PRECÁLCULO

Rubén Becerril Fonseca
Daniel R. Jardón Arcos
J. Guadalupe Reyes Victoria
Departamento de Matemáticas
UAM-IZTAPALAPA

Prefacio

Este libro no pretende ser un libro más de Precálculo, debido a que hay en el mercado una gran cantidad de obras que de alguna manera u otra cubren más del material que se necesita, para poder iniciar a un estudiante de ciencias naturales, en el estudio de los métodos cualitativos y cuantitativos del cálculo.

Hemos escogido de entre la gran variedad de tópicos contenidos en los libros clásicos, aquéllos que en nuestra experiencia hemos sentido necesarios para los estudiantes de biociencias, particularmente para los estudiantes de nuestra institución: ingenieros en alimentos, ingenieros biotecnólogos, biólogos, hidrobiólogos, etcétera. La elección se realiza ilustrando los tópicos escogidos mediante ejercicios resueltos que están relacionados con la orientación del estudiante.

No obstante, se ha escrito el documento pensando en alcances para otras instituciones que también tienen el problema de formar biocientíficos cuyos prerrequisitos en las matemáticas básicas deben orientarse hacia el área de formación, desde el bachillerato, sin exceder el material que pueden necesitar durante sus estudios profesionales.

El primer capítulo se dedica a la aplicación de los elementos básicos de la teoría de los conjuntos, a problemas que aparecen frecuentemente en las ciencias biológicas.

El capítulo segundo se dedica a repasar los fundamentos de la Aritmética elemental y las Razones y Proporciones, ilustrándolos con un número considerable de ejemplos.

El tercer capítulo se dedica a los elementos suficientes del Álgebra elemental, que pensamos el estudiante necesitará durante su formación como biocientífico. Por otro lado, el cuarto capítulo complementa al tercero, con el tópico del Orden de los números reales.

El capítulo quinto se dedica al estudio de las relaciones funcionales algebráicas más importantes para un estudiante de ciencias naturales: las lineales, las cuadráticas, las potenciales, las polinomiales y las fraccionales lineales.

En el capítulo sexto se estudian las funciones trascendentes de uso más común para un biocientífico, entendidas como exponenciales y logarítmicas.

Finalmente, en el séptimo capítulo se exhiben los elementos básicos de las funciones trigonométricas y sus inversas.

El trabajo está diseñado para un periodo escolar trimestral o semestral, en el cual se sugiere ilustrar los elementos de precálculo (que de alguna manera el estudiante reconoce) mediante el mayor número de ejercicios resueltos, para que el aprendiz pueda acordarse de ellos y manejarlos con mayor rapidez.

La notación utilizada en el trabajo es la que contiene cualquier obra clásica de matemáticas básicas. Por ejemplo, $\Longleftrightarrow$ denotará una equivalencia, $\frac{p}{q}$ denota un cociente, etcétera. Sólo hacemos hincapié que cuando la discusión de un ejercicio se realiza o se desglosa un cálculo, el inicio de esto se denotará por el símbolo $\lhd$, mientras que el final lo marcará el símbolo $\rhd$.

Deseamos manifestar nuestro agradecimiento al Dr. Gerardo Saucedo, Director de la División de CBS, al M. en C. Arturo Preciado, Secretario Académico de la División de CBS, a la Dra. María José Arroyo, ex-Directora de la División de CBI y al Dr. Ernesto Pérez, Jefe del Departamento de Matemáticas por todo el apoyo y entusiasmo que nos brindaron. También queremos resaltar la contribución de los profesores y alumnos que usaron versiones preliminares y cuyos valiosos comentarios nos ayudaron a mejorar el texto. La presentación final se logró gracias a la colaboración de Daniel Espinosa (Flash).

Por último, quisieramos agradecer a nuestras respectivas familias por toda la paciencia infatigable a lo largo de este proyecto.

R.B.F., D.R.J.A., J.G.R.V.
IZTAPALAPA 2002

Contenido

Parte I

Conjuntos y números reales

Capítulo 1

Conjuntos

Definiremos un **conjunto** como una proposición que se hace verdadera sólo con aquellos argumentos que se llaman sus **elementos.**

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas del alfabeto latino y griego.

$$A, \quad \Omega, \quad B, \quad \Lambda, \quad C, \ldots$$

De esta manera, si la proposición P define al conjunto A, entonces lo denotaremos

$$A = \{x \mid x \, \text{satisface } P\}$$

o

$$A = \{\text{lista de todos los elementos } x \text{ que satisfacen } P\}$$

DEFINICIÓN. *Se dice que un argumento x pertenece a un conjunto A si hace verdadera la proposición que define al conjunto, o cualquier proposición equivalente.*

Para denotar que esto se cumple, lo hacemos mediante la expresión

$$x \in A$$

Cada vez que se plantea un problema mediante una proposición P, es necesario encontrar un conjunto A cuyos elementos hagan verdadera la proposición P, lo que confirmará una equivalencia entre la definición del conjunto con la solución del problema.

DEFINICIÓN. Decimos que el conjunto S es un **subconjunto** del conjunto Ω si la proposición P que define al conjunto S implica a la proposición R que define al conjunto Ω.

$$P \quad \Longrightarrow \quad R$$

Esto se denota con la expresión $S \subset \Omega$.

DEFINICIÓN. Decimos que dos conjuntos son iguales si las proposiciones que las definen son equivalentes. Esto es, una implica a la otra y recíprocamente.

Si el conjunto que satisface no tiene elementos se llama **vacío** y se denota con el símbolo $\emptyset$.

DEFINICIÓN. Dados dos conjuntos arbitrarios A y B se definen las siguientes operaciones binarias.

a. La unión de A con B, denotada por $A \cup B$, mediante

$$A \cup B = \{x| \quad x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$$

donde el conectivo "o" hace referencia a una conjunción inclusiva.

b. La intersección de A con B, denotada por $A \cap B$, mediante

$$A \cap B = \{x| \quad x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Para los conjuntos A y B, se define la **diferencia** $A \backslash B$ como el conjunto

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}$$

y se lee "A menos B".

Generalmente consideramos subconjuntos $A \subset U$, $B \subset U$, de un conjunto U que llamamos conjunto universal.

Dado un conjunto universal U y $A \subset U$ se define el **complemento** de A en U, denotado por A^c como

$$A^c = U \setminus A$$

En otras palabras, si A se define por una proposición P, el conjunto A^c está definido por la proposición negativa de P.

Un conjunto se dice **finito** si podemos contar a sus elementos.

Definimos la **cardinalidad** de un conjunto finito A como el número (entero) de elementos que contiene. Lo denotamos por $n(A)$.

Para el conjunto vacío $\emptyset$ se tiene que la cardinalidad es $n(\emptyset) = 0$, en virtud de que no contiene elemento alguno.

Una de la formas más simples de visualizar una operación entre conjuntos, es su representación mediante un **diagrama de Venn**.

Un diagrama de Venn consiste en el trazo de un rectángulo, el cual representa a un conjunto universal, y círculos distribuidos adecuadamente

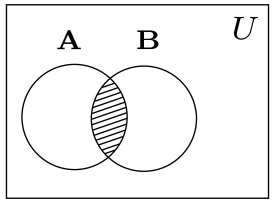


Figura 1.1: Diagrama de Venn

dentro del rectángulo representando a sus subconjuntos propios, como lo muestra la figura 1.1.

Si $A, B \subset U$ son dos subconjuntos del universal, entonces la intersección $A \cap B$ de ellos se representa dentro del diagrama por la parte sombreada de la figura 1.1.

1.1 Conjuntos y subconjuntos

Determine cuáles de las proposiciones siguientes son falsas y cuáles son verdaderas.

1. $3 \in \{-3, 2, 5\}$

$\lhd$ Es falsa debido a que $3 \neq -3, 2, 5$. $\rhd$

2. $2 \subset A = \{-2, 2, 5\}$

$\lhd$ Es falsa pues $2 \in A$ como elemento, pero no como subconjunto, es decir, la notación es errónea. $\rhd$

3. $B = \{-4, 0, 2\} \subset A = \{2, -4\}$

$\lhd$ Es falsa en virtud de que $x = 0 \in B$, pero no es un elemento de A. $\rhd$

4. $\{|-3|, \sqrt{4}\} = \{3, 2\}$

$\lhd$ Es verdadera ya que $|-3| = 3$, $\sqrt{4} = 2$. $\rhd$

5. $\{1, 3, 5\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\lhd$ Es verdadera pues $1, 3, 5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $\rhd$

6. $\{-2, 1, 7\} \neq \{7, -2, 1\}$

$\triangleleft$ Es falsa debido a que el orden de los elementos no altera a un conjunto dado. $\triangleright$

7. $1 \in \{-1, 0, 7, 8\}$

$\triangleleft$ Es falsa pues $1 \neq -1, 0, 7, 8$. $\triangleright$

8. $A = \{0, 5\} \subset B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\triangleleft$ Es falsa pues $0 \in A$ pero $0 \notin B$. $\triangleright$

En los ejercicios **9-14** escribe cada conjunto listando sus elementos.

9. $A = \{y \,|\, y \quad \text{es entero positivo menor que}\, 7\}$

$\triangleleft \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \triangleright$

10. $B = \{x \,|\, x\,(x-2)(x+5) = 0\}$

$\triangleleft \quad B = \{0, 2, -5\} \quad \triangleright$

11. $C = \{z \,|\, z \quad \text{es un entero tal que} \quad |z| < 3\}$

$\triangleleft \quad C = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \triangleright$

12. $D = \{w \,|\, w \quad \text{es un Estado mexicano del Golfo de México}\}$

$\triangleleft \quad D = \{\text{Tamaulipas, Veracruz, Tabasco, Campeche, Yucatán}\} \quad \triangleright$

13. $E = \{x \,|\, x \quad \text{es un Estado mexicano que comienza con letra M}\}$

$\triangleleft \quad E = \{\text{Michoacán, Morelos}\} \quad \triangleright$

14. $F = \{x \,|\, x\, \text{es un un tipo de sangre humana}\}$

$\triangleleft \quad F = \{A^+, A^-, B^+, B^-, AB^+, AB^-, O^+, O^-\} \quad \triangleright$

En los ejercicios **15-20** se describe cada conjunto dado con ayuda de una proposición.

15. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\triangleleft \quad A = \{x \,|\, x \quad \text{sea entero par positivo} \leq 10\}$
o bien,
$A = \{x \,|\, x = 2n,\ n = 1, 2, 3, 4, 5\} \quad \triangleright$

16. $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$\triangleleft \quad B = \{x\, \text{entero} \,| \quad 4 \leq x \leq 8\} \quad \triangleright$

17. $C = \{-3, 3\}$

$\lhd \quad C = \{x \,|\, x^2 = 9\} \quad \rhd$

18. $D =$ {Tamaulipas, Veracruz, Tabasco, Campeche, Yucatán,}

$\lhd \quad D = \{x \,|\, x$ es un Estado mexicano del Golfo de México$\} \quad \rhd$

19. $E =$ {Baja California, Coahuila, Sonora, Chihuahua, N. León, Tamaulipas}

$\lhd\, E =$ { y | y es un Estado mexicano que limita con los Estados Unidos} $\rhd$

20. $P =$ {López Mateos, Díaz Ordaz … Salinas, Zedillo, Fox}

$\lhd \quad P =$ { Los presidentes de México en el periodo de 1958-2002} $\rhd$

1.2 Operaciones entre conjuntos

Realice las operaciones $A \cap B$, $A \cup B$, A^c, $A \setminus B$, $B \setminus A$ y B^c para cada A, B y U en los ejercicios **21-25**.

21. $A = \{1, 3\}, B = \{1, 2, 4\},\ U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\lhd \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, define a los elementos que están en A o en B.

$A \cap B = \{1\}$, caracteriza a los elementos de A que están también en B.

$A^c = \{0, 2, 4, \}$, define a los elementos que están en U pero no están en A.

$A \setminus B = \{3\}$, es el conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

$B \setminus A = \{2, 4\}$, es el conjunto de los elementos que están en B pero no en A.

$B^c = \{0, 3\}$, los elementos de U que no están en B. $\rhd$

22. $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{0, 3, 4\},\ U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\lhd \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$A \cap B = \{3\}$
$A^c = \{4, 0\}$
$A \setminus B = \{1, 2\}$
$B \setminus A = \{0, 4\}$
$B^c = \{1, 2\}$ $\rhd$

23. $A = \{-5, -4, -2\}, B = \{-3, -1, 2\}, U = \{-5 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$\lhd \quad A \cup B = \{-5, -4, -2, -3, -1, 2\}$
$A \cap B = \{\ \} = \emptyset$
$A^c = \{-3, -1, 2, 0, 1, 3\}$
$A \setminus B = \{-5, -4, -2\}$
$B \setminus A = \{-3, -1, 2\}$
$B^c = \{-5, -4, -2, 0, 1, 3\} \rhd$

24. $A = \{-3, 1, 5\},\ B = \{-4, -3, 0, 1, 2, 5\},\ U = \{-5, -4, -3, \cdots, 4, 5\}$

$\lhd \quad A \cup B = \{-3, 1, 5, -4, 0, 2\}$
$A \cap B = \{-3, 1, 5\}$
$A^c = \{-5, -4, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$
$A \setminus B = \{\ \} = \emptyset$
$B \setminus A = \{-4, 0, 2\}$
$B^c = \{-5, -2, -1, 3, 4\} \rhd$

25. $A = \{x \,|\, x \quad \text{es un entero positivo} \quad \text{y} \quad x \geq 10\}$
$B = \{x \,|\, x \quad \text{es un entero positivo} \quad \text{y} \quad x \leq 100\}$
$U = \{x \,|\, x \quad \text{es entero positivo}\}$

$\lhd \quad A \cup B = U$
$A \cap B = \{x \,|\, x \quad \text{es entero positivo}, \quad 10 \leq x \leq 100\}$
$A \setminus B = \{101, 102, 103, \cdots\}$
$B \setminus A = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
$A^c = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
$B^c = \{101, 102, 103, \cdots\} \rhd$

26. Las leyes de **D' Morgan** para la pareja de conjuntos A y B contenidos en el conjunto universal U son

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Verifique Las leyes de D'Morgan para los conjuntos,

$$A = \{1, 4, 7, 10, 13\},\ B = \{2, 4, 8, 10, 12, 14\},\ U = \{1, 2, \cdots, 15\}$$

$\lhd \quad A \cup B = \{1, 4, 7, 10, 13, 2, 8, 12, 14\}$
$A \cap B = \{4, 10\}$
$A^c = \{2, 6, 8, 12, 14, 3, 5, 9, 11, 15\}$
$B^c = \{1, 3, 7, 13, 5, 9, 6, 11, 15\}$
De esta manera,
$(A \cup B)^c = \{3, 5, 6, 9, 11, 15\} = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15\} = A^c \cup B^c \quad \triangleright$

27. Verifique Las leyes de D' Morgan para los conjuntos,

$$A = \{1, 3\}, \quad B = \{1, 2, 4\}, \quad U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$\triangleleft$ En el ejercicio 22 hemos encontrado los conjuntos,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{1\}$

$A^c = \{0, 2, 4\}$

$B^c = \{3, 0\}$

Consecuentemente se cumplen Las leyes de D' Morgan

$$(A \cup B)^c = \{0\} = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = \{0, 2, 3, 4\} = A^c \cup B^c \quad \triangleright$$

28. Calcule $n(A \cap B)$ y $n(A \cup B)$ para los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$\triangleleft$ La unión de los conjuntos A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, y por lo tanto, $n(A \cup B) = 7$.

Por otro lado, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, de donde, $n(A \cap B) = 3 \quad \triangleright$

29. Una fórmula para calcular la cardinalidad de la unión $A \cup B$ de dos conjuntos A y B está dada por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

El hecho de restar la cantidad $n(A \cap B)$ obedece a que los elementos del conjunto $A \cap B$ han sido considerados dos veces.

Verifique esta fórmula para los conjuntos,

$$A = \{1, 3, 5, 7, 11\}, \quad B = \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

$\triangleleft$ Tenemos que $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 4, 8\}$ de lo cual se sigue que $n(A \cup B) = 8$

La intersección de los conjuntos dados es $A \cap B = \{5, 7\}$ y consecuentemente, se tiene $n(A \cap B) = 2$.

De esta forma, ya que $n(A) = 5$ y $n(B) = 5$, entonces

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 = n(A \cup B)$$

lo que verifica la igualdad. $\rhd$

30. Verifique la igualdad del ejercicio 29 para los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$\lhd$ Ya se vió en el ejercicio 28 que,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad n(A \cup B) = 7$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}, \quad n(A \cap B) = 3$$

y como $n(A) = 5$, $n(B) = 5$, entonces

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 = n(A \cup B)$$

lo cual verifica la igualdad mencionada. $\rhd$

Se define por U el conjunto de los estudiantes de Ciencias Biológicas y de la Salud (CBS) de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. Se define por M al conjunto de estudiantes de CBS que cursan la materia de Matemáticas I, por B al conjunto de estudiantes de CBS cursando Biología General, y por Q a los inscritos en el curso de Química I. Describa con proposiciones equivalentes a los conjuntos **31 - 40**.

31. $B \cup Q$

$$\lhd \quad B \cup Q = \{\text{Los estudiantes de CBS que cursan Biología General o Química I}\} \quad \rhd$$

32. $B \cap M$

$$\lhd \quad B \cap M = \{\text{Los estudiantes qua cursan Biología General y Matemáticas I}\} \quad \rhd$$

33. M^c

$$\lhd \quad M^c = \{\text{Los estudiantes que no cursan Matemáticas I}\} \quad \rhd$$

34. $B^c \cup M$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Matemáticas I o
no cursan Biología General} $\rhd$

35. $B \cap M \cap Q$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Biología General,
Matemáticas I y Química I} $\rhd$

36. $B \cup M \cup Q$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Biología General
Matemáticas I o Química I} $\rhd$

37. $M \cap (Q \cup B)$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Matemáticas I y,
Química I o Biología General} $\rhd$

38. $M^c \cap (Q \cup B)$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Biología General o
Química I, pero no Matemáticas} $\rhd$

39. $B \cup (M \cap Q)$

$\lhd$ {Los estudiantes que cursan Biología General o,
Química y Matemáticas} $\rhd$

40. $M \cap (B \cup Q)^c$

{Los estudiantes que cursan Matemáticas I, pero
no Química ni Biología General}

41. Verifique para este caso la igualdad $M^c = U \setminus M$

$\lhd$ Ya que por definición,

$$M^c = \{\text{Estudiantes que no cursan Matemáticas I}\}$$

y

$$U \setminus M = \{\text{Estudiantes de CBS que no cursan Matemáticas I}\}$$

entonces se sigue inmediatamente que $M^c = U \setminus M$. $\rhd$

42. Compruebe Las leyes de D' Morgan para los conjuntos M y B.

$\lhd M \cup B = \{$Estudiantes que cursan Matemáticas I o Biología General$\}$

$$(M \cup B)^c = \{\text{Estudiantes que no cursan ni Matemáticas}$$
$$\text{ni Biología General}\}$$

$= \{$ No cursan Matemáticas y no cursan Biología General$\}$
$= \{$No cursan Matemáticas $\} \cap \{$No cursan Biología General$\}$
$= M^c \cap B^c$

Por otro lado,
$M \cap B = \{$Estudiantes que cursan Matemáticas y Biología General $\}$

$$(M \cap B)^c = \{\text{ Estudiantes que no cursan Matemáticas}$$
$$\text{ni Biología General}\}$$

$= \{$No cursan Matemáticas$\} \cup \{$No cursan Biología General$\}$
$= M^c \cup B^c$ $\rhd$

1.3 Diagramas de Venn

Represente cada conjunto en los ejercicios **43-54** sombreando el diagrama de Venn correspondiente.

43. A^c **44**. $A \cap B$ **45**. $A \cup B$

46. $A^c \cup B$ **47**. $A^c \cap B$ **48**. $A \cap B \cap C$

49 $(A \cap C) \cup B$ **50**. $(B \cup C) \cap A$ **51**. $(A \cup B)^c \cup C$

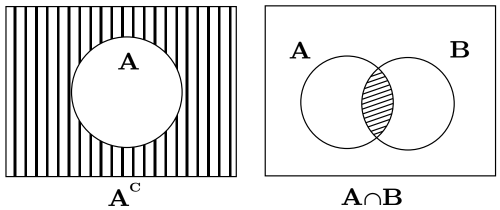


Figura 1.2: $A^c, A \cap B$.

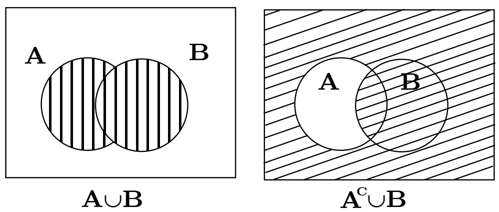


Figura 1.3: $A \cup B, A^c \cup B$.

52. $(A \cap C)^c \cup B$ **53**. $(A \cup B) \cap (C \cup B)$ **54**. $(B \cap A^c)^c \cup (C \cap A)$

$\lhd$ Los diagramas de Venn correspondientes a los ejercicios 43-54 se ilustran en las figuras 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 1.7 respectivamente. $\rhd$

55. Los animales prehistóricos se pueden clasificar de varias maneras. Defínase por E al conjunto de animales que tenían extremidades cortas y por T al conjunto de animales prehistóricos que vivían en zona templada.

a. Los caseídos, rorcuales y tecodontes de agua dulce tenían extremidades cortas, pero no vivían en zona templada.

b. Los tecodones de tierra y terápsidos tenían extremidades cortas y vivían en zona templada.

c. Los mamíferos cenozoicos y dinosaurios vivían en zona templada, pero no tenían extremidades cortas.

Coloque a los caseídos, rorcuales, tecodontes de agua dulce y de tierra, terápsidos, mamíferos cenozoicos y dinosaurios en las partes apropiadas de un diagrama de Venn que contenga a los conjuntos E y T.

$\lhd$ Claramente se tiene que,

$$\{\text{Caseídos, rorcuales y tecodontes de agua dulce }\} \subset E \setminus T$$

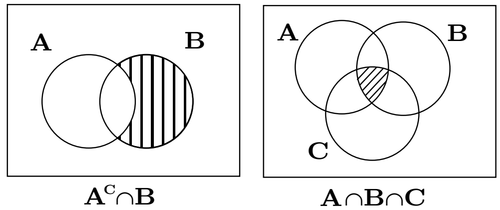


Figura 1.4: $A^c \cap B, A \cap B \cap C$.

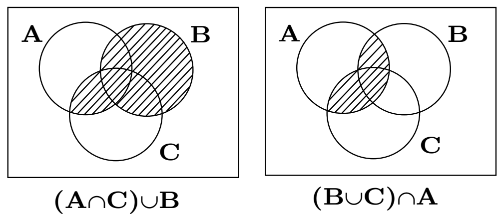


Figura 1.5: $(A \cap C) \cup B, (B \cup C) \cap A$.

$$\{\text{Tecodontes de tierra y terápsidos}\} \subset T \cap E$$

$$\{\text{Mamíferos cenozoicos y dinosaurios}\} \subset T \setminus E$$

lo cual puede ser apreciado en el diagrama de Venn de la figura 1.7. $\triangleright$

56. En una encuesta hecha a 120 personas se encontró que a 71 personas les gusta escuchar música clásica, a 80 personas les gusta escuchar música popular mexicana, y que a 42 de ellas les gustaba ambos tipos de música.

a. ¿A cuántas personas, de las encuestadas, les gusta la clásica, pero no la popular?

b. ¿A cuántas personas no les gusta ninguna de las dos?

$\triangleleft$ Defínase por U al conjunto de las personas encuestadas y a los conjuntos de personas por gustos, como se indica a continuación.

$$C = \{\text{personas que les gusta la música clásica}\}$$

$$P = \{\text{personas que les gusta la música popular}\}$$

Iniciando con $n(C \cap P) = 42$ y utilizando el hecho de que $n(C) = 71$ y $n(P) = 80$, procediendo hacia atrás en el conteo de cada conjunto, tenemos que las personas encuestadas se reparten dentro de U como se muestra en tal figura.

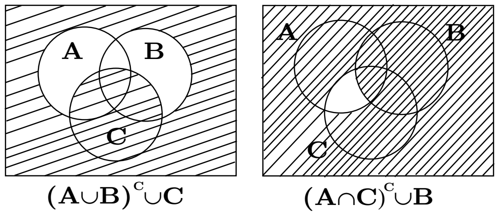


Figura 1.6: $(A \cup B)^c \cup C, (A \cap C)^c \cup B$.

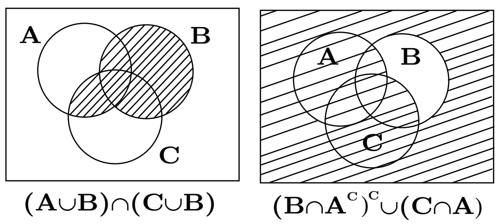


Figura 1.7: $(A \cup B) \cap (C \cup B), (B \cap A^c)^c \cup (C \cap A)$

a. El conjunto $C \setminus P$ representa a las personas encuestadas que gustan de la música clásica, pero no de la popular. Así se tiene que $n(C \setminus P) = 29$ personas.

b. El conjunto $(C \cup P)^c$ está formado por aquellas personas que no gustan de ninguno de los dos géneros musicales. Así , $n((C \cup P)^c) = 11$ personas. $\triangleright$

57. En un zoológico hay 80 animales de 11 meses de nacidos. A tal edad se les enseñan dos aspectos: *ambientación y a cambio de alimentación.* Hay 40 animales ambientándose, 30 cambiando su alimentación y 20 aprendiendo ambas cosas.

a. ¿Cuántos animales se ambientan, pero no cambian su alimentación?

b. ¿Cuántos cambian su alimentacion, sin cambiar su ambiente?

c. ¿Cuántos animales cambian su alimentación o su ambiente?

$\triangleleft$ Definamos por U al conjunto de animales con 11 meses de nacidos y clasifiquemos a los subconjuntos de U de la forma siguiente.

$$A = \{\text{animales ambientándose}\}$$

$$B = \{\text{animales cambiando su alimentación }\}$$

De la figura 1.9 se sigue que $A \cap B$ el conjunto de los animales ambientándose y cambiando su alimentación tiene una cardinalidad $n(A \cap B) = 20$.

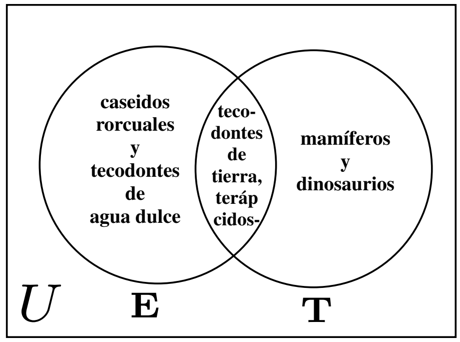


Figura 1.8: Clasificación de animales prehistóricos.

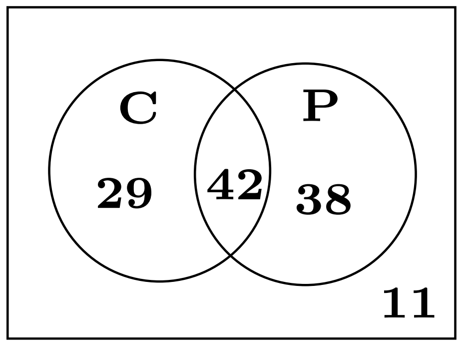


Figura 1.9: Diagrama de Venn para la encuesta de música

Esto indica que los demás individuos se reparten dentro del diagrama como se muestra en la figura. Por lo tanto,

$$n(A \setminus B) = 20$$
$$n(B \setminus A) = 10$$
$$n(A \cup B) = 50$$

Lo anterior permite responder las preguntas elaboradas.

a. 20 animales se ambientan sin cambiar su alimentación.

b. 10 cambian su alimentación sin cambiar su ambientación.

c. 50 animales cambian su alimentación o su ambiente. ▷

58. En el grupo BA01 de Matemáticas I para CBS de la UAM-I que cuenta con 40 alumnos, se realizó una práctica acerca de la relación de los eventos,

"Hacer taquito la lengua"

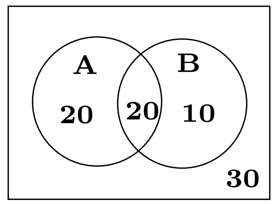


Figura 1.10: Diagrama de Venn para los animales del zoológico.

"Tener el lóbulo de la oreja despegado"

se observó que 28 alumnos podían hacer taquito la lengua, 26 tenían el lóbulo despegado y que 24 podían realizar ambas cosas.

a. ¿Cuántos pueden hacer taquito la lengua sin tener el lóbulo despegado?

b. ¿Cuántos tienen el lóbulo despegado sin poder hacer taquito la lengua?

c. ¿Cuántos no pueden hacer taquito con la lengua ni tienen el lóbulo despegado?

$\lhd$ Definamos por U el conjunto de alumnos del grupo BA01 y sean los conjuntos,

$$T = \{\text{alumnos que pueden hacer taquito con la lengua}\}$$

$$L = \{\text{alumnos que tienen lóbulo despegado}\}$$

Como $n(T \cap L) = 24$, repartiendo los demás elementos de acuerdo a las cardinalidades $n(T) = 28$ y $n(L) = 26$, de la figura 1.10 se sigue que,

a. $n(T \setminus L) = 4$ es el número de alumnos que hacen taquito la lengua sin tener el lóbulo despegado.

b. $n(L \setminus T) = 2$ es el número de alumnos que tienen el lóbulo despegado y no pueden hacer taquito la lengua.

c. $n((T \cup L)^c) = 10$ es el número de alumnos que no pueden hacer taquito la lengua ni tienen el lóbulo despegado. $\rhd$

59. En un grupo de 90 alimentos, 36 productos contienen azúcar, 32 tienen ácido cítrico y 32 conservador; 6 productos contienen a la vez, azúcar, ácido cítrico y conservador; 12 contienen ácido cítrico y azúcar, 10 contienen conservador y aźucar, y finalmente 8 contienen ácido cítrico y conservador.

a. ¿Cuántos productos contienen exclusivamente ácido cítrico?

b. ¿Cuántos sólo azúcar?

c. ¿Cuántos contienen sólo conservador?

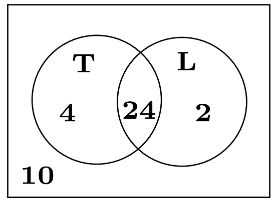


Figura 1.11: Diagrama de Venn del problema 58

d. ¿Cuántos de productos contienen ácido cítrico y conservador, pero no azúcar.

e. ¿Cuántos productos no contienen ninguna de las sustancias mencionadas?

$\triangleleft$ Defínase por U al grupo de alimentos y definamos los subconjuntos siguientes de U por,

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{productos que contienen azúcar}\}\\
B &= \{\text{productos que contienen ácido cítrico }\}\\
C &= \{\text{productos que contienen conservador}\}
\end{aligned}
$$

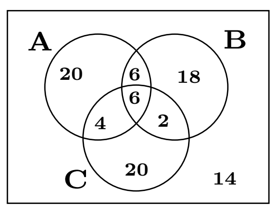


Figura 1.12: Diagrama de Venn del problema 59.

En virtud de que $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A \cap B) = 12$, $n(A \cap C) = 10$ y $n(B \cap C) = 8$, en la figura 1.11 se puede observar que son válidas las siguientes afirmaciones.

a. $n(B \setminus (A \cup C)) = 18$

b. $n(A \setminus (B \cup C)) = 20$

c. $n(C \setminus (A \cup B)) = 20$

d. $n(B \cap C \setminus A) = 2$

e. $n((A \cup B \cup C)^c) = 14$

Esto responde a las preguntas dadas. $\triangleright$

60. En la cafetería de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa de 900 comidas servidas durante cierto día laboral se obtuvo la siguiente información.

"370 incluyeron filete de pescado."
"290 incluyeron carne asada."
"214 incluyeron tinga de pollo".
"30 incluyeron filete y carne asada."
"40 incluyeron filete y tinga."
"20 incluyeron carne asada y tinga."
"20 incluyeron filete, carne asada y tinga."

a. ¿Cuántas comidas llevaron exclusivamente filete?
b. ¿Cuántas comidas llevaron exclusivamente carne asada?
c. ¿Cuántas no llevaron ninguno de los tres?
d. ¿Cuántas llevaron filete o carne asada, pero no tinga?

$\triangleleft$ Definamos por U al conjunto de comidas servidas y a los conjuntos siguientes cuyas comidas contienen,

$$
\begin{aligned}
F =& \{\text{Comidas que incluyeron filete}\}\\
C =& \{\text{Comidas que incluyeron carne asada}\}\\
T =& \{\text{Comidas que incluyeron tinga}\}
\end{aligned}
$$

Así se tiene que $n(F\cap C\cap T) = 20$. Como además se sabe que $n(F\cap C) = 30$, $n(F\cap T) = 40$ y $n(C\cap T) = 20$, de la figura 1.12 se obtienen las siguientes respuestas.

a. $n(F \setminus (C \cup T))$ =320 comidas llevaron sólo filete.

b. $n(C \setminus (F \cup T))$ =260 tienen sólo carne asada.

c. $n((F \cup C \cup T)^c)$ =96 comidas llevaron ninguno de los tres.

d. $n((F \cup C) \setminus T)$ =590 comidas que llevaron filete o carne asada, pero no tinga. $\triangleright$

61. En una encuesta a 40 personas sobre sus deportes olímpicos preferidos, se encontró que a 20 les gusta la gimnasia, a 20 la natación y a 12 el ciclismo. A 5 de estas personas les gustan simultáneamente los tres deportes, a 8 la gimnasia y la natación, a 7 la gimnasia y el ciclismo, y a 6 la natación y el ciclismo.

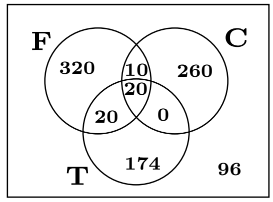


Figura 1.13: Diagrama de Venn del problema 60.

a. ¿A cuántas personas les gusta la natación y el ciclismo pero, no la gimnasia?

b. ¿A cuántas les gusta la gimnasia o el ciclismo, pero no la natación?

c. ¿A cuántas les gusta uno o dos de estos deportes, pero no los tres conjuntamente?

◁ Se concluye que

$$G = \{\text{personas que les gusta la gimnasia}\}$$

$$N = \{\text{personas que les gusta la natación }\}$$

$$G = \{\text{personas que les gusta el ciclismo}\}$$

Procediendo de la misma forma que en los ejercicios anteriores se tiene el diagrama de Venn mostrado en la figura 1.13.

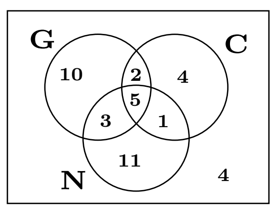


Figura 1.14: Diagrama para el ejercicio 61

De esta forma tenemos:

a. $N \cap C - G$ es el conjunto de personas que gustan de la natación y el ciclismo, pero no de la gimnasia y tal conjunto tiene cardinalidad

$$n(N \cap C - G) = 1$$

b. $G \cup C - N$ es el conjunto de personas que gustan de la gimnasia o del ciclismo, pero no de la natación. El número de personas en este conjunto es

$$n(G \cup C - N) = 16$$

c. $G \cup N \cup C - G \cap N \cap C$ es el conjunto de personas que les gusta uno o dos de los deportes, pero no los tres, y su cardinalidad es

$$n(G \cup N \cup C - G \cap N \cap C) = 31 \quad \triangleright$$

1.4 Ejercicios

1. Dados los conjuntos

$$A = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, a, b\} \quad B = \{2, 6, c, b\} \quad C = \{2, 3, 5\}$$

determine si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes.

a. $5 \in A$ **b.** $A \subset B$ **c.** $4 \in A$
d. $b \in A \cap B$ **e.** $A \cap B \subset C$ **f.** $2 \in B$ **g.** $\emptyset \subset A$

2. Exhibe los elementos de los conjuntos siguientes, o bien defínelos mediante una proposición.

a. $A = \{x \,|\, x$ es un elemento del grupo IA de la Tabla Periódica$\}$
b. $B = \{\, x \,|\, x = 3n,\ n = 0, 1, \cdots, 10\}$
c. $B = \{x|x$ es curso del TGA de la división de CBS en la UAM Iztapalapa$\}$
d. $D = \{\, x \,|\, x$ es Estado mexicano colindante con el D.F.$\}$
e. $E = \{$He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn$\}$
f. $F = \{$Paul McCartney, John Lennon, George Harrison, Ringo Star$\}$

3. Dados los conjuntos

$$U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

a continuación realice las operaciones mencionadas.

a. $A \cup B$ **b.** $B \cap A$ **c.** B^c **d.** A^c **e.** $A \cup B^c$
f. $B \setminus A$ **g.** $A \setminus B$ **h.** $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ **i.** $B \cup (A \setminus B)$

4. Verifique Las leyes de D' Morgan para los conjuntos mencionados en el ejercicio **3.**

a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **b.** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

5. Determine las cardinalidades de los conjuntos **a. - i.** del ejercicio **3.**

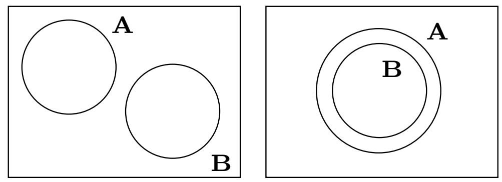


Figura 1.15: Diagramas de Venn del ejercicio **7.**

6. Determine todos sus subconjuntos para el conjunto $A = \{\text{O,C,H}\}$. ¿Cuántos son?

7. En los diagramas de Venn en la figura 1.15 sombrea los conjuntos

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $B^c \setminus A$ **d.** $A \setminus B$

8. Observe el diagrama de Venn de la figura 1.16, y calcule:

a. $n(A \cup B \setminus C)$ **b.** $n((A \cap B)^c \cap C)$ **c.** $n(A \setminus (B \cup C))$
d. $n(A \cap B \cap C)$

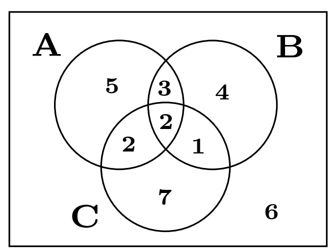


Figura 1.16: Diagrama de Venn del ejercicio **8.**

9. Se interrogó a 300 jóvenes acerca de la adicción al tabaco, alcohol, drogas o alguna combinación de éstas. Se encontró que 122 lo eran al alcohol, 212 al tabaco y 97 a las drogas, 67 eran adictos tanto al alcohol como al tabaco, 50 al alcohol y a las drogas, 44 al tabaco y a las drogas, y solamente 7 lo eran a los tres tipos.

a. ¿Cuántos son adictos al alcohol pero no al tabaco?

b. ¿Cuántos son adictos al alcohol y las drogas, pero no al tabaco?

c. ¿Cuántos son adictos al tabaco o a las drogas, pero no al alcohol?

Capítulo 2

Aritmética elemental

2.1 Operaciones elementales

Los subconjuntos más importantes del conjunto de los números reales son:

El conjunto de los **Números Naturales**.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

El conjunto de los **Números Enteros.**

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

El conjunto de los **Números Racionales.**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | \, p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\}$$

El conjunto de **Números Reales** lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

Es muy importante establecer una asociación entre los números reales y el conjunto de puntos de una recta. Se traza una recta horizontal, se fija un punto sobre la recta y se hace corresponder con el cero. A partir de este punto y hacia la derecha se coloca el segmento unidad y se marca un punto. A este le corresponde el número **uno**. Así sucesivamente podemos colocar todos los números enteros positivos a la derecha y los negativos a la izquierda. Dividiendo los segmentos pueden localizarse los números racionales (cociente de dos enteros). Un número racional es de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b entero y $b \neq 0$.

Un número real x es mayor que el número y si se encuentra más a la derecha sobre la recta numérica, es menor si se encuentra más a la izquierda. Un número es positivo si está a la derecha del cero y es negativo si se encuentra a la izquierda del cero.

Toda escala mide cantidades, por ejemplo, una regla graduada o un termómetro hace uso de esta asociación.

El símbolo matemático = en la literatura usual se lee: "igual a". Anteriormente, hemos tratado la igualdad de conjuntos y ahora trataremos la de números reales.

Las siguientes son las propiedades básicas de la igualdad, las letras a, b, c, d, denotarán números reales.

Reflexiva $a = a$

Simétrica $a = b$ es lo mismo que $b = a$

Transitiva $a = b$ y $b = c$ implican $a = c$

Adición $a = b$ y $c = d$ implican $a + c = b + d$

Multiplicación $a = b$ y $c = d$ implican $ac = bd$

Para ilustrar tales propiedades se muestran las siguientes implicaciones.

$a = b$ es lo mismo que $-a = -b$

$5 = a$ es lo mismo que $a = 5$

$16 = -b$ es lo mismo que $-b = 16$ y por lo tanto $b = -16$

Si $b = 13.8$ y $c = b$, entonces $c = 13.8$

Si $a = 2.91$ y $d = 3a + 1$, entonces

$$d = 3(2.91) + 1 = 8.73 + 1 = 9.73$$

Si $x = 3$ y $t = x^2 + 2x$ entonces

$$t = 3^2 + 2(3) = 15$$

Si $m = 2$, entonces $x = m\pi = 2\pi$

Mencionamos las propiedades de la adición y multiplicación de los números reales)

Suma

- **conmutatividad:** $a + b = b + a$
- **asociatividad:** $a + (b + c) = (b + a) + c$
- 0 es el neutro aditivo: $a + 0 = 0 + a = a$
- $-a$ es el inverso aditivo: $a + (-a) = 0$

Multiplicación

- **conmutatividad:** $ab = ba$
- **asociatividad:** $a(bc) = (ab)c$
- 1 es el neutro multiplicativo: $a \cdot 1 = a$
- Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a} = a^{-1}$ es el inverso multiplicativo o recíproco de a, es decir,

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

- La multiplicación se distribuye en la suma,

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(a+b)c = ac + bc$$

La suma de fracciones de números reales arbitrarios obedece la siguiente regla.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

El producto y cociente de expresiones con signos cumple las siguientes leyes.

a. $(a)(b) = (+a)(+b) = ab$

b. $(-a)(b) = (-a)(+b) = -ab$

c. $(a)(-b) = (+a)(-b) = -ab$

d. $(-a)(-b) = ab$

e.

$$\frac{a}{b} = \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$$

f.

$$\frac{-a}{b} = \frac{-a}{+b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

g.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Para un cociente de fracciones de números reales arbitrarios se cumple la siguiente **regla** (**del sandwich**).

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

1. Calcule la suma de cada uno de los siguientes conjuntos de números.

a. $-\frac{13}{2}, 5$

$$\triangleleft\ -\frac{13}{2}+5=\frac{-13}{2}+\frac{5}{1}=\frac{-13+2(5)}{2}=\frac{-13+10}{2}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}\ \triangleright$$

b. $7, -\frac{2}{3}$

$$\triangleleft\quad 7+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{1}+\frac{-2}{3}=\frac{3(7)+1(-2)}{3}=\frac{21-2}{3}=\frac{19}{3}\quad\triangleright$$

c. $-\frac{6}{7}, -\frac{9}{8}$

$$\triangleleft\ -\frac{6}{7}+\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{-6}{7}+\frac{-9}{8}=\frac{8(-6)+7(-9)}{56}=\frac{-48-63}{56}=\frac{-111}{56}\ \triangleright$$

d. $\frac{4}{3}, 10$

$$\triangleleft\quad \frac{4}{3}+10=\frac{4}{3}+\frac{10}{1}=\frac{4+3(10)}{3}=\frac{4+30}{3}=\frac{34}{3}\quad\triangleright$$

e. $-3, -\frac{11}{2}, \frac{4}{7}$

$$\triangleleft\quad -3+\left(-\frac{11}{2}\right)+\frac{4}{7}=\frac{-3}{1}+\frac{-11}{2}+\frac{4}{7}=\frac{14(-3)+7(-11)+2(4)}{14}$$

$$=\frac{-42-77+8}{14}=\frac{-111}{14}\quad\triangleright$$

f. $\frac{12}{11}, -8, 11$

$$\triangleleft\quad \frac{12}{11}+(-8)+11=\frac{12}{11}+\frac{-8}{1}+\frac{11}{1}=\frac{12(1)+11(-8)+11(11)}{11}$$

$$=\frac{12-88+121}{11}=\frac{45}{11}\quad\triangleright$$

g. $\frac{-9}{4}, \frac{13}{2}, -7$

$$\lhd -\frac{9}{4}+\frac{13}{2}+(-7)=\frac{-9}{4}+\frac{13}{2}+\frac{-7}{1}=\frac{-9+2(13)+4(-7)}{4}=\frac{-9+26-28}{4}$$
$$=\frac{-11}{4}=-\frac{11}{4}\quad\rhd$$

2. En los incisos **a. - d.** del ejercicio anterior, reste el segundo número del primero.

a. $-\frac{13}{2}, 5$

$$\lhd\quad -\frac{13}{2}-5=\frac{-13}{2}+\frac{-5}{1}=\frac{-13-5(2)}{2}=\frac{-13-10}{2}=\frac{-23}{2}=-\frac{23}{2}\quad\rhd$$

b. $7, \frac{-2}{3}$

$$\lhd\quad 7-\left(\frac{-2}{3}\right)=7-\left(-\frac{2}{3}\right)=7+\frac{2}{3}=\frac{3(7)+2}{3}=\frac{21+2}{3}=\frac{23}{3}\quad\rhd$$

c. $-\frac{6}{7}, \frac{-9}{8}$

$$\lhd -\frac{6}{7}-\left(\frac{-9}{8}\right)=-\frac{6}{7}-\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{-6}{7}+\frac{9}{8}=\frac{8(-6)+9(7)}{56}=$$
$$\frac{-48+63}{56}=\frac{15}{56}\rhd$$

d. $\frac{4}{3}, 10$

$$\lhd\quad \frac{4}{3}-10=\frac{4-10(3)}{3}=\frac{4-30}{3}=\frac{-26}{3}=-\frac{26}{3}\quad\rhd$$

3. Calcule las siguientes sumas.

a. $\frac{8}{3}+\frac{2}{7}-\left(\frac{3}{4}-4\right)+6-\frac{1}{3}-\left(9+\frac{5}{7}\right)$

$$\lhd\quad \frac{8}{3}+\frac{2}{7}-\left(\frac{3}{4}-4\right)+6-\frac{1}{3}-\left(9+\frac{5}{7}\right)=\frac{8}{3}+\frac{2}{7}-\frac{3}{4}+4+6-\frac{1}{3}-9-\frac{5}{7}$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{5}{7}\right) + (4 + 6 - 9) - \frac{3}{4} = \frac{7}{3} - \frac{3}{7} + 1 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{28(7) - 12(3) + 1(84) - 3(21)}{84} = \frac{196 - 36 + 84 - 63}{84} = \frac{181}{84} \quad \triangleright$$

b. $\left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{2}{4}\right) - \left(6 - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} - 8\right)$

$$\triangleleft \quad \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{2}{4}\right) - \left(6 - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} - 8\right) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{2}{4} - 6 + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} + 8$$

$$= -\frac{3}{2} + \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + (8 - 6) = \frac{-3}{2} + \frac{12}{3} + \frac{1}{4} + 2$$

$$= \frac{(-3)6 + 12(4) + 3(1) + 2(12)}{12} = \frac{-18 + 48 + 3 + 24}{12} = \frac{57}{12} \quad \triangleright$$

c. $\left(\frac{4}{3} + \frac{10}{5} - 3 + \frac{7}{15}\right) - \left(6 - \frac{9}{5} + \frac{2}{15}\right)$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{4}{3} + \frac{10}{5} - 3 + \frac{7}{15}\right) - \left(6 - \frac{9}{5} + \frac{2}{15}\right) = \frac{4}{3} + \frac{10}{5} - 3 + \frac{7}{15} - 6 + \frac{9}{5} - \frac{2}{15}$$

$$= \frac{4}{3} + \left(\frac{10}{5} + \frac{9}{5}\right) + \left(\frac{7}{15} - \frac{2}{15}\right) + (3 - 6) = \frac{4}{3} + \frac{19}{5} + \frac{5}{15} - 9$$

$$= \frac{5(4) + 19(3) + 5(1) - 9(15)}{15} = \frac{20 + 57 + 5 - 135}{15} = \frac{-53}{15} \quad \triangleright$$

4. Calcule los siguientes productos.

a. $\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{8(5)}{3(4)} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \quad \triangleright$$

b. $\left(\frac{-6}{7}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{-6}{7}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{6}{7}\frac{5}{2} = -\frac{6(5)}{7(2)} = -\frac{30}{14} = -\frac{15}{7} \quad \triangleright$$

c. $\left(\frac{-12}{5}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{-12}{5}\right)\left(\frac{-4}{3}\right) = \left(-\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$\frac{12(4)}{5(3)} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5} \quad \triangleright$$

5. Realice las siguientes operaciones.

a. $\frac{20}{3} \div \frac{5}{4}$

$$\triangleleft \quad \frac{20}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{20(4)}{3(5)} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3} \quad \triangleright$$

b. $\frac{24}{5} \div \left(\frac{-8}{7}\right)$

$$\triangleleft \quad \frac{24}{5} \div \left(\frac{-8}{7}\right) = \frac{24}{5} \div \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{\frac{24}{5}}{-\frac{8}{7}} = -\frac{24(7)}{5(8)} = -\frac{168}{40} = -\frac{21}{7} \quad \triangleright$$

c. $\left(\frac{-30}{7}\right) \div 6$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{-30}{7}\right) \div 6 = \left(-\frac{30}{7}\right) \div (6) = \frac{-\frac{30}{7}}{\frac{6}{1}} = -\frac{30(1)}{7(6)} = -\frac{30}{42} = -\frac{5}{7} \quad \triangleright$$

d. $\left(\frac{-35}{2}\right) \div \left(\frac{-7}{5}\right)$

$$\triangleleft \left(\frac{-35}{2}\right) \div \left(\frac{-7}{5}\right) = \left(-\frac{35}{2}\right) \div \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{-\frac{35}{2}}{-\frac{7}{5}} = \frac{35(5)}{2(7)} = \frac{175}{14} = \frac{25}{2} \triangleright$$

6. Realice la siguiente operación de dos formas diferentes.

$$(6-2)(7+2)$$

$\triangleleft$ Damos una primera solución directamente, haciendo las operaciones dentro de los paréntesis. Tenemos que,

$$(6-2)(7+2) = (4)(9) = 36$$

Ahora damos una segunda solución, cuando aplicamos distributividad para obtener

$$(6-2)(7+2) = 6(7+2) - 2(7+2) = (6)(7) + 6(2) -$$
$$-2(7) - 2(2) = 42 + 12 - 14 - 4 = 36 \quad \triangleright$$

7. Realiza las siguientes operaciones ,

a. $4 - 3$

b. $4(-3)$

c. $(4) - 3$

$\triangleleft$ **a.** En este caso la operación es una sustracción y, $4 - 3 = 1$

b. En virtud del paréntesis, la operación es un producto y, $4(-3) = -12$

c. En este caso también se tiene una sustracción, es decir, $(4) - 3 = 1$. $\triangleright$

OBSERVACIÓN. En ocasiones es importante colocar paréntesis para indicar la operación que se va a realizar.

8. Realizar la operación

$$9 \times 8 - 12 \div 3$$

$\triangleleft$ Debido a la prioridad de las operaciones, obtenemos

$$9 \times 8 - 12 \div 3 = 72 - 4 = 68 \quad \triangleright$$

Notamos que es importante considerar la prioridad de las operaciones aún con tu calculadora. Como ejercicio introduce esta operación en la calculadora.

9. En la operación del ejercicio anterior introduce paréntesis para que el valor de la operación sea,

a. 20

b. -12

c. 36

$\triangleleft$ **a.** $((9 \times 8) - 12) \div 3 = (72 - 12) \div 3 = 60 \div 3 = 20$

b. $(9 \times (8 - 12)) \div 3 = (9 \times (-4)) \div 3 = (-36) \div 3 = -12$

c. $9 \times (8 - (12 \div 3)) = 9 \times (8 - 4) = 9 \times 4 = 36$ $\triangleright$

10. Las siguientes operaciones pueden realizarse fácilmente (usando algunas de las propiedades listadas).

a. $\left(\frac{25}{2} \times \frac{17}{3}\right) \times 4$

$\lhd$ Por la conmutatividad de la multiplicación,

$$\left(\frac{25}{2} \times \frac{17}{3}\right) \times 4 = \left(\frac{17}{3} \times \frac{25}{2}\right) \times 4$$

y por la asociatividad de la multiplicación, tenemos

$$\left(\frac{17}{3} \times \frac{25}{2}\right) \times 4 = \frac{17}{3} \times \left(\frac{25}{2} \times 4\right) = \frac{17}{3} \times \left(25 \times \frac{4}{2}\right) = \frac{17}{3} \times (25 \times 2)$$

$$= \frac{17}{3} \times 50 = \frac{850}{3} \quad \rhd$$

b. $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$\lhd$ De la conmutatividad y distributividad,

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{2(1)}{3(2)} = \frac{-2(1)}{2(3)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \rhd$$

c. $\left(\left(\frac{121}{3}\right)\frac{5}{4}\right)\frac{8}{15}$

$\lhd$ De la asociatividad del producto

$$\left(\left(\frac{121}{3}\right)\frac{5}{4}\right)\frac{8}{15} = \left(\frac{121}{3}\right)\left(\frac{5}{4} \times \frac{8}{15}\right) = \frac{121}{3}\left(\frac{5(8)}{15(4)}\right) = \frac{121}{3}\left(\frac{1(2)}{3(1)}\right)$$

$$= \frac{121}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{242}{9} \quad \rhd$$

d. $(17 \times 4)(5)$

$\lhd$ Por la asociatividad del producto,

$$(17 \times 4)(5) = (17) \times (4 \times 5) = 17 \times 20 = 340$$

e. $\frac{289}{3} + \frac{518}{7} + \frac{11}{3}$

$\lhd$ Por la conmutatividad y asociatividad de la suma,

$$\frac{289}{3} + \frac{518}{7} + \frac{11}{3} = \frac{289}{3} + \frac{11}{3} + \frac{518}{7} = \frac{289 + 11}{3} + \frac{518}{7} = \frac{300}{3} + \frac{518}{7}$$

$$= 100 + \frac{518}{7} = \frac{700 + 518}{700} = \frac{1218}{700} = \frac{609}{350} \quad \rhd$$

11. Efectúa las siguientes operaciones utilizando las propiedades mostradas.

a. $\frac{7}{2} + \frac{-5}{3}$

$$\lhd \quad \frac{7}{2} + \frac{-5}{3} = \frac{7}{2} - \frac{5}{3} = \frac{21 - 10}{6} = \frac{11}{6} \quad \rhd$$

b. $\frac{7}{2} + \frac{-5}{3} + \frac{3}{4}$

$$\lhd \quad \frac{7}{2} + \frac{-5}{3} + \frac{3}{4} = \frac{42 - 20 + 9}{12} = \frac{31}{12} \quad \rhd$$

c. $\frac{7}{2} - \left(\frac{-5}{3} + \frac{3}{4}\right)$

$$\lhd \quad \frac{7}{2} - \left(\frac{-5}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{-20 + 9}{12}\right) = \frac{7}{2} - \left(\frac{-11}{12}\right)$$
$$= \frac{7}{2} + \frac{11}{12} = \frac{42 + 11}{12} = \frac{53}{12} \quad \rhd$$

d. $\frac{7}{2}\left(\frac{-5}{3} + \frac{3}{4}\right)$

$$\lhd \quad \frac{7}{2}\left(\frac{-20 + 9}{12}\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{-11}{12}\right) = -\frac{77}{24} \quad \rhd$$

e. $\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right]$

$$\lhd \quad \left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right] = \left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{21 - 10}{6}\right]$$
$$= \left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{(-5)(3)(11)}{(3)(4)(6)} = -\frac{55}{24} \quad \rhd$$

f. $\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)$

$$\lhd \quad \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{-35}{6} = -\frac{35}{6} \quad \rhd$$

g. $\left(\frac{7}{2} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{-5}{3}$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{(7)(3)(-5)}{(2)(4)(3)} = -\frac{35}{6} \quad \triangleright$$

h. $\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)$

$$\triangleleft \quad \left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{(-5)(7)}{(3)(2)} - \frac{(3)(-5)}{(4)(3)}$$
$$= -\frac{35}{6} + \frac{15}{12} = \frac{-70+15}{12} = -\frac{55}{12} \quad \triangleright$$

i. $\frac{7}{2} \div \left(\frac{-5}{3}\right)$

$$\triangleleft \quad \frac{7}{2} \div \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{-3}{5}\right) = -\frac{21}{10} \quad \triangleright$$

j. $\frac{3}{4} \div \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right)$

$$\triangleleft \quad \frac{3}{4} \div \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{3}{4} \div \left(\frac{21-10}{6}\right) = \frac{3}{4} \div \frac{11}{6} = \frac{18}{44} = \frac{9}{22} \quad \triangleright$$

k. $\frac{7}{2} \div \left(\frac{-5}{3} \div \frac{3}{4}\right)$

$$\triangleleft \quad \frac{7}{2} \div \left(\frac{-5}{3} \div \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} \div \left(\frac{-20}{9}\right) = -\frac{63}{40} \quad \triangleright$$

l. $-\frac{-5}{3} \div \left[\frac{3}{4} \div \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right)\right]$

$$\triangleleft \quad -\frac{5}{3} \div \left[\frac{3}{4} \div \left(\frac{21-10}{6}\right)\right] = -\frac{5}{3} \div \left[\frac{3}{4} \div \frac{11}{6}\right]$$
$$= -\frac{5}{3} \div \left(\frac{18}{44}\right) = -\frac{220}{54} = -\frac{110}{27} \quad \triangleright$$

2.2 Valor absoluto de números reales

El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como el proceso de aplicar la relación compuesta

$$a \to a^2 \to \sqrt{a^2} = |a|$$

Ilustramos la definición mediantes los siguientes ejemplos ,

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|5| = \sqrt{(5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|0| = \sqrt{0} = \sqrt{0} = 0$$

El valor absoluto se puede definir de la siguiente forma

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ \text{-}a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Se cumplen para cualquier pareja de números reales a, b, las siguientes propiedades del valor absoluto.

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a||b|$
- $|a \div b| = |a| \div |b|$ *o bien* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Utilizando las propiedades del valor absoluto simplifique las siguientes expresiones.

12. $\left|-7 + \frac{3}{4}\right|$

$$\lhd \quad \left|-7 + \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{-28+3}{4}\right| = \left|\frac{-25}{4}\right| = \frac{|-25|}{|4|} = \frac{25}{4} \quad \rhd$$

13. $\left|-\frac{1}{4}\left(12 - \frac{1}{3}\right)\right|$

$$\lhd \quad \left|-\frac{1}{4}\left(12 - \frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{-1}{4}\right|\left|12 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{4}\right|\left|\frac{36-1}{3}\right| = \left|\frac{1}{4}\right|\left|\frac{35}{3}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{35}{3}\right) = \frac{35}{12} \quad \rhd$$

14. $\left|\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{8}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{6}{13}\right)\right|$

$$\triangleleft \quad \left|\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{8}\right)\div\left(\frac{1}{9}+\frac{6}{13}\right)\right| = \left|\frac{7}{5}-\frac{3}{8}\right| \div \left|\frac{1}{9}+\frac{6}{13}\right|$$
$$= \left|\frac{56-15}{40}\right| \div \left|\frac{13+54}{117}\right| = \frac{41}{40} \div \frac{67}{117}$$
$$= \frac{41}{40}\frac{117}{67} = \frac{4797}{2680} \quad \triangleright$$

Calcule $2|x|-x$ para los siguientes argumentos.

15. $x=-2$

$$\triangleleft \quad 2|x|-x = 2|-2|-(-2) = 2(2)+2 = 6 \quad \triangleright$$

16. $x=\frac{3}{2}$

$$\triangleleft \quad 2|x|-x = 2\left|\frac{3}{2}\right| - \frac{3}{2} = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} \quad \triangleright$$

17. $x=-\frac{5}{7}$

$$\triangleleft \quad 2|x|-x = 2\left|-\frac{5}{7}\right| - \left(-\frac{5}{7}\right) = 2\left(\frac{5}{7}\right) + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}\,(2+1) = \frac{5}{7}(3) = \frac{15}{7} \quad \triangleright$$

Calcule $|x+y|$, $\quad |x|+|y|$, $\quad |x-y|$, y $|x|-|y|$ para los siguientes argumentos.

18. $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

$$\triangleleft \quad |x+y| = \left|\frac{-2}{3}+\frac{4}{3}\right| = \left|\frac{-2+4}{3}\right| = \frac{2}{3}$$
$$|x|+|y| = \left|\frac{-2}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$|x-y| = \left|-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right| = \left|\frac{-2-4}{3}\right| = \left|\frac{-6}{3}\right| = \frac{|6|}{|3|} = \frac{6}{3} = 2$$

$$|x| - |y| = \left|\frac{-2}{3}\right| - \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{-2}{3} \quad \triangleright$$

19. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$

$$\triangleleft \quad |x + y| = \left|\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{6}{3}\right| = \frac{6}{3} = 2$$

$$|x| + |y| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$|x - y| = \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{2-4}{3}\right| = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|x| - |y| = \left|\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2-4}{3} = \frac{-2}{3} \quad \triangleright$$

20. $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$

$$\triangleleft \quad |x + y| = \left|\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right| = \left|\frac{-2}{3} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{-6}{3}\right| = \frac{6}{3} = 2$$

$$|x| + |y| = \left|\frac{-2}{3}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$|x - y| = \left|-\frac{2}{3} - \left(\frac{-4}{3}\right)\right| = \left|\frac{-2}{3} + \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|x| - |y| = \left|\frac{-2}{3}\right| - \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \quad \triangleright$$

Los ejercicios precedentes muestran que en general,

$$|x + y| \neq |x| + |y| \quad \text{y} \quad |x - y| \neq |x| - |y|$$

de hecho, la igualdad $|x+y| = |x|+|y|$ se cumple cuando ambos argumentos tienen el mismo signo.

2.3 Exponentes y radicales

DEFINICIÓN. Si a es un número real y n un entero positivo, definimos

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ factores}} \qquad \text{(el producto de } a \text{ con } a \ n \text{ veces)}$$

que se lee: "a elevado a la $n-$ésima potencia", o "a elevado a la n", o simplemente "a a la n".

Al número a le llamamos **base** y a n **exponente**.

El exponente de a es 1, es decir $a^1 = a$.

Dados, un número real a distinto de cero y un número entero positivo n definimos,

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para ilustrar esta última definición tenemos que $3^0 = 1$ y

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16}$$

Es importante señalar que la expresión 0^0 no tiene sentido.

DEFINICIONES.

1. Sean a un número real positivo y n un entero positivo. La raíz $n-$ésima de a, denotada por $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, es el número real positivo b que satisface la igualdad $b^n = a$.

La raíz cuadrada de un número $\sqrt[2]{a}$ se denota simplemente por $\sqrt{a}$.

2. Supongamos que a es un número real negativo y n un entero positivo impar. La raíz $n-$ésima de a, denotada por $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, se define como el número real negativo b que cumple la igualdad $b^n = a$.

3. Si n es entero positivo, definimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

4. Si $a^{\frac{1}{n}}$ es distinto de cero, definimos

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

Notemos que las raíces de orden par de un número negativo no están definidas en el conjunto de los números reales. Para ejemplo, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt{-5}$ no están definidas, sin embargo, $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)^3 = -8$

Recomendamos al estudiante tratar de determinar el valor de $\sqrt{-5}$ y $\sqrt[3]{-8}$, con ayuda de la calculadora. En el primer caso marcará error y en el segundo -2.

