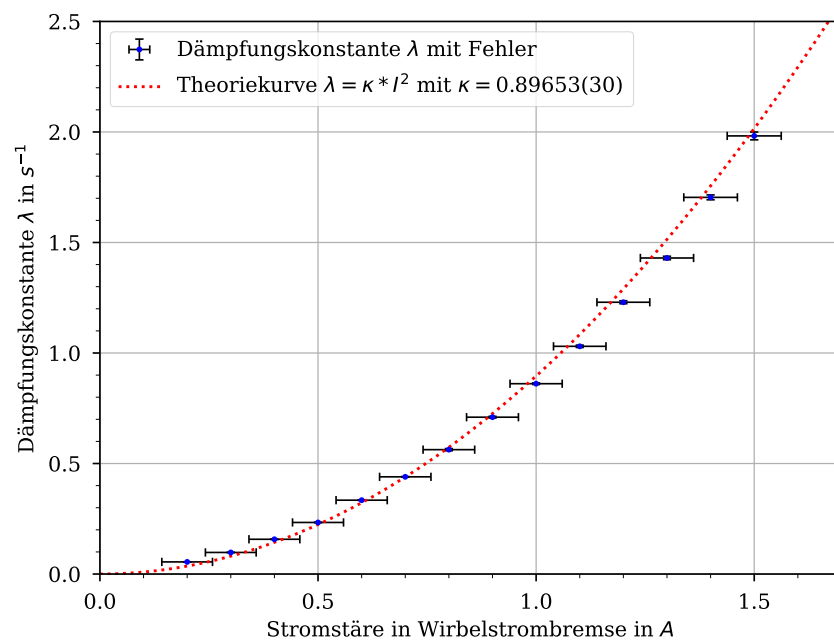


Abbildung 2: Berechnung der Dämpfungskonstanten

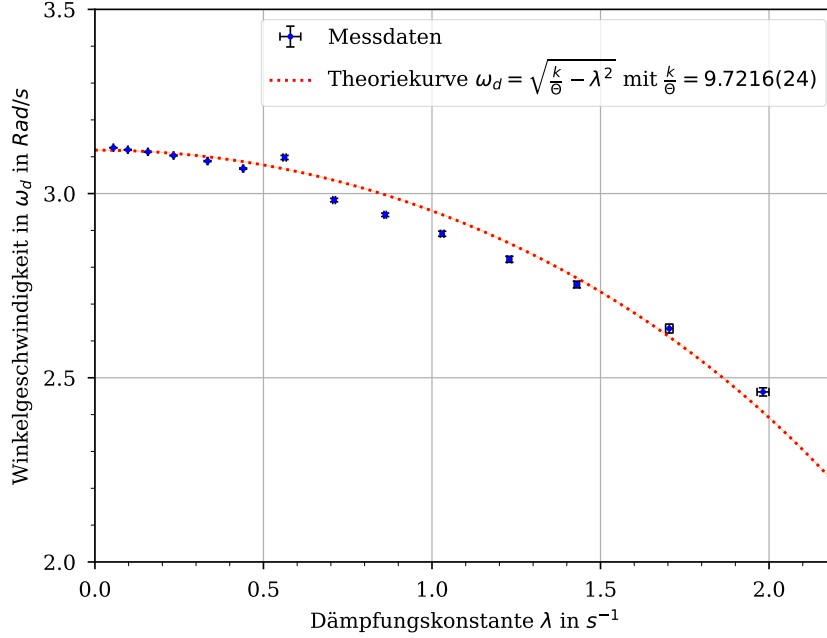


Abbildung 3: Verhältnis Dämpfung und Winkelgeschwindigkeit

Im Graph 3 wurden die ausgelesenen Winkelgeschwindigkeiten gegen die Dämpfung geplottet und mit der Theoriekurve (2) gefittet. Insgesamt wurde ein Proportionalitätsfaktor $\kappa = 0.89653(30)$ zwischen Dämpfungskonstante und Dämpfungsstromstärke und ein Quotient $\frac{\kappa}{\Theta} = 9.7216(24)$ ermittelt.

2 Schwingungsverhalten bei gegebener Dämpfung

2.1 Theorie

Bei gegebener Dämpfung hat der Oszillator eine charakteristische Eigenfrequenz. Die Eigenfrequenz eines Oszillators lässt sich mithilfe der Schwingungsperiode T berechnen

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Bei einer gedämpften Schwingung hat die Bewegungsgleichung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_d t - \beta), \quad (5)$$

deshalb liegen alle Maxima der Ausschläge des Pohlschen Rades auf der einhüllenden Exponentialfunktion

$$\varphi(t_n) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t_n). \quad (6)$$

Die Abklingzeit

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

ist der Kehrwert der Dämpfungskonstante.

Bei einem gezwungenen Oszillator mit Drehmoment $M_0 \sin(\omega t)$ kommt noch die partikuläre Lösung zur Bewegungsgleichung

$$\varphi(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t - \varphi) + C \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_d - \beta) \quad (8)$$

$$\text{mit Amplitude } A(\omega) = \frac{\frac{M_0}{\Theta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \cdot \omega^2}} \quad (9)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Resonanzkurve $A(\omega)$ ist, dass sie auf Höhe $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ eine Breite von 2λ hat. Außerdem ist das Maximum genau die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators.

2.2 Experimenteller Aufbau

Für das ganze Experiment wurde ein Dämpfungsstrom von 0,3A gewählt. Um die Eigenfrequenz händisch zu messen, wurde 5 Mal die Zeit für 10 Schwingungen gemessen. Für die maximale Amplitude wurde händisch jede Schwingung bestimmt, was sehr schnelles Aufschreiben erfordert. Außerdem wurde eine Messreihe digital aufgenommen, um die Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante mit dem Computer zu bestimmen. Um die Resonanzkurve zu messen, wurde das Pohlsche Rad mit einem Schrittmotor angetrieben. Die maximale Amplitude wurde digital bestimmt.

2.3 Auswertung

Die von Hand gemessenen Periodendauern können direkt ausgewertet werden, an die Computerdaten wird wie im ersten Versuch die Theoriekurve gefittet. Auch für die Dämpfungskonstante und für die Resonanzkurve wird programmatisch eine Theoriekurve angelegt, um die Ergebnisse mit Unsicherheit zu bestimmen. Die Dämpfungskonstante wird aus der eingehüllten Exponentialfunktion bestimmt.

2.4 Ergebnis

2.4.1 Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante

In Graph 4 kann die digitale Messung und die gefittete Funktion gesehen werden. Die gleiche eingehüllende Exponentialfunktion sowie die Daten der händischen Amplitudenmessung wurden im Graphen 5 halblogarithmisch dargestellt.

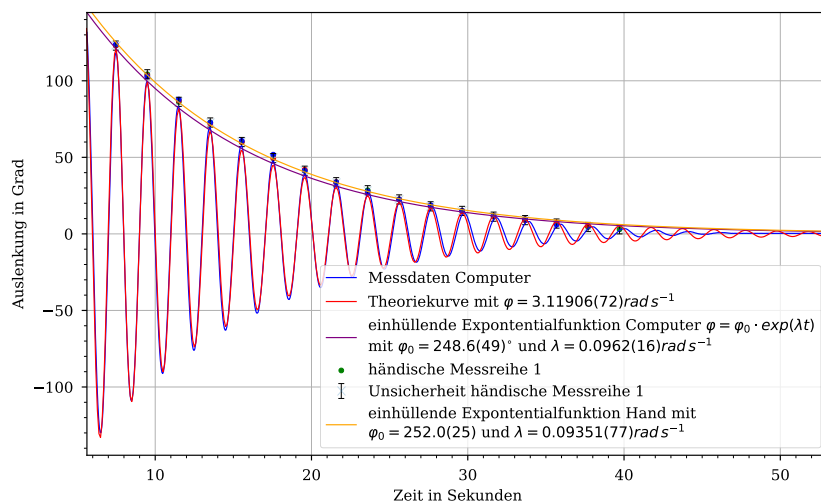


Abbildung 4: Messung der Eigenfrequenz

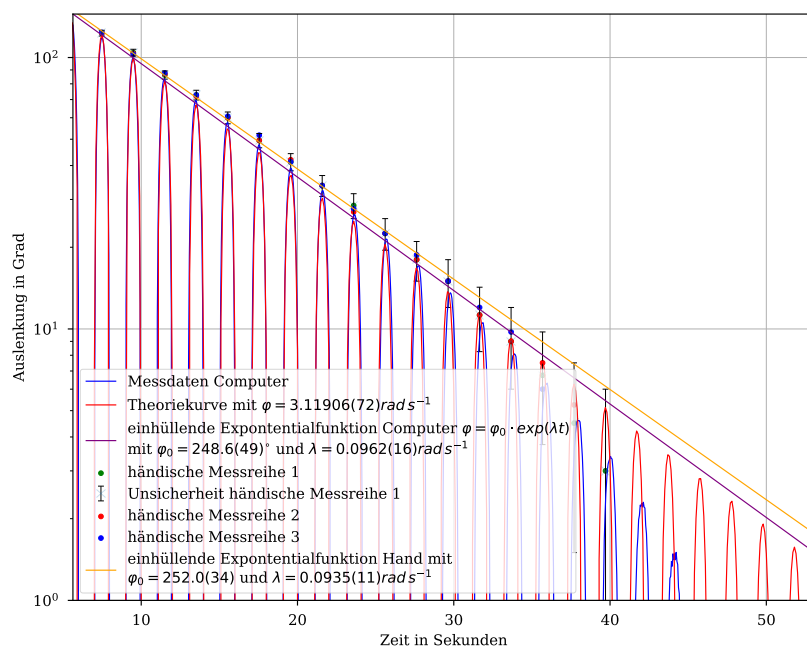


Abbildung 5: Messung der Dämpfungskonstante

Als Fehler wurden bei der händischen Messung der Eigenfrequenz berücksichtigt, die Ungenauigkeit der Stoppuhr hingegen wurde vernachlässigt, da sie um Größenordnungen kleiner ist. Bei der Amplitudenmessung wird eine Unsicherheit von ca. 2 Strichen oder 3° angenommen, da die Daten schnell abgelesen werden müssen. In Tabelle 1 wird die händisch gemessene Dämpfungskonstante und Eigenfrequenz (Herleitung siehe Anhang 4.1) sowie die digital gemessene Dämpfungskonstante und Eigenfrequenz angegeben.

	Hand	Computer
Eigenfrequenz ω	$3,118(24)\text{rad s}^{-1}$	$3.11913(74)\text{rad s}^{-1}$
Dämpfungskonstante λ	$0,0935(11)\text{s}^{-1}$	$0.0962(16)\text{s}^{-1}$
Abklingzeit τ	$10,70(13)\text{ s}$	$10,40(17)\text{ s}$

Tabelle 1: Eigenfrequenz im Vergleich

2.4.2 Resonanzkurve

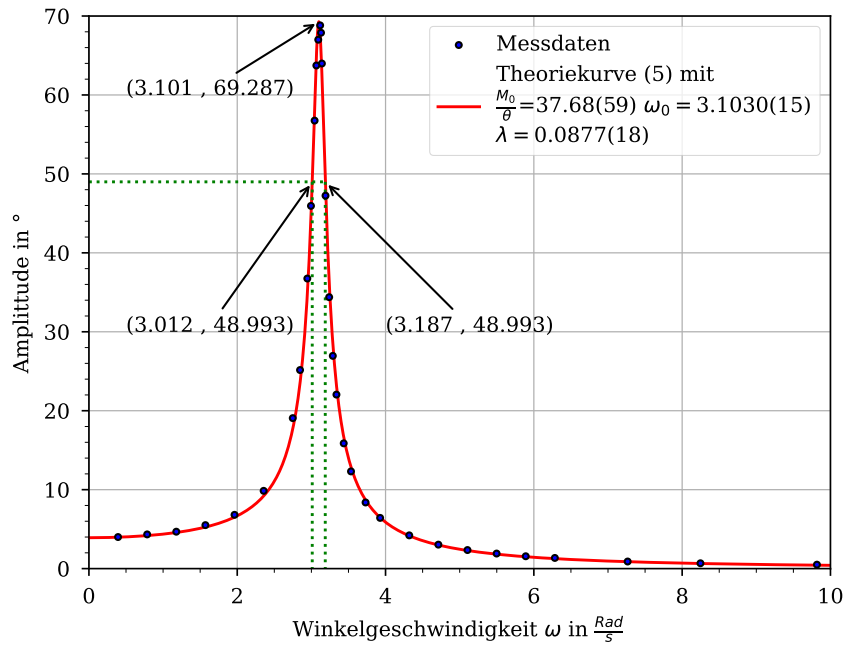


Abbildung 6: Resonanzkurve

In 6 werden die Amplituden in Bezug zu ihrer Anregungsfrequenz aufgetragen, die Messdaten sind mit der Theoriekurve 9 gefittet. Dabei sind die Fehler der einzelnen Messdaten zu klein um sie in 6 sinnvoll darstellen zu können. Aus dem Fit ergibt sich eine Eigenfrequenz von $\omega_0 = 3.1030(15)\text{rad s}^{-1}$,

eine Dämpfungskonstante von $\lambda = 0.0877(18)\text{s}^{-1}$. Durch Berechnung der Extremstellen an der gefitteten Funktion 6 konnte eine Resonanzfrequenz von $\omega_R = 3.10054\text{rad s}^{-1}$ bestimmt werden und somit eine Maximale Amplitude von $A(\omega_R) = 69.287^\circ$. Die Halbwertsbreite beträgt $2\lambda = 0.175\text{s}^{-1}$ und liegt somit im Fehlerintervall vom λ

3 Diskussion

Man merkt bei den Fits, dass das Pohlsche Rad nicht genau der Theoriekurve folgt, sondern das bei kleinen Anplituden weitere Effekte, die wahrscheinlich nicht durch die gedämpft harmonische Schwingung beschrieben können, beobachtet werden können. So gibt es immer Abweichungen bei kleineren Amplituden, die den Fehler des Fits vergrößern. Wahrscheinlich existieren noch weitere Reibungskräfte im Lager des Pohlschen Rades.

Obwohl keine Literaturwerte vorhanden sind, kann davon ausgegangen werden, dass die bestimmten Werte realistisch sind. Bei allen Kurven außer der Graph 3 liegt die Theoriekurve in der Fehlertoleranz der einzelnen Messungen. Bei der Berechnung der Dämpfungskonstante überschneiden sich die Unsicherheiten der Messungen von Computer und per Hand, jedoch nur so wenig, dass bei einer Messung wahrscheinlich das Konfidenzintervall zu klein gewählt wurde. Bei der Berechnung der Eigenfrequenz hingegen, sind die Messungen sehr nahe bei einander. Auffällig ist, dass war wie zu erwarten bei der Eigenfrequenz die Unsicherheit per Hand um eine Größenordnung größer als beim Computer ist, aber bei der Dämpfungskonstanten die Unsicherheit der Computermessung etwas größer ist. Dies liegt wahrscheinlich an der Anfangs erwähnten Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis.

4 Anhang

4.1 Berechnung von ω_d und Fehlerfortpflanzung

Zur Berechnung von ω_d wurden 5 Messungen von 10 Schwingungen durchgeführt. von diesen wurde der Mittelwert berechnet. Um dann mit der

Messung	Zeit in Sekunden
1	20,24
2	20,30
3	20,09
4	20,08
5	20,04

Tabelle 2: Messung Schwingungsdauer

Gauschen Fehlerfortpflanzung [1, (19)] ω_d zu berechnen.

$$\bar{t} = \frac{1}{5} (20,24 + 20,30 + 20,09 + 20,08 + 20,04) \text{ s} = 20,15 \quad (10)$$

$$u(t_n) = 0,3 \text{ s Reaktionszeit} \quad (11)$$

$$u(\bar{t}) = \frac{t}{\sqrt{n}} u(t_n) = 0,153 \text{ s Student-t} \quad (12)$$

$$\text{Zeit für eine Schwingung: } T = \frac{10}{\bar{t}} \quad (13)$$

$$u(\omega) = \frac{2\pi \cdot 10}{\bar{t}} \cdot u(\bar{t}) = 0,0237 \text{ rad s}^{-1} \quad (14)$$

$$\omega_d = 2\pi \cdot \frac{10}{\bar{t}} = 3,118(24) \text{ rad s}^{-1} \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

$$u(\tau) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot u(\lambda) \quad (16)$$

Literatur

- [1] Technische Universität München. Hinweise zur Beurteilung von Messungen, Messergebnissen und Messunsicherheiten (ABW). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/org/ABW.pdf>, März 2021.
- [2] Technische Universität München. Aufgabenstellung Pohlsches Rad (POR). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/POR.pdf>, August 2021.