Métodos Estatísticos

Prof. Bruno Santos

Sala 220 (IME), brunorsantos@ufba.br

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal da Bahia

Links interessantes

Site para visualizar alguns conceitos estatísticos:

- Seeing theory
  - www.students.brown.edu/seeing-theory/

Site de notícias baseado em dados:

- FiveThirtyEight
  - www.fivethirtyeight.com

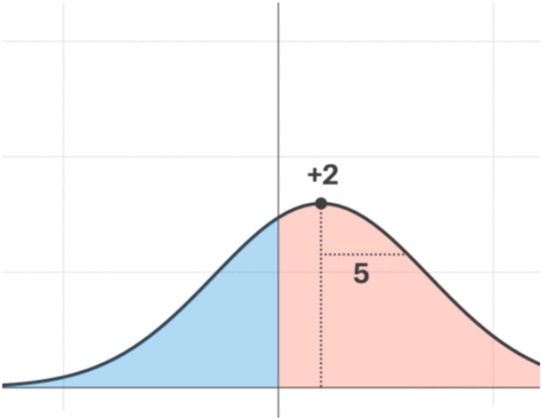
Estatística no jornalismo

SEP 17, 2014 AT 7:30 AM

How The FiveThirtyEight Senate Forecast Model Works

By Nate Silver

Filed under 2014 Midterms



Estatística na imprensa esportiva

Standings Stats Teams More

NFL season a billion times, though, a lot can go wrong (or right) over one measly 16-game stretch.

We can use the binomial distribution to estimate just how things could have gone for a 10.6-win team like the Falcons. Atlanta actually won 11 games this season, which isn't necessarily surprising, as the most likely outcome for a 10.6-win team would naturally be to win 11 games. That would occur 20.7 percent of the time, and the Falcons would win 11 or more games in 53.4 percent of simulations. And 5.6 percent of the time, a team of this caliber would win 14 or more games. On the flip side, though, a team can play excellent football and still (at least theoretically) struggle to win games. There's a 5.4 percent chance a team with Atlanta's Pythagorean expectation would post a losing record.

Hate this level of randomness? Try hoops. Teams are far less likely to put up similarly

Rating which teams are closest to being Super Bowl contenders

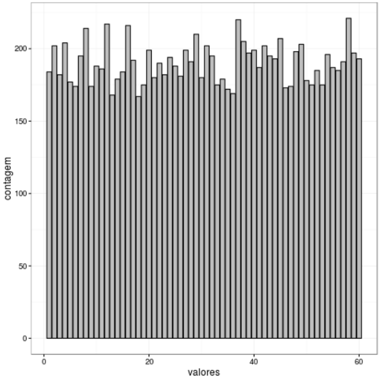
Will the Chiefs contend in 2017? Is Aaron Rodgers' title window closing? NFL Nation reporters assess 30 teams' chances of making a Super Bowl, from nowhere close to on the cusp.

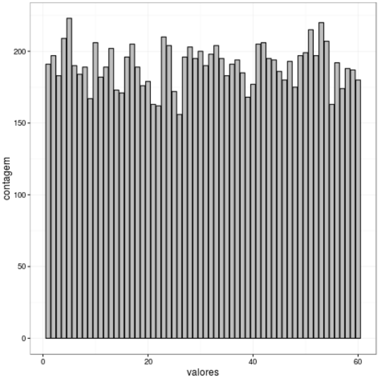
Ranking every player in Super Bowl LI

From 1 to 106, we ranked every player on the active rosters for the Falcons and Patriots. Tom Brady and Matt Ryan are at the top of the list, but who is No. 1?

Sobre os sorteios da Mega-Sena

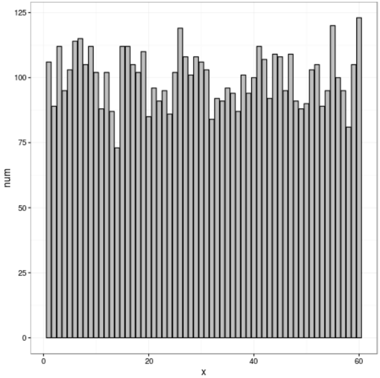
Você saberia qual dizer qual das figuras representa a distribuição dos números sorteados pela Mega Sena e qual foi gerado por um computador?



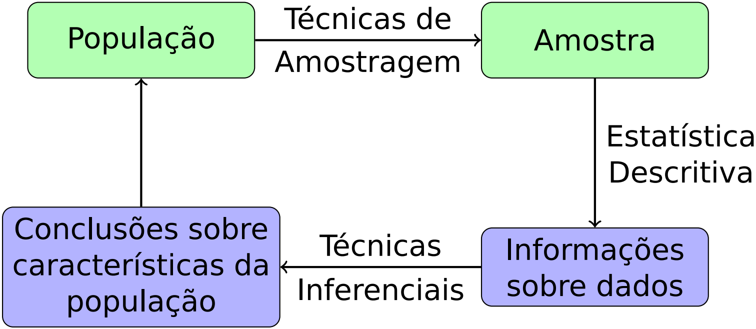


Sobre tamanhos de amostra

Evolução da distribuição de frequência dos números sorteados na Mega-Sena



Processo de análise estatística



BASE: PROBABILIDADE

Definições

EXPERIMENTO ALEATÓRIO: Todo processo em que o seu resultado não pode ser determinado devido à incerteza que está associada a esse processo.

MODELO ESTATÍSTICO: Componentes:

- **ESPAÇO AMOSTRAL (Ω)**: conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.
- Uma função **PROBABILIDADE**, $P(.)$, para cada ponto do espaço amostral.

