Inferência Bayesiana
Lista 1 de Exercícios
Prof. Bruno Santos

1. Suponha que os eventos A e B sejam condicionalmente independentes dado C, que é definido como $A \perp B \mid C$. Mostre que isso implica $A \perp B^C \mid C$, $A^C \perp B \mid C$, $A^C \perp B^C \mid C$, em que A^C indica o evento complementar de A. Encontre um exemplo em que $A \perp B \mid C$ é verdade, porém $A \perp B \mid C^C$ não é.

2. Considere o modelo amostral

$$\mathcal{F} = \{f(x_1, x_2|\theta_1, \theta_2) = \theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}(1 - \theta_1 - \theta_2)^{1-x_1-x_2}\}$$

com $x_1, x_2 = 0, 1$, $0 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 1$, e o espaço paramétrico dado por

$$\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) \in (0, 1) \times (0, 1) : 0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1\},$$

na qual está definida a densidade a priori $h(\theta_1, \theta_2) = 2$.

   a) Calcule a probabilidade a priori de $\theta_1 < \theta_2$.
   b) Recalcule a probabilidade de $\theta_1 < \theta_2$ mediante a informação de que se obteve a informação $(x_1 = 1, x_2 = 0)$.

3. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de média 1 e considere o acontecimento $A = \{X_1 = X_2\}$. Mostre que a distribuição de X_1 condicional em A depende de como A é expresso, sendo

   i) Ga(1, 2) se $A = \{Z = 0\}, Z = X_1 - X_2$.
   ii) Ga(2, 2) se $A = \{Z = 1\}, Z = X_2/X_1$.

4. No contexto da inferência sobre um parâmetro θ, mostre que a distribuição a posteriori de θ só depende dos dados observados, $X_1, \ldots, X_n$ a partir de estatísticas suficientes.

5. Considere o modelo amostral

$$\mathcal{F} = \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\},$$

com ambos parâmetros desconhecidos. Encontre a distribuição a posteriori de $\theta = (\mu, \sigma^2)$ quando consideramos a família de distribuições a priori conjugada Normal-Gama Inversa para θ.

6. Considere a perda linear por partes:

$$L(\theta, d) = a(\theta - d)I_{(d,\infty)} + b(d - \theta)I_{(-\infty,d)}$$

Verifique que o estimador de Bayes de θ é o quantil de ordem $a/(a + b)$ da distribuição a posteriori. Verifique também que no caso particular em que $a = b$ o estimador de Bayes coincide com a mediana a posteriori.

7. Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. da $N(\theta, 1)$. Assuma priori $N(a, b)$ com a e b conhecidos para θ. Considere a perda Linex

$$L(\Delta) = b\{e^{a\Delta} - a\Delta - 1\}$$

com $\Delta = d - \theta$, $a \neq 0$ e $b > 0$. (Zellner, JASA, 1986)

   a) Encontre o estimador de Bayes e o risco de Bayes com relação à perda acima.
   b) Encontre os riscos de $\bar{X}$ e do estimador de Bayes com respeito à perda acima.

8. Suponha que vamos amostrar 100 individuos de uma população (de tamanho muito maior que 100) e perguntar para cada pessoa amostrada se ela é a favor ou não da política pública Z. Seja $Y_i = 1$ se a i-ésima pessoa na amostra é a favor, $Y_i = 0$ caso contrário.

   a) Assuma que $Y_1, \ldots, Y_{100}$ são, condicional em θ, variáveis aleatórias i.i.d. com esperança θ. Escreva a distribuição conjunta dessas variáveis, $P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_{100} = y_{100}|\theta)$. Escreva também a distribuição de $P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = y|\theta)$.
   b) Por um instante, suponha que você acredita que $\theta \in \{0.0, 0.1, \ldots, 0.9, 1.0\}$. Dado que os resultados da amostra foram dados por $\sum_{i=1}^{100} Y_i = 57$, calcule $P(\sum_{i=1}^{100} Y_i = 57|\theta)$ para esses 11 valores de θ e faça um gráfico com essas probabilidades como função de θ.
   c) Agora suponha a princípio que você não tem nenhuma informação a priori para acreditar em um valor de θ mais do que em outro, logo

   $$P(\theta = 0.0) = P(\theta = 0.1) = \cdots P(\theta = 0.9) = P(\theta = 1.0).$$

   Use o Teorema de Bayes para calcular $P(\theta| \sum_{i=1}^{100} Y_i = 57)$ para cada valor θ. Faça um gráfico dessa distribuição a posteriori como função de θ.
   d) Agora suponha que θ possa assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$. Usando uma distribuição a priori uniforme para θ, tal que $p(\theta) = 1$ faça um gráfico da densidade $p(\theta) \times P(\sum_{i=1}^{n} Y_i = 57|\theta)$ como função de θ.
   e) Conforme discutido em sala de aula, a distribuição a posteriori de θ de θ é uma distribuição Beta(1+57, 1+100-57). Faça um gráfico da densidade a posteriori como função de θ. Discuta a relação entre todos os gráficos feitos nesse exercício.

