UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Tarea 2. optimización

Brayan Alejandro Romero Castro

Álgebra multilineal y formanas canonicas

Ejercicios, libro guia

2.1 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, con $x_1, \ldots, x_k \in C$, y sean $\theta_1, \ldots \theta_k \in \mathbb{R}$, con $\theta_i \geq 0$, y $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, Muestre que $\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k \in C$

<u>*Solución.*</u>

Procedamos por inducción sobre k, por definición para $k = 2$ se tiene, supongamos que se tiene para $k - 1$ y demostremos que se tiene para k arbitrario.
Sea $y = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, donde la suma de los θ_i es igual a 1, y x_i esta en C, $\theta_1 \neq 1$, notemos entonces que y se puede escribir como.

$$y = \theta_1 x_1 + (1 - \theta_1)(\mu_2 x_2 + \cdots + \mu_k x_k)$$

donde $\mu_i = \theta_i/(1 - \theta_1)$, note que la suma de estos μ_i es 1, puesto que

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \frac{\theta_1 + \cdots + \theta_k}{1 - \theta_1} = \frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_1} = 1$$

Así, $y \in C$.

2.3 *midpoint convexity.* un conjunto C es *midpoint convex* si cualesquiera dos puntos $a, b \in C$, el punto medio $(a + b)/2$ esta en C. obviamente un conjunto convexo es *midpoint convex.* se puede probar que bajo condiciones debiles, la convexidad del punto medio implica la convexidad. Como un simple caso, pruebe que si C es cerrado y es *midpoint convex*, entonces C es convexo.

<u>*Solución.*</u>
Tenemos que mostrar que $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ para cualesquiera $\theta \in [0, 1]$ y $x, y \in C$. Sea $\theta^{(k)}$ la expreción binaria de k es decir un número de la forma.

$$\theta^{(k)} = c_1 2^{-1} + c_2 2^{-2} + \cdots + c_k 2^{-k}$$

con $c_i \in \{0, 1\}$, cercano a θ. Por la convexidad del punto medio (aplicada k veces, recursivamente), $\theta^{(k)} x + (1 - \theta^{(k)})y \in C$. ya que C es cerrado, entonces.

$$\lim_{k \to \infty} (\theta^{(k)} x + (1 - \theta^{(k)})y) = \theta x + (1 - \theta)y \in C$$

2.4 Muestre que el cubrimiento convexo de un conjunto S es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen S. (El mismo metodo puede ser usado para mostrar que el cubrimiento affine, conico o lineal de un conjunto S es la intersección de todods los conjuntos conicos, o afines, o subespacios que contengan a S.)

Solución.
Sea H la envolvente convexa de S y sea $\mathcal{D}$ la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen S, es decir.

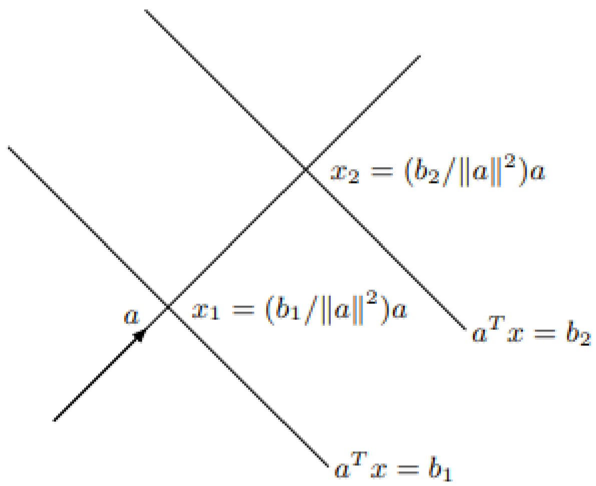
$$\mathcal{D} = \bigcap\{D : \text{ D convexo}, D \supseteq S\}$$