Con lo anterior, tenemos definidas a las potencias enteras y raíces de un número. Definimos ahora las potencias racionales.

DEFINICIÓN. Si m y n son enteros tales que $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido, entonces definamos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Leyes de los exponentes

Sean a, b números reales y m, n números reales tales que las siguientes cantidades están definidas. Entonces se cumplen las siguientes igualdades.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $(a^n)^m = a^{nm}$

3. $(ab)^n = a^n b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

Notación científica

En los problemas de las ciencias naturales constantemente aparecen números "muy grandes" o "muy pequeños," es decir, muy cercanos a cero. Para simplificar las operaciones con este tipo de números es necesario expresarlos de una forma más simple. Con este fin se introduce la **notación científica**.

Se puede comprobar que para todo número positivo a, existen dos números reales b y n tales que, $1 \leq b < 10$, n es entero y

$$a = b \times 10^n$$

donde "$\times$" denota la multiplicación de b con 10^n.

De esta manera decimos que la expresión de a, en notación científica, es $b \times 10^n$.

Mostramos los siguientes ejemplos

$$0.0000027 = 2.7 \times 10^{-6}$$

$$43250000 = 4.325 \times 10^7$$

21. Calcule los valores numéricos de las siguientes expresiones, si $a = 3$, $b = 4$, $c = -5$ y $x = 1$.

a. $3a^2bc$

$$\lhd \quad 3a^2bc = 3(3)^2(4)(-5) = 3(9)(-20) = -540 \quad \rhd$$

b. $4a^2 - b^2$

$$\lhd \quad 4a^2 - b^2 = 4(3)^2 - (4)^2 = 4(9) - 16 = 20 \quad \rhd$$

c. $(a+c)^2$

$$\lhd \quad (a+c)^2 = (3+(-5))^2 = (-2)^2 = 4 \quad \rhd$$

d. $a + b(a+b)$

$$\lhd \quad a + b(a+b) = 3 + 4(3+4) = 3 + 28 = 31 \quad \rhd$$

e. $\frac{4a+b}{c+3x}$

$$\lhd \quad \frac{4a+b}{c+3x} = \frac{4(3)+4}{-5+3(1)} = \frac{12+4}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \quad \rhd$$

Calcule los valores de **a.** x^2, **b.** $\sqrt{x}$, **c.** x^3, **d.** $\sqrt[3]{x}$, **e.** $1/x$, **f.** πx y **g.** $(\pi/4)x^2$, tomando $\pi = 3.1416$, para cada uno de los argumentos de x de la lista que se da a continuación. Utilice una calculadora.

22. $x = 972$

a. $x^2 = 972^2 = 944784$
b. $\sqrt{x} = \sqrt{972} = 31.1769$
c. $x^3 = 972^3 = 918330048$
d. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{972} = 9.90578$
e. $1/x = 1/972 = 0.001020$
f. $\pi x = (3.1416)(972) = 3053.6352$
g. $(\pi/4)x^2 = (3.1416 \div 4)972^2 = 742033.35$

23. $x = 97.2.$

a. $x^2 = (97.2)^2 = 9447.84$
b. $\sqrt{x} = \sqrt{97.2} = 9.8590$
c. $x^3 = (97.2)^3 = 918330.048$
d. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{97.2} = 4.59785$
e. $1/x = 1/97.2 = 0.01028$

f. $\pi x = (3.1416)97.2) = 305.3635$
g. $(\pi/4)x^2 = \left(\frac{3.1416}{4}\right)(97.2)^2 = 7420.33$

24. $x = 9.72$

a. $x^2 = (9.72)^2 = 94.4784$
b. $\sqrt{x} = \sqrt{9.72} = 3.1176$
c. $x^3 = (9.72)^3 = 30.5363$
d. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{9.72} = 2.13413$
e. $1/x = 1/9.72 = 0.1028$
f. $\pi x = (3.1416)(9.72) = 30.5363$
g. $(\pi/4)x^2 = \left(\frac{3.1416}{4}\right)(9.72)^2 = 742.033$

25. $x = 0.972$.

a. $x^2 = (0.972)^2 = 9.4478$
b. $\sqrt{x} = \sqrt{0.972} = 0.98559$
c. $x^3 = (0.972)^3 = 0.91883$
d. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0.972} = 0.99057$
e. $1/x = 1/0.972 = 1.0288$
f. $\pi x = (3.1416)(0.972) = 3.05363$
g. $(\pi/4)x^2 = \frac{3.1416}{4}(0.972)^2 = 74.2033$

26. Calcula el volumen V de un cubo de arista $\frac{3}{4}m$.
$\lhd$ El volumen V de un cubo de arista a es $V = a^3$.
Tenemos que $a = \frac{3}{4}\,m$ por lo tanto, el volumen del cubo es

$$V = a^3 = \left(\frac{3}{4}m\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 m^3 = \frac{27}{64}m^3 \quad \rhd$$

27. Escribe con una ecuación **La tercera ley de Kepler** que enuncia:
El cuadrado del periodo de revolución de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita del planeta.
$\lhd$ Si T es el periodo y a el semieje mayor, entonces

$$T^2 = ka^3, \quad \text{donde } k \text{ es una constante de proporcionalidad} \quad \rhd$$

28. Exprese en notación científica la masa de una molécula de oxígeno dada por 0.000 000 000 000 000 000 000 0531 g.

$\triangleleft$ La masa de una molécula de oxígeno es 5.31×10^{-23}, ya que "recorremos" a la derecha 23 lugares al punto decimal. $\triangleright$

29. La velocidad de luz es $v = 2.99 \times 10^{10} \frac{cm}{s}$. Calcule la distancia recorrida por la luz en un día y exprésela en notación científica.

$\triangleleft$ En un día hay 24 horas, en una hora 60 minutos y en un minuto 60 segundos. Por lo tanto, en un día hay $t = (24)(60)(60) = 86400$ segundos, es decir, $t = 8.6400 \times 10^4$ segundos.

La distancia d se calcula con la fórmula $d = vt$. En nuestro ejercicio,

$$d = \left(2.99 \times 10^{10}\ \frac{cm}{s}\right)(8.64 \times 10^4 s)$$

con lo que,

$$d = 25.8336 \times 10^{14} cm = 2.58336 \times 10^{15}\, cm \quad \triangleright$$

30. Exprese el número de Avogadro

$$A_N = 602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

en notación científica.

$\triangleleft$ $A_N = 6.022 \times 10^{23}$ ya que recorremos el punto decimal 23 lugares a la izquierda. $\triangleright$

31. El número de Avogadro, 6.022×10^{23}, es el número de moléculas contenidas en un mol. Si un mol de H_2O tiene 18 g, calcule la masa de una molécula de agua.

$\triangleleft$ La masa de una molécula de agua es,

$$m = \frac{18}{6.022 \times 10^{23}}\mathrm{g} = \frac{18}{6.022} \times 10^{-23}\mathrm{g} = 2.989 \times 10^{-23}\mathrm{g}$$

Simplifique las expresiones siguientes usando las leyes de los exponentes. No utilice exponentes negativos. En la parte derecha aparece la ley de los exponentes utilizada.

32. x^4x^5

$$\triangleleft \quad x^4x^5 = x^{4+5} = x^9 \quad \text{(ley 1)} \quad \triangleright$$

33. $\frac{a^7}{a^2}$

$$\triangleleft \quad \frac{a^7}{a^2} = a^{7-2} = a^5 \quad \text{(ley 5)} \quad \triangleright$$

34. $\frac{a^3}{a^{10}}$

$\lhd$ Como el exponente en el numerador es menor que el exponente en el denominador, entonces usamos la ley 5 en la forma $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

$$\frac{a^3}{a^{10}} = \frac{1}{a^{10-3}} = \frac{1}{a^7} \quad \rhd$$

35. $(t^{-2})^{-3}$

$$\lhd \quad (t^{-2})^{-3} = t^{(-2)(-3)} = t^6 \quad \text{(ley 2)} \quad \rhd$$

36. $(abx)^5$

$\lhd$ Como el producto de los números reales es asociativo y conmutativo, entonces la **ley 2** es válida para cualquier número de factores, por lo tanto

$$(abx)^5 = a^5 b^5 x^5 \quad \text{(ley 2)} \quad \rhd$$

37. $\left(\frac{x}{y}\right)^5$

$$\lhd \quad \left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5} \quad \text{(ley 4)} \quad \rhd$$

38. $[(x^2+1)^2]^{-5}$

$\lhd$ Si consideramos $a = x^2 + 1$, podemos usar la ley 2,

$$[(x^2+1)^2]^{-5} = (x^2+1)^{2(-5)} = (x^2+1)^{-10} \quad \text{(ley 2)}$$

Recordemos que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, de donde,

$$[(x^2+1)^2]^{-5} = \frac{1}{(x^2+1)^{10}} \quad \rhd$$

39. $x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{5}}$

$$\lhd \quad x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{5}} = x^{\frac{3}{2}-\frac{3}{5}} \quad \text{(ley 1)}$$

de donde,

$$x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{5}} = x^{\frac{15-6}{10}} = x^{\frac{9}{10}} \quad \rhd$$

40. $(2x^{-3}y^2)^3(x^4y^5z^3)^4$

$$\triangleleft \quad (2x^{-3}y^2)^3(x^4y^5z^3)^4 = 2^3(x^{-3})^3(y^2)^3(x^4)^4(y^5)^4(z^3)^4 \quad \text{(ley 2)}$$
$$(2x^{-3}y^2)^3(x^4y^5z^3)^4 = 8x^{-9}y^6x^{16}y^{20}z^{12} \quad \text{(ley 3 en cada factor)}$$
$$(2x^{-3}y^2)^3(x^4y^5z^3)^4 = 8x^{-9+16}y^{6+20}z^{12} \quad \text{(ley 1)}$$
$$(2x^{-3}y^2)^3(x^4y^5z^3)^4 = 8x^7y^{26}z^{12} \quad \text{(ley 1)} \quad \triangleright$$

41. $\frac{(x^4a^3)^2}{(x^2a^4)^3}$

$$\triangleleft \quad \frac{(x^4a^3)^2}{(x^2a^4)^3} = \frac{(x^4)^2(a^3)^2}{(x^2)^3(a^4)^3} \quad \text{(ley 3, arriba y abajo)}$$
$$\frac{(x^4a^3)^2}{(x^2a^4)^3} = \frac{x^{4(2)}a^{3(2)}}{x^{2(3)}a^{a(3)}} = \frac{x^8a^6}{x^6a^{12}} \quad \text{(ley 2)}$$
$$\frac{(x^4a^3)^2}{(x^2a^4)^3} = \frac{x^{8-6}}{a^{12-6}} = \frac{x^2}{a^6} \quad \text{(ley 5)} \quad \triangleright$$

42. $\sqrt[3]{x}x^{\frac{5}{2}}$

$\triangleleft$ Tomando en cuenta que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, tenemos $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, de donde,

$$\sqrt[3]{x}x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{2}} \quad (\text{definición de } \sqrt[3]{x})$$
$$\sqrt[3]{x}x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}} \quad \text{(1 ley)}$$

Simplifiquemos el exponente,

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2+15}{6} = \frac{17}{6}$$

Finalmente,

$$\sqrt[3]{x}x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{17}{6}} \quad \triangleright$$

43. $(3x^2y^3)^3(2x^5y^3)^2$

$$\triangleleft \quad (3x^2y^3)^3(2x^5y^3)^2 = (3^3)^5(x^2)^3(y^3)^3(2^2)^2(x^5)^2(y^3)^2 \quad \text{(ley 3)}$$
$$(3x^2y^3)^3(2x^5y^3)^2 = 27x^6y^9(4)x^{10}y^6 \quad \text{(ley 2)}$$

$$= (27)(4)x^{6+10}y^{9+6} = \quad \text{(ley 1)}$$
$$= 108x^{16}y^{15} \quad \triangleright$$

44. $\sqrt[3]{(x+1)^2}(x+1)^2$

$\triangleleft$ Recordemos que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y por lo tanto $\sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{2/3}$.

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}(x+1)^2 = (x+1)^{2/3}(x+1)^2 = (x+1)^{2/3+2} \quad \text{(ley 1)}$$

Simplificando el exponente,

$$\frac{2}{3} + 2 = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

tenemos que

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}(x+1)^2 = (x+1)^{8/3} = \sqrt[3]{(x+1)^8}$$

Escriba con potencias racionales las siguientes expresiones,

45. $\sqrt[5]{(x+2)^4}$

$$\triangleleft \quad \sqrt[5]{(x+2)^4} = (x+2)^{\frac{4}{5}} \quad \triangleright$$

46. $(\sqrt[5]{2x})^{-3}$

$\triangleleft$ Para $a = 2x$ aplicamos la definición $a^{\frac{m}{n}}$ y obtenemos

$$(\sqrt[5]{2x})^{-3} = (2x)^{\frac{-3}{5}} \quad \triangleright$$

47. $\frac{(2x^3)^2(3x)^3}{6(x^2)^2}$

$$\triangleleft \quad \frac{(2x^3)^2(3x)^3}{6(x^2)^2} = \frac{2^2(x^3)^2(3^3)x^3}{6(x^2)^2} \quad \text{(ley 3 arriba)}$$
$$= \frac{4x^6(27)x^3}{6x^4} \quad \text{(ley 2)}$$
$$= \frac{108x^{6+3}}{6x^4} \quad \text{(ley 1)}$$
$$= \frac{108x^9}{6x^4}$$
$$= 18x^{9-4} = 18x^5 \quad \text{(ley 5)} \quad \triangleright$$

48. $(-3x^{-15})(4x^8)$

$$\triangleleft \quad (-3x^{-15})(4x^8) = (-3)(4)x^{-15+8} \quad \text{(ley 1)}$$
$$= -12x^{-7} = \frac{-12}{x^7} = -\frac{12}{x^7} \quad \triangleright$$

49. $\sqrt{x + \sqrt[3]{y^2}}$

Como $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, entonces,

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{y^2}} = (x + y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \quad \triangleright$$

Escriba las siguientes expresiones usando raíces (radicales).

50. $x^{5/2}y^{\frac{1}{3}}$

$$\triangleleft \quad x^{5/2}y^{1/3} = \sqrt{x^5}\,\sqrt[3]{y} \quad \triangleright$$

51. $2a^{5/3} + (2a)^{5/3}$

$$\triangleleft \quad 2a^{5/3} + (2a)^{5/3} = 2\sqrt[3]{a^5} + \sqrt[3]{(2a)^5} \quad \triangleright$$

52. $8^{4/3}$

$$\triangleleft \quad 8^{4/3} = (\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4} \quad \triangleright$$

Simplifique las siguientes expresiones.

53. $8^{4/3}$

$$\triangleleft \quad 8^{4/3} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16 \quad \triangleright$$

54. $\sqrt{50}$

$$\triangleleft \quad \sqrt{50} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \triangleright$$

55. $\sqrt[3]{40}$

$$\triangleleft \quad \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5} \quad \triangleright$$

56. $125^{2/3}$

$$\triangleleft \quad 125^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25 \quad \triangleright$$

Realice las siguientes operaciones y exprese el resultado en notación científica.

57. $(4.2 \times 10^{-9})(3.5 \times 10^{-7})$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad (4.2 \times 10^{-9})(3.5 \times 10^{-7}) &= (4.2)(3.5) \times 10^{-9-7} \\ &= 14.7 \times 10^{-16} \\ &= 1.47 \times 10 \times 10^{-16} \\ &= 1.47 \times 10^{1-16} \\ &= 1.47 \times 10^{-15} \end{aligned}$$

Como 14.7 es mayor que 10 fue necesario expresarlo como 1.47×10. $\triangleright$

58. $\frac{8.1 \times 10^{27}}{9.3 \times 10^5}$

$$\triangleleft \quad \frac{8.1 \times 10^{27}}{9.3 \times 10^5} = \left(\frac{8.1}{9.3}\right) \times 10^{27-5} = 0.8709 \times 10^{22} = 8.709 \times 10^{-1} \times 10^{22}$$

$$= 8.709 \times 10^{21} \quad \triangleright$$

2.4 Porcentajes

La expresión p **por ciento de** a significa p **centésimos de** a, es decir,

$$\frac{p}{100} \times a = p \times \frac{a}{100}$$

El p por ciento de a se denota también por el signo $p\%$ **de** a. El porcentaje aparece en la vida diaria, en el comercio, en las ciencias naturales, etcétera, y su símbolo es: %. Para ilustrar, 8% significa $\frac{8}{100}$.

59. Expresar los siguientes porcentajes en fracción y número decimal.

a. 8%

$$\triangleleft \quad 8\% = \frac{8}{100} \quad \text{fracción}$$

$$8\% = 0.08 \quad \text{número decimal} \quad \triangleright$$

b. 4.2%

$$\triangleleft \quad \frac{4.2}{100} = \frac{42}{1000}, \quad 0.042 \quad \triangleright$$

c. 125%

$$\triangleleft \quad \frac{125}{100}, \quad 1.25 \quad \triangleright$$

60. Expresar los siguientes números decimales como tanto por ciento.

a. 0.135

$$\triangleleft \quad 0.135 \times \frac{100}{100} = \frac{13.5}{100} = 13.5\% \quad \triangleright$$

b. 0.4

$$\triangleleft \quad 0.4 \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100} = 40\% \quad \triangleright$$

c. 3.7

$$\triangleleft \quad 3.7 \times \frac{100}{100} = \frac{370}{100} = 370\% \quad \triangleright$$

61. Los números racionales pueden expresarse como un número decimal y en consecuencia expresarse en tanto por ciento.

a. $\frac{14}{20}$

$$\triangleleft \quad \frac{14}{20} = 0.7 = 0.7 \times \frac{100}{100} = \frac{70}{100} = 70\% \quad \triangleright$$

b. $\frac{8}{15}$

$$\triangleleft \quad \frac{8}{15} = 0.53 = \frac{53}{100} = 53\% \quad \triangleright$$

c. ¿Qué porcentaje representa $\frac{3}{4}$ de algo?

$$\triangleleft \quad \frac{3}{4} = 0.75 = \frac{75}{100} \quad \text{es decir, es el } 75\% \quad \triangleright$$

d. ¿Qué porcentaje es 2 de 3? y ¿3 de 2?

$$\triangleleft \quad \frac{2}{3} = 0.666 = \frac{66.6}{100} = 66.6\%$$
$$\frac{3}{2} = 1.5 = \frac{150}{100} = 150\% \quad \triangleright$$

62. Tenemos una receta para hacer pastel de 1 kg. pero queremos hacer uno de 1.5 kg. Si la receta original dice que debemos usar $\frac{2}{3}$ de tazas de azúcar. ¿Cuál será la cantidad de azúcar que debemos usar ahora?

$\triangleleft$ Si a un kilogramo de pastel le asociamos el 100%, entonces medio kilogramo corresponde al 50%, lo que indica que la cantidad de azúcar usada será,

$$\frac{2}{3}(100\%) + \frac{2}{3}(50\%) = \frac{2}{3}\left(\frac{100}{100}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{50}{100}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

Es decir, debemos usar 1 taza de azúcar $\triangleright$

63. Una barra de metal de 5 kg. tiene 2 kg. de bronce y 3 kg. de aluminio.

a. Determine la cantidad de cobre y estaño en la barra si se sabe que el bronce es una aleación con 70% de cobre y 30% de estaño.

b. ¿Qué porcentaje de cobre tiene la barra de metal?

$\triangleleft$ **a.** En virtud de que la barra tiene 2 kg. de bronce, entonces, en la barra hay, (2 kg.)(0.7) = 1.4 kg. de cobre y (2 kg.)(0.3) = 0.6 kg de estaño.

b. En la barra de 5 kg. hay 1.4 kg. de cobre. Por tanto, en la barra hay $\frac{1.4}{5} \times 100 = 0.28 \times 100 = 28\%$ de cobre. $\triangleright$

64. La superficie de nuestro planeta consta de 70% de agua y 30% de tierra. De este último 30%, $\frac{2}{5}$ partes es cultivable. ¿Qué porcentaje de la superficie total del planeta es cultivable?

$\triangleleft$ Sea T la superficie total del planeta. Entonces, $0.3T$ es tierra, de la cual $\frac{2}{5}(0.3T) = 0.12T$ es cultivable. Por lo tanto, el porcentaje del planeta cultivable es,

$$\frac{0.12T}{T} \times 100 = 0.12 \times 100 = 12\% \quad \triangleright$$

65. Cuando una persona pide dinero prestado debe pagar un **interés** durante el tiempo que dura el préstamo, denotémoslo por i. El **capital** es la cantidad que se presta denotado por c. La **tasa** o **rédito**, es el tanto por ciento que se paga en un tiempo determinado, r. El tiempo que dura el préstamo lo denotaremos por t.

Se tiene la relación

$$i = c\ r\ t$$

a. ¿Cuál es el interés que se debe pagar por un préstamo de \$400.00 durante 5 meses si el rédito es 2% mensual?

$$\lhd \quad i = c\,r\,t = (400)(0.02)(5) = 40\,\text{pesos} \quad \rhd$$

b. ¿Cuál es el interés que se debe pagar por un préstamo de \$400.00 durante 3 meses, si la tasa es de 24% anual?

$$\lhd \quad i = c\,r\,t = (400)(0.24)\left(\frac{3}{12}\right) = \$24.00 \quad \rhd$$

Notamos que el tiempo es de 3 meses $= \frac{3}{12}$ pues la tasa es anual.

c. Nos prestan \$500.00 con interés mensual del 2% ¿Cuánto pagaremos a fin de mes para liquidar completamente la deuda?

$\lhd$ El interés a pagar es

$$i = c\,r\,t = (500)(0.02)(1) = 10$$

por lo tanto, para liquidar la deuda debemos pagar

$$500 + 10 = 510$$

Observemos que esta cantidad puede calcularse usando la ley distributiva

$$500 + 500(0.02) = 500(1 + 0.02) = 500(1.02) = 510 \quad \rhd$$

66. La población en México en 1980 era de 67.38 millones. Si su tasa de crecimiento anual es de 2.6 %.

a. ¿Qué población había en 1981?

$$\begin{aligned} \lhd \quad & 67.38 + 67.38(0.026) = 67.38(1 + 0.026) \\ & = 67.38(1.026) = 69.13 \quad \text{millones} \quad \rhd \end{aligned}$$

b. Continuando con el ejercicio, ¿qué población había en 1982?

$$\triangleleft \quad 69.13 + 69.13(0.026) = 69.13(1 + 0.026)$$
$$= 69.13(1.026) = 70.93 \quad \text{millones} \quad \triangleright$$

c. ¿Cuál era la población en 1983?

$$\triangleleft \quad 70.93 + 70.93(0.026) = 70.93(1 + 0.026)$$
$$= 70.93(1.026) = 72.77 \quad \text{millones} \quad \triangleright$$

d. En relación a los tres últimos incisos, ¿qué porcentaje creció la población de 1980 a 1983?

$\triangleleft$ Primero calculamos la diferencia de poblaciones

$$72.77 - 67.38 = 5.39$$

y ahora vemos el porcentaje que representa esta población respecto a la que había en 1980.

$$\frac{5.39}{67.38} = 0.079 = 7.99\% \approx 8\%$$

Observa que esta tasa no es el triple de la tasa anual, $3(2.6\%) = 7.8\%$.

Esto también podríamos haberlo obtenido construyendo una relación general $P(n)$ que nos da el número de pobladores P, después de n años, a partir del tiempo hipotético $n = 0$ que corresponde a 1980.

La población en 1981 se calculó,

$$67.38 + 67.38(0.026) = 67.38(1.026)$$

es decir,

$$P(1) = 67.38(1.026)$$

La población en 1982 ($n = 2$),

$$67.38(1.026) + 67.38(1.026)(0.026)$$

esto es,

$$P(2) = 67.38(1.026)[1 + 0.026] = 67.38(1.026)^2$$

Para 1983, correspondiente a $n = 3$, se obtuvo,

$$67.38(1.026)^2 + 67.38(1.026)^2(0.026)$$

es decir,

$$P(3) = 67.38(1.026)^2[1 + 0.026] = 67.38(1.026)^3$$

En virtud de que $(1.026)^3 = (1.0800)$ notamos que la población creció en un 8%. $\triangleright$

e. ¿Cómo podrías calcular la población en 1986? ¿En 1990?

$\triangleleft$ Si denotamos por $P(n)$ al número de pobladores después de n años, entonces, de lo descrito anteriormente, se sigue que

$$P(n) = 67.38(1.026)^n$$

De esta forma, para 1986 había una población de

$$67.38(1.026)^6 = 67.38(1.166) = 78.59$$

y creció un 16.6% respecto a 1980.

Análogamente para 1990, tenemos que

$$P(10) = 67.38(1.026)^{10} = 67.38(1.292) = 87.09$$

aumentó un 29.2%. Observamos que esta tasa es diferente de $10(2.6\%) = 26\%$ $\triangleright$

2.5 Razones y proporciones

Proporcionalidad directa

La proporcionalidad directa entre las cantidades x y y está dada por una expresión de la forma

$$y = \lambda x$$

Esto significa que la variable y tiene una variación proporcional a la variable x:

"Cuanto aumenta x, con el mismo tanto λ, aumenta y".

La proporcionalidad directa aparece comúnmente en las relaciones entre las variables principales de fenómenos o procesos naturales. Para ejemplo, cuando se dice: *"Durante una reacción de primer orden, la cantidad de un reactivo que permanece por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad que reacciona"*, si Q_t es la cantidad de reactivo al tiempo t y Q_{t+1} es la cantidad por reaccionar una unidad de tiempo después, se habla de una relación de la forma

$$Q_{t+1} = \lambda Q_t$$

donde λ es la constante de proporcionalidad.

Se observa que si la variable x es directamente proporcional a la variable y, entonces de las parejas relacionadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) mediante las igualdades $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$ se obtiene, al dividirlas miembro a miembro,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

la cual se conoce como la **regla de tres**.

Esto nos permite resolver problemas sin tener que calcular la constante de proporcionalidad λ.

Proporcionalidad inversa.

Existe otro tipo de proporcionalidad entre las cantidades x y y, que tiene la forma

$$y = \frac{\lambda}{x}$$

Esta es llamada *proporcionalidad inversa* con constante λ. Tal tipo de proporcionalidad aparece también en los procesos y fenómenos de la naturaleza. Por ejemplo, cuando se dice: *En un gas ideal a temperatura constante, la presión que ejerce el gas es inversamente proporcional al volumen que ocupa"*, esto puede escribirse como

$$P = \frac{\lambda}{V}$$

donde P es la variable presión, V es el volumen del gas y λ es la constante de proporcionalidad.

Algunos de los principios más conocidos de la ciencia pueden expresarse como variaciones. A continuación se mencionan algunas:

Las áreas de las figuras semejantes son directamente proporcionales a los cuadrados de las líneas correspondientes.

Los volúmenes de los sólidos semejantes son directamente proporcionales a los cubos de las líneas correspondientes.

Los volúmenes de los gases son inversamente proporcionales a la presión absoluta y directamente proporcionales a la temperatura absoluta.

En cualquier reacción química entre sustancias A y B, la cantidad de la sustancia A que interviene en la reacción es directamente proporcional a la cantidad de la sustancia B que también interviene.

Escriba, mediante una fórmula, las siguientes proposiciones.

67. w varía directamente como x e y.

$\lhd$ Si λ es la constante proporcionalidad entre las variables dadas, la relación se escribe

$$w = \lambda xy \quad \rhd$$

68. w es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a y.

$\lhd$ Utilizamos una sola constante λ para escribir la relación entre las variables, que quedan,

$$w = \frac{\lambda x}{y} \quad \rhd$$

69. w es directamente proporcional al cubo de x e inversamente al cuadrado de z.

$\lhd$ Si se utiliza a λ como constante de proporcionalidad, lo anterior se escribe,

$$V = \frac{\lambda x^3}{z^2} \quad \rhd$$

70. w es directamente proporcional a la raíz cúbica de b e inversamente a la raíz cuadrada de c

$\lhd$ Se tiene en este caso, la relación

$$w = \frac{\lambda \sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$$

donde λ es una constante de proporcionalidad. $\rhd$

71. R es directamente proporcional a w y a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de h.

$\lhd$ Para este caso, se utiliza igualmente una sola constante de proporcionalidad λ para todas las variables, obteniéndose la relación,

$$R = \frac{\lambda \sqrt{x} w}{h^3} \quad \rhd$$

En los problemas siguientes escriba la fórmula que relaciona la primera variable con las demás.

72. H es directamente proporcional a x, y $H = 8$ cuando $x = 20$.

$\lhd$ De la relación $H = \lambda x$ y del hecho de que $H = 8$ cuando $x = 20$, se tiene la igualdad $8 = \lambda(20)$ lo que implica que $\lambda = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

De esta manera, la relación entre las variables es,

$$H = \frac{2}{5}x \quad \triangleright$$

73. La variable N es inversamente proporcional a y. Además se sabe que $N = 20$ cuando $y = 0.35$. Calcular la relación entre las variables dadas.

$\triangleleft$ Ya que para alguna λ se tiene que $N = \frac{\lambda}{y}$, de las condiciones $N = 20$, y $y = 0.35$ se tiene que $20 = \frac{\lambda}{0.35}$. Esto implica que $\lambda = 20(0.35) = 7$.

De esta forma la relación entre N y y es,

$$N = \frac{7}{y} \quad \triangleright$$

74. La cantidad Q varía conjuntamente como a, b y c. La cantidad $Q = 336$ cuando $a = 3$, $b = 7$. y $c = 8$. Calcular la fórmula que relaciona las variables.

$\triangleleft$ Ya que $Q = \lambda abc$, se tiene de las relaciones dadas que $336 = \lambda(3)(7)(8)$ $= 168\lambda$, lo que implica que $\lambda = 2$.

De esta manera, el hecho que Q varíe conjuntamente como a, b, c, se escribe como

$$Q = 2abc. \quad \triangleright$$

75. P es inversamente proporcional a V. Si $V = 30$ litros cuando $P = 2$ atmósferas, hallar V cuando $P = 25$ atm.

$\triangleleft$ Ya que $P = \frac{\lambda}{V}$ y $2\,\text{atm} = \frac{\lambda}{30\,\text{litros}}$, entonces $\lambda = 60\,\text{atm} \times \ell$, lo que implica que

$$P = \frac{60}{V}$$

De esta manera, si $P = 25$ atm, entonces $25 = \frac{60}{V}$, lo cual implica que

$$V = \frac{60}{25}\frac{\text{atm} \quad \times \ell}{\text{atm}} = 2.4 \quad \ell \quad \triangleright$$

76. R es directamente proporcional a l. Si $R = 6.8$ ohms cuando $l = 23.5$ m, hallar R si $l = 31.8$ m.

$\triangleleft$ De las relaciones $R = \lambda\ell$, $6.8 = \lambda(23.5m)$ se tiene que $\lambda = \frac{6.8}{23.5m} =$ 0.29 ohms/m, lo cual nos dice que $R = 0.29\ell$.

De esta manera, si $\ell = 31.8$ m, entonces se tiene que

$$R(0.29\,\text{ohms/m})(31.8\,m) = 9.222 \text{ ohms} \quad \triangleright$$

77. La variable v es directamente proporcional a t. Si $v = 45$ m/seg cuando $t = 25$ seg, hallar v cuando $t = 1$ min.

$\triangleleft$ De las igualdades $v = \lambda t$ y $45\,m/seg = \lambda(25\text{seg})$ se tiene que $\lambda = \frac{45\text{m/seg}}{25\,\text{seg}} = 1.8\ m/seg^2$, lo que implica que $v = 1.8t$.

Por lo tanto, si $t = 1$ min $= 60$ seg se tiene que

$$V = (1.8\,m/seg^2)(60\,\text{seg}) = 10.8\,\text{m/seg} \quad \triangleright$$

78. La variable C es directamente proporcional a d^2. Si $C = 80$ cuando $d = 12$, hallar C cuando $d = 15$.

$\triangleleft$ Si $c = \lambda d^2$ entonces de la pareja de igualdades

$$80 = \lambda(12)^2$$

$$C = \lambda(15)^2$$

se tiene que, al dividir miembro por miembro la segunda igualdad y la primera,

$$\frac{C}{80} = \frac{\lambda(15)^2}{\lambda(12)^2} = \frac{(15)^2}{(12)^2}$$

obtenemos el valor de la constante

$$C = \left(\frac{15}{12}\right)^2 (80) = 1.5625 \quad \triangleright$$

79. La variable v es directamente proporcional a $\sqrt{h}$. Si $v = 28$ cuando $h = 3$, hallar v cuando $h = 12$

$\triangleleft$ Ya v es directamente proporcional a $\sqrt{h}$ entonces $v = \lambda\sqrt{h}$, lo que nos lleva a las igualdades,

$$28 = \lambda\sqrt{3}$$

$$v = \lambda\sqrt{12}$$

Al dividir miembro a miembro la segunda igualdad entre la primera se tiene que,

$$\frac{v}{28} = \frac{\lambda\sqrt{12}}{\lambda\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

De esta forma,

$$v = 2(28) = 56 \quad \triangleright$$

80. La variable R es directamente proporcional a l e inversamente proporcional a d^2. Si $R = 35$ cuando $l = 110$ y $d = 0.006$, Hallar R cuando $l = 75$ y $d = 0.004$.

$\triangleleft$ De la relación $R = \frac{\lambda \ell}{d^2}$ y de las condiciones dadas se tienen las igualdades

$$35 = \frac{\lambda(110)}{(0.006)^2}$$

$$R = \frac{\lambda(75)}{(0.004)^2}$$

nuevamente, al dividir la segunda ecuación miembro a miembro con la primera se obtiene,

$$\frac{R}{35} = \frac{\frac{\lambda(75)}{(0.004)^2}}{\frac{\lambda(110)}{(0.006)^2}} = \frac{\lambda(75)(0.006)^2}{\lambda(110)(0.004)^2} = \frac{75}{110}\left(\frac{0.006}{0.004}\right)^2 = 1.534$$

lo cual implica que,

$$R = 1.534(35) = 53.69 \quad \triangleright$$

Resuelva los siguientes ejercicios.

81. El hidrógeno usado para inflar globos se obtiene haciendo pasar vapor de agua sobre una malla de hierro al rojo vivo. Si con 390 g de hierro se obtienen 2.2 m^3 de hidrógeno, ¿cuánto hierro se necesitará para obtener 33 m^3?

$\triangleleft$ Denotemos por h la cantidad de hierro necesario en g para obtener H m^3 de hidrógeno. Entonces es claro que la relación entre una pareja (h_1, H_1) y (h_2, H_2) viene dada por la regla de tres,

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{H_2}{h_2}$$

De esta manera, para las condiciones dadas se tiene la relación,

$$\frac{2.2}{390} = \frac{33}{h}$$

lo cual nos dice que el hierro necesario para obtener $33m^3$ de hidrógeno es,

$$h = \frac{33}{2.2}(390) = 5850 \ g \quad \triangleright$$

82. La distancia aérea entre los puertos A y B es de 325 km. Los puertos distan 18 cm en un mapa. ¿Cuál es la distancia aérea entre los puertos C y D que distan 23 cm en el mismo mapa?

$\lhd$ Sea D la distancia área entre A y B y d su correspondiente distancia sobre el mapa. De la relación de proporcionalidad directa se tiene que en correspondientes $(d_1 D_1)$, (d_2, D_2) se cumple la igualdad (**regla de tres**),

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2}$$

De esta forma, para las condiciones se tiene la ecuación

$$\frac{325}{18} = \frac{D}{23}$$

que equivale a,

$$D = \frac{325}{18}(23) = 415.27 \text{ km.}$$

lo que nos da la distancia aérea buscada $\rhd$

83. Un disco de 40.6 cm de diámetro pesa 2,570 g. ¿Cuál será el diámetro de un disco del mismo espesor que pesa 945 g?

$\lhd$ Ya que ambos discos tienen el mismo espesor, apenas varían sus áreas según el cuadrado de sus diámetros. Como el material es el mismo, se tiene que la densidad es igual y entonces el peso del disco varía según varíe el área y, por lo tanto, depende de cómo varía el diámetro.

Por otro lado, las áreas de figuras semejantes son directamente proporcionales a los cuadrados de sus líneas correspondientes. De esta forma, se guarda una relación de proporcionalidad para las parejas (d_1^2, P_1) y (d_2^2, P_2) de la forma

$$\frac{P_1}{d_1^2} = \frac{P_2}{d_2^2}$$

donde P es el peso del disco y d es su diámetro.

Por lo tanto, para $P_1 = 2,570$, $d_1 = 40.6$ y $P_2 = 945$ se cumple una igualdad,

$$\frac{2,570}{(40.6)^2} = \frac{945}{d_2^2}$$

lo que implica que,

$$d_2 = \sqrt{\frac{945}{2,570}(40.6)^2} = \sqrt{\frac{945}{2570}}(40.6) = 24.61 \; cm$$

es el diámetro del disco mencionado. $\rhd$

84. Una esfera de hierro de 6.3 cm de diámetro pesa 850 g. ¿Cuánto pesará otra esfera de hierro de 9.2 cm de diámetro?

$\lhd$ Como las esferas son semejantes, entonces sus volúmenes son proporcionales a los cubos de sus radios. Por lo tanto, sus pesos correspondientes P_1, P_2 guardan la relación de proporcionalidad con los cubos de los diámetros

$$\frac{P_1}{d_1^3} = \frac{P_2}{d_2^3}$$

donde d_1 es el diámetro de la esfera de peso P_1 y d_2 es el de la esfera de peso P_2

Para los datos dados $P_1 = 850$, $d_1 = 6.3$, $d_2 = 9.2$, $P_2 = ?$ se cumple la relación

$$\frac{850}{(6.3)^3} = \frac{P_2}{(9.2)^3}$$

lo cual implica que el peso P_2 buscado es,

$$P_2 = \frac{850}{(6.3)^3}(9.2)^3 = 850\left(\frac{9.2}{6.3}\right)^3 = 2647.04\ g \quad \rhd$$

85. La fórmula $D = \lambda PL^3/th^3$, da la deflexión de una viga, de longitud L entre los puntos de apoyo, con una carga P en el centro, una anchura t y un grosor h. Si D es 4 cuando $P = 250$, $L = 12$, $h = 3$ y $t = 2.5$, hallar D cuando P es 400, L es 10, h es 4 y t es 2.

$\lhd$ De la relación de proporcionalidad

$$D = \frac{\lambda PL^3}{th^3}$$

sujeta a los argumentos dados, se tiene la igualdad

$$4 = \frac{\lambda(250)(12)^3}{2.5(3)^3}$$

lo cual implica que la constante de proporcionalidad es,

$$\lambda = \frac{4(2.5)(3)^3}{250(12)^3} = \frac{270}{898560} = 0.0003$$

De esta manera, la relación obtenida es

$$D = \frac{0.0003PL^3}{th^3}$$

Esto implica que para los argumentos $P = 400$, $L = 10$, $h = 4$, $t = 2$ se tiene una deflexión

$$D = \frac{0.0003(400)(10)^3}{2(4)^3} = 0.937 \quad \triangleright$$

86. La cantidad C del agua que sale por un orificio en el fondo de un depósito es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura h de la superficie libre del líquido. El caudal es de 85 litros/minuto cuando la altura es de 2.56 m.

a. Encuentre una fórmula de C dependiendo de h.

b. Calcule C cuando $h = 4.62$ m.

c. Encuentre h cuando $C = 62$ litros/minuto.

$\triangleleft$ La relación entre las variables C y h tiene la forma

$$C = \lambda\sqrt{h}$$

para alguna constante real λ.

Si para $h = 2.56$ m se tiene que $C = 85\ \ell/min$, entonces se tiene la igualdad

$$85 = \lambda\sqrt{2.56}$$

lo que nos da constante de proporcionalidad,

$$\lambda = \frac{85}{\sqrt{2.56}} = \frac{85}{1.6} = 53.125$$

De esta forma,

$$C = 53.125\sqrt{h}$$

lo que responde al inciso **a**.

Utilizando esta relación, se tiene que si $h = 4.62$ m, entonces el valor asociado a C es

$$C = 53.125\sqrt{4.62} = 114.18\ \ell/min$$

lo cual responde la pregunta **b**.

Finalmente, si $C = 62\ \ell/min$ entonces, de la relación

$$462 = 53.125\sqrt{h}$$

se obtiene la igualdad

$$h = \left(\frac{62}{53.125}\right)^2 = 1.36\ m$$

lo que responde a la pregunta **c**. $\triangleright$

87. Un hombre de 1.70 m de estatura pesa 75 kg. Otro hombre, de constitución parecida, mide 1.80 m. ¿Cuál será el peso del segundo?

$\triangleleft$ Ya que ambos hombres tienen una constitución parecida, podemos suponer que tienen en su forma voluminosa una semejanza, y que por tanto, sus longitudes correspondientes (tallas) son proporcionales a sus pesos.

Esto es, si ℓ_1 es la talla asociada al peso P_1 del primer hombre y ℓ_2 es la talla asociada al peso P_2 del otro hombre, entonces es justa una relación

$$\frac{P_1}{\ell_1^3} = \frac{P_2}{\ell_2^3}$$

Ya que para nuestro caso $\ell_1 = 1.7\ m$ y $P_1 = 75\ kg$, entonces para el segundo hombre se cumple

$$\frac{75}{(1.7)^3} = \frac{P_2}{(1.8)^3}$$

es decir, el peso P_2 del hombre es,

$$P_2 = \frac{75(1.8)^3}{(1.7)^3} = 75\left(\frac{1.8}{1.7}\right)^3 = 89.02 \text{ Kg.} \quad \triangleright$$

88. La distancia del horizonte, en el mar, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura del observador sobre el nivel del mar. Si el horizonte está a 7.2 km para una altura de 4.1 m, hallar la distancia correspondiente a una altura de 110 m.

$\triangleleft$ Entiéndase por d la distancia del horizonte en el mar y por h a la altura de un observador sobre el nivel del mar. Entonces, es justa una relación entre tales variables,

$$d = \lambda\sqrt{h}$$

Dadas las condiciones $d = 7.2$ km y $h = 4.1$ m se tiene que

$$7.2 = \lambda\sqrt{4.1} = \lambda(2.02)$$

lo que implica que

$$\lambda = \frac{7.2}{2.02} = 3.56$$

es la constante de proporcionalidad buscada.

Así, la relación entre las variables es,

$$d = 3.56\sqrt{h}$$

De esta manera, para $h = 110$ m se tiene una distancia al horizonte

$$d = 3.56\sqrt{110} = 37.33 \text{ Km.} \quad \triangleright$$

90. En el problema anterior, ¿cuál debe ser la altura del faro para ser visible a 20 Km mar adentro?

$\triangleleft$ Si entendemos por h la altura del faro que puede ser visto a una distancia $d = 20$ Km, ocupando la fórmula del ejercicio 22, se tiene que

$$20 = 3.56\sqrt{h}$$

lo cual implica que

$$h = \left(\frac{20}{3.56}\right)^2 = 31.56\ m$$

deberá de medir el faro. $\triangleright$

2.6 Ejercicios

1. Efectuar las siguientes operaciones

a. $3(1 + x)$ **b.** $-5(-14)$ **c.** $-2(a - b)$
d. $3 \div (20 \div 5)$ **e.** $(5 \div 3)(3 \div 2)$

2. En la expresión

$$9 \times 8 - 12 \div 3$$

coloca paréntesis para obtener,

a. 68 **b.** 20 **c.** -12 **d.** 36

3. Realiza los siguientes cálculos

a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{2} + \left(\frac{-2}{5}\right)$
c. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left(\frac{-2}{5}\right)$ **d.** $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{-2}{5}\right)$
e. $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{-2}{5}\right)\right)$ **f.** $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ **g.** $\frac{3}{4} \div \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$

4. Realiza las operaciones.

a. $-\frac{1}{3} - \frac{4}{5}$ **b.** $\frac{-1}{3} + \frac{2}{7}$ **c.** $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{7}\right)$

d. $\frac{-4}{5}\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\right)$ **e.** $\frac{-4}{5}\div\frac{2}{7}$ **f** $\frac{1}{3}\div\left[\frac{-4}{5}\div\frac{2}{7}\right]$

5. Reescribe las siguientes operaciones como un sólo producto. No los calcules.

a. $18+(0.05)18$ **b.** $27-(0.1)27$ **c.** $43+43(0.8)$

6. De las siguientes igualdades determina si es incorrecta y escríbela correctamente.

a. $(x-y)^2=x^2-y^2$ **b.** $(x+y)^2=x^2+y^2$

c. $\frac{18^4}{15^3}=\frac{(3\cdot6)^4}{(3\cdot5)^3}=\frac{6^4}{5^3}$

Calcular el valor con los argumentos dados,

7. $a=-1,\quad b=3,\quad c=2$

8. $a=1,\quad b=-3,\quad c=-2$
de las siguientes expresiones,

a. $2a-(3b+2c)$ **b.** $6a^2-3bc$ **c.** $\frac{a^2}{4}+\frac{4c}{3}-\frac{b^2}{6}$

d. $\frac{(a^2+b^2)}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}$ **e.** $\frac{4a+b}{c+3b}$

Utilice su calculadora para calcular x^2, $\sqrt{x}$, x^3, $\sqrt[3]{x}$, x^{-1} y πx para los argumentos dados.

9. $x=171$

10. $x=1.71$

11. Escriba, utilizando el símbolo %, las siguientes cantidades.

a. 0.001 **b.** $\frac{4}{5}$ **c.** 2.83 **d.** 28.3 **e.** 283 **f.** 4 de cada 7 **g.** $\frac{2}{3}$ de 4

12. Escribir en forma decimal los siguientes porcentajes.

a. 41.3% **b.** 0.01% **c.** 15% **d.** 200% **e.** 11.15% **f.** 3.75%

13. En México, la población masculina representa el 48% y una de cada 7 mujeres tiene el hábito de fumar. Supongamos que la población es de 100,000,000 de habitantes.

a. ¿Cuántas mujeres fumadoras hay?

b. ¿Qué porcentaje de la población representan las mujeres fumadoras?

14. La población de un cultivo de bacterias aumenta 10% en la primera hora y disminuye el mismo porcentaje en la segunda hora. Si la población original era de 5500,

a. Cálcule el número de bacterias después de dos horas.

b. ¿Qué porcentaje representa de la población original?

15. Al analizar una pintura se encontró con un 55% de colorante y con un 45% de aglomerante. El colorante está compuesto de 20% del material A, 55% del material B y 25% del material C.

¿Cuál es el porcentaje de cada material en la pintura analizada?

16. Un material desintegra de tal forma que cada 100 años se consume el 0.8% de la cantidad que queda por desintegrarse. Si en el año 2000 se tienen 600 kg. de tal material,

a. ¿Qué cantidad se tendrá en 2101?

b. ¿Qué cantidad se tendrá en 2201?

c. ¿Qué cantidad se tendrá en 2501?

d. ¿Qué cantidad se tendrá en 2901?

Simplifica las siguientes expresiones.

17. a^7a^{-5} **18.** $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$ **19.** $\frac{x^6}{x^2}$ **20.** $b^{\frac{2}{5}}b^{\frac{-1}{3}}$

21. $(t^{-2})^{-5}$ **22.** $(ab)^4$ **23.** $(2x^2y^3)^5$ **24.** $\frac{(5x^3)(4x^4)}{2x^6}$

25. $\frac{(5a^2)^3}{(2a)^2}$ **26.** $\frac{(x+1)^5(x+1)^4}{(x+1)^2}$ **27.** $(3a^{-2}b^2)^3(a^2b)^5$

28. $\frac{(a^5b^3)^3}{(a^4b^5)^3}$ **29.** $\sqrt[3]{c}c^4$ **30.** $\sqrt{x}x^{5/2}$

31. $\sqrt[3]{(y^2+1)^2}(y^2+1)^2$ **32.** $(2x^2y^3z^4)^3(3xy^2z^2)^3$

33. $\frac{(x^2y^3)^2}{(x^5y)^3}\cdot\frac{x^4y^3}{xy^6}$ **34.** $\left(\frac{27a^6}{b^9}\right)^{2/3}$

Exprese con potencias racionales.

35. $\sqrt[3]{(z^2+1)^5}$ **36.** $(\sqrt[3]{5a})^7$ **37.** $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{a^5}}$ **38.** $\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{3y}}\right)^4$

Simplifique las siguientes expresiones.

39. $9^{3/2}$ **40.** $(16)^{3/4}$ **41.** $8^{5/3}$ **42.** $\sqrt{72}$ **43.** $\sqrt[3]{54}$

Exprese con radicales.

44. $x^{5/3}a^{1/2}$ **45.** $2a^{3/2}-5b^{6/5}$ **46.** $3x^{3/5}+(3x)^{3/5}$

47. $\left(\frac{3a}{5b}\right)^{5/2}$ **48.** $a^{-1/3}+b^{1/3}$

49. Podemos considerar que una gota de agua tiene forma cúbica cuya arista mide aproximadamente $1mm = 1\times 10^{-3}m$

a. Calcular el volumen de una gota.

b. Calcular el número de gotas que caben en un tinaco de 1000 litros.

50. Escribe dos ventajas de la notación científica

51. Completa las igualdades siguiendo el ejemplo.

$$3.7 \times 10^4 = 37000$$

a. 2×10^3 **b.** 1.2×10^6 **c.** 7.6×10^{-3} **d.** 4.7×10^{-5}

52. ¿Cuál de los siguientes números es mayor?

$$x = 3 \times 10^{-6}, \quad y = 7 \times 10^{-6}$$

53. Ordena los siguientes números en forma creciente.

$$4 \times 10^{-5}, \quad 2 \times 10^{-2}, \quad 8 \times 10^{-7}, \quad 3.2 \times 10^{-3}$$

54. Efectúa las operaciones que se indican.

a. $(2 \times 10^{-6}) \times (4.1 \times 10^{-2})$ **b.** $(4.8 \times 10^{-3}) \times (1.2 \times 10^{4})$
c. $(2.3 \times 10^{5}) \times (4.5 \times 10^{-16})$ **d.** $1 \times 10^4 \div 2 \times 10^{-6}$
e. $2 \times 10^{15} \div 8 \times 10^{-11}$ **f.** $4.9 \times 10^{-3} \div 7 \times 10^{4}$
g. $(3 \times 10^4)^3$ **h.** $(2 \times 10^{-5})^2$
i. $\sqrt{16 \times 10^{-14}}$ **j.** $\frac{(3\times10^5)\times(1\times10^2)\times\sqrt{4\times10^{-6}}}{(5\times10^4)^2}$

55. Realiza las operaciones que se indican.

a. $5.7 \times 10^{-4} + 2.4 \times 10^{-4}$ **b.** $6.4 \times 10^5 - 8.3 \times 10^5$

56. Para sumar o restar dos números que están expresados en notación científica y cuyos exponentes son distintos, ¿qué debe hacerse antes de efectuar la operación?

57. Efectúa las operaciones que se indican.

a. $1.28 \times 10^5 + 4 \times 10^3$ **b.** $7.54 \times 10^8 - 3.7 \times 10^7$

58. **a.** Suponiendo que un protón tenga forma cúbica, cuya arista sea de 10^{-13} cm, calcule su volumen.

b. Considerando que la masa de un protón es de 10^{-24} gramos, determina su densidad (la **densidad** de un cuerpo se obtiene al dividir su masa entre su volumen).

59. Al colocar con mucho cuidado sobre una superficie libre de un recipiente con agua, una gota de aceite cuyo volumen es $V = 6\times10^{-2}cm^3$, la misma se dispersa y forma una capa muy fina cuya área es $A = 2 \times 10^4 cm^2$. Calcula el espesor de esta lámina de aceite.

60. De las siguientes igualdades, indica la que no es correcta.

a. $1 \times 10^8 + 1 \times 10^7 = 10^{15}$ **b.** $1 \times 10^8 \div 1 \times 10^4 = 1 \times 10^4$
c. $1 \times 10^{15} + 1 \times 10^{15} = 2 \times 10^{15}$ **d.** $3.4 \times 10^7 - 3 \times 10^6 = 3.1 \times 10^7$
e. $(1 \times 10^8) \times (1 \times 10^7) = 1 \times 10^{15}$

Simplifique las siguientes expresiones.

61. $|23 + (-15)|$ **62.** $|15 + (-23)|$ **63.** $|23 - 15|$
64. $|23| + |-15|$ **65.** $|23| - |15|$ **66.** $|23| - 15$
67. $|23 - 15| + |5 - 8|$ **68.** $|-20 + 16| + |-11 + 4|$
69. $\left|\frac{-3}{5}\right|$ **70.** $\left|\frac{3}{-5}\right|$ **71.** $\left|\frac{3}{-5}\right|$
72. $-\left|\frac{3}{-5}\right|$ **73.** $|18 \times (-4)|$ **74.** $|18| \times |-4|$

75. Calcular $x + |x|$

Si **a.** $x = 1$, **b.** $x = 2$, **c.** $x = -1$, **d.** $x = 2$.

76. Calcular $||x| - |y||$, $|x - y|$, $|x + y|$, $|x| + |y|$, $|x| - |y|$, para cuando,

a. $x = 1, \quad y = 2$ **b.** $x = -1, \quad y = 2$
c. $x = -1, \quad y = -2$ **d.** $x = 3, \quad y = 3$
e. $x = 3, \quad y = -3$

77. Si V es directamente proporcional a m e inversamente al cuadrado de t, calcular λ $V = 2$ cuando $m = 15$ y $t = 6$.

78. v es directamente proporcional a d^2. Si $C = 80$ cuando $d = 12$, Hallar C cuando $d = 15$.

79. R es directamente proporcional a la cuarta potencia de T e inversamente a la raíz cuadrada de N. Calcular λ si $R = \frac{1}{3}$ cuando $T = 2$ y $N = 36$.

80. La variable M es directamente proporcional a d^2. Si $M = 12$ g cuando $d = 8$ cm, calcular M cuando $d = 12$ cm.

81. La variable N es inversamente proporcional a d^2. Si $N = 10.890$ plantas por hectárea cuando las plantas distan $d = 2$ m, hallar N cuando $d = 5.5$ m.

82. Si la variable v varía conjuntamente como la raíz cuadrada de g y la raíz cuadrada de h. Si $v = 14\ m/seg$ cuando $g = 9.8\,m/seg^2$ y $h = 10$ m, hallar v cuando $g = 9.81\ m/seg$ y $h = 2$ m.

83. La variable V es directamente proporcional a r^4 y p e inversamente proporcional a l. Si $V = 120$ cuando $r = 0.012$, $p = 20$ y $l = 30$, calcular V cuando $r = 0.015$, $p = 36$ y $l = 25$.

84. La variable a es directamente proporcional a v^2 e inversamente proporcional a r. Si $a = 540$ cuando $v = 84$ y $r = 5$, hallar a cuando $v = 119$ y $r = 4$.

85. Un matraz Erlenmeyer de 250 ml tiene una altura de 12.6 cm^2. Qué altura deberá tener otro matraz de la misma forma para que su capacidad sea 500 ml?

86. El análisis de una pintura muestra un 54% de pigmento y un 46% de aglomerante. El pigmento está compuesto de 15% de la sustancia A, 60% de la sustancia B, y 25% de la sustancia C. ¿Cuál es el porcentaje de cada sustancia en la pintura?

87. Se recorta de un mapa el perfil de una finca y se encuentra que pesa 42.78 g. Una sección rectangular de 12.2 por 20.2 cm, del mismo mapa, pesa 5.31 g. Si la escala del mapa es de 2.5 cm por 50 m, hallar el área de la finca en metros cuadrados.

88. Para abastecer de agua a una ciudad de 50,000 habitantes se usa un tubo de 62 cm de diámetro. Si se espera alcanzar una población de 120,000 individuos en un tiempo de 30 años, ¿qué diámetro debe tener la nueva tubería?

89. La potencia necesaria para impulsar una lancha es proporcional al cubo de su velocidad. Si un motor de $5HP$ permite alcanzar una velocidad de 16 km/h, ¿qué potencia se necesitará para conseguir una velocidad de 22 km/h?

90. Se compra un lote de sosa, que contiene 52% en peso de agua de cristalización, a 17.5 centavos por libra. Cuando se vende al pormenor, se encuentra que el contenido en agua a descendido a 37%. ¿Cuál debe ser el precio de venta para obtener una ganancia de un 40%?

Parte II

Elementos de álgebra

Capítulo 3

Ecuaciones y factorización

3.1 Productos notables y factorización

Reducción de términos semejantes

Dos términos son **semejantes** si son iguales o difieren sólo sus coeficientes numéricos. Por ejemplo, $2xy$ y $-4xy$ son semejantes, pero $2xy$ y $3x^2y^3$ no lo son.

Para reducir términos semejantes es necesario sumar los coeficientes numéricos de tales términos. Por ejemplo,

$$2x + 3x - 8x = (2 + 3 - 8)x = -3x.$$

Como x^2 y x^3 no son semejantes, entonces no podemos "juntarlos" en la reducción siguiente,

$$2x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 7x^3 = (2 - 5)x^2 + (3 + 7)x^3 = -3x^2 + 10x^3$$

Productos notables

En álgebra elemental hay productos que aparecen a menudo. Es conveniente recordar estos productos para no realizar las operaciones cada vez que estos aparezcan.

Si desarrollamos el binomio al cuadrado $(a + b)^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Es más fácil recordar la fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, que realizar las operaciones que aparecen arriba.

Con esta fórmula podemos deducir rápidamente que

$$(a+5)^2 = a^2 + 2(a)(5) + 5^2 = a^2 + 10a + 25.$$

Las fórmulas para los productos notables más utilizadas se enlistan a continuación.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

8. $(a+m)(a+n) = a^2 + (m+n)a + mn$

Además entendemos, a estas fórmulas como factorizaciones, cuando lectura se hace de derecha a izquierda. Por ejemplo,

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Triángulo de Pascal

El desarrollo de $(a+b)^n$, donde n es entero positivo, se determina con ayuda del **Triángulo** de **Pascal**.

En el primer renglón tenemos dos unos, correspondientes a los coeficientes de a y b en $(a+b)^1 = a + b$

$$1 \quad 1$$

En el segundo renglón empezamos con 1, después 2 que es la suma de los dos números que están arriba, a la derecha y a la izquierda, y finalmente 1. De esta manera obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Análogamente se obtienen el tercer renglón y los renglones siguientes,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

1 4 6 4 1

El cuarto renglón, que corresponde a $(a+b)^4$, empieza con 1, sigue después 4, que es la suma de los elementos 1 y 3 arriba. Análogamente se obtienen el 6 y el 4. El cuarto renglón termina con 1.

Para desarrollar $(a+b)^5$ es necesario construir cinco renglones,

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Los términos que aparecen en el desarrollo de $(a+b)^5$ son,

$$a^5,\ a^4b,\ a^3b^2,\ a^2b^3,\ ab^4 \text{ y } b^5$$

Notemos que las potencias de a decrecen y las de b crecen. Los coeficientes de estos términos son los números que aparecen en el quinto renglón del Triágulo de Pascal. Finalmente obtenemos,

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Con el fin de factorizar ciertas expresiones algebraicas es conveniente usar las fórmulas de los productos notables.

Simplifique las expresiones siguientes.

1. $5x^3 + 7x^3 - 10x^3 + 4x^3$

$\lhd$ Todos los términos de esta expresión son semejantes, ya que todos tienen a x^3 y difieren en el coeficiente numérico.

Por lo tanto,

$$5x^3 + 7x^3 - 10x^3 + 4x^3 = (5+7-10+4)x^3 = 6x^3 \quad \rhd$$

2. $4a^2 + 3a - 6a^2 + 8a$

$\lhd$ Como a y a^2 no son términos semejantes, entonces se suman por separado los términos que tienen a y los que tienen a^2.

$$4a^2 + 3a - 6a^2 + 8a = (4-6)a^2 + (3+8)a = -2a^2 + 11a \quad \rhd$$

3. $1.3xy + 2.5t + 7.4t + 2.6xy$

$\lhd$ Sumando por separado términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} 1.3xy + 2.5t + 7.4t + 2.6xy &= (1.3 + 2.6)xy + (2.5 + 7.4)t \\ &= 3.9xy + 9.9t \quad \rhd \end{aligned}$$

Desarrolle los siguientes productos.

4. $(2x + 3)^2$

$\lhd$ Tomando $a = 2x$ y $b = 3$, aplicamos la fórmula 1:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

obteniendo

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9 \quad \rhd$$

5. $(3a - 5b)^2$

$\lhd$ Aplicamos la fórmula 2: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ para $x = 3a$ y $y = 5b$, y obtenemos

$$(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(5b) + (5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2 \quad \rhd$$

6. $104^2 = (100 + 4)^2$

$\lhd$ De la fórmula 1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se sigue que,

$$\begin{aligned} 104^2 &= (100 + 4)^2 = 100^2 + 2(100)(4) + 4^2 \\ &= 10000 + 800 + 16 = 10816 \quad \rhd \end{aligned}$$

7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$$\lhd \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \rhd$$

8. $(3x + 5y^3)(3x - 5y^3)$

◁ Aplicando la fórmula 3, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ para $a = 3x$ y $b = 5y^3$, obtenemos

$$\begin{aligned}(3x+5y^3)(3x-5y^3) &= (3x)^2 - (5y^3)^2\\ &= 9x^2 - 25y^6 \quad \triangleright\end{aligned}$$

9. $(\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt[3]{x}-4)$

◁ De la igualdad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ para $a = \sqrt[3]{x}$ y $b = 4$, se sigue que,

$$(\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt[3]{x}-4) = (x^{\frac{1}{3}}+4)(x^{\frac{1}{3}}-4) = (x^{\frac{1}{3}})^2 - 4^2 = x^{\frac{2}{3}} - 16 \quad \triangleright$$

10. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)$.

$$\triangleleft \quad \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{16} \quad \triangleright$$

11. $(2x+5)^3$

◁ Utilizamos en este caso la fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, para $a = 2x$ y $b = 5$, obteniendo,

$$(2x+5)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + 5^3$$

$$= 8x^3 + 15(4x^2) + 6x(25) + 125 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 \quad \triangleright$$

12. $(2x^2-5y)^3$

◁ Usando la fórmula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ para $a = 2x^2$ y $b = 5y$, obtenemos,

$$\begin{aligned}(2x^2-5y)^3 &= (2x^2)^3 - 3(2x^2)^2(5y) + 3(2x^2)(5y)^2 - (5y)^3\\ &= 8x^6 - 15(4x^4)y + 6x^2(25y^2) - 125y^3\\ &= 8x^6 - 60x^4y + 150x^2y^2 - 125y^3 \quad \triangleright\end{aligned}$$

13. $(x+3)(x^2-3x+9)$

$\triangleleft$ Considerando $a = x$ y $b = 3$, cuando aplicamos la fórmula

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

obtenemos

$$\begin{aligned}(x+3)(x^2 - 3x + 9) &= (x+3)(x^2 - x(3) + 3^2)\\ &= x^3 + 3^3 = x^3 + 27 \quad \triangleright\end{aligned}$$

14. $(x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$

$\triangleleft$ Si se toma $a = x^2$ y $b = 2$ en la fórmula

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

se tiene que

$$\begin{aligned}(x^2-2)(x^4 + 2x^2 + 4) &= (x^2 - 2)((x^2)^2 + x^2(2) + 2^2)\\ &= (x^2)^3 - 2^3 = x^6 - 8 \triangleright\end{aligned}$$

15. $(t+3)(t-9)$

$\triangleleft$ De la fórmula

$$(a+m)(a+n) = a^2 + (m+n)a + mn$$

para $a = t$, $m = 3$ y $n = -9$, se tiene que,

$$\begin{aligned}(t+3)(t-9) &= t^2 + (3-9)t + (3)(-9)\\ &= t^2 + (-6)t - 27 = t^2 - 6t - 27 \quad \triangleright\end{aligned}$$

16. $(a+b)^6$

$\triangleleft$ Primero construimos el Triángulo de Pascal con seis renglones

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

Los términos que aparecen en el desarrollo de $(a+b)^6$ son,

$$a^6,\ a^5b,\ a^4b^2,\ a^3b^3,\ a^2b^4,\ ab^5,\ b^6$$

y sus coeficientes son $1, 6, 15, 20, 15, 6$ y 1 respectivamente.