9. Um laboratório de câncer está estudando a taxa de surgimentos de novos tumores em duas estirpes de ratos, A e B. Eles tem dados de contagem de tumores para 10 ratos da estirpe A e 13 da estirpe B. O tipo A de ratos já são bem estudados e informações de outros laboratórios sugerem que o tipo A tem contagem de tumores que são aproximadamente distribuídos pela Poisson com média igual a 12. Taxas de contagem de tumores para os ratos B são desconhecidas, mas o tipo B de ratos são relacionados ao tipo A. O número de contagem de tumores para as duas amostras são

$$y_A = \{12, 9, 12, 14, 13, 13, 15, 8, 15, 6\};$$
$$y_B = \{11, 11, 10, 9, 9, 8, 7, 10, 6, 8, 8, 9, 7\};$$

a) Encontre as distribuições a posteriori, médias e variâncias e intervalos de credibilidade baseado em quantis com 95% de cobertura para θ_A e θ_B, assumindo uma distribuição amostral Poisson para cada grupo e as seguintes distribuições a priori

$$\theta_A \sim \text{Gama}(120, 10), \quad \theta_B \sim \text{Gama}(12, 10), \quad p(\theta_A, \theta_B) = p(\theta_A)p(\theta_B).$$

b) Calcule e faça um gráfico da esperança a posteriori de θ_B sob distribuição a priori $\theta_B \sim \text{Gama}(12 \times n_0, n_0)$ para cada valor de $n_0 \in \{1, 2, \ldots, 50\}$. Explique quais tipos de crenças a priori sobre θ_B seriam necessárias para que os valores esperados a posteriori de θ_B se aproximassem dos valores esperados a posteriori de θ_A.

c) O conhecimento sobre a população de ratos do tipo A deveria nos dizer alguma coisa sobre a população de ratos do tipo B? Discuta se faz sentido ou não ter $p(\theta_A, \theta_B) = p(\theta_A)p(\theta_B)$.

10. Estime a probabilidade de reincidência (θ) de crime entre adolescentes baseado em um estudo, em que $n = 43$ individuos foram liberados do encarceramento e $y = 15$ foram presos novamente dentro de 36 meses.

a) Usando uma distribuição Beta(2, 8) a priori para θ, faça um gráfico de $p(\theta)$, $p(y|\theta)$ e $p(\theta|y)$ como funções de θ. Encontre a média a posteriori, a moda e o desvio padrão de θ. Encontre um intervalo de credibilidade baseado em quantis com 95% de cobertura.

b) Repita a), mas usando uma distribuição Beta(8, 2) a priori para θ.

c) Considere a seguinte distribuição a priori para θ:

$$p(\theta) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(10)}{\Gamma(2)\Gamma(8)}\left[3\theta(1-\theta)^7 + \theta^7(1-\theta)\right],$$

que é uma distribuição mistura 75% – 25% de uma Beta(2, 8) e uma Beta(8, 2) a priori. Faça o gráfico dessa distribuição a priori e compare com as distribuições a priori em a) e b). Explique que tipo de crença a priori essa distribuição poderia representar.

d) Para a distribuição a priori em c):

i) Calcule $p(\theta)p(y|\theta)$ e simplifique o quanto for possível.

ii) A distribuição a posteriori é uma mistura de duas distribuições. Identifique essas duas distribuições.

iii) No computador, calcule e faça um gráfico de $p(\theta) \times p(y|\theta)$ para alguns valores de θ. Encontre também (aproximadamente) a moda a posteriori e discuta a sua relação com as modas obtidas nos itens a) e b).

e) Encontre uma fórmula geral para os pesos da distribuição mistura obtida em d)ii e obtenha uma interpretação dos seus valores.

11. Uma quantidade desconhecida Y tem distribuição Galenshore(a, θ), se sua densidade de probabilidade pode ser escrita como

$$p(y|a, \theta) = \frac{2}{\Gamma(a)}\theta^{2a}y^{2a-1}e^{-\theta^2 y^2},$$

para $y > 0$, $\theta > 0$ e $a > 0$. Para essa densidade,

$$E(Y) = \frac{\Gamma(a + 1/2)}{\theta\Gamma(a)}, E(Y^2) = \frac{a}{\theta^2}$$

Assuma que a é conhecido.

a) Identifique a classe de densidades a priori conjugadas para θ. Faça o gráfico de alguns membros dessa classe.

b) Seja $Y_1, \ldots, Y_n \sim$ i.i.d. Galenshore(a, θ). Encontre a distribuição a posteriori de θ usando uma distribuição a priori de sua classe conjugada.

c) Escreva a razão $p(\theta_a|y_1, \ldots, y_n)/p(\theta_b|y_1, \ldots, y_n)$, simplificando-a. Identifique uma estatística suficiente.

d) Determine $E[\theta|y_1, \ldots, y_n]$.

e) Determine a forma da densidade preditiva a posteriori, $p(\tilde{y}|y_1, \ldots, y_n)$