Vamos a mostrar que $H = \mathcal{D}$, mostrando que $H \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{D} \subseteq H$. Primero mostremos que $H \subseteq \mathcal{D}$. suponga que $x \in H$, es decir, x es una combinación convexa de algunos puntos $x_1, \ldots, x_n \in S$. Ahora sea cualquier conjunto convexo tal que $D \supseteq S$, evidentemente tenemos que $x_1, \ldots, x_n \in S$. Ahora sea D, cualquier conjunto convexo tal que $D \subseteq S$. evidentemente tenemos que $x_1 \ldots x_n \in D$. Dado que D es convexo y x es una conbinación de $x_1, \ldots, x_n$ se sique que $x \in D$. Hemos mostrado que para cualquier conjunto convexo D que contiene a S tenemos que $x \in D$. Esto significa que x esta en la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a S, es decir que $x \in D$. Ahora mostremos que $D \subset H$. dado que H e convexo y contiene a S, tenemos que $H = D$ para algun D, en la construcción de $\mathcal{D}$. Nosotros primero mostramos que $H = D$ mostrando que $H \subseteq D$ y $D \subseteq H$.

2.5 Cuál es la distancia entre dos hiperplanos paralelos $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$

Solución.

La distancia entre los dos hiperplanos es $|b_1 - b_2|/||a||_2$. para ver esto considere la construcción en la figura de abajo.



Esta distancia entre los dos hiperplanos es además la distancia entre los dos puntos x_1 y x_2, donde los planos se intersectan en la linea atravez del origen y es paralela al vector normal a. Estos puntos estan dados por

$$x_1 = (b_1/||a||_2^2)a \qquad x_2 = (b_2/||a||_2^2)a$$

y esta distancia es

$$||x_1 - x_2||_2 = |b_1 - b_2|/||a||_2$$

2.8 Cuáles de los siguientes conjuntos S son poliedros? si es posible, exprese S en la forma $S = \{x : Ax \preceq b, Fx = g\}$.

(a) $S = \{y_1a_1 + y_2a_2 : -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$

Solución. S es un poliedro. en $\mathbb{R}^2$, puede ser visto como un paralelogramo con aristas $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, $-a_1 + a_2$, $-a_1 - a_2$.
Por simplicidad suponga que a_1, a_2 son independientes, vamos a expresar S como la intersección de 3 conjuntos. S_1 siendo el plano definido por a_1 y a_2, $S_2 = \{z + y_1a_1 + y_2a_2 : a_1^Tz = a_2^Tz = 0, -1 \leq y_1 \leq 1\}$, esto es una losa paralela a a_2 y ortogonal a S_1, $S_3 = \{z + y_1a_1 + y_2a_2 : a_1^Tz = a_2^T = 0, -1 \leq y_2 \leq 1\}$. esto es una losa paralela a a_1 y ortogonal a S_1, estos conjuntos pueden ser descritos por las siguientes inecuaciones: S_1, puede ser descrito por $v_k^Tx = 0, k = 1, \ldots, n-2$ Donde los v_k son $n-2$ vectores independientes que son ortogonales a a_1 y a_2, sea c_1 un vector en el plano definido por a_1 y a_2 y ortogonal a a_2, entonces $x \in S_2$, si y solo si $|c_1^Ta_1| \leq c_1^Tx \leq |c_1^Ta_1|$ Similarmente, sea c_2 un vector en el plano definido por a_1 y a_2, y ortogonal a a_1, entonces $x \in S_3$ si y solo si

$$-|c_2^Ta_2| \leq c_2^Tx \leq |c_2^Ta_2|.$$

Poniendo todo junto, podemos describir a S, como la solución de las $2n$ inecuaciones lineales.

$$\begin{gathered}
v_kx \leq 0 \quad k = 1, \ldots, n-2 \\
-v_kx \leq 0 \quad k = 1, \ldots, n-2 \\
c_1^Tx \leq |c_1^Ta_1| \\
-c_1^Tx \leq |c_1^Ta_1| \\
c_2^Tx \leq |c_2^Ta_2| \\
-c_2^Tx \leq |c_2^Ta_2|
\end{gathered}$$

(b) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, 1^Tx = 1, \sum_{i=1}^n x_ia_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_ia_i^2 = b_2\}$ Donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Solución.
S es un poliedro, definido por las inecuaciones lineales $x_k \geq 0$, y 3 restricciones de igualdad, es decir S se puede ver como:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : e_1x \geq 0, e_2x \geq 0, \ldots, e_nx \geq 0, 1^Tx = 1, a^Tax^T = b_2, a^Tx = b_1\}$$

(c) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0, x^Ty \leq 1$ para todo y con $||y||_2 = 1\}$

Solución.