Estos coeficientes fueron tomados del sexto renglón del Triángulo de Pascal. Con lo anterior obtenemos la igualdad

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \quad \triangleright$$

17. $(2x+y)^5$

$\triangleleft$ Los términos que aparecen en el desarrollo de $(2x+y)^5$ son $(2x)^5$, $(2x)^4y$, $(2x)^3y^2$, $(2x)^2y^3$, $(2x)y^4$ y y^5. Los coeficientes correspondientes en este caso aparecen en el quinto renglón del Triángulo de Pascal obtenido en el ejercicio anterior

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

De lo anterior se sigue la igualdad

$$\begin{aligned}(2x+y)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4y + 10(2x)^3y^2 + 10(2x)^2y^3 + 5(2x)y^4 + y^5\\ &= 2^5x^5 + 5(2)^4x^4y + 10(2)^3x^3y^2 + 10(2)^2x^2y^3 + 10xy^4 + y^5\\ &= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5. \quad \triangleright\end{aligned}$$

18. $(x-3)^4$

$\triangleleft$ Si ponemos $(x-3)^4 = (x+(-3))^4$, entonces los términos que aparecen en el desarrollo son, $x^4, x^3(-3), x^2(-3)^2, x(-3)^3$ y $(-3)^4$.

Los coeficientes para cada uno de estos términos se toman del cuarto renglón del Triángulo de Pascal, es decir,

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

En consecuencia, obtenemos

$$(x-3)^4 = (x+(-3))^4 = x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(9) + 4x(-27) + 81 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 \quad \triangleright$$

Factorice las siguientes expresiones.

19. $2x^2 + 4x - 6xy$

$\lhd$ Los sumandos de $2x^2 + 4x - 6xy$ tienen como factor común a $2x$. Factorizamos a $2x$ y obtenemos la igualdad

$$2x^2 + 4x - 6xy = 2xx + 2x(x) - 2x(3y) = 2x(x + 2 - 3y) \quad \rhd$$

20. $x^2 - 9y^2$

$\lhd$ Como $9y^2 = (3y)^2$, entonces $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2$. Aplicando la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, para $a = x$ y $b = 3y$ obtenemos,

$$x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 = (x + 3y)(x - 3y) \quad \rhd$$

21. $25x^2 - 7y^2$

$\lhd$ Notemos que $25x^2 = (5x)^2$ y $7y^2 = (\sqrt{7}y)^2$. Al aplicar la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ para $a = 5x$ y $b = \sqrt{7}y$ se tiene que,

$$25x^2 - 7y^2 = (5x)^2 - (\sqrt{7}y)^2 = (5x + \sqrt{7}y)(5x - \sqrt{7}y) \quad \rhd$$

22. $t^2 + 10t + 25$

$\lhd$ Como $10t = 2t(5)$ y $25 = 5^2$, entonces $t^2 + 10t + 25 = t^2 + 2t(5) + 5^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Aplicando la fórmula $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ para $a = t$ y $b = 5$ obtenemos

$$t^2 + 10t + 25 = t^2 + 2t(5) + 5^2 = (t + 5)^2 \quad \rhd$$

23. $25x^2 - 10x + 1$

$\lhd$ Notemos que $25x^2 = (5x)^2$, $1 = 1^2$ y $10x = 2(5x)(1)$. Lo anterior implica que $25x^2 - 10x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto,

$$25x^2 - 10x + 1 = (5x)^2 - 2(5x)(1) + 1^2 = (5x - 1)^2 \quad \rhd$$

24. $x^6 + 8x^3y + 16y^2$

$\lhd$ De la fórmula $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, obtenemos

$$x^6 + 8x^3y + 16y^2 = (x^3)^2 + 2x^3(4y) + (4y)^2 = (x^3 + 4y)^2 \quad \rhd$$

25. $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$

$\lhd$ Comparemos a la expresión $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$ con

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Como $3a^2(5) = 15a^2$, $3a(5^2) = 75a$ y $5^3 = 125$, entonces,

$$a^3 + 15a^2 + 75a + 125 = a^3 + 3a^2(5) + 3a(5^2) + 5^3 = (a + 5)^3 \quad \rhd$$

26. $a^3 - 15a^2 + 75a - 125$

$\lhd$ Con la ayuda del problema anterior y de la fórmula

$$a^3 - 3a^2b + 3a^2b - b^3 = (a - b)^3$$

directamente podemos concluir que

$$a^3 - 15a^2 + 75a - 125 = (a - 5)^3 \quad \rhd$$

27. $x^3 - 1$

$\lhd$ Como $x^3 - 1 = x^3 - 1^3$, entonces aplicamos la igualdad

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

para $a = x$ y $b = 1$, obteniendo,

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \rhd$$

28. $8x^3 - 27y^3$

$\lhd$ Para factorizar, es suficiente observar las igualdades $(2x)^3 = 8x^3$, $(3y)^3 = 27y^3$, y recordar la fórmula de factorización $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

De esta forma,

$$\begin{aligned} 8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 &= (2x - 3y)((2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2) \\ &= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \quad \rhd \end{aligned}$$

29. $x^3 + 5$

$\lhd$ La raíz cúbica de 5 no es un número entero, por eso es necesario expresar a 5 como $(\sqrt[3]{5})^3 = (5^{1/3})^3$. De esta forma,

$$x^3 + 5 = x^3 + (5^{1/3})^3 = (x + 5^{1/3})(x^2 - x(5^{1/3}) + (5^{1/3})^2)$$

$$= (x + 5^{1/3})(x^2 - 5^{\frac{1}{3}}x + 5^{\frac{2}{3}}) \quad \triangleright$$

30. $x^6 + 8y^3$

$\triangleleft$ Si ponemos $a = (x^2)$ y $b = (2y)$, al usar la fórmula 6 se tiene que,

$$x^6 + 8y^3 = (x^2)^3 + (2y)^3 = (x^2 + 2y)((x^2)^2 - x^2(2y) + (2y)^2)$$
$$= (x^2 + 2y)(x^4 - 2x^2y + 4y^2) \quad \triangleright$$

Factorice las siguientes expresiones, utilizando la fórmula

$$a^2 + (m + n)a + mn = (a + m)(a + n)$$

31. $a^2 + 7a + 12$

$\triangleleft$ Es necesario encontrar dos números m y n, cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 12. Es decir,

$$m + n = 7$$
$$mn = 12.$$

Como $m = 3$ y $n = 4$ cumplen las dos condiciones, entonces

$$a^2 + 7a + 12 = (a + 3)(a + 4) \quad \triangleright$$

32. $x^2 - 2x - 15$

$\triangleleft$ Como $m = 3$ y $n = -5$ satisfacen las igualdades $m + n = -2$ y $mn = -15$, entonces

$$x^3 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5). \quad \triangleright$$

33. $x^2 + 10x + 25$

$\triangleleft$ En este caso $m = 5$ y $n = 5$, lo que nos lleva a la igualdad

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2 \quad \triangleright$$

34. $t^2 + 2t - 24$

$\triangleleft$ En este caso $m = 6$ y $n = -4$ satisfacen las condiciones y por lo tanto,

$$t^2 + 2t - 24 = (t + 6)(t - 4) \quad \triangleright$$

35. $2x^2 + 7x + 6$

$\lhd$ En este problema podemos considerar una factorización del tipo

$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + a)(x + b) = 2x^2 + (a + 2b)x + ab$$

donde a y b deben satisfacer $a + 2b = 7$ y $ab = 6$.

Una inspección simple muestra que $a = 3$ y $b = 2$ cumplen estas condiciones, y entonces la factorización obtenida es,

$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2) \quad \rhd$$

36. $3x^2 + 2x - 8$

$\lhd$ Procediendo análogamente al ejercicio anterior notemos que

$$3x^2 + 2x - 8 = (3x + a)(x + b) = 3x^2 + (a + 3b)x + ab$$

donde a, b satisfacen las condiciones $a + 3b = 2$ y $ab = -8$.

Los números que satisfacen estas condiciones son $a = -4$ y $b = 2$. De esta manera obtenemos,

$$3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2) \quad \rhd$$

3.2 Simplificación de fracciones

En esta sección utilizamos las factorizaciones de expresiones algebraicas para simplificar expresiones que involucran cocientes y sumas de fracciones. Usaremos para la simplificación los productos y factorizaciones notables, y el hecho de que si $A \neq 0$ es cualquier cantidad, entonces $\frac{A}{A} = 1$.

Simplificar las siguientes fracciones

37. $\frac{a}{a^2+a}$

$\lhd$ Al factorizar en el numerador y el denominador la cantidad $a \neq 0$, se tiene que,

$$\frac{a}{a^2 + a} = \frac{a(1)}{a(a+1)} = \frac{a}{a}\,\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} \quad \rhd$$

38. $\frac{8a-12b}{16a+24b}$

$\lhd$ Por inspección se tiene que los únicos factores comunes corresponden a los coeficientes. El número 4 es factor y entonces,

$$\frac{8a - 12b}{16a + 24b} = \frac{4(2a - 3b)}{4(4 + 6b)} = \frac{4}{4}\,\frac{2a - 3b}{4 + 6b} = \frac{2a - 3b}{4 + 6b}$$

Observamos que no tenemos más factores comunes. $\triangleright$

39. $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$

$\triangleleft$ Como $a^2+2ab+b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto, entonces necesariamente $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ y tenemos que,

$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)1}{(a+b)(a+b)}=\frac{a+b}{a+b}\,\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a+b} \quad \triangleright$$

40. $\frac{k-m}{k^2-m^2}$

$\triangleleft$ De la factorización $k^2-m^2=(k+m)(k-m)$ se sigue que

$$\frac{k-m}{k^2-m^2}=\frac{k-m}{(k+m)(k-m)}=\frac{1(k-m)}{(k+m)(k-m)}=\frac{1}{k+m}$$

$$\frac{k-m}{k-m}=\frac{1}{k+m} \triangleright$$

41. $\frac{6a+9b}{4a^2-9b^2}$

$\triangleleft$ Realizamos las factorizaciones del numerador y del denominador,

$$\begin{cases} 6a+9b=3(2a+3b) \\ 4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a-3b)(2a+3b) \end{cases}$$

y obtenemos que,

$$\frac{6a+9b}{4a^2-9b^2}=\frac{3(2a+3b)}{(2a-3b)(2a+3b)}=\frac{3}{2a-3b}\,\frac{2a+3b}{2a+3b}=\frac{3}{2a-3b} \triangleright$$

42. $\frac{2m^2-4m}{m^2+4m-12}$

$\triangleleft$ Factorizamos ambos términos,

$$\begin{cases} 2m^2-4m=2m(m-2) \\ m^2+4m-12=(m+6)(m-2) \end{cases}$$

y se tiene entonces que,

$$\frac{2m^2-4m}{m^2+4m-12}=\frac{2m(m-2)}{(m+6)(m-2)}=\frac{2m}{m+6}\,\frac{m-2}{m-2}=\frac{2m}{m+6} \triangleright$$

43. $-\frac{8a^2-16ab+8b^2}{4b^2-4a^2}$

◁ Factorizamos al numerador y al denominador,

$$\begin{cases} 8a^2 - 16ab + 8b^2 = 8(a^2 - 2ab + b^2) = 8(a-b)^2 \\ 4b^2 - 4a^2 = 4(b^2 - a^2) = 4(b-a)(b+a) \end{cases}$$

y se tiene entonces que,

$$-\frac{8a^2 - 16ab + 8b^2}{4b^2 - 4a^2} = -\frac{8(a-b)^2}{4(b-a)(b+a)} = -\frac{8(a-b)(a-b)}{4(b-a)(b+a)}$$

$$= -\frac{8}{4}\frac{(a-b)}{(b-a)}\frac{(a-b)}{(a+b)} = 2\frac{(a-b)}{-(b-a)}\frac{(a-b)}{(a+b)} = 2\frac{a-b}{a-b}\frac{(a-b)}{(a+b)}$$

$$= 2\frac{(a-b)}{(a+b)} = \frac{2(a-b)}{(a+b)} \triangleright$$

44. $\frac{18x^2-24x-64}{9x^3-16x}$

◁ Factorizando el denominador y el numerador se tiene

$$\begin{cases} 18x^2 - 24x - 64 = 2(9x^2 - 12x - 32) = 2(3x-8)(3x+4) \\ 9x^3 - 16x = x(9x^2 - 16) = x(3x-4)(3x+4) \end{cases}$$

De esta forma,

$$\frac{18x^2 - 24x - 64}{9x^3 - 16x} = \frac{2(3x-8)(3x+4)}{x(3x-4)(3x+4)} = \frac{2}{x}\frac{3x-8}{3x-4}\frac{3x+4}{3x+4} = \frac{2}{x}\frac{3x-8}{3x-4} \quad \triangleright$$

45. $\frac{2a+3b-c}{4ab} - \frac{a-2b+3c}{6bc} + \frac{-3a-b+2c}{8ac}$

◁ Buscamos un denominador común, que en este caso es $24abc$, y sumamos las fracciones,

$$\frac{2a+3b-c}{4ab} - \frac{a-2b+3c}{6bc} + \frac{-3a-b+2c}{8ac}$$

$$= \frac{6c(2a+3b-c) - 4a(a-2b+3c) + 3b(-3a-b+2c)}{24abc}$$

$$= \frac{12ac + 18bc - 6c^2 - 4a^2 + 8ab - 12ac - 9ab - 3b^2 + 6bc}{24abc}$$

$$= \frac{-4a^2 - 3b^2 - 6c^2 - ab + 24bc}{24abc} \quad \triangleright$$

46. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$

◁ Un denominador común es $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$, y al realizar la suma de fracciones se tiene que,

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)(x+y)-(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4xy}{x^2-y^2} \quad \triangleright$$

47. $\frac{a-2b}{a^2-b^2} + \frac{2}{a-b}$

◁ Ya que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, entonces un denominador común de $a-b$ y a^2-b^2 es a^2-b^2. De esta forma, al sumar se tiene que,

$$\frac{a-2b}{a^2-b^2} + \frac{2}{a-b} = \frac{1(a-2b)+2(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{a-2b+2a+2b}{a^2-b^2} = \frac{3a}{a^2-b^2} \quad \triangleright$$

48. $\frac{x-5}{x-6} + \frac{2x-8}{x^2-10x+24}$

◁ Realizamos la factorización del denominador del segundo sumando, obteniendo que $x^2 - 10x + 24 = (x-6)(x-4)$.

De esta manera el denominador común es $x^2 - 10x + 24$, y cuando se suman las fraccciones se tiene,

$$\frac{x-5}{x-6} + \frac{2x-8}{x^2-10x+24} = \frac{(x-4)(x-5)+1(2x-8)}{x^2-10x+24} =$$

$$\frac{x^2-9x+20+2x-8}{x^2-10x+24} = \frac{x^2-7x+12}{x^2-10x+24} = \frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-6)}$$

$$= \frac{x-4}{x-4}\frac{x-3}{x-6} = \frac{x-3}{x-6} \quad \triangleright$$

49. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} - \frac{b+c}{(a-c)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$

◁ Usando el hecho de que $-(a-c)(a-b) = (c-a)(a-b)$, en el segundo denominador se tiene un denominador común $(b-c)(c-a)(a-b)$, y la reducción se logra en la siguiente cadena de igualdades,

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} - \frac{b+c}{(a-c)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{-(a-c)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$$
$$= \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$= \frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0 \quad \triangleright$$

50. $\frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-ab} + \frac{b^2}{a^3-a^2b}$

$\triangleleft$ Al factorizar los denominadores se tiene que

$$\begin{cases} a-b = a-b \\ a^2-ab = a(a-b) \\ a^3-a^2b = a^2(a-b) \end{cases}$$

lo cual nos dice que el denominador común es $a^2(a-b)$. Procedemos a realizar la fracción común utilizando este denominador, obteniendo,

$$\frac{1}{a-b} - \frac{2}{a^2-ab} + \frac{b^2}{a^3-a^2b} = \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a(a-b)} + \frac{b^2}{a^2(a-b)}$$
$$= \frac{a^2(1)-a(2b)+1(b^2)}{a^2(a-b)} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2(a-b)}$$
$$= \frac{(a-b)}{a^2}\,\frac{(a-b)}{(a-b)} = \frac{a-b}{a^2} \quad \triangleright$$

51. $\frac{b}{a(a+bx)^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{1}{x}\right)$

$\triangleleft$ Aplicamos la distribución del segundo término y notamos que el factor común es $a^2(a+b)^2x$. Procedamos a realizar la reducción utilizando este denominador común.

$$\frac{b}{a(a+bx)^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{1}{x}\right) = \frac{b}{a(a+bx)^2} - \frac{b}{a^2(a+bx)} + \frac{1}{a^2x}$$
$$= \frac{ax(b)-(a+bx)bx+(a+bx)^2}{a^2(a+bx)^2x} = \frac{abx-abx-b^2x^2+a^2+2abx+b^2x^2}{a^2(a+bx)^2x}$$
$$= \frac{a^2+2abx}{a^2(a+bx)^2x} = \frac{a(a+2bx)}{a\,a(a+bx)^2x} = \frac{a}{a}\,\frac{(a+2abx)}{a\,(a+bx)^2x} = \frac{a+2bx}{a(a+bx)^2x} \quad \triangleright$$

52. $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

◁ Sumamos las fracciones en el denominador y el numerador, y hacemos reducción usando la regla del sandwich.

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y+x}{xy}}=\frac{xy(y-x)}{xy(x+y)}=\frac{xy}{xy}\frac{y-x}{y+x}=\frac{y-x}{y+x}\quad \triangleright$$

53. $\frac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{c-d}$

◁ Sumamos la fracción del numerador y hacemos la reducción mediante la regla del sandwich y una factorización.

$$\frac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{c-d}=\frac{\frac{c^2-d^2}{dc}}{\frac{c-d}{1}}=\frac{1(c^2-d^2)}{dc(c-d)}=\frac{c^2-d^2}{cd(c-d)}$$

$$=\frac{(c-d)(c+d)}{cd(c-d)}=\frac{c-d}{c-d}\frac{c+d}{cd}=\frac{c+d}{cd}\quad \triangleright$$

54. $\frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{k}}{\frac{h-k}{hk}}$

◁ Mediante un cálculo análogo de los ejercicios anteriores se tiene que,

$$\frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{k}}{\frac{h-k}{hk}}=\frac{\frac{k-h}{hk}}{\frac{h-k}{hk}}=\frac{hk(k-h)}{hk(h-k)}=\frac{hk}{hk}\frac{k-h}{h-k}=\frac{k-h}{h-k}$$

$$=-\frac{-(k-h)}{h-k}=-\frac{h-k}{h-k}=-1$$

donde se ha multiplicado dos veces por el signo para obtener un término igual al del denominador. ▷

55. $\frac{q-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{q}}$

◁ Usando el método anterior se tiene, en este caso,

$$\frac{q-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{q}}=\frac{\frac{q}{1}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{q}}=\frac{\frac{q^2-1}{q}}{\frac{q+1}{q}}=\frac{q(q^2-1)}{q(q+1)}=\frac{q^2-1}{q+1}$$

$$=\frac{(q-1)(q+1)}{q+1}=q-1\quad \triangleright$$

56. $\frac{1-\frac{1}{r}}{r-2+\frac{1}{r}}$

$\lhd$ Análogo a los ejercicios anteriores, se tiene que,

$$\frac{1-\frac{1}{r}}{r-2+\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{r}}{\frac{r}{1}-\frac{2}{1}+\frac{1}{r}} = \frac{\frac{r-1}{r}}{\frac{r^2-2r+1}{r}} = \frac{r(r-1)}{r(r^2-2r+1)}$$

$$= \frac{r-1}{r^2-2r+1} = \frac{r-1}{(r-1)^2} = \frac{(r-1)}{(r-1)}\,\frac{1}{(r-1)} = \frac{1}{r-1} \quad \rhd$$

57. $\frac{\frac{m}{1+m}-\frac{1-m}{m}}{\frac{m}{1+m}+\frac{1-m}{m}}$

$\lhd$ Calculando directamente, se tiene que

$$\frac{\frac{m}{1+m}-\frac{1-m}{m}}{\frac{m}{1+m}+\frac{1-m}{m}} = \frac{\frac{m^2-(1+m)(1-m)}{m(1+m)}}{\frac{m^2+(1+m)(1-m)}{m(1+m)}} = \frac{\frac{m^2-(1-m^2)}{m(1+m)}}{\frac{m^2+(1-m^2)}{m(1+m)}}$$

$$= \frac{\frac{2m^2-1}{m(1+m)}}{\frac{1}{m(1+m)}} = \frac{m(1+m)(2m^2-1)}{m(1+m)(1)} = 2m^2-1 \quad \rhd$$

3.3 Despejes

Aquí utilizamos las propiedades de una igualdad. La idea es que el lector las ocupe en el proceso de despejar una variable de una igualdad dada. Los procedimientos de despeje son algoritmos que el lector debe aprender: *Si un elemento está sumando de un lado, pasa al otro lado restando; si está dividiendo, pasa multiplicando, etcétera.* La prioridad de la operación que efectúa un elemento el lector debe reconocerla por inspección.

Despeje en cada uno de los ejercicios siguientes la variable indicada. Escriba la solución de la forma más conveniente para realizar cálculos.

58. Para calcular el calor latente de vaporización Q se tiene una fórmula,

$$Q = \frac{WL}{T}$$

despeje a la variable T de esta relación.

$\lhd$ Iniciamos con,

$$Q = \frac{WL}{T} \quad \text{(se pasa } T \text{ multiplicando al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$
$$QT = WL \quad \text{(se pasa } Q \text{ dividiendo al lado derecho)}$$
$\Rightarrow$
$$T = \frac{WL}{Q}$$
con lo que concluye el despeje de la variable indicada. $\triangleright$

59. La corriente a través del inducido de un generador está dada por la fórmula
$$I = \frac{E - e}{R}$$
Despejar la variable e.

$\triangleleft$ De la fórmula inicial
$$I = \frac{E - e}{R} \quad \text{(se pasa } R \text{ multiplicando al lado izquierdo)}$$
$\Rightarrow$
$$RI = E - e \quad \text{(se pasa } E \text{ restando al lado izquierdo)}$$
$\Rightarrow$
$$RI - E = -e \quad \text{(se multiplica por -1 de cada lado)}$$
$\Rightarrow$
$$-(RI - E) = -(-e) = e$$
$\Rightarrow$
$$-RI + E = e$$
o equivalentemente,
$$E - RI = e$$
De la propiedad reflexiva de la igualdad, se tiene entonces que
$$e = E - RI \quad \triangleright$$

60. De la fórmula de conversión de temperaturas
$$T = \frac{1}{a} + t$$
despejar a la variable a.

$\triangleleft$ Consideremos la fórmula inicial,
$$T = \frac{1}{a} + t \quad \text{(se pasa restando } t \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$T - t = \frac{1}{a} \quad \text{(invertimos ambos miembros)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{T-t} = a$$

lo cual nos dice que,

$$a = \frac{1}{T-t} \quad \triangleright$$

61. De la fórmula

$$p = \frac{m}{d-L} - \frac{m}{d+L}$$

despeje la variable m.

$\triangleleft$ Sea la fórmula inicial

$$p = \frac{m}{d-L} - \frac{m}{d+L} \quad \text{(realizamos la fracción común)}$$

$\Rightarrow$

$$p = \frac{m}{d-L} - \frac{m}{d+L} = \frac{m(d+L) - m(d-L)}{(d-L)(d+L)} = \frac{md + mL - md + mL}{(d-L)(d+L)}$$

$\Rightarrow$

$$p = \frac{2mL}{(d-L)(d+L)} \quad \text{(pasamos multiplicando } (d{-}L)(d{+}L) \text{del lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$p(d-L)(d+L) = 2mL \quad \text{(pasamos } 2L \text{ dividiendo del lado derecho)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p(d-L)(d+L)}{2L} = m$$

De esta manera, obtenemos,

$$m = \frac{p(d-L)(d+L)}{2L} \quad \triangleright$$

62. De la siguiente fórmula,

$$\frac{e}{x} = c(e-b) + \frac{b}{x} \quad \text{donde} \quad e - b \neq 0,$$

despejar la variable x.

◁ De la ecuación inicial

$$\frac{e}{x} = c(e-b) + \frac{b}{x}$$

empezamos por dejar a los términos en "x" en un sólo lado de la igualdad al pasar restando $\frac{b}{x}$ del lado izquierdo, es decir,

$$\frac{e}{x} - \frac{b}{x} = c(e-b) \quad \text{(realizamos la fracción común del lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e-b}{x} = c(e-b) \quad \text{(pasamos multiplicando } x \text{ al lado derecho)}$$

$\Rightarrow$

$$e-b = c(e-b)x \quad \text{(pasamos dividiendo } c(e-b) \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e-b}{c(e-b)} = x \quad \text{(como } (e-b) \neq 0\text{, lo cancelamos)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{c} = x$$

de donde se tiene finalmente que,

$$x = \frac{1}{c} \quad \triangleright$$

63. De la regla de cambio de grados Fahrenheit y grados centígrados

$$C = \frac{5}{9}(F-32)$$

despejar la variable F.

◁ Sea la relación inicial,

$$C = \frac{5}{9}(F-32) \quad \text{(pasamos 9 multiplicando al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$9C = 5(F-32) \quad \text{(pasamos 5 dividiendo al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{9C}{5} = F - 32 \quad \text{(pasamos sumando 32 al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{9C}{5} + 32 = F$$

lo cual nos dice que

$$F = \frac{9C}{5} + 32 \quad \triangleright$$

64. De la ecuación del grosor de una cañería

$$A = \frac{m}{t}(p + t)$$

despejar a la variable t.

$\triangleleft$ Sea la ecuación

$$A = \frac{m}{t}(p + t) \quad \text{(pasamos multiplicando } t \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$At = m(p + t) \quad \text{(distribuimos el lado derecho)}$$

$\Rightarrow$

$$At = mp + mt \quad \text{(pasamos restando } mt \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$At - mt = mp \quad \text{(factorizamos } t \text{ en el lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$t(A - m) = mp \quad \text{(pasamos dividiendo } A - m \text{ del lado derecho)}$$

$\Rightarrow$

$$t = \frac{mp}{A - m} \quad \triangleright$$

65. De la ecuación de la cantidad teórica de aire necesario para quemar un combustible,

$$M = 10.5C + 35.2\left(W - \frac{C}{8}\right)$$

despejar la variable C.

$\triangleleft$ Si partimos de la ecuación inicial,

$$M = 10.5C + 35.2\left(W - \frac{C}{8}\right) \quad \text{(distribuimos el sumando del lado derecho)}$$

$\Rightarrow$

$$M = 10.5C + 35.2W - 35.2\left(\frac{C}{8}\right) = 10.5C + 35.2W - 4.4C$$

$\Rightarrow$

$$M = 6.1C + 35.2W \quad \text{(pasamos restando } 35.2W \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$M - 35.2W = 6.1C \quad \text{(pasamos dividiendo 6.1 al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{M - 35.2W}{6.1} = C$$

lo cual nos hace concluir que,

$$C = \frac{M - 35.2W}{6.1} \quad \triangleright$$

66. De la ecuación de la superficie de un cilindro

$$S = \left(\frac{\pi d^2}{2} + \frac{\pi dl}{r} \right) \div \frac{\pi d^2 l}{4rc}$$

despejar la variable r.

$\triangleleft$ Considere la ecuación inicial escrita en la forma,

$$S = \frac{\frac{\pi d^2}{2} + \frac{\pi d\ell}{r}}{\frac{\pi d^2 \ell}{4rc}} \quad \text{(realizamos la fracción común en el numerador)}$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{\frac{\pi d^2 r + 2\pi d\ell}{2r}}{\frac{\pi d^2 \ell}{4rc}} \quad \text{(utilizamos la regla del sandwich)}$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{4rc(\pi d^2 r + 2\pi d\ell)}{2r\pi d^2 \ell} \quad \text{(cancelamos } r \text{ y un coeficiente 2)}$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{2c(\pi d^2 r + 2\pi d\ell)}{\pi d^2 \ell} \quad \text{(pasamos } \pi d^2 \ell \text{ multiplicando al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$S\pi d^2 \ell = 2c(\pi d^2 r + 2\pi d\ell) \quad \text{(distribuimos en el segundo miembro)}$$

$\Rightarrow$

$$S\pi d^2 \ell = 2c\pi d^2 r + 4c\pi d\ell \quad \text{(pasamos restando } 4c\pi d\ell \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$S\pi d^2\ell - 4c\pi d\ell = 2c\pi d^2 r \quad \text{(pasamos dividiendo } 2c\pi d^2 \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{S\pi d^2\ell - 4c\pi d\ell}{2c\pi d^2} = r$$

es decir,

$$r = \frac{S\pi d^2\ell - 4c\pi d\ell}{2c\pi d^2} = \frac{\pi d\ell(Sd - 4c)}{2c\pi d^2} = \frac{\ell(Sd - 4c)}{2cd}$$

donde, en la última cadena de igualdades se ha realizado la operación de las fracciones. $\triangleright$

67. De la relación dada por,

$$T = T_1\left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{h_0}\right)$$

despejar la variable n.

$\triangleleft$ Sea la relación inicial,

$$T = T_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{h}{h_0}\right) \quad \text{(multiplicamos las fracciones del segundo miembro)}$$

$\Rightarrow$

$$T = T_1\left(1 - \frac{(n-1)h}{nh_0}\right) = T_1\left(1 - \frac{nh - h}{nh_0}\right) = T_1\left(1 - \frac{nh}{nh_0} + \frac{h}{nh_0}\right)$$

$$= T_1\left(1 - \frac{h}{h_0} + \frac{h}{h_0 n}\right) \quad \text{(pasamos dividiendo } T_1 \text{ del lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{T}{T_1} = 1 - \frac{h}{h_0} + \frac{h}{h_0 n} \quad \text{(pasamos restando 1 y sumando } \tfrac{h}{h_0} \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{T}{T_1} - 1 + \frac{h}{h_0} = \frac{h}{h_0 n} \quad \text{(pasamos multiplicando } n \text{ al lado izquierdo)}$$

$\Rightarrow$

$$n\left(\frac{T}{T_1} - 1 + \frac{h}{h_0}\right) = \frac{h}{h_0} \text{ (pasamos } \left(\tfrac{T}{T_1} - 1 + \tfrac{h}{h_0}\right) \text{ dividiendo al lado derecho)}$$

$\Rightarrow$
$$n = \frac{\frac{h}{h_0}}{\frac{T}{T_1} - 1 + \frac{h}{h_0}}$$

Finalmente, utilizamos la regla del sandwich y obtenemos

$$n = \frac{h}{h_0\left(\frac{T}{T_1} - 1 + \frac{h}{h_0}\right)} \quad \triangleright$$

3.4 Ecuaciones lineales y cuadráticas

En esta sección introducimos la solución de las ecuaciones algebraicas más simples en una variable, y hacemos uso de las soluciones en problemas prácticos y de factorización.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal (en forma canónica) en la variable x es una expresión del tipo
$$ax + b = 0$$
donde a, b son números reales ($a \neq 0$).

DEFINICIÓN. A la cantidad
$$x = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$$
se le llama la **solución** o **raíz** de la ecuación lineal dada, en virtud de que satisface tal relación.

$\triangleleft$ De hecho, si $x = \frac{-b}{a}$, entonces
$$ax + b = a\left(\frac{-b}{a}\right) + b = \frac{-ab}{a} + b = -b + b = 0 \quad \triangleright$$

Dada una ecuación lineal, el despeje de la variable x nos da.
$$\triangleleft \quad ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = \frac{-b}{a}\,(a \neq 0) \quad \triangleright$$
y se dice entonces que se ha resuelto tal ecuación lineal.

Resolver las siguientes ecuaciones lineales.

68. $13x - 8 = 8x + 2$

$\lhd$ Como se menciona, para resolver la ecuación dada, es suficiente despejar a x. Esto es, damos la ecuación inicial,

$$13x - 8 = 8x + 2$$

(pasamos $8x$ restando al lado izquierdo y 8 sumando al derecho)
$\Rightarrow$

$$13x - 8 = 8x + 2 \iff 13x - 8x = 2 + 8 \iff 5x = 10$$

(pasamos dividiendo 5 del lado derecho)
$\Rightarrow$

$$5x = 10 \iff x = \frac{10}{5} \iff x = 2$$

De esta manera, la solución es $x = 2$. $\rhd$

69. $7x + 4 = x - 8$

$\lhd$ Análogamente al ejercicio anterior, despejamos la variable x.
Si

$$7x + 4 = x - 8$$

(pasamos x restando al lado izquierdo y 4 restando al derecho)
$\Rightarrow$

$$7x + 4 = x - 8 \iff 7x - x = -8 - 4 \iff 6x = -12$$

(pasamos dividiendo 6 del lado derecho)
$\Rightarrow$

$$6x = -12 \iff x = \frac{-12}{6} \iff x = -2$$

Es decir, $x = -2$ es la solución de la ecuación dada. $\rhd$

70. $2 - 3x + 7 = 8x + 3 - x$

$\lhd$ Despejamos x, en un proceso análogo al de los ejercicios anteriores.

$$2 - 3x + 7 = 8x + 3 - x \iff -3x + 7 + 2 = 8x - x + 3$$

$$\iff -3x + 9 = 7x + 3 \iff -3x - 7x = 3 - 9$$

$$\iff -10x = -6 \iff x = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

de donde la solución es $x = \frac{3}{5}$. $\rhd$

71. $5y - (3y - 2) = 0$

$$\triangleleft \quad 5y-(3y-2)=0 \iff 5y-3y+2=0 \iff 2y+2=0$$

$$\iff 2y=-2 \iff y=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto, la solución es $y=-1$. $\triangleright$

72. $6(w+5)-12=3(3w-1)+4w$

$$\triangleleft \quad 6(w+5)-12=3(3w-1)+4w \iff 6w+30-12=9w-3+4w$$

$$\iff 6w+18=13w-3 \iff 6w-13w=-3-18 \iff -7w=-21$$

$$\iff w=\frac{-21}{-7}=3$$

De esta forma, la solución es $w=3$. $\triangleright$

En algunas ocasiones, ecuaciones que en apariencia no son lineales se transforman en una lineal en su forma normal, mediante algunas operaciones algebraicas. Los siguientes ejercicios ilustran esto.

73. $(r+1)^2=r^2+9$

$$\triangleleft \quad (r+1)^2=r^2+9 \iff r^2+2r+1=r^2+9$$

$$\iff r^2+2r-r^2=9-1 \iff 2r=8 \iff r=\frac{8}{2}=4$$

Por lo tanto, la solución es $r=4$. $\triangleright$

74. $(x-2)^3=x^2(x-6)$

$\triangleleft$ Desarrollamos el cubo del lado izquierdo,

$$(x-2)^3=x^2(x-6) \iff x^3-6x^2+12x-8=x^3-6x^2$$

$$\iff x^3-6x^2+12x-8-x^3+6x^2=0 \iff 12x-8=0$$

$$\iff 12x=8 \iff x=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

De esta forma, la solución es $x=\frac{2}{3}$. $\triangleright$

75. $(z+1)(z+5)=(z+2)(z+3)$

$$\triangleleft \quad (z+1)(z+5)=(z+2)(z+3) \iff z^2+6z+5=z^2+5z+6$$

$$\iff z^2 + 6z + 5 - z^2 - 5z = 6 \iff z = 6 - 5 = 1$$

Así , la solución es $z = 1$. $\triangleright$

76. $\frac{5}{3y+2} = \frac{7}{5y-2}$

$$\triangleleft \quad \frac{5}{3y+2} = \frac{7}{5y-2} \iff 5(5y-2) = 7(3y+2)$$

$$\iff 25y - 10 = 21y + 14 \iff 25y - 21y = 14 + 10$$

$$\iff 4y = 24 \iff y = \frac{24}{4} = 6$$

Por lo tanto, la solución es $y = 6$. $\triangleright$

77. $\frac{6y-3}{3y+2} = \frac{2y+1}{y+2}$

$$\triangleleft \quad \frac{6y-3}{3y+2} = \frac{2y+1}{y+2} \iff (6y-3)(y+2) = (2y+1)(3y+2)$$

$$\iff 6y^2 - 3y + 12y - 6 = 6y^2 + 3y + 4y + 2 \iff 6y^2 + 9y - 6 = 6y^2 + 7y + 2$$

$$\iff 6y^2 + 9y - 6y^2 - 7y = 2 + 6 \iff 2y = 8 \iff y = \frac{8}{2} = 4$$

Por lo tanto, la solución es $y = 4$. $\triangleright$

78. $\frac{8}{x-2} - \frac{5}{x-11} = \frac{3}{x-5}$

$\triangleleft$ Sumamos las fracciones del primer miembro, escribiéndolo en la forma,

$$\frac{3}{x-5} = \frac{8}{x-2} - \frac{5}{x-11} = \frac{8(x-11) - 5(x-2)}{(x-2)(x-11)} = \frac{8x - 88 - 5x + 10}{(x-2)(x-11)}$$

$$\iff$$

$$\frac{3}{x-5} = \frac{3x-78}{(x-2)(x-11)}$$

Resolvemos la última ecuación,

$$\frac{3}{x-5} = \frac{3x-78}{(x-2)(x-11)} \iff 3(x-2)(x-11) = (3x-78)(x-5)$$

$$\iff 3(x^2 - 13x + 22) = 3x^2 - 78x - 15x + 390$$

$$\iff 3x^2 - 39x + 66 = 3x^2 - 93x + 390$$

$$\iff 3x^2 - 39x - 3x^2 + 93x = 390 - 66 \iff 54x = 324$$

$$\iff x = \frac{324}{54} = 6$$

De esta forma, la solución es $x = 6$. $\triangleright$

79. $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{2}{2x-3}$

$\triangleleft$ Realizamos la fracción del lado izquierdo,

$$\frac{2}{2x-3} = \frac{2x}{x^2-4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{2x-4}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x+2}$$

es decir, resolvemos la ecuación

$$\frac{2}{2x-3} = \frac{2}{x+2}$$

así

$$\frac{2}{2x-3} = \frac{2}{x+2} \iff 2(x+2) = 2(2x-3) \iff 2x+4 = 4x-6$$

$$\iff 4+6 = 4x-2x \iff 10 = 2x \iff \frac{10}{2} = x$$

Por lo tanto, la solución es $x = 5$. $\triangleright$

Resolver los siguientes problemas mediante el planteamiento y solución de una ecuación lineal.

80. El perímetro de un parque circular excede en 10 km a su diámetro. ¿Cuánto mide el radio del parque? ¿Cuánto mide el área del parque?

$\triangleleft$ Denotemos por P al perímetro del parque y por d su diámetro, dados en kms. Entonces, si r es el radio del parque, se cumplen las ecuaciones

$$P = 2\pi r$$

$$d = 2r$$

Ya que P excede a d en 10 kms, entonces $P = d+10$, o equivalentemente,

$$2\pi r = 2r + 10$$

que es una ecuación lineal en la variable r.

Resolvemos tal ecuación despejando a r,

$$2\pi r = 2r + 10 \iff 2\pi r - 2r = 10 \iff r(2\pi - 2) = 10$$

$$\iff r = \frac{10}{2\pi - 2} \iff r = \frac{10}{2(\pi - 1)} = \frac{5}{\pi - 1}$$

De esta manera el radio del parque es $r = \frac{5}{\pi-1}$ km, y por lo tanto, el área A del parque será

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{\pi - 1} \right)^2 = \pi \frac{25}{(\pi - 1)^2} = \frac{25\pi}{(\pi - 1)^2} \quad \text{km}^2 \quad \triangleright$$

81. Un sistema de refrigeración de 20 litros se llena con un anticongelante al 25%. ¿Cuántos litros deben ser extraídos y reemplazados por anticongelante puro, para elevar la concentración a un 45%?

$\triangleleft$ Denotemos por ℓ el número de litros que hay que reemplazar, extrayéndolos con concentración al 25%, y agregándolos con una concentración al 100%, para obtener nuevamente 20 litros al 45%. El proceso se describe por la igualdad,

$$20\,(\text{al } 25\%) - \ell\,(\text{al } 25\%) + \ell\,(\text{al } 100\%) = 20\,(\text{al } 45\%)$$

es decir,

$$20 \left(\frac{25}{100} \right) - \ell \left(\frac{25}{100} \right) + \ell \left(\frac{100}{100} \right) = 20 \left(\frac{45}{100} \right)$$

$$\iff$$

$$\frac{20(25)}{100} - \frac{25\ell}{100} + \frac{100\ell}{100} = \frac{20(45)}{100}$$

$$\iff \frac{20(25) - 25\ell + 100\ell}{100} = \frac{20(45)}{100} \quad \text{(cancelamos 100)}$$

$$\iff 20(25) + 75\ell = 20(45)$$

$$\iff 75\ell = 20(45) - 20(25) = 20(45 - 25) = 20(20)$$

$$\iff 75\ell = 400 \iff \ell = \frac{400}{75} = 5.33$$

De esta manera, se deberán reemplazar 5.33 litros al 25% por 5.33 litros al 100% de anticongelante, para tener 20 litros al 45%. $\triangleright$

82. El tanque del laboratorio de acuacultura de la UAM-Iztapalapa se puede llenar con dos llaves en 50 minutos. Si una de ellas, sola, puede llenarla en una hora y cuarto, ¿cuánto tardaría en llenar la otra?

$\triangleleft$ Se entiende por T a la capacidad total del tanque, por v_1 a la velocidad de llenado de la primera llave y por v_2 a la velocidad de llenado de la otra llave. Entonces se tiene que

$$v_1 = \frac{\text{capacidad del tanque}}{\text{tiempo de llenado de la primera llave}} = \frac{T}{75}$$

$$v_2 = \frac{\text{capacidad del tanque}}{\text{tiempo de llenado de la segunda llave}} = \frac{T}{t}$$

donde, el tiempo para la primer llave es de 75 minutos (hora y cuarto) y el tiempo de llenado para la otra llave es la incógnita t.

Por otro lado, si v es la velocidad de llenado con las dos llaves, entonces v es la suma de v_1 y v_2, es decir, $v_1 + v_2 = v$. De la definición se tiene además que,

$$v = \frac{T}{50}$$

es decir,

$$\frac{T}{50} = \frac{T}{75} + \frac{T}{t}$$

o equivalentemente,

$$\frac{T}{50} = \frac{T}{75} + \frac{T}{t} \iff \frac{T}{50} = T\left(\frac{1}{75} + \frac{1}{t}\right) \iff \frac{1}{50} = \frac{1}{75} + \frac{1}{t}$$

$$\iff \frac{1}{50} - \frac{1}{75} = \frac{1}{t} \iff \frac{75-50}{50(75)} = \frac{1}{t} \iff \frac{25}{50(75)} = \frac{1}{t}$$

$$\iff \frac{1}{2(75)} = \frac{1}{t} \iff \frac{1}{150} = \frac{1}{t} \iff t = 150$$

Esto es, la segunda llave tendría un tiempo de llenado de $t = 150$ minutos, es decir, de dos horas y media. $\triangleright$

83. Una leona sale a cazar desde su madriguera a una velocidad promedio de 3 km/h y regresa con partes de sus presas a una velocidad promedio de 2 km /h. Si la cacería no puede durar más de 6 horas debido a que tiene que cuidar a sus cachorros, ¿cuánto puede alejarse de su madriguera?

$\triangleleft$ Sea D la distancia que puede recorrer a lo más durante su cacería. Ya que tiene que recorrer la misma distancia a otra velocidad, se cumple que

$$\text{Tiempo de ida} + \text{tiempo de vuelta} = 6 \text{ horas}$$

Pero de la definición de velocidad promedio,

$$\text{Tiempo de ida} = \frac{D}{\text{velocidad} \quad (\text{ida})} = \frac{D}{3} \text{ hrs.}$$

$$\text{Tiempo de vuelta} = \frac{D}{\text{velocidad} \quad (\text{vuelta})} = \frac{D}{2} \text{ hrs.}$$

lo cual implica que

$$\frac{D}{3} + \frac{D}{2} = 6$$

o equivalentemente,

$$6 = \frac{D}{3} + \frac{D}{2} = \frac{2D + 3D}{6} = \frac{5D}{6}$$

lo que nos dice que la distancia máxima recorrida es $D = \frac{36}{5} = 7.2$ kms. $\triangleright$

84. Se tienen dos soluciones ácidas una A al 20% de ácido y la otra B al 60% de ácido. ¿Cuánto se deberá poner de cada solución para obtener 100 ml de una solución al 40% de ácido?

$\triangleleft$ Sea s la cantidad de solución A necesaria para obtener la cantidad requerida al 40%. Entonces la cantidad B necesaria es de $100 - s$. Esto es, la ecuación que describe el problema es, en mililitros,

$$\text{cantidad de } A\,(\text{al } 20\%) + \text{cantidad de } B\,(\text{al } 60\%) = 100 \;(\text{al } 40\%)$$

es decir,

$$s\left(\frac{20}{100}\right) + (100 - s)\left(\frac{60}{100}\right) = 100\left(\frac{40}{100}\right)$$

$\iff$

$$\frac{20s}{100} + \frac{60(100 - s)}{100} = \frac{4000}{100} \iff \frac{20s + 6000 - 60s}{100} = \frac{4000}{100}$$

$$\iff -40s + 6000 = 4000 \iff 6000 - 4000 = 40s \iff 2000 = 40s$$

$$\iff s = \frac{2000}{40} = 50$$

De esta manera, se deberán poner 50 ml de la sustancia A y $100-50 = 50$ ml de la sustancia B. $\triangleright$

85. Si la ecuación $C = 5/9(F - 32)$ representa la relación entre las lecturas expresadas en grados centígrados y Farhrenheit, de una temperatura, hallar a qué temperatura las dos lecturas serán iguales.

$\triangleleft$ De la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

se obtiene la relación para F,

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Definamos la variable de independencia por T en cada caso, esto es,

$$C = \frac{5}{9}(T - 32)$$

$$F = \frac{9}{5}T + 32$$

Entonces las temperaturas F y C coinciden, sí y sólo sí ,

$$F = C \iff \frac{5}{9}(T - 32) = \frac{9}{5}T + 32 \iff \frac{5}{9}T - \frac{32(5)}{9} = \frac{9}{5}T + 32$$

$$\iff \frac{5}{9}T - \frac{9}{5}T = 32\left(1 + \frac{5}{9}\right) \iff \frac{25-81}{45}T = 32\frac{9+5}{9}$$

$$\iff \frac{-56}{45}T = 32\frac{14}{9} \iff T = 32\left(\frac{14}{9}\right)\left(\frac{45}{-56}\right)$$

$$\iff T = -40$$

De esta manera, las lecturas coinciden en,

$$C = -40 = F \quad \triangleright$$

86. En el laboratorio de quesos de la UAM-Iztapalapa se cuenta con 100 litros de leche con 5% de grasa. El nivel permitido de grasa en la leche para ser consumida en la Ciudad de México es de 3.5%. ¿Cuántos litros de crema pueden separarse para hacer queso con 30% de grasa, de tal manera que la leche mantenga el nivel de grasa permitido?

$\triangleleft$ Sea C la cantidad de crema separada para hacer queso con 30% de grasa. Entonces se tiene que la ecuación siguiente define el problema.

$$(100 \quad \text{litros al } 5\%) = C\,(\text{litros al } 30\%) + (100 - C)\,(\text{litros al } 3.5\%)$$

Esto es, la ecuación que resuelve al problema se plantea,

$$100\left(\frac{5}{100}\right) = C\left(\frac{30}{100}\right) + (100 - C)\left(\frac{3.5}{100}\right)$$

$$\iff \frac{500}{100} = \frac{30C}{100} + \frac{(100-C)(3.5)}{100} \iff 500 = 30C + 350 - 3.5C$$

$$\iff 500 - 350 = 30C - 3.5C \iff 150 = 26.5C$$

$$\iff C = \frac{150}{26.5} = 5.660 \quad \text{litros}$$

De esta forma, se han de separar 5.66 litros de crema al 30% para que la leche sobrante, $100 - 5.66 = 94.34$ litros tengan 3.5% de grasa. $\triangleright$

Ecuaciones cuadráticas

Consideremos la ecuación cuadrática definida por

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{donde}\, a \neq 0$$

Las **soluciones** o **raíces** de la ecuación están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. Puede haber dos soluciones diferentes de la ecuación, $x = \lambda_1$ y $x = \lambda_2$, lo cual se tiene cuando el **discriminante** de la ecuación es positivo, esto es, $b^2 - 4ac > 0$.

b. Puede haber una solución (doble) de la ecuación, que es el caso cuando el **discriminante** es nulo, esto es $b^2 - 4ac = 0$.

c. Puede no tener soluciones reales, que es el caso cuando el **discriminante** es negativo, esto es $b^2 - 4ac < 0$, y en tal caso la expresión $ax^2 + bx + c$ es siempre positiva o siempre negativa. Para verificar el signo de la expresión es suficiente con evaluar la expresión en $x = 0$ y el signo del valor es el mismo en todos los argumentos reales.

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

87. $x^2 - 17x + 60 = 0$

$\lhd$ Utilizando la fórmula para $a = 1$, $b = -17$, $c = 60$ se tiene que

$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(1)(60)}}{2(1)} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 12 \\ 5 \end{array} \right.$$

De esta forma, las soluciones (raíces) de la ecuación dada son $x = 12$ y $x = 5$. $\rhd$

88. $x^2 - 4x - 165 = 0$

$\lhd$ Utilizando nuevamente la fórmula para $a = 1$, $b = -4$, $c = -165$ se obtiene

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-165)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 660}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 26}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 15 \\ -11 \end{array} \right.$$

De esta manera, las soluciones son $x = 15$ y $x = -11$ $\triangleright$

89. $5y^2 - 6y + 1 = 0$

$\triangleleft$ Para este caso $a = 5$, $b = -6$, $c = 1$ lo cual nos dice que

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10}$$

$$= \frac{6 \pm 4}{10} = \begin{cases} 1 \\ 1/5 \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones son $y = 1$, $1/5$. $\triangleright$

90. $z^2 + 4z + 9 = 0$

$\triangleleft$ Una sustitución directa de los parámetros $a = 1$, $b = 4$, $c = 9$ nos da

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

lo cual nos dice que no hay soluciones reales en virtud de que $\sqrt{-20}$ no está definida en $\mathbb{R}$. $\triangleright$

91. $x^2 + x + 1 = 0$

$\triangleleft$ Ya que $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, entonces

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Por lo tanto, no hay raíces reales debido a que $\sqrt{-3}$ no está definido en $\mathbb{R}$. $\triangleright$

92. $16w^2 - 24w + 9 = 0$

$\triangleleft$ Usando $a = 16$, $b = -24$, $c = 9$, se tiene que

$$w = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

lo cual nos dice que la única raíz es $w = \frac{3}{4}$. $\triangleright$

93. $3w^2 - 4\sqrt{3}w + 4 = 0$

$\triangleleft$ Para este caso $a = 3$, $b = -4\sqrt{3}$, $c = 4$, de donde

$$w = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{16(3) - 16(3)}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6}$$

lo cual nos dice que la raíz única es $w = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\triangleright$

Resuelva las siguientes ecuaciones, dejando las soluciones irracionales en forma radical.

94. $\frac{y}{y+1} = \frac{y+2}{2y}$

$\triangleleft$ Procedemos a despejar la variable y, utilizando la metodología clásica. Primeramente observamos que necesariamente $y \neq -1$ y $y \neq 0$, debido a que anulan los denominadores respectivos de cada miembro de la igualdad.

$$\frac{y}{y+1} = \frac{y+2}{2y} \iff y(2y) = (y+2)(y+1) \iff 2y^2 = y^2 + 3y + 2$$

$$\iff y^2 - 3y - 2 = 0$$

Usando que $a = 1$, $b = -3$ y $c = -2$ para la fórmula general de solución de la cuadrática se tiene que

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

De esta forma, las soluciones de la ecuación inicial son,

$$y = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \quad \triangleright$$

95. $(w+2)^3 - w^3 = 90$

$$\triangleleft \quad (w+2)^3 - w^3 = 90 \iff w^3 + 6w^2 + 12w + 8 - w^3 = 90$$

$$\iff 6w^2 + 12w - 82 = 0$$

Así , usando $a = 6$, $b = 12$, $c = -82$ se tiene que

$$w = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(6)(-82)}}{2(6)} = -\frac{-12 \pm \sqrt{2112}}{12}$$

$$= -1 \pm \frac{\sqrt{2112}}{12} = -1 \pm \frac{\sqrt{64 \times 33}}{12} = -1 \pm \frac{8\sqrt{33}}{12}$$

De esta forma, las soluciones son $w = -1 - \frac{2\sqrt{33}}{3}$ y $w = -1 + \frac{2\sqrt{33}}{3}$ $\rhd$

96. $x + \frac{1}{5} = 5 + \frac{1}{x}$

$$\lhd \quad x + \frac{1}{5} = 5 + \frac{1}{x} \iff \frac{5x+1}{5} = \frac{5x+1}{x}$$
$$\iff (5x+1)x = (5x+1)5 \iff 5x^2 + x = 25x + 5$$
$$\iff 5x^2 - 24x - 5 = 0$$

Usando $a = 5$, $b = -24$, $c = -5$ se tienen las soluciones

$$x = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(5)(-5)}}{2(5)} = \frac{24 \pm \sqrt{576+100}}{10} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{10}$$
$$= \frac{24 \pm 26}{10} = \begin{cases} 5 \\ -1/5 \end{cases}$$

Esto es, las soluciones son $x = 5$ y $x = -\frac{1}{5}$ $\rhd$

97. $\frac{10}{x} - \frac{9}{x+1} - \frac{8}{x+2} = 0$

$$\lhd \quad \frac{10}{x} - \frac{9}{x+1} - \frac{8}{x+2} = 0 \iff \frac{10}{x} - \frac{9}{x+1} = \frac{8}{x+2}$$
$$\iff \frac{10(x+1) - 9x}{x(x+1)} = \frac{8}{x+2} \iff \frac{10x + 10 - 9x}{x(x+1)} = \frac{8}{x+2}$$
$$\iff \frac{x+10}{x(x+1)} = \frac{8}{x+2} \iff (x+10)(x+2) = 8x(x+1)$$
$$\iff x^2 + 12x + 20 = 8x^2 + 8x \iff 0 = 7x^2 - 4x - 20$$

Así , sí $a = 7$, $b = -4$, $c = -20$ tenemos que

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(7)(-20)}}{2(7)} = \frac{4 \pm \sqrt{16+560}}{14}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{576}}{14} = \frac{4 \pm 24}{14}$$

De esta forma, las soluciones son $x = 2$, $x = \frac{-10}{7}$ $\rhd$

98. $\frac{1}{c} + \frac{1}{8-c} = \frac{1}{8}$

$$\lhd \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{8-c} = \frac{1}{8} \iff \frac{8-c+c}{c(8-c)} = \frac{1}{8} \iff \frac{8}{c(8-c)} = \frac{1}{8}$$

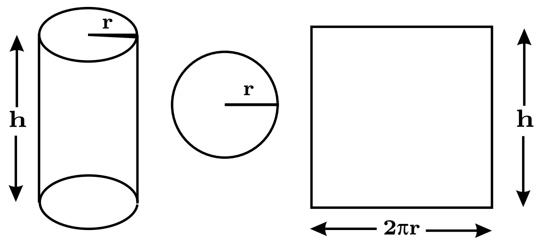


Figura 3.1: Cilindro.

$$\iff 8(8) = (1)c(8-c) \iff 64 = 8c - c^2 \iff c^2 - 8c + 64 = 0$$

Ya que en la anterior ecuación se tienen los parámetros $1, -8$, y 64, entonces las soluciones son,

$$c = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(64)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(64)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{-192}}{2}$$

Como $\sqrt{-192}$ no está definido en $\mathbb{R}$, entonces no hay soluciones reales para la ecuación inicial. $\triangleright$

Mostramos ahora, mediante unos ejercicios, la utilidad de una ecuación cuadrática para resolver problemas prácticos.

99. Encuentra dos números pares consecutivos cuyo producto sea 63 000.

$\triangleleft$ Si n es uno de los números, el otro es $n+2$. Así pues,

$$n(n+2) = 63000$$

$\iff$

$$n^2 + 2n - 63000 = 0$$

Aplicando la fórmula obtenemos las soluciones $n_1 = 250$, $n_2 = -252$. Entonces los números consecutivos son 250 y 252, o bien, -252 y -250. $\triangleright$

100. Se quiere construir un bote cilíndrico que tenga capacidad de 355 ml. Si la altura debe ser de 15 cm, ¿cuál será el radio?

$\triangleleft$ El volumen se calcula por

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio y h la altura.

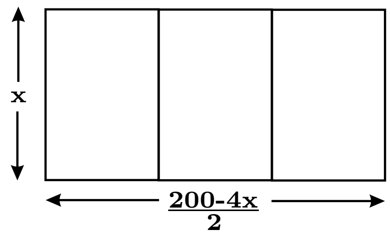


Figura 3.2: Trazo del dibujo del corral para el ejercicio 102.

Sustituyendo los valores tenemos

$$15\pi r^2 = 355$$

por lo tanto,

$$r = \sqrt{\frac{355}{15\pi}} = 2.74\,\text{cm} \quad \triangleright$$

101. Se desea construir un bote cilíndrico, sin tapa, de altura 20 cm, de tal manera que sean empleados 400 cm^2 de material. ¿Cuál será el radio del bote?

$\triangleleft$ La cantidad de material empleado se calcula por medio de la fórmula

$$S = \pi r^2 + 2\pi r\, h$$

donde r es el radio del cilindro y h la altura. Sustituyendo los valores dados tenemos

$$\pi r^2 + 40\pi r = 400 \iff \pi r^2 + 40\pi r - 400 = 0$$

cuya ecuación tiene solución

$$\begin{aligned} r &= \frac{-40\pi \pm \sqrt{(40\pi)^2 - 4(\pi)(-400)}}{2\pi} \\ &= \frac{-40\pi \pm \sqrt{1600\pi^2 + 1600\pi}}{2\pi} = \begin{cases} 2.96 \\ -42.96 \end{cases} \end{aligned}$$

Como no existen radios negativos, la solución que sirve al problema es $r = 2.96\,cm$. $\triangleright$

102. Un ganadero tiene 200 m de cerca y desea ocupar una superficie rectangular para después dividirla en tres corrales, con los lados paralelos al rectángulo grande. ¿Cuáles son las dimensiones, si debe cubrirse un área de 1200 m^2?

$\lhd$ Si x es la longitud de uno de los lados, el total de los lados paralelos a este es $4x$, entonces los otros dos lados suman

$$200 - 4x$$

Por lo tanto, uno de los lados mide

$$\frac{200 - 4x}{2} = 100 - 2x$$

y el área de la superficie rectangular es

$$A = x(100 - 2x) = 1200 \iff -2x^2 + 100x = 1200$$

$$\iff 2x^2 - 100x + 1200 = 0$$

que tiene las soluciones, $x_1 = 30, \quad x_2 = 20.$

De esta manera, las dimensiones de la superficie rectangular son 30×40 o bien $20 \times 60 \quad \rhd$

103. Manuel es dos años mayor que Javier y la suma de los cuadrados de ambas edades es 130. ¿Qué edad tiene cada uno?

$\lhd$ Si denotamos por J a la edad de Javier, entonces la edad de Manuel será $J + 2$, debido a que es dos años mayor.

Por lo tanto, tendremos que,

$$J^2 + (J+2)^2 = 130 \iff J^2 + J^2 + 4J + 4 = 130 \iff 2J^2 + 4J - 126 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones,

$$J = -\frac{-4 + 32}{4} = 7 \quad \text{y} \quad J = \frac{-4 - 32}{4} = -9$$

Consideramos sólo la cantidad positiva obtenida debido a que no hay edades negativas. Así entonces, la edad de Javier es de 7 años y la de Manuel es de $J + 2 = 9$ años. $\rhd$

Raíces y factorización

Consideremos la expresión

$$x^2 - 4 = 0$$

Resulta claro que sus raíces son $x = 2$ y $x = -2$.

$\lhd$ Por otro lado, al factorizar tal expresión, se tiene que

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = (x - 2)(x - (-2))$$

es decir, esta expresión se puede escribir como

$$x^2 - 4 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

donde $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ son sus raíces. ▷

Observamos que $x^2 - 4$ es un **polinomio cuadrático**. Definimos ahora lo que es en general un polinomio de variable real. En el capítulo 4 se definirán con más precisión. Nuestro objetivo ahora es el de establecer una conexión entre la factorización y las raíces de un polinomio.

DEFINICIÓN. Dados un conjunto de números reales $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$, a la expresión en la indeterminada (variable) x, donde $a_n \neq 0$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

se le llama el **polinomio de grado n** con los coeficientes dados.

Si $n = 1$ el polinomio se dice **lineal**, si $n = 2$ se dirá **cuadrático**, para $n = 3$ se llamará **cúbico**, etcétera.

El número real λ es una **raíz** del polinomio $P(x)$, si al considerarlo como un argumento lo anula, es decir,

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

En las subsecciones anteriores hemos dedicado todo el espacio para calcular las raíces de las ecuaciones lineales y cuadráticas. En otras palabras, al buscar las soluciones de tales ecuaciones se encontrarán sus raíces.

Establecemos ahora el siguiente resultado que es una versión del **Teorema fundamental del Álgebra**.

Teorema fundamental del Álgebra. *Sean $P(x)$ un polinomio real de variable real y λ una raíz del polinomio, entonces $P(x)$ se puede factorizar teniendo a $(x - \lambda)$ como factor. Es decir,*

$$P(x) = (x - \lambda)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es otro polinomio de grado menor que el de $P(x)$.

En otras palabras, una expresión polinomial con coeficientes reales tiene una descomposición de la forma $(x - \lambda)$ donde λ es una raíz del polinomio inicial.

Factorice los siguientes expresiones utilizando el Teorema fundamental del Álgebra.

104. $x^2 - 3x + 2$.

$\lhd$ Una inspección simple nos dice que dos números cuya suma es -3 y su producto es 2, son necesariamente $\lambda = -1$ y $\lambda = -2$. De esta forma, mediante este proceso estándar de factorización se tiene que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Si consideramos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, entonces sus raíces son,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

y por el Teorema fundamental del Álgebra se tiene que,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - \text{raíz})(x - \text{raíz}) = (x-1)(x-2)$$

lo cual coincide con la factorización obtenida antes. $\rhd$

105. $x^2 - x - 1$.

$\lhd$ Un proceso similar al del ejercicio anterior nos llevaría a buscar dos números cuya suma es -1 y cuyo producto es -1. Tal proceso es difícil y en su lugar utilizamos el Teorema fundamental del Álgebra.