EVENTO: Qualquer subconjunto do espaço amostral. Usualmente representado por uma letra maiúscula: A, B, C.

Exemplos

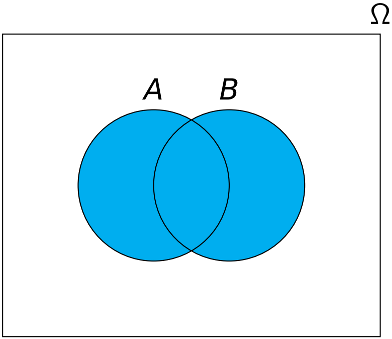
1. EXPERIMENTO: jogar um dado de 6 fases e observar a face superior.
   - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   - $A =$ faces maiores que 3. $(A = \{4, 5, 6\})$

2. EXPERIMENTO: avaliar um produto recebido e verificar se é defeituoso ou não.
   - $\Omega = \{\text{DEFEITUOSO}, \text{NÃO DEFEITUOSO}\}$.
   - $\Omega = \{\text{DEFEIT.}, \text{NÃO DEFEIT.}, \text{NÃO É POSSÍVEL DIZER}\}$.
   - $A = \text{DEFEITUOSO}$

Operações com conjuntos

Dados dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral Ω:

- UNIÃO de A e B ($A \cup B$) representa o evento em que pelo menos um dos eventos ocorre.



Exemplos

1. Lançamento de dados:
   - A: face par.
   - B: face maior que 3.

   - $A = \{2, 4, 6\}$.
   - $B = \{4, 5, 6\}$.

   - $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2. Lançamento de três moedas:
   - A = Sair três caras.
   - B = Sair pelo menos duas caras.

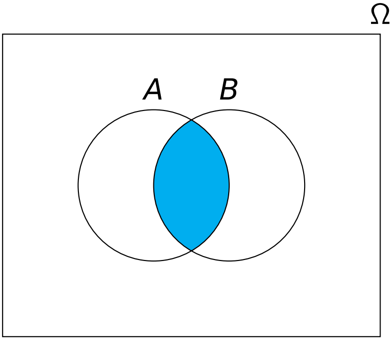
   - $A = \{(C, C, C)\}$.
   - $B = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$

   - $A \cup B = B$

Operações com conjuntos

Dados dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral Ω:

- INTERSECÇÃO de A e B ($A \cap B$) representa o evento em que os dois eventos ocorrem simultaneamente.



Exemplos

1. Lançamento de dados:
   - A: face par.
   - B: face maior que 3.

   - $A = \{2, 4, 6\}$.
   - $B = \{4, 5, 6\}$.

   - $A \cap B = \{4, 6\}$.

2. Lançamento de três moedas:
   - A = Sair três caras.
   - B = Sair pelo menos duas caras.

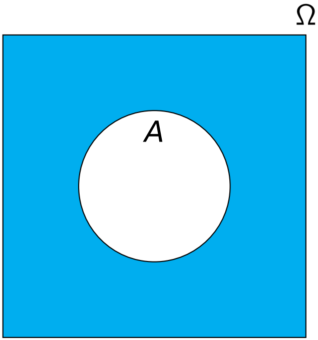
   - $A = \{(C, C, C)\}$.
   - $B = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$

   - $A \cap B = A$

Operações com conjuntos

Dados um evento A de um espaço amostral Ω:

- o conjunto COMPLEMENTAR de A (A^C ou $\overline{A}$) representa o evento em que A não ocorre.



Exemplos

1. Lançamento de dados:
   - A: face par.
   - A^c: face ímpar.

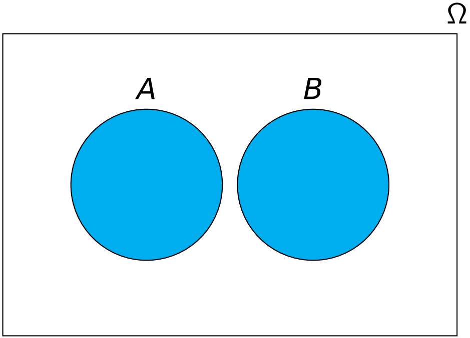
   - $A = \{2, 4, 6\}$.
   - $A^c = \{1, 3, 5\}$.
2. Lançamento de duas moedas:
   - A = Sair duas caras.
   - A^c = Não sair duas caras.

   - $A = \{(C, C)\}$.
   - $A^c = \{(K, C), (C, K), (K, K)\}$

Operações com conjuntos

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω:

- se A e B são mutuamente exclusivos ou disjuntos, então eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, $A \cap B = \emptyset$.



Exercícios

1. Defina o espaço amostral do experimento aleatório:
   - Lançamento de três moedas;
   - Resultado ao final do semestre em uma disciplina na UFBA;
2. Faça a representação dos seguintes conjuntos:
   - $\overline{A \cup B}$;
   - $A^c \cup B^c$;
   - $A^c \cap B^c$;

Conceitos de Probabilidade

- DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA:
  Sejam E um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a esse experimento.