No es un poliedro, para ver esto basta notar que es la intersección del "Hiperplano positivo", con la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, y como la bola solo se puede ver como una intersección infinita de poliedro se sigue que no es un poliedro, ya que la definición exige que sea una intersección finita.

(d) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0, x^Ty \leq 1$ para todo $y$con $\sum_{i=1}^n |y_i| = 1\}$
Solución.
S es un poliedro. S es la intersección del conjunto $\{x : |x_k| \leq 1, k = 1, \ldots, n\}$ y el octante no negativo $\mathbb{R}_+^n$, esto se sigue del siguiente hecho:

$$x^Ty \leq 1 \quad \text{para todo } y \text{ con} \sum_{i=1}^n |y_i| = 1 \Leftrightarrow |x_i| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

2.9 *conjuntos de Voronoi y descomposición polyhedral.* Sean $x_0, \dots x_k \in \mathbb{R}^n$, considere el conjuntos de puntos cercanos (en norma euclidea) a x_0 mas cercanos que a los otros x_i, i.e.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0||_2 \leq ||x - x_i||, i = 1, \dots, K\}.$$

V es llamado la región alrededor de x_0 con respecto a $x_1, \dots, x_K$

(a) Muestre que V es un poliedro. Exprese V en la forma $V = \{x : Ax \preceq b\}$

<u>*Solución.*</u>

x es mas cercano a x_0, que a x_i si y solo si. $||x - x_0||_2 \leq ||x - x_i||_2$ si y solo si $(x-x_0)^T(x-x_0) \leq (x-x_i)^T(x-x_i)$ si y solo si $x^Tx - 2x_0^Tx + x_0^Tx_0 \leq x^Tx - 2x_i^Tx + x_i^Tx_i$ si y solo si $2(x_i - x_0)^Tx \leq x_i^Tx_i - x_0^Tx_0$. Pero lo anterior define un semiespacio. nosotros podemos expresar V, como $V = \{x : Ax \preceq b\}$, con.

$$A = 2\begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ \dots \\ x_k - x_0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} x_1^Tx_1 - x_0^Tx_0 \\ x_2^Tx_2 - x_0^Tx_0 \\ \dots \\ x_k^Tx_k - x_0^Tx_0 \end{bmatrix}$$

(b) Reciprocamente, dado un poliedro P con interior no vacío, muestre como encontrar $x_0, \dots x_K$ de modo que el poliedro es la región de Voronoi de x_0 con respecto a $x_1, \dots, x_K$

<u>*Solución.*</u>
Reciprocamente, suponga que $V = \{x : Ax \preceq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{K \times n}$, y $b \in \mathbb{R}^K$. Nosotros podemos tomar cualquier $x_o \in \{x : Ax \preceq b\}$, y entonces construir K puntos x_i, tomando la imagen espejo de x_0 con respecto a los hiperplanos $\{x : a_i^Tx = b_i\}$. En otras palabras, nosotros podemos escoger x_i de la forma $x_i = x_0 + \lambda a_i$, donde λ es escogido de tal forma que la distancia de x_i al hiperplano definido por $a_i^Tx = b_i$, es igual a la distabcia de x_0 al hiperplano

$$b_i - a_i^Tx_0 = a_i^Tx_i - b_i$$

Resolviendo para λ, nosotros obtenemos que $\lambda = 2(b_i - a_i^Tx_i - b_i)/||a_i||_2^2$ y