Las raíces de $x^2 - x - 1 = 0$ son,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Esto es, $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, de donde se tiene la factorización

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Observamos que la suma

$$\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

satisface la primera condición, y que el producto

$$\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1-5) = \frac{1}{4}(-4) = -1$$

también cumple la segunda condición del proceso estándar. No obstante, es difícil que al lector se le pueda ocurrir que los números buscados en el proceso estándar son los que se han encontrado.

Por situaciones análogas, en general, el Teorema fundamental tiene mayores alcances y es más conveniente. $\triangleright$

106. $x^2 - 4x + 4$.

$\triangleleft$ No es difícil ver que tal expresión es un trinomio cuadrado perfecto y que la factorización se realiza por,

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2(x)2 + 2^2 = (x-2)^2$$

Al buscar las raíces de $x^2 - 4x + 4 = 0$ se obtiene que

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

que nos da una sola raíz $\lambda = 2$.

Por el Teorema fundamental del Álgebra $x^2 - 4x + 4$ se puede factorizar como

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio que se obtiene al dividir,

$$Q(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = x - 2$$

Por lo tanto,

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

que nos da la factorización deseada. $\triangleright$

107. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$.

$\triangleleft$ Al resolver la ecuación $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ se tiene que

$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4(3) - 4(3)}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3}$$

que es una sola raíz $\lambda = \sqrt{3}$.

Por el Teorema fundamental del Álgebra, existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})Q(x)$$

Al despejar $Q(x)$ y efectuar la división se tiene que

$$Q(x) = \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x - \sqrt{3}} = x - \sqrt{3}$$

lo cual implica

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = (x - \sqrt{3})Q(x) = (x - \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = (x - \sqrt{3})^2$$

es la factorización buscada. $\triangleright$

108. $x^2 - 2x + 2$.

$\triangleleft$ Resolvemos $x^2 - 2x + 2 = 0$, encontrando que,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

lo cual nos dice que no hay raíces reales para la ecuación dada. De esta manera, $x^2 - 2x + 2$ no se puede descomponer en factores lineales. Se dice que es **irreducible** en $\mathbb{R}$. $\triangleright$

109. $6x^2 + x - 2$.

$\triangleleft$ Resolvemos la ecuación $6x^2 + x - 2 = 0$ obteniendo que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(6)(-2)}}{2(6)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} -2/3 \\ 1/2 \end{cases}$$

es decir, las raíces son $\lambda = -\frac{2}{3}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$.

Observamos que en los anteriores ejemplos los coeficientes de x^2 eran todos 1, y en este caso es 6. Un cálculo directo prueba que

$$6x^2 + x - 2 = (x - 1/2)(x - (-2/3))Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)Q(x)$$

es decir,

$$Q(x) = \frac{6x^2 + x - 2}{(x - 1/2)(x + 2/3)} = 6$$

que es el coeficiente del término de orden mayor x^2.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 2 &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{-2}{3}\right)\right) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)3\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 2) \end{aligned}$$

nos da la factorización deseada. $\triangleright$

Vemos que cuando el coeficiente principal del polinomio es diferente de uno, simplemente se anexa como factor al final de haber conseguido las raíces y ponerlas dentro de los factores lineales.

110. $9x^2 + 9x + 2.$

$\triangleleft$ Resolvemos la ecuación $9x^2 + 9x + 2 = 0$, mediante la fórmula,

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2(9)} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{-9 \pm 3}{18} = \begin{cases} -1/3 \\ -2/3 \end{cases}$$

es decir, se tienen las raíces $\lambda = \frac{1}{3}$ y $\lambda = \frac{-2}{3}$.

Ya que el coeficiente principal es 9, entonces

$$9x^2 + 9x - 2 = 9\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)3\left(x + \frac{2}{3}\right) = (3x + 1)(3x + 2)$$

nos da la factorización buscada. $\triangleright$

111. $x^3 - 3x + 2$

$\triangleleft$ Hasta aquí no hemos dado una forma de resolver una ecuación cúbica porque sale de nuestro alcance. No obstante, una inspección simple nos muestra que $\lambda = 1$ es una raíz de tal cúbica como se puede verificar fácilmente,

$$(1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

Por el Teorema fundamental, $x - \lambda = x - 1$ es un factor del polinomio cúbico. Por lo tanto, existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)Q(x)$$

o, equivalentemente,

$$Q(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = x^2 + x - 2$$

Ahora, factorizamos la expresión cuadrática $x^2 + x - 2$, resolviendo la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$. Se tiene que,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

es decir $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ son las raíces de tal ecuación cuadrática.

Entonces, como el coeficiente es uno, se tiene que,

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2)$$

De esta manera, la factorización final de la cúbica es,

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)Q(x) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2) \quad \triangleright$$

112. $x^3 - 3x^2 + x + 5$.

$\triangleleft$ Por inspección, podemos encontrar una raíz $\lambda = -1$ para tal expresión cúbica. Esto se puede verificar directamente,

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 5 = -1 - 3 - 1 + 5 = 0$$

Así , $x - (-1) = x + 1$ es un factor de la cúbica, y existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x+1)Q(x)$$

o equivalentemente, dividiendo,

$$Q(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 5}{x+1} = x^2 - 4x + 5$$

Factorizamos ahora a $Q(x) = x^2 - 4x + 5$ resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ Las raíces de tal ecuación se encuentran mediante,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

lo cual implica que no hay raíces reales para $Q(x)$, y por lo tanto, no se puede descomponer en $\mathbb{R}$ (es **irreducible**).

Consecuentemente, la factorización del polinomio inicial queda finalmente,

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x+1)(x^2 - 4x + 5). \quad \triangleright$$

113. $x^4 - 4x + 3$

$\triangleleft$ Claramente, $x = 1$ es una raíz del polinomio. Por el Teorema fundamental del Álgebra, se obtiene que,

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

donde $Q(x)$ se consigue al dividir

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x-1} = \frac{x^4 - 4x + 3}{x-1} = x^3 + x^2 + x - 3$$

Una simple sustitución prueba que $x = 1$ es una raíz de Q. Por lo tanto, se tiene también que

$$Q(x) = (x-1)R(x)$$

para algún polinomio $R(x)$. De hecho, este polinomio se obtiene del cociente

$$R(x) = \frac{Q(x)}{x-1} = \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} = x^2+2x+3$$

De esto, tenemos que

$$x^4-4x+3 = (x-1)Q(x) = (x-1)(x-1)R(x) = (x-1)(x-1)(x^2+2x+3)$$

Por otro lado, el polinomio x^2+2x+3 no tiene raíces reales, lo que se verifica al tratar de resolver la ecuación $x^2+2x+3=0$ con la fórmula general.

Esto es, tal expresión cuadrática es **irreducible** en los números reales, y por consiguiente, se tiene

$$x^4-4x+3 = (x-1)(x-1)(x^2+2x+3) = (x-1)^2(x^2+2x+3) \quad \triangleright$$

3.5 Ejercicios

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a. $2x-5x-7x$ **b.** $\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}x$

c. $\frac{x^2}{5}-\frac{3x^2}{2}$ **d.** $2a^3+3a^2-5a^3+7a^2$

e. $2.25xy+3.02y+2.36xy-5.3y$ **f.** $2x^2y-5xy^2-7xy^2-8x^2y$

2. Desarrolle los siguientes productos notables.

a. $(2x-5)^2$ **b.** $(t^2+2)^2$

c. $98^2=(100-2)^2$ **d.** $\left(a^3+\frac{1}{a}\right)^2$

e. $(a+10)(a-10)$ **f.** $\left(\frac{x}{5}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{2}\right)$

g. $(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})$ **h.** $(a-2)^3$

i. $\left(a+\frac{2}{3}\right)^3$ **j.** $(2x^2-y)^3$

k. $\sqrt[3]{x}(2x^{\frac{1}{2}}-3x)$

3. Con ayuda del Triángulo de Pascal desarrolle los siguientes productos.

a. $(x+y)^5$ **b.** $(2x-y)^5$ **c.** $(a+4)^4$

4. Factorice las siguientes expresiones.

a. $3x^3 - 6x^5 + 9x^2$ **b.** $4a^2 - 6a^2 + 8a + 10a^4$
c. $25a^2 - b^2$ **d.** $x^2 - 7$
e. $t^2 + 8t + 16$ **f.** $4x^2 - 4x + 1$
g. $a^3 + 12a^2 + 48a + 64$ **h.** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
i. $a^3 - 8$ **j.** $27a^3 + b^3$
k. $x^3 - 2$ **l.** $x^2 + 2x - 24$
m. $a^2 + a - 20$ **n.** $3x^2 + 10x + 8$
o. $2x^2 + 3x - 5$ **p.** $5x^2 - 20x + 15$

5. Factorice usando el Teorema fundamental del Álgebra.

a. $x^2 - 2x - 15$ **b.** $x^2 + x - 1$
c. $x^2 + x + 3$ **d.** $6x^2 - x - 2$
e. $x^3 + 5x^2 + 6x$, ($x = 0$ es una raíz de la ecuación)
f. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, ($x = 2$ es una raíz de la ecuación)
g. $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$, ($x = -1$ es una raíz de la ecuación)

6. Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\frac{xy}{wx+xz}$ **b.** $\frac{am+an}{ab-ac}$ **c.** $\frac{2a+4b}{a^2-4b^2}$

d. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ **e.** $\frac{9-a^2}{3a^2-9a}$

f. $\frac{a^2+3a+2}{a^2+2a+1}$ **g.** $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

h. $-\frac{4c^2-17c+4}{12-3c}$ **i.** $\frac{7x-3ay}{6a^2b} - \frac{3x-4by}{8ab^2}$

j. $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$ **k.** $\frac{6}{k+3} + k - 2$

l. $\frac{k+2m}{k^2-9m^2} + \frac{4}{3m-k}$ **ll.** $\frac{2-c}{c^2+c-6} - \frac{5}{9-c^2} - \frac{4-c}{c^2-7c+12}$

m. $\frac{3}{c-d} + \frac{4d}{(c-d)^2} - \frac{5d^2}{(c-d)^3}$ **n.** $\frac{1}{ad-bc}\left(\frac{d}{c+dx} - \frac{b}{a+bx}\right)$

o. $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$ **p.** $\frac{m+w}{\frac{1}{m}+\frac{1}{w}}$

q. $\frac{\frac{b}{c}+\frac{b}{d}}{\frac{d}{cd}}$ **r.** $\frac{\frac{a^2-x^2}{a}}{\frac{a+x}{a^2}}$

s. $\frac{b+\frac{b}{c-1}}{\frac{c}{c-1}}$ **t.** $\frac{a-\frac{ab}{b-a}}{\frac{a^2}{a^2-b^2}-1}$

Despeje la variable indicada en cada uno de los siguientes ejercicios.

7. De la fórmula para la reactancia de un condensador

$$X = \frac{1}{2\pi f C}$$

despejar a la variable C.

8. De la relación de la velocidad media de un cuerpo,

$$V = \frac{V_t + V_0}{2}$$

despejar la velocidad inicial V_0.

9. De la fórmula

$$\frac{E}{e} = \frac{R + r}{2}$$

de la caída de tensión, despejar a la variable r.

10. Despejar a de la fórmula,

$$C = \frac{Kab}{b - a}$$

11. Considere la relación de la distancia recorrida de un cuerpo en caída libre,

$$d = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2$$

Despeje la variable t.

12. De la relación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{nx} = \frac{1}{f}$$

despeje a la variable x.

13. La ecuación para una polea diferencial viene dada por,

$$W = \frac{2PR}{R - r}$$

despeje la variable R.

14. Despeje la variable n de la ecuación

$$I = \frac{E}{r + \frac{R}{n}}$$

que se refiere a la corriente suministrada por generadores en paralelo.

15. Despeje a la variable w de la ecuación

$$wf = \left(\frac{w}{k} - 1\right)\frac{1}{k}$$

16. De la ecuación de dilatación de gases

$$V_1 = V_0(1 + 0.00365t)$$

despeje la variable t.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales.

a. $9x - 1 = 2x + 6$ **b.** $5 - 2x = x + 20$

c. $11x + 3 - 4x = 16 - 2x + 2$ **d.** $7 - (8x + 1) = 18$

e. $26 - 5(3 - 2z) = z - 4(z + 9)$ **f.** $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 15$

g. $(y + 1)(y - 2) = y^2 + 5$ **h.** $(2w + 1)(3w + 1) = (6w - 1)(w + 2)$

i. $\frac{8}{x+4} = \frac{6}{x-4}$ **j.** $\frac{4x-3}{2x+6} = \frac{6x-2}{3x+11}$

k. $\frac{4}{5x+5} - \frac{7}{10x+10} = \frac{1}{20}$

Resuelva los siguientes problemas mediante el planteamiento y la solución de una ecuación lineal.

18. ¿Cuánta soldadura, con 50% de estaño, y cuánto metal de imprenta con 15% de estaño, es necesario alear para obtener 80 kg. de soldadura con un 40% de estaño?

19. Un tendero calculó que su reserva de azúcar duraría 30 días. Como vendió 20 kilos diarios más de lo que esperaba, su reserva le duró solamente 24 días. ¿De cuantos kilos disponía?

20. Un granjero compró 100 km^2 de tierra por $\$150,100.00$. Parte de ellos le costaron a \$500 por km^2, y el resto a \$1800. Hallar el número de km^2 comprados a cada precio.

21. ¿Cuánto tardaría en llenarse el tanque del ejercicio resuelto 82, si la primera llave actuase como alimentadora y la otra llave actúase como salida de agua?

22. El área de un paseo de 4 m de anchura que rodea un estanque circular es de 1,496 m^2. Tomando $\pi = \frac{22}{7}$, hallar el diámetro del estanque.

23. ¿Cuánto acero, con un 18% de tungsteno, debe alearse con otro acero, conteniendo un 12% de tungsteno, para obtener 3.000 kg de acero al 14.6%? Hallar también la cantidad de acero que debe usarse al 12%.

24. ¿Cuál será la temperatura final cuando se mezclan 20 kg de agua a $60°C$ con 30 kg de agua a $10°C$? En los problemas de intercambio calorífico que no impliquen un cambio de estado se verifica: masa $\times$ calor específico $\times$ disminución de temperatura en un cuerpo caliente y $\times$ calor específico $\times$ aumento de la temperatura en un cuerpo frío.

25. Un reloj mal compensado adelanta 11 seg en 9 horas cuando se lleva verticalmente en el bolsillo, y atrasa 28 seg en 13 horas cuando se deja en posición horizontal. ¿Durante cuántas horas hay que mantenerlo en cada posición para que no gane ni pierda durante un total de 24 horas de funcionamiento?

26. ¿Cuántos litros de solución anticongelante al 35% deben añadirse a tres litros de solución al 80%, para reducir su concentración al 60%?

27. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 4x - 12 = 0$ **b.** $x^2 - x - 20 = 0$

c. $x^2 - 6x + 9 = 0$ **d.** $x^2 - 3x - 5 = 0$

e. $2x^2 + 5x - 3 = 0$ **f.** $4x^2 + 20x + 25 = 0$

g. $6x^2 - x - 2 = 0$ **h.** $x^2 + 7x + 9 = 0$

i. $3x^2 - 18x + 27 = 0$ **j.** $2x^2 + 7x + 9 = 0$

k. $5x^2 - x - 10 = 0$ **l.** $28x^2 + 84x + 63 = 0$

ll. $20x^2 - 7x - 3 = 0$ **m.** $14x^2 + 13x - 12 = 0$

n. $\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+4} = \frac{1}{2}$ **o.** $y + \frac{mn}{y} = m + n$

p. $\frac{1}{r} + r = 3 + \frac{3}{r}$ **q.** $\frac{h}{5} - \frac{5}{6} = \frac{6}{5} - \frac{5}{h}$

28. Encuentra dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 2862.

29. Se desea construir un bote cilíndrico, con tapa, de altura 20 cm y de tal manera que se empleen 400 cm^2 de material. ¿Cuál será el radio del bote?

30. Se tienen 300 m de cerca y se desea limitar un terreno rectangular y dividirlo en cinco pequeños corrales con lados paralelos al rectángulo mayor. ¿Cuáles serán las dimensiones si desea abarcar un área de 2100 m^2?

Capítulo 4

Desigualdades

4.1 Orden de los números reales

Decimos que dos números reales a, y b satisfacen la **relación de orden**

$$a < b$$

si $b - a$ es un número positivo. La expresión $a < b$ se lee *"a es menor que b"*, o bien, *"b es mayor que a"*. Ya hemos mencionado en el Capítulo 2 que el número b es mayor que el número a, si está situado sobre la recta numérica a la derecha de a.

De manera general, decimos que

$$a > b \text{ es lo mismo que } b < a$$

$$a \leq b \text{ indica que } a = b \text{ o } a < b$$

$$a \geq b \text{ indica que } b = a \text{ o } b > a$$

Propiedades de Orden

Se cumplen las siguientes propiedades del orden en los números reales.

a. Tricotomía. Para toda pareja arbitraria de números reales a y b se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones,

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

b. Transitividad. El orden es transitivo, es decir,

$$\text{si } a < b \text{ y } b < c, \text{ entonces necesariamente } a < c$$

c. Agregar una cantidad de cada lado del orden no le altera, es decir,

$$\text{si } a < b \text{ y } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces necesariamente } a + c < b + c$$

d. Multiplicar de cada lado del orden por un número positivo no altera tal orden, es decir,

$$\text{si } a < b \text{ y } 0 < c, \text{ entonces necesariamente } ac < bc$$

e. Todo cuadrado de un número no cero, es positivo, esto es,

$$\text{si } a \neq 0, \text{ entonces necesariamente } 0 < a^2$$

f. Se cumple que $0 < 1$.

g. Multiplicar de cada lado del orden por un número negativo lo invierte, esto es

$$\text{si } a < b \text{ y } c < 0, \text{ entonces necesariamente } ac > bc$$

h. Para que el producto de dos números reales sea positivo, es necesario que ambos tengan el mismo signo, es decir,

$$\text{si } ab > 0, \text{ entonces necesariamente } a > 0 \text{ y } b > 0, \text{ o bien } a < 0, \text{ y } b < 0$$

i. Transitividad aditiva. Se cumple aditividad transitiva, esto es,

$$\text{si } a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces necesariamente } a + c < b + d$$

En otras palabras, las propiedades anteriores nos dicen que una relación de orden se comporta como una igualdad (a la hora de ser tratada como una ecuación), a excepción del hecho de multiplicar o dividir por un número invierte el orden si tal número es negativo, o lo conserva, si es positivo.

Hacemos la observación de que todas las propiedades de orden enunciadas para el símbolo $<$ (de "menor que") se cumple también para el símbolo $\leq$ (de "menor o igual que") y por lo tanto también para $\geq$ (de "mayor o igual que").

Definimos a continuación a los intervalos de la recta real.

DEFINICIONES. Al conjunto de números reales $\mathbb{R}$, provisto con la relación de orden mencionada se le conoce como la **recta real**.

Si a y b son dos números reales con el orden $a < b$, se define al conjunto

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

y se le llama el **intervalo abierto** de números reales con extremos a y b, los cuales no están contenidos en el conjunto definido (véase figura 4.1 **a.**)

De igual manera, se define al conjunto

$$[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$$

y se le llama el **intervalo cerrado** de números reales con extremos a y b, los cuales sí están contenidos en el conjunto definido (véase figura 4.1 **b.**)

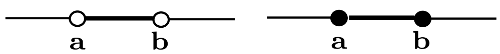


Figura 4.1: **a.** intervalo abierto **b.** intervalo cerrado

Análogamente, se definen los conjuntos

$$[a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$$

llamado el intervalo **cerrado** por la izquierda y **abierto** por la derecha, y

$$(a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$$

llamado el intervalo **abierto** por la izquierda y **cerrado** por la derecha.

Observamos que cualquiera de los extremos puede ser infinito, es decir, $a = -\infty$ o $b = \infty$, en cuyo caso, el intervalo será denotado como abierto en ese extremo.

Por ejemplo, el conjunto $(-\infty, -1]$ es cerrado, mientras que el conjunto $(2, \infty)$ es abierto. La recta real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ se entiende entonces como un intervalo cerrado y abierto, por la convención señalada.

1. Use el símbolo apropiado ($>$, $<$, $=$) entre los siguientes pares de números de tal manera que indiquen el orden correcto.

a. $6 \;\underline{\quad < \quad}\; 9$

b. $-1 \;\underline{\quad > \quad}\; -4$

c. $-7 \;\underline{\quad < \quad}\; 1$

d. $\frac{1}{2} \;\underline{\quad = \quad}\; 0.5$

e. $-0.0001 \;\underline{\quad < \quad}\; -0.00001$

f. $0.001 \;\underline{\quad > \quad}\; 0.00001$

g. $100\% \;\underline{\quad = \quad}\; 1$

h. $5\% \;\underline{\quad = \quad}\; 0.05$

i. $\frac{3}{7} \;\underline{\quad < \quad}\; \frac{5}{9}$

j. $\frac{2}{3} \;\underline{\quad < \quad}\; 0.67$

k. $\frac{1}{9} \;\underline{\quad > \quad}\; 0.1$

4.2 Desigualdades lineales

Resolver las siguientes desigualdades, esto es, encontrar intervalos de números reales donde sea válida la afirmación dada.

2. $-9x \leq 81$

$\lhd$ Consideremos la desigualdad inicial

$$-9x \leq 81$$

(pasamos dividiendo -9 del lado derecho, la desigualdad se invierte)
$\Rightarrow$

$$x \geq -\frac{81}{9} \iff x \geq -9$$

de donde la solución a la desigualdad es el intervalo $[-9, \infty)$, el cual se muestra en la figura 4.2. $\rhd$

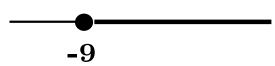


Figura 4.2: Intervalo solución de $-9x \leq 81$

3. $10x < 11x - 3$

$\lhd$ Consideremos la desigualdad inicial

$$10x < 11x - 3$$

(pasamos restando $11x$ del lado izquierdo)
$\Rightarrow$

$$10x - 11x < -3 \iff -x < -3$$

(multiplicamos por -1 de cada lado; la desigualdad se invierte)
$\Rightarrow$

$$x > 3$$

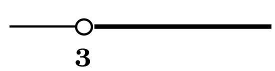


Figura 4.3: Intervalo solución de $10x < 11x - 3$

de donde, la solución es el intervalo $(3, \infty)$ el cual se muestra en la figura 4.3. $\triangleright$

4. $-4x - 5 \geq 6x + 5$

$\triangleleft$ Consideremos la desigualdad inicial

$$-4x - 5 \geq 6x + 5$$

(pasamos sumando $4x$ del lado derecho y 5 restando del izquierdo)
$\Rightarrow$

$$-4x - 5 \geq 6x + 5 \iff -5 - 5 \geq 6x + 4x \iff -10 \geq 10x$$

(pasamos dividiendo 10 del lado derecho; la desigualdad se conserva)
$\Rightarrow$

$$\frac{-10}{10} \geq x \iff x \leq -1$$

de donde, la solución es el intervalo $(-\infty, -1]$ que se muestra en la figura 4.4. $\triangleright$

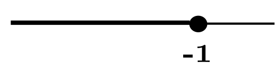


Figura 4.4: Intervalo solución de $-4x - 5 \geq 6x + 5$

5. $16x - 7 \leq 7x - 4$

$\triangleleft$ Procediendo de manera análoga a los ejercicios anteriores, y para que el alumno aprenda a resolver de manera práctica, se tiene que

$$16x - 7 \leq 7x - 4 \iff 16x - 7x \leq -4 + 7 \iff 9x \leq 3 \iff x \leq \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

lo cual implica que la solución es, $(-\infty, 1/3]$ $\triangleright$

6. $7(1 - x) > 5(1 - 2x)$

$\triangleleft$ Primero distribuimos en cada lado de la desigualdad, obteniendo

$$7(1 - x) > 5(1 - 2x) \iff 7 - 7x > 5 - 10x$$

Conforme a los ejemplos anteriores se tiene que,

$$7 - 7x > 5 - 10x \iff -7x + 10x > 5 - 7 \iff 3x > -2$$

$$\iff x > \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

lo cual indica que la solución es $(-\frac{2}{3}, \infty)$ $\triangleright$

7. $x < x - 1$

$\triangleleft$ Nuevamente, conforme a los ejercicios anteriores, se procede de igual manera, y se tiene,

$$x < x - 1 \iff x - x < -1 \iff 0 < -1$$

como esto último es imposible, la solución es el conjunto vacío, es decir, $\emptyset$ es la solución al problema. $\triangleright$

8. $5(x + 4) > 5x + 4$

$\triangleleft$ Con procedimientos análogos se obtiene

$$5(x+4) > 5x+4 \iff 5x+20 > 5x+4 \iff 5x-5x > 4-20 \iff 0 > -16$$

Como esta última afirmación es verdadera siempre, entonces la solución es el conjunto total $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. $\triangleright$

9. $\frac{3x+2}{7} < \frac{2x-3}{-3}$

$\triangleleft$ De la desigualdad inicial

$$\frac{3x+2}{7} < \frac{2x-3}{-3}$$

(al pasar multiplicando 7 del lado derecho se conserva la desigualdad; al pasar multiplicando del lado izquierdo -3 se invierte)

$\Rightarrow$

$$\frac{3x+2}{7} < \frac{2x-3}{-3} \iff -3(3x+2) > 7(2x-3)$$

$$\iff -9x - 6 > 14x - 21 \iff -6 + 21 > 14x + 9x$$

$$\iff 15 > 23x \iff \frac{15}{23} > x$$

lo cual nos dice que la solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{15}{23}\right)$ $\triangleright$

$\triangleleft$ Consideremos el ejercicio 6 donde la solución al problema da la equivalencia

$$7(1 - x) > 5(1 - 2x) \iff x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$

En virtud de que la proposición $7(1-x) \leq 5(1-2x)$ es la negativa de $7(1-x) > 5(1-2x)$, entonces su solución será el complemento de $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ en $\mathbb{R}$, es decir, $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$. En otras palabras

$$7(1-x) \leq 5(1-2x) \iff x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

En general, cuando un conjunto A representa la solución de una desigualdad, la solución de su proposición negativa se representa mediante su complemento A^c. $\triangleright$

4.3 Desigualdades con valor absoluto

Enunciamos algunas propiedades del valor absoluto que están desarrolladas con el orden.

a. Considérese un número real positivo r; entonces,

i. $|a| < r$ si y sólo sí, $a \in (-r, r)$

ii. $|a| \geq r$ si y sólo sí, $a \in (-\infty, -r] \cup [r, \infty)$.

10. En los incisos siguientes proponga un símbolo ($>$, $<$, $=$) que haga verdadera la proposición dada.

a. $|14| \underline{\quad < \quad} |16|$

b. $|0| \quad \underline{\quad < \quad} \quad |-\sqrt{3}|$

c. $|1.46| \quad \underline{\quad = \quad} \quad |-1.46|$

d. $|-0.1| \quad \underline{\quad > \quad} \quad |-0.01|$

e. $|2-10| \quad \underline{\quad < \quad} \quad |-18.1|$

f. $\frac{1}{2} \quad \underline{\quad < \quad} \quad |10-2|$

g. $|-3/2| \quad \underline{\quad = \quad} \quad |-3|/|2|$

h. $|2| - |-3| \quad \underline{\quad < \quad} \quad |2(-3)|$

i. $|-1| + |5| \quad \underline{\quad > \quad} \quad |-1+5|$

j. $|-1+(-5)| \quad \underline{\quad = \quad} \quad |-1| + |-5|$

Resolver las siguientes ecuaciones, las cuales involucran el valor absoluto de un argumento real.

11. $|x-1| = 2$

$\triangleleft$ Para resolver tal ecuación necesitamos considerar dos casos.

El caso cuando el argumento $x-1$ es no negativo, y el caso cuando es negativo.

En el primer caso $x-1 \geq 0$, y entonces de la definición de valor absoluto, $|x-1| = x-1 = 2$ lo cual nos indica que la variable x está condicionada a la pareja de proposiciones

$$x-1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x-1=2$$

En el otro caso, $x-1<0$ y se tendría que $|x-1| = -(x-1) = 2$, lo que condiciona a la variable x a la pareja de proposiciones,

$$x-1<0 \quad \text{y} \quad -(x-1)=2$$

En otras palabras, la solución del problema está sujeta a la veracidad de la conjunción de proposiciones

$$\left\{ \begin{array}{c} x-1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x-1=2 \\ \text{o} \\ x-1<0 \quad \text{y} \quad -(x-1)=2 \end{array} \right\}$$

Procedemos a resolver cada proposición encontrando los conjuntos soluciones equivalentes,

$$\left[\begin{array}{c} x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \iff x \in [1,\infty) \\ x-1=2 \iff x=3 \iff x \in \{3\} \\ x-1<0 \iff x \in (-\infty,1) \\ -(x-1)=2 \iff -x+1=2 \iff -1=x \iff x \in \{-1\} \end{array} \right]$$

De la equivalencia,

$$x-1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x-1=2 \iff x \in [1,\infty) \quad \text{y} \quad x \in \{3\} = \{3\}$$

tenemos que lo anterior ocurre si y sólo sí ,

$$x \in [1,\infty) \cap \{3\} = \{3\}$$

como se muestra en la figura 4.5.

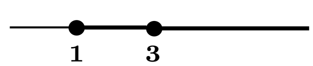


Figura 4.5: Intersección $[1,\infty) \cap \{3\} = \{3\}$

Análogamente,

$$x-1<0 \quad \text{y} \quad -(x-1)=2 \iff x \in (-\infty,1) \quad \text{y} \quad x \in \{-1\}$$

equivale a

$$x \in (-\infty, 1) \cap \{-1\} = \{-1\}$$

Agregando ambos casos, se tiene que $|x-1| = 2$ se cumple si $x \in \{3\}$ ó $x \in \{-1\}$, es decir,

$$x \in \{3\} \cup \{-1\} = \{-1, 3\}$$

o equivalentemente, $x = -1, 3$.

Notamos que toda la discusión de la solución de éste problema se puede resumir en el siguiente diagrama de equivalencia, que simplifica los cálculos,

$$\left\{ \begin{array}{c} x-1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x-1=2 \\ \text{ó} \\ x-1<0 \quad \text{y} \quad -(x-1)=2 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} [1,\infty) \cap \{3\} = \{3\} \\ \cup \\ (-\infty,1) \cap \{-1\} = \{-1\} \end{array} \right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \iff [1,\infty) \\ x-1 = 2 \geq 0 \iff x = 3 \iff \{3\} \\ x-1<0 \iff x<1 \iff (-\infty,1) \\ -(x-1) = 2 \iff -x+1 = 2 \iff \{-1\} \end{array} \right]$$

De esta forma, la solución es,

$$x \in \{-1\} \cup \{3\} = \{-1, 3\}$$

o análogamente, $x = -1, 3 \quad \triangleright$

12. $\left|\frac{1}{2}x - 9\right| = 8$

$\triangleleft$ El diagrama de la solución del problema es en este caso,

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}x-9 \geq 0 \quad y \quad \frac{1}{2}x-9=8 \\ \text{ó} \\ \frac{1}{2}x-9<0 \quad y \quad -\left(\frac{1}{2}x-9\right)=8 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} [18,\infty) \cap \{34\} = \{34\} \\ \cup \\ (-\infty,18) \cap \{2\} = \{2\} \end{array} \right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}x-9 \geq 0 \iff \frac{1}{2}x \geq 9 \iff x \geq 18 \iff [18,\infty) \\ \frac{1}{2}x-9=8 \iff \frac{1}{2}x = 17 \iff x = 34 \\ \frac{1}{2}x-9<0 \iff (-\infty,18) \\ -\left(\frac{1}{2}x-9\right)=8 \iff -\frac{1}{2}x+9=8 \iff -\frac{1}{2}x=-1 \iff x=2 \end{array} \right]$$

De esta forma, la solución es,

$$x \in \{34\} \cup \{2\} = \{34, 2\} \quad \triangleright$$

13. $2|x-4|+7=10$

$\lhd$ Primeramente observamos que,

$$2|x-4|+7=10 \iff 2|x-4|=3 \iff |x-4|=\frac{3}{2}$$

Después, utilizamos el diagrama de equivalencia,

$$\left\{\begin{array}{c} x-4\geq 0 \quad \text{y} \quad x-4=3/2 \\ \text{ó} \\ x-4<0 \quad \text{y} \quad -(x-4)=3/2 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} [4,\infty)\cap\{11/2\}=\{11/2\} \\ \cup \\ (-\infty,4)\cap\{5/2\}=\{5/2\} \end{array}\right\}$$

donde los cálculos que se realizan simplificados se muestran abajo,

$$\left[\begin{array}{c} x-4\geq 0 \iff x\geq 4 \iff [4,\infty) \\ x-4=3/2 \iff x=4+3/2=11/2 \\ x-4<0 \iff (-\infty,4) \\ -x+4=3/2 \iff 4-3/2=x \iff x=5/2 \end{array}\right]$$

De esta manera, la solución es,

$$x\in\{11/2\}\cup\{5/2\}=\{5/2,11/2\}$$

es decir, $x=\frac{5}{2},\frac{11}{2}$ $\rhd$

14. $|x|=x$

$\lhd$ La equivalencia que nos permite resolver está dada por,

$$\left\{\begin{array}{c} x\geq 0 \quad \text{y} \quad x=x \\ \text{ó} \\ x<0 \quad \text{y} \quad -(x)=x \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} [0,\infty)\cap(-\infty,\infty)=[0,\infty) \\ \cup \\ (-\infty,0)\cap\{0\}=\emptyset \end{array}\right\}$$

donde los cálculos se realizan como se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} x\geq 0 \iff [0,\infty) \\ x=x \iff x\in(-\infty,\infty) \\ x<0 \iff (-\infty,0) \\ -x=x \iff 0=2x \iff x=0 \end{array}\right]$$

De esta forma, la solución es,

$$x\in[0,\infty)\cup\emptyset=[0,\infty) \quad \rhd$$

15. $|-x+2| = x+1$

$\lhd$ Nuestro diagrama de equivalencia está dado por,

$$\left\{\begin{array}{c} -x+2 \geq 0 \quad \text{y} \quad -x+2 = x+1 \\ \text{ó} \\ -x+2 < 0 \quad \text{y} \quad -(-x+2) = x+1 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} (-\infty, 2] \cap \{1/2\} = \{1/2\} \\ \cup \\ (2, \infty) \cap \emptyset = \emptyset \end{array}\right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} -x+2 \geq 0 \iff 2 \geq x \iff (-\infty, 2] \\ -x+2 = x+1 \iff 1 = 2x \iff x = 1/2 \\ -x+2 < 0 \iff (2, \infty) \\ x-2 = x+1 \iff 0 = 3 \iff \emptyset \end{array}\right]$$

De esta forma, la solución es

$$x \in \{1/2\} \cup \emptyset = \{1/2\}$$

o de otra forma, $x = \frac{1}{2}$ $\rhd$

Notamos que esta metodología empleada para ecuaciones que involucran el valor absoluto puede ser también utilizada para resolver desigualdades que asimismo lo involucren. Esto se muestra en los siguientes ejercicios.

16. $|3x+5| < 8$

$\lhd$ El diagrama de equivalencias para este problema sería, en este caso,

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+5 \geq 0 \quad \text{y} \quad 3x+5 < 8 \\ \text{ó} \\ 3x+5 < 0 \quad \text{y} \quad -(3x+5) < 8 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} [-5/3, \infty) \cap (-\infty, 1) = [-5/3, 1) \\ \cup \\ (-\infty, 5/3) \cap (-13/3, \infty) = (-13/3, -5/3) \end{array}\right\}$$

donde las intersecciones de los conjuntos involucrados se muestran en la figura 4.6 y los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} 3x+5 \geq 0 \iff 3x \geq -5 \iff x \geq -5/3 \iff [-5/3, \infty) \\ 3x+5 < 8 \iff 3x < 3 \iff x < 3/3 \iff x < 1 \iff (-\infty, 1) \\ 3x+5 < 0 \iff (-\infty, -5/3) \\ -3x-5 < 8 \iff -3x < 13 \iff x > -13/3 \iff (-13/3, \infty) \end{array}\right]$$

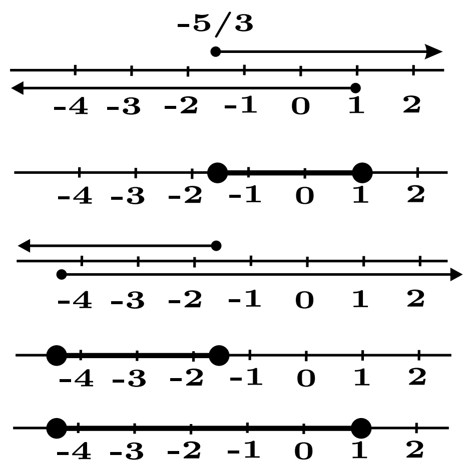


Figura 4.6: Intersección de intervalos del ejercicio **16.**

De esta forma, la solución está dada por,

$$x \in [-5/3, 1) \cup (-13/3, -5/3) = (-13/3, 1) \quad \triangleright$$

17. $|1 - 2x| \leq 13$

$\triangleleft$ En este caso, el diagrama de equivalencia es,

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 - 2x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 - 2x \leq 13 \\ \text{ó} \\ 1 - 2x < 0 \quad \text{y} \quad -(1 - 2x) \leq 13 \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (-\infty, 1/2] \cap [-6, \infty) = [-6, 1/2] \\ \cup \\ (1/2, \infty) \cap (-\infty, 7] = (1/2, 7] \end{array} \right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} 1 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -1 \iff x \leq 1/2 \iff (\infty, 1/2] \\ 1 - 2x \leq 13 \iff -2x \leq 12 \iff x \geq -6 \iff [-6, \infty) \\ 1 - 2x < 0 \iff (1/2, \infty) \\ -1 + 2x \leq 13 \iff 2x \leq 14 \iff x \leq 7 \iff (-\infty, 7] \end{array} \right]$$

De esta forma, la solución es el intervalo

$$[-6, 1/2] \cup (1/2, 7] = [-6, 7] \quad \triangleright$$

18. $|x| < x$

$\lhd$ Consideremos el siguiente diagrama de equivalencia

$$\left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \quad \text{y} \quad x < x \\ \text{ó} \\ x < 0 \quad \text{y} \quad -(x) < x \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} [0,\infty) \cap \emptyset = \emptyset \\ \cup \\ (-\infty, 0) \cap (0, \infty) = \emptyset \end{array}\right\}$$

obtenido según los siguientes cálculos.

$$\left[\begin{array}{c} x \geq 0 \iff (0,\infty) \\ x < x \iff 0 < x - x \iff 0 < 0 \iff \emptyset \\ x < 0 \iff (-\infty, 0) \\ -x < x \iff 0 < x + x \iff 0 < 2x \iff (0,\infty) \end{array}\right]$$

De esta forma, la solución es el conjunto vacío $\emptyset$ $\quad \rhd$

19. $|3x - 7| > x$

$\lhd$ Consideremos para este caso el diagrama de equivalencia

$$\left\{\begin{array}{c} 3x - 7 \geq 0 \quad \text{y} \quad 3x - 7 > x \\ \text{ó} \\ 3x - 7 < 0 \quad \text{y} \quad -(3x - 7) > x \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} [7/3,\infty) \cap (7/2,\infty) = (7/2,\infty) \\ \cup \\ (-\infty, 7/3) \cap (-\infty, 7/4) = (-\infty, 7/4) \end{array}\right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica,

$$\left[\begin{array}{c} 3x - 7 \geq 0 \iff 3x \geq 7 \iff x \geq 7/3 \iff [7/3,\infty) \\ 3x - 7 > x \iff 3x - x > 7 \iff 2x > 7 \\ \iff x > 7/2 \iff (7/2,\infty) \\ 3x - 7 < 0 \iff (-\infty, 7/3) \\ -3x + 7 > x \iff 7 > 4x \iff 7/4 > x \iff (-\infty, 7/4) \end{array}\right]$$

De esta forma, la solución es el conjunto

$$(7/2,\infty) \cup (-\infty, 7/4) = (-\infty, 7/4) \cup (7/2, \infty) \quad \rhd$$

20. $x + |x - 4| \leq 3$

$\lhd$ Primero vemos que,

$$x + |x - 4| \leq 3 \iff |x - 4| \leq 3 - x$$

Después, consideramos el diagrama de equivalencias,

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 4 \geq 0, \quad \text{y} \quad x - 4 \leq 3 - x \\ \text{ó} \\ x - 4 < 0, \quad \text{y} \quad -(x - 4) \leq 3 - x \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} [4, \infty) \cap (-\infty, 7/2) = \emptyset \\ \cup \\ (-\infty, 4) \cap \emptyset = \emptyset \end{array} \right\}$$

donde los cálculos se realizan según se indica abajo,

$$\left[\begin{array}{c} x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4 \iff [4, \infty] \\ x - 4 \geq 3 - x \iff 2x \leq 7 \iff x \leq 7/2 \iff (-\infty, 7/2] \\ x - 4 < 0 \iff (\infty, 4) \\ -x + 4 \leq 3 - x \iff 4 \leq 3 \iff \emptyset \end{array} \right]$$

De esta forma, la solución es vacía, es decir, $\emptyset$ $\rhd$

4.4 Desigualdades cuadráticas

En esta subsección, mostraremos un método para resolver otro tipo de desigualdades con variable real que son simples. Con ello, ejemplificamos nuevamente las operaciones de conjuntos, así como la relación entre la estructuración lógica de las proposiciones y la teoría de conjuntos. En el siguiente capítulo se mostrará una forma geométrica de solución de este tipo de desigualdades.

Resuelva las siguientes desigualdades, calculando el conjunto solución equivalente.

21. Resolver la desigualdad $0 \leq x^2 - x$.

$\lhd$ Esto se puede resolver por el método ya utilizado en la sección 4.3 de separar por casos la desigualdad, factorizando la cuadrática por sus raíces.

$$x^2 - x \geq 0 \iff x(x - 1) \geq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \quad \text{y} \quad x - 1 \geq 0 \\ \text{o} \\ x \leq 0 \quad \text{y} \quad x - 1 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \geq 1 \\ \text{o} \\ x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} [0, \infty) \cap [1, \infty] = [1, \infty) \\ \cup \\ (-\infty, 0] \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 0] \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, la solución es el conjunto $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. $\rhd$

22. $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

$\lhd$ La factorización simple $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ nos lleva a concluir que

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff (x-1)(x-3) \geq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} x-1 \geq 0 \text{ y } x-3 \geq 0 \\ \text{o} \\ x-1 \leq 0 \text{ y } x-3 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x \geq 1 & \text{y} & x \geq 3 \\ & \text{o} & \\ x \leq 1 & \text{y} & x \leq 3 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} [1, \infty) \cap [3, \infty] = [3, \infty) \\ \cup \\ (-\infty, 1] \cap (-\infty, 3] = (-\infty, 1] \end{array} \right\}$$

Esto implica que la solución es el conjunto $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. $\rhd$

23. $x^2 - 8x + 12 \geq 0$.

$\lhd$ Factorizamos primeramente $x^2 - 8x + 12$ resolviendo la ecuación $x^2 - 8x + 12 = 0$. Las soluciones son,

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(12)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} == \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ 2 \end{array} \right.$$

Tomando en cuenta que las raíces son $x = 2$ y $x = 6$, entonces $x^2 - 8x + 12$ se factoriza como

$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

Por lo tanto,

$$x^2-8x+12 \geq 0 \iff (x-2)(x-6) \geq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} x-2 \geq 0 \text{ y } x-6 \geq 0 \\ \text{o} \\ x-2 \leq 0, \text{ y } x-6 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x \geq 2 & \text{y} & x \geq 6 \\ & \text{o} & \\ x \leq 2 & \text{y} & x \leq 6 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} [2, \infty) \cap [6, \infty] = [6, \infty) \\ \cup \\ (-\infty, 2] \cap (-\infty, 6] = (-\infty, 2] \end{array} \right\}$$

Así , la solución es $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$. $\rhd$

24. $x^2 - x + 2 < 0$.

$\lhd$ Resolvemos la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. De esta forma, la expresión $x^2 - x + 2$ no se puede factorizar (es **irreducible**) en $\mathbb{R}$, lo cual nos dice que siempre tiene el mismo signo. Como en $x = 0$ tiene el valor 2, entonces la expresión $x^2 - x + 2$ es siempre positiva. De esta manera, la solución a

$$x^2 - x + 2 < 0$$

es vacía, es decir, la solución al problema es $\emptyset$. $\triangleright$

25. Resolver la desigualdad

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$\triangleleft$ Calculando las raíces, se obtiene

$$0 = -3x^2 + 2x - 4 \quad \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)(-4)}}{2(-3)}$$

$$\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{-6}$$

Por lo tanto, no hay raíces reales, de modo que, la expresión cuadrática no se anula. Como en $x = 0$ se tiene el valor -4, entonces la expresión $-3x^2 - 2x - 4$ es siempre negativa. La condición

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

nunca se cumple, así que la solución es el conjunto vacío $\emptyset$. $\triangleright$

Para resolver proposiciones negativas referentes a desigualdades es suficiente con utilizar los conjuntos complementarios. Por ejemplo, como

$$x^2 - x \geq 0 \iff (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$$

entonces

$$x^2 - x \leq 0 \iff [0, 1]$$

debido a que en la negación de $x^2 - x \geq 0$ en la equivalencia de abajo aparece también la posibilidad de la igualdad, y en lugar de tomar el abierto $(0, 1)$ que es el complemento de $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ deberá de considerarse todo el intervalo cerrado $[0, 1]$.

De esta manera, si se cumple que,

$$x^2 - x + 2 < 0 \iff x \in \emptyset$$

esto implica que,

$$x^2 - x + 2 \geq 0 \iff x \in (-\infty, \infty)$$

Análogamente, con la proposición,

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$$

concluimos que,

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \iff x \in [1, 3].$$

4.5 Ejercicios

1. Use el símbolo apropiado $(>, <, =)$ entre los pares de números dados a continuación.

a. $\frac{2}{3}$____$\frac{5}{7}$ **b.** $\frac{21}{4}$____5

c. $-\frac{1}{4}$____$-\frac{1}{3}$ **d.** $\sqrt{28}$____$2\sqrt{7}$

e. -0.001____$-\frac{1}{500}$ **f.** $|-0.001|$____$\left|-\frac{1}{500}\right|$

g. $\frac{|-1|+|-2|}{|-3|+|-5|}$____$\left|-\frac{1}{3}\right|$ **h.** $|-3|+|-7|$____$|-3|-|-7|$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones o desigualdades con valor absoluto.

a. $|x-3| = 7$ **b.** $|x+1| = 10$

c. $3|x-1| + 2 = 11$ **d.** $|2x-1| = x$

e. $|6x-7| \leq 10$ **f.** $|2x-11| > 3$

g. $|2x-1| + x \geq 1$ **h.** $|3x-2| + 8x \leq 1$

3. Resuelva las siguientes desigualdades.

a. $x^2 + 4x - 12 < 0$

b. $x^2 - x - 20 \geq 0$

c. $x^2 + 9 > 6x$

d. $x^2 - 3 > 3x + 2$

e. $2x^2 - 3 \leq -5x$

f. $4x^2 + 25 < -20x$

g. $6x^2 \geq x + 2$

h. $x^2 + 7x + 9 < 0$

i. $27 \leq 18x - 3x^2$

j. $2x^2 + 7x + 9 < 0$

k. $5x^2 \leq x + 10$

l. $28x^2 + 84x \geq -63$

Parte III

Funciones potenciales y racionales

Capítulo 5

Funciones

5.1 Conceptos generales

DEFINICIÓN. Una función del conjunto D en el conjunto Y, es una relación que asocia a cada elemento x del conjunto D un único elemento del conjunto Y. Si f es una función de D en Y, definimos $f : D \to Y$. Si al elemento $x \in D$ la función f le asocia el elemento $y \in Y$, entonces definimos $f(x) = y$.

Si $f : D \to Y$ es una función entonces llamamos a D **dominio** de la función f, y al conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ para algún } x \in D\}$$

rango o **imagen** de f. En este trabajo estudiaremos solamente funciones cuyo dominio e imagen son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Por ejemplo el dominio e imagen de la función $f(x) = x^2$ son los conjuntos $\mathbb{R}$ y $[0, \infty)$ respectivamente.

Es importante recordar que no está permitido,

i. Dividir por cero.

ii. Extraer raíces de orden par de número negativos.

De **i.** se sigue que el dominio de

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

es

$$D = \{x \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

en virtud de que $x = 1$ anula el denominador.

Considerando la restricción **ii.** concluimos que la función

$$f(x) = \sqrt{x}$$

tiene como dominio al intervalo $D = \{x \,|\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

DEFINICIÓN. Supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ es una función, donde $D \subset \mathbb{R}$. La **gráfica** de f es el subconjunto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, definido por

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \quad \text{y} \quad f(x) = y\}$$

La figura 5.1 ilustra la gráfica de una función.

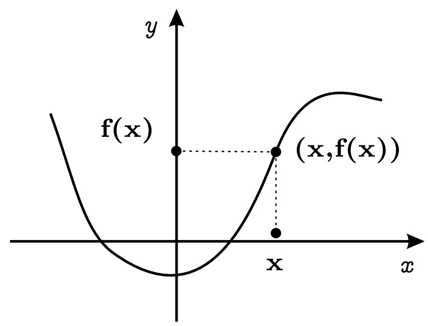


Figura 5.1: Gráfica de una función.

Para determinar el dominio, en problemas aplicados, es necesario considerar las restricciones físicas propias del problema. Llamaremos **dominio físico** al conjunto de argumentos permisibles del problema.

Por ejemplo, si $A(r) = \pi r^2$ es el área de un círculo, el dominio es $\mathbb{R}$, pero el **dominio físico** es el conjunto $(0, +\infty)$, ya que no consideramos radios negativos.

DEFINICIÓN. La función $f(x)$ se llama **par**, si $f(-x) = f(x)$ para cada $x \in D$.

Por otra parte $f(x)$ se llama **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in D$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y, como lo muestra la figura 5.2 a. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, como se ilustra en la figura 5.2.b.

Determine el dominio de las funciones siguientes.

1. $f(x) = \frac{4x^2+1}{x+3}$

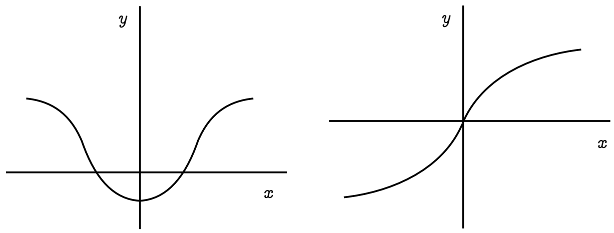


Figura 5.2: **a.** función par **b.** función impar.

◁ Como no es posible dividir por cero, entonces $x+3$ debe ser distinto de cero.

De esta manera concluimos que el dominio de f es

$$D = \{x|\ x+3 \neq 0\} = \{x|\, x \neq -3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$$

La figura 5.3 ilustra el dominio ▷

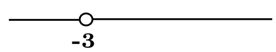


Figura 5.3: Intervalo para el ejercicio 1.

2. $g(x) = \frac{2x+3}{x^2-25}$

◁ Tomando en consideración que las raíces de la ecuación $x^2 - 25 = 0$ son $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$, tenemos que el dominio de g es

$$D = \{x \,|\, x^2 - 25 \neq 0\} = \{x \,|\, x \neq -5 \quad \text{y} \quad x \neq 5\}$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$$

Véase figura 5.4 ▷

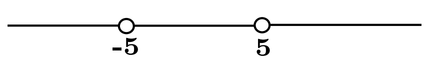


Figura 5.4: Intervalo para el ejercicio 2.

3. $f(x) = \sqrt[4]{x-7}$

◁ Recordemos que no están definidas las raíces de orden par de números negativos. De esta manera el dominio de la función f es

$$D = \{x \mid x - 7 \geq 0\} = \{x \,|\, x \ \geq 7\} = [7, \infty)$$

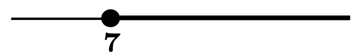


Figura 5.5: Intervalo para el ejercicio 3.

La figua 5.5 ilustra al dominio de la función $\triangleright$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$\triangleleft$ En esta función no hay divisiones por cero y además la raíz es de orden impar. Por lo tanto el dominio de f es $\mathbb{R}$. $\triangleright$

5. $h(x) = \sqrt{2x-6} + \frac{3x}{x-5}$

$\triangleleft$ Existen dos restricciones sobre h, la primera es $2x-6 \geq 0$ y la segunda $x-5 \neq 0$. De aquí que el dominio de h es,

$$D = \{x \mid 2x-6 \geq 0 \quad \text{y} \quad x-5 \neq 0\}$$

o equivalentemente,

$$D = \{x \mid x \geq 3 \quad \text{y} \quad x \neq 5\} = [3,+\infty) \setminus \{5\}$$

o en otras palabras,

$$D = [3,5) \cup (5,+\infty)$$

como se ilustra en la figura 5.6. $\triangleright$

Figura 5.6: Intervalo para el ejercicio 5.

6. $f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{3x}{4-x}$

$\triangleleft$ En este caso el dominio de f es

$$D = \{x|\, 2-x \geq 0 \quad \text{y} \quad 4-x \neq 0\}$$

es decir,

$$D = \{x|\, 2 \geq x \quad \text{y} \quad x \neq 4\} = (-\infty,2] \setminus \{4\}$$

como $4 \notin (-\infty,2]$, entonces el dominio D, representado en la figura 5.7, es

$$D = (-\infty,2] \quad \triangleright$$

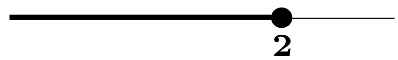


Figura 5.7: Intervalo para el ejercicio 6.

7. $h(t) = \frac{27}{\sqrt{2t+5}}$

$\lhd$ La raíz cuadrada se define sólo para números mayores o iguales a cero. Además $\sqrt{2t+5}$ no puede ser cero, ya que está como denominador.

Así que el dominio de h es,

$$D = \{t \mid 2t + 5 > 0\} = \left\{t \mid t > -\frac{5}{2}\right\} = \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

como lo muestra la figura 5.8. $\rhd$

Figura 5.8: Intervalo para el ejercicio 7.

8. $h(x) = \sqrt[6]{x+2} + \sqrt{4-2x}$

$\lhd$ Las raíces que aparecen en h son de orden par, por lo tanto $x + 2$ y $4 - 2x$ deben ser mayores o iguales a cero.

De esta manera, concluimos que el dominio de la función h es

$$D = \{x \mid x + 2 \geq 0 \quad \text{y} \quad 4 - 2x \geq 0\}$$

Resolviendo las igualdades obtenemos

$$D = \{x \mid \; -2 \leq x \quad \text{y} \quad x \leq 2\} = \{x \mid \; -2 \leq x \leq 2\}$$

es decir, $D = [-2, 2]$, como se muestra en la figura 5.9. $\rhd$

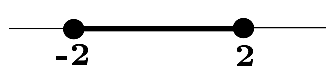


Figura 5.9: Intervalo para el ejercicio 8.

Analice a partir de la definición la paridad de las funciones dadas en los siguientes ejercicios.

9. $f(x) = x^2$

$\triangleleft$ Sea $x \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario. Como $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, entonces $f(x) = x^2$ es una función par $\triangleright$

10. $f(x) = 3x + x^3$

$\triangleleft$ Observemos que

$$f(-x) = 3(-x) + (-x)^3 = -3x - x^3 = -(3x + x^3) = -f(x)$$

es decir, la función $f(x) = 3x + x^3$ es impar $\triangleright$

11. $f(x) = 2x + 1$

$\triangleleft$ Dado que $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$, y $-f(x) = -(2x + 1) = -2x - 1$, concluimos que

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

es decir, la función $f(x) = 2x + 1$ no es par ni impar $\triangleright$

Mostramos ahora la utilización de las relaciones funcionales para resolver problemas de aparición cotidiana.

12. Es necesario fabricar un recipiente cilíndrico cerrado con un volumen de 800 cm^3. Determine el área de la superficie del recipiente como función del radio del cilindro.

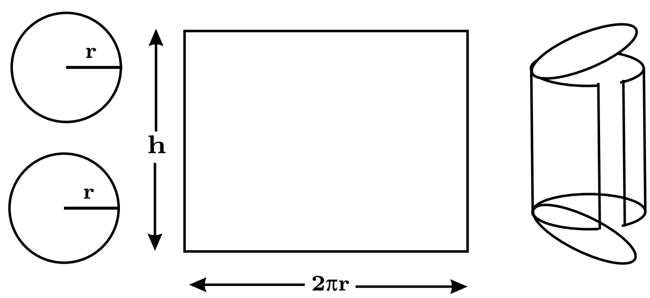


Figura 5.10: Corte superficial del cilindro.

$\triangleleft$ Si cortamos las tapas superior e inferior del recipiente, y cortamos transversalmente al cilindro, entonces obtenemos dos círculos de radio r, y un rectángulo de base $2\pi r$ y altura h, como se muestra en la figura 5.10.

El área A de la superficie es la suma de las áreas del rectángulo y de los dos círculos, es decir,

$$A = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Por otra parte, el volumen V del recipiente es de 800 cm^3, y por lo tanto,

$$V = \pi r^2 h = 800.$$

Despejando a la variable h obtenemos

$$h = \frac{800}{\pi r^2}$$

y sustituyéndola en $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, obtenemos A como función de r,

$$A = A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{1600\pi r}{\pi r^2}$$

Simplificando, se obtiene la relación

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

El dominio de esta función es, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, pero considerando que los radios deben ser positivos, entonces su dominio físico es $(0, +\infty)$. $\triangleright$

13. Un depósito de agua tiene forma de cono circular recto, como se muestra en la figura 5.11.

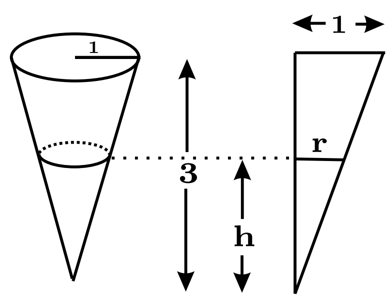


Figura 5.11: Recipiente conoidal.

Si el radio y la altura del cono son 1 m y 3 m respectivamente, calcule el volumen de agua como función de r, donde r es el radio de la capa superior de agua.

◁ Para una altura h y un radio r en un cono, el volumen ocupado V de agua es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Si proyectamos el cono en un plano vertical, obtenemos triángulos semejantes, como se muestra en la figura 5.11. Utilizando las relaciones de semejanza entre los triángulos, concluimos que

$$\frac{3}{h} = \frac{1}{r}$$

Por otro lado, si despejamos a h tenemos que $h = 3r$, y sustituimos en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, obtenemos a V como función de r mediante la relación

$$V = V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 (3r) = \pi r^3$$

El dominio de la función $V(r)$ es $\mathbb{R}$, aunque el dominio físico del problema es $[0, \infty)$ debido a que un radio es una cantidad no negativa. ▷

14. La ley de enfriamiento de Newton extablece que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la del cuerpo y la del medio, cuando se considera la temperatura del medio ambiente constante.

Exprese la velocidad de enfriamiento como función de la temperatura del cuerpo.

◁ Sean T y T_m las temperaturas del cuerpo y del medio, respectivamente. Si v es la velocidad de enfriamiento, entonces La ley de Newton implica que

$$v = k(T - T_m),$$

donde k es una constante.

Si la temperatura se mide en grados Kelvin, entonces el dominio físico es $[0, T_\infty]$, donde T_∞ es la máxima temperatura conocida, ya que no existen temperaturas menores a cero grados Kelvin. ▷

15. Exprese el área de un círculo como función de su diámetro.

◁ Denotemos por A, r y d al área, radio y diámetro del círculo respectivamente. De esta manera $A = \pi r^2$ y $d = 2r$.

Despejando r de la segunda ecuación obtenemos $r = d/2$, y sustituyéndola en la primera ecuación se obtiene,

$$A = A(d) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

El dominio de la función $A(d)$ es $\mathbb{R}$, pero el dominio físico de la relación final es $(0, +\infty)$, ya que no existen diámetros negativos. ▷

16. La población de un cultivo de bacterias aumenta en un 50% cada hora. Determine $N(t)$, el número de bacterias, después de t horas, suponiendo que la población inicial es de 2500.

$\triangleleft$ Ya que la población inicial es $N_0 = 2500$, entonces después de una hora la población será

$$N(1) = N_0 + 0.5N_0 = N_0(1.5)$$

Análogamente, en dos horas la población será

$$\begin{aligned} N(2) &= N(1) + 0.5\, N(1) = N(1)(1.5) = N_0(1.5)(1.5) \\ &= N_0(1.5)^2 \end{aligned}$$

Sucesivamente se tiene que,

$$\begin{aligned} N(3) &= N_0(1.5)^3 \\ N(4) &= N_0(1.5)^4 \\ &\vdots \\ N(k) &= N_0(1.5)^k \quad \text{para } k \text{ entero positivo} \end{aligned}$$

Consecuentemente, podríamos tentativamente escribir, para $t \in \mathbb{R}$ la relación en general

$$N(t) = N_0(1.5)^t = 2500(1.5)^t \quad \triangleright$$

5.2 Funciones lineales

DEFINICIÓN. La función $f(x)$ es **lineal**, si tiene la forma

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son números reales.

Si en la función lineal $f(x) = ax + b$ sustituimos a $f(x)$ por y, entonces obtenemos $y = ax+b$. De esta forma concluimos que la gráfica de la función lineal $f(x) = ax + b$ es la línea recta $y = ax + b$. La **pendiente** de la recta $y = ax + b$ es a, y la **ordenada al origen** es b.

Para trazar una línea recta es suficiente encontrar dos puntos distintos sobre la recta, y prolongar el segmento que une a estos puntos.

El dominio de la función lineal $f(x) = ax + b$ es $\mathbb{R}$. El rango de $f(x)$ depende del valor de a. Si $a = 0$, entonces $f(x)$ es una función constante y por lo tanto el rango de $f(x) = b$ es el conjunto $\{b\}$. Por otra parte, si $a \neq 0$, entonces el rango de $f(x) = ax + b$ es $\mathbb{R}$.

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

17. $f(x) = 2x - 1$.

$\lhd$ La gráfica de $f(x) = 2x - 1$ es la de la línea recta $y = 2x - 1$. Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, entonces los puntos $p = (0, -1)$ y $q = (1, 1)$ forman parte de la gráfica. La gráfica de $f(x) = 2x - 1$ se muestra en la figura 5.12. $\rhd$

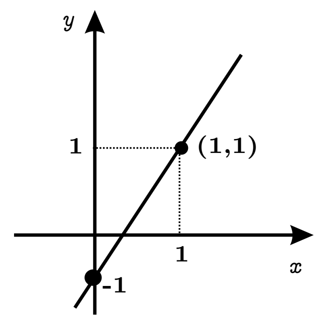


Figura 5.12: Gráfica de $f(x) = 2x - 1$.

18. $f(x) = -x + 2$

$\lhd$ La gráfica de $f(x)$ es la recta que pasa por los puntos $p = (1, 1)$ y $q = (3, -1)$, ya que $f(1) = -1 + 2 = 1$ y $f(3) = -3 + 2 = 1$. La gráfica se muestra en la figura 5.13. $\rhd$

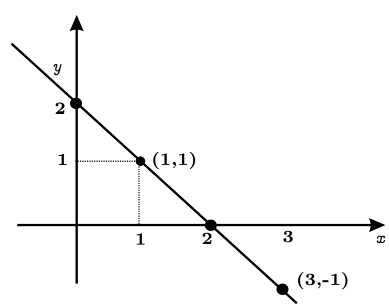


Figura 5.13: Gráfica de la función $f(x) = -x + 2$.

19. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$\lhd$ Primero notemos que el dominio de $f(x)$ es el conjunto

$$D = \{x|\ x-1 \neq 0\} = \{x|\, x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

.

Para cualquier $x \neq 1$ se cumple que

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Esto implica que $f(x) = g(x) = x+1$ tienen la misma regla de correspondencia para todo $x \neq 1$. De esta manera, concluimos que la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es la misma que la de la función $g(x) = x+1$, sin el punto $p = (1, g(1)) = (1, 2)$. Ver figura 5.14. $\rhd$

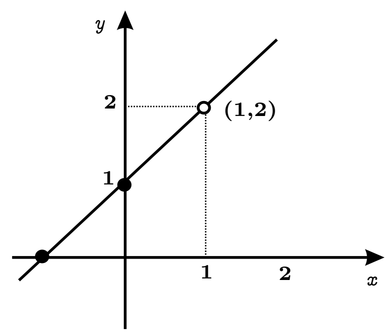


Figura 5.14: Gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

20. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

$\lhd$ El dominio de $f(x)$ es $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, y para cualquier número real $x \neq 3$, se cumple que

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = x-2$$

Por lo tanto, la gráfica de la función $f(x)$ es la de la función lineal $g(x) = x-2$ sin el punto $p = (3, g(3)) = (3, 1)$, como se observa en la figura 5.15. $\rhd$

21. $f(x) = |x-3| + 1$

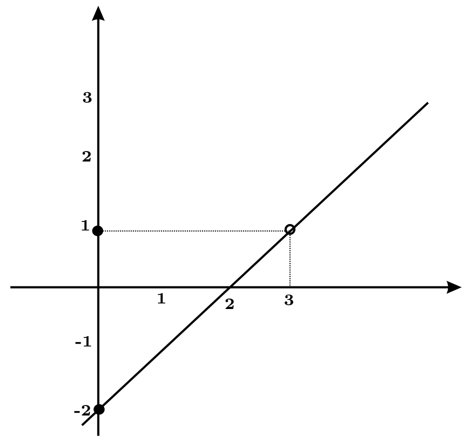


Figura 5.15: Gráfica de $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

◁ De la definición de valor absoluto, tenemos que

$$f(x) = |x-3| + 1 = \begin{cases} x-3+1, & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -(x-3)+1, & \text{si } x-3 \leq 0 \end{cases}$$

es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 3 \\ -x+4, & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ coincide con la gráfica de la recta $h(x) = -x+4$, si $x \leq 3$. Por otra parte, si $x \geq 3$, la gráfica de $f(x)$ es la de misma que la de $g(x) = x-3$. Ver figura 5.16. ▷

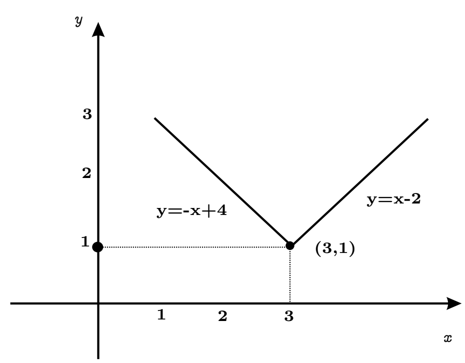


Figura 5.16: Gráfica de $f(x) = |x-3| + 1$.

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq 2 \\ 5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lhd$ El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$. La gráfica de $f(x)$ coincide con la gráfica de $g(x) = x + 2$, si $x \in (-\infty, 2]$.

Por otra parte, en $(2, +\infty)$ la gráfica de $f(x)$ es la gráfica de $h(x) = 5$.

Como el intervalo $(-\infty, 2]$ incluye a 2, entonces el punto $(2, g(2)) = (2, 4)$ está incluido en la gráfica de $f(x)$. Como 2 no está en el intervalo $(2, +\infty)$, entonces el punto $(2, h(2)) = (2, 5)$ no está en la gráfica de $f(x)$. Este último hecho se indica trazando un pequeño círculo hueco sobre el punto $(2, 5)$. Ver figura 5.17. $\rhd$

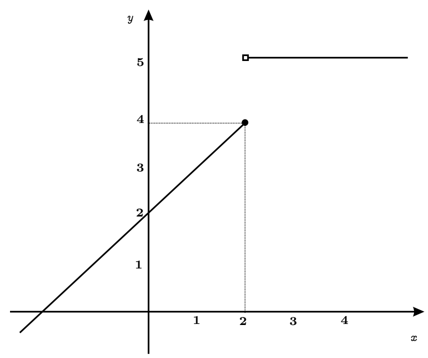


Figura 5.17: Gráfica de la función del ejercicio **22**.

Determine la función lineal que satisface las condiciones indicadas en los siguientes dos ejercicios.

23. $f(2) = 3$ y $f(1) = 1$.

$\lhd$ La función lineal $f(x)$ debe tener la forma $f(x) = ax + b$, para ciertos valores de los parámetros a y b por determinar.

Calculando los valores de $f(x)$ en los argumentos dados 1 y 2, obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$f(2) = 2a + b = 3$$

$$f(1) = a + b = 1$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos que $a = 2$. Despejando a b de la segunda ecuación obtenemos $b = 1 - a = 1 - 2 = -1$. Como $a = 2$ y $b = -1$, entonces la función lineal buscada toma la forma

$$f(x) = 2x - 1 \quad \rhd$$

24. $f(2) = 5$ y $f(4) = 2$.

$\lhd$ Análogamente al ejercicio anterior, la función $f(x)$ tiene la forma $f(x) = ax + b$, con a y b por determinar, y en este caso obtenemos el sistema de ecuaciones

$$f(2) = 2a + b = 5$$

$$f(4) = 4a + b = 2$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos $-2a = 3$, es decir, $a = -\frac{3}{2}$.

Despejando a b de la primera ecuación se tiene,

$$b = 5 - 2a = 5 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 5 + \frac{6}{2} = 5 + 3 = 8$$

Por lo tanto, la función lineal es,

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 8 \quad \rhd$$

25. La relación entre la temperatura medida en grados Celcius (C) y grados Farenheit (F), está determinada por la igualdad

$$9C - 5F + 160 = 0.$$

a. Exprese a F como función de C.

b. Determine a C como función de F.

$\lhd$ **a.** Despejamos a F de la ecuación dada y obtenemos

$$5F = 9C + 160$$

es decir,

$$F = \frac{9C + 160}{5}$$

Por lo tanto,

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32.$$

b. Despejamos en este caso a C y obtenemos

$$9C = 5F - 160$$

es decir,

$$C = \frac{5F - 160}{9}$$

y por lo tanto,

$$C(F) = \frac{5F - 160}{9} \quad \triangleright$$

A continuación mostramos el uso de las relaciones lineales para resolver problemas de aparición cotidiana y en otras diciplinas.

26. La ley de Hooke establece que la deformación de un resorte x es proporcional a la fuerza F, aplicada sobre éste. Si con una fuerza de 3 Newtons el resorte se deforma 0.06 m determine a F como función lineal de x.

$\triangleleft$ Como F es proporcional a x, entonces $F = F(x) = k\,x$ donde k es una constante.

Si $x = 0.06$ m, entonces $F = 3N$, es decir, $F(0.06) = 0.06\,k = 3$ por lo tanto, $k = \frac{3}{0.06} = 50$.

Finalmente, tenemos que

$$F(x) = 50x \quad \triangleright$$

27. Una persona adulta necesita 60 gramos diarios de proteína vegetal. Supongamos que el alimento A tiene 30% de proteína vegetal y el alimento B tiene 25%. Si una persona obtiene las proteínas de estos dos alimentos,

a. Determine la relación entre las cantidades de alimento A y B,

b. Exprese la cantidad de A como función de la cantidad de B.

c. Si esta persona come 90 gramos de B, calcule la cantidad de A que debe comer.

$\triangleleft$ **a.** Sean x y y las cantidades, en gramos de alimento de A y B respectivas para obtener 60 g de proteína vegetal. La relación entre x y y es lineal de la forma,

$$0.3x + 0.25y = 60$$

b. Despejemos x de la relación obtenida en el inciso anterior,

$$x = f(y) = \frac{60}{0.3} - \frac{0.25}{0.3}\,y$$

c. Evaluando en la función obtenida en **b.** el argumento $y = 90$, se tiene que

$$x = f(90) = 200 - \frac{0.25}{0.3}(90) = 200 - 75 = 125$$

es la cantidad de alimento A necesario para balancear a 60 g de proteína vegetal. $\triangleright$

28. Dos autos parten de la ciudad M con rumbo a la ciudad N, siguiendo la misma trayectoria. El primer auto se desplaza con una velocidad de 60 km /h. El segundo sale 1 hora después y se desplaza con una velocidad de 90 km/h.

a. Determine las funciones lineales que dan la posición de cada auto en un tiempo t.

b. ¿En cuánto tiempo alcanza el segundo auto al primero?

$\lhd$ **a.** Sean $x(t)$ y $y(t)$ las distancias recorridas en un tiempo arbitrario t por los dos autos, primero y segundo respectivamente.

Si consideramos como $t = 0$ el momento en el cual el segundo auto partió, entonces

$$x(t) = 60t + 60$$

$$y(t) = 90t$$

determinan la posición de cada auto en el tiempo $t > 0$.

Notemos que cuando el segundo auto partió el primero ya había recorrido 60 km.

b. Si el segundo auto alcanza al primero en un tiempo t^* por determinar, entonces $x(t^*) = y(t^*)$. Es decir,

$$90t^* = 60t^* + 60$$

Resolviendo esta ecuación lineal para el tiempo t^*, obtenemos

$$t^* = \frac{60}{30} = 2$$

Esto es, el segundo auto alcanza al primero en 2 horas. $\rhd$

29. (Ley de Charles) En un gas, a presión constante, la relación entre el volumen V y la temperatura T, medida en grados centígrados, está determinada por la función lineal

$$V = V(T) = V_0 + V_0KT = V_0(1 + KT)$$

donde V_0 es el volumen que ocupa el gas a 0^oC , y K es una constante.

a. Si el volumen del gas a 0^oC es 3.8 litros, y a 20^oC es 4.08 litros, determine el valor de V_0 y K.

b. Calcule el volumen del gas a 25^oC.

c. ¿Cuál es la temperatura necesaria para que el gas ocupe 4.3 litros?

$\triangleleft$ Si $T = 0$, entonces al evaluarlo se tiene

$$V(0) = V_0 + V_0K(0) = V_0 = 3.8$$

es decir, la relación toma la forma

$$V(T) = 3.8 + 3.8KT$$

Por otra parte, evaluando el argumento $T = 20$ se tiene

$$V(20) = 3.8 + 3.8(K)(20) = 4.08 = 3.8 + 76K = 4.08$$

y despejando a K obtenemos

$$K = \frac{4.08 - 3.8}{76} = \frac{0.28}{76} = 0.00368.$$

De aquí, concluimos que la relación funcional es

$$V(T) = 3.8(1 + 0.00368T)$$

b. Evaluamos la función obtenida en el punto $T = 25$, obteniendo

$$V(25) = 3.8(1 + 0.00368(25)) = 4.149 \quad \text{litros}$$

c. Para responder la pregunta **c.** tenemos que encontrar un argumento temporal T^* tal que $V(T^*) = 4.3$, y para ello es necesario resolver la ecuación

$$4.3 = V(T^*) = 3.8(1 + 0.00368T^*)$$

Esto es, resolver la ecuación

$$3.8 + 0.013984T^* = 4.3$$

Despejando a T^*, obtenemos finalmente que

$$T^* = \frac{4.3 - 3.8}{0.013984} = 35.75^oC \quad \triangleright$$

5.3 Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Su dominio es el conjunto de los números reales.

La gráfica de estas funciones son parábolas, ya que si sustituimos $f(x) = y$ en la función, se obtiene la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Para analizar los elementos de la parábola completamos a un trinomio cuadrado perfecto la expresión $ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

A continuación listamos las propiedades de las gráficas de las funciones cuadráticas.

i. El dominio es $\mathbb{R}$.

ii. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

iii. El **vértice** de la parábola está en el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

iv. La recta $x = -\frac{b}{2a}$ es el **eje de simetría** de la parábola.

v. La gráfica siempre corta al eje y en el punto $(0, f(0)) = (0, c)$.

vi. Si $b^2 - 4ac \geq 0$ entonces la gráfica corta (intersecta) al eje x en los puntos:

$$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$$

Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces la gráfica no corta al eje x.

vii. Si $a > 0$ el rango de la función cuadrática es $\left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$ y tiene como **valor mínimo** $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$

Si $a < 0$ el rango es $\left(-\infty, c - \frac{b^2}{2a}\right]$, y su **valor máximo** es $f(-\frac{b}{2a})$.

Encuentre, completando el trinomio cuadrado perfecto, el vértice y el eje de simetría de las gráficas de las dos siguientes funciones.

30. $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$

$\triangleleft$ Factorizamos el coeficiente de x^2, considerando los términos que contienen x

$$2(x^2 - 3x) + 5$$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto de la expresión que se encuentra dentro del paréntesis

$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} + 5$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

El vértice se encuentra en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$y la ecuación del eje de simetría es $x = \frac{3}{2}$. $\triangleright$

31. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

$\triangleleft$ Procediendo como en el ejemplo anterior, tenemos

$$-3x^2 + 4x + 1 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 1$$

$$= -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 1 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{3} + 1$$

$$= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}$$

El vértice está en el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ y la ecuación del eje de simetría es $x = \frac{2}{3}$. $\triangleright$

Trace las gráficas de las siguientes funciones tomando en cuenta las propiedades (i) (vii) enlistadas anteriormente.

32. $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

$\triangleleft$ Para esta función se tiene

$$a = 2, \quad b = 9, \quad c = -5$$

La gráfica es una parábola que abre hacia arriba, cuyo eje de simetría es la recta

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{4}$$

El vértice está localizado en el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{9}{4}, -\frac{121}{8}\right)$$

La gráfica corta al eje y en el punto $(0, f(0)) = (0, -5)$.

Para determinar si la gráfica corta al eje x se resuelve la ecuación

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = -5$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Consecuentemente, la gráfica intersecta al eje x en los puntos $(-5, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Como $a = 2 > 0$, el rango de f es

$$\left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right) = \left[-\frac{121}{8}, +\infty\right)$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la función es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{121}{8}$ Ver figura 5.18. ▷

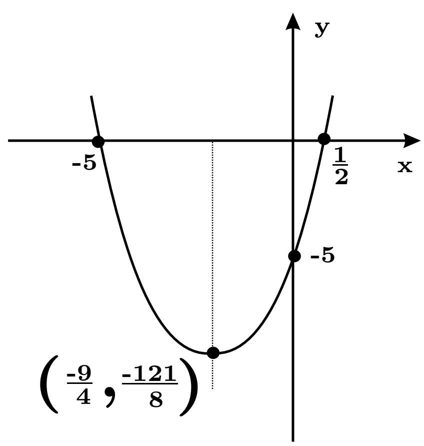


Figura 5.18: Gráfica de $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$.

33. $3x^2 - 2x + 5$

◁ En este caso se tiene

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 5$$

La gráfica es una parábola que abre hacia arriba y tiene como eje de simetría la recta

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

El vértice se localiza en el punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

La gráfica corta al eje y en el punto

$$(0, f(0)) = (0, c) = (0, 5)$$

Para ver si la gráfica corta al eje x resolvemos la ecuación

$$3x^2 - 2x + 5 = 0$$

mediante la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(5)}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

y observamos que el descriminante es negativo, por lo que no tiene solución (en $\mathbb{R}$) esta ecuación. Esto significa que la gráfica no corta al eje x.

Como $a > 0$, el rango de la función es

$$\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right) = \left[c - \frac{b^2}{2a}, +\infty\right) = \left[\frac{14}{3}, +\infty\right)$$

y el valor mínimo de f es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{14}{3}$.

Esto se ilustra en la figura 5.19. $\triangleright$

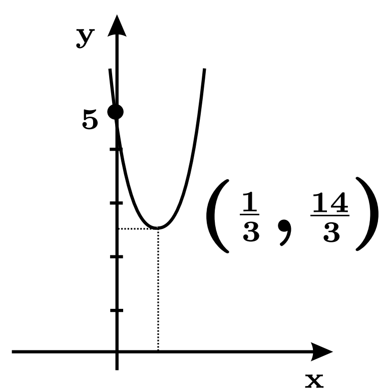


Figura 5.19: Gráfica de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

34. $f(x) = -5x^2 + 9x + 2$

$\triangleleft$ Para esta función, tenemos $a = -5, \quad b = 9, \quad c = 2$, así que es una parábola que abre hacia abajo y su eje de simetría es $x = \frac{9}{10}$.

El vértice se localiza en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{121}{20}\right)$

La gráfica corta al eje y en el punto

$$(0, f(0)) = (0, c) = (0, 2)$$

El corte con el eje x se calcula resolviendo la ecuación

$$-5x^2 + 9x + 2 = 0$$

que tiene como raíces $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 2$. Por lo tanto, la gráfica corta al eje x en los puntos $\left(-\frac{1}{5}, 0\right), (2, 0)$.

Como $a < 0$, entonces el rango es

$$\left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right] = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{2a}\right] = \left(-\infty, \frac{121}{20}\right]$$

y el valor máximo de la función es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{121}{20}$ como se muestra en la figura 5.20. $\triangleright$

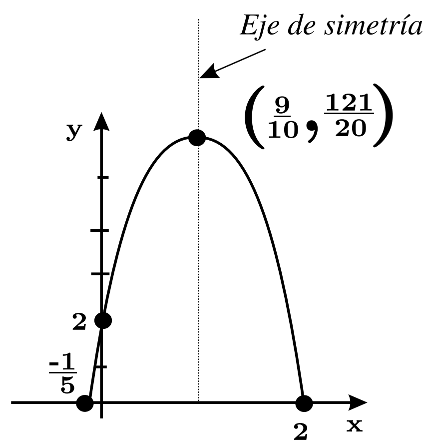


Figura 5.20: Gráfica de $f(x) = -5x^2 + 9x + 2$.

35. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

$\triangleleft$ Tenemos, para este caso $a = -1, b = 2$ y $c = -4$

El eje de simetría es la recta $x = 1$ y la parábola abre hacia abajo. El vértice se encuentra en $(1, -3)$.

Intersecta al eje y en el punto $(0, -4)$. No corta al eje x y el rango es $(-\infty, -3]$

La función tiene un valor máximo, que es $f(-1) = -3$. Esto se ilustra en la figura 5.21. $\triangleright$

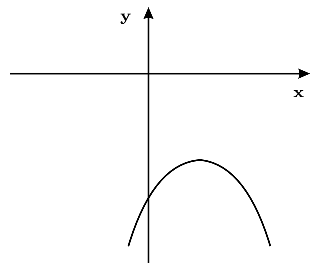


Figura 5.21: Gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

36. Trace en un mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2, \ g(x) = 0.5x^2, \ h(x) = 3x^2$$

observe el efecto del coeficiente y explíquelo.

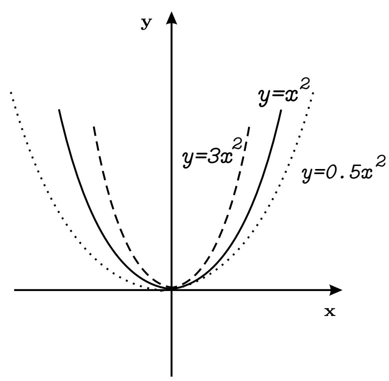


Figura 5.22: Gráficas de x^2, $0.5x^2$, $3x^2$.

$\triangleleft$ El trazo de cada una de las gráficas de las funciones dadas nos muestra que la función $f(x) = ax^2$ tiene las siguientes características.

i. Si $|a| > 1$, la gráfica de $f(x) = ax^2$ está más comprimida que la de la función $f(x) = x^2$.

ii. Si $0 < |a| < 1$, la gráfica de ax^2 es más amplia que la de x^2.

Lo anterior se muestra en la figura 5.22. $\triangleright$

37. Encuentre la intersección de las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x + 1, \quad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

$\triangleleft$ Claramente las gráficas se intersectan, si y sólo sí, $f(x) = g(x)$. Lo anterior se cumple si igualamos los lados derechos y resolvemos la ecuación para x,

$$-x + 1 = x^2 - 4x + 3 \iff 0 = x^2 - 3x + 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\iff (x - 2)(x - 1) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 2$ y $x = 1$ y al sustituir en $f(x)$ (o en $g(x)$) tenemos

$$f(2) = 1, \quad f(1) = 0$$

Así , las funciones se intersectan en los puntos $(1, 0)$ y $(2, 1)$. $\triangleright$

Aplicaciones

38. Encuentre dos números positivos que sumen 124 y cuyo producto sea máximo

$\triangleleft$ Si m es uno de los números, entonces el otro será $124 - m$ y queremos que el producto $m\,(124 - m)$ sea máximo.

Si definimos la función (cuadrática)

$$f(m) = m(124 - m) = -m^2 + 124m$$

entonces se busca el valor de m para el cual la función tome su valor máximo. Como vimos antes, el máximo se encuentra en el vértice, así que localizamos sus coordenadas

En este caso tenemos: $a = -1$, $b = 124$, $c = 0$

$$V = \left(-\frac{b}{2a},\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{124}{-2},\ f\left(-\frac{124}{-2}\right)\right)$$
$$= (62,\ f(62)) = (62, 3844)$$

Los números buscados son $m = 62$ y $124 - m = 124 - 62 = 62$, es decir, son iguales y el producto de ellos es 3844.

Se observa que el dominio físico de la función cuadrática usada en este ejemplo es el intervalo abierto $(0, 124)$. $\triangleright$

39. Se quiere cercar un campo rectangular que colinda con un edificio y se desea usar éste como uno de los lados del campo. Ver figura 5.23.

a. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande, si se cuenta con 120 m de cerca?

b. ¿Cuál es el área encerrada?

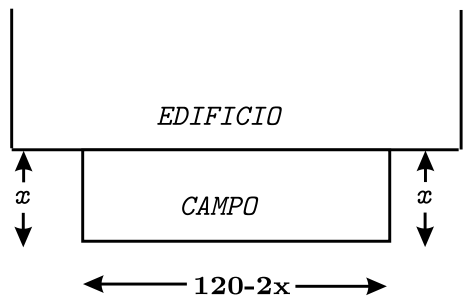


Figura 5.23: Campo rectangular.

◁ En la figura 5.23 se observa que uno de los lados mide x, así que el lado paralelo al edificio debe medir $120 - 2x$.

El área del campo será entonces,

$$A(x) = x(120 - 2x) = -2x^2 + 120x$$

que es una función cuadrática, cuyo dominio físico es el intervalo $(0, 60)$.

Al igual que en el ejemplo anterior, encontramos la abscisa del vértice

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = \frac{120}{4} = 30$$

Por lo tanto, las dimensiones óptimas del campo serán, $x = 30$, $120 - 2x = 60$ y el área máxima que tendremos será 1800 m^2. ▷

40. Una pelota es lanzada en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de $25\, m/seg$. Su altura en el tiempo t está dada por,

$$f(t) = y = -4.9t^2 + 25t + 4$$

¿A qué altura llega antes de regresar al suelo?

◁ Para esta función el dominio es el intervalo $[0, +\infty)$ y, como antes, debemos encontrar las coordenadas del vértice,

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

donde $a = -4.9, \quad b = 25, \quad c = 4.$

Consecuentemente,

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2(-4.9)} = 2.55$$

es el tiempo transcurrido para que la pelota llegue a la parte más alta. La altura que alcanza es,

$$f(2.55) = -4.9(2.55)^2 + 25(2.55) + 4 = -31.86 + 63.7 + 4 = 35.89 \text{ m} \quad \rhd$$

41. Un granjero tiene 200 m de malla para encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados (ver figura 5.24).

¿Cuál es el área máxima posible de los tres corrales?

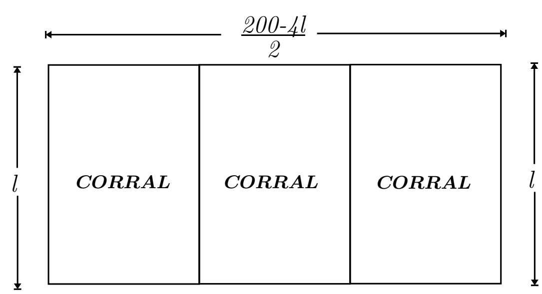


Figura 5.24: Tres corrales.

$\lhd$ Si la longitud de uno de los lados es ℓ, y los corrales se separan paralelos a este lado, entonces hay cuatro cercas de longitud ℓ. Quedan dos lados del rectángulo más grande y ambos deben consumir el resto de la malla, es decir, $200 - 4\ell$, así que cada uno de estos lados mide

$$\frac{200 - 4\ell}{2} = 100 - 2\ell$$

El área total que encierra los corrales es

$$A(\ell) = (100 - 2\ell)\ell = -2\ell^2 + 100\ell$$

y el valor de ℓ que nos dá el área máxima es,

$$\ell = \frac{-b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} = \frac{-100}{-4} = 25$$

Las medidas del rectángulo mayor son, entonces,

$$\ell = 25 \quad \text{y} \quad 100 - 2\ell = 50$$

y de esta manera, el área máxima cubierta por los corrales es

$$A = A(25) = (100 - 2(25))25 = (50)(25) = 1250\,\mathrm{m}^2 \quad \triangleright$$

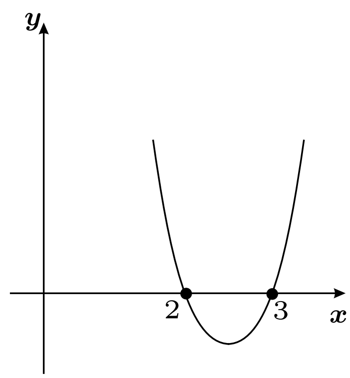


Figura 5.25: Reacciones químicas.

42. (**Reacción química**) Considérese una reacción química que ocurre en una solución bien mezclada. Tal reación es irreversible y ningún otro proceso se lleva a cabo que afecte la cantidad de cada reactivo. Una molécula de una sustancia A se combina con una molécula de la sustancia B para formar una molécula de la sustancia C, lo que se escribe $A+B \to C$. La ley de acción de masas enuncia que, la rapidez a la que se forma C es proporcional al producto de las cantidades de A y B que aún no han reaccionado. Si la cantidad de A, antes de iniciar la reacción es 3 y la de B es 2, obtenga la ecuación que representa este fenómeno.

Definimos las siguientes variables

v = rapidez a la que se forma C.
x = cantidad de sustancia C.
k = constante de reacción.

En consecuencia
$3 - x$ es la cantidad de sustancia A que no ha reaccionado,
$2 - x$ es la cantidad de sustancia B que aún no reacciona.
Así que la ecuación que representa este fenómeno es,

$$v = k(3 - x)(2 - x)$$

y su gráfica viene en la figura 5.25. $\triangleright$

43. (**Esparcimiento de rumores**) En una ciudad de 100 000 habitantes hay personas que oyen un rumor. El rumor se esparce a causa de encuentros fortuitos entre las personas. La rapidez a la que se esparce el rumor es directamente proporcional al producto de las personas que conocen el rumor por las personas que no lo conocen. Escriba una ecuación que describa este fenómeno.

$\triangleleft$ Para modelar el proceso se definen, x = número de personas que conocen el rumor.
v = rapidez de esparcimiento del rumor.
k = constante de esparcimiento.

Entonces el número de personas que no conocen el rumor es 100 000 $-x$ y la relación que describe este fenómeno es

$$v = kx(100000 - x)$$

que es la expresión de una función cuadrática. La gráfica de tal función corta al eje x en los puntos $(0, 0)$ y $(100\,000, 0)$. Abre hacia abajo y su vértice se localiza en el punto $(50\,000, k50\,000^2)$ (ver figura 5.26).

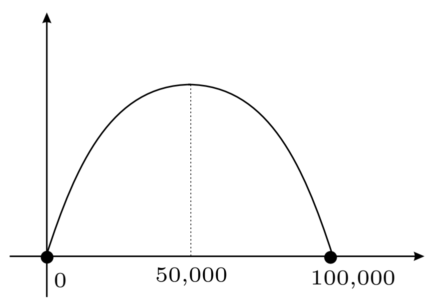


Figura 5.26: Esparcimiento de rumores.

En el momento en que 50 000 personas conocen el rumor, es el momento en que se esparce más rápido ¿por qué? $\triangleright$

Desigualdades cuadráticas

Mencionamos un método para resolver desigualdades que involucran expresiones cuadráticas en una variable, con ayuda de las raíces de tal expresión.

Para resolver la desigualdad cuadrática

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

buscamos las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Las raíces determinan intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, por ejemplo,

$$(-\infty, A),\ (A, B),\ (B, +\infty)$$

Si se define $f(x) = ax^2 + bx + c$, dentro de cada intervalo elegimos un punto arbitrario x_0, y calculamos el valor de $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$. El signo de este último valor será el signo de $ax^2 + bx + c$ en todo el intervalo.

Una tabla como la siguiente ilustra este hecho.

Intervalo	punto escogido	$ax_0^2 + bx_0 + c$	signo de $ax^2 + bx + c$
$(-\infty, A)$	x_0	$f(x_0)$	
(A, B)	x_1	$f(x_1)$	
$(B, +\infty)$	x_2	$f(x_2)$	

A partir de la información contenida en la tabla concluimos la solución de la desigualdad dada.

44. Resuelva la desigualdad cuadrática

$$2x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$\lhd$ Las soluciones de la ecuación cuadrática $2x^2 + 3x + 1 = 0$ son

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

es decir, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Entonces, las raíces determinan tres intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ dados por

$$(-\infty, -1), \quad \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

En cada intervalo elegimos un punto arbitrario, y calculamos el valor de $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. El signo de este último valor será el signo de $2x^2 + 3x + 1$ en todo el intervalo.

La tabla siguiente ilustra este método.

Intervalo	x_0 punto escogido	$f(x_0)$	signo de $2x^2 + 3x + 1$
$(-\infty, -1)$	-2	3	positivo
$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	negativo
$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$	0	1	positivo

A partir de la información contenida en la tabla concluimos que $2x^2 + 3x + 1 > 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Por otro lado, la cuadrática se anula en $x = 1, -1/2$,

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$ es

$$(-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \quad \triangleright$$

45. Resuelva la desigualdad

$$3x^2 + 5x - 2 < 0$$

$\triangleleft$ Las raíces de la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$ son

$$x = -2 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{3}$$

y determinan a los intervalos

$$(-\infty, -2), \left(-2, \frac{1}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Escojamos un punto arbitrario en cada uno de los intervalos. Por ejemplo, elegimos a -3 en el primer intervalo, 0 en el segundo intervalo, y 1 en el tercer intervalo. Después, analizamos sus valores mediante la siguiente tabla.

intervalo	x_0	$f(x_0)$	signo de $3x^2 + 5x - 2$
$(-\infty, -2)$	-3	10	positivo
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$	0	-2	negativo
$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$	1	6	positivo

lo que indica que la desigualdad $3x^2 + 5x - 2 < 0$ tiene solución en el intervalo $(-2, -\frac{1}{3})$. $\triangleright$

46. Resuelva la igualdad

$$4x^2 + 8x + 5 < 0$$

$\triangleleft$ La ecuación $4x^2 + 8x + 5 = 0$ no tiene raíces reales pues

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(4)5}}{2(4)} = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{8}$$

De esta manera la signatura de tal cuadrática es la misma en toda la recta real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Sí tomamos $x_0 = 0$ y evaluamos en $f(x) = 4x^2 + 8x + 5$, se obtiene que $f(0) = 5$, lo que implica que $4x^2 + 8x + 5 > 0$ en toda la recta real.

De esta manera, no se cumple para ningún elemento $x \in \mathbb{R}$ la desigualdad $4a^2 + 8x + 5 < 0$, lo que indica que su solución es vacía. $\triangleright$

5.4 Funciones potenciales

DEFINICIÓN. Una **función potencial** es aquella en la que la variable dependiente es **proporcional** a la potencia de la variable independiente, es decir, una función potencial tiene la forma,

$$y = f(x) = kx^p$$

donde k, $p \in \mathbb{R}$.

Ejemplificamos algunas relaciones, de uso cotidiano, que se modelan con funciones potenciales.

i. El área de un cuadrado de lado ℓ está dado por, $f(\ell) = \ell^2$.

ii. El área de un círculo de radio r es, $A(r) = f(r) = \pi r^2$.

iii. El volumen V de una esfera de radio r es, $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

iv. La ley de la gravitación universal de Newton se expresa con la función

$$F = F(r) = \frac{k}{r^2} = kr^{-2}$$

v. El volumen V de un gas a temperatura constante, es inversamente proporcional a la presión P, lo cual se escribe,

$$P = \frac{k}{V} = kV^{-1}$$

vi. La función lineal $f(x) = mx$ es una función potencial.

Potencias enteras positivas

El dominio de estas funciones es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, ya que no existe alguna restricción en la aplicación de la regla de correspondencia.

Para encontrar el rango y ver la forma de su gráfica se dividen las funciones en dos grupos.

a. Potencias impares: $y = x, x^3, x^5, \ldots$

Estas funciones son **crecientes**, es decir, la gráfica va hacia arriba cuando se recorre de izquierda a derecha. Son simétricas respecto al origen. Son funciones impares. En el origen tienen forma de "asiento", excepto $f(x) = x$. Todas pasan por $(0, 0)$ y por $(1, 1)$ como lo muestra la figura 5.27 a.. Su rango es $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

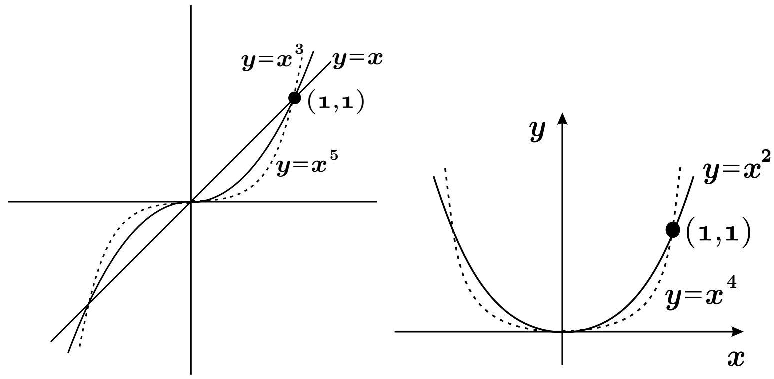


Figura 5.27: Potencias **a.** impares **b.** pares.

b. Potencias pares: $y = x^2, x^4, x^6, \ldots$

Son **decrecientes** para x negativos y **crecientes** para x positivos. Son simétricas respecto al eje y. Son funciones pares. Tienen forma de "U". Todas pasan por $(0,0)$ y por $(1,1)$ como lo muestra la figura 5.27 b. El rango de estas funciones es el intervalo $[0,+\infty)$.

Comportamiento en 0 y en ∞

Para cualquier par de números enteros $0 < m < n$ se tiene

a. $x^m > x^n$ para $x \in (0,1)$

b. $x^m < x^n$ para $x \in (1,\infty)$

En el caso **a.** decimos que x^m **domina** en cero, mientras que si sucede **b.** entonces x^n **domina** en ∞.

Por ejemplo, x^4 domina en ∞ a x^3, aunque también domina a $784x^3$, pues para $x > 784$ se tiene.

$$x^4 > 784x^3$$

es decir, no importa el coeficiente, sino el exponente para ver qué función potencial domina.

Potencias enteras negativas.

Como en el caso de las potencias positivas las dividimos en dos grupos.

a. Potencias negativas impares. $y = x^{-1}, x^{-3}, \cdots$

Tienen como dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cap (0,+\infty)$. Son decrecientes en $(-\infty,0)$, al igual que en $(0,\infty)$ y son funciones impares. Pasan por $(1,1)$.

Cuando x se acerca a cero por la izquierda ($x \to 0^-$) los valores de y se hacen "muy grandes con signo negativo" ($y \to -\infty$) y se dice que la recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical.

También se observa que si $x \to -\infty$, es decir, cuando x "crece" negativamente, entonces $y \to 0$ y, en este caso, decimos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Por ser impares se tiene

- $y \to \infty$ cuando $x \to 0^+$
- $y \to 0$ cuando $x \to \infty$

como lo muestra la figura 5.28 a.

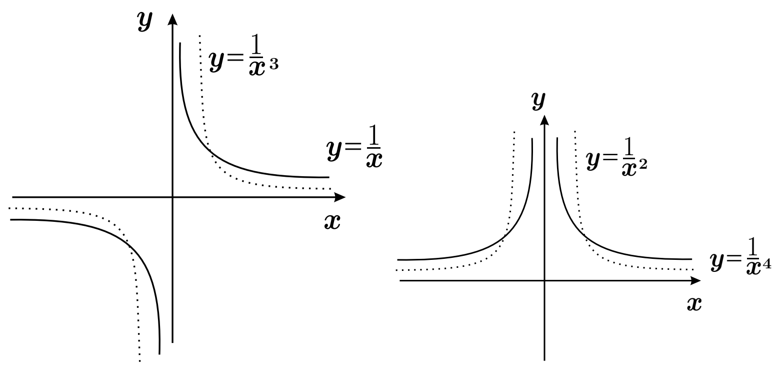


Figura 5.28: Potencias negativas **a.** impares **b.** pares.

b. Potencias enteras negativas pares. $y = x^{-2},\ x^{-4}, \cdots$

Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Son crecientes en $(-\infty, 0)$ y decrecientes en $(0, \infty)$. Son funciones pares, pasan por $(1, 1)$ y se tiene que

- $y \to \infty$ cuando $x \to 0^-$
- $y \to \infty$ cuando $x \to 0^+$
- $y \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$

lo cual se muestra en la gráfica 5.28 b.

Potencias fraccionarias positivas $y = x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{3}{2}}$

Estas funciones aparecen, por ejemplo, en las siguientes relaciones.

i. Si A es el área de un cuadrado de lado ℓ entonces podemos escribir ℓ como función de A,

$$\ell(A) = \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$$

ii. Si N es el número de especies encontradas en una isla y A es el área de la misma, entonces

$$N = N(A) = k\sqrt[3]{A} = kA^{\frac{1}{3}}$$

donde k es una constante que depende de la región del mundo en que se encuentre la isla.

La función $y = x^{\frac{1}{2}}$ tiene como dominio el intervalo $[0, +\infty)$, mientras que el dominio de $y = x^{\frac{1}{3}}$ es $(-\infty, +\infty)$, Sin embargo, muchas veces restringimos el dominio de éstas al intervalo $[0, +\infty)$.

Potencias fraccionarias: $y = x^{\frac{m}{n}}$, con $0 < m < n$

En este caso tenemos $0 < \frac{m}{n} < 1$. Son crecientes y pasan por el punto $(1, 1)$, como lo muestra la figura 5.29.

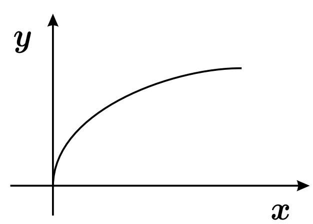


Figura 5.29: Potencias fraccionarias $y = x^{\frac{m}{n}}$, $0 < m < n$.

Potencias fraccionarias: $y = x^{\frac{m}{n}}$ con $m > n > 0$

Estas tienen un comportamiento similar a las funciones x^p, con p entero positivo, $p > 1$. Son crecientes y pasan por el punto $(1, 1)$ (véase figura 5.30).

Al igual que con las potencias enteras tenemos que si p, q son números racionales (fraccionarios) tal que $0 < p < q$ entonces

a. $x^p > x^q \quad \text{si} \quad x \in (0, 1)$

b. $x^p > x^q \quad \text{si} \quad x \in (1, \infty)$

Un ejemplo del uso de relaciones potenciales con exponente fraccionario es la **La ley de Torricelli**:

Si se tiene un tanque de agua, con un agujero de área a en el fondo, por el que está saliendo el agua, se cumple la ley de Torricelli:

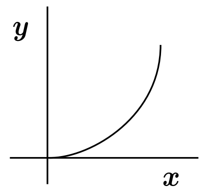


Figura 5.30: Potencias fraccionarias, $y = x^{\frac{m}{n}}$, $m > n > 0$.

Si g es la aceleración de la gravedad, y la distancia de la superficie del agua hasta el agujero, v la rapidez con que cambia el volumen del agua en el tanque entonces

$$v = -a\sqrt{2gy}$$

la gráfica de esta función se muestra en la figura 5.31.

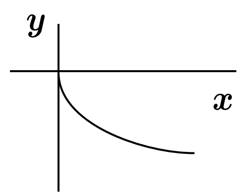


Figura 5.31: Gráfica de la ley de Torricelli.

5.5 Funciones polinominales

Una **función polinominal** es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in N$$

donde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$ se dice que es un polinomio de grado n.

El dominio de estas funciones es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Es importante conocer, para estas funciones, los puntos donde corta al eje x, es decir, los puntos donde se satisface la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Estos puntos son precisamente los ceros o raíces del polinomio. Según el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces y en consecuencia la función $f(x)$ cortará al eje x en a lo más n puntos.

La gráfica de un polinomio de grado n tiene a lo más $n-1$ cambios de dirección. Obsérvese la figura 5.32.

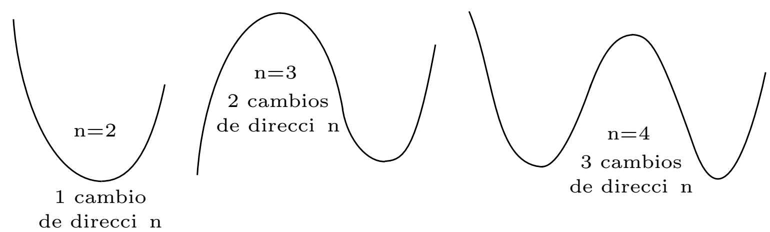


Figura 5.32: Gráficas de algunos polinomios.

Es conveniente, en ocasiones, conocer el comportamiento de los polinomios en infinito y cerca de sus ceros.

El polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se comporta igual que

$$g(x) = a_n x^n$$

para $x \to \pm\infty$.

Si tenemos factorizado el polinomio

$$f(x) = a_n(x-\lambda_1)^{t_1}(x-\lambda_2)^{t_2}\cdots(x-\lambda_\ell)^{t_\ell}$$

su comportamiento es similar a

$$g(x) = a_n(x-\lambda_1)^{t_1}k, \text{ con } k \text{ una constante.}$$

cerca del punto $(\lambda_1, 0)$. Es similar a

$$h(x) = a_n(x-\lambda_2)^{t_2}k, \text{ con } k \text{ una constante.}$$

cerca del punto $(\lambda_2, 0)$, etc.

La gráfica de un polinomio es relativamente fácil de hacer cuando este se encuentra factorizado.

Describa el comportamiento del polinomio donde se indica

47. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, cerca de $(0,0), (1,0)$ y $(3,0)$.

$\lhd$ Se factoriza $f(x)$

$$f(x) = x(x-1)(x-3)$$

se evalúa $x = 0$, en todos los factores, excepto en el que se anula y se obtiene

$$x(0-1)(0-3) = 3x$$

así que $x^3 - 4x^2 + 3x$ tiene el mismo comportamiento que $3x$ cerca de $(0, 0)$.

En forma similar se analiza el comportamiento en $(1, 0)$.

$$1(x-1)(1-3) = -2(x-1) = -2x+2$$

es decir, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ se parece a $-2x + 2$ en $(1, 0)$.

Ahora se ve lo que sucede en $(3, 0)$

$$3(3-1)(x-3) = 12(x-3) = 12x - 36$$

así pues $f(x)$ es similar a $12x - 36$ en $(3, 0)$ $\triangleright$

48. $f(x) = -3(x-2)(x+1)^2(x-3)(x+2)$ en sus ceros.

$\triangleleft$ Los ceros de $f(x)$ son: $x = -2, -1, 2, 3$.

Se analiza el comportamiento en $(-2, 0)$, sustituyendo $x = -2$ en cada factor, excepto en el que se anula:

$$-3(-2-2)(-2+1)^2(-2-3)(x+2) = -60(x+2)$$

entonces $f(x)$ se parece a $-60(x + 2)$ cerca de $(-2, 0)$.

Ahora se ve los que sucede en $(-1, 0)$, sustituyendo $x = -1$

$$-3(-1-2)(x+1)^2(-1-3)(-1+2) = -36(x+1)^2$$

El comportamiento en $(-2, 0)$ se hace sustituyendo $x = 2$

$$-3(x-2)(2+1)^2(2-3)(2+2) = 108(x-2)$$

y por último se sustituye $x = 3$

$$-3(3-2)(3+1)^2(x-3)(3+2) = -240(x-3)$$

Resumiendo

$$f(x) = -3(x-2)(x+1)^2(x-3)(x+2)$$

es similar a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -60(x+2) \quad \text{cerca de} \quad (-2,0) \\ g_2(x) &= -36(x+2)^2 \quad \text{cerca de} \quad (-1,0) \\ g_3(x) &= 108(x-2) \quad \text{cerca de} \quad (2,0) \end{aligned}$$

$$g_4(x) = -240(x-3) \quad \text{cerca de} \quad (3,0) \quad \triangleright$$

49. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3(x-2)$, cerca de sus ceros

$\triangleleft$ Los ceros son: $x = -1, 1, 2$.
En $(-1, 0)$ se tiene

$$(-1-1)^2(x+1)^3(-1-2) = a(x+1)^3 \quad \text{con} \quad a < 0$$

En $(1, 0)$

$$(x-1)^2(1+1)^3(1-2) = b(x-1)^2 \quad \text{con} \quad b < 0$$

En $(2, 0)$ se tiene

$$(2-1)^2(x+1)^3(x-2) = c(x-2)^3 \quad \text{con} \quad c > 0 \quad \triangleright$$

Bosqueja las gráficas de cada una de las funciones polinominales anteriores.

50. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$\triangleleft$ Cerca de cada cero se hace un bosquejo de la gráfica de la función a la que se parece y después se unen las pequeñas gráficas en forma suave, como se muestra en la figura 5.33. $\triangleright$

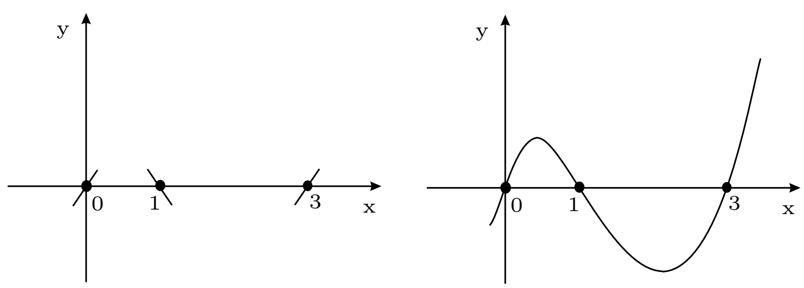


Figura 5.33: Gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

51. $f(x) = -3(x-2)(x+1)^2(x-3)(x+2)$

$\triangleleft$ Como en el ejercicio anterior, se bosquejan las gráficas de las funciones similares y se unen de forma suave para obtener la gráfica de $f(x)$. Ver figura 5.34. $\triangleright$

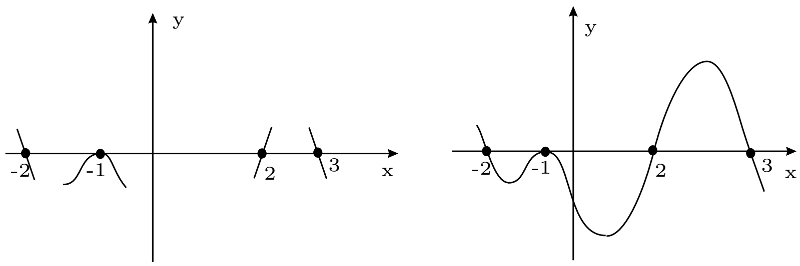


Figura 5.34: Gráfica de $f(x) = -3(x-2)(x+1)^2(x-3)(x+2)$.

52. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3(x-2)$

◁ Como antes, se dibujan las gráficas de las funciones a las que se parece $f(x)$, las cuales son

$$a(x+1)^3, a < 0 \quad \text{en} \quad (-1,0)$$

$$b(x-1)^2, b < 0 \quad \text{en} \quad (1,0)$$

$$c(x-2), c > 0 \quad \text{en} \quad (2,0)$$

y se unen de forma suave para obtener la gráfica de la función. Esto se ilustra en la figura 5.35. ▷

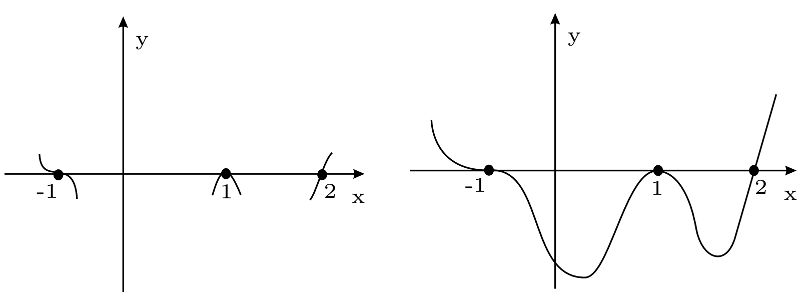


Figura 5.35: Gráfica de la función $(x-1)^2(x+1)^3(x-2)$.

5.6 Funciones racionales

Una **función** racional es de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

El dominio de f es el conjunto

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}|\, q(x) \neq 0\}$$

Estas funciones podrían tener rectas asíntotas verticales en los puntos x donde $q(x)$ se anula. El análisis de éstas al infinito se realiza observando los comportamientos de $p(x)$ y $q(x)$.

Nos restringiremos a estudiar únicamente las **funciones racionales lineales**

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$$

cuyo dominio es el conjunto $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$.

$\lhd$ Observamos que la función f se anula si $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$ lo que nos da el corte con el eje x, en el punto $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

$$\lhd \quad f(x) = 0 \iff \frac{ax+b}{cx+d} = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a} \quad \rhd$$

Si $a = 0$, entonces la gráfica no corta el eje x.

Por otro lado, al evaluar $x = 0$, si es que pertenece al dominio, $f(0) = \frac{b}{d}$, lo que nos indica el corte con el eje y en el punto $\left(0, \frac{b}{d}\right)$.

En este caso, debido a que $ad - bc \neq 0$, la recta $x = \frac{-d}{c}$ es asíntota vertical para la gráfica, lo cual se escribe,

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} f(x) = \lim_{x \to \frac{-d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(-\frac{d}{c}\right) + b}{c\left(\frac{-d}{c}\right) + d} = \frac{-1}{c}\,\frac{ad - bc}{0} \to \pm\infty$$

Puesto que $ax + b$ se comporta como la función $p(x) = ax$ en $\pm\infty$ y $cx + d$ se comporta como a $q(x) = cx$ en $\pm\infty$, entonces $f(x)$ se parece a la función

$$\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

en $\pm\infty$. Esto es, $y = \frac{a}{c}$ es una recta asíntota horizontal para $f(x)$ lo cual se escribe,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

Otra forma de realizar el análisis asintótico mencionado se propone a continuación.

Después de efectuar la división de polinomios, podemos escribir

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\beta}{cx+d} \quad \text{con} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

lo cual nos indica que el punto $x = -\frac{d}{c}$ genera una asíntota vertical con la misma ecuación, y que $y = \frac{a}{c}$ es recta asíntota vertical en $\pm\infty$ $\rhd$

53. Trace la gráfica de

$$g(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$$

$\lhd$ Observamos que $ad - bc = 2(1) - (-1)(3) = 2 + 3 = 5 \neq 0$ y que el dominio es $D = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Por otro lado,

$$f(x) = 0 \iff \frac{2x-1}{3x+1} = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

que nos indica el corte de su gráfica con el eje x en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Para encontrar el corte de la gráfica con el eje y, evaluamos $x = 0$,

$$f(0) = \frac{2(0)-1}{3(0)+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

lo que nos indica que la gráfica corta el eje y en el punto $(0, -1)$.

Reescribimos la función en la forma

$$g(x) = \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3x+1}$$

En este caso $x = -\frac{1}{3}$ es una síntota vertical en virtud de que

$$\lim_{x \to \frac{-1}{3}} f(x) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1}{3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1} = \frac{\frac{-5}{3}}{0} \to \pm\infty$$

Por otro lado, para argumentos grandes de x se cumple que los valores se aproximan a $\frac{2}{3}$ en virtud de que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3x+1}\right) = \frac{2}{3}$$

lo que nos dice que $y = \frac{2}{3}$ es una asíntota horizontal en ∞.

Análogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3x+1}\right) = \frac{2}{3}$$

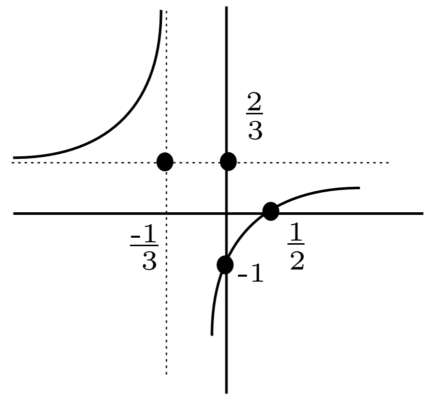


Figura 5.36: Gráfica de la función $g(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$.

lo que implica que, nuevamente, $y = \frac{2}{3}$ es una recta asíntota horizontal en $-\infty$.

La figura 5.36 ilustra la gráfica de la función. $\triangleright$

54. Trace la gráfica de la función

$$h(x) = \frac{-x+2}{2x-1}$$

$\triangleleft$ Observamos que $ad - bc = -1(-1) - 2(2) = 1 - 4 = -3 \neq 0$, y que el dominio de $h(x)$ es $D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

El corte con el eje x se obtiene de resolver $h(x) = 0$, es decir,

$$h(x) = 0 \iff \frac{-x+2}{2x-1} = 0 \iff -x+2 = 0 \iff x = 2$$

lo cual indica que la gráfica de h corta el eje x en $(2, 0)$.

En virtud de que $0 \in D$, entonces $f(0) = -2$ lo que indica que la gráfica de h corta al eje y en el punto $(0, -2)$

Al realizar la división de las expresiones lineales,

$$\frac{-x+2}{2x-1} = -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x-1}$$

se obtiene que $x = \frac{1}{2}$ es un recta asíntota vertical y que $y = -\frac{1}{2}$ es una recta asíntota horizontal en $\pm\infty$.

La figura 5.37 ilustra la gráfica de esta función fraccional lineal. $\triangleright$

55. Trazar la gráfica de

$$f(x) = \frac{2x-3}{-4x+6}$$

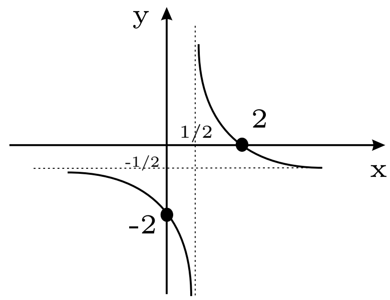


Figura 5.37: Gráfica de $h(x) = \frac{-x+2}{2x-1}$.

$\triangleleft$ Primeramente vemos que $ad - bc = 2(6) - (-3)(-4) = 0$. Realizamos en este caso el cociente de expresiones lineales obteniendo

$$\frac{2x-3}{-4x+6} = \frac{2x-3}{-2(2x-3)} = -\frac{1}{2}$$

esto es, la función racional lineal dada es en realidad una función constante con valor $-\frac{1}{2}$.

No obstante, el dominio de $f(x)$ es el conjunto

$$D = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

debido a la definición inicial de la regla de correspondencia. Esto hace que la gráfica de f sea una recta horizontal $y = -\frac{1}{2}$ con un hueco puntual sobre el punto $x = \frac{3}{2}$ que está excluido en el dominio.

La figura 5.38 nos muestra la gráfica de esta aparente función fraccional lineal. $\triangleright$

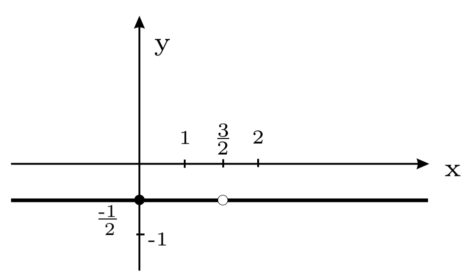


Figura 5.38: Gráfica $f(x) = \frac{2x-3}{-4x+6}$.

56. La **ley** de **Boyle** establece que, si se mantiene constante la temperatura, el volumen de un gas varía en proporción inversa a la presión. Esta relación se expresa por:

$$P = \frac{k}{V}, \quad k > 0$$

donde P es la presión, V es el volumen del gas y k es una constante de proporcionalidad.

La gráfica de esta función en las coordenadas $V, P > 0$, se muestra en la figura 5.39. $\triangleright$

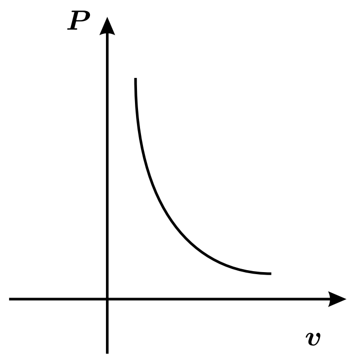


Figura 5.39: Gráfica de la ley de Boyle.

57. Cuando se forma el hielo en un lago, primero se congela el agua de la superficie. A medida que el calor contenido en el agua avanza hacia arriba, cruza el hielo, se dispersa en el aire, y se forma más hielo.

Cuanto más grueso es el hielo más tarda el calor en atravesarlo, se tendrá que la rapidez con que se forma el hielo es inversamente proporcional al grosor del hielo. Elaborar la gráfica de este fenómeno.

$\triangleleft$ Definamos las variables, v = rapidez de formación del hielo, y = grosor del hielo y k = constante de proporcionalidad.

Entonces, la relación obtenida es,

$$v = \frac{k}{y}$$

El dominio físico de este fenómeno es $(0, +\infty)$. La gráfica de este proceso, en las variables $y, v > 0$ se muestra en la figura 5.40. $\triangleright$

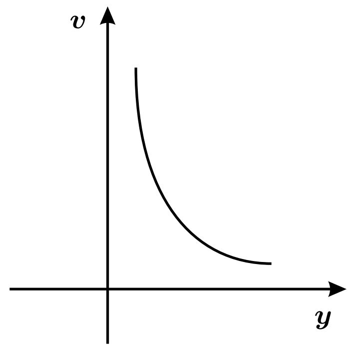


Figura 5.40: Formación de hielo en un lago.

5.7 Operaciones con funciones

Si f y g son funciones definidas en el dominio $D = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, podemos definir nuevas funciones a partir de estas.

i. La suma de ellas, asignada por $f+g$ es la función definida por la igualdad

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ii. La diferencia $(f-g)$ asignada por la igualdad

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

iii. El producto fg asignado por la igualdad

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

iv. El cociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ para $g(x) \neq 0$, definido por la igualdad

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Por otro lado, si el dominio de la función g contiene a la imagen de la función f, entonces definimos a la función compuesta $g \circ f$ mediante la igualdad

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

58. Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 3$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

$\triangleleft$ Por definición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, es decir,

$$(f \circ g)(x) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2$$

Por otra parte, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ así que,

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = 2x^2 - 3 \quad \triangleright$$

59. Dadas las funciones $f(x) = x - 9$ y $g(x) = \sqrt{x}$, determine $(g \circ f)(x)$ y el dominio de esta función.

$\triangleleft$ Aplicando la definición de $(g \circ f)(x)$, tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 9) = \sqrt{x - 9}$$

El dominio de $(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 9}$, es

$$D = \{x |\ x - 9 \geq 0\} = \{x \mid x \geq 9\} = [9, +\infty) \quad \triangleright$$

60. Si $f(x) = \frac{3}{x+2}$ y $g(x) = x - 1$, determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios.

$\triangleleft$ Aplicando la definición de composición de funciones obtenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = \frac{3}{x - 1 + 2} = \frac{3}{x + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x + 2}\right) = \frac{3}{x + 2} - 1$$

Como no es posible dividir por cero, entonces, el dominio de $(f \circ g)(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ y el dominio de $(g \circ f)(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\triangleright$

61. Encuentre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2$.

$\triangleleft$ Existen muchas funciones que cumplen la propiedad requerida. Por ejemplo, si $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \sqrt{x} - 2$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} - 2. \quad \triangleright$$

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, encuentra $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$

62. $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x$.

$$\triangleleft \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = (3x+5)+(x^2+2x) = x^2+5x+5$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (3x+5)-(x^2+2x) = 3x+5-x^2-2x = -x^2+x+5$$

$$(fg)(x) = (3x+5)(x^2+2x) = 3x^3+6x^2+5x^2+10x = 3x^3+11x^2+10x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+2x} \quad \triangleright$$

63. $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

$$\triangleleft \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x}{x+2}+\frac{1}{x-3}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x}{x+2}-\frac{1}{x-3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{1}{x-3}} = \frac{x(x-3)}{x+2} \quad \triangleright$$

64. $f(x) = 2x^3+1$ y $g(x) = 2x^3-1$.

$$\triangleleft \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = (2x^3+1)+(2x^3-1) = 4x^3$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (2x^3+1)-(2x^3-1) = 2x^3+1-2x^3+1 = 2$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x^3+1)(2x^3-1) = (2x^3)^2-1^2 = 4x^6-1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3+1}{2x^3-1} \quad \triangleright$$

65. $f(x) = \sqrt{x}+2$; $g(x) = x^3$

$$\triangleleft \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = (\sqrt{x}+2)+x^3 = x^3+\sqrt{x}+2$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x}+2-x^3$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (\sqrt{x}+2)x^3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x^3} \quad \triangleright$$

5.8 Funciones invertibles

DEFINICIÓN. Sea $f : D \to E$ una función de variable real, donde D, $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que

$$g : E \to D$$

es la **función inversa** de f, si para cada elemento $x \in D$ se tiene que

$$g(f(x)) = x$$

y para cada elemento $y \in E$ se tiene que

$$f(g(y)) = y$$

En otras palabras, la función g es la inversa de la función f si, al ser aplicada en cada lado de toda igualdad, cancela a la función f, y viceversa. Por esto se entiende, prácticamente, que las funciones inversas son funciones de despeje o de cancelación entre ellas. De esta manera, cuando se despeja una variable de una expresión, lo que en realidad se está haciendo durante el proceso es aplicar las funciones inversas correspondientes. En algunas ocasiones éstas resultan multivaluadas, como el caso de las raíces pares donde se consideran dos signos.

La idea de función inversa está estrechamente relacionada con el concepto de **inyectividad**.

DEFINICIÓN. Se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** si, siempre que tomemos dos puntos $a, b \in D$ tales que $a \neq b$, entonces, $f(a) \neq f(b)$.

Otra manera de expresar esto (por la contrapuesta de tal proposición) es que la función es inyectiva si al tomar una pareja $a, b \in D$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

Una condición necesaria y suficiente para que una función f sea **invertible** es que sea inyectiva. La función inversa está definida en la imagen de f.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, entonces existe una única función $g : Im(f) \to D$ tal que g es la función inversa de f.

DEFINICIÓN. Sean D y E dos subconjuntos de números reales, entonces, una función $f : D \to E$ se dice **biyectiva** si es inyectiva y Ω es el conjunto imagen de la función.

De esta manera, las funciones biyectivas son aquellas que tienen una función inversa. Más concretamente,

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, entonces la función $f : D \to Im(f)$ es biyectiva.

Trataremos de utilizar aquí el término **invertible** en lugar de biyectiva, por ser más útil a nuestros propósitos.

Mostramos una situación donde se asegura la inyectividad de una función.

DEFINICIÓN. Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es **creciente**, si para cualquier pareja de puntos $a, b \in D$ tales que $a < b$ se tiene que $f(a) < f(b)$.