  A cada evento X associamos um número real representado por $P(X)$, denominado probabilidade de X. O número $P(.)$ deve satisfazer as seguintes propriedades

  1. $P(\Omega) = 1$,
  2. $0 \leqslant P(X) \leqslant 1$, para todo $X \in \Omega$
  3. Se X e Y são disjuntos ($X \cap Y = \emptyset$), temos

     $$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

     De forma geral, podemos dizer que para qualquer sequência de eventos disjuntos dois-a-dois, $A_1, \ldots, A_n$, temos:

     $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

PROPRIEDADES

1. Se $\emptyset$ é um evento impossível, então:
$$P(\emptyset) = 0.$$
2. Se $\overline{A}$ for o evento complementar de A, então:
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
3. Se A e B são dois eventos quaisquer em Ω, então
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
4. Se A, B e C são eventos quaisquer em Ω, então
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Conceitos de probabilidade

- DEFINIÇÃO CLÁSSICA:
  Seja A um evento associado a um espaço amostral finito, Ω, em que todos os eventos são equiprováveis. A probabilidade de ocorrência do evento A é dada por

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)},$$

  em que $\#(A)$ é o número de eventos favoráveis a A.

Exemplo: Lançar um dado equilibrado e observar o número da face voltada pra cima. Qual é a probabilidade de sair um número par?

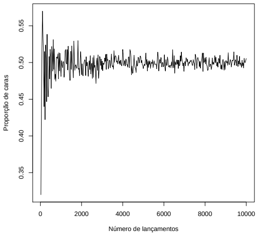
$$\#(A) = 3,\ \#(\Omega) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Conceitos de probabilidade

- DEFINIÇÃO FREQUENTISTA
  Admita que n_A seja o número de vezes que o evento A ocorre em n repetições independentes do experimento. Então,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Exemplo: Fazendo o lançamento de uma moeda um determinado número de vezes, o seguinte comportamento pode ser observado



Exemplo - Definição frequentista

Em uma pesquisa realizada numa faculdade:

- 1.162 afirmaram que “colaram” nos exames
- 2.468 afirmaram que nunca “colaram” em exames

Selecionando aleatoriamente um estudante, determine a probabilidade dessa pessoa ter colado em um exame.

Resposta: A = Pessoa “colar” no exame.

$$P(A) = \frac{1.162}{1.162 + 2.468} \approx 0,32$$

Exercícios - pg. 26, Q31

Dois processadores do tipo A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça com um processador do tipo A é de 1/30, no tipo B é 1/80 e em ambos 1/1000.

Qual é a probabilidade:

a) pelo menos um dos processadores tenha problema?

b) Nenhum dos processadores tenha apresentado erro?

c) Apenas o processador tenha A tenha apresentado erro?

Exemplo: Experimento aleatório: retirar uma carta do baralho completo com 52 cartas e observar o "valor" e o naipe.

$$\Omega = \{2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A\} \times \{\diamondsuit \spadesuit \heartsuit \clubsuit\}$$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{52} \quad (\Omega \text{ é equiprovável}),$$

ω_i qualquer elemento do espaço amostral.

- A = { a carta é um ás }.
- B = { o naipe é vermelho }.
- C = { a carta é um número }.
- D = { a carta é um ás de copas }.
- E = { naipe é copas }.
- F = { naipe é espadas }.

Cálculo das probabilidades

$$P(\{A = \text{a carta é um ás}\}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(\{B = \text{o naipe é vermelho}\}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{C = \text{a carta é um número}\}) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

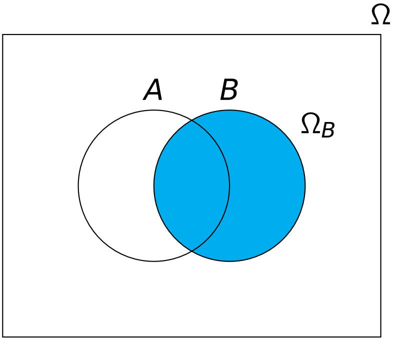
$$P(\{D = \text{a carta é um ás de copas}\}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\{E = \text{o naipe é copas}\}) = \frac{13}{52} = P(F)$$

Alterando o universo

Suponha que sabemos que, a priori, que a carta selecionada é de naipe vermelho

Dado que B ocorreu, temos uma restrição no espaço amostral



$$\Omega \rightarrow \Omega_B$$
$$P \rightarrow P_B$$

Intuição da função probabilidade condicional, $P_B(.)$

Considerando essa nova função, $P_B(.)$:

$$P_B(A) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}, \quad P_B(C) = \frac{18}{26} = \frac{9}{13},$$

$$P_B(D) = \frac{1}{26}, \qquad P_B(E) = \frac{13}{26}$$

$$P_B(F) = 0$$

Observações

Note que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Dado que B ocorreu, $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Logo

$$P(A) = P(A \cap B)$$

Observações

Considere que para todo evento A, o seguinte evento é verdade

$$P_B(A) = k\,P(A) = k\,P(A \cap B)$$

Como obter k?

$P_B(B) = P_B(\Omega_B) = 1.$

$$1 = P_B(B) = kP(B \cap B) = kP(B) \Rightarrow k = \frac{1}{B}$$

Então,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B), \forall A \in \Omega, P(B) > 0.$$

Definição Probabilidade Condicional

DEFINIÇÃO: Dado (Ω, P), seja $A, B \in \Omega$ com $P(B) > 0$. A probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De forma análoga, temos

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regra do Produto

a) Sejam $A, B \in \Omega$, então

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$
$$\text{ou } [P(B|A)P(A)]$$

b) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_{n-1} \cap \cdots \cap A_1)$$

Observação:

1. Notação: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1, A_2, A_3)$.

EVENTOS INDEPENDENTES

Os eventos A e B são independentes se a informação a B não altera a probabilidade do evento A. Ou seja,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

Também,

$$P(B|A) = P(B)$$

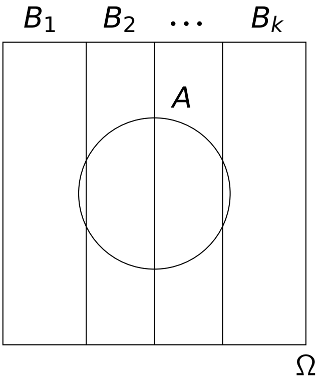
Exercícios

1. Um dado equilibrado é lançado e o número voltado para cima é observado.

    a) Se o resultado obtido é par, qual a probabilidade dele ser maior ou igual a 5?

    b) Se o resultado obtido for maior ou igual a 5, qual a probabilidade dele ser par?

Partição do espaço amostral



Dizemos que $B_1, B_2, \cdots, B_k$ formam uma partição do espaço amostral (Ω) se eles são disjuntos dois-a-dois e sua união é Ω:

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega, \text{em que } B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j.$$

Lei da probabilidade total

Suponha que os eventos $B_1, \cdots, B_k$ formam uma partição de Ω e todos com probabilidade positiva. Então, para qualquer evento A, temos

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Inversão de probabilidades condicionais

Vimos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pela Regra do Produto, temos que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

E pela Lei da Probabilidade Total, podemos reescrever o resultado anterior como

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)},$$

em que $A_1, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral

Base da inferência Bayesiana

$$\boxed{P(A_i|B)} = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)} \boxed{P(A_i)}$$

Probabilidade a posteriori Probabilidade a priori

- O Teorema de Bayes mostra como devemos atualizar nossa incerteza diante de novas informações.

- O cérebro é bayesiano?

Exercício, Ex. 22, pg. 25

Numa faculdade 30% dos homens e 20% das mulheres estudam matemática. Além disso, 45% dos estudantes são mulheres. Se uma pessoa estudando matemática é selecionada aleatoriamente, qual é a probabilidade de que esta pessoa seja uma mulher?

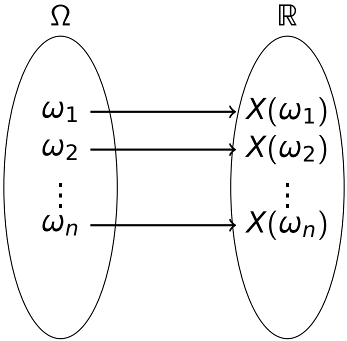
Sugestão de exercícios: 27, 28, 29.

Variáveis aleatórias

Sejam E um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado.

Uma função X que associe a cada elemento $\omega_i \in \Omega$ um número real, $X(\omega_i)$, é denominada variável aleatória.

Esquematicamente, temos a figura a seguir



Portanto, uma variável aleatória X é uma função cujo domínio é o espaço amostral e o contradomínio é o conjunto dos números reais, ou seja,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Exemplos:

a) Considere o experimento que consiste em lançar uma moeda honesta n vezes e observa a ocorrência de caras e coroas. Seja X o número de caras observadas.

b) Considere o experimento de esperar um ônibus e observar o tempo até ele chegar. Seja X o tempo de espera.

Tipos de variáveis aleatórias

DISCRETAS Quando assumem valores num conjunto enumerável de pontos na reta. Exemplos:

i) Número de chamadas recebidas num terminal telefônico.

ii) Número de casos de de dengue por região de um município.

CONTÍNUAS Quando assumem valores num intervalo dos números reais. Exemplos:

i) Tempo de vida útil de uma lâmpada.

ii) Tempo de vida de um paciente com uma certa doença.

Função de probabilidade

A função de probabilidade ou função discreta de probabilidade é uma função que atribui uma probabilidade a cada um dos valores assumidos pela variável aleatória.

Ou seja, sendo X uma variável aleatória com valores $x_1, \ldots, x_n$, temos para $i = 1, \ldots, n$,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i \tag{1}$$

A função em (1) deve satistazer as seguintes condições:

i) $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Observação: Por notação, $P(X(\omega_i) = x_i) = P(X = x_i)$.

Exercício

1. Considere o experimento de lançar duas moedas e observar a ocorrência de cara ou coroa. Descreva a função de probabilidade da variável aleatória número de caras obtidas.

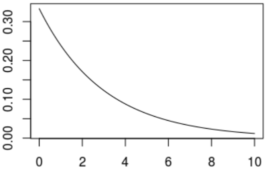
2. Considere um lote de peças que contém 20% de peças defeituosas. Extraímos ao acaso três peças com reposição para análise. Seja X o número de peças defeituosas. Estabeleça a função de distribuição de probabilidade de X.

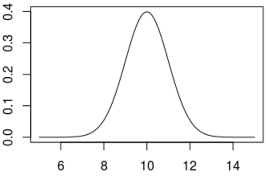
Função densidade de probabilidade

Dizemos que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade ou função contínua de probabilidade para uma variável aleatória contínua X, se satisfazer

i) $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.





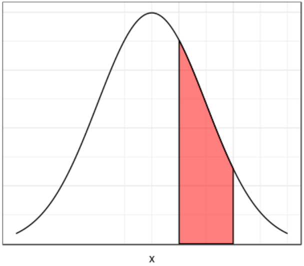
Cálculo de probabilidade para variáveis contínuas

A probabilidade de X assumir um valor entre a e b é obtida calculando a área compreendida entre esses dois valores.

Isto é,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx,$$

para qualquer $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.



Observações

Para variáveis aleatórias contínuas, as seguintes probabilidades são todas iguais,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b)$$

$\Rightarrow$ Isso não é verdade no caso discreto.

Adicionalmente, temos que

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Exercício de fixação

Dada a função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine:

a) $P(X \leqslant 1/2)$.

b) $P(1/3 \leqslant X \leqslant 2/3)$.

c) $P(X \leqslant 1/2 \mid 1/3 \leqslant X \leqslant 2/3)$.

Função de distribuição acumulada (FDA)

Seja X uma variável aleatória discreta ou contínua. Por definição, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X representada por $F_X(x)$, ou simplesmente $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Se a variável aleatória X for discreta,

$$F(x) = \sum_{j:x_j \leqslant x} P(X = x_j),$$

em que o somatório se estende aos índices para os quais $x_j \leqslant x$.

FDA - variáveis contínuas

Se X for uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x)$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Podemos utilizar a função de distribuição acumulada para calcular probabilidades da seguinte maneira

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b) &= P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Obtenção da função densidade

Além disso, derivando a função de distribuição acumulada, obtemos a função densidade de probabilidade.

Ou seja, podemos encontrar a função densidade de uma v.a. contínua da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

para todo x no qual $F(x)$ seja derivável.

EXERCÍCIOS

1. Considere o experimento de lançar duas moedas honestas e observar a ocorrência de cara ou coroa. Descreva a função de distribuição acumulada da variável aleatória número de caras em um lançamento dessas moedas.

2. Supõe-se que o diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua, com função densidade

$$f(x) = 6x(1-x), \forall 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

   i) Obtenha a função de distribuição, F(x).
   ii) Calcule $P(X \leqslant 1/2 \mid 1/3 \leqslant X \leqslant 2/3)$, utilizando $F(x)$.

Valor esperado ou esperança

Seja X uma variável aleatória discreta e $P(X = x_i)$ sua função de probabilidade.

A esperança ou valor esperado de X é definida por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

desde que a série seja absolutamente convergente.

No caso contínuo, sendo $f(x)$ a função densidade, a esperança é definida como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

desde que a integral seja absolutamente convergente.

Propriedades do valor esperado

1. Seja X uma variável aleatória cujo valor esperado exista. Dada uma constante a, temos
   - $E(a+X) = a + E(X)$
   - $E(aX) = aE(X)$

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias cujos valores esperados existam. Então,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, cujos valores esperados existam. Então,

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Variância

Seja X uma variável aleatória em que $E(X) < \infty$. A variância de X é definida como

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

em que

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i), \text{ se X é discreta,}$$

ou

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx, \text{ se X é contínua,}$$

O desvio-padrão é dado por

$$\text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Propriedades da variância

1. Seja X uma variável aleatória. Dada uma constante a, temos
   - $\text{Var}(a) = 0$
   - $\text{Var}(a + X) = \text{Var}(X)$
   - $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\text{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_n)$$

Exercícios

1. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade

t_i	2	3	4	5	6	7
$P(T = t_i)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

   a) Calcule $E(T)$ e $\text{Var}(T)$.
   b) Encontre $E(2 + T)$ e $\text{Var}(2T)$.

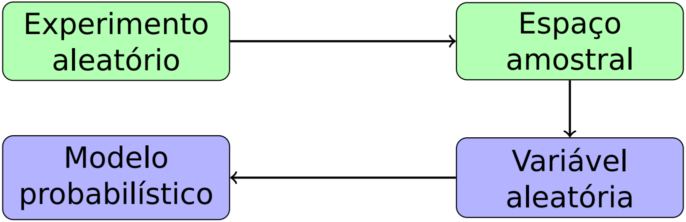
Exercícios

2. A demanda diária de arroz em um supermercado é uma variável aleatória X com função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} 2/3x, & 0 \leqslant x < 1, \\ -x/3 + 1 & 1 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Modelo probabilístico para variáveis aleatórias



- **Experimento:** Lançar dois dados honestos e observar as faces.
- **Espaço amostral:** $\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}$
- **Variável**: $X =$ a soma dos dois valores observados.
  - Valores possíveis de $X = \{2,3,\cdots,12\}$.
  - $P(X=1), P(X=2), \cdots, P(X=12)$.

Modelos probabilísticos

De modo geral, e se pudéssemos considerar que X é distribuída de acordo com uma função de probabilidade bem definida?

Deveríamos levar em consideração:

1. Valores possíveis de X.
2. Se essa distribuição de probabilidade se adequa aos dados.

O item 2) será discutido na 2ª parte do curso: **INFERÊNCIA**.

Modelo - Uniforme discreta ($X \sim$ Unif(k))

$\Rightarrow$ Quando todos os valores possíveis de X ocorrem com a mesma probabilidade.

Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n.\}$, $n \geqslant 2$.

$$P(X = x_1) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplos:

- Lançamento de dados
- Sorteio da mega-sena
- Lançamento de moedas

Modelo - Bernoulli ($X \sim \text{Ber}(p)$)

⇒ Quando a v.a. X só dois possíveis valores.

Podemos associar a um dos valores possíveis o número 1 (sucesso) e ao outro 0 (fracasso).

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p.$$

$$E(X)=p, \quad \text{Var}(X)=p(1-p).$$

Exemplos:

- Escolhendo uma peça ao acaso e verificando se está defeituosa ou não.
- Escolhendo uma pessoa ao acaso e verificando se essa pessoa assiste Game of Thrones.

Modelo - Binomial ($X \sim \text{Bin}(n, p)$)

$\Rightarrow$ Quando a v.a. pode ser vista como a soma de uma coleção de n variáveis Bernoulli, independentes e com a mesma distribuição.

Valores possíveis: $X = \{0, 1, \cdots, n\}$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

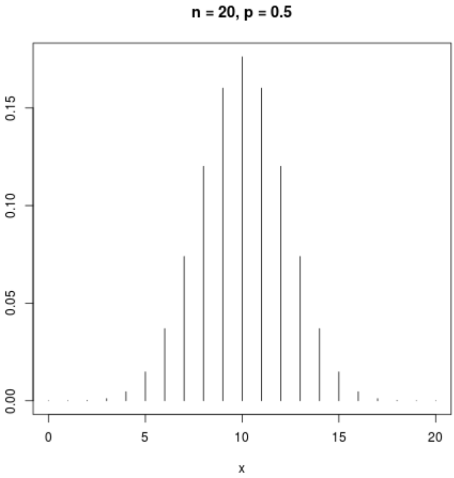
$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Exemplos:

- Número de peças defeituosas num certo lote.
- Número de pessoas com uma certa doença na população.

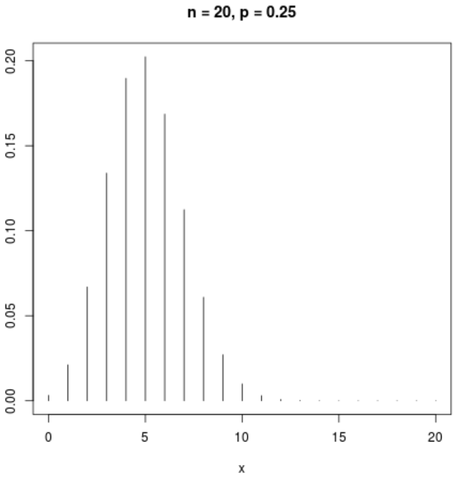
Exemplo - gráfico

$$X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0.5)$$



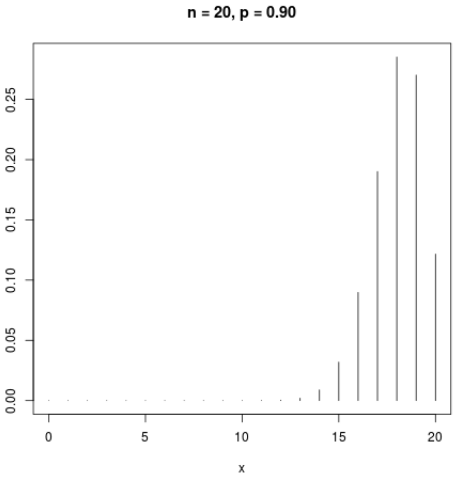
Exemplo - gráfico

$X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0.25)$



Exemplo - gráfico

$X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0.90)$



Modelo - Poisson ($X \sim P(\lambda)$)

$\Rightarrow$ Quando a variável aleatória assume valores no conjunto dos números naturais.

Valores possíveis: $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

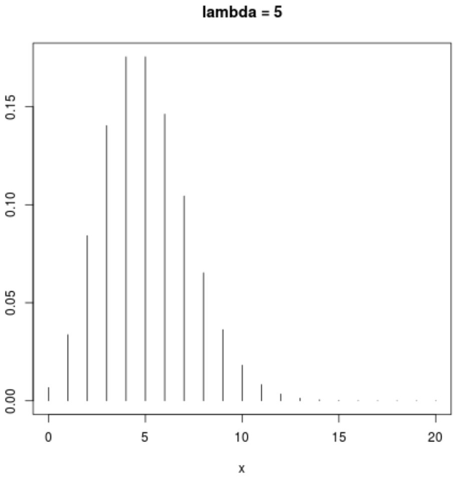
$$E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Exemplos:

- Número de chamadas num terminal telefônico.
- Número de pessoas atendidas numa agência bancária.

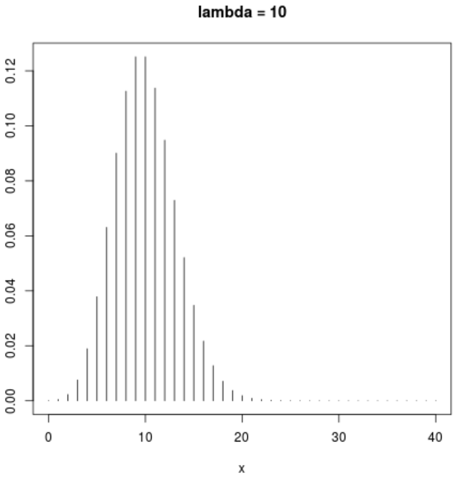
Exemplo - gráfico

$$X \sim P(\lambda = 5)$$



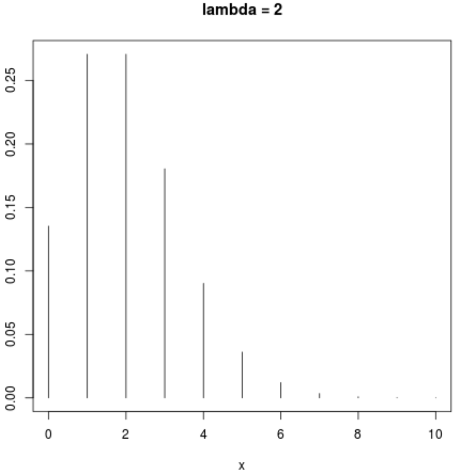
Exemplo - gráfico

$X \sim P(\lambda = 10)$



Exemplo - gráfico

$$X \sim P(\lambda = 2)$$



Exercício

O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

Outras distribuições discretas

A

- (a,b,0) class of distributions

B

- Bernoulli distribution
- Bernoulli trial
- Beta negative binomial distribution
- Beta-binomial distribution
- Binomial distribution
- Poisson binomial distribution
- Borel distribution

C

- Categorical distribution
- Compound Poisson distribution
- Conway–Maxwell–Poisson distribution

D

- Degenerate distribution
- Delaporte distribution
- Dirichlet-multinomial distribution
- Discrete phase-type distribution
- Discrete uniform distribution
- Discrete Weibull distribution
- Discrete-stable distribution
- Displaced Poisson distribution
- Dyadic distribution

E

- Ewens's sampling formula
- Exponential family
- Extended negative binomial distribution

F

- Fisher's noncentral hypergeometric distribution

G

- Gauss–Kuzmin distribution
- Geometric distribution
- German tank problem

H

- Hermite distribution
- Hypergeometric distribution
- Negative hypergeometric distribution

K

- Kirkwood approximation

L

- Logarithmic distribution

M

- Maximum entropy probability distribution
- Multinomial distribution

N

- Negative binomial distribution
- Noncentral hypergeometric distributions

P

- Parabolic fractal distribution

R

- Rademacher distribution
- Rencontres numbers

S

- Skellam distribution
- Soliton distribution

V

- Van Houtum distribution

W

- Wallenius' noncentral hypergeometric distribution

Y

- Yule–Simon distribution

Z

- Zero-truncated Poisson distribution
- Zeta distribution
- Zipf–Mandelbrot law
- Zipf's law

Variáveis aleatórias contínuas

Modelos que serão vistos inicialmente nesse curso:

- Uniforme;
- Exponencial;
- Normal;

Variáveis aleatórias contínuas

Modelos que serão vistos posteriormente:

- t-Student;
- Qui-quadrado;
- Fisher-Snedecor ou F;

Modelos que não serão vistos:

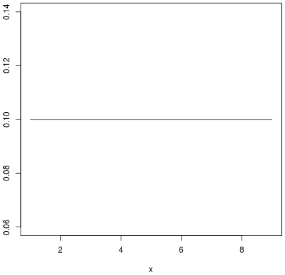
- Weibull;
- Cauchy;
- Wishart;
- Logística;
- Pareto;
- ...

Modelo - Uniforme ($X \sim \textbf{Unif}(a,b)$)

$\Rightarrow$ Quando todos os pontos entre a e b têm a mesma probabilidade de acontecer.

A função densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



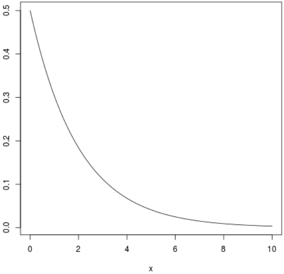
Propriedades:

- $E(X) = (b+a)/2$
- $\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Modelo - Exponencial ($X \sim$ Exp(λ))

Exemplos de uso;

- Tempo de espera em uma fila;
- Tempo de vida de um paciente;
- Tempo de vida de um componente elétrico;



Modelo - Exponencial ($X \sim$ Exp$(\lambda), \lambda > 0$)

Uma variável aleatória é dita ter distribuição exponencial se sua função densidade puder ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}x\right\}, & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Propriedades:

a) A sua função de distribuição acumulada é dada por

$$\begin{aligned} F(t) = P(X \leqslant t) &= \int_0^t \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}x\right\} dx \\ &= 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}t\right\} \end{aligned}$$

Logo, $P(X > t) = \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}t\right\}$

Modelo - Exponencial ($X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$)

b) $E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda} x\right\} dx = \lambda$

c) $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2.$

d) Propriedade da falta de memória:

$$
\begin{aligned}
P(T > s + t | T > s) &= \frac{P((T > t + s) \cap (T > s))}{P(T > s)} \\
&= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} \\
&= \frac{\exp\{-\lambda^{-1}(s + t)\}}{\exp\{-\lambda^{-1} s)\}} = \exp\{-\lambda^{-1} t)\} \\
&= P(T > t)
\end{aligned}
$$

Exemplos

1. Uma lâmpada tem o seu tempo de duração distribuído de acordo com uma distribuição exponencial com $\lambda = 1.000$.
   a) Determine a probabilidade de que essa lâmpada queime antes de 1.000 horas.
   b) A probabilidade de que ela queime depois do seu tempo de duração médio.
   c) a variância da distribuição do tempo de duração dessa lâmpada.

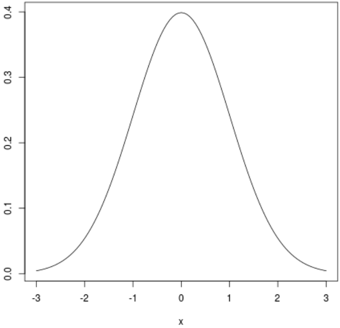
DISTRIBUIÇÃO NORMAL

- MAIS IMPORTANTE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE?
- Muitos fênomenos naturais podem ser aproximados por essa distribuição.
- Algumas distribuições de probabilidade podem ser aproximadas por essa distribuição: binomial e Poisson
- Para grandes amostras, a média amostral ($\bar{X}$) se aproxima da distribuição Normal.

Modelo - Normal ($X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$)

Uma variável aleatória é dita ter distribuição Normal se sua função densidade puder ser escrita como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

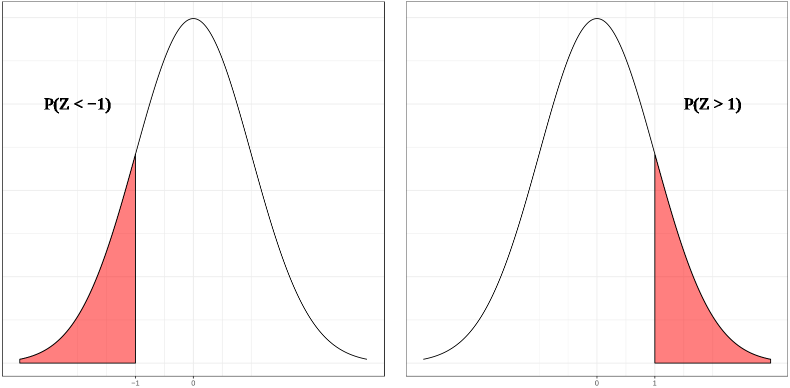


Propriedades

1. $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$.
2. A curva normal é simétrica em relação à média, ou seja,
   - $f(\mu + a) = f(\mu - a), \forall a \in \mathbb{R}$
   - $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0,5$
   - $P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$
   - $P(X < \mu + a) = P(X > \mu - a)$
3. A moda e a mediana são iguais a μ.

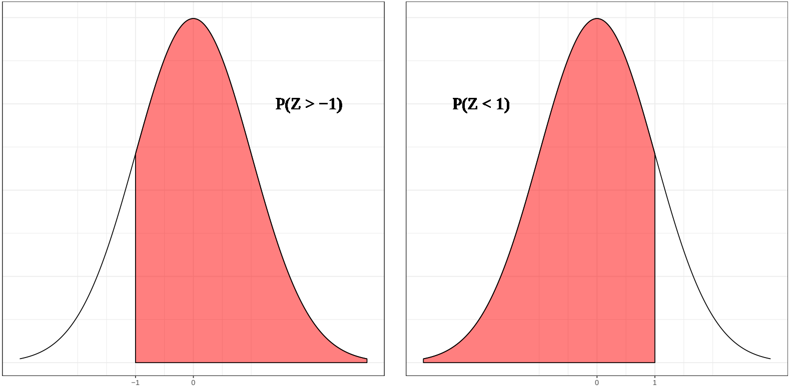
Exemplos, $Z \sim N(0,1)$

$$P(Z < -1) = P(Z > 1)$$



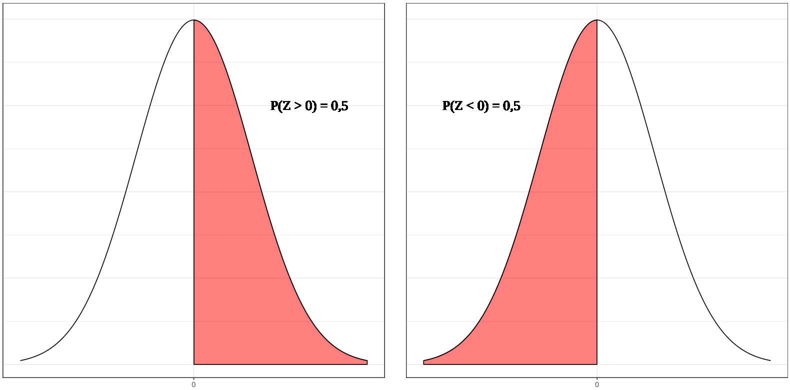
Exemplos, $Z \sim N(0,1)$

$$P(Z > -1) = P(Z < 1)$$

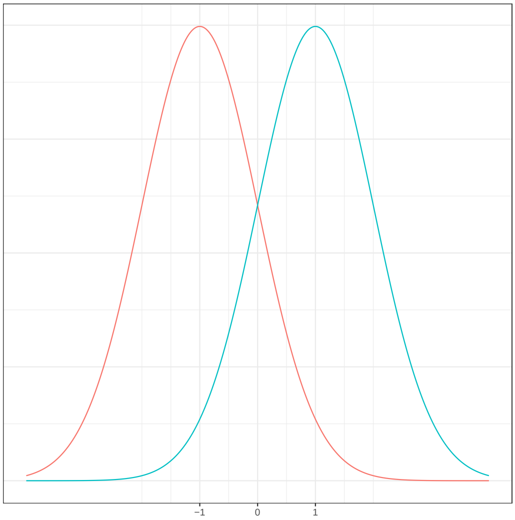


Exemplos, $Z \sim N(0, 1)$

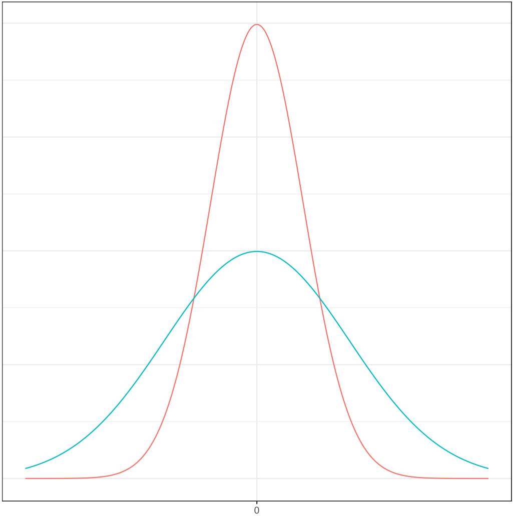
$$P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0,5$$



Distribuições com mesma variância, mas médias diferentes



Distribuições com mesma média, mas variâncias diferentes



Cálculo de probabilidades de uma dist. Normal

A probabilidade de $X \in [a, b]$ é igual a área sob a curva, ou seja,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx$$

Ao invés de calcular essa integral, a seguinte transformação pode ser utilizada.

Teorema: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Normal padrão

Se $Z \sim N(0, 1)$, conhecida como distribuição normal padrão, então

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, z \in \mathbb{R}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Probabilidades para a dist. normal padrão são tabeladas e podem ser utilizadas para probabilidades considerando quaisquer outros paramêtros μ e σ^2.