$$x_i = x_0 + \frac{2(b_i - a_i^Tx_0)}{||a_i||_2^2}a_i$$

(c) Nosotros tambien podriamos considerar los conjuntos

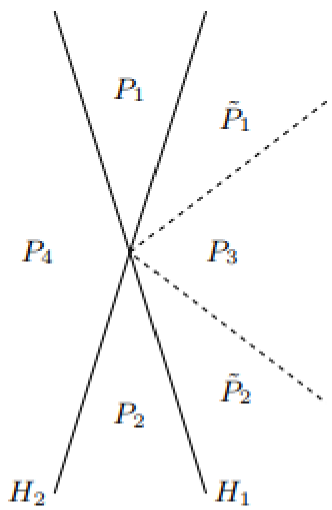
$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_k||_2 \leq ||x - x_i||_2, i \neq k\}$$

El conjunto V_k consiste de los puntos en $\mathbb{R}^n$ para el cual el punto más cercano en el conjunto $\{x_0, \dots, x_K\}$ es x_K.
Los conjuntos $V_0, \dots V_K$ dan una descomposición polyhedral de $\mathbb{R}^n$. Mas precisamente, los conjuntos V_k son poliedros, $\bigcup_{k=0}^K V_k = \mathbb{R}^n$, y $intV_i \cap intV_j = \varnothing$ para $i \neq j$, ie, V_i, V_j se intersectan como maximo a lo largo de un límite.

Suponga que $P_1, \ldots, P_m$ son poliedros tales que $\bigcup_{i=1}^m P_i = \mathbb{R}^n$, y $intP_i \cap intP_j = \varnothing$, para $i \neq j$. puede esta descomposición poliedral de $\mathbb{R}^n$ ser descritas como las regiones de voronoi generadas por un conjunto apropiado de puntos?

Solución.

Una descomposición poliedral de $\mathbb{R}^n$ no siempre puede ser descrita como regiones de varanoi no siempre puede se descrita como la regiones de varonoi generado por un conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_m\}$, la siguiente figura muesttra un contraejmplo en $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2$, puede ser descompuesta en 4, poliedros $P_1, \ldots, P_4$ por dos hiperplanos H_1, H_2. suponga que escogemos arbitrariamente $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$. $x_3 \in P_3$ debe ser la imagen de x_1 y x_2 respecto a H_2 y H_1, respctivamente. sin embargo la imagen de espejo de x_1 respecto a H_2, esta en $\hat{P}_1$, y la imagen de x_2 con respecto a H_1 esta en $\hat{P}_2$, luego es imposible encontrar tal x_3

2.10 Conjunto solucion de una inecuación cuadratica. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$, el conjunto solución de una inegualdad cuadratica, digase:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax + b^T x + c \leq 0\}$$

con $A \in S^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que C es convexo si $A \succeq 0$.

Solución. Existe un teorema que dice que un conjunto es convexo si y solo si la intersección con una linea arbitraria $\{\hat{x} + tv : t \in \mathbb{R}\}$ es convexa.
Nosotros tenemos que

$$(\hat{x} + tv)^T A(\hat{x} + tv) + b^T(\hat{x} + tv) + c = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

donde

$$\alpha = v^T Av \quad \beta = b^T v + 2\hat{x}^T Av \quad \gamma = c + b^T\hat{x} + \hat{x}^T A\hat{x}$$

La intersección de C con la linea definida por $\hat{x}$ y v es el conjunto

$$\{\hat{x} + tv : \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$$

. El cuál es convexo si $\alpha \geq 0$. Esto es cierto para cualquier v, si $v^T Av \geq 0$, para todo v, es decir $A \succeq 0$. El reciproco no siempre se tiene, por ejmplo tome $A = -1$, $b = 0$, $c = -1$. Entonces A no es definida positiva, pero $C = \mathbb{R}$ es convexo.

(b) Muestre que la intersección de C y el hiperplano definido por $g^T x + h = 0$ (donde $g \neq 0$) es convexo si $A + \lambda gg^T \succeq 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
Son los reciprocos de estas afirmaciones ciertas?.