Se define **decreciente** invirtiendo las desigualdades en los valores de la función. Esto es, si para $a < b$ se tiene que $f(a) > f(b)$.

Una función creciente en un intervalo es inyectiva en tal conjunto. El resultado es válido también si la función es decreciente en todo el intervalo.

De esta manera, para revisar la invertibilidad de algunas funciones es suficiente con verificar que es creciente (o decreciente) en todo su dominio y considerar sólo su imagen para definir la función inversa (véase la figura 5.41).

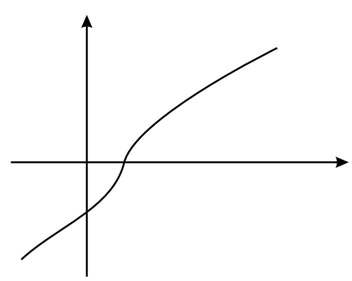


Figura 5.41: Funciones crecientes e inyectividad

66. Determine si las siguientes funciones son inyectivas.

a. $f(x) = 3x$,

b.$f(x) = 3x + 2$

c. $f(x) = x^2$

d. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$\lhd$ **a.** Claramente $x \neq y$ implica que $3x \neq 3y$ y por lo tanto, $f(x) \neq f(y)$. Con esto podemos concluir que $f(x) = 3x$ es inyectiva.

b. La función $f(x) = 3x + 2$ es inyectiva ya que

$$x \neq y \Rightarrow 3x \neq 3y \Rightarrow 3x + 2 \neq 3y + 2 \Rightarrow f(x) \neq f(x)$$

c. Como $-2 \neq 2$ y $f(-2) = f(2) = 4$, entonces $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

d. La función $f(x) = \frac{1}{x+2}$ es inyectiva ya que, si $x \neq -2$ y $y \neq -2$, entonces

$$x \neq y \Rightarrow x+2 \neq y+2 \Rightarrow \frac{1}{x+2} \neq \frac{1}{y+2} \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \triangleright$$

67. Considere la relación que transforma los grados centígrados en los grados Fahrenheit dada por la relación lineal

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

Despejar C de esta ecuación.

$\triangleleft$ Obtenemos mediante un despeje directo que,

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F - 32 = \frac{9}{5}C \qquad \Longleftrightarrow \qquad C = \frac{F-32}{9/5}$$

Así , la relación

$$C = \frac{F-32}{9/5} = \frac{5}{9}(F-32) = C(F)$$

transforma los grados centígrados en los grados Fahrenheit. Tal relación $C(F)$ obtenida al despejar la variable C en función de la variable F, es la función inversa de $F(C)$. $\triangleright$

68. Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{3x-2}{4x-1}$$

a. Demostrar que es invertible calculando directamente una función inversa en un proceso de despeje. ¿Cuál es el dominio de ésta inversa?

b. Verificar que f es inyectiva.

$\triangleleft$ **a.** Al poner $y = f(x)$ y despejar la variable x, tenemos que,

$$y = \frac{3x-2}{4x-1} \iff y(4x-1) = 3x-2 \iff 4xy - y = 3x - 2$$

$$\iff 4xy - 3x = y - 2 \iff x(4y-3) = y-2 \iff x = \frac{y-2}{4y-3}$$

Esto nos dice que la función es invertible con inversa,

$$x = x(y) = \frac{y-2}{4y-3}$$

Utilizando la variable x como independiente nuevamente, se dice que la función

$$g(x) = \frac{x-2}{4x-3}$$

es la inversa de $f(x)$.

b. En efecto, esta función tiene también la característica de ser inyectiva, pues sí a, b son elementos del dominio y $f(a) = f(b)$, entonces,

$$f(a) = f(b) \iff \frac{3a-2}{4a-1} = \frac{3b-2}{4b-1}$$

$$\iff (3a-2)(4b-1) = (3b-2)(4a-1)$$

$$\iff 12ab - 8b - 3a + 2 = 12ab - 8a - 3b + 2 \iff 5a = 5b \iff a = b$$

Se observa que, en este caso, la imagen de la función $y = f(x)$ coincide con el dominio de la función inversa,

$$Im(f) = (-\infty, 3/4) \cup (3/4, \infty)$$

De igual manera, la imagen de la función inversa es el dominio de la función inicial f,

$$(\infty, 1/4) \cup (1/4, \infty) \quad \rhd$$

Halle la función inversa de las funciones siguientes. Encuentre el dominio de cada función inversa y la imagen de la función dada, verifique que coinciden.

69. $f(x) = \frac{4x-8}{5-6x}$

$\lhd$ Pongamos

$$y = \frac{4x-8}{5-6x}$$

entonces, despejando la variable x de tal expresión se tiene que

$$y = \frac{4x-8}{5-6x} \iff y(5-6x) = 4x-8$$

$$\iff 5y - 6xy = 4x - 8 \iff 5y + 8 = 4x + 6xy$$

$$\iff 5y + 8 = (4+6y)x \iff x = \frac{5y+8}{4+6y}$$

De esta forma, la función inversa de $f(x)$ es la función real, dada en la variable x,

$$g(x) = \frac{5x+8}{4+6x}$$

y cuyo dominio es $E = \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Para verificar que E es la imagen de la función f, sólo es necesario observar que si $y^* \in E$ entonces el punto

$$x^* = \frac{5y^* + 8}{4 + 6y^*}$$

es aquél que cumple la propiedad $f(x^*) = y^*$ $\triangleright$

70. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$\triangleleft$ El dominio de la función está definido por la desigualdad $x^2 - 1 \geq 0$ la cual es equivalente al conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Pongamos $y = \sqrt{x^2 - 1}$, entonces,

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \iff y^2 = x^2 - 1 \iff y^2 + 1 = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y^2 + 1}$$

De esta forma, x tiene dos posibilidades para definir una función inversa. Ya que en la parte del dominio donde alguna función crece, se tiene una inversa, entonces al escoger el intervalo $\widetilde{D} = [1, \infty)$ donde la función dada f crece se puede escoger el signo positivo en el último despeje para tener una función inversa,

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

El dominio de tal función inversa es a simple vista, todos los números reales, pero de la relación $y = \sqrt{x^2 - 1}$ tenemos la restricción que $y \geq 0$.

Esto nos indica que el dominio de la función inversa de f, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ya escrita con la variable independiente x, tiene como dominio a $\Omega = [0, \infty)$.

Por lo tanto, la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es invertible cuando se considera su restricción a $[1, \infty) \to [0, \infty)$ con inversa $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. $\triangleright$

71. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - 3$

$\triangleleft$ Claramente el dominio de f es $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, esto es, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si se pone $y = \sqrt[3]{x^3 + 1} - 3$, al despejar la variable x, se tiene que

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 1} - 3 \iff y + 3 = \sqrt[3]{x^3 + 1} \iff (y + 3)^3 = x^3 + 1$$
$$\iff (y + 3)^3 - 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{(y + 3)^3 - 1}$$

Consecuentemente, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \sqrt[3]{(y + 3)^3 - 1}$$

es la función inversa de $y = f(x)$ $\triangleright$

5.9 Ejercicios.

Analice la paridad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 1$ **2.** $f(x) = 3x^5 + x^3$ **3.** $f(x) = |x| + x^2$

4. $f(x) = x^3 + 1$ **5.** $f(x) = \frac{x^3+x^5}{x^2+1}$

6. Supongamos que x e y son dos variables relacionadas por la igualdad

$$2x + y = 6 - x + 3y.$$

a. Exprese a x como función de y.

b. Exprese a y como función de x.

7. Exprese al volumen V de una esfera como función de su diámetro d.

8. Se desea fabricar un recipiente cilíndrico con un volumen de 750 cm^3. Determine el área de la superficie del recipiente como función de la altura del cilindro.

9. Una escalera de 8 metros recargada sobre una pared se puede deslizar libremente como se muestra en la figura 4.42. Exprese a x como función de y.

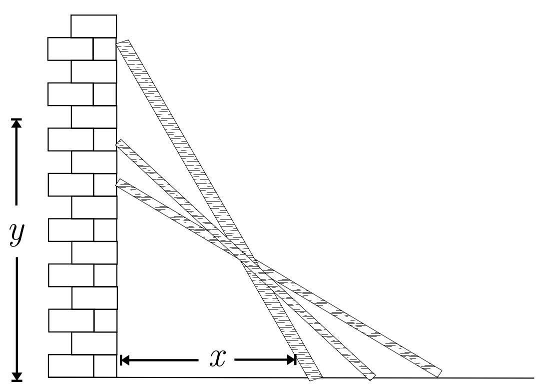


Figura 5.42: Escalera.

Grafique las siguientes funciones.

10. $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ **11.** $f(x) = (x+3)^2 - x^2 - 5$

12. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ **13.** $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+2}$

14. $f(x) = |x-2|+3$ **15.** $f(x) = |x+1|-2$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **17.** $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x-4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

18. Una población de peces se reproduce a una razón igual al 5% de la población actual P. Entre tanto, los pescadores sacan a una razón constante A (mediada en peces por año).

a. Escriba una fórmula para la razón R a la cual la población de peces aumenta como función de P.

b. Trace la gráfica de R contra P.

19. Realice la gráfica de una reacción química si las cantidades de sustancias son $A = 3$, $B = 3$.

20. En una reacción química, un **catalizador** es una sustancia que acelera la reacción pero que no cambia. Si el producto de una reacción es en sí mismo un catalizador, se dice que la reacción es **autocatalizadora**. Suponga que la rapidez r de una reacción autocatalizadora en particular, es proporcional a la cantidad del material remanente multiplicado por la cantidad del producto p producido. Si la cantidad inicial del material es A y la cantidad remanente es $A-p$.

a. Exprese r como función de p.

b. Haga la gráfica de r.

c. ¿Cuál es el valor de p cuando la reacción avanza más rápido?

21. Hallar las dimensiones de un rectángulo de 140 m de perímetro para que su área sea máxima.

22. El trabajo desarrollado al hacer explotar una mezcla de una unidad w de volumen de metano y v unidades de volumen del aire se calcula por

$$w = 84v - 2.15v^2$$

Para qué valor de v se tendrá un valor máximo de w ? ¿Cuál es el valor máximo obtenido de w?

23. Demostrar que si L es el perímetro de un rectángulo, entonces el rectángulo de mayor área es un cuadrado de lado $L/4$.

24. Con un alambre de 20 cm se requiere formar un círculo y un cuadrado. Hallar el diámetro del círculo y el lado del cuadrado que se pueden construir con el alambre si la suma de sus áreas debe ser mínima.

25. Desde un punto situado a 120 m de altura, se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg. En estas condiciones, la altura h, en metros, de la pelota, viene dada en función del tiempo t, en segundos transcurridos desde el momento del lanzamiento, mediante la fórmula

$$h = -5t^2 + 40t + 120$$

Para qué tiempo estará la pelota a 195 m arriba del suelo?

26. ¿Qué altura tiene un árbol si una piedra lanzada hasta su copa tarda 3 segundos en regresar a la tierra? Use la fórmula $d = 5t^2$, donde la distancia d en metros es cubierta por un cuerpo en caída libre en t segundos.

27. Un grupo de estudiantes compró una casa de campaña por \$700, pagando partes iguales. Pero dos de ellos se retiraron, lo que aumentó la aportación de cada uno en \$17.50. ¿Cuántos muchachos había en el grupo inicial?

28. Una lancha tarda 2 h 8 m más en hacer un recorrido de 48 Km a contra corriente que a favor de la corriente. Si la velocidad media de la corriente es 4 Km por hora, hallar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

29. Al enfriar un cubo de aluminio, el volumen disminuye en 2 cm^3 y la arista en 0.125 cm. Hallar las dimensiones del cubo antes de enfriarlo.

30. Dos barcos parten simultáneamente de puntos opuestos de una bahía de 3 km de anchura y se cruzan al cabo de 6 minutos. El más rápido termina su recorrido 4.5 minutos antes que el otro. Hallar las velocidades de los barcos en km por hora.

31. La suma de dos números es 11 y la suma de sus cuadrados es 61. ¿Cuáles son estos números?

32. Resuelve el ejercicio de los corrales, pero ahora con 4.

33. La suma de un número positivo y diez veces su recíproco es 7 ¿Cuál es este número?

34. Simplifica **a.** $27^{2/3}$, **b.** $9^{-3/2}$, **c.** $8^{-\frac{1}{3}}$

35. Considere las funciones $y = x^p$, con entero positivo, si $m > n$. ¿Cuál de las funciones $y = x^n$, $y = x^m$ se acercan más rápido a cero?

36. ¿Cuál es la diferencia entre ser creciente del tipo $y = x^2$ y del tipo $y = x^{1/2}$?

37. Para las funciones potencia $y = x^{-n}$ con n entero positivo. ¿Cuáles dominan cerca de cero? ¿Cuáles en $\pm\infty$?

38. Describe el comportamiento de las funciones $y = x^4 + 13x^3$, $y = -x^3 + 45x$ para $x \to 0$ y $x \to \pm\infty$.

39. Haz la gráfica de $f(x) = 12x^3$, $g(x) = x^5$. $h(x) = 28x^2$ sobre los mismos ejes. ¿Cuál domina para $x \to +\infty$? ¿Cuál para $x \to -\infty$?

40. Rafael es tres años menor que Carlos. Si se sabe que la suma de los cuadrados de sus edades es 29, ¿qué edad tiene cada uno?

41. Los polinomios ¿son funciones pares? ¿son impares? ¿cuáles son pares? ¿cuales impares? ¿Hay algunos que no sean pares o impares?

Analice el comportamiento de la función donde se indica.

42. $f(x) = 4x^4 - 3x + 8$ en $\pm\infty$

43. $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x - 10)$ en sus ceros.

44. $f(x) = (x+2)^2(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$ en sus ceros.

45. Haga la gráfica de los polinomios de los dos ejercicios anteriores.

Elabore la gráfica de la función racional dada, identificando su asíntota vertical y horizontal.

46. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

47. $f(x) = \frac{x+1}{3x}$

48. $f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$

49. Escriba una expresión posible, como función racional, para cada una de las gráficas que se muestran en la figura 5.43. Observe que hay varias respuestas posibles.

En los siguientes ejercicios calcule $f + g$, $f\,g$ y f/g, además del dominio de la función obtenida.

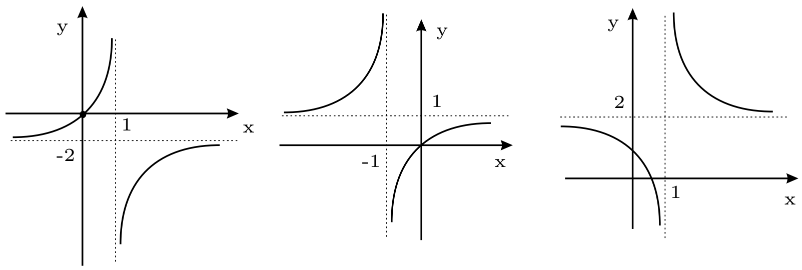


Figura 5.43: Gráficas del ejercicio 49.

50. $f(x) = 6x, \quad g(x) = 4x - 3$ **51.** $f(x) = \frac{1}{3}x^2, \quad g(x) = x^2 - 1$

52. $f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{x+1}$ **53.** $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{4-x}$

54. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$

En los siguientes ejercicios calcule $f \circ g$ y $g \circ f$, además de su dominio.

55. $f(x) = 4x - 2, \quad g(x) = 3x + 2$

56. $f(x) = 1 - x^2, \quad g(x) = 1 + x$

57. $f(x) = \frac{1}{4x}, \quad g(x) = x^2 + 2x$

58. $f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad g(x) = 2x^2 - 3$

59. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = 4 - 2x^2$

60. $f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+3}$

Determine una función inversa para cada una de las siguientes funciones.

61. $f(x) = 6x - 7$ **62.** $f(x) = 4x^2 - 25$

63. $f(x) = 8 - 4x^3$ **64.** $f(x) = \frac{4x+1}{-3x+2}$ **65.** $f(x) = \frac{16}{x^3-8}$

66. Resuelva las desigualdades cuadráticas en el ejercicio 3 del capítulo 4, mediante el método mostrado aquí, y compare los resultados obtenidos por ambos métodos.

Parte IV

Funciones trascendentes

Capítulo 6

Funciones logarítmica y exponencial

6.1 Función exponencial

Para un entero positivo n consideremos el número real definido por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por ejemplo, si se toman los primeros enteros positivos, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{c} a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \\ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25 \\ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2.3703 \\ a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2.4414 \\ \vdots \end{array}\right.$$

Para números enteros positivos n suficientemente grandes, obtenemos la tabla que a continuación se muestra.

Sucesión de números	
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
10	2.593742
100	2.704813
1000	2.716923
10000	2.718145
100000	2.718268
1000000	2.718280
10000000	2.718280

Definimos el número e (debido a Leonardo Euler) como aquél que se alcanza cuando los argumentos de la tabla son muy grandes. Esto se escribe matemáticamente como

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182$$

En un curso de Cálculo, el lector podría quedar convencido de la existencia de este número, y de la precisión de su definición.

Para un número $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, se define el número real e^x (que se lee "e elevado a la x" o simplemente "e a la x") como

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

es decir, a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia, de igual manera, un número real obtenido (aproximadamente) mediante un proceso de tabulación. Para ejemplo, si $x = 1$, se obtiene $e^1 = e$.

Nuevamente, no se demuestra nada acerca de la existencia del límite anterior, y nos concentramos apenas a identificar los valores de la función exponencial mediante los resultados al evaluar un argumento en una calculadora científica.

La función definida $x \to e^x$ se conoce como la **función exponencial**.

Se tienen las siguientes igualdades para la **función exponencial**.

i. $e^0 = 1$

ii.— $e^x e^y = e^{x+y}$ *para cualquier pareja* $x,\ y \in \mathbb{R}$

iii. $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$, *para cualquier pareja* $x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

De esta manera, la función exponencial $f(x) = e^x$ está definida para todo argumento real y, por lo tanto, su dominio será el conjunto de todos los números reales $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Podemos dibujar aproximadamente la gráfica de la función $x \to e^x$, como se muestra en la figura 6.1, mediante una tabulación conseguida por la evaluación de un número considerable de argumentos. Estos valores se obtienen aproximadamente con una calculadora científica de bolsillo.

Tabulación de la exponencial								
x	-4	-3	-2	-1	-0.8	-0.6	-0.3	-0.1
e^x	0.018	0.049	0.135	0.367	0.449	0.548	0.74	0.904

Tabulación de la exponencial									
x	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	3	4
e^x	1	1.105	1.221	1.491	2.225	2.7182	7.389	20.08	54.59

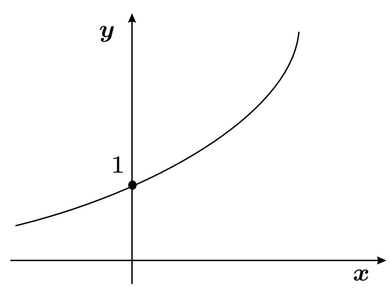


Figura 6.1: Gráfica de la función exponencial e^x.

La figura 6.1 muestra que la función exponencial e^x es creciente en todo su dominio. Más aún, e^x toma sólo valores positivos, y para argumentos cercanos a $-\infty$ sus valores son próximos a cero. Esto se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Por otro lado, para argumentos x próximos a ∞, sus valores son próximos a ∞, lo cual se escribe,

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

La figura 6.1 ilustra el comportamiento de la función exponencial.

6.2 Función logaritmo

Ya que la función e^x es creciente y su imagen es $\mathbb{R}^+$, entonces tiene una función inversa definida en $\mathbb{R}^+$. Tal función se llama la función **logaritmo natural** y se identifica con $\ln x$.

La función ln está definida biyectivamente entre los conjuntos $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$, es decir,

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

es biyectiva.

De lo anterior, se tiene que para cada $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}^+$ son válidas las igualdades siguientes

$$\ln e^x = x \quad \text{y} \quad e^{\ln y} = y$$

De esta manera, para cancelar la exponencial de una igualdad es necesario aplicar la función logaritmo natural en cada lado de la igualdad. Recíprocamente, para cancelar la función logaritmo natural es necesario aplicar la función exponencial en cada lado.

Se cumplen las siguientes igualdades para la función **logaritmo natural**.

i. $\ln 1 = 0$

ii. $\ln xy = \ln x + \ln y, \quad$ para cualquier pareja $x,\, y \in \mathbb{R}^+$

iii. $\ln \left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad$ para cualquier pareja $x,\, y \in \mathbb{R}^+$

iv. $\ln x^\alpha = \alpha \ln x \quad$ para cualquier pareja $x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

Una tabulacion permite hacer la gráfica de la función $\ln x$, como se muestra en la figura 6.2.

Tabulación del logaritmo natural								
x	0.1	0.4	0.8	1	3	5	10	20
$\ln x$	-2.302	-0.916	-0.223	0	1.098	1.609	2.302	2.995

Observamos que para argumentos x positivos muy próximos a cero los valores de $\ln x$ están próximos a $-\infty$, lo que se escribe matemáticamente,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

es decir, la función $\ln x$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Por otro lado, si x es muy grande entonces su valor bajo ln es próximo a ∞, lo que podemos definir como:

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

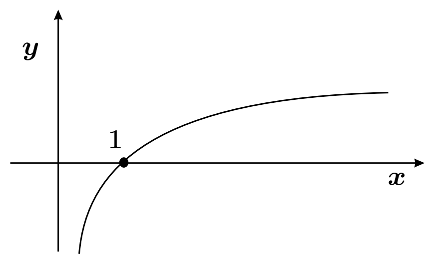


Figura 6.2: Gráfica de la función $\ln x$.

6.3 Logaritmos y exponenciales en otras bases

Si $a \in \mathbb{R}$ es un número positivo diferente de 1, se definen,

a. La función **exponencial** en base a mediante la cadena de igualdades,

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

cuyo dominio es el conjunto de números reales $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

b. La función **logaritmo** en base a por,

$$g(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

cuyo dominio es el conjunto de números reales positivos $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Las funciones exponencial y logaritmo en base a satisfacen las mismas propiedades que las de las funciones en base e mencionadas arriba, como el lector puede verificar fácilmente.

Para la exponencial de base a, se tienen las siguientes propiedades.

i. $a^0 = 1$

ii. $a^x a^y = a^{x+y}$

iii. $(a^x)^y = a^{xy}$

Para la función logaritmo en base a, son válidas las siguientes propiedades.

i. $\log_a 1 = 0$

ii. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad$ para cualquier pareja $x, y \in \mathbb{R}^+$.

iii. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad$ para cualquier pareja $x, y \in \mathbb{R}^+$.

iv. $\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x \qquad$ para $x \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Es válido, además, el cambio de base logarítmico para a, $b > 0$,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

De la construción de estas funciones, se sigue que son mutuamente inversas, es decir,

$$\log_a a^x = x \quad \text{y} \quad a^{\log_a y} = y$$

1. Usando la definición de e^x calcule aproximadamente $e^{1/2} = \sqrt{e}$ y compare con el resultado de la calculadora científica.

$\lhd$ De la definición de e^x, tenemos que para n suficientemente grande,

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

de donde, para $x = 1/2$ tenemos que

$$e^{1/2} \approx \left(1 + \frac{1/2}{n}\right)^n$$

o bien,

$$e^{1/2} \approx \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

Utilizando potencias de 10 obtenemos la siguiente tabla.

Sucesión de números	
n	$(1 + \frac{1}{2n})^n$
10	1.6288
100	1.6466
1000	1.6485
10000	1.6487
100000	1.6487
1000000	1.6487
10000000	1.6487

lo que nos dice que, mediante esta tabulación, hasta 4 decimales,

$$\sqrt{e} = e^{1/2} \approx 1.6487$$

Por otro lado, usando la calculadora se tiene que, hasta 4 decimales $e^{1/2} = 1.6487$, que coincide con el resultado obtenido. $\rhd$

2. Evalúe, usando la calculadora, la función $f(x) = x^2 e^{-3x}$ con los argumentos dados.

a. $x = -10$.

$\triangleleft$ Ya que el dominio de la función es el conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, es posible hacer la evaluación de f en $x = -10$.

$$\begin{aligned} f(-10) = (-10)^2 e^{-3(-10)} &= 100e^{+30} = 100 \times 1.06 \times 10^{13} \\ &= 1.06 \times 10^{15} \quad \triangleright \end{aligned}$$

b. -0.15

$\triangleleft$ Una sustitución directa nos muestra que

$$f(-0.15) = (-0.15)^2 e^{-3(-0.15)} = 0.0225e^{0.45} = 0.03528 \quad \triangleright$$

c. $x = 0$.

$$\triangleleft \quad f(0) = 0^2 e^{-3(0)} = 0e^0 = 0 \quad \triangleright$$

d. $x = 0.15$.

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad f(0.15) = (0.15)^2 e^{-3(0.15)} &= 0.0225e^{-0.45} = 0.0225 \times 0.6376 \\ &= 0.0143 \quad \triangleright \end{aligned}$$

e. $x = 10$.

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad f(10) = 10^2 e^{-3(10)} &= 100e^{-30} = 100 \times 9.357 \times 10^{-14} \\ &= 9.357 \times 10^{-12} \quad \triangleright \end{aligned}$$

3. Escribir las siguientes expresiones en la forma Ae^B

a. $I = 3$

$\triangleleft$ De la relación $A = e^{\ln A}$ se tiene que, tomando $A = 3$

$$I = 3 = e^{\ln 3} \quad \triangleright$$

b. $y = x^3$

$\triangleleft$ Usando la misma relación se tiene que

$$y = x^3 = e^{\ln x^3}$$

lo cual, combinado con la igualdad $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$, nos da,

$$y = x^3 = e^{\ln x^3} = e^{3\ln x} \quad \triangleright$$

c. $y = 7^{x+1}$

$\triangleleft$ De la propiedad para exponenciales de base arbitraria, $a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha}a^{\beta}$ se tiene que,

$$y = 7^{x+1} = 7^x 7$$

lo que implica que

$$y = 7^{x+1} = 7 \times 7^x = 7e^{\ln 7^x} = 7e^{x\ln 7} \quad \triangleright$$

d. $z = w^{\omega^2}$

$\triangleleft$ Análogamente a los incisos anteriores, tenemos que

$$z = w^{\omega^2} = e^{\ln w^{\omega^2}} = e^{\omega^2 \ln w} \quad \triangleright$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $e^{2x^2} = e^{4x-1}$

$\triangleleft$ Iniciamos con la ecuación

$e^{2x^2} = e^{4x-1}$ (aplicamos ln de cada lado)
$\iff \ln(e^{2x^2}) = \ln(e^{4x-1})$ (usamos la igualdad $\ln e^A = A$)
$\iff 2x^2 = 4x - 1$ (formamos una ecuación cuadrática)
$\iff 2x^2 - 4x + 1 = 0$ (resolvemos por fórmula general)
$\iff x = \frac{4\pm\sqrt{16-4(2)(1)}}{4} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Esto es, las soluciones son $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \triangleright$

b. $e^{6x} = e^{4x+8}$

$\triangleleft$ Iniciamos con la ecuación
$e^{6x} = e^{4x+8}$ (aplicamos ln de cada lado)
$\iff \ln(e^{6x}) = \ln(e^{4x+8})$ (usamos la igualdad $\ln e^A = A$)
$\iff 6x = 4x + 8$ (resolvemos la ecuación lineal)
$\iff 2x = 8 \iff x = \frac{8}{2} \iff x = 4$

De esta manera, la solución es $x = 4 \quad \triangleright$

c. $e^x + 2e^{-x} = 3$

$\lhd$ Simplificamos la ecuación inicial, utilizando las propiedades de la exponencial.

$$e^x + 2e^{-x} = 3 \iff e^x + \frac{2}{e^x} = 3 \iff \frac{e^{2x}+2}{e^x} = 3$$

$$\iff e^{2x} + 2 = 3e^x \iff e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

Ahora, es necesario resolver la ecuación

$$0 = e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x)^2 - 3e^x + 2$$

y para ello transformamos tal ecuación haciendo $z = e^x$, y obtenemos la ecuación cuadrática

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

cuyas raíces se calculan

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Esto es, $z = 2$ y $z = 1$ son soluciones de la cuadrática. Poniendo finalmente $z = e^x$ se tiene que

$$z = 2 \iff e^x = 2 \iff \ln e^x = \ln 2 \iff x = \ln 2$$

$$z = 1 \iff e^x = 1 \iff \ln e^x = \ln 1 \iff x = \ln 1 = 0$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $x = 0$ y $x = \ln 2$. $\rhd$

d. $e^x - 6e^{-x} = 1$

$\lhd$ Análogamente al inciso anterior, simplificamos la ecuación inicial.

$$e^x - 6e^{-x} = 1 \iff e^x - \frac{6}{e^x} = 1 \iff \frac{e^{2x}-6}{e^x} = 1$$

$$\iff e^{2x} - 6 = e^x \iff e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

De esta manera, es suficiente con resolver la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$, y para ello la transformamos utilizando el cambio $z = e^x$.

Se obtiene entonces la ecuación cuadrática en la variable z,

$$0 = e^{2x} - e^x - 6 = (e^x)^2 - e^x - 6 = z^2 - z - 6$$

cuyas raíces son

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Esto es, $z = 3$ y $z = -2$.

Poniendo nuevamente $z = e^x$ se tiene que

$$z = 3 \iff e^x = 3 \iff \ln e^x = \ln 3 \iff x = \ln 3$$

$$z = -2 \iff e^x = -2 \iff \ln e^x = \ln -2 \iff x = \ln(-2)$$

Vemos que la segunda posibilidad, $x = \ln(-2)$ no es posible, en virtud de que el dominio de $\ln x$ es solamente el conjunto de los números reales positivos.

Por lo tanto, la única solución para la ecuación inicial es $x = \ln 3$. $\triangleright$

5. Despejar a x en cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\triangleleft$ Quitamos denominadores de la ecuación inicial.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff 2y = e^x - \frac{1}{e^x} \iff 2y = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$\iff 2ye^x = e^{2x} - 1 \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Poniendo $z = e^x$ se obtiene la ecuación cuadrática en la variable z,

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Esto es, $z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, lo que implica al poner $z = e^x$ que

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff \ln e^x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 + 1}) \iff$$

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 + 1})$$

Notamos que sólo se considera el signo positivo, debido a que en el otro caso el argumento de ln resulta negativo.

Por lo tanto, el despeje final es

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \triangleright$$

b. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\triangleleft$ Simplificamos la ecuación inicial.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \iff y = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$$

$$\iff \text{(utilizando la regla del sandwich)} \iff y = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}+1)}$$

$$\iff y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \iff y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1$$

$$\iff ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \iff ye^{2x} - e^{2x} = -1 - y$$

$$\iff e^{2x}(y-1) = -(1+y) \iff e^{2x} = \frac{-(1+y)}{y-1}$$

$$\iff e^{2x} = \frac{1+y}{-(y-1)} \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\iff \ln e^{2x} = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\iff x = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/2}$$

$$\iff x = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

lo que termina el despeje. $\triangleright$

6. Trazar la gráfica de la función $f(x) = e^{3x}$

$\triangleleft$ Mediante una tabulación directa se tienen los valores de los siguientes argumentos:

Tabulación							
x	-3	-2	-1	-0.8	-0.6	-0.3	-0.1
e^{3x}	1.2×10^{-4}	0.002	0.049	0.09	0.165	0.406	0.74

Tabulación								
x	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	3
e^{3x}	1	1.349	1.822	1.320	11.02	20.08	403.4	8103.0

lo que muestra que cualitivamente la gráfica de esta función es esencialmente igual a la gráfica de la función e^x, como se muestra en la figura 6.3.

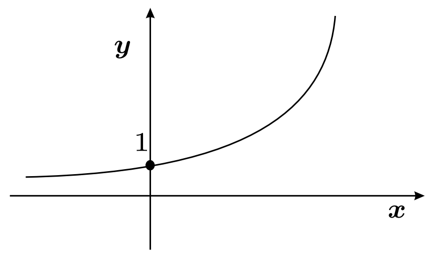


Figura 6.3: Gráfica de la función $e^{\lambda x}$ para $\lambda > 0$.

De hecho, cualquier función del tipo $h(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda > 0$ tiene, cualitativamente, el mismo tipo de gráfica que la función básica e^x. Esto es, $h(x)$ satisface,

a. $h(0) = e^{\lambda(0)} = e^0 = 1$

b. $h(x)$ es creciente y positiva

c. $\lim_{x\to-\infty} e^{\lambda x} = 0$

d. $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty$

Esto se muestra en la figura 6.3. $\triangleright$

7. Trace el dibujo de la gráfica de la función

$$f(x) = e^{-3x}$$

$\triangleleft$ Utilizando la evaluación de una serie de argumentos mostrados en la siguiente tabla

Tabulación							
x	-3	-2	-1	-0.8	-0.6	-0.3	-0.1
e^{-3x}	8103.0	403.4	20.08	11.02	6.049	2.459	1.349

Tabulación								
x	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1	2	3
e^{-3x}	1	1.740	0.548	0.301	0.090	0.049	0.002	0.001

podemos construir la gráfica de esta función.

Podemos además observar que la función $f(x) = e^{-3x}$ satisface

a. $f(0) = e^{-3(0)} = e^0 = 1$

b. $f(x)$ es decreciente y positiva.

c. Para argumentos negativos x próximos de $-\infty$ se tienen los valores muy grandes próximos a ∞, esto es,

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-3x} = \infty$$

d. Para argumentos positivos x próximos de ∞ se tienen valores muy pequeños próximos a cero esto es,

$$\lim_{x \to \infty} e^{-3x} = 0$$

Los elementos de la anterior discusión se pueden observar en la gráfica mostrada en la figura 6.4.

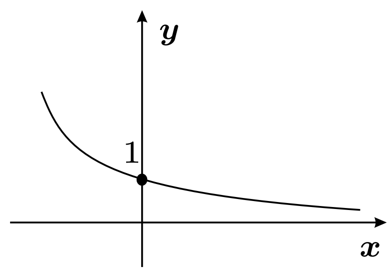


Figura 6.4: Gráfica de la función $e^{\lambda x}$ para $\lambda < 0$

Un proceso inductivo nos mostraría que cualquier función del tipo $h(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda < 0$ se comporta de la misma forma que la función e^{-3x}, es decir, cumple los puntos **a.**, **b.**, **c.** y **d.** antes mencionados. Esto nos indica que su gráfica, cualitativamente, es la misma que la de la función dada e^{-3x}, como se muestra en la figura 6.4. $\triangleright$

8. Construir la gráfica de la función $f(x) = -e^x$

$\triangleleft$ En virtud de que se tiene la gráfica de e^x, entonces la gráfica de la función $f(x) = -e^x$ se obtiene al reflejar los valores de e^x simétricamente respecto al eje x, como se muestra en la figura 6.5.

Podemos notar lo siguiente de esta función.

a. $f(0) = -e^0 = -1$

b. $f(x)$ es decreciente y negativa.

c. $\lim_{x \to -\infty}(-e^x) = 0$

d. $\lim_{x \to \infty}(-e^x) = -\infty$

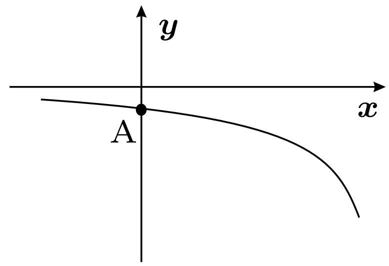


Figura 6.5: Gráfica de $Ae^{\lambda x}$ para $A < 0$ y $\lambda > 0$.

Anotamos que cualquier función del tipo $h(x) = Ae^{\lambda x}$ para $A < 0$ y $\lambda > 0$ tiene una gráfica con las mismas características que la que se ha mostrado en el caso especial $-e^x$. Más aún, esta función $h(x)$ satisface los puntos **c.** y **d.** obtenidos para el caso especial, con la salvedad de que $h(0) = A < 0$. Esto se ilustra en la figura 6.5. $\triangleright$

9. Construir la gráfica de la función $f(x) = Ae^{\lambda x}$ para $\lambda < 0$ y $A > 0$.

$\triangleleft$ La gráfica de esta función es esencialmente la misma que la gráfica de e^{-x} con la salvedad de que $f(0) = A > 0$, es decir, el corte con el eje y es a una altura $A > 0$. Si se reemplaza en la gráfica mostrada en la figura 5.4 la altura 1 por la altura $A > 0$, se obtiene sin ningún esfuerzo la gráfica de la función pedida (véase la figura 6.6).

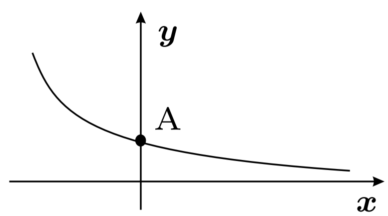


Figura 6.6: Gráfica de la función $f(x) = Ae^{\lambda x}$ para $\lambda < 0$ y $A > 0$.

Para ilustrar, la función $g(x) = 6e^{-3x}$ tiene la misma gráfica que e^{-3x} pero cortando, a una altura 6, al eje y. $\triangleright$

10. Construir la gráfica de la función $f(x) = -4e^{-3x}$

$\triangleleft$ Si consideramos inicialmente la función e^{-3x} cuya gráfica ya hemos realizado, para trazar la gráfica de la nueva función dada $f(x) = -4e^{-3x}$, es necesario reflejar respecto al eje x la gráfica de e^{-3x}, considerando que $f(0) = -4$ nos da el corte con el eje y, como se muestra en la figura 6.7.

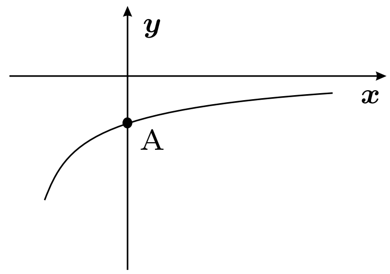


Figura 6.7: Gráfica de $Ae^{\lambda x}$ para $A, \lambda < 0$.

Observamos que la gráfica de esta función satisface las siguientes condiciones.

a. $f(0) = -4$

b. $f(x)$ es creciente ($\lambda < 0$ y $A < 0$) y negativa.

c. $\lim_{x \to -\infty}(-4e^{-3x}) = -\infty$

d. $\lim_{x \to \infty}(-4e^{-3x}) = 0$

Un proceso simple de generalización nos muestra que la gráfica de toda función del tipo $h(x) = Ae^{\lambda x}$ con $A < 0$, $\lambda < 0$ se comporta de igual forma que la gráfica de $-4e^{-3x}$, con la salvedad de que $h(0) = A < 0$ nos da el corte con el eje y. Esto se ilustra en la figura 6.7. $\triangleright$

11. Dibuje la gráfica de la función $f(x) = 5 - 4e^{-2x}$

$\triangleleft$ Ya que el elemento 5 dentro de la función realiza apenas un levantamiento por 5 unidades de la gráfica de la función $-4e^{-2x}$, entonces es suficiente con dibujar ésta última gráfica y recorrerla 5 unidades, sobre el eje y, hacia arriba.

Debido al comportamiento de la gráfica de la función $-4e^{-2x}$, tenemos que $f(x)$ satisface las siguientes condiciones.

a. $f(0) = 5 - 4e^{-2(0)} = 5 - 4 = 1$

b. f es creciente ($\lambda < 0$, $A < 0$)

c. $\lim_{x \to -\infty}(5 - 4e^{-2x}) = -\infty$

d. $\lim_{x \to \infty}(5 - 4e^{-2x}) = 5$

Debido a los incisos **c.** y **d.**, que nos muestran que los valores de la función son negativos para argumentos próximos de $-\infty$ y para argumentos próximos de ∞ sus valores son positivos, se tiene que la gráfica de esta función cruza el eje x para algún punto $x^* \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, existe $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$, y procedemos a calcularlo explícitamente. Tenemos que,

$$f(x^*) = 0 \iff 5 - 4e^{-2x^*} = 0$$

y así ,

$$5 - 4e^{-2x^*} = 0 \iff 5 = 4e^{-2x^*} \iff \frac{5}{4} = e^{-2x^*}$$

(aplicando ln de cada lado) $\iff \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln e^{-2x^*} = -2x^*$ (debido a que ln y e son inversas)

$$\iff x^* = -\frac{1}{2}\ln(5/4) = -0.1115$$

Por lo tanto, en el punto $x^* = \frac{-\ln(5/4)}{2} = -0.1115$ la función $f(x) = 5 - 4e^{-2x}$ tiene una **raíz** debido a que $f(x^*) = 0$, lo que geométricamente significa que su gráfica tiene un corte con el eje x. La figura 6.8 ilustra la gráfica de esta función. $\triangleright$

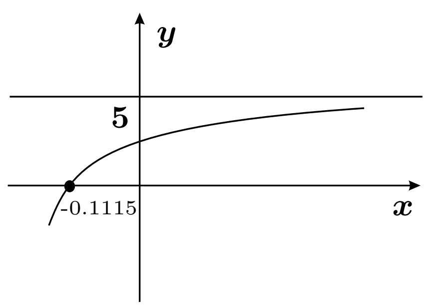


Figura 6.8: Gráfica de la función $f(x) = 5 - 4e^{-2x}$.

12. Trazar la gráfica de la función $f(x) = -2 + 4e^{3x}$

$\triangleleft$ De igual forma que en el ejercicio anterior, la gráfica de esta función depende del comportamiento de la función $4e^{3x}$ cuya gráfica ya podemos reconocer, en virtud de que el elemento -2 es sólo un modificador de esta última función que bajará su gráfica en dirección del eje y apenas dos unidades.

Es claro que $f(x)$ satisface las siguientes condiciones.

a. $f(0) = -2 + 4e^{3(0)} = -2 + 4 = 2$

b. f es creciente $(\lambda > 0,\ A > 0)$

c. $\lim_{x\to-\infty}(-2+4e^{3x}) = -2$

d. $\lim_{x\to\infty}(-2+4e^{3x}) = \infty$

Nuevamente, de los dos últimos incisos se tiene que la función f tiene una raíz x^*, la que encontramos al resolver la siguiente ecuación .

$$f(x^*) = 0 \iff -2+4e^{3x^*} = 0 \iff 4e^{3x^*} = 2$$

$$\iff e^{3x^*} = \tfrac{2}{4} \iff \text{(al tomar ln de cada lado)} \ln e^{3x^*} = \ln\left(\tfrac{2}{4}\right)$$
$$\iff \text{(ya que ln y } e \text{ son inversas) } 3x^* = \ln(1/2)$$

$$\iff x^* = \frac{\ln(1/2)}{3} = \frac{\ln 1 - \ln 2}{3} = -\frac{\ln 2}{3} = -0.231$$

lo que nos dice que la gráfica de f cruza el eje x en el punto $x^* = -0.231$.

La figura 6.9 ilustra la gráfica de esta función exponencial. $\triangleright$

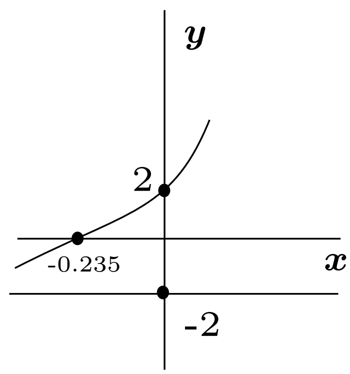


Figura 6.9: Gráfica de la función $f(x) = -2+4e^{3x}$.

13. Trazar la gráfica de la función $f(x) = -4+3e^{-2x}$

$\triangleleft$ En virtud de que esta función depende del comportamiento de la función $3e^{-2x}$, no es difícil verificar que satisface las siguientes condiciones.

a. $f(0) = -4+3e^{-2(0)} = -4+3 = 1$

b. f es decreciente ($\lambda < 0$ y $A > 0$)

c. $\lim_{x\to-\infty}(-4+3e^{-2x}) = \infty$

d. $\lim_{x\to\infty}(-4+3e^{-2x}) = -4$

De lo últimos incisos tenemos que existe una raíz x^* para la función f, es decir, un punto x^* tal que, $f(x^*) = 0$. Calculamos tal punto mediante la solución de la última ecuación.

$$f(x^*) = 0 \iff -4 + 3e^{2x^*} = 0 \iff 3e^{-2x^*} = 4$$

$$\iff e^{-2x^*} = \tfrac{4}{3} \iff \text{(aplicando ln de cada lado) } -2x^* = \ln\left(\tfrac{4}{3}\right)$$

$$\iff x^* = \frac{\ln(4/3)}{-2} = -0.143$$

La figura 6.10 nos muestra la gráfica de esta función. $\triangleright$

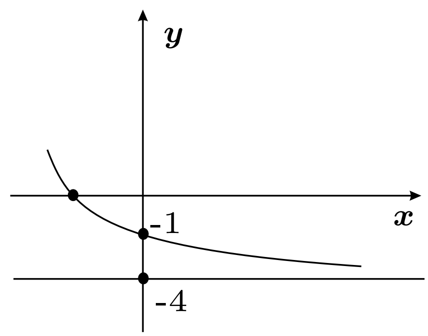


Figura 6.10: Gráfica de $f(x) = -4 + 3e^{-2x}$.

14. Trace la gráfica de la función $f(x) = 3 + 2e^{-x}$

$\triangleleft$ La gráfica de la función tiene las siguientes propiedades.

a. $f(0) = 3 + 2e^{-(0)} = 3 + 2 = 5$

b. f decrece ($\lambda < 0$ y $A > 0$) y es positiva.

c. $\lim_{x\to-\infty}(3 + 2e^{-x}) = \infty$

d. $\lim_{x\to\infty}(3 + 2e^{-x}) = 3$

Los puntos **b.**, **c.**, y **c.** nos indican que, probablemente, la gráfica de la función no tiene intersección con el eje x. Analíticamente, lo anterior se comprueba al tratar de resolver la ecuación $f(x^*) = 0$ para algún argumento $x^* \in \mathbb{R}$, lo cual se realiza mediante la siguiente serie de cálculos.

$$f(x^*) = 0 \iff 3 + 2e^{-x^*} = 0 \iff 2e^{-x^*} = -3$$

$$\iff e^{-x^*} = -\frac{3}{2} \iff -x^* = \ln\left(\frac{-3}{2}\right)$$

La última igualdad no es posible debido a que el dominio de la función ln es el conjunto de números reales positivos, y $x = -3/2$ no es un elemento de tal conjunto. Por lo tanto, $f(x^*) = 0$ no es posible, lo que nos indica que no hay cortes con el eje x.

La figura 6.11 ilustra el trazo de la gráfica de esta función. $\triangleright$

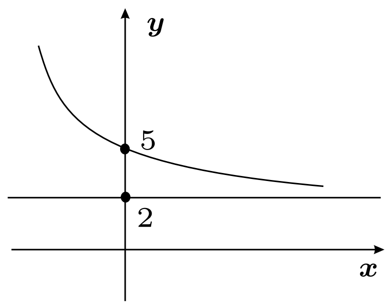


Figura 6.11: Gráfica de $f(x) = 3 + 2e^{-x}$.

15. La mutación es fuente básica de la diversidad genética y es un conjunto de cambios en la estructura química de los genes. Si un gene particular cambia con rapidez constante m y si se desprecian otras fuerzas de evolución, la frecuencia F del gene original después de t generaciones está dada por $F(t) = F_0 e^{t\ln(1-m)}$, donde F_0 es la frecuencia inicial.

a. Despeje la variable t.

b. Si $m = 4.5 \times 10^{-6}$, ¿después de cuántas generaciones será $F = \frac{1}{3}F_0$?

$\triangleleft$ De la relación $F = F_0 e^{t\ln(1-m)}$ se tiene que,

$$F = F_0 e^{t\ln(1-m)} \iff \frac{F}{F_0} = e^{t\ln(1-m)}$$

$$\iff \ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = t\ln(1-m) \iff \frac{\ln(F/F_0)}{\ln(1-m)} = t$$

es decir,

$$t = \frac{\ln(F/F_0)}{\ln(1-m)}$$

define a la variable generacional t, lo que responde el inciso **a.**

Cuando $m = 4.5 \times 10^{-6}$ se tiene la relación

$$F = F_0 e^{t\ln(1-4.5\times 10^{-6})}$$

de donde, $F = \frac{F_0}{3}$ si y sólo sí , se cumple la igualdad

$$t = \frac{\ln[(F_0/3)/F_0]}{\ln(1 - 4.5 \times 10^{-6})} = \frac{\ln(1/3)}{\ln(1 - 4.5 \times 10^{-6})} = \frac{-1.098612}{-0.0000045}$$

$$= 244136 \quad \text{generaciones.} \quad \triangleright$$

16. El yodo radiactivo $^{131}\mathrm{I}$ se usa en estudios de exploración de la glándula tiroides. Una cantidad $N = N(t)$, se desintegra según la fórmula $N(t) = N_0 e^{-(\frac{\ln 2}{8})t}$, donde N_0 es la dosis inicial y t el tiempo dado en días.

a. Dibuje la gráfica de esta función si $N_0 = 60$.

b. Calcule la vida media del yodo $^{131}\mathrm{I}$.

$\triangleleft$ Ya que $N(t) = N_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t}$, tomando $A = N_0 > 0$ y $\lambda = -\frac{\ln 2}{8} = -0.0866 < 0$, para la lista de gráficas dadas en los ejercicios 6-14, tenemos una gráfica semejante a la del ejercicio 9. Las condiciones son

a. $N(0) = N_0 > 0$ es la dosis inicial.

b. $N(t)$ es decreciente y positiva.

c. $\lim_{t\to\infty}(N_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t}) = 0$

Los incisos **b.** y **c.** indican que la cantidad $N(t)$ se está desintegrando y que finalmente ($t \to \infty$) se desintegrará en su totalidad, como se indica en la figura 6.12.

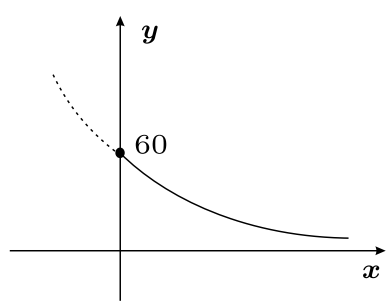


Figura 6.12: Desintegración del yodo $^{131}\mathrm{I}$.

Por otro lado, la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo necesario para que una determinada cantidad N_0 se desintegre a su mitad.

Esto es, sea N_0 cualquier cantidad de yodo, entonces buscamos un tiempo t^* tal que

$$N(t^*) = \frac{1}{2} N_0$$

es decir, t^* debe satisfacer la ecuación

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t^*}$$

la cual se resuelve mediante la siguiente cadena de igualdades,

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t^*} \iff \frac{1}{2} = e^{-\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t^*}$$

$$\iff \ln(1/2) = -\left(\frac{\ln 2}{8}\right)t^* \iff t^* = \frac{\ln(1/2)}{(-\ln 2)/8} \iff t^* = 8$$

Esto es $t^* = 8$ días es la vida media del yodo ^{131}I. $\triangleright$

17. En un estanque se "siembran" 4 000 individuos. Cuatro meses después se estima que quedan 1600. Encuentra la función $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ para determinar el número de individuos sobrevivientes después de t meses.

$\triangleleft$ Si se tiene la relación $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ para el tiempo en meses y el número de sobrevivientes N, entonces para $t = 0$ tenemos $N(0) = 4000$ individuos, es decir,

$$4000 = N(0) = N_0 e^{\lambda(0)} = N_0 e^0 = N_0$$

Esto nos indica que $N_0 = 4000$ es el número inicial de sobrevivientes. De esto que la relación sea del tipo

$$N(t) = 4000e^{\lambda t}$$

donde el parámetro λ se puede determinar.

En virtud de que para $t = 4$ meses se tienen 1600 individuos, entonces

$$1600 = N(4) \iff 1600 = 4000e^{\lambda(4)} = 4000e^{4\lambda}$$

$$\iff \frac{1600}{4000} = e^{4\lambda} \iff \ln\left(\frac{2}{5}\right) = 4\lambda \iff \lambda = \frac{\ln(2/5)}{4}$$

lo cual nos dice que

$$\lambda = \frac{\ln(2/5)}{4} = -0.2290$$

De esta forma, la relación completa obtenida es,

$$N(t) = 4000e^{-0.229t} \quad \triangleright$$

18. El peso P de un grano de maíz durante sus primeras 4 semanas de crecimiento está dada por una relación del tipo

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}$$

donde el tiempo t está dado en días y el peso P en mg. A los 10 días se pesa un grano y en promedio se tiene un peso de 180 mg. A los 20 días se tiene un peso para el mismo grano de 803 mg.

a. ¿Cuánto pesa, en promedio, un grano de maíz cuando brota?

b. ¿Cuál es su peso a los 28 días?

$\triangleleft$ De la relación $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$ tenemos, al evaluar en $t = 10$ y $t = 20$

$$\begin{cases} 180 = P(10) = P_0 e^{\lambda(10)} = P_0 e^{10\lambda} \\ 803 = P(20) = P_0 e^{\lambda(20)} = P_0 e^{20\lambda} \end{cases}$$

es decir, tenemos el sistema de ecuaciones con las incógnitas P_0 y λ,

$$\begin{cases} 180 = P_0 e^{10\lambda} \\ 803 = P_0 e^{20\lambda} \end{cases}$$

que son parámetros que definen el proceso de crecimiento.

Si dividimos la segunda ecuación entre la primera miembro a miembro se tiene que

$$\frac{803}{180} = \frac{P_0 e^{20\lambda}}{P_0 e^{10\lambda}} = \frac{P_0}{P_0}\,\frac{e^{20\lambda}}{e^{10\lambda}} = e^{20\lambda - 10\lambda} = e^{10\lambda}$$

lo cual implica que,

$$\frac{803}{180} = e^{10\lambda}$$

Al aplicar ln de cada lado se obtiene

$$\frac{803}{180} = e^{10\lambda} \iff \ln\left(\frac{803}{180}\right) = \ln e^{10\lambda} \iff \ln\left(\frac{803}{180}\right) = 10\lambda$$

lo que nos indica que

$$\lambda = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{803}{180}\right) = 0.149$$

Sustituyendo el valor de λ en la primer ecuación del sistema se sigue que

$$180 = P_0 e^{10\lambda} = P_0 e^{10(0.149)} = P_0 e^{1.49}$$

lo cual implica entonces que

$$P_0 = \frac{180}{e^{1.49}} = \frac{180}{4.437} = 40.56$$

Ya que $t = 0$ se considera el tiempo de brote del grano y $P(0) = P_0 e^{\lambda(0)} = P_0$, entonces P_0 es peso inicial de dicho grano, es decir, $P_0 = 40.56$ mg, lo que responde la primer pregunta.

Por otro lado, ya habiendo calculado λ y P_0, se tiene que la relación total que describe el peso en las primeras 4 semanas es

$$P(t) = 40.56e^{0.149t}$$

De esta manera, al final de la 4 semana, poniendo $t = 28$, obtenemos

$$P(28) = 40.56e^{0.149(28)} = 2593.8 \text{ mg}$$

para el peso del grano de maíz. $\triangleright$

19. Considere la función **logística** que predice la población humana, con fricción, de cierto lugar del planeta. Tal función está dada en años por la fórmula

$$N(t) = \frac{\lambda N_0}{pN_0 + (\lambda - pN_0)e^{-\lambda t}}$$

Tome los valores de $\lambda = 0.03$, $p = 1.58 \times 10^{-10}$ y una población inicial de $N_0 = 80000000 = 8 \times 10^7$. Si el tiempo inicial $t = 0$ es el año de 1994.

a. ¿Cuántos habitantes había en el año 2000 en esa región de la Tierra?

b. ¿En qué año había 60 000 000 habitantes según esa relación?

$\triangleleft$ Para los valores dados se tiene una relación

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{(0.03)(8 \times 10^7)}{(1.58 \times 10^{-10})(8 \times 10^7) + [0.03 - (1.58 \times 10^{-10})(8 \times 10^7)]e^{-0.03t}} \\ &= \frac{2400000}{0.01264 + 0.01736e^{-0.03t}} \end{aligned}$$

Si $t = 0$ es 1994, entonces $t = 6$ es el año 2000 y para ese año se tienen $N(6)$ habitantes, es decir,

$$\begin{aligned} N(6) &= \frac{2.4 \times 10^6}{0.01264 + 0.01736e^{-0.03(6)}} = \frac{2.4 \times 10^6}{0.0126 + 0.01736(0.8352)} \\ &= \frac{2.4 \times 10^6}{0.02713} = 88\,462\,956 \quad \text{individuos.} \end{aligned}$$

lo que responde la primer pregunta.

Para responder sobre cuándo había 60 000 000= 6×10^7 habitantes, se busca t^* tal que $N(t^*)$=60 000 000. Esto es, un tiempo t^* tal que resuelva la ecuación

$$60\,000\,000 = \frac{2.4 \times 10^6}{0.01264 + 0.1736e^{-0.03t^*}}$$

Tal ecuación se resuelve para t^* mediante,

$$6 \times 10^7 = \frac{2.4 \times 10^6}{0.01264 + 0.01736e^{-0.03t^*}}$$

$$\iff 0.01264 + 0.01736e^{-0.03t^*} = \frac{2.4 \times 10^6}{6 \times 10^7}$$

$$\iff 0.01736e^{-0.03t^*} = 0.0375 - 0.01264 = 0.02486$$

$$\iff e^{-0.03t^*} = \frac{0.02486}{0.01736} = 1.4320 \iff -0.03t^* = \ln(1.4320) = 0.3590$$

$$\iff t^* = \frac{0.3590}{-0.03} = -11.96 \approx -12$$

Ya que $t = 0$ es 1994 entonces $t = -12$ es el año de 1982, esto es, en 1982 había aproximadamente 60 000 000 de habitantes. $\triangleright$

20. En un laboratorio se realiza un experimento para calcular una relación que indique el número de pobladores de *Paramecium caudatum* en un tiempo determinado t. Se halló la siguiente función

$$N(t) = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1t}}$$

la cual estaba expresada para tiempos dados en días.

a. ¿Cuántos pobladores habían iniciado el experimento?

b. ¿Cuántos habían al iniciar el segundo día?

c. ¿Cuántos días se necesitarían para tener un número $N = 225$ de pobladores?

d. ¿Se podrían tener para algún tiempo 410 pobladores?

$\triangleleft$ **a.** El número de pobladores que iniciaron el experimento se calcula evaluando el argumento $t = 0$, es decir,

$$N(0) = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1(0)}} = \frac{400}{1 + 19e^{0}} = \frac{400}{20} = 20$$

individuos iniciaron el experimento.

b. Aquí es necesario recordar que el primer día del experimento corresponde a $t = 0$, mientras que el segundo día del experimento corresponde a $t = 1$, en virtud de que ha transcurrido un día. Por esto, en el segundo día ($t = 1$) había

$$N(1) = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1(1)}} = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1}} = \frac{400}{1.855} \approx 216$$

individuos.

c. Ahora buscamos un tiempo t^* tal que $N(t^*) = 225$, es decir, necesitamos resolver la ecuación

$$225 = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1t^*}} \iff 1 + 19e^{-3.1t^*} = \frac{400}{225} = 1.7777$$

$$\iff 19e^{-3.1t^*} = 1.7777 - 1 = 0.7777 \iff e^{-3.1t^*} = \frac{0.7777}{19} = 0.0409$$

$$\iff -3.1t^* = \ln(0.0409) = -3.1957 \iff t^* = \frac{-3.1957}{-3.1} = 1.030$$

Esto es, para tener 225 individuos se necesita que transcurra poco más de un día.

d. Un proceso análogo al inciso **c.** nos llevará a buscar t^* tal que $N(t^*) = 410$. Esto es, nos llevará a la cadena de igualdades,

$$410 = \frac{400}{1 + 19e^{-3.1t^*}} \iff 1 + 19e^{-3.1t^*} = \frac{400}{410} = 0.9756$$

$$\iff 19e^{-3.1t^*} = 0.9756 - 1 = 0.0243 \iff e^{-3.1t^*} = \frac{-0.0243}{19} = -0.0012$$

Esta última igualdad no es posible ya que la exponencial es positiva. De esta forma, no se puede tener un número de 410 pobladores para tiempo t alguno. $\triangleright$

21. Considere la relación funcional que hace depender la talla L de cierto crustáceo conforme a su edad t, y que viene dada por la fórmula

$$L(t) = 19.94\,[1 - e^{-0.27(t+0.3)}]$$

donde las unidades de t se dan en meses, y las de L se dan en cm.

a. Despeje la edad t en función de la talla L.

b. ¿Qué tiempo se necesitaría para que la longitud de un individuo fuese $L = 3$ cm?

$\triangleleft$ **a.** De la fórmula

$$L = 19.94[1 - e^{-0.27(t+0.3)}]$$

despejamos a t mediante la siguiente cadena de equivalencias

$$L = 19.44[1 - e^{-0.27(t+0.3)}] \iff \frac{L}{19.94} = 1 - e^{-0.27(t+0.3)}$$

$$\iff e^{-0.27(t+0.3)} = 1 - \frac{L}{19.94} \iff -0.24(t + 0.3) = \ln\left(1 - \frac{L}{19.94}\right)$$

$$\iff t + 0.3 = \frac{\ln\left(1 - \frac{L}{19.94}\right)}{-0.27} \iff t = -0.3 - \frac{\ln\left(1 - \frac{L}{19.94}\right)}{0.27}$$

es decir, la edad t depende de la tabla L mediante la relación

$$t = -0.3 - \frac{\ln\left(1 - \frac{L}{19.94}\right)}{0.27}$$

b. Si en la anterior fórmula ponemos $L = 3$ entonces

$$t = 0.3 - \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{19.94}\right)}{0.27} = 0.9038 \quad \text{meses}$$

el cual es el tiempo necesario para que un individuo consiga una talla de $L = 3$ cm. $\triangleright$

22. Considere las siguientes funciones que relacionan las variables de edad t, peso W y talla L de una especie,

$$L = L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_{\text{mín}})e^{-\beta t}$$

$$W = W(L) = \lambda L^\alpha$$

donde L_∞ es la talla máxima de algún individuo, $L_{\text{mín}}$ es la talla mínima que puede tener un individuo cuando nace, y los parámetros α, λ y β son propios de la población con que se está tratando. Escriba el peso en función de la edad t, haciendo la composición de las funciones correspondientes. Exprese a la edad t en función del peso.

$\triangleleft$ De las igualdades

$$L = L(t) = L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}$$

$$W = W(L) = \lambda L^\alpha$$

se tiene, al componerlas,

$$W = W(L(t)) = \lambda[L(t)]^\alpha = \lambda[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]^\alpha$$

esto es,

$$W = W(t) = \lambda[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]^\alpha$$

nos da el peso de un individuo en función de la edad.

Así de esta relación, despejamos a t mediante la siguiente cadena de equivalencias, y obtenemos

$$W = \lambda[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]^\alpha$$

$$\iff \frac{W}{\lambda} = [L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]^\alpha$$

$$\iff \ln\left(\frac{W}{\lambda}\right) = \ln[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]^\alpha = \alpha \ln[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]$$

$$\iff \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{W}{\lambda}\right) = \ln[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]$$

$$\iff \ln\left(\frac{W}{\lambda}\right)^{1/\alpha} = \ln[L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}]$$

$$\iff \text{(cancelamos ln de cada lado)} \quad \left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = L_\infty - (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t}$$

$$\iff (L_\infty - L_{min})e^{-\beta t} = L_\infty - \left(\frac{W}{\lambda}\right)^{1/\alpha} \iff e^{-\beta t} = \frac{L_\infty - \left(\frac{W}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{L_\infty - L_{min}}$$

$$\iff -\beta t = \ln\left(\frac{L_\infty - \left(\frac{W}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{L_\infty - L_{min}}\right) \iff t = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{L_\infty - \left(\frac{W}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{L_\infty - L_{min}}\right)$$

Esto es, la, edad en función del peso está dada por

$$t = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{L_\infty - \left(\frac{W}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{L_\infty - L_{min}}\right) \qquad \triangleright$$

23. Muchos problemas necesitan para su solución fórmulas del tipo

$$V = \frac{\lambda T}{P}$$

lo cual nos dice que el volumen V de una masa de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T, e inversamente proporcional a la presión absoluta P. Aquí λ es una constante de proporcionalidad.

