

# Versuch 2: Pendel

Jascha Fricker, Benedict Brouwer

3. April 2022

## Abstract

In diesen beiden Versuchsaufbauten werden verschiedene Pendel untersucht. Zum einen wird mit einem Reversionspendel die Erdbeschleunigung  $g$  gemessen, zum anderen werden zwei mit einer Feder gekoppelte Pendel untersucht und mit den Messwerten u.a. die Federkonstante berechnet.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reversionspendel</b>	<b>2</b>
1.1	Experimenteller Aufbau und Theorie . . . . .	2
1.2	Ergebnisse . . . . .	2
1.3	Diskussion . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Gekoppelte Pendel</b>	<b>4</b>
2.1	Experimenteller Aufbau und Theorie . . . . .	4
2.2	Ergebnisse und Diskussion . . . . .	5
2.3	Zusammenfassung . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>7</b>
3.1	Fehlerberechnung 1 . . . . .	7
3.2	Messwerte gekoppelte Pendel . . . . .	8

# 1 Reversionspendel

## 1.1 Experimenteller Aufbau und Theorie

Ein Reversionspendel hat zwei Aufhängepunkte und zwei Massen, die alle auf einer Geraden liegen. Dabei kann eine Masse verschoben werden. Es gibt zwei Positionen des verschiebbaren Gewichts, an dem die Periode der Schwingung an beiden Aufhängepunkten gleich ist. Für ein Reversionspendel in dieser Konfiguration ist die Periode

$$\tau^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{g} \quad (1)$$

$$\Rightarrow g = 4\pi^2 \cdot \frac{l_r}{\tau^2} \quad (2)$$

(Herleitung siehe [3, Abschnitt 1.3]). Daraus ist ersichtlich, dass, wenn dieser Fall eintritt, die Periodendauer unabhängig von der Masse und des Trägheitsmoments ist. So kann mit der Periodendauer und dem Abstand der beiden Aufhängungspunkte  $l_r$  die Erdbeschleunigung ausgerechnet werden. Um diese besonderen Positionen der zweiten Masse zu finden, wird im Experiment die Periodendauer mit der Masse an verschiedenen Positionen von beiden Aufhängungen gemessen, um dann mithilfe des Schnittpunkts der Ausgleichgeraden die gewünschten Punkte zu bestimmen.

## 1.2 Ergebnisse

Im Graphen 1 wurde die Periodendauer abhängig vom Ort der zweiten Masse für beide Aufhängungspunkte dargestellt. In dem Graphen 2 können die beiden Schnittpunkte der Periodendauer der verschiedenen Aufhängungen nochmal näher gesehen werden. Die Daten wurden mit einem Polynom 6. Grades gefittet. Leider ist dies aber noch nicht genau genug, sodass einige Punkte ausserhalb der Konfidenzintervalls liegen. Dies ist uns aber erst nachher aufgefallen. Für den Fehler der Zeitmessung wurden 2ms angenommen, da in den Messdaten eine maximale Abweichung von 1ms bei verschiedenen Messungen der gleichen Periodendauer vorkam und die Lichtschranke selber auch eine Genauigkeit von 1ms hat. Beachtenswert ist, dass das Pendel eine Zeit braucht bis es sich eingependelt hat und konsistente Messwerte gemessen werden können. Der Abstand der beiden Aufhängungspunkte  $l_r$  beträgt 800,0(11)cm. In Tabelle 1 sind die Messdaten und berechneten Werte dargestellt.

	Schnittpunkt 1	Schnittpunkt 2
Periodendauer	1794,96(456)ms	1795,00(234)ms
Erdbeschleunigung	9,803(51)m s <sup>-2</sup>	9,802(26)m s <sup>-2</sup>
gewichtetes Mittel	$g = 9,802(23)\text{m s}^{-2}$	