Solución.
Sea $H = \{x : g^T x + h = 0\}$, nosotros definimos α, β y γ como la solución de la parte (a) y en adición defina $\delta = g^T v$, $\varepsilon = g^T \hat{x} + h$, sin perdida de geralidad, podemos aumir que $\hat{x} \in H$, es decir $\varepsilon = 0$. la intersección de $C \cap H$ con la linea definida por $\hat{x}$ y v es

$$\{\hat{x} + tv : \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0, \delta t = 0\}$$

Si $\delta = g^T v \neq 0$, la intersección es el conjunto $\{\hat{x}\}$, si $\gamma \leq 0$ o es vacio, en otros casos es un conjunto convexo. Si $\delta = g^T v = 0$, el conjunto se reduce a

$$\{\hat{x} + tv : \alpha t^2 + \beta t + \gamma\}$$

. El cual es convexo si $\alpha \geq 0$. Entonces $C \cap H$ es convexo si $g^T v = 0 \to v^T Av \geq 0$, esto es cierto si exsite λ tal que $A + \lambda gg^T$ es simidefinida positiva, entonces lo anterior se tiene, note ahora que
$v^T Av = v^T(A + \lambda gg^T)v \geq 0$ para todos los v que satisfacen $g^T v = 0$, nuevamente el reciproco no es cierto.

2.13 *Conic hull of outer products* considere el conjunto de rango-k los *productos exteriores* definidos como $\{XX^T : X \in R^{n\times k}, rankX = k\}$. Describa su cubrimiento conico en terminos simples.

Solución.
Nosotros tenermos $XX^T \succeq 0$, y $rank(XX^T) = k$. una combinación positiva de tales matrices puede tener rango por encima de n, pero nunca menor a k, en efecto sean A y B matrices semidefinidas positivamente de tango k, con $rank(A + B) = r < k$. Sea $V \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$, una matriz con $\mathcal{R}(V) = \mathcal{N}(A + B)$, es decir

$$V^T(A + B)v = V^T AV + V^T BV = 0$$

ya que $A, B \succeq 0$, esto significa que
$V^T AV = V^T BV = 0$ lo cual implica que $rankA \leq r$ y $rankB \leq r$, nosotros concluimos que $rank(A+B) \geq k$ por cualesquiera A, B tales que $rank(A, B) = k$ y $A, B \succeq 0$. se sigue que el cubrimiento conico de el conjunto de rango k bajo productos externos es el conjunto de matrices semidefinidas positivamente de rango mayor o igual a k, junto con la matriz 0.

2.14 *Expanded and restricted sets.* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$

(a) Para $a \geq 0$ definimos S_a como $\{x : dist(x, S) \leq a\}$, donde $dist(x, S) = inf_{y\in S}||x - y||$. nosostros nos referimos a S_a como S extendido por a. Muestre que si S es convexo, entonces S_a es convexo.

Solución
considere dos puntos $x_1, x_2 \in S_a$. Para $0 \leq \theta \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
dist(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, X) &= \text{ínf}_{y\in S} ||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \\
&= \text{ínf}_{y_1,y_2\in S} ||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \\
&= \text{ínf}_{y_1,y_2\in S} ||\theta(x_1 - y_1) + (1-\theta)(x_2 - y_2)|| \\
&\leq \text{ínf}_{y_1,y_2\in S}\, \theta||x_1 - y_1|| + (1-\theta)||x_2 - y_2|| \\
&= \theta\, \text{ínf}_{y_1\in S} ||x_1 - y_1|| + (1-\theta)||x_2 - y_2|| \\
&\leq a
\end{aligned}
$$

Así $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S_a$, probando la convexidad

(b) Para $a \geq 0$ definimos $S_{-a} = \{x : B(x,a) \subseteq S\}$, donde $B(x,a)$ es la bola (en la norma $||\cdot||$), centrada en x, con radio a. Nosotros nos referimos a S_{-a} como S restringido a a, ya que S_{-a} consiste de todos los puntos que estan por lo menos a una distancia a de $\mathbb{R}^n$ S. Mueste que si S es convexo, entonces S_{-a} es convexo.