En dos casos distintos de condiciones para la presión, el volumen y la temperatura, de una misma masa de gas, tenemos

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \lambda$$

para la primera condición, y

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \lambda$$

para el segundo conjunto de condiciones.

Usemos unidades de tal forma que P y T estén expresadas en escalas absolutas. Comúnmente, P se expresa en atmósferas, y T en grados Kelvin.

De las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\lambda = \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Para expresar la relación entre la presión y el volumen de una masa de gas durante una comprensión o una expansión, omitiendo posibles cambios de temperatura, por consideraciones termodinámicas se tiene la relación

$$PV^n = c$$

donde n y c son constantes que dependen del gas utilizado.

Análogamente al proceso anterior, para una pareja de condiciones en una misma masa. En estas condiciones, podemos escribir

$$P_1 V_1^n = c \quad \text{y} \quad P_2 V_2^n = c$$

de donde se obtiene

$$c = P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

a. Demostrar la igualdad

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$$

b. Demostrar que también se cumple la igualdad

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

c. Demostrar la igualdad

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

d. Concluir que se cumple la igualdad

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

e. Hallar la presión final de cierta cantidad de gas, si se disminuye su volumen de 230 a 160 litros. P_1 es la presión atmosférica de 1.05 kg/cm^2 y $n = 1.45$.

f. Mostrar que si $n = 0$, entonces la presión es constante; que si $n = 1$, la temperatura es constante, y que si $n = \infty$, el volumen es constante.

g. Calcular n, si la presión de 220 litros de gas aumenta de 1 a 2 atm, cuando su volumen disminuye hasta 127 litros.

$\triangleleft$ **a.** De la pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \\ P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \end{cases}$$

despejamos $\frac{P_1}{P_2}$ en cada igualdad, obteniendo

$$\begin{cases} \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{V_2}{V_1} \\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2^n}{V_1^n} \end{cases}$$

Al igualar estas ecuaciones mediante $\frac{P_1}{P_2}$, se tiene

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2^n}{V_1^n}$$

lo que implica

$$\frac{T_1}{T_2}\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2^n}{V_1^n} \iff \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}\frac{V_2^n}{V_1^n} = \frac{V_1}{V_1^n}\frac{V_2^n}{V_2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{V_1^{n-1}} V_2^{n-1} = \frac{V_2^{n-1}}{V_1^{n-1}}$$

es decir,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$$

b. Al considerar la igualdad obtenida en **a.** y al tomar ln de cada lado se tiene

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1} \iff \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$$

$$\iff \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = (n-1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \iff \frac{1}{n-1}\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\iff \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Al cancelar de cada lado ln se tiene finalmente

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{V_2}{V_1}$$

es decir,

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

c. De la relación $P_1V_1^n = P_2V_2^n$, al despejar las presiones se tiene

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2^n}{V_1^n} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$

$$\Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n \ \Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = n \ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ \frac{1}{n}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \ \Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/n} = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/n} = \frac{V_2}{V_1} \ \Longleftrightarrow \ \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/n}$$

Al sustituir esta última igualdad en la obtenida en **a.** se sigue que

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1} = \left(\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}(n-1)} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

es decir,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

d. De la última igualdad, al tomar ln de cada lado se cumple la siguiente cadena de equivalencias.

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ \Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \ \Longleftrightarrow \ \left(\frac{n}{n-1}\right)\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \ \Longleftrightarrow \ \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{P_1}{P_2}$$

esto es,

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

e. Sea P_2 la presión final del gas bajo las condiciones $V_1 = 230$, $V_2 = 160$. De la ecuación $P_1V_1^n = P_2V_2^n$ se tiene, en virtud de que $P_1 = 1.05$ y $n = 1.45$,

$$P_2 = P_1\frac{V_1^n}{V_2^n} = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = 1.05\left(\frac{230}{160}\right)^{1.45} = 1.77\,\mathrm{kg/cm.}^2$$

f. De la ecuación

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

se sigue que si $n = 0$, entonces

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{0}{-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^0 = 1 \iff P_1 = P_2$$

es decir, P_1 y P_2 son iguales para cualquier pareja de condiciones, o en otras palabras, la presión es constante.

De la relación

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$$

tenemos que si $n = 1$, entonces

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^0 = 1 \iff T_1 = T_2$$

es decir, la temperatura es este caso es constante.

Debido a que la cantidad $\frac{1}{n-1}$ es pequeña si n es grande, entonces cuando $n = \infty$ tal cantidad es cero. Esto implica que

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^0 = 1 \iff V_2 = V_1$$

es decir, el volumen es constante.

g. De la relación

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2^n}{V_1^n} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$

para el caso $V_1 = 220$, $V_2 = 127$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ se tiene

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{127}{220}\right)^n \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{127}{220}\right)^n$$

$$\iff \ln(1/2) = n\ln\left(\frac{127}{220}\right) \iff \frac{\ln(1/2)}{\ln\left(\frac{127}{220}\right)} = n$$

$$\iff n = \frac{\ln(1/2)}{\ln\left(\frac{127}{220}\right)} = \frac{-0.6931}{-0.5494}$$

es decir, $n = 1.26$ $\triangleright$

24. Un litro de solución salina contiene sedimento en suspensión. El sedimento se elimina mediante el siguiente proceso: se deja que se deposite el fondo, parte de la solución limpia que queda por encima de él se transvasa reemplazándola por un volumen igual de agua pura, se agita y se deja reposar. Se repite este ciclo cuantas veces sea necesario. La función que permite calcular la concentración C de sedimento en este proceso es

$$C = C_n = C_0\left(\frac{1-w}{1}\right)^n$$

donde C_0 es concentración inicial de sal, $C = C_n$ es la concentración de sal después del paso n, w son los mililitros de solución retirada y sustituida por agua limpia en cada ciclo y n es el números de lavados realizados.

Suponga que se tienen las condiciones iniciales $C_0 = 16.1$ g por litro y $w = 250$ ml.

a. Calcule C para el paso $n = 10$.

b. Calcule aproximadamente el número de pasos n necesario para reducir $C = C_n$ a menos de 0.07 g por litro.

$\triangleleft$ Debido a que la concentración inicial es de $C_0 = 16.1$ g por litro y se retiran y remplazan $w = 250$ ml, la relación obtenida es,

$$C = C_n = 16.1\left(\frac{1-0.250}{1}\right)^n = 16.1(0.750)^n$$

a. Para $n = 10$ pasos se tiene una concentración por litro de

$$C_n = C_{10} = 16.1\,(0.750)^{10} = 0.906\text{g}$$

b. Para este caso, buscamos un número entero n tal que en ese paso $C_n = 0.07$, es decir, tal que se satisfaga la ecuación

$$0.07 = 16.1\,(0.750)^n$$

la cual resolvemos usando logaritmos.

$$0.07 = 16.1(0.750)^n \iff \frac{0.07}{1.61} = (0.750)^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{0.07}{16.1}\right) = \ln(0.750)^n \iff \ln\left(\frac{0.07}{16.1}\right) = n\ln(0.750)$$

$$\iff n = \frac{\ln\left(\frac{0.07}{16.1}\right)}{\ln(0.750)} = \frac{-5.4380}{-0.2876} = 18.90$$

En otras palabras, después de 19 pasos quedarán menos de 0.07 g por litro de sal. $\triangleright$

25. Para medir flujo calorífico a través del aislante de una cañería, se suele calcular el llamado diámetro medio logarítmico, que se define por

$$D = \frac{D_2 - D_1}{2.3\,\log_{10}(D_2/D_1)}$$

donde D_1 es el diámetro exterior de la cañería y D_2 es el diámetro interior de la cubierta aislante.

Calcular D cuando el diámetro exterior de la cañería mide 4.0 cm y el espesor de la cubierta aislante mide 3.5 cm. Compare con la media aritmética de D_1 y D_2.

$\triangleleft$ Observamos que después de un cambio de base de $\log_{10}$ a ln, la relación queda

$$D = \frac{D_2 - D_1}{2.3\log_{10}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)} = \frac{D_2 - D_1}{2.3\frac{\ln(D_2/D_1)}{\ln(10)}} = \frac{D_2 - D_1}{\ln(D_2/D_1)} = \frac{D_2 - D_1}{\ln D_2 - \ln D_1}$$

debido a que $\ln 10 = 2.3$.

De esta manera, para el diámetro exterior $D_1 = 4.0$ y el diámetro de la cubierta aislante $D_2 = 3.5$ se tiene un diámetro medio logarítmico

$$D = \frac{D_2 - D_1}{\ln D_2 - \ln D_1} = \frac{3.5 - 4.0}{\ln 3.5 - \ln 4.0} = \frac{-0.5}{-0.135} = 3.7453$$

Por otro lado, la media aritmética de D_1 y D_2 es

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{4.0 + 3.5}{2} = \frac{7.5}{2} = 3.75$$

que es aproximado al valor obtenido. $\triangleright$

26. La acidez de una solución acuosa tiene que ver con la concentración de iones de hidrógeno en ella. La escala de pH se inventó para tener un método sencillo y cómodo que caracterizará la acidez de una solución.

Si $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro, entonces

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

Acorde a los siguientes rangos de pH se tiene para

$$pH < 7.0 \quad \text{una solucion ácida}$$

$$pH = 7.0 \quad \text{neutra}$$

$$pH > 7 \quad \text{básica o alcalina}$$

Nótese que, debido a la escala logarítmica de base 10, un cambio de tan sólo una unidad de pH representa un incremento o decremento de 10 veces en $[H^+]$. Por ejemplo, una solución con $pH = 4.0$ es 10 veces más ácida que otra con $pH = 5.0$ y 100 veces más ácida que una con $pH = 6.0$

$$0 \quad \overset{\text{más ácido}}{\longleftarrow} \quad 7 \text{ ó neutro} \quad \overset{\text{más alcalino}}{\longrightarrow} \quad 14$$

a. Si el agua pura a 25^0C tiene $[H^+] = 1 \times 10^{-7}$, calcule pH.

$$\lhd \quad pH = -\log_{10}[H^+] = \log_{10}(1 \times 10^{-7}) = 7$$

y se dice que su pH es neutro $\rhd$

b. Calcule el pH de una solución con una concentración $[H^+] = 2.5 \times 10^{-5}$

$\lhd$ Para este caso, sustituyendo simplemente se tiene que,

$$pH = -\log_{10}(2.5 \times 10^{-5}) = 4.6$$

la cual indica que la función es ácida.

c. Calcular $[H^+]$ la concentración de la sangre si su pH es 7.4.

$\lhd$ De la ecuación $pH = -\log_{10}[H^+]$, para $pH = 7.4$ se obtiene,

$$7.4 = \log_{10}[H^+] \iff -7.4 = \log_{10}[H^+] \iff 10^{-7.4} = [H^+]$$

$$\iff [H^+] = 3.98 \times 10^{-8}$$

27. Resolver las siguiente ecuaciones logarítmicas.

a. $\ln(6x-3) - \ln(4x-1) = \ln x$

◁ Primero buscamos condiciones para los argumentos logarítmicos, sabiendo que deben ser positivos.

$$6x - 3 > 0 \iff 6x > 3 \iff x > \frac{3}{6} \iff x \in (1/2, \infty)$$

$$4x - 1 > 0 \iff 4x > 1 \iff x > \frac{1}{4} \iff x \in (1/4, \infty)$$

$$x > 0 \iff x \in (0, \infty)$$

De esta manera, cualquier solución de tal ecuación deberá pertenecer al conjunto

$$(1/2, \infty) \cap (1/4, \infty) \cap (0, \infty) = (1/2, \infty)$$

Usando la propiedad **iii.** de ln tenemos

$$\ln(6x-3) - \ln(4x-1) = \ln x \iff \ln\left(\frac{6x-3}{4x-1}\right) = \ln x$$

$$\iff \frac{6x-3}{4x-1} = x \iff 6x - 3 = x(4x-1) \iff 6x - 3 = 4x^2 - x$$

$$\iff 4x^2 - x - 6x + 3 = 0 \iff 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\iff x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}$$

Esto es, la solución de la ecuación cuadrática es $x = 3/4,\ 1$.

Ya que ambas raíces están en el intervalo $(1/2, \infty)$, se sigue que ambas resuelven la ecuación inicial. ▷

b. $\ln(-4x + 12) + \ln 6x = \ln(1 - x)$

◁ Buscamos la condición sobre los argumentos logarítmicos.

$$-4x + 12 > 0 \iff 12 > 4x \iff \frac{12}{4} > x \iff x \in (-\infty, 3)$$

$$6x > 0 \iff x > 0 \iff x \in (0, \infty)$$

$$1 - x > 0 \iff 1 > x \iff x \in (-\infty, 1)$$

lo que indica que cualquier solución obtenida deberá estar en el conjunto

$$(-\infty, 3) \cap (0, \infty) \cap (-\infty, 1) = (0, 1)$$

Usando la propiedad **ii.** de ln se tiene que

$$\ln(-4x + 12) + \ln 6x = \ln[(-4x + 12)6x] = \ln(1 - x)$$

$$\iff \ln(-24x^2+72x)=\ln(1-x) \iff -24x^2+72x=1-x$$

$$\iff 24x^2-73x+1=0 \iff x=\frac{73\pm\sqrt{5233}}{48}$$

Solamente la raíz $x=\frac{73-\sqrt{5233}}{48}$ si está en el intervalo $(0,1)$ lo que implica que ésta es la solución a la ecuación. $\triangleright$

c. $\ln(12x-2)=4+\ln(x+8)$

$\triangleleft$ Al buscar el intervalo de definición para ambos logaritmos se tiene que

$$12x-2>0 \iff 12x>2 \iff x>\frac{1}{6} \iff x\in(1/6,\infty)$$

$$x+8>0 \iff x>-8 \iff x\in(-8,\infty)$$

De donde, las soluciones deberán de ser elementos del conjunto

$$(1/6-\infty)\cap(-8,\infty)=\left(\frac{1}{6},\infty\right)$$

De esta manera,

$$\ln(12x-2)=4+\ln(x+8) \iff \ln(12x-2)-\ln(x+8)=4$$

$$\iff \ln\left(\frac{12x-2}{x+8}\right)=4 \iff \frac{12x-2}{x+8}=e^4$$

$$\iff 12x-2=e^4(x+8) \iff 12x-2=e^4x+8e^4$$

$$\iff 12x-e^4x=8e^4+2 \iff (12-e^4)x=8e^4+2$$

$$\iff x=\frac{8e^4+2}{12-e^4}$$

Tal solución es negativa y, por lo tanto, no se encuentra en el intervalo $\left(\frac{1}{6},\infty\right)$, lo cual nos dice que la ecuación dada no tiene solución. $\triangleright$

28. Calcule el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x)=x^2+3\ln(1-x^2)$

$\triangleleft$ Necesariamente el argumento de la función ln debe ser positivo, es decir, $1-x^2>0$.

Esta desigualdad tiene como solución al intervalo $(-1,1)$, es decir, $\mathrm{Dom}(f)=(-1,1)$ $\triangleright$

b. $g(x) = x^3 \ln(4 - x^2) + x \ln(2x - 1) + \frac{4}{x-1}$

$\triangleleft$ Nuevamente, se tienen que cumplir las condiciones

$$4 - x^2 > 0, \quad 2x - 1 > 0, \quad x \neq 1$$

La primer desigualdad se resuelve en el intervalo $(-2, 2)$ y la segunda desigualdad en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Por lo tanto, el dominio de la función es el conjunto

$$(-2, 2) \cap \left(\frac{1}{2}, \infty\right) - \{1\} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \quad \triangleright$$

Recordamos que para la función $F(u) = \ln u$ se tienen las siguientes propiedades

i. $\ln 1 = 0$

ii. $\ln u < 0$ si $0 < u < 1$

iii. $\ln u > 0$ si $u > 1$

iv. Para $0 < u < 1$ pequeño se cumple que

$$\lim_{u \to 0^+} F(u) = \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$$

Esto es, la función $\ln u$ tiene una recta asíntota vertical en $u = 0$.

v. Para $u > 1$ grande se cumple que

$$\lim_{u \to \infty} F(u) = \lim_{u \to \infty} \ln u = +\infty$$

Dibuje la gráfica de las siguientes funciones.

29. $f(x) = \ln(3x - 2)$

$\triangleleft$ Primero calculamos su dominio considerando la condición $u = 3x - 2$, es decir,

$$3x - 2 > 0 \iff 3x > 2 \iff x > \frac{2}{3}$$

lo cual nos dice que el dominio es, $\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Repasamos ahora punto por punto de la observación dada.

i. $\ln(3x - 2) = 0 \iff 3x - 2 = 1 \iff 3x = 3 \iff x = 1$ lo que nos dice que la función f se anula en el punto $x = 1$

ii. $\ln(3x - 2) < 0 \iff 3x - 2 < 1 \iff 3x < 3 \iff x < 1$ es decir, $f(x)$ es negativa en el intervalo $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

iii. Usando la proposición complementaria, se tiene que $f(x)$ es positiva en el conjunto $(1, \infty)$.

iv. Ya que $u = 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$, entonces $3x - 2$ está cerca a cero si x está próximo a $\frac{2}{3}$ por la derecha. Por el inciso **ii.** se tiene entonces que

$$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^+} \ln(3x - 2) = -\infty$$

v. De manera análoga $u = 3x - 2$ es grande si y sólo sí x es grande. Por el inciso **iii.** se cumple entonces que

$$\lim_{x \to \infty} \ln(3x - 2) = +\infty$$

La gráfica de la función mostrada en la figura 6.13 nos muestra que es creciente con una asíntota vertical en $x = \frac{2}{3}$. $\triangleright$

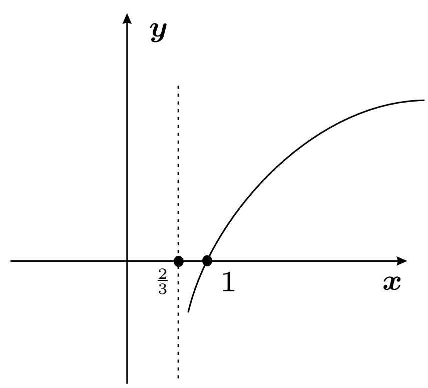


Figura 6.13: Gráfica de la función $\ln(3x - 2)$.

30. $g(x) = \ln(1 - 4x)$

$\triangleleft$ Para encontrar su dominio, resolvemos la desigualdad $1 - 4x > 0$ que impone la condición de argumentos positivos para ln .

$$1 - 4x > 0 \iff 1 > 4x \iff \frac{1}{4} > x \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$$

Por lo tanto, el dominio de la función es $\mathrm{Dom}(g) = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

i. $\ln(1 - 4x) = 0 \iff 1 - 4x = 1 \iff 0 = 4x \iff x = 0$ lo que nos dice que la función $g(x)$ corta el eje x en el punto $x = 0$.

ii. $\ln(1-4x) < 0 \iff 0 < 1-4x < 1 \iff -1 < -4x < 0 \iff \frac{1}{4} > x > 0$ lo que nos indica que $\ln(1-4x)$ es negativo en el intervalo $(0, 1/4)$.

iii. Consecuentemente, $\ln(1-4x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$.

iv. Ya que $u = 1-4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$, entonces para puntos x próximos a la izquierda de $\frac{1}{4}$ la cantidad $1-4x$ está próxima a cero. Por el inciso **ii.** se tiene entonces que

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{4}\right)^-} \ln(1-4x) = -\infty$$

v. Inversamente, la cantidad $u = 1-4x > 0$ es grande si x está próximo a $-\infty$, lo que implica que

$$\lim_{x \to -\infty} (1-4x) = \infty$$

La gráfica en la figura 6.14 muestra que esta función es decreciente con una asíntota vertical en $u = 1-4x = 0$, es decir en $x = \frac{1}{4}$. $\triangleright$

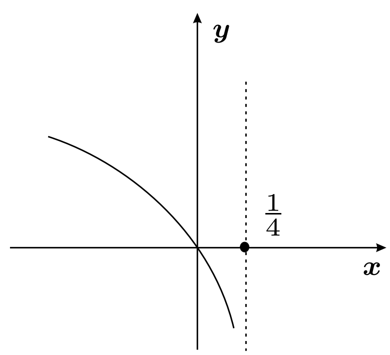


Figura 6.14: Gráfica de la función $\ln(1-4x)$.

31. $h(x) = \ln(2x+1)$

$\triangleleft$ Al resolver la desigualdad $2x+1 > 0 \iff x > \frac{-1}{2} \iff x \in -\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, se tiene que el dominio de $h(x)$ es el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

i. $\ln(2x+1) = 0 \iff 2x+1 = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$ lo que nos indica que $h(x)$ tiene una raíz única en $x = 0$.

ii. Si ponemos $u = (2x+1)$, entonces

$$\ln(2x+1) < 0 \iff 0 < 2x+1 < 1 \iff -1 < 2x < 0 \iff \frac{-1}{2} < x < 0$$

lo que implica que la función $\ln(2x+1)$ es negativa en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

iii. Por el inciso **ii.** se tiene que $h(x)$ es positiva en el intervalo $(0, \infty)$.

iv. Debido a que $u = 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, entonces para los puntos x próximos a la derecha de $-\frac{1}{2}$ la cantidad $2x + 1 > 0$ es pequeña. Esto implica que

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \ln(2x+1) = -\infty$$

lo cual nos indica que la recta $x = -\frac{1}{2}$ es asíntota vertical para $\ln(2x+1)$.

v. Por otro lado, la cantidad $u = 2x + 1 > 0$ es grande si $x \to \infty$. De esta manera

$$\lim_{x \to \infty} \ln(2x+1) = +\infty$$

La figura 6.15 muestra la gráfica creciente de la función $h(x) = \ln(2x+1)$. $\triangleright$

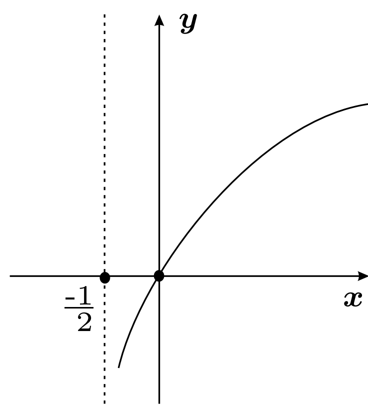


Figura 6.15: Gráfica de la $h(x) = \ln(2x+1)$.

32. $f(x) = \ln(-x-2)$

$\triangleleft$ El dominio de esta función es el intervalo $(-\infty, -2)$ según muestra un cálculo simple.

i. $\ln(-x-2) = 0 \iff -x-2 = 1 \iff x = -3$ lo que implica que la función $f(x)$ se anula en $x = -3$.

ii. $\ln(-x-2) < 0 \iff 0 < -x-2 < 1 \iff 2 < -x < 3 \iff -2 > x > -3$

Esta última desigualdad afirma que $f(x)$ es negativa para los puntos del intervalo $(-3, -2)$.

iii. Consecuentemente, $\ln(-x-2)$ es positiva en el intervalo $(-\infty, -3)$.

iv. Para los puntos x muy próximos a la izquierda de -2 la cantidad $-x-2 > 0$ es muy pequeña, lo que implica que

$$\lim_{x \to (-2)^-} \ln(-x-2) = 0$$

Esto indica que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = -2$.

v. Finalmente, para puntos x próximos de $-\infty$, la cantidad $-x-2 > 0$ es muy grande, lo que implica que

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(-x-2) = +\infty$$

La figura 6.16 ilustra la gráfica de esta función. $\triangleright$

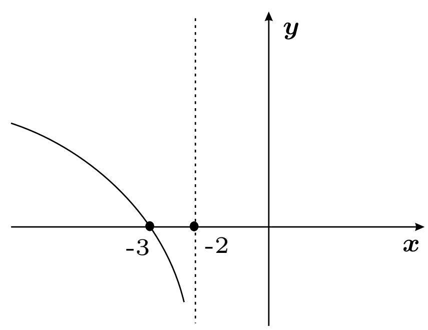


Figura 6.16: Gráfica de $\ln(-x-2)$.

33. a. $h(x) = -3\ln(3x-2)$

$\triangleleft$ Habiendo trazado ya la gráfica de $\ln(3x-2)$ en el ejercicio **29.**, el modificador constante $A = -3$ hará solamente que tal gráfica se refleje a lo largo del eje x como se muestra en la figura 6.17 a.

En este caso, la asíntota sigue siendo la misma, pero la función $h(x)$ es decreciente y satisface

$$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^+} (-3\ln(3x-2)) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (-3\ln(3x-2)) = -\infty \quad \triangleright$$

b. $g(h) = -2\ln(-x-2)$

$\lhd$ De igual forma, habiendo trazado ya la gráfica de la función $\ln(-x-2)$ en el ejercicio **32.**, el modificador $A = -2$ hará que la gráfica obtenida se refleje a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 6.17. b.

La recta $x = -2$ es todavía la asíntota vertical, pero el modificador $A = -2$ hace que

$$\lim_{x\to(-2)^-}(-2\ln(-x-2)) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-2\ln(-x-2)) = -\infty \quad \rhd$$

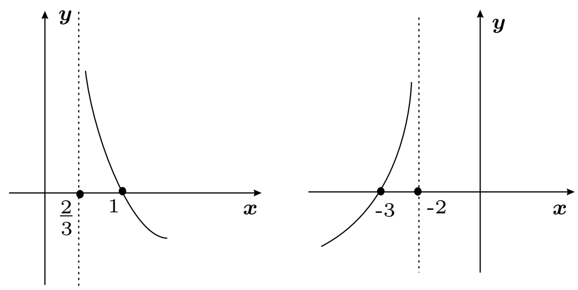


Figura 6.17: Gráficas de las funciones: **a.** $-3\ln(3x-2)$ **b.** $-2\ln(-x-2)$.

Hasta aquí sólo hemos tenido contacto con los logaritmos y las exponenciales de base $a = e$, debido a su enorme importancia dentro de las ciencias naturales. No obstante, no se ha perdido generalidad sobre el tratamiento de las funciones logarítmicas y exponenciales en otras bases. De hecho, para muchos problemas con otras bases, las fórmulas para cambiarlas

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad a^x = e^{x\ln a}$$

nos trasladan tales problemas a situaciones conocidas.

34. Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

$\lhd$ De la igualdad $a^{\beta+\alpha} = a^\beta a^\alpha$ se tiene que

$$27^{x-1} = 9^{2x-3} \iff 27^x 27^{-1} = 9^{2x}9^{-3} \iff \frac{27^x}{27} = \frac{9^{2x}}{9^3}$$

$$\iff \frac{9^3}{27} = \frac{9^{2x}}{27^x} \iff \frac{9^3}{3\times 9} = \frac{(9^2)^x}{(27)^x} \iff \frac{81}{3} = \left(\frac{81}{27}\right)^x$$

$$\iff 27 = 3^x \iff \ln 27 = \ln 3^x \iff \ln 27 = x \ln 3$$

$$\iff x = \frac{\ln 27}{\ln 3} = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3. \quad \triangleright$$

b. $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$

$\triangleleft$ El dominio para la solución se obtiene resolviendo el par de desigualdades $x-2>0$ y $3x+7>0$.

$$x-2>0 \iff x>2 \iff x \in (2,\infty)$$

$$3x+7>0 \iff 3x>-7 \iff x>-\frac{7}{3} \iff x \in \left(-\frac{7}{3},\infty\right)$$

De esta manera, de existir una solución para la ecuación, deberá de estar en el conjunto

$$(2,\infty) \cap \left(\frac{-7}{3},\infty\right) = (2,\infty)$$

Procedemos a resolver la ecuación dada.

$$\log_5(x-2) = \log_5(3x+7) \iff \log_5(x-2) - \log_5(3x-7) = 0$$

$$\iff \log_5\left(\frac{x-2}{3x+7}\right) = 0 \iff \frac{x-2}{3x+7} = 1 \iff x-2 = 3x+7$$

$$\iff -9 = 2x \iff x = \frac{-9}{2}$$

Ya que tal punto $x = \frac{-9}{2}$ no está en el intervalo $(2,\infty)$ se sigue que la ecuación dada no tiene solución. $\triangleright$

35. Trazar la gráfica de la función $f(x) = 4 - 3\left(\frac{2}{5}\right)^x$

$\triangleleft$ Al cambiar base $\left(\frac{2}{5}\right)$ por la base e se tiene que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{2}{5}\right)^x} = e^{x\ln\left(\frac{2}{5}\right)} = e^{\lambda x} \qquad \left(\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right)$$

lo que implica que la función que se va graficar es

$$f(x) = 4 - 3e^{\lambda x}$$

con $\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0,\ A = -3 < 0$.

Utilizando la misma metodología que en los ejercicios **6.** a **14**. se tiene que

a. $f(0) = 1$.

b. f es creciente.

c. $\lim_{x\to-\infty}\left(4-3\left(\frac{2}{5}\right)^x\right) = -\infty$.

d. $\lim_{x\to\infty}\left(4-3\left(\frac{2}{5}\right)^x\right) = 4$.

Los incisos **c.** y **d.** indican que $f(x)$ tiene una raíz, la cual se calcula resolviendo la ecuación $4-3\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$.

$$4-3\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0 \iff 4 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x \iff \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

$$\iff \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{5}\right)^x \iff \ln\left(\frac{4}{3}\right) = x\ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\iff x = \frac{\ln(4/3)}{\ln(2/5)} = \frac{0.2876}{-0.9162} = -0.3139$$

La figura 6.18 ilustra la gráfica de esta función. $\triangleright$

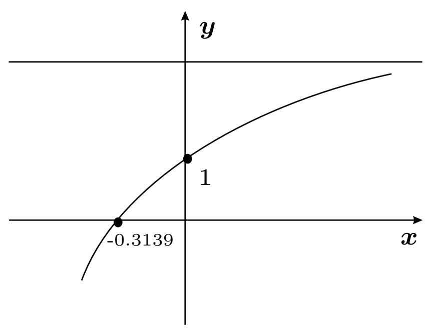


Figura 6.18: Gráfica de $f(x) = 4-3\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

36. Trazar la gráfica de la función $h(x) = -2\log_3(2x+1)$

$\triangleleft$ Al realizar el cambio de base, se tiene que

$$\log_3(2x+1) = \frac{\ln(2x+1)}{\ln 3}$$

lo que implica que la función que se va a graficar es

$$f(x) = -2\frac{\ln(2x+1)}{\ln 3} = -\left(\frac{2}{\ln 3}\right)\ln(2x+1)$$

En el ejercicio **35.** ya se ha trazado la gráfica de la función $\ln(2x+1)$. Nuevamente, para conseguir la gráfica de la función $f(x)$, observamos que el modificador $A = -\frac{2}{\ln 3}$ hará que la gráfica de $\ln(2x+1)$ se refleje a lo largo del eje x y que además siga conservando a la recta $x = -\frac{1}{2}$ como asíntota vertical.

Además, se tiene que debido al modificador, para $h(x)$ se cumplen las igualdades,

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} (-2\log_3(2x+1)) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (-2\log_3(2x+1)) = -\infty$$

como se indica en la figura 6.19. $\triangleright$

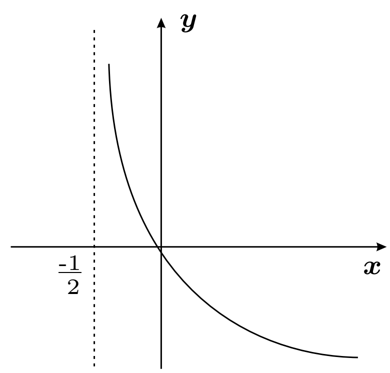


Figura 6.19: Gráfica de la función $h(x) = -2\log_3(2x+1)$.

6.4 Ejercicios

1. Usando la definición de e^x calcule aproximadamente $e^{1/3}$ y compare con el resultado de la calculadora científica.

2. Despeje t en la ecuación dada.

a. $4^t = 9$ **b.** $Aa^t = Bb^t$ **c.** $N = Ae^{\lambda t}$ **d.** $P = \frac{1}{A+Be^{\lambda t}}$

3. Simplifica hasta donde sea posible las siguientes expresiones.

a. $e^{-\ln t}$ **b.** $e^{-2\ln t}$ **c.** $e^{2\ln t}$ **d.** $e^{\frac{1}{3}\ln t}$

e. $4\ln x^2 - 3\ln y + 2\ln y^2 - 3\ln x^3$ **f.** $\frac{2\ln x^2 - \ln x^3}{\ln y^2 - \ln y}$

g. $\ln(AB) - \ln A^2 + \ln B^2 - \ln(2A)$ **h.** $5\ln e + \ln e^{-1} + 3\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln e^2$

i. $\ln(\ln e^2)$ **j.** $\ln(e \ln e^2)$

4. Despejar la variable x en cada una de las siguientes expresiones.

a. $y = \frac{10^x+10^{-x}}{2}$ **b.** $y = \frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$

c. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ **d.** $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $6^{4-x} = 6^{3x+1}$ **b.** $e^{2x+3} = e^{x^2-x}$ **c.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} = 2^{x+1}$

d. $e^{-100x} = e^{4-x}$ **e.** $\ln 3x - \ln(2x-3) = 4\ln 12$

f. $\ln(-4x-12) + \ln 6 = \ln(2-x)$ **g.** $\ln(12x-6) = 5 + \ln(3x-1)$

h. $\log_2 x = 1 - \log_2(x-3)$ **i.** $\log_3(5x+1) = 2 + \log_3(2x-3)$

j. $\log_4(x^2+4) - \log_4(x+2) = 2 + \log_4(x-2)$

Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

6. $f(x) = 1 - e^{x/2}$ **7.** $f(x) = -4 + \frac{1}{2}e^x$ **8.** $f(x) = 1 + e^{-3x}$

9. $f(x) = 2 - e^{2x}$ **10.** $f(x) = 2 + 3^{x+2}$ **11.** $f(x) = -1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

12. $f(x) = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ **13.** $f(x) = -4 - 3 \times 2^{-x}$

14. $f(x) = -2\ln(-1-6x)$ **15.** $f(x) = 3\ln(4+3x)$

16. $f(x) = 2\log_3(-1-6x)$ **17.** $f(x) = -3\log_2(4+3x)$

18. Si la contaminación en una laguna se detuviera, el nivel de contaminantes disminuiría según la fórmula $C(t) = C_0 e^{-0.3821t}$ donde t es el tiempo en años y C_0 es el nivel de contaminantes cuando dejó de haber contaminación. ¿Cuántos años tardaría en limpiarse al 70% de los contaminantes?

19. El cuerpo elimina una droga a través de la orina. Calcule que para una dosis de 9.2 mg. la cantidad $A(t)$ restante en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 9.2\,(0.9)^t$ y que para que haga efecto, por lo menos 2 mg deben estar en el cuerpo.

a. Indica cuándo quedarán 2.5 mg en el cuerpo.

b. ¿Cuál es la vida media del medicamento?

20. La talla de un árbol se puede modelar mediante una ecuación logística. Calcule que la altura $A(t)$ (en m) del árbol de edad t (en años) es

$$A(t) = \frac{30}{1 + 60e^{-0.2t}}$$

a. ¿Cuál es su altura a los 10 años?

b. ¿ A qué edad medirá 12 m?

21. En la fórmula $P = 760e^{-h/8.05}$, P es la presión barométrica en milímetros de mercurio y h es la altura en kilómetros.

a. ¿Cuál es la presión atmosférica en la Ciudad de México?

b. ¿Qué altura en metros corresponde a una presión de 710 mm de mercurio?

c. ¿Cuál es la presión en Huatulco, Oaxaca?

22. En biología marina, un cardumen es un grupo de peces que resulta de una reproducción generacional anual. Teóricamente, para algunas especies del Pacífico mexicano se sabe que el número de peces $N(t)$ aún vivos después de t años está dado por la función exponencial $N(t) = N_0 e^{-0.2t}$, en donde N_0 es el tamaño inicial del cardumen. Calcule el porcentaje del número inicial de individuos que quedan vivos después de 10 años.

23. En 1980 se calculó que la población de ballenas azules en el hemisferio sur era de 5020. Ya que la pesca de cetáceos se ha prohibido y existe abundancia de alimento para estos animales, se espera que la población $N(t)$ crezca según la fórmula $N(t) = 5020e^{0.0036t}$, en donde t está dado en años y $t = 0$ corresponde a 1980. Calcule la población para el año 2008.

24. La talla (en cm) de algunos peces comerciales comunes, de t años de edad, se calcula con la función de crecimiento de von Bertalanffy que tiene la forma

$$L(t) = A\left(1 - Be^{-\lambda t}\right)$$

donde A, B y λ son constantes propias de cada especie.

a. Para el lenguado del Pacífico, $A = 198$, $B = 0.95$ y $k = 0.20$. Calcule la talla de un individuo de 10 años de edad.

b. Calcular la talla máxima que puede alcanzar esta especie.

25. Para una cantidad inicial A_0 del isótopo de Polonio ^{210}Po, la cantidad restante después de t días se calcula por medio de $A(t) = A_0 e^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es de 50 miligramos, calcula, al centésimo más cercano, la cantidad restante después de

a. 30 días

b. 180 días

c. 365 días

26. Para la biología marina, la zona más importante es la zona fótica, ya que ahí ocurre la fotosíntesis. Dicha zona es profuna en donde penetra alrededor del 1% de la luz superficial. El porcentaje de luz $I(p)$ que llega a una profundidad p está dada por la relación $I(p) = I_0 e^{-\lambda p}$, donde I_0 es la intensidad de luz que entra por la superficie maritima.

a. En aguas de Cancún, México, se sabe que el 50% de la luz de la superficie llega a profundidades de hasta 12.5 metros. Calcule la profundidad de la zona fótica.

b. En algunas partes del puerto de Acapulco, debido al impacto ambiental, el 50% de la luz superficial no llega a una profundidad de 4 metros. Calcula la profundidad de la zona fótica en tales lugares.

27. Mediante el análisis de desintegración del carbono ^{14}C se calcula la edad de los objetos arqueológicos. La fórmula $t(p) = -8310 \ln p$ se usa a veces para estimar la edad t en años del fósil donde p es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el objeto.

a. Calcula la edad de un hueso fósil que contiene 4% del ^{14}C encontrado en una cantidad igual de carbono de un hueso del presente.

b. Calcula el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil de 20 000 años de edad.

28. Utilizando la notación del ejercicio resuelto 26, resuelva los siguientes problemas.

a. Si $n = 1.64$, hallar el volumen final de 1.52 m^3 de gas cuando, sometido a comprensión, se eleva la temperatura de 42 a 95°C.

b. Se comprime un gas desde 122 litros hasta 59,5. Hallar la temperatura final si la inicial era de $-1°C$ y $n = 1.4$.

c. Al expandirse un gas desde 283 hasta 906 litros, la temperatura descendió desde 88 hasta $-18°C$. Calcule n con estas condiciones.

29. La siguiente tabla muestra el crecimiento de una población de conejos, donde t está dado en meses.

t	0	1	2	3	4
Q	32	47	71	105	160

Encuentre una relación del tipo $Q = Q_0 e^{\lambda t}$

a. ¿Cuál es el tiempo (aproximado) de duplicación de los conejos?

b. ¿Cuánto tiempo pasará para tener 500 conejos?

c. ¿Cuánto tiempo para tener 1000 conejos?

30. Decir la diferencia entre las siguientes funciones en términos de una composición.

a. $f(x) = \ln^2 x, \quad g(x) = \ln x^2, \quad h(x) = \ln(\ln x)$
b. $K(x) = \ln \sqrt{x}; \quad m(x) = \sqrt{\ln x}$

31. Llena la siguiente tabla

Solución	pH	$[H^+]$
Jugo de limón	2.3	
Jugo de naranja	3.7	
Café negro		1×10^{-5}
Orina	6.0	
Leche		2.5×10^{-7}
Agua pura ($25^o C$)		1×10^{-7}
Agua de mar		3.2×10^{-9}
Sangre	7.4	

Capítulo 7

Funciones trigonométricas

7.1 Las funciones circulares

Una recta que pasa por el origen está determinada por el ángulo que forma con el eje x, es decir, se obtiene al rotar el eje x tomando como vértice de rotación al origen, como se muestra en la figura 7.1.

Consideramos al ángulo formado θ como positivo, si rotamos en dirección contraria a las manecillas del reloj. La medida de los ángulos puede ser expresada en **radianes** o en **grados**.

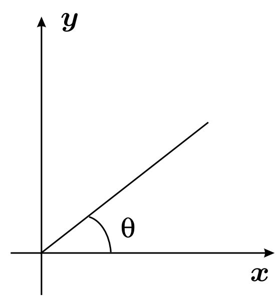


Figura 7.1: Rectas por origen formando ángulos θ con el eje x.

El perímetro de un círculo de radio 1 es $P = 2\pi$. Cada ángulo entre 0^o y 360^o define una longitud de arco en este círculo, como se muestra en la figura 7.1. Una vuelta completa, es decir, considerando un ángulo de 360^o corresponde a 2π rad (radianes). De aquí que se cumplan las igualdades,

$$1\,\mathrm{rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^o = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \approx 57.3^o$$

$$1^o = \frac{2\pi}{360}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 0.0174\,\mathrm{rad}$$

La relación obtenida entre los cambios de estas unidades es lineal, y por lo tanto, para pasar de grados a radianes multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$, y para pasar de radianes a grados multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$.

Por ejemplo,

$$90^o = 90 \times \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{90\pi}{180}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

$$\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{360\pi}{3\pi}\right)^o = 120^o$$

En la tabla siguiente aparecen los ángulos más importantes y su conversión entre grados y radianes.

Conversión grados-radianes para un ángulo θ								
0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π

En general, omitimos el símbolo rad al expresar un ángulo dado en radianes. De esta manera tenemos que $2\pi\,\mathrm{rad} = 2\pi$. Por otro lado, la teoría del Cálculo se hace más simple cuando se utilizan las unidades radianes, y por eso es importante manejarlos.

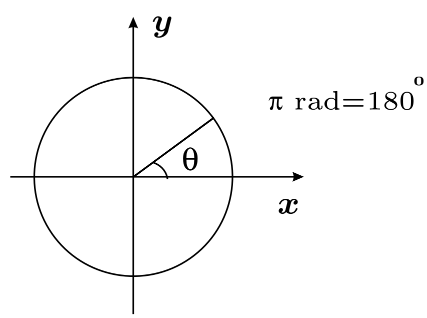


Figura 7.2: Relación entre grados y radianes sobre un círculo unitario.

La circunferencia unitaria es la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, y está definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

Cada semirecta que parte del origen forma un ángulo θ con el eje x e intersecta a la circunferencia en un único punto (x, y), como se muestra en la figura 7.2.

Definiremos los valores de las funciones **trigonométricas** básicas con la ayuda de este punto.

Se define para cada ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ el valor seno de θ, denotada por $\operatorname{sen}\theta$, mediante la igualdad

$$\operatorname{sen}\theta = y$$

Análogamente, se define para cada ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ el valor coseno de θ, definido por $\cos\theta$, por la igualdad

$$\cos\theta = x$$

Si θ está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces determina único un punto (x, y) en el primer cuadrante del plano, y se puede construir un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 7.3. La hipotenusa (radio de la circunferencia) mide 1, y los catetos miden, y el vertical y x el horizontal.

De esta manera, tenemos que para θ, x es el cateto adyacente y y es el cateto opuesto. Esto implica que los valores definidos por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

coinciden con nuestra definición.

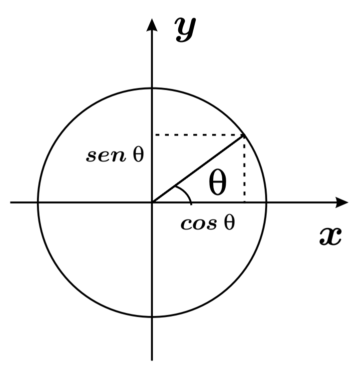


Figura 7.3: Construcción de las funciones seno y coseno.

Los valores de las funciones seno y coseno para argumentos (en radianes) entre 0 y 2π se dan en la siguiente tabla.

Tabla de funciones trigonométricas			
Rad	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\pi/12$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	
$5\pi/12$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$
$7\pi/12$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	
$11\pi/12$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	
π	0	-1	
$13\pi/12$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	
$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	
$5\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	
$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	
$17\pi/12$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
$3\pi/2$	-1	0	
$19\pi/12$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	
$7\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	
$11\pi/6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	
$23\pi/12$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	
2π	0	1	

Si ϕ y θ son ángulos reales cualesquiera, entonces son válidas las siguientes identidades.

i. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ii. $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

iii. $\cos(-\theta) = \cos\theta$

iv. $\operatorname{sen}(\theta+\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta$

v. $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

vi. Para cualquier ángulo $\theta\in\mathbb{R}$ los valores $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ están acotados, es decir, $-1\le\cos\theta\le 1$ y $-1\le\operatorname{sen}\theta\le 1$.

Las funciones **trigonométricas** básicas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son construidas de esta forma, y su dominio es el conjunto de todos los números reales $x\in\mathbb{R}$

en unidades radianes, es decir,

$$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

donde, en adelante utilizaremos la variable universal x para denotar al argumento.

La identidad **ii.** indica que la función seno es impar, mientras que la propiedad **iii.** indica que la función coseno es par.

Debido a la construcción, tales funciones son **periódicas** con periodo 2π, esto es, para cada ángulo $x \in \mathbb{R}$, su valor asociado y el del argumento $x + 2\pi$ bajo cada una de las funciones contruidas es el mismo. En otras palabras,

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x + 2\pi)$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi)$$

lo cual puede ser comprobado utilizando las propiedades de arriba, y lo que nos indica que la gráfica se repite en intervalos de longitud 2π. Sus gráficas pueden verse en la figura 7.4.

En virtud de que la función seno es 2π periódica y $0 = \text{sen}\, 0 = \text{sen}\, \pi = \text{sen}\, 2\pi$, entonces

$$\text{sen}\, x = 0 \iff x = 0,\, \pm\pi,\, \pm 2\pi,\, \pm 3\pi, \cdots$$

Por otro lado, y por la misma razón, del hecho que $\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$ es el valor máximo del seno en el intervalo $[0, 2\pi]$, se tiene que,

$$\text{sen}\, x = 1 \iff x = \cdots, \frac{-7\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \cdots$$

es decir, para tales argumentos se alcanza el valor máximo del seno en todo el dominio.

Análogamente, el valor mínimo -1 de la función seno de x se alcanza cuando,

$$\text{sen}\, x = -1 \iff = \cdots, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \cdots$$

En cuanto a la función coseno, se tiene que

$$\cos = 0 \iff x = \cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

$$\cos x = 1 \iff x = \cdots, -4\pi,\, -2\pi,\, 0,\, 2\pi,\, 4\pi, \cdots$$

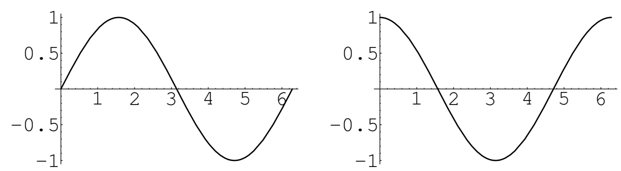


Figura 7.4: Gráficas de las funciones seno y coseno.

$$\cos x = -1 \iff x = \cdots, -3\pi,\ -\pi,\ \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \cdots$$

Auxiliados por la tabla anterior, podemos trazar sus gráficas, las cuales se muestran en la figura 7.4.

Otras funciones trigonométricas se definen mediante las siguientes igualdades.

La **tangente** del ángulo x, denotada por $\tan x$, se define por,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su dominio es el conjunto de puntos tales que, $\cos \neq 0$, es decir,

$$\operatorname{Dom}(\tan) = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad x \neq \cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots \right\}$$

En cada punto x donde $\cos x = 0$ la función tiene una asíntota vertical. No es difícil comprobar que la tangente tiene periodo $T = \pi$, como lo muestra el ejercicio 16, donde además se muestra la gráfica.

La **cotangente** del ángulo x, se define mediante la igualdad

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Su dominio es el conjunto de números reales tales que $\operatorname{sen} \neq 0$ es decir,

$$\operatorname{Dom}(\cot) = \{\, x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots \}$$

y en cada punto omitido tiene una asíntota vertical.

La **secante** del ángulo x, se define por

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y su dominio es el conjunto de puntos tales que $\cos x \neq 0$, es decir,

$$\text{Dom}(\sec) = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad x \neq \cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots \right\}$$

En cada punto x omitido esta función tiene una asíntota vertical.

La **cosecante** del ángulo x, está dada por la igualdad

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

y su dominio es el conjunto de números reales tales que sen$x \neq 0$ es decir,

$$\text{Dom}(\csc) = \{\text{x} \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots\}$$

En cada punto omitido la cosecante tiene una asíntota vertical.

La siguiente tabla de valores de $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ puede ser llenada por el lector de acuerdo con los valores de las funciones seno y coseno de la tabla anterior. Los valores correspondientes a $\tan x$ para tales argumentos se sugiere al lector que los calcule usando la misma tabla anterior. Algunas gráficas de estas funciones se trazarán dentro de la serie de ejercicios resueltos en este capítulo.

Tabla de funciones trigonométricas			
Rad	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$\pi/12$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$4/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$4/(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\pi/6$			
$\pi/4$			
$\pi/3$			
$5\pi/12$			
$\pi/2$			
$7\pi/12$			
$2\pi/3$			
$3\pi/4$			
$5\pi/6$			
$11\pi/12$			
π			
$13\pi/12$			
$7\pi/6$			
$5\pi/4$			
$4\pi/3$			
$17\pi/12$			
$3\pi/2$			
$19\pi/12$			
$5\pi/3$			
$7\pi/4$			
$11\pi/6$			
$23\pi/12$			
$2\pi/$			

Hacemos hincapié que aún cuando las funciones trigonométricas se definieron con la ayuda del círculo unitario en el plano, para el ángulo θ de un triángulo rectángulo arbitrario como el que se muestra en la figura 7.5, se cumplen las definiciones clásicas de la literatura común.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

y sus valores coinciden para cada ángulo dado θ con los calculados según nuestra definición.

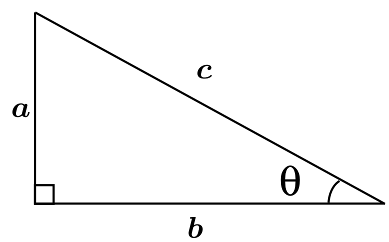


Figura 7.5: Resolución de un triángulo rectángulo.

7.2 Las funciones trigonométricas inversas.

La figura 7.4 prueba que la función $\operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y que la función $\cos x$ es decreciente en el intervalo $[0,\pi]$. Esto indica que, la función $\operatorname{sen} x$ tiene una función inversa llamada el **arco seno**, denotada con $\operatorname{arcsen} x$, definida en la imagen de $\operatorname{sen} x$ que es el conjunto $[-1,1]$. Tal función está definida biunívocamente,

$$\operatorname{arcsen}\,:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Análogamente, la función $\cos x$ tiene una función inversa definida

$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$$

llamada el arco coseno.

Consecuentemente, para cada $\theta\in\mathbb{R}$ y $w\in[-1,1]$ son válidas las siguientes identidades

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta)=\theta,\quad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} w)=w$$

$$\arccos(\cos\theta)=\theta,\quad \cos(\arccos w)=w$$

En términos generales, las **funciones trigonométricas inversas** son inicialmente multivaluadas, como puede verse en la tabla. La convención para evaluar un argumento es que se utilice cualquiera de los valores, de preferencia aquel que esté el intervalo donde se hace el análisis del problema que se estudia. Por ello es que, para el cálculo de las funciones arcsen y arccos se busca el argumento en la columna apropiada y se refiere al argumento de la primer columna, tomando en cuenta el ángulo que esté en el dominio de interés.

Entre las funciones importantes que aparecen en las Ciencias Naturales, se encuentran aquellas que modelan relaciones periódicas de procesos o fenómenos naturales. Por ejemplo, la aparición diaria del sueño a determinada hora del día, los síntomas de hambre, la menstruación en las hembras mamíferas, el desove de las tortugas en las costas de Oaxaca, México, la eclosión de las moscas en la fruta, ciertos ciclos reproductivos en algunos seres vivos (por ejemplo, los perros y los burros al inicio de la Primavera), etcétera.

Cada una de estas relaciones se puede modelar por una relación periódica, esto es, por una función cuyos valores se repiten a intervalos de la misma longitud (periodo de la relación).

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **periódica** de periodo $T > 0$ si para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$f(x + T) = f(x)$$

Esto es, la imagen bajo la función f de los argumentos $x + T$ y x es la misma.

Para dibujar la gráfica de una función periódica es suficiente trazarla en un intervalo de longitud T (el periodo) y repetirla horizontalmente en los siguientes intervalos de la misma longitud. Más precisamente,

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica de periodo T, entonces

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = \cdots$$

Es decir, en cada intervalo de longitud T se tiene la misma gráfica para f.

Consecuentemente, si f tiene un periodo T, entonces también tiene como periodos a los múltiplos, $2T$, $3T, \cdots$ Por ejemplo, cada $T = 24$ horas el ser humano es presa del sueño, de donde, cada $T' = 2T = 48$ horas es también presa del sueño, cada $T'' = 3T = 72$ horas es presa del sueño, etcétera. Dicho de otra manera, un proceso periódico puede tener varios periodos.

Diremos que T es un **periodo mínimo** para una función f (periódica) si cada vez que se encuentre otro periodo T' de f, se tiene que el cociente

$\frac{T'}{T}$ es un entero, y el cociente $\frac{T}{T'}$ no lo es. Esto es, los otros periodos son múltiplos de T.

Haciendo un cambio lineal de escala en el dominio de una función periódica, podemos suponer que su periodo es $T = 2\pi$. De esta manera, al suponer que todas las funciones periódicas se han normalizado a periodo 2π, podemos comenzar a hacer un análisis de ellas, relacionándolas con las funciones de periodo 2π más conocidas: el seno y el coseno.

Acorde a la construcción de las funciones trigonométricas, consideremos la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que a un argumento temporal (o angular) $t \in \mathbb{R}$ le asocia la pareja en el plano

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

En virtud de las igualdades,

$$\gamma(t + 2\pi) = (\cos(t + 2\pi), \operatorname{sen}(t + 2\pi)) = (\cos t, \operatorname{sen} t) = \gamma(t)$$

se sigue que la función γ es periódica de periodo 2π, y la imagen de la función $\gamma(t)$ está contenida en el círculo de radio 1 con centro en el origen.

Se dice que la función $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ **parametriza** al círculo de radio 1 con centro en $(0, 0)$ moviéndose en contra de las manecillas del reloj, como lo indica la figura 7.6.

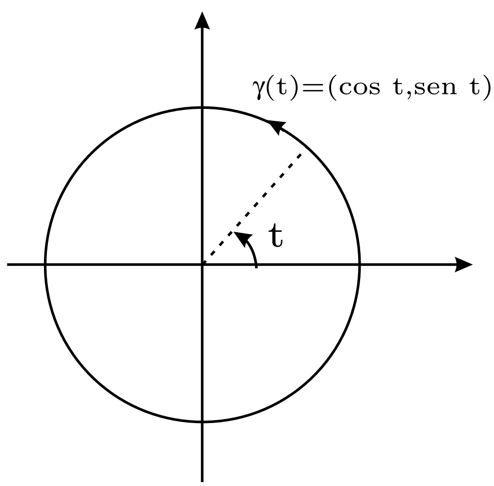


Figura 7.6: Parametrización del círculo unitario en $\mathbb{R}^2$

Debido a la igualdad $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ para cualquier tiempo t, se dice que el **reloj** dió una vuelta a lo largo del círculo en un periodo $T = 2\pi$.

Por eso es que cuando se piensa en una función periódica de periodo T, al iniciar otra vez (repitiendo) el ciclo periódico, se dice que la función misma dió una vuelta a lo largo de su periodo minimal.

A una función periódica de periodo T se le llamará un **reloj** o un **oscilador**.

Ya que las funciones seno y coseno son funciones de periodo 2π, podemos ajustar algunos relojes con estas funciones considerando las **frecuencias**, **amplitudes** y **fases** correspondientes.

Así, a cualquier función periódica que tenga alguna de las formas

$$f(t) = A\,\cos(\omega t + c), \quad h(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + c)$$

se le llamará **un oscilador** y se dice que tiene una **amplitud** A, una **frecuencia** ω y una **fase** c.

Para ejemplificar, la función $f(t) = \cos t$ tiene amplitud $A = 1$, frecuencia $\omega = 1$ y fase $c = 0$, mientras que la función $g(t) = 2\cos(3t + 2)$ tiene amplitud $A = 2$, frecuencia $\omega = 3$ y fase $c = 2$.

Debido a que las funciones seno y coseno están acotadas y las funciones $f(t) = A\cos(\omega t + c)$ y $g(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + c)$ son el resultado de las composiciones

$$t \to \omega t + c \to A\cos(\omega t + c)$$

$$t \to \omega t + c \to A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + c)$$

entonces el dibujo de las gráficas de f y g se obtiene a partir de deformar las funciones básicas por medio de la homotecía con traslación $\omega t + c$, y luego con la deformación de la amplitud A.

El hecho de que la frecuencia sea ω nos lleva necesariamente a que el periodo minimal sea $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Si c es la fase, entonces al escribir $t^* = \omega t + c$ se tiene que $t^* = 0$ cuando $t = -\frac{c}{\omega}$, lo que nos obliga a recorrer la gráfica trigonométrica básica $-\frac{c}{\omega}$ unidades a la izquierda durante el proceso del trazado. Finalmente, ya que los valores máximo y mínimo de seno y coseno son 1 y -1 respectivamente, la amplitud A obliga a deformar la altura dentro de la banda $[-A, A]$, reflejando la gráfica si $A < 0$.

Resuelva los siguientes problemas.

1. Rellene la siguiente tabla de conversión grados-radianes

Conversión radianes y grados									
		45^o		75^o		105^o		135^o	
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5\pi}{6}$

◁ Lo llenamos calculando cada una de las columnas según la metodología de conversión.

$$\frac{\pi}{12}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \left(\frac{180^o}{12}\right) = 15^o$$

$$\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \left(\frac{180^o}{6}\right) = 30^o$$

$$45^o = 45\left(\frac{\pi}{180}\right)\mathrm{rad} = \frac{45}{180}\pi = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{180^o}{\pi}\right) = \left(\frac{180^o}{3}\right) = 60^o$$

$$75^o = 75\left(\frac{\pi}{180}\right)\mathrm{rad} = \frac{75}{180}\pi = \frac{5}{12}\pi$$

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{180}{2}\right)^o = 90^o$$

$$105^o = 105\left(\frac{\pi}{180}\right)\mathrm{rad} = \frac{105}{180}\pi = \frac{7}{12}\pi$$

$$\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{360}{3}\right)^o = 120^o$$

$$135^o = 135\left(\frac{\pi}{180}\right)^o = \frac{135}{180}\pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{6}\,\mathrm{rad} = \frac{5\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^o = 150^o$$

Por lo tanto, la tabla queda llena como a continuación se muestra.

Conversión radianes y grados									
15^o	30^o	45^o	60^o	75^o	90^o	105^o	120^o	135^o	150^o
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

2. Evalue las siguientes funciones en los argumentos $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

a. $f(\theta) = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$

◁ Por una evaluación directa, tomando los valores de la tabla, se tiene,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\,\mathrm{sen}\,2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\,\mathrm{sen}\,\pi = 4(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen} 2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen} 2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen} 2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right) = -2 \quad \triangleright$$

b. $g(\theta) = 3\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta$

$\triangleleft$ Una evaluación directa, considerando los valores de la tabla nos indica que,

$$g\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$

$$g\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{4}$$

$$g\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$g\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \triangleright$$

3. Calcule los valores de las funciones g y f del ejercicio anterior para los argumentos $\theta = \frac{17\pi}{6}$, $\frac{35\pi}{12}$ y $\frac{91\pi}{12}$.

$\lhd$ Ya que se cumplen las igualdades,

$$\theta = \frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$
$$\theta = \frac{35\pi}{12} = 2\pi + \frac{11\pi}{12}$$
$$\theta = \frac{91\pi}{12} = 6\pi + \frac{19\pi}{12}$$

y además $\operatorname{sen}(2\pi + \theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$ entonces podemos calcular los valores de la siguiente forma.

a. $\lhd$ Por una sustitución directa y usando la tabla se tiene

$$f\left(\frac{17\pi}{6}\right) = f\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = 4\mathrm{sen}\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = 4\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{35\pi}{12}\right) = f\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) = 4\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{91\pi}{12}\right) = f\left(6\pi + \frac{19\pi}{12}\right) = 4\mathrm{sen}\left(6\pi + \frac{19\pi}{12}\right)$$
$$= 4\mathrm{sen}\left(2\pi + \left(4\pi + \frac{19\pi}{6}\right)\right) = 4\operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{19\pi}{12}\right)$$
$$= 4\operatorname{sen}\left(2\pi + \left(2\pi + \frac{19\pi}{12}\right)\right) = 4\operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{19\pi}{12}\right)$$
$$= 4\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \quad \rhd$$

Observamos que aquí hemos conseguido la cadena de igualdades para cualquier ángulo θ

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta + 4\pi) = \operatorname{sen}(\theta + 6\pi) = \cdots$$
$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta + 4\pi) = \cos(\theta + 6\pi) = \cdots$$

b. $\lhd$ Por una sustitución directa, y utilizando las igualdades obtenidas, tenemos,

$$g\left(\frac{17\pi}{6}\right) = f\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = 3\operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) - 2\cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

$$g\left(\frac{35\pi}{12}\right) = g\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) = 3\,\mathrm{sen}\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) - 2\cos\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$g\left(\frac{91\pi}{12}\right) = g\left(6\pi + \frac{19\pi}{12}\right) = 3\,\mathrm{sen}\left(6\pi + \frac{19\pi}{12}\right) - 2\cos\left(6\pi + \frac{19\pi}{12}\right)$$

$$= 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right) - 2\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{-5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \triangleright$$

4. Sobre un faro de 50 metros, un guardia costero observa un barco con un ángulo de 10^o bajo su horizontal. ¿ A qué distancia se encuentra el barco?

$\triangleleft$ Supongamos que sobre el faro está situado el observador a 50 m sobre el nivel del mar, y que el barco está situado a una distancia d del faro, como se muestra en la figura 7.7.

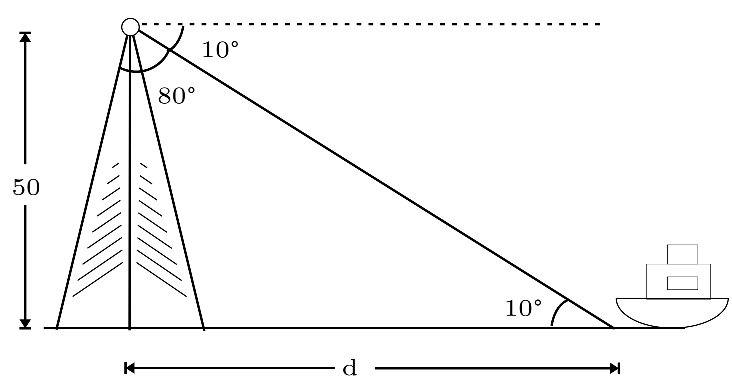


Figura 7.7: Distancia del barco al faro.