Tabelle 1: Ergebnisse Reversionspendel

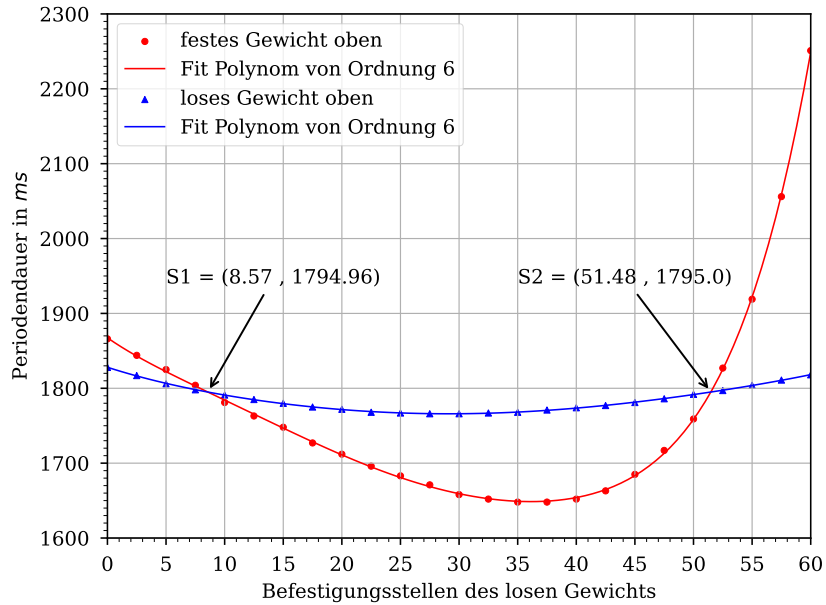


Abbildung 1: Grobe Darstellung der Messdaten (der Abstand ist nur relativ)

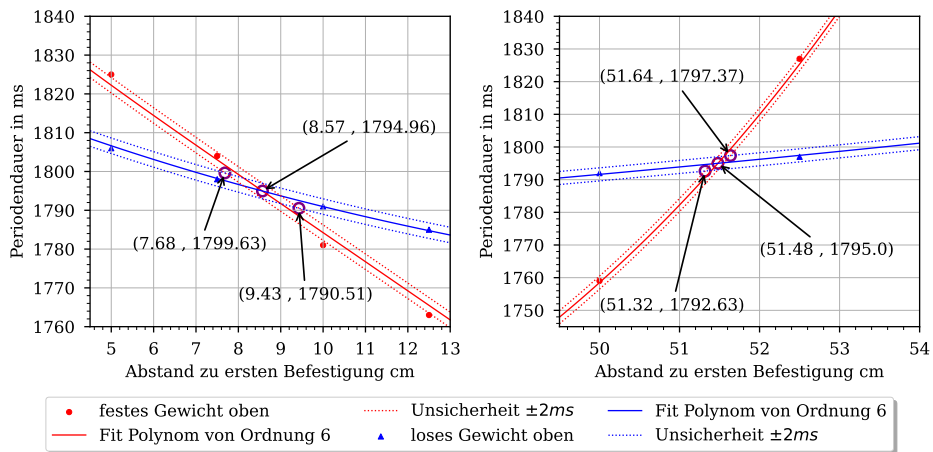


Abbildung 2: Genauere Darstellung der Schnittpunkte

### 1.3 Diskussion

Beide berechneten Periodendauern und Erdbeschleunigungen liegen sehr nahe bei einander. Der in München vom International Gravimetric Bureau gemessene Wert von  $g = 9,807232 \text{ m s}^{-2}$  [2] liegt eindeutig im Konfidenzintervall unserer Messungen und sogar relativ nahe am berechneten Wert.

## 2 Gekoppelte Pendel

### 2.1 Experimenteller Aufbau und Theorie

In diesem Experiment wurden zwei Pendel beobachtet, die mit einer Feder auf einer einstellbaren Höhe verbunden wurden. Solche Pendel haben zwei Fundamentalschwingungen. Die gleichphasige Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{gl} = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (3)$$

der Schwingung wird nur durch das Trägheitsmoments  $J$ , die Masse  $m$  und dem Abstand  $l$  des Schwerpunkts zur Aufhängung bestimmt. Die gegenphasige Schwingung mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{geg} = \sqrt{\frac{mgl + 2\kappa r^2}{J}} \quad (4)$$

beeinflusst hingegen auch die Feder mit Federkonstante  $\kappa$  und Befestigungsabstand  $r$ .

In diesem Versuch wurden drei Messreihen aufgenommen: Eine gleichphasige, eine gegenphasige und eine mit Schwebung.

Für die Ausarbeitung müssen verschiedene charakteristische Werte des Systems *gekoppelte Pendel* bestimmt werden.

Den Kopplungsgrad  $K$

$$K = \frac{\omega_{geg}^2 - \omega_{gl}^2}{\omega_{geg}^2 + \omega_{gl}^2} \quad \text{Siehe: [3, Formel (35)]} \quad (5)$$

bestimmt man mithilfe der beide Winkelgeschwindigkeiten der gleichphasigen und gegenphasigen Schwingung.

Aus der Schwebung können mithilfe der Schwebungskreisfrequenz  $\omega_S$  und der mittleren Kreisfrequenz  $\omega_M$  zuerst die Grundschwingungsfrequenzen

$$\omega_{geg} = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} + \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} = \omega_M + \omega_S \quad (6)$$

$$\omega_{gl} = \frac{\omega_{geg} + \omega_{gl}}{2} - \frac{\omega_{geg} - \omega_{gl}}{2} = \omega_M - \omega_S \quad (7)$$

ausgerechnet werden (Siehe: [3, Formel (34)]). Um dann wieder den Kopplungsgrad nach Formel (5) zu bestimmen.

Mit den gegebenen (Theorie-) Daten in **Aufgabe 13** [3] (Masse Pendelgewicht  $M_P = 1,080(20)\text{kg}$ , Masse Stange  $M_S = 0,160(5)\text{kg}$ , Abstand

Gewicht-Aufhängung  $l = 0,968(10)\text{m}$  und Länge  $l_0 01,030(20)\text{m}$  und den Formeln der Modellbildung [4] lassen sich Trägheitsmoment

$$J = 1,202(52)\text{kg m}^2 \quad (8)$$

und Drehmomentkonstante

$$D = 11,06(30)\text{N m} \quad (9)$$

ausrechnen (Fehlerberechnung siehe [1, Formel (19)]) und damit die Modellkurven mithilfe der Formeln [3, (30)] und [3, (35)] aufstellen

$$K = \frac{\kappa r^2}{D + \kappa r^2} \quad (10)$$

$$\omega_{geg} = \sqrt{\frac{D + 2\kappa r^2}{J}} \quad (11)$$

um letztendlich durch einen Fit  $\kappa$  zu bestimmen

## 2.2 Ergebnisse und Diskussion

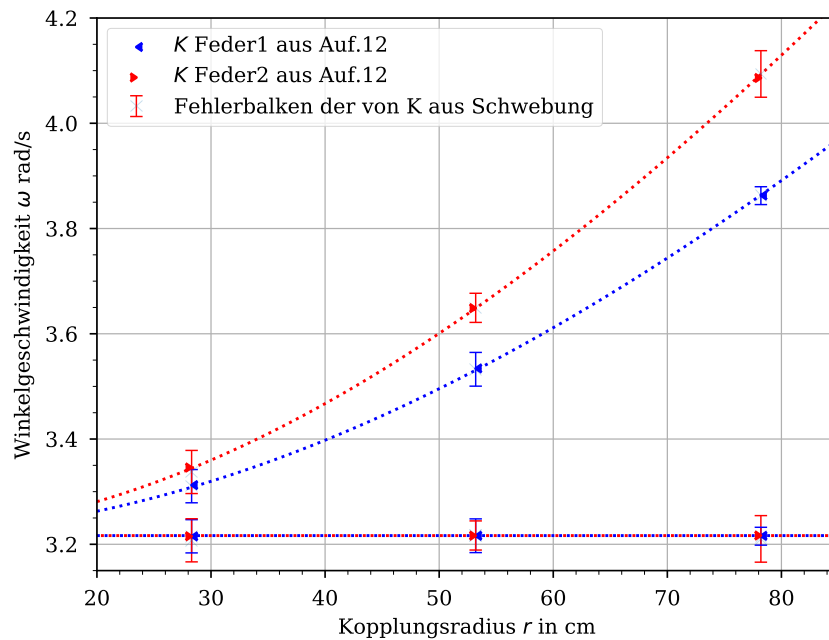


Abbildung 3: Kreisfrequenzen der beiden Fundamentalschwingungen

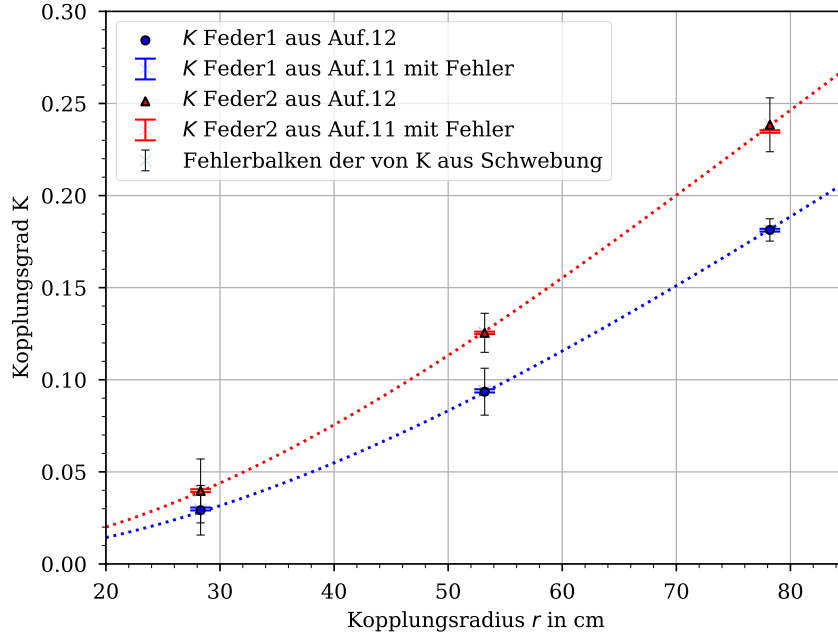


Abbildung 4: Kopplungsgrad der beiden Federn

Die verschiedenen Kreisfrequenzen wurden bestimmt, indem die jeweiligen Theoriekurven mit geeigneten Bounds an die Daten gefittet wurden, sodass sowohl die Frequenz als auch die Unsicherheit ausgegeben werden konnte. Die gesamten Messwerte sind im Anhang 3.2 zu finden.

In Graphen 3 sind die anhand der zwei verschiedenen Messreihen berechneten  $\omega_{geg}$  und  $\omega_{gl}$  dargestellt. Die Ungenauigkeiten der 1. und 2. Messreihe (Aufgabe 5) sind so klein, dass sie nicht aufgetragen werden konnten. Bei den anhand der Schwebung berechneten Frequenzen (Messreihe 3) sind zwar die Ungenauigkeiten größer, aber die Punkte aus der 1. und 2. Messreihe liegen im Konfidenzintervall. Die Fehler wurden durch die Genauigkeit der gefitteten Funktionen bestimmt. Systematische Fehler z. B. wurden nicht berücksichtigt, da diese nur minimal sind. Auch die Fehler der Längenmessung von  $r$  wurden vernachlässigt. Der Theoriewert der gleichphasigen Schwingung  $\omega_{gl}^T = 3,217(57)$ , der mithilfe von (9) und (8) berechnet wurde, liegt im Konfidenzintervall beider Messreihen.

Im Graphen 4 werden die aus Messreihe 2 und 3 bestimmten Kopplungskonstanten gezeigt.

Mit diesen Graphen können durch durch gefitteten Funktionen (10) bzw (11) die beiden Federkonstanten bestimmt werden.

Federkonstante	Feder 1	Feder 2
mit $\omega_{geg}$	4.00N m <sup>-1</sup>	5.90N m <sup>-1</sup>
mit $K$	4.01N m <sup>-1</sup>	5.65N m <sup>-1</sup>

Tabelle 2: Berechnete Federkonstanten

## 2.3 Zusammenfassung

Insgesamt sind die Ergebnisse in sich stimmig und mit den Theoriewerten vereinbar. Wie zu erwarten, gab je nach Komplexität des Fittens größer oder kleinere Fehler. Durch die automatisierte Datenaufnahme war zwar beim zweiten Versuch die Durchführung einfacher, aber die Auswertung durchaus schwerer. Es ist erstaunlich, mit was für komplizierten Versuchsaufbauten so einfache Eigenschaften wie die Federkonstante gemessen werden können.

## 3 Anhang

### 3.1 Fehlerberechnung 1

**Unsicherheit  $l_r$ :**  $l_r$  wurde mit einem Metalllineal gemessen werden. Deshalb kann mithilfe von [1, Gleichung (40)] und [1, Tabelle 5] die Unsicherheit des Lineals (Länge  $L=1\text{m}$ )

$$u(L) = 0.5\text{mm} \quad (12)$$

und mit [1, Tabelle 1] die Ablesegenauigkeit

$$u_a = \frac{0.5\text{mm}}{2\sqrt{3}} = 0.15\text{mm} \quad (13)$$

berechnet werden. Das Metalllineal hat jede 0.5mm ein Ablesestrich. Die Unsicherheiten werden zur Gesamtunsicherheit

$$u_l = \sqrt{u(L)^2 + u_a^2} = 0.52\text{mm} \quad (14)$$

zusammengefasst.

**Unsicherheit  $\tau$ :** Die Unsicherheiten wurden mithilfe von der Formel in der Aufgabenstellung [3, Aufgabe 8] berechnet.

**Unsicherheiten von  $g_1$  und  $g_2$ :** Mit der Formel 2 kann die allgemeine Formel für Fehlerfortpflanzung [1, Formel (20)] für diesen Fall angepasst werden:

$$\begin{aligned} u(\bar{g}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_r}\right)^2 u(l_r)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 u(\theta)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16\pi^4}{\theta^2} u(l_r)^2 + \frac{64\pi^4 l_r^2}{\theta^3} u(\theta)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

**Gewichteter Mittelwert:** Der Gewichtete Mittelwert und seine Unsicherheit wurde mithilfe von Formeln (29) bis (32) im ABW Skript[1] berechnet. da  $u_{int}$  mit  $0.023\text{ms}^{-2}$  größer als  $u_{ext} = 0.00019\text{ms}^{-2}$  ist, wird  $u_{int}$  als Ungenauigkeit angenommen.

### 3.2 Messwerte gekoppelte Pendel

Feder	Abstand $r$ in cm	$\omega_{geg}$ in $\text{rad s}^{-1}$	$\omega_{gl}$ in $\text{rad s}^{-1}$	$K$
1	28.3	3.31242(13)	3.2150(27)	0.02985(80)
1	53.2	3.53409(16)	3.2162(31)	0.09397(88)
1	78.2	3.862746(99)	3.2160(30)	0.18121(76)
2	28.3	3.34592(31)	3.2153(26)	0.03982(78)
2	53.2	3.64872(37)	3.2163(25)	0.12547(67)
2	78.2	4.08610(17)	3.2166(29)	0.23479(69)

Tabelle 3: Übersicht der Daten der 1. und 2. Messreihe

Feder	Abstand $r$ in cm	$\omega_M$ in $\text{rad s}^{-1}$	$\omega_S$ in $\text{rad s}^{-1}$	$K$
1	28.3	0.048(23)	3.263(23)	0.029(14)
1	53.2	0.158(23)	3.374(23)	0.094(13)
1	78.2	0.324(13)	3.539(12)	0.1813(61)
2	28.3	0.065(29)	3.272(30)	0.040(18)
2	53.2	0.216(20)	3.433(20)	0.125(11)
2	78.2	0.442(32)	3.652(32)	0.238(15)

Tabelle 4: Übersicht der Daten der 3. Messreihe

## Literatur

- [1] Technische Universität München. Hinweise zur Beurteilung von Messungen, Messergebnissen und Messunsicherheiten (ABW). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/org/ABW.pdf>, März 2021.
- [2] Andreas Lindau Roman Schwartz. Das europäische gravitationszonenkonzept nach welmec für eichpflichtige waagen.
- [3] Technische Universität München. Aufgabenstellung Pendel (PEN). <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/PEN.pdf>, August 2021.
- [4] Technische Universität München. Hinweise zur Modellbildung. Moodle Kurs, Juni 2021.