<u>*Solución*</u>
Considere dos puntos $x_1, x_2 \in S_{-a}$, luego para todo u con $||u|| \leq a$

$$
x_1 + u \in S \qquad x_2 + u \in S
$$

Para $0 \leq \theta \leq 1$ y $||u|| \leq a$.

$$
\theta x_1 + (1-\theta)x_2 + u = \theta(x_1 + u) + (1-\theta)(x_2 + u) \in S
$$

ado que S es convexo. Concluimos que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S_{-a}$

2.15 (Algunos conjuntos de distribuciones de probabilidad) Sea x una variable aleatoria, con $prob(x = a_i) = p_i$, con $i = 1, \ldots, n$, donde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Por supuesto $p \in \mathbb{R}^n$ se encuentra en la probabilidad estándar simplex $P = \{p : 1^T p = 1, p \succeq 0\}$. Cuál de las siguientes condiciones son convexas en p? (Esto es, para cual de las siguientes condiciones es el conjunto $p \in P$ que satisfacen la condición convexa?)

(a) $\alpha \leq Ef(x) \leq \beta$, donde $Ef(x)$ es el valor esperado de $f(x)$, es decir, $Ef(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$ (la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada.)

<u>*solución*</u>
Primero notemos que las restricciones $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ $Ef(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$ define semiespacios y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, define un hiperplano, luego P es un poliedro.
Ahora note que $Ef(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$, luego las restricciones son equivalentes a las inecuaciones lineales.

$$
\alpha \leq \sum_{i=1}^n p_i f(a_i) \leq \beta
$$

(b) $prob(x > \alpha) \leq \beta$

<u>*solución*</u>

$Prob(x \geq \alpha) = \sum_{i:a_i \geq \alpha} p_i$, entonces las restricción es equivalentes a las inecuación lineal.

$$
\sum_{i:a_i \geq \alpha} p_i \leq \beta
$$

(c) $E|x^3| \leq \alpha E|x|$

<u>*solución*</u>

La restricción es equivalente a la inecuación lineal.
$\sum_{i=1}^{n} p_i(|a_i^3| - \alpha|a_i|) \leq 0$

(d) $Ex^2 \leq \alpha$

<u>*solución*</u>

La restricción es equivalente a la inecuación lineal

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \leq \alpha$$

(e) $Ex^2 \geq \alpha$

La restricción es equivalente a la inecuación lineal

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \geq \alpha$$

(f) $var(x) \leq \alpha$, donde $var(x) = E(x - Ex)^2$ es la varianza de x

<u>*solución*</u>
La restricción

$$var(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 \leq \alpha$$

No es convexa en general. Como un contraejemplo podemos tomar $n = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, y $\alpha = 1/5$, $p = (1, 0)$ y $p = (0, 1)$, son dos puntos que satisfacen $var(x) \leq \alpha$, pero la combinación convexa $p = (1/2, 1/2)$ no es.

(g) $var(x) \geq \alpha$
<u>*solución*</u>
Esta restricción es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 p_i + (\sum_{i=1}^{n} a_i p_i)^2 = b^T p + p^T A p \leq \alpha$$

Donde $b_i = a_i^2$, y $A = aa^T$. Esto define un conjunto convexo, dado que la matriz es semidefinida postivamente.

(h) $quartile(x) \geq \alpha$ donde $quartile(x) = inf\{\beta : prob(x \leq \beta) \geq 0{,}25\}$
<u>*solución*</u>
La restricción $f(p) \geq \alpha$ se tiene si y solo si.

$$prob(x \leq B) \leq 0{,}25$$

para todo $\beta < \alpha$, si $\alpha < a_1$ esto siempre se tiene, de otra forma, defina $k = \max i : a_i < \alpha$, este es un entero fino independiente de p. la restricción $f(p) \geq \alpha$, se tiene si y solo si.

$$prob(x < a_k) = \sum_{i=1}^{k} p_i < 0{,}25$$

Esta es una incecuación estricta en p, la cuál define un semiespacio abierto.