Si para observar al barco, el observador inclina 10^o hacia abajo su mirada, entonces podemos construir un triángulo con vértice en los ojos del observador, otro vértice en el barco y d como la distancia buscada entre el faro y el barco, como se muestra en la figura 7.7.

Claramente el ángulo opuesto a d mide 80^o debido a que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180^o.

Por lo tanto, de la definición de tangente para $\theta = 80^o = \frac{4\pi}{9}$ se tiene que

$$\tan 80^o = \tan\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{d}{50}$$

es decir,

$$d = 50 \tan 80^o \approx 283.56\,\text{m}$$

es la distancia buscada entre el barco y el faro. $\triangleright$

5. Un pato vuela alejándose de un observador en tierra a una velocidad constante y a una altura de 90 m. Para cierto momento el ángulo de elevación es de 40^o y 10 segundos después 30^o ¿Cuál es la velocidad con la que vuela el pato?

$\triangleleft$ Consideremos la línea horizontal a 90 m. sobre la cabeza del observador y sea P el punto sobre tal línea que está exactamente sobre la cabeza de este observador. Sean, Q el punto donde miró a la ave al tiempo inicial y R el punto donde miró a la ave 10 segundos después, como se muestra en la figura 7.8.

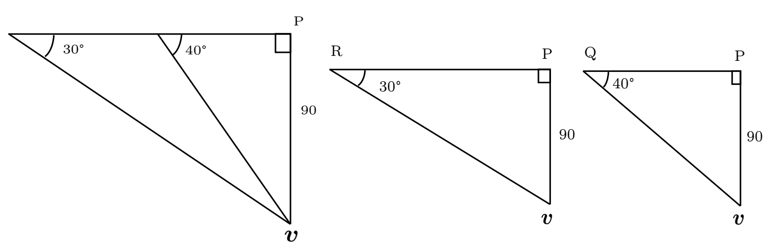


Figura 7.8: Figura del problema 5.

Si entendemos por V el punto situado en la cabeza del observador, entonces se contruyen dos triángulos, el ΔPVQ y ΔPVR, como se muestra en la figura 7.8

Para el triángulo ΔPVQ, el ángulo PQV mide 40^o, lo que implica que

$$\tan 40^o = \frac{90}{|QP|}$$

donde $|QP|$ es el cateto adyacente asociado a ese ángulo, es decir,

$$|QP| = \frac{90}{\tan 40^o} = 107.257\,\mathrm{m}$$

Para el triángulo ΔPVR, el ángulo PRV mide 30^o lo que implica que

$$\tan 30^o = \frac{90}{|RP|}$$

donde $|RP|$ es el cateto asociado a ese ángulo, es decir,

$$|RP| = \frac{90}{\tan 30^o} = 155.884\,\mathrm{m}$$

De esta manera, la distancia recorrida por el ave es, $|RQ| = |RP| - |QP|$ $= 155.884 - 107.257 = 48.62$ m.

Por lo tanto, la velocidad V que lleva la ave es

$$V = \frac{48.62\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 4.862\,\mathrm{m/s} \quad \triangleright$$

6. Desde el transbordador Mazatlán-La Paz, un viajero observa un delfín que nada frente al barco. Si el viajero está a 12 metros sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión para mirar al delfín cambia de 30^o a 35^o durante la observación, ¿qué distancia recorre el delfín?

$\triangleleft$ Análogamente al problema anterior, se construyen dos triángulos desde el transbordador, como se muestra en la figura 7.9.

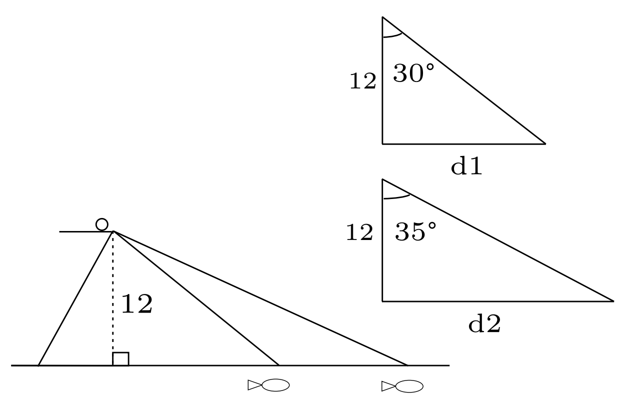


Figura 7.9: Figura del ejercicio 6.

Sean d_1, el cateto opuesto al ángulo de 30^o para el primer triángulo, y d_2 el cateto opuesto al ángulo de 35^o para el segundo triángulo. Entonces

$$\tan 30^o = \frac{d_1}{12} \quad \text{y} \quad \tan 35^o = \frac{d_2}{12}$$

es decir,

$$d_1 = 12 \tan 30^o = 6.928\,\text{m} \quad \text{y} \quad d_2 = 12 \tan 35^o = 8.402$$

Por lo tanto, la distancia recorrida, hacia adelante, por el delfín es

$$d = d_2 - d_1 = 8.402 - 6.928 = 1.474\,\text{m}. \quad \triangleright$$

7. De una hoja alargada de metal aluminio de ancho 45 cm, se quiere construir un canalón para desagüe, dividiendo el ancho en tres partes iguales, y doblando los dos segmentos hacia arriba como se muestra en la figura 7.10.

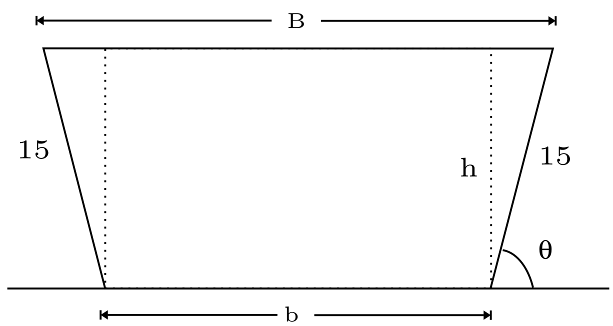


Figura 7.10: Construcción del canalón del ejercicio 7.

Naturalmente, el área A del trapecio obtenido al observar de frente el canalón depende del ángulo de inclinación θ (respecto a la horizontal) al cual se doblen las orillas.

Calcule una relación para el área A de este trapecio en función del ángulo de doblamiento θ.

$\triangleleft$ De la geometría básica se sabe que el área A de un trapecio se calcula mediante la fórmula

$$A = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Por otro lado, podemos considerar, para cualquier ángulo θ, a la base menor del trapecio obtenido como $b = 15$, debido a que sólo la base mayor B cambia según varíe θ.

Pongamos $B = 15+2d$ donde d es la base de cualquiera de los triángulos menores obtenidos al doblar las pestañas, junto con la altura h del trapecio.

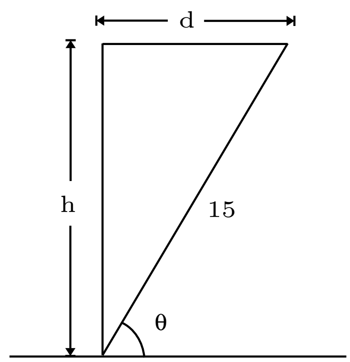


Figura 7.11: Triángulo obtenido en el canalón.

Claramente, el ángulo adyacente a d es θ por ser alterno interno a θ respecto a la hipotenusa del triángulo que mide 15 cm, como se muestra en la figura 7.11.

Consecuentemente, el cateto opuesto a θ es h, y entonces, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{15} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{d}{15}$$

o equivalentemente,

$$h = 15\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad d = 15\cos\theta$$

Por lo tanto,

$$B = 15 + 2d = 15 + 2(15\cos\theta) = 15 + 30\cos\theta$$

$$b = 15, \quad h = 15\operatorname{sen}\theta$$

lo que nos indica que el área A del trapecio se calcula por

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(15 + 30\cos\theta + 15)15\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{(30 + 30\cos\theta)15\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$= \frac{30}{2}(1 + \cos\theta)15\operatorname{sen}\theta = 225(1 + \cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

es decir, el área del trapecio obtenido al doblar las pestañas por un ángulo θ es,

$$A(\theta) = 225(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta)$$

donde el ángulo θ debe satisfacer que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, debido a que no es conveniente doblar hacia adentro más de $\frac{\pi}{2}$ pues se perdería área para el desagüe. $\triangleright$

8. Un pistón se conecta a una rueda de 10 cm de radio por medio de una biela de 40 cm, como se muestra en la figura 7.12.

Encuentre una fórmula que describa la posición del pistón para cualquier tiempo t, si la rueda gira con velocidad constante.

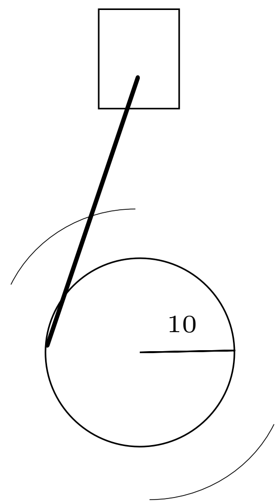


Figura 7.12: Pistón conectado a una rueda.

$\triangleleft$ Primero normalizamos las unidades considerando 10 cm=1 dm y 40 cm=4 dm, además de que podemos suponer que la velocidad angular es de 1 rad/seg, es decir, el tiempo de transcurrido de una vuelta es de $t = 2\pi$, y gira en contra de las manecillas del reloj.

Supongamos, además, que para un corte transversal del sistema, se puede situar un sistema de coordenadas cuyo centro coincida con el del disco de la rueda, y de tal forma que el centro del pistón se mueva a lo largo del eje y, como se muestra en la figura 7.12.

Ya que tiene el disco radio 1 y tarda en dar una vuelta $t = 2\pi$ seg, entonces cada punto sobre la circunferencia del disco puede ser escrito de la forma $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, pues además éste gira en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Sea $P(t) = (0, y(t))$ la posición del centro del pistón sobre el eje y a partir del tiempo $t = 0$. De la figura 7.13 y del Teorema de Pitágoras se tiene

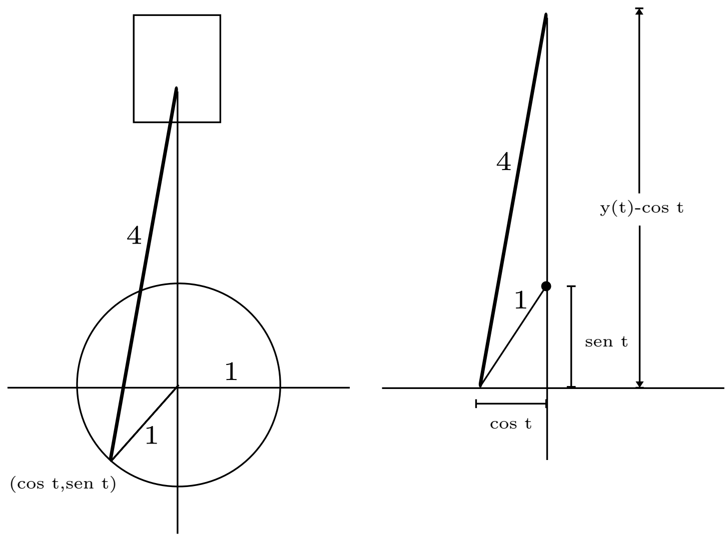


Figura 7.13: Análisis del problema del pistón.

$$16 = \cos^2 t + (y(t)) - \operatorname{sen} t)^2$$

donde $y(t)$ es la altura que tiene el pistón al tiempo t, y que describe totalmente la posición del pistón en ese instante.

De esta manera, al despejar $y(t)$ se tiene

$$16 = \cos^2 t + (y(t) - \operatorname{sen} t)^2 \iff 16 - \cos^2 t = (y(t) - \operatorname{sen} t)^2$$

$\iff \sqrt{16 - \cos^2 t} = y(t) - \operatorname{sen} t$, pues $y(t) - \operatorname{sen} t$ es una distancia ≥ 0.

Por lo tanto, la posición $y(t)$ del pistón al tiempo t está definida por

$$y(t) = \operatorname{sen} t + \sqrt{16 - \cos^2 t}$$

donde $t \in [0, \infty)$ está medido en radianes. $\triangleright$

9. Calcule las funciones trigonométricas asociadas a la relación $x = 3\operatorname{sen}\theta$. Calcule $\ln(\csc\theta - \cot\theta)$ y $\operatorname{sen} 2\theta$.

$\triangleleft$ Debido a que $x = 3\operatorname{sen}\theta$, entonces, para un triángulo rectángulo apropiado,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Ahora construimos un triángulo rectángulo de tal forma que su hipotenusa sea 3 y su cateto opuesto sea x, como se muestra en la figura 7.14.

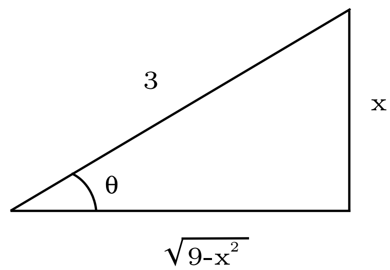


Figura 7.14: Triángulo rectángulo para el ejercicio 9.

Por el Teorema de Pitágoras, si d es el cateto adyacente, entonces, necesariamente, $d = \sqrt{9 - x^2}$

De esta manera, se tienen, de la definición, las siguientes igualdades

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{3}{x}$$

Consecuentemente,

$$\ln(\csc\theta - \cot\theta) = \ln\left(\frac{9}{x} - \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}\right) = \ln\left(\frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x}\right)$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} = \frac{2x\sqrt{9 - x^2}}{9} \quad \triangleright$$

10. De la relación $z = 2\tan\theta$ obtenga las funciones trigonométricas asociadas a θ. Calcule además $\ln(\sec\theta + \tan\theta)$ y θ.

$\triangleleft$ De la igualdad $z = 2\tan\theta$ se tiene que

$$\tan\theta = \frac{z}{2} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Procediendo de la misma forma que en el ejercicio anterior, construimos un triángulo rectángulo de cateto opuesto a θ igual a z y cateto adyacente igual a 2, como se muestra en la figura 7.15.

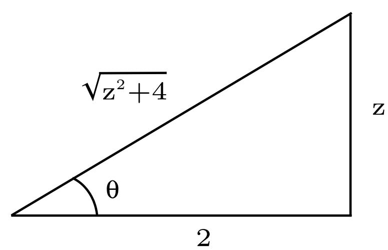


Figura 7.15: Triángulo rectángulo para el ejercicio 10.

Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que la hipotenusa de este triángulo debe medir $h = \sqrt{z^2+4}$.

De esta forma, de la definición de las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo se tiene,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+4}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{z^2+4}}$$

$$\tan\theta = \frac{z}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{2}{z}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{z^2+4}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{z^2+4}}{z}$$

Consecuentemente,

$$\ln(\sec\theta + \tan\theta) = \ln\left(\frac{\sqrt{z^2+4}}{2} + \frac{z}{2}\right) = \ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)$$

Por otro lado, ya que $z = 2\,\tan\theta$ se tiene,

$$z = 2\tan\theta \iff \frac{z}{2} = \tan\theta$$

$\iff$ (aplicando la inversa de la tangente) arctan $\left(\frac{z}{2}\right) = \arctan(\tan\theta)$ lo que implica que

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{2}\right) \quad \rhd$$

11. Obtenga las funciones trigonométricas de θ asociadas a la relación $x = 5\sec\theta$. Calcule además $\ln(\sec\theta + \tan\theta)$ y $\sec\ \theta\tan\theta$.

$\lhd$ De la relación $x = 5\ \sec\theta$ se tiene

$$\sec\theta = \frac{x}{5} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

De forma análoga a los ejercicios anteriores, se construye un triángulo rectángulo con un ángulo θ tal que su hipotenusa sea igual a x y cuyo cateto adyacente mida 5, como se muestra en la figura 7.16.

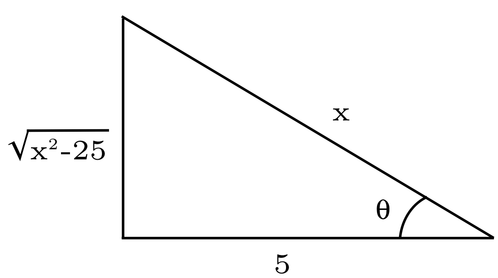


Figura 7.16: Triángulo rectángulo para el ejercicio 11.

Del Teorema de Pitágoras, el cateto opuesto deberá medir $c = \sqrt{x^2 - 25}$, lo que nos indica que las funciones trigonométricas para el ángulo θ son,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$
$$\cot\theta = \frac{5}{\sqrt{x^2-25}}$$
$$\sec\theta = \frac{x}{5}$$
$$\csc\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$$

De esta manera,

$$\ln(\sec\theta+\tan\theta) = \ln\left(\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-25}}{5}\right)$$

$$\sec\theta\tan\theta = \frac{x}{5}\,\frac{\sqrt{x^2-25}}{5} = \frac{x\sqrt{x^2-25}}{25} \quad \rhd$$

12. Sean ϕ y θ cualesquiera ángulos reales, demostrar que se cumplen las siguientes igualdades trigonométricas.

a. $\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta$

$\lhd$ Aplicando las igualdades $\cos(-\phi)=\cos\phi, \operatorname{sen}(-\phi)=\operatorname{sen}$ se obtiene,
$\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}(\theta+(-\phi)) = \operatorname{sen}\theta\cos(-\phi)+\operatorname{sen}(-\phi)\cos\theta$
$= \operatorname{sen}\theta\cos(\phi) - \operatorname{sen}\phi\cos\theta \quad \rhd$

b. $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

$\lhd \quad \cos(\theta-\phi) = \cos(\theta+(-\phi)) = \cos\theta\cos(-\phi)+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(-\phi)$
$= \cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \quad \rhd$

c. $\operatorname{sen}(2\pi+\theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\lhd \quad \operatorname{sen}(2\pi+\theta) = \operatorname{sen}2\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos 2\pi = (0)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\times(1) = \operatorname{sen}\theta \quad \rhd$

d. $\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$

$\lhd \quad \cos(2\pi+\theta) = \cos 2\pi\cos\theta - \operatorname{sen}2\pi\operatorname{sen}\theta = (1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \quad \rhd$

e. $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\lhd \quad \operatorname{sen}2\theta = \operatorname{sen}(\theta+\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad \rhd$

f. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$$\triangleleft \quad \cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \triangleright$$

g. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\triangleleft$ De la igualdad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, al dividir cada miembro por $\cos^2\theta$ se tiene,

$$1 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \iff \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\iff \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 \iff \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta + 1 \quad \triangleright$$

h. $\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$

$\triangleleft$ De la definición original de tangente, se tiene que

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\cos(\theta+\phi)} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}$$

posteriormente, dividimos cada término de la última fracción por la cantidad $\cos\theta\cos\phi$, obteniendo,

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\theta\cos\phi}}{\frac{\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\cos\theta\cos\phi}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi} + \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\phi\cos\theta}}{\frac{\cos\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi} - \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{\cos\theta\cos\phi}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\phi}{\cos\phi}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\phi}{\cos\phi}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}\right)} = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} \quad \triangleright$$

i. $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$

Por un cálculo directo se tiene,

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$\left. + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}\right)+\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1)+\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}(1)\right] = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$= \operatorname{sen}2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{sen}2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\phi$$

Aquí en la cuarta igualdad se ha utilizado la relación $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, para $\alpha = \frac{\phi}{2}$ y $\alpha = \frac{\theta}{2}$, mientras que en la penúltima igualdad se ha utilizado la relación $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha$, para los mismos ángulos $\triangleright$

j. $\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\phi}{2}$

$\triangleleft$ Análogamente al ejercicio anterior, se tiene

$$2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right]$$
$$\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right.$$
$$\left.-\cos^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 2\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1)-\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}(1)\right] = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$= \operatorname{sen}2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\phi \quad \triangleright$$

k. $\tan\theta+\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\cos\theta\cos\phi}$

$\triangleleft$ Calculando directamente,

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\cos\theta\cos\phi} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi+\operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\theta\cos\phi} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi}+\frac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\phi\cos\theta}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\phi}{\cos\phi}\right)+\left(\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right) = \tan\theta+\tan\phi \quad \triangleright$$

l. $\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$

$\lhd$ Por un cálculo directo se tiene que

$$\frac{1}{2}(\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)) = \frac{1}{2}(\cos\theta\cos\phi+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi-\cos\theta\cos\phi+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)$$

$$= \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \quad \rhd$$

m. $\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)+\operatorname{sen}(\theta+\phi)}{2}$

$\lhd$ Análogamente al ejercicio anterior, se tiene

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\theta-\phi)+\operatorname{sen}(\theta+\phi)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta\cos\phi+\operatorname{sen}\phi\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\phi+\operatorname{sen}\phi\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \quad \rhd$$

n. $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\lhd$ De la definición de tangente se tiene,

$$\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} = (1)\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{[1]}$$

$$= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta \quad \rhd$$

13. Demuestre las siguientes identidades.

a. $\frac{\operatorname{sen}t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen}t}$

$\lhd$ De la igualdad $\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t = 1$ se tiene que

$$\operatorname{sen} t = 1-\cos^2 t \iff \operatorname{sen}t\operatorname{sen}t = (1-\cos t)(1+\cos t)$$

lo que implica,

$$\frac{\operatorname{sen}t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen}t} \quad \rhd$$

b. $\frac{1}{\cos t} - \cos t = \operatorname{sen} t \tan t$

$\lhd$ Al realizar la fracción se tiene,

$$\frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = \operatorname{sen} t\,\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \operatorname{sen} t \tan t \quad \rhd$$

c. $\cos t + \cos 2t + \cos 6t + \cos 7t = 4\cos\frac{t}{2}\cos\frac{5t}{2}\cos 4a$

$\lhd$ Utilizamos repetivamente la relación

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

(véase ejercicio **3. c.**) y tenemos,

$$\cos t + \cos 2t + \cos 6t + \cos 7t = (\cos 7t + \cos t) + (\cos 6t + \cos 2t)$$

$$= 2\cos\left(\frac{7t+t}{2}\right)\cos\left(\frac{7t-t}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{6t+2t}{2}\right)\cos\left(\frac{6t-2t}{2}\right)$$

$$= 2\cos 4t\cos 3t + 2\cos 4t\cos 2t = 2\cos 4t(\cos 3t + \cos 2t)$$

$$= (2\cos 4t)\left(2\cos\left(\frac{3t+2t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 4\cos 4t\cos\frac{t}{2}\cos\frac{5t}{2} \quad \rhd$$

d. $\operatorname{sen} 4t - \operatorname{sen} 5t - \operatorname{sen} 6t + \operatorname{sen} 7t = -4\operatorname{sen} t\cos 2t\cos\frac{11t}{2}$

$\lhd$ Usando la relación $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\phi}{2}$ se tiene

$$\operatorname{sen} 4t - \operatorname{sen} 5t - \operatorname{sen} 6t + \operatorname{sen} 7t = (\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 7t) - (\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 6t)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{-3t}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{-t}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{-3t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right)\right]\\
&= 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\\
&= 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)\right]\\
&= 2\cos\left(\frac{11t}{2}\right)2\cos 2t\operatorname{sen}(-t)\\
&= 4\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\cos 2t(-\operatorname{sen} t) = -4\cos\left(\frac{11t}{2}\right)\cos 2t\operatorname{sen} t \quad \rhd
\end{aligned}$$

e. $\cos 4t - \operatorname{sen} 4t \cot 2t = -1$

$\lhd$ Mediante un cálculo directo se tiene

$$\cos 4t - \operatorname{sen} 4t \cot 2t = \cos 4t - \operatorname{sen} 4t \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2t \cos 4t - \operatorname{sen} 4t \cos 2t}{\operatorname{sen} 2t} = \frac{\operatorname{sen}(2t - 4t)}{\operatorname{sen} 2t} = \frac{\operatorname{sen}(-2t)}{\operatorname{sen} 2t}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 2t} = -1 \quad \rhd$$

f. $\frac{1-2\operatorname{sen}^2 t}{1+\operatorname{sen} 2t} = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$

$\lhd$ Calculamos directamente el cociente, obteniendo,

$$\frac{1-\tan t}{1+\tan t} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{1 + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}} = \frac{\frac{\cos t - \operatorname{sen} t}{\cos t}}{\frac{\cos t + \operatorname{sen} t}{\cos t}} = \frac{\cos t - \operatorname{sen} t}{\cos t + \operatorname{sen} t}$$

$$= \frac{(\cos t - \operatorname{sen} t)}{(\cos t + \operatorname{sen} t)} \frac{(\cos t + \operatorname{sen} t)}{(\cos t + \operatorname{sen} t)} = \frac{\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t}{(\cos t + \operatorname{sen} t)^2}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t + 2\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t} = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 t}{1 + 2\operatorname{sen} t \cos t}$$

$$= \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 t}{1 + \operatorname{sen} 2t} \quad \rhd$$

14. Calcular, para las funciones trigonométricas, los siguientes valores.

a. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\lhd$ Usando la tabla, localizamos $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ en la columna de la función seno y se toma alguno de los ángulos de la primera columna, por ejemplo, $\frac{5\pi}{4}$. Esto es,

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\pi}{4} = 225^o \quad \rhd$$

b. $\arccos \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{4}}$.

$\lhd$ Procediendo en forma análoga al inciso anterior, tenemos

$$\arccos \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{4}} = \frac{7\pi}{12} = 105^o \quad \rhd$$

c. $\arctan\infty$.

◁ Análogamente a los incisos anteriores,

$$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90^o \quad \triangleright$$

15. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a. $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta = 0$

◁ Utilizamos la igualdad $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ para factorizar la expresión y resolver,

$$0 = \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta = \operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = (\operatorname{sen}\theta)(1 - 2\cos\theta)$$

$$\iff \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \operatorname{arcsen}(0),\ \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\iff$ (en el intervalo $[0, 2\pi]$) $\theta = 0, \pi, 2\pi$ ó $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

De esta manera, las soluciones son

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \quad \triangleright$$

b. $2\cos\theta - \operatorname{sen}2\theta = 0$

◁ Procedemos de manera análoga al inciso anterior, obteniendo,

$$0 = 2\cos\theta - \operatorname{sen}2\theta \iff 0 = 2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

$$\iff \cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta = 1 \iff \theta = \arccos 0, \quad \text{ó} \quad \theta = \operatorname{arcsen}(1)$$

$\iff$ (en el intervalo $[0, 2\pi]$, $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

De esta manera, las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \triangleright$$

c. $\cos 2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta = 5\cos 2\theta + 5$

◁ Factorizamos ambos miembros de la igualdad, obteniendo,

$$\cos 2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta = 5\cos 2\theta + 5 \iff (\cos 2\theta + 1)\operatorname{sen}\theta = 5(\cos 2\theta + 1)$$

$$\iff (\cos 2\theta + 1)\operatorname{sen}\theta - 5(\cos 2\theta + 1) = 0$$

$$\iff (\cos 2\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta - 5) = 0 \iff \cos 2\theta + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\theta = 5$$

$$\iff \cos 2\theta = -1 \text{ o } \operatorname{sen}\theta = 5 \iff 2\theta = \arccos(-1) \text{ o } \theta = \operatorname{arcsen}(-5)$$

$$\iff \theta = \frac{1}{2}\arccos(-1) \quad \text{o} \quad \theta = \operatorname{arcsen}(-5)$$

Observamos que $\operatorname{arcsen}(-5)$ no es posible debido a que el valor mínimo de la función seno es -1, lo que nos indica que la solución es, en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\theta = \frac{1}{2}\arccos(-1) = \frac{1}{2}(-\pi) = -\frac{\pi}{2} \quad \triangleright$$

d. $5\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$

$\triangleleft$ Utilizando la fórmula $\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, se obtiene,

$$5\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta \iff 5\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\iff 5\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \iff \cos\theta(5 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\iff \cos\theta = 0 \quad \text{ó} \quad 5 - 2\operatorname{sen}\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{2}$$

$$\iff \theta = \arccos(0) \quad \text{o} \quad \theta = \operatorname{arcsen}\frac{5}{2}$$

Nuevamente, la igualdad segunda no es posible debido a que el valor máximo de la función seno es 1, lo que nos indica que la solución es, en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \triangleright$$

e. $\cos 3\theta = \frac{1}{3}\cos^3 3\theta$

$$\triangleleft \quad \cos 3\theta = \frac{1}{3}\cos^3 3\theta \iff 3\cos 3\theta = \cos^3\theta$$

$$\iff 0 = \cos^3 3\theta - 3\cos 3\theta \iff 0 = \cos 3\theta(\cos^2 3\theta - 3)$$

$$\iff \cos 3\theta = 0 \text{ o } \cos^2 3\theta = 3 \iff \cos 3\theta = 0 \text{ o } \cos 3\theta = \pm\sqrt{3}$$

$$\iff 3\theta = \arccos 0 \quad \text{ó} \quad 3\theta = \arccos(\pm\sqrt{3})$$

$$\iff \theta = \frac{1}{3}\arccos 0 \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{1}{3}\arccos(\pm\sqrt{3})$$

Ya que los valores máximo y mínimo de la función coseno son 1 y -1, entonces $\arccos(\pm\sqrt{3})$ no está definido, lo que implica que la única solución es, en el intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

es decir,

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \quad \triangleright$$

f. $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\cos\theta = \operatorname{sen}\theta + 2$

$\triangleleft$ Factorizamos en el lado izquierdo el término $2\cos\theta$, obteniendo,

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\cos\theta = \operatorname{sen}\theta + 2 \iff 2\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + 2) = (\operatorname{sen}\theta + 2)$$

$$\iff 2\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + 2) - (\operatorname{sen}\theta + 2) = 0$$

$$\iff (\operatorname{sen}\theta + 2)[2\cos\theta - 1] = 0 \iff \operatorname{sen}\theta + 2 = 0 \text{ o } 2\cos\theta - 1 = 0$$
$$\iff \operatorname{sen}\theta = -2 \text{ o } \cos = \tfrac{1}{2} \iff \theta = \operatorname{arcsen}(-2) \text{ o } \theta = \arccos\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Debido a que el argumento de arcsen está limitado en el intervalo $[-1, 1]$, se sigue que la solución al problema dentro de $[0, 2\pi]$ es

$$0 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad \triangleright$$

16. Demuestra que la función $\tan x$ es periódica de periodo π.

$\triangleleft$ El dominio de $\tan x$ es, como se había mencionado,

$$\operatorname{Dom}(\tan) = \cdots \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \cdots$$

Por otro lado, si $x \in D$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\operatorname{sen}x\cos\pi + \cos x\operatorname{sen}\pi}{\cos x\cos\pi + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}\pi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}x\cos\pi}{\cos x\cos\pi} = \frac{-\operatorname{sen}x}{-\cos x} = \tan x$$

lo que prueba la afirmación (véase figura 7.17).

De esta manera, debido a la periodicidad, y utilizando la tabla de valores de la tangente para argumentos en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, podemos trazar la

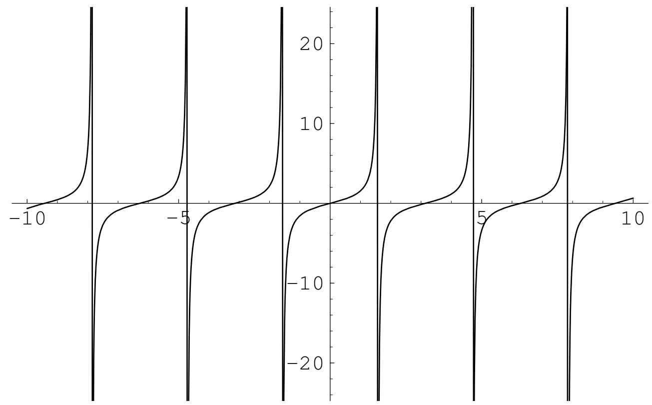


Figura 7.17: Gráfica de la función tangente

gráfica sobre ese intervalo, y hacer copias de éstas en cada uno de los otros intervalos del dominio.

Podemos observar que la función es creciente sobre cada componente del dominio, y que tiene una asíntota vertical en todo extremo de cada componente, como se muestra en la figura 7.17.

17. Demostrar que la función constante

$$f(x) = k$$

es periódica de cualquier periodo.

$\triangleleft$ Claramente para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) = k$ y $f(x+T) = k$, para cualquier $T \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, $f(x) = k$ es una función periódica trivial de cualquier periodo T. $\triangleright$

18. Trace la gráfica del oscilador $f(t) = -2\,\mathrm{sen}\,(3t+1)$

$\triangleleft$ Primero vemos que la frecuencia del reloj f es $\omega = 3$. Debido a que el periodo del seno es 2π, entonces la función f dará vuelta, si y sólo sí,

$$f(t) = f(t+T) \iff -2\,\mathrm{sen}\,(3t+1) = -2\,\mathrm{sen}(3(t+T)+1)$$

$$\iff \mathrm{sen}\,(3t+1) = \mathrm{sen}\,(3t+1+3T) \iff \mathrm{sen}\,(3t+1) = \mathrm{sen}\,((3t+1)+3T)$$

$$\iff 3T = 2\pi \iff T = \frac{2\pi}{3}$$

es decir, el periodo del reloj f es $T = \frac{2\pi}{3}$.

Por otro lado, la fase de f es $c = 1$, de donde al dibujar la gráfica con periodo $\frac{2\pi}{3}t$, para continuar el trazo de la gráfica de f, es suficiente con recorrerla una distancia $\frac{1}{3}$ a la izquierda, debido a que en un nuevo origen

$$3t + 1 = 0 \iff t = \frac{-1}{3}$$

Finalmente, la amplitud -2 nos hará reflejar la gráfica sobre el eje x y estará encerrada en la banda $[-2, 2]$ como lo muestra la figura 7.18. $\triangleright$

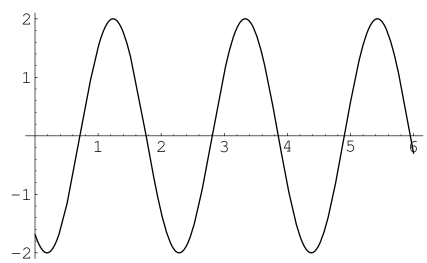


Figura 7.18: Gráfica de $f(t) = -2\text{sen}\,(3t + 1)$

19. Trace la gráfica del reloj $g(t) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{3}\right)$

$\triangleleft$ Inicialmente, la frecuencia del oscilador g es $\omega = \frac{\pi}{18}$, lo que implica que el periodo T de g se calcula mediante la siguiente cadena de proposiciones.

$$g(t) = g(t+T) \iff \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi(t+T)}{18} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}T\right)$$

$$\iff \frac{\pi}{18}T = 2\pi \iff T = 36$$

lo que nos indica que el periodo del reloj g es $T = 36$.

La fase para g es $c = \frac{-\pi}{3}$, lo que nos indica que para seguir con el trazo de la gráfica de g es suficiente con trasladar al nuevo origen $\frac{\pi}{18}t - \frac{\pi}{3} = 0$ la gráfica de $\cos\frac{\pi}{18}t$, es decir, trasladarla horizontalmente a $t = 6$.

Finalmente, la amplitud $A = \sqrt{3}$ nos deformará la gráfica obtenida, y la acotará entre la banda $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ como lo muestra la figura 7.19. $\triangleright$

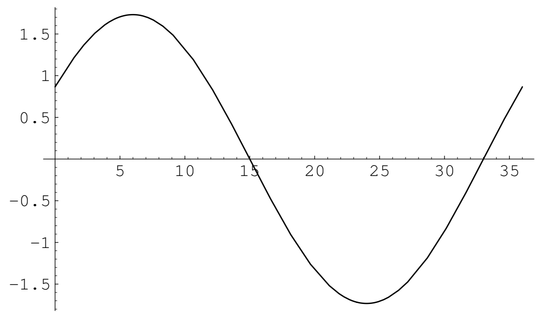


Figura 7.19: Gráfica de $g(t) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi t}{18} - \frac{\pi}{3}\right)$

7.3 Ejercicios

1. Complete la siguiente tabla de conversión grados-radianes.

Conversión radianes y grados									
195^o	210			255^o		285^o		315^o	
		$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$

2. Evalúe las siguientes funciones en los argumentos $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{6}, \frac{35\pi}{12}$ y $\frac{91\pi}{12}$

a. $f(\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$

b. $g(\theta) = 4\operatorname{sen} 2\theta + 3\cos 3\theta$

3. Dado sen $\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0.587$. Calcule, sin usar calculadora, utilizando las propiedades de la función seno los valores que se piden.

a. sen $\left(\frac{-\pi}{5}\right)$ **b.** sen $\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ **c.** sen $\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ **d.** sen $\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

4. Siga la idea de la recta que pasa por el origen para localizar y dibujar el ángulo dado a continuación. También diga si el seno S, coseno C y tangente T de ese ángulo son positivos, negativos, cero o no están definidos.

a. $\frac{\pi}{4}$ **b.** $\frac{\pi}{2}$ **c.** 3π **d.** $\frac{4\pi}{3}$ **e.** $\frac{-\pi}{3}$ **f.** $\frac{-5}{6}\pi$ **g.** $-\frac{10}{6}\pi$, **h.** 1, **i.** 2, **j.** -1, **h.** 4

5. Un puesto de observación, que está en la costa, se encuentra a una altura de 225 metros sobre el nivel del mar. Si el ángulo de depresión desde este punto hasta un barco en el mar es $\frac{\pi}{6}$. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la orilla del mar?

6. La altura de la cima de una colina se eleva 40 metros sobre el nivel de la pista de un aeropuerto cercano, y la distancia horizontal desde el extremo final de una pista hasta un punto que se encuentra directamente bajo la cima de la colina es de $70\sqrt{3}$ metros. Un avión despega al final de la pista en dirección a la colina con un ángulo que permanece constante para librarla. Si el piloto desea pasar 30 metros sobre la cima, ¿cuál debe ser el ángulo con que debe elevarse? Exprese su respuesta en radianes.

7. Un topógrafo determina que desde el punto A en el suelo el ángulo de elevación hasta la cima de una montaña mide 25^o. Cuando él se encuentra en un punto a 200 metros más cerca de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 42^o. ¿Cuál es la altura de la montaña? (Suponga que la base de la montaña y los dos puntos de observación están sobre la misma recta).

8. A partir de la relación $x = 3\cos\theta$, calcule las funciones trigonométricas para el ángulo θ. Calcule además $\ln(\sec\theta + \tan\theta)$ y $\cos 2\theta$.

9. A partir de la relación $x = 4\cot\theta$, calcule las funciones trigonométricas para el ángulo θ. Calcule además $\ln(\csc\theta - \cot\theta)$ y θ.

10. A partir de la relación $x = 5\csc\theta$, calcule las funciones trigonométricas para el ángulo θ. Calcule además $\ln(\csc\theta - \cot\theta)$ y $\cot\theta\csc\theta$.

11. Demuestre las siguientes igualdades.

a. $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ **b.** $\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$

c. $\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$ **d.** $\cos\theta - \cos\phi = -2\text{sen}\,\frac{\theta+\phi}{2}\text{sen}\,\frac{\theta-\phi}{2}$

e. $\tan\theta - \tan\phi = \frac{\text{sen}\,(\theta-\phi)}{\cos\theta\cos\phi}$ **f.** $\cos\theta\cos\phi = \frac{\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)}{2}$

g. $\text{sen}\,\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

12. Exprese las siguientes funciones mediante una composición.

a. $f(x) = \text{sen}^2 x$ **b.** $g(x) = \text{sen}\,x^2$ **c.** $h(x) = \text{sen}\,(\text{sen}\,x)$

13. Demuestre las siguientes identidades.

a. $\frac{1}{\tan t + \cot t} = \text{sen}\,t\cos t$ **b.** $\cos^4 a - \text{sen}^4 a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

c. $\text{sen}\,9\beta + \text{sen}\,10\beta + \text{sen}\,11\beta + \text{sen}\,12\beta = 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta\,\text{sen}\,\frac{21\beta}{2}$

d. $(\operatorname{sen} a)^{-1} + (\tan a)^{-1} = \cot \frac{a}{2}$ **e.** $\frac{1-\cos 4a}{\cos^{-2} 2a-1} + \frac{1+\cos 4a}{\operatorname{sen}^{-2} 3a-1} = 2$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a. $2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$ **b.** $\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

c. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta = 0$ **d.** $\cos^2 3\theta - \operatorname{sen}^2 3\theta = -1$

Dibuje las gráficas de los osciladores

15. $f(t) = -3\operatorname{sen}(4t-2)$ **16.** $g(t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{24}t - \frac{\pi}{4}\right)$

17. Demuestre las siguientes igualdades trigonométricas

a. $\operatorname{sen}\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$ **b.** $\cos\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$

c. $\tan\frac{t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}$

18. Dibuje la gráfica del reloj $f(t) = 4\cos(2t+3)$.

Soluciones a los ejercicios

Capítulo 1

1. a. verdadera **b.** falsa **c.** falsa **d.** verdadera **e.** falsa **f.** falsa **g.** verdadera **h.** falsa

2. a. $A = \{\text{H, Li, Na, K, Rb, Cs, Fr}\}$

b. $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

c.

$$C = \{\text{Biología General, Química General, Matemáticas I,}$$
$$\text{Int. a la Computación, Fundamentos de Física, Química Orgánica}$$
$$\text{Bioquímica I, Matemáticas II, Fisicoquímica I,}$$
$$\text{Bioquímica II, Matemáticas III, Bioquímica III}\}$$

d. $D = \{\text{Edo. de México, Morelos}\}$

e. $E = \{x \mid x \text{ es un gas raro}\}$
$= \{x \mid x \quad \text{pertenece al grupo 8A de la tabla periódica}\}$

f. $F = \{x \mid x \quad \text{es un integrante del grupo The Beatles}\}$

3. a. $\{1, 2, \cdots 9\}$ **b.** $\{3, 4, 5, 6\}$ **c.** $\{1, 2, 10\}$

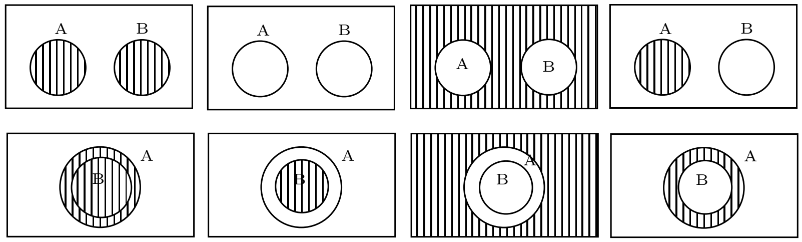
d. $\{7, 8, 9, 10\}$ **e.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ **f.** $\{7, 8, 9\}$

g. $\{1, 2\}$ **h.** $\emptyset$ **i.** $\{1, 2, 3 \cdots 9\}$

5. a. 9 **b.** 4 **c.** 3 **d.** 4 **e.** 7 **f.** 3 **g.** 2 **h.** 0 **i.** 9

6. A tiene $2^{n(A)} = 2^3 = 8$ subconjuntos que son,

$$\emptyset, \{0\}, \{C\}, \{H\}, \{H, O\}, \{H, C\}, \{C, O\}, \{C, O, H\}$$



7. Los diagramas de Venn se ilustran en la figura siguiente.

Diagramas de Venn del problema 1.7.

8. **a.** 12 **b.** 10 **c.** 5 **d.** 2

9. **a.** 11 jóvenes **b.** 24 jóvenes **c.** 64 jóvenes

10. **a.** si **b.** 30 **c.** 10 **d.** 20

Capítulo 2

1. **a.** $3(1+x) = 3+3x$ **b.** $-5(-14) = 5(14) = 70$ **c.** $-2(a-b) = -2aq+2b$

d. $3 \div (20 \div 5) = 3 \div 4 = \frac{3}{4}$ **e.** $(5 \div 3)(3 \div 2) = \frac{5}{3} . \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

2. **a.** $(9 \times 8) - (12 \div 3) = 72 - 4 = 68$

b $((9 \times 8) - 12) \div 3) = 72 - 12 \div 3 = 60 \div 3 = 20$

s**c.** $9 \times ((8-12) \div 3) = 9 \times ((-4) \div 3 = (-36) \div 3 = -12$

d. $9 \times (8 - (12 \div 3)) = 9 \times 4 = 36$

3. **a.** $\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{1}{10}$ **c.** $\frac{17}{20}$ **d.** $\frac{13}{20}$

e. $\frac{3}{40}$ **f.** $\frac{3}{2}$ **g.** $\frac{-27}{40}$

4. **a.** $-\frac{17}{15}$ **b.** $\frac{-1}{21}$ **c.** $\frac{-2}{21}$

d. $\frac{-52}{105}$ **e.** $\frac{-14}{5}$ **f.** $\frac{5}{42}$

5. **a.** $18 + (0.05)18 = (1)10 + (0.05)18 = (1+0.05)18 = (1.05)18$

b. $27 - (0.1)27 = 1(27) - 0.1(27) = (1-0.1)27 = (0.9)(27)$

c. $43 + 43(0.8) = (43)1 + (43)0.8 = 43(1+0.8) = (43)(1.8)$

6. **a.** incorrecta: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

b. incorrecta: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **c.** correcta.

7. **a.** -15, **b.** -3, **c.** $\frac{17}{12}$, **d.** $\frac{-3}{4}$, **e.** $\frac{-1}{11}$

8. **a.** 15, **b.** -3, **c.** $\frac{-47}{12}$, **d.** $\frac{-3}{4}$, **e.** $\frac{-1}{11}$

9. 29241, 13.0766, 5000211, 5.5504, 5.84×10^{-3}, 537.21

10. 2.9241, 1.30766, 5.00021, 1.19581, 0.5847, 5.3721

11. **a.** 0.1% **b.** 80% **c.** 283% **d.** 2830% **e.** 28300% **f.** 57.14% **g.** 266.6%

12. **a.** 0.413 **b.** 0.001 **c.** 0.15 **d.** 2.0 **e.** 0.1115 **f.** 0.0375

13. **a.** 7600,000 **b.** 7.6%

14. **a.** 5445 **b.** 99%

15. Hay 11% de material A, 30% del material B y 13% del material C.

16. **a.** 595.2 kg **b.** 590.4 kg **c.** 576.3 kg **d.** 558.1 kg

17. a^2 **18.** $x^{7/6}$ **19.** x^4 **20.** $b^{\frac{1}{15}}$

21. t^{10} **22.** a^4b^4 **23.** $32x^{10}y^{15}$ **24.** $10x$

25. $\frac{125a^4}{4} = \frac{125}{4}a^4$ **26.** $(x+1)^7$ **27.** $27a^4b^11$

28. $a^3b^{-6} = \frac{a^3}{b^6}$ **29.** $c^{13/3}$ **30.** x^3

31. $(y^2+1)^{7/3}$ **32.** $216x^9y^{15}z^{18}$ **33.** $x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

34. $\frac{9a^4}{b^6}$ **35.** $(z^2+1)^{5/3}$ **36.** $(5a)^{7/3}$

37. $(x^2 + a^{5/3})^{\frac{1}{2}}$ **38.** $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{4/3}$ **39.** 27

40. 8 **41.** 32 **42.** $6\sqrt{2}$

43. $3\sqrt[3]{2}$ **44.** $\sqrt[3]{x^5}\sqrt{a}$ **45.** $2\sqrt{a^3} - 5\sqrt[5]{b^6}$

46. $3\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{(3x)^3}$ **47.** $\sqrt{\left(\frac{3a}{5b}\right)^5}$ **48.** $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b}$

49. **a.** $1 \times 10^{-9} m^3$, **b.** $\frac{1m^3}{1\times10^{-9}m^3} = 1 \times 10^9$ gotas

50. La notación es más compacta.
Más facilidad para hacer operaciones

51. **a.** 2000 **b.** 1 200 000 **c.** 0.0076 **d.** 0.000047

52. 7×10^{-6}

53. 8×10^{-7}, 4×10^{-5}, 3.2×10^{-3}, 2×10^{-2}

54. **a.** 8.2×10^{-8} **b.** 5.76×10^{1} **c.** 1.035×10^{-10} **d.** 5×10^{9}

e. 2.5×10^{25} **f.** 7×10^{-8} **g.** 2.7×10^{13}

h. 4×10^{-10} **i.** 4×10^{-7} **j.** 1.2×10^{-4}

55. **a.** 8.1×10^{-4}, **b.** -1.9×10^{5}

56. Escribirlos con la misma potencia como se muestra en el siguiente ejercicio.

57. **a.** $1.28 \times 10^5 + 4 \times 10^3 = 1.28 \times 10^5 + 0.04 \times 10^5 = 1.32 \times 10^5$

b. $7.54 \times 10^8 - 3.7 \times 10^7 = 7.54 \times 10^8 - 0.37 \times 10^8 = 7.17 \times 10^8$

58. **a.** 10^{-39} **b.** $\frac{10^{-24} gr}{10^{-39} cm^3} = 10^{15} gr/cm^3$

59. $\frac{V}{A} = \frac{6 \times 10^{-2} cm^3}{2 \times 10^4 cm^2} = 3 \times 10^{-6} cm$

60. **a.** Es falsa, las demás son verdaderas.

61. 8 **62.** 8 **63.** 8 **64.** 38

65. 8 **66.** 8 **67.** 11 **68.** 11

69. $\frac{3}{5}$ **70.** $\frac{3}{5}$ **71.** $\frac{3}{5}$ **72.** $-\frac{3}{5}$

73. 72 **74.** 72 **75.** **a.** 2, **b.** 4 , **c.** 0, **d.** 0

76.

a. 1, 1, 3, 3, -1 **b.** 1, 3, 1, 3, -1

c. 1, 1, 3, 3, -1 **d.** 0, 0, 6, 6, 0

e. 0, 6, 0, 6, 0

Capítulo 3

1. **a.** $-10x$ **b.** $\frac{13}{12}x$ **c.** $\frac{-13}{10}x^2$ **d.** $-3a^3+10a^2$

e. $4.61xy-2.28y$ **f.** $-6x^2y-12xy^2$

2. **a.** $4x^2-20x+25$ **b.** t^4+4t^2+4 **c.** 9604

d. $a^6+2a^2+\frac{1}{a^2}$ **e.** a^2-100 **f.** $\frac{x^2}{25}-\frac{9}{4}$

g. $x-3$ **h.** $a^3-6a^2+12a-8$ **i.** $a^3+2a^2+\frac{4}{3}a+\frac{8}{27}$

j. $8x^6-12x^4y+6x^2y^2-y^3$ **k.** $2x^{5/6}-3x^{4/3}$

3. **a.** $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

b. $32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5$

c. $a^4+16a^3+96a^2+256a+256$

4. **a.** $3x^2(x-2x^3+3)$ **b.** $2a(2a-3a^2+4+5a^3)$

c. $(5a+b)(5a-b)$ **d.** $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$

e. $(t+4)^2$ **f.** $(2x-1)^2$ **g.** $(a+4)^3$ **h.** $(x-1)^3$

i. $(a-2)(a^2+2a+4)$ **j.** $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$

k. $(x-2^{1/3})(x^2+2^{\frac{1}{3}}x+2^{2/3})$ **l.** $(x+6)(x-4)$

m. $(a+5)(a-4)$ **n.** $(3x+4)(x+2)$ **o.** $(2x+5)(x-1)$

p. $(5x-5)(x-3)$

5. **a.** $(x+3)(x-5)$

b. $\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

c. x^2+x+3 es irreducible en $\mathbb{R}$.

d. $6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)3\left(x-\frac{2}{3}\right)=(2x+1)(3x-2)$

e. $x(x^2+5x+6)=x(x+2)(x+3)$

f. $(x-2)(x^2+4x+3)=(x-2)(x+1)(x+3)$

g. $(x+1)(x^2-6x+9)=(x+1)(x-3)^2$

6. **a.** $\frac{y}{w+z}$ **b.** $\frac{m+n}{b-c}$ **c.** $\frac{2}{a-2b}$ **d.** $\frac{x-2}{x+2}$

e. $frac3+a3a$ **f.** $\frac{a+2}{a+1}$ **g.** $\frac{x-4}{x+4}$

h. $-\frac{4c-1}{3}$ **i.** $\frac{(2ab-9a)x}{24a^2b^2}$ **j.** $\frac{c-b}{(a+b)(a+c)}$

k. $\frac{k^2+k}{k+3}$ **l.** $\frac{-3k-10m}{k^2-9m^2}$ **ll.** $\frac{11}{c^2-9}$

m. $\frac{3c^2-2cd+6d^2}{c-d}^3$ **n.** $\frac{1}{(c+dx)(a+bx)}$ **o.** $y+x$

p. mw **q.** $\frac{bd+bc}{d}$ **r.** $a(a-x)$ **s.** b

t. $\frac{a^2(b-a)}{b^2}$

7. $C=\frac{1}{2\pi fx}$ **8.** $V_0=2V-V_t$ **9.** $r=\frac{2E}{e}-R$

10. $a=\frac{Cb}{kb+C}$ **11.** $t=\frac{2d+a}{2a}$ **12.** $x=\frac{(n+1)f}{n}$

13. $R=\frac{Wr}{W+2p}$ **14.** $n=\frac{IR}{E-Ir}$ **15.** $W=\frac{R}{1-fk^2}$

16. $t=\frac{V_1-V_0}{0.00365V_0}$

17. **a.** $x=1$ **b.** $x=5$ **c.** $x=5/3$

d. $x=-3/2$ **e.** $z=\frac{-45}{13}$ **f.** $x=2$

g. $y=-7$ **h.** $w=\frac{1}{2}$ **i.** $x=28$

j. $x=7$ **k.** $x=1$ **l.** $x=13$

18. 57.14 y 22.86 **19.** 240 Kg.

20. 23 km^2 a \$500.00 y 77 km^2 a \$1800.00 **21.** 150 m **22.** 115 m

23. 1.3 kg de acero al 18% y 1.7 kg de acero al % **24.** 30^{o}C

25. 13.41 hr en posición vertical y 10.59 hr en horizontal **26.** 2.4 litros

27. **a.** $x=-6$ y $x=2$ **b.** $x=-4$ y $x=5$ **c.** $x=3$ doble.

d. $x=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$ y $x=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$ **e.** $x=-3$ y $x=\frac{1}{2}$ **f.** $x=-\frac{5}{2}$ doble.

g. $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{2}{3}$ **h.** $x=\frac{-7-\sqrt{13}}{2}$ y $x=\frac{-7+\sqrt{13}}{2}$ **i.** $x=3$ doble.

j. No hay raíces reales. **k.** $x=\frac{1-\sqrt{201}}{20}$ y $x=\frac{1+\sqrt{203}}{20}$ **l.** $x=-3$ doble.

ll. $x=-\frac{1}{4}$ y $x=\frac{3}{5}$ **m.** $x=\frac{-13-\sqrt{505}}{28}$ y $x=\frac{-13+\sqrt{505}}{28}$

n. $z=\frac{3-\sqrt{65}}{2}$ y $z=\frac{3+\sqrt{65}}{2}$ **o.** $y=m$ y $y=n$

p. $r=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ y $r=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ **q.** $h=\frac{25}{6}$ y $h=6$

28. 53, 54, y -54, -53. **29.** 1.48 cm. **30.** 20×90, 30×60.

Capítulo 4

1. **a.** $\frac{2}{3}\underline{\quad<\quad}\frac{5}{7}$ **b.** $\frac{21}{4}\underline{\quad>\quad}5$ **c.** $-\frac{1}{4}\underline{\quad>\quad}\frac{-1}{3}$

d. $\sqrt{28}\underline{\quad=\quad}2\sqrt{7}$ **e.** $-0.001\underline{\quad>\quad}\frac{-1}{500}$

f. $|-0.001|\underline{\quad<\quad}\left|\frac{-1}{500}\right|$ **g.** $\frac{|-1|+|-2|}{|-3|+|-5|}\underline{\quad>\quad}\left|\frac{-1}{3}\right|$

h. $|-3|+|-7|\underline{\quad>\quad}|-3|-|-7|$

2. **a.** $x=10,-4$ **b.** $x=-11,9$ **c.** $x=-2,4$

d. $x=1,1/3$ **e.** $[-1/2,17/6]$ **f.** $(-\infty,1/2)\cup(7,\infty)$

g. $(-\infty,0]\cup[2/3,\infty)$ **h.** $(-\infty,-1/5]$

3. **a.** $(-6,2)$ **b.** $(-\infty,-4)\cup(5,\infty)$

c. $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ **d.** $\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2},\infty\right)$

e. $\left[-3,\frac{1}{2}\right]$ **f.** $\emptyset$

g. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$ **h.** $\left(\frac{-7-\sqrt{3}}{2},\frac{-7+\sqrt{13}}{2}\right)$

i. $x=3$ **j.** $\emptyset$ **k.** $\left[\frac{1-\sqrt{201}}{20},\frac{1-\sqrt{201}}{20}\right]$

l. $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ **ll.** $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$

m. $(-\infty,-2-\sqrt{19})\cup(3,-2+\sqrt{19})$

Capítulo 5

1. par **2.** impar **3.** impar

4. no es par ni impar **5.** impar

6. **a.** $x=f(y)=\frac{6+2y}{3}$ **b.** $y=g(x)=\frac{3x-6}{2}$

7. $V(d)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{\pi d^3}{6}$ **8.** $A(h)=\frac{1500}{h}+2\pi\sqrt{\frac{750}{\pi h}}h$

9. Respuestas. $x=f(h)=\sqrt{64-h^2}$ **18 a.** $R=0.05P-A$

20 a. $r=kp(A-p)$, **c.** $p=\frac{A}{2}$ **21.** 35 m. **22.** 1.86

24. El radio del círculo es 1.4 y el lado del cuadrado es 2.8.

25. Hay dos respuestas: A los 3 y 5 segundos.

26. 11.25 m. **29.** 2.86 cm. **31.** 5 y 6. **32.** $\ell = 20$

33. Hay dos soluciones: 2 y 5. **34. a.** 9, **b.** $\frac{1}{27}$, **c.** $\frac{1}{2}$ **35.** x^m

36. La función $y = x^2$ crece, al principio, muy lentamente, pero después crece demasiado, comparado con $y = x^{1/2}$.

37. Si $0 < m < n$, x^{-n} domina a x^{-m}. En infinito es al revés.

40. Rafael tiene 2 años de edad y Carlos 5.

41. No. Sólo son pares aquellos polinomios que contienen exclusivamente términos con exponente par. Similarmente para los impares.

42. Se parece a $4x^4$

43. Los ceros son: $x = -5, -2, 1, 2$. Y la función se comporta como

$$\alpha(x+5)^3, \quad \alpha < 0, \quad \text{en} \quad (-5, 0)$$

$$\beta(x+2), \quad \beta > 0 \quad \text{en} \quad (-2, 0)$$

$$\gamma(x-1), \quad \gamma > 0 \quad \text{en} \quad (1, 0)$$

$$\delta(x-2), \quad \delta > 0 \quad \text{en} \quad (2, 0)$$

44. Los ceros son $x = -2, -1, 2$ y $f(x)$ es similar a

$$\alpha(x+2)^2, \quad \alpha < 0 \quad \text{en} \quad (-2, 0)$$

$$\beta(x+1)^3, \quad \beta > 0 \quad \text{en} \quad (-1, 0)$$

$$\gamma(x-1)^2, \quad \gamma > 0, \quad \text{en} \quad (1, 0)$$

$$\delta(x-2), \quad \delta > 0 \quad \text{en} \quad (2, 0)$$

46. Asíntota vertical $x = 1$; asíntota horizontal $y = 1$

47. $a.v\, x = 0$; $a.h\, y = \frac{1}{3}$

48. $a.v\, x = -2$; $a.h\, y = -1$

Capítulo 6

1. Se elabora la tabla

Sucesión de números	
n	$(1+\frac{1}{3n})^n$
10	1.3880
100	1.3948
1000	1.3955
10000	1.3956
100000	1.3956
1000000	1.3956
10000000	1.3956

y hasta 4 decimales, $e^{1/3} \approx 1.3956$.

2. a. $t = \frac{\ln 9}{\ln 4}$ **b.** $t = \frac{\ln A - \ln B}{\ln a - \ln b} = \frac{\ln\left(\frac{A}{B}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

c. $t = \frac{\ln N - \ln A}{\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{N}{A}\right)}{\lambda}$ **d.** $t = \frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{1-PA}{PB}\right]$

3 a. $\frac{1}{t}$ **b.** $\frac{1}{t^2}$ **c.** t^2 **d.** $t^{\frac{1}{3}}$
e. $\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ **f.** $\frac{\ln x}{\ln y}$

g. $\ln\left(\frac{B^3}{2A^2}\right)$ **h.** 3 **i.** $\ln 2$ **j.** $1 + \ln 2 \approx 1.69$

4.
a. $x_= \log_{10}[y \pm \sqrt{y^2-1}$ **b.** $x = \frac{1}{2}\log_{10}\left[\frac{1+y}{1-y}\right]$

c. $x = \ln[y \pm \sqrt{x^2-1}]$ **d.** $x = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{y+1}{y-1}\right]$

5. a. $x = \frac{3}{5}$ **b.** $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ **c.** No tiene sol. **d.**$x = -\frac{94}{4}$
e. $x = \frac{62208}{41469} \approx 1.5001$ **f.** $x = \frac{74}{23} \approx 3.217$ **g.** $x = \frac{e^5-6}{3e^5-12}$ **h.** **i.**
j.

18. 0.93 años $\approx$ 11 meses

19. a. 12.3 hrs **b.** 6.5 hrs

20. a. 3.28 m **b.** 16.2 años

21. a. $574.68\, mmHg$ **b.** $h = 547.83\, m$ **c.** $760\, mm\, Hg$

22. a. 13.5%

23. 5552.39

24. **a.** 172.54 cm **b.** 198 cm.

25. **a.** 43.10 **b.** 20.15 **c.** 8.2093

26. **a.** $\lambda = 0.05$, $P = 92.10\,m$ **b.** $\lambda = 0.173$, $\lambda = 26.57\,m$.

27. **a.** $t = 26748.85$ años **b.** $p = 0.04$

29. $Q(t) = 32e^{04t}$ **a.** 1.7 meses. **b.** aprox 6.9 meses. **c.** 8.6 meses.

30. **a.** Si $F(x) = \ln$, $G(x) = x^2$

$$f(x) = (G \circ F)(x); \quad g(x) = (F \circ G)(h); \quad h(x) = (F \circ F)(x)$$

Capítulo 7

1. Tabla obtenida,

Conversión radianes y grados									
195^o	210^o	225^o	240^o	255^o	270^o	285^o	300^o	315^o	330^o
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

3. **a.** -0.587 **b.** $0 - 0.587$ **c.** 0.587 **d.** -0.587

4. **a.** $\begin{cases} S:+ \\ C:+ \\ T:+ \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} S:1 \\ C:0 \\ T:\text{no def.} \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} S:0 \\ C:-1 \\ T:-0 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} S:- \\ C:- \\ T:+ \end{cases}$

e. $\begin{cases} S:- \\ C:+ \\ T:- \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} S:- \\ C:- \\ T:+ \end{cases}$ **g.** $\begin{cases} S=+ \\ C=+ \\ T:+ \end{cases}$ **h.** $\begin{cases} S:+ \\ C:+ \\ T:+ \end{cases}$

i. $\begin{cases} S:+ \\ C=- \\ T=- \end{cases}$ **j.** $\begin{cases} S:- \\ C=+ \\ T=- \end{cases}$, **k.** $\begin{cases} S:- \\ C=- \\ T=+ \end{cases}$

12. Si $F(x) = \operatorname{sen} x$, y $G(x) = x^2$.

$$f(x) = (G \circ F)(x) \quad g(x) = (F \circ G)(x); \quad h(x) = (F \circ F)(x).$$

Índice