(i) $quartile(x) \leq \alpha$
<u>*solución*</u>
La restricción $f(p) \leq \alpha$ es equivalente a.

$$prob(x \leq \beta) \geq 0{,}25$$

Para todo $\beta \geq \alpha$ Esto puedo ser expresado por la incuación lineal

$$\sum_{i=k+1}^{n} p_i \geq 0{,}25$$

(si $\alpha \leq a_1$ definimos $k = 0$.)

2.16 Muestre que si S_1 y S_2 son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^{n+m}$, entonces su suma parcial es $S = \{(x, y_1 + y_2) : x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$.
<u>*solución*</u>
Vamos a considerar dos puntos $(x, y_1 + y_2), (x_1, y_3 + y_4) \in S$, es decir, con $(x, y_1) \in S_1 \quad (x, y_2) \in S \quad (x_1, y_3) \in S_1 \quad (x_1, y_4) \in S_2$ Para $0 \leq \theta \leq 1$, tenemos que: $\theta(x, y_1 + y_2) + (1 - \theta)(x_1, y_3 + y_4) = (\theta x + (1 - \theta)x_1, (\theta y_1 + (1 - \theta)y_3) + (\theta y_2 + (1 - \theta)y_4$ Esta en S, ya que por convexidad de S_1 y S_2, se tiene que:

$$(\theta x + (1 - \theta)x_1, \theta y_1 + (1 - \theta)y_3) \in S_1 \quad (\theta x + (1 - \theta)x_1, \theta y_2 + (1 - \theta)y_4) \in S_2$$

2.17 *imagenes de conjuntos poliedros bajo funcions de pespectiva* En este problema nosotros estudiaremos la imagnes de hyperplanos, semisespacios,y y poliedros bajo la función pespectiva $p(x, t) = x/t$, con $domP = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$, para cada uno de los siguientes conjuntos C de una simple descripsición de

$$P(C) = \{v/t : (v, t) \in C, t > 0\}$$

(a) El poliedro $C = conv\{(v_1, t_1), \ldots (v_k, t_k)\}$ donde $v_i \in \mathbb{R}^n$, y $t_i > 0$
<u>*Solución.*</u> El poliedro

$$P(C) = conv(v_1/t_1, \ldots, v_k/t_k)$$

Nosotros primero mostramos que $P(C) \subseteq convv_1/t_1, \ldots, v_K/t_K$. Sea $x = (v, t) \in C$, con

$$v = \sum_{i=1}^{K} \theta_i v_i \quad t = \sum_{i=1}^{K} \theta_i t_i$$

y $\theta \succeq 0$, $1^T\theta = 1$, la imagen de $P(x)$, puede ser expresada como

$$P(x) = v/t = \frac{\sum_{i=1}^{K} \theta_i v_i}{\sum_{i=1}^{K} \theta_i t_i} = \sum_{i=1}^{K} \mu v_i/t_i$$

Donde
$\mu_i = \dfrac{\theta_i t_i}{\sum_{k=1}^K \theta_k t_k} \quad i = 1, \ldots, K$
Es claro que $\mu \succeq 0$, $1^T\mu = 1$, luego nosotros podemos concluir que $P(C) \supseteq conv\{v_1/t_1, \ldots, v_K, t_K\}$
considere un punto

$$z = \sum_{i=1}^{K} \mu_i v_i/t_i$$

con $\mu \succeq 0$, $1^T\mu = 1$, defina

$$\theta_i = \frac{\mu_i}{t_i \sum_{J=1}^K \mu_j/t_j} \quad i = 1, \ldots, K$$

.
Es claro que $\theta \succeq 0$ y $1^T\theta = 1$, sin embargo, $z = P(v, t)$, donde

$$t = \sum_i \theta_i t_i = \frac{\sum_i \mu_i}{\sum_j \mu_j/t_j} = \frac{1}{\sum_j \mu_j/t_j} \qquad v = \sum_i \theta_i v_i$$

Es decir $(v, t) \in C$

(b) El hiperplano $C = \{(v, t) : f^T v + gt = h\}$ (Con f y g no ambas 0)
Solución.

$$\begin{aligned} P(C) &= \{z : f^T z + g = h/t \text{ para algún } t > 0\} \\ &= \begin{cases} \{z : f^T z + g = 0\} & h = 0 \\ \{z : f^T z + g > 0\} & h > 0 \\ \{z : f^T z + g < 0\} & h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) El semiplano $C = \{(v, t) : f^T v + gt \leq h\}$ (Con f y g no ambas 0)
Solución.

$$\begin{aligned} P(C) &= \{z : f^T z + g \leq h/t \text{ para algún } t > 0\} \\ &= \begin{cases} \{z : f^T z + g \leq 0\} & h = 0 \\ \mathbb{R}^n & h > 0 \\ \{z : f^T z + g < 0\} & h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) El poliedro $C = \{(v, t) : Fv + gt \preceq h\}$

Solución.

$$P(C) = \{z : Fz + g \preceq (1/t)h \text{ Para algún } t > 0\}$$

Mas explicitamente, $z \in P(C)$ si y solo si satisface las siguientes condiciones

- $f_i^T z + g_i \quad h_i = 0$
- $f_i^T z + g_i \quad h_i < 0$
- $(f_i^T z + g_i)/h_i \leq (f_k^T z + g_k)/h_k$ if $h_i > 0$ y $h_k < 0$

2.18 *Funciones fraccionarias lineales invertibles.* Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal fraccionaria

$$f(x) = (Ax + b)/c^T x + d$$

donde $dom f = \{x : c^T x + d > 0\}$, suponga que la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix}$$

es no singular. Mueste que f es invertible y que f^{-1} es una funcion lineal fraccional. De una expresion explicita para f^{-1} y su dominio en terminos de A, b, c y d *ayuda.* puede ser mas facil expresar f^{-1} en terminos de Q.

Solución.
Esto se sigue de la nota 2.2 en la pagina 41. La inversa de f es dada por

$$f^{-1}(x) = \mathcal{P}^{-1}(Q^{-1}\mathcal{P}(x))$$

Así f^{-1} es la trasformación de perscpectiva asociada con Q^{-1}

Punto 3 de la tarea

- Verificar que el conjunto de soluciones de un conjunto de desigualdades de matrices lineales es convexa.

Solución
Sea

$$H = \{x : A_1 x \preceq b_1, \dots, A_n x \preceq b_n, A_{n+1} x \succeq b_{n+1}, \dots, A_{n+k} x \succeq b_{n+k}\}$$

El conjunto de soluciones de un conjunto de desigualdades matriciales lineales, notemos ahora que si x, es solución de $A_{n+i} x \succeq b_{n+i}$ $(i = 1, \dots, k)$, entonces x es también solución de $-A_{n+i} x \preceq -b_{n+i}$, luego renombrando $-A_{n+i}$ por A_{n+i} y a $-b_{n+i}$, por b_{n+i}, tenemos que H es un conjunto de soluciones de un conjunto de desigualdades lineales todas iguales.
Ahora tome $0 \leq \theta \leq 1$, y $A_i x \preceq b_i$ una de las desigulddades de H, y $x_1, x_2 \in H$ entonces tenemos que

$$A_i(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta A_i x_1 + (1-\theta)A_i x_2 \preceq \theta b_i + (1-\theta)b_i = b_i$$

La desigualdad se tiene pues $0 \leq \theta \leq 1$, y por tanto $(1-\theta) \geq 0$, de esta forma tenemos que el "segmento"que une a x_1 y x_2, esta en H.

Bibliografía.

[1] 2006 *Convex Optimization* Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe.

[2] 2006 *Convex Optimization Solutions Manual* Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe.