

# EA614 - Análise de Sinais

Levy Boccato  
Renan Del Buono Brotto  
Victor Lima

6 de novembro de 2025

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução à Análise de Sinais</b>	<b>2</b>
1.1	Classificação de sinais . . . . .	4
1.1.1	Sinais Contínuos e Discretos . . . . .	4
1.1.2	Sinais Digitais e Analógicos . . . . .	5
1.1.3	Sinais Periódicos e Aperiódicos . . . . .	5
1.1.4	Sinais Pares e Ímpares . . . . .	6
1.2	Tamanho de um sinal . . . . .	7
1.2.1	Energia de um sinal . . . . .	8
1.2.2	Potência de um sinal . . . . .	9
1.3	Transformação da Variável Independente . . . . .	12
1.3.1	Deslocamento . . . . .	12
1.3.2	Inversão no eixo do tempo . . . . .	14
1.3.3	Escalonamento . . . . .	14
1.3.4	Operações combinadas . . . . .	15
1.4	Sinais e Sequências Exponenciais . . . . .	16
1.4.1	Sinais exponenciais contínuos . . . . .	16
1.4.2	Sequências exponenciais discretas . . . . .	20
1.5	Degrado e Impulso . . . . .	24
1.5.1	Função degrau unitário $u(t)$ . . . . .	24
1.5.2	Função impulso unitário $\delta(t)$ . . . . .	26
1.5.3	Degrado e Impulso Discretos . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Introdução aos Sistemas Lineares</b>	<b>34</b>
2.1	Classificação de Sistemas . . . . .	35
2.1.1	Sistemas variantes e invariantes no tempo . . . . .	35
2.1.2	Sistemas instantâneos e dinâmicos . . . . .	35
2.1.3	Sistemas causais e não-causais . . . . .	35
2.1.4	Sistemas lineares e não-lineares . . . . .	36
2.1.5	Sistemas estáveis e instáveis . . . . .	36
2.1.6	Sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) . . . . .	37
2.2	Sistemas discretos . . . . .	38
2.3	Resposta ao impulso $h(t)$ . . . . .	40
2.4	Resposta do sistema à entrada externa . . . . .	40
2.4.1	Interpretação da convolução . . . . .	42
2.4.2	Propriedades da convolução . . . . .	43
2.4.3	Como calcular o resultado da integral de convolução? . . . . .	44
2.5	Resposta do sistema discreto . . . . .	45

2.5.1	Como calcular o resultado da soma de convolução? . . . . .	46
2.6	Propriedades dos Sistemas LIT . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Análise de sinais periódicos no tempo contínuo</b>	<b>56</b>
3.1	Decomposição de sinais . . . . .	56
3.1.1	Componentes vetoriais . . . . .	56
3.1.2	Projeção de sinais reais . . . . .	57
3.1.3	Projeção de sinais complexos . . . . .	60
3.2	Projeção em uma base de sinais ortogonais . . . . .	60
3.2.1	Energia do erro de representação . . . . .	61
3.3	Séries de Fourier . . . . .	61
3.3.1	Período fundamental e componentes harmônicas . . . . .	62
3.3.2	Série trigonométrica de Fourier . . . . .	62
3.3.3	Série Exponencial de Fourier . . . . .	65
3.3.4	Espectro da série de Fourier . . . . .	67
3.3.5	Relação entre coeficientes . . . . .	69
3.4	Convergência das séries de Fourier . . . . .	70
3.5	Reconstrução de um sinal a partir dos coeficientes da série de Fourier . . . . .	70
3.6	Propriedades da Série de Fourier . . . . .	75
3.6.1	Linearidade . . . . .	75
3.6.2	Deslocamento no tempo . . . . .	76
3.6.3	Derivação . . . . .	76
3.6.4	Integração . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Análise de sinais não-periódicos no tempo contínuo</b>	<b>79</b>
4.1	Transformada de Fourier . . . . .	79
4.1.1	Extensão periódica de um sinal . . . . .	79
4.1.2	Representação da extensão periódica . . . . .	80
4.2	Transformada de Fourier de algumas funções comuns . . . . .	82
4.2.1	Função porta unitária . . . . .	82
4.2.2	Função impulso unitário . . . . .	83
4.2.3	Transformada inversa do impulso . . . . .	84
4.3	Propriedades da transformada de Fourier . . . . .	85
4.3.1	Linearidade . . . . .	85
4.3.2	Dualidade tempo-frequência . . . . .	85
4.3.3	Escalamento . . . . .	86
4.3.4	Deslocamento no tempo . . . . .	86
4.3.5	Deslocamento na frequência . . . . .	87
4.3.6	Convolução . . . . .	89
4.4	Resposta em frequência de sistemas LTI . . . . .	89
4.4.1	Autofunções de sistemas LTI . . . . .	90
4.4.2	Diagrama de resposta em frequência . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Filtragem de sinais</b>	<b>93</b>
5.1	Introdução . . . . .	93
5.1.1	Distorção e atraso de grupo . . . . .	93
5.2	Filtros ideais . . . . .	95
5.3	Filtros reais . . . . .	97

5.3.1	Filtro Butterworth . . . . .	97
5.4	Outros tipos de filtros . . . . .	99
5.4.1	Filtro Chebyshev . . . . .	99
5.4.2	Filtros adaptativos . . . . .	99
5.4.3	Estimadores lineares . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Amostragem de sinais contínuos</b>	<b>102</b>
6.1	Teorema da amostragem . . . . .	102
6.2	Aliasing . . . . .	106
6.3	Reconstrução do sinal amostrado . . . . .	109
6.3.1	Reconstrução ideal . . . . .	109
6.3.2	Reconstrução por segurador de ordem zero . . . . .	110
6.3.3	Superamostragem . . . . .	111
6.4	Amostragem espectral . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Análise de sinais no tempo discreto</b>	<b>114</b>
7.1	Transformada de Fourier em Tempo Discreto - DTFT . . . . .	114
7.1.1	Periodicidade discreta . . . . .	114
7.1.2	Série de Fourier discreta . . . . .	115
7.1.3	Extensão para sinais aperiódicos . . . . .	116
7.1.4	Espectro da DTFT . . . . .	117
7.2	Transformada discreta de Fourier - DFT . . . . .	117
7.2.1	Dupla amostragem . . . . .	117
7.2.2	Número de amostras . . . . .	118
7.2.3	Cálculo da DFT . . . . .	118
7.2.4	Relação entre $k$ , $\Omega$ , e $\omega$ . . . . .	120
<b>A</b>	<b>Ortogonalidade de funções senoidais</b>	<b>121</b>
A.1	$\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ . . . . .	121
A.2	$\sin(\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$ . . . . .	121
A.3	$e^{j\omega t}$ e $e^{jn\omega t}$ . . . . .	122
<b>B</b>	<b>Tabela de transformadas de Fourier</b>	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Introdução à Análise de Sinais

Os processos físicos podem ser modelados como a interação de dois elementos básicos: **sinais** e **sistemas**.

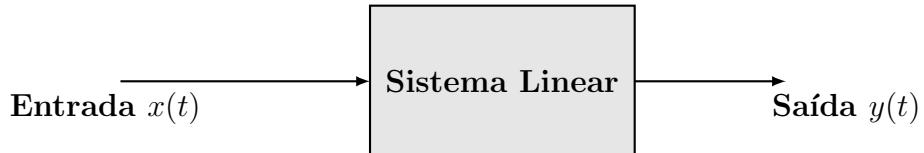


Figura 1.1: Representação de um sistema linear. A entrada  $x(t)$  é processada pelo sistema, resultando na saída  $y(t)$ .

O estudo de sinais nos permite obter formas de representar e analisar  $x(t)$  de maneira a evidenciar algumas características relevantes. Um sinal é um conjunto de dados ou informações escritas em função de uma ou mais variáveis independentes. Alguns exemplos são a variação de pressão do ar em uma determinada posição (sinal sonoro, exemplificado na figura 1.2), ou a variação de tensão elétrica em um circuito. Ambos os exemplos são descrições *temporais* da informação. O estudo dos sinais não é limitado a isso, inclusive grande parte do conteúdo dessa disciplina é dedicado a encontrar outras formas de descrever um sinal que não seja sua evolução no tempo.

### Outros exemplos de sinais:

- Tanto a variação de pressão do ar, quanto as variações elétricas correspondentes, observadas na saída do microfone, são exemplos de sinais (no caso, transportando a mesma informação);
- fumaça em conchas;
- voz e áudio;
- imagem (fotografia, radiografia, tomografia etc.);

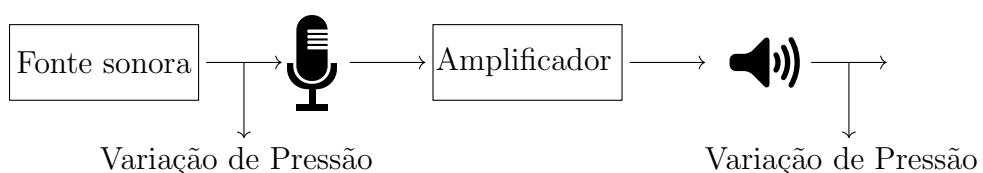


Figura 1.2: Sistema linear composto por um conjunto de componentes que processam um sinal de áudio.

- sinais biomédicos: ECG, EEG, PCG, EMG etc.;
- vídeo.

Em geral, os sinais são representados como funções matemáticas de uma ou mais variáveis independentes:

- voz: função da variável tempo;

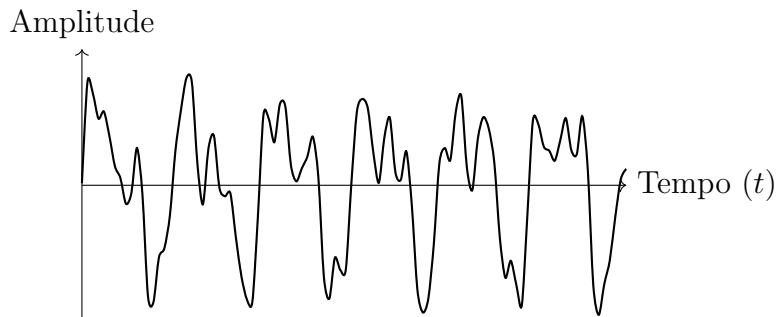


Figura 1.3: Exemplo de sinal de áudio em função do tempo

- imagem: função no espaço bidimensional, *e.g.*, dos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ ;

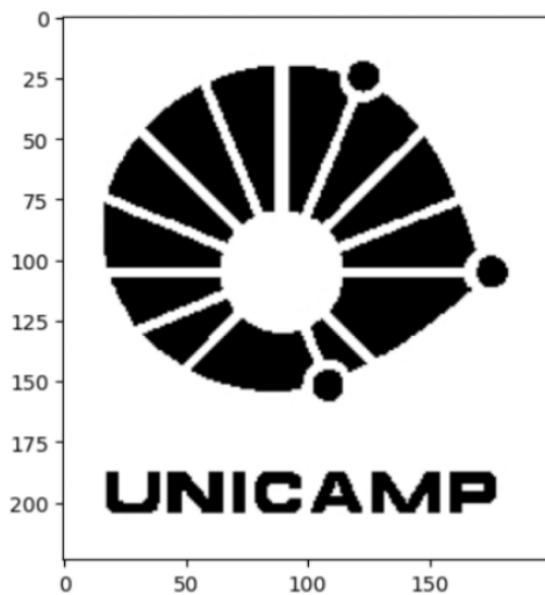


Figura 1.4: Exemplo de imagem (bitmap) como sinal bidimensional

- imagem de satélite: depende não só das variáveis  $x$  e  $y$ , mas também da faixa do espectro observada (visível, IR próximo, termal, etc.).

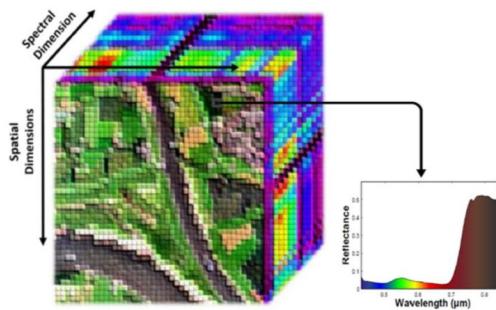


Figura 1.5: Exemplo de datacube: sinal tridimensional (imagem + comprimento de onda)

Quando “alimentamos” um sistema físico com um sinal de entrada, ele age sobre o sinal e apresenta em sua saída outro sinal que depende exclusivamente do sinal de entrada e da dinâmica do sistema. O estudo dos sistemas lineares busca maneiras de interpretar a dinâmica de um dado sistema e prever o seu comportamento.

Ambas as disciplinas, sinais e sistemas, inciam grandes áreas da engenharia elétrica. Evidentemente o estudo de sinais e sistemas é indissociável e estão intimamente conectados, mas cada uma possui suas particularidades. Das ferramentas obtidas através do estudo de sinais obtemos informações cruciais para o desenvolvimento das telecomunicações, processamento de imagens, reconhecimento de padrões, entre outros.

## 1.1 Classificação de sinais

### 1.1.1 Sinais Contínuos e Discretos

- sinais contínuos no tempo existem e estão definidos para todos os valores de  $t$ :  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- sinais discretos no tempo existem *apenas* em um conjunto de tempos bem definidos:  $x[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

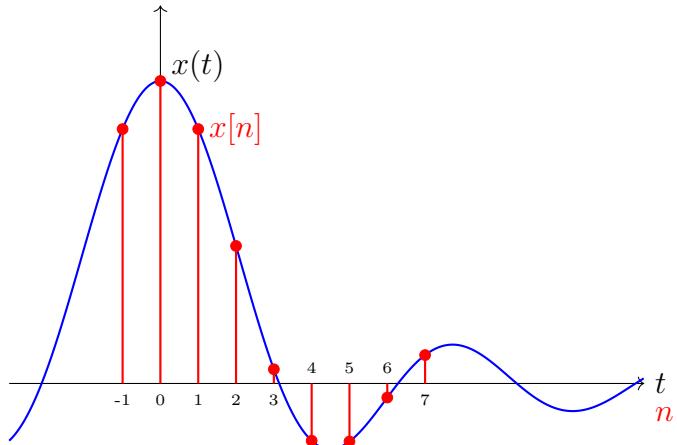


Figura 1.6: O sinal discreto  $x[n]$  contém observações de  $x(t)$  tomadas em instantes de tempo pré-fixados. Logo, a variável independente  $n$  é discreta e aponta o índice da amostra na sequência:  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.1.2 Sinais Digitais e Analógicos

Essa classificação é frequentemente confundida com sinais a tempo contínuo e discreto. Digital e analógico são classificações que dizem respeito à *amplitude* dos sinais, enquanto contínuo e discreto dizem respeito à *variável independente*. Sinais analógicos podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo contínuo (denominado contra-domínio), enquanto sinais digitais só podem assumir alguns valores específicos.

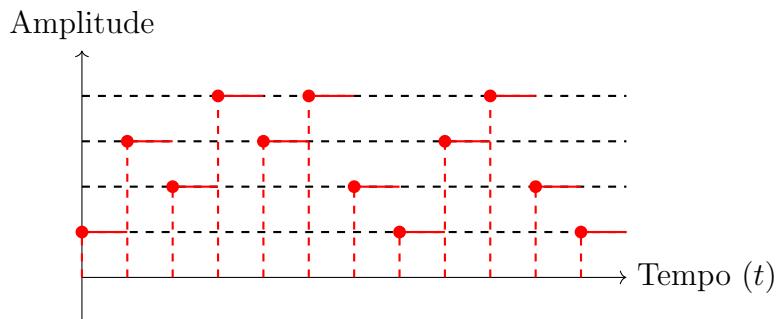


Figura 1.7: Exemplo de sinal digital (amplitude discreta) em função do tempo

### 1.1.3 Sinais Periódicos e Aperiódicos

Um sinal contínuo  $x(t)$  é periódico com período  $T$  se, e somente se,  $x(t) = x(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$

Se  $x(t)$  é periódico com período  $T$ , então  $x(t)$  também é periódico com período  $kT$ , onde  $k$  é um número inteiro. A rigor, um sinal periódico possui infinitos períodos. Por isso, o menor período positivo é utilizado para descrever o sinal e é chamado de *período fundamental*.

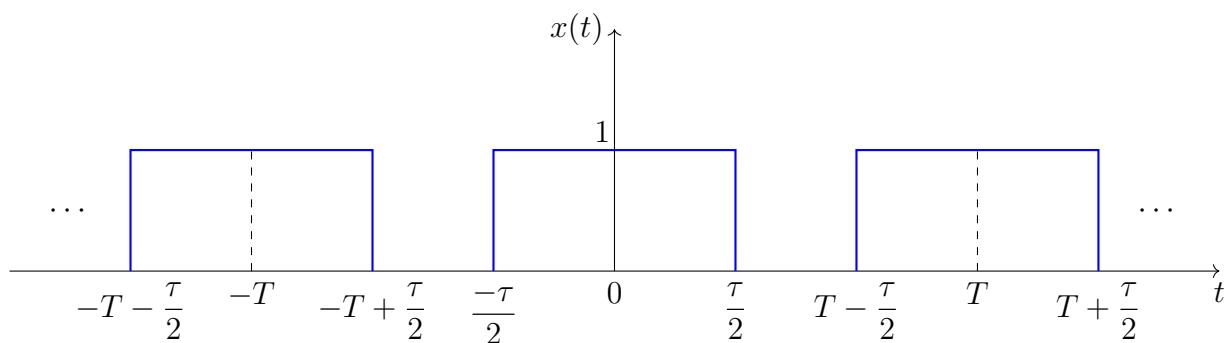


Figura 1.8: Exemplo de onda quadrada com período  $T$  e período fundamental  $\tau$

Por definição, sinais periódicos devem ser idênticos quando deslocados por múltiplos inteiros de  $T$ , então eles devem ser *infinitos*.

Um sinal finito iniciado em  $t_1$ , por exemplo não atenderia  $x(t_1) = x(t_1 + T)$ , logo não pode ser periódico. O mesmo vale para um sinal terminado em  $t_2$ .

Outra propriedade é que podemos construir um sinal periódico pela repetição infinita de um segmento qualquer de duração  $T$ . Este segmento pode se iniciar em qualquer ponto desde que sua duração seja  $T$ .

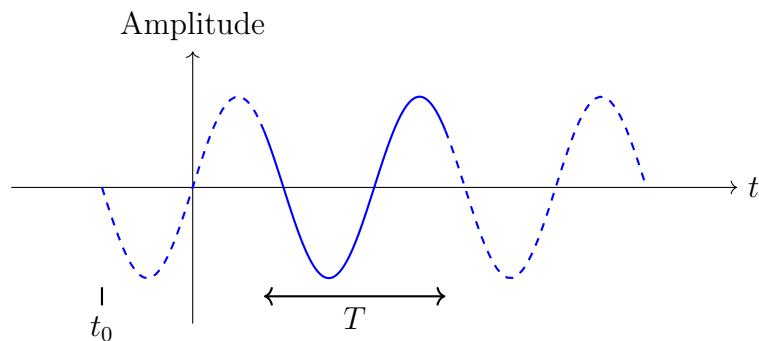


Figura 1.9: Construção de sinal periódico pela repetição infinita de um segmento de duração  $T$

Um sinal discreto  $x[n]$  é periódico com período  $N$  se, e somente se,  $x[n] = x[n - kN]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $N \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Exemplo: } x[n] = A \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$x[n + kN] = A \cos\left(\frac{2\pi(n + kN)}{N}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{N} + k \cdot 2\pi\right)}_{\text{Período com período } 2\pi} = A \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

Portanto,  $x[n]$  é um sinal discreto, periódico, com período fundamental  $N$ .

#### 1.1.4 Sinais Pares e Ímpares

- $x(t)$  é par se e somente se  $x(t) = x(-t)$ ,  $\forall t$ .
- $x(t)$  é ímpar se e somente se  $x(t) = -x(-t)$ ,  $\forall t$ .

Exemplos:

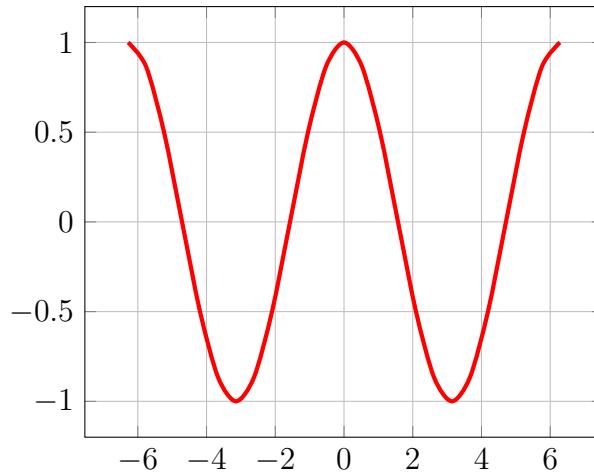


Figura 1.10:  $x(t) = \cos(t)$  (sinal par)

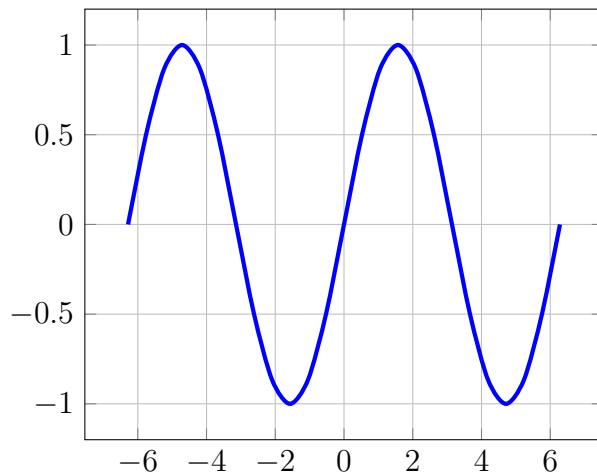


Figura 1.11:  $x(t) = \sin(t)$  (sinal ímpar)

Qualquer sinal  $x(t)$  pode ser escrito como a combinação de duas componentes,  $x_p(t)$  e  $x_i(t)$ , que apresentem simetria par e ímpar, respectivamente.

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t), \quad (1.1)$$

onde

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \text{ é a componente par,} \quad (1.2)$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}, \text{ é a componente ímpar.} \quad (1.3)$$

A partir das definições de sinais pares e ímpares, podemos concluir, desde que não exista impulso na origem, que:

$$\int_{-a}^a x_p(t) dt = 2 \int_0^a x_p(t) dt \quad (1.4)$$

e

$$\int_{-a}^a x_i(t) dt = 0 \quad (1.5)$$

## 1.2 Tamanho de um sinal

Como medimos o tamanho de um objeto? Para um ser humano, por exemplo, podemos medir sua altura. Mas essa medida não é terminativa. Uma pessoa baixa e pesada é maior ou menor que uma pessoa alta e leve? Para os sinais encontramos a mesma dualidade. Um sinal de alta amplitude, mas de curta duração é maior ou menor que um sinal de baixa amplitude, mas de longa duração? Alternativamente, podemos adotar o volume ocupado por uma pessoa, que leva em consideração outras dimensões além da altura. Se considerarmos que o raio ocupado por uma pessoa varia de acordo com a posição do corpo, seu volume seria:

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Energia de um sinal

Desta maneira, podemos fazer uma interpretação semelhante em relação a um sinal cuja amplitude varia em relação ao tempo. Criamos uma medida que calcula a área contida sob um sinal  $x(t)$  durante toda sua duração. Desta maneira levamos em conta tanto a duração quanto a sua intensidade.

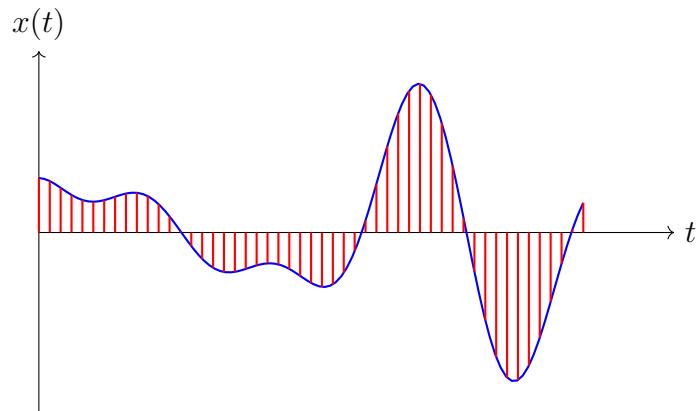


Figura 1.12: Área sob o sinal  $x(t)$ , correspondente a  $E_x$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad (1.7)$$

O problema dessa medida é que se o sinal tiver valores acima e abaixo de zero, eles se subtraem, podendo levar a valores nulos de energia em um sinal não nulo.

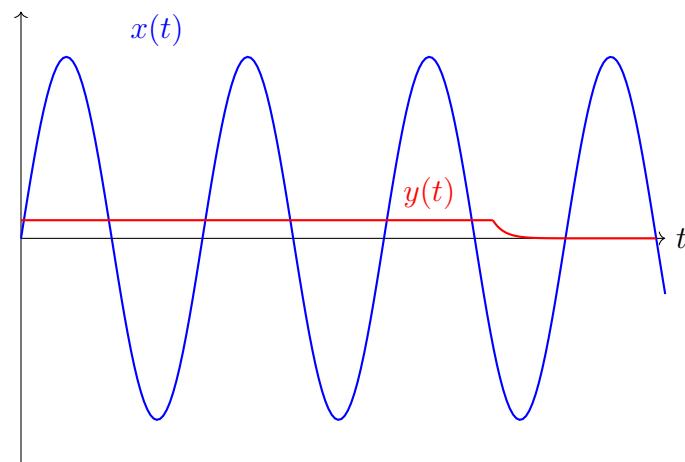


Figura 1.13: Exemplo onde  $E_y > E_x$ , mesmo  $x(t)$  sendo convencionalmente maior que  $y(t)$

Para resolver esse problema, podemos tomar a integral de  $x^2(t)$  ao invés de  $x(t)$ . Ou para a sua versão generalizada em  $\mathbb{C}$ :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Potência de um sinal

A energia do sinal, como calculada em (1.8), deve ser finita para adquirir significado físico. A condição necessária para isso é que  $x(t) \rightarrow 0$  conforme  $|t| \rightarrow \infty$ . Se esta condição não é atendida, (em  $x(t) = \sin(t)$ ), por exemplo, a energia total do sinal é infinita e continuamos com a mesma dificuldade para medir o tamanho de um sinal de antes. Como alternativa, podemos medir a energia média de um sinal ao longo de um período de tempo  $T$ .

$$P_x = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.9)$$

Como o sinal é infinito, podemos tomar o limite quando  $T \rightarrow \infty$  e obtemos a *potência média* do sinal:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.10)$$

Observe que  $P_x$  é a média dos valores de  $x(t)$  elevados ao quadrado. A raiz quadrada de  $P_x$  é chamado de valor *RMS* ou *valor eficaz* do sinal.

Geralmente  $P_x$  está definido para sinais periódicos ou com alguma regularidade estatística. Como em sinais periódicos observamos que  $x(t) = x(t + T)$ , podemos medir a potência apenas em um único período.

**Observação:** O valor de energia  $E_x$  não corresponde a energia no sentido estrito porque esta depende, no caso de um sinal elétrico, da carga ligada ao sinal  $x(t)$ . Podemos convencionar que  $E_x$  corresponde à energia dissipada por um sinal elétrico  $x(t)$  sobre um resistor de  $1\Omega$ .

**Exemplo:** (Exemplo 1.1 - Lathi) Determine a energia do sinal  $x(t)$  descrito na figura 1.14

As noções de potência e energia podem ser aplicadas a qualquer tipo de sinal, não apenas para tensão e corrente em um dispositivo.

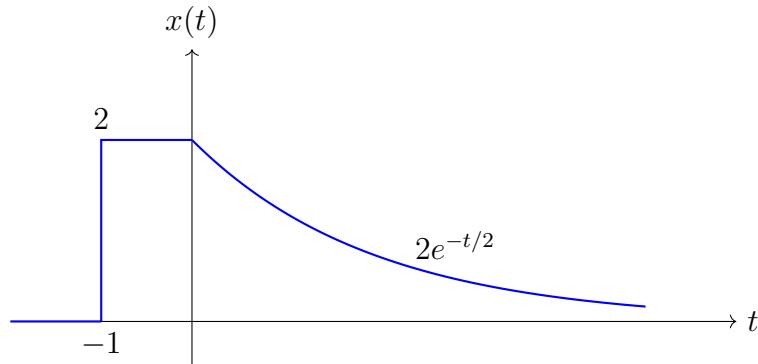


Figura 1.14: Sinal  $x(t)$

Como o sinal  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $|t| \rightarrow \infty$ , a energia do sinal será finita. Podemos dividir o cálculo em duas partes, uma para o intervalo  $[-1, 0]$  e outra para o intervalo  $[0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^0 |x(t)|^2 dt + \int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ E_x &= \int_{-1}^0 2^2 dt + \int_0^{\infty} (2e^{-t/2})^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-1}^0 4dt + \int_0^\infty 4e^{-t}dt \\
 E_x &= \int_{-1}^0 4dt + 4 \int_0^\infty e^{-t}dt \\
 E_x &= 4[t]_0^1 + 4[-e^{-t}]_0^\infty \\
 E_x &= 8
 \end{aligned}$$

**Exemplo:** (Exemplo 1.2 - Lathi) Determine a potência média do sinal  $x(t)$  descrito na figura 1.15.

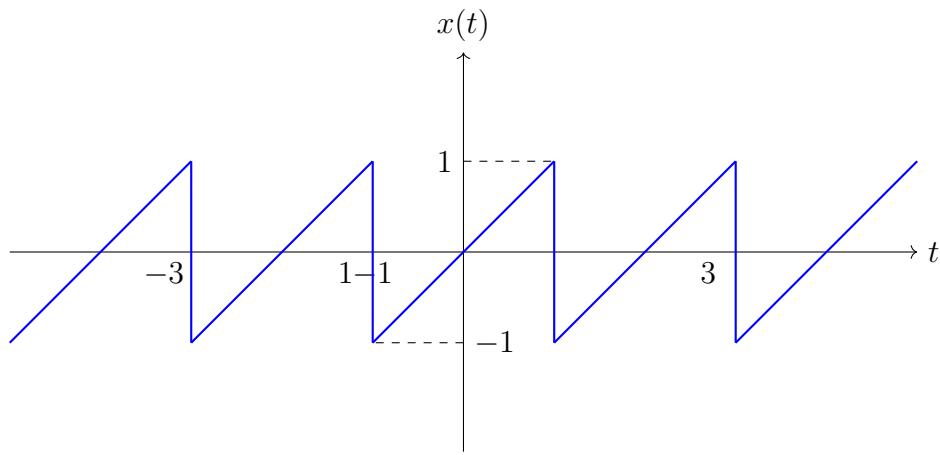


Figura 1.15: Sinal  $x(t)$

O sinal  $x(t)$  é periódico com período  $T = 2$ , portanto podemos calcular a potência média em um período:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt \\
 P_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt \\
 P_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 \\
 P_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right) \\
 P_x &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Resumindo:** Seja  $x(t)$  um sinal contínuo no tempo.

- Potência instantânea:  $|x(t)|^2$
- Energia de um sinal em um intervalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

- Energia total:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Potência média em um intervalo:

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}{t_2 - t_1}$$

- Potência média total:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Para um sinal  $x[n]$  a tempo discreto:

- Potência instantânea:  $|x[n]|^2$

- Energia em intervalo

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- Energia total:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Potência média em um intervalo:

$$\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- Potência média total:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

**Exemplo:** bateria de carro de 12 volts.

- Potência instantânea normalizada (pressupõe uma resistência de  $1 \Omega$ ):  $|x(t)|^2 = 144$ ;
- Energia  $(t_1, t_2)$ :  $144(t_2 - t_1)$ ;
- Energia total:  $\infty$ ;
- Potência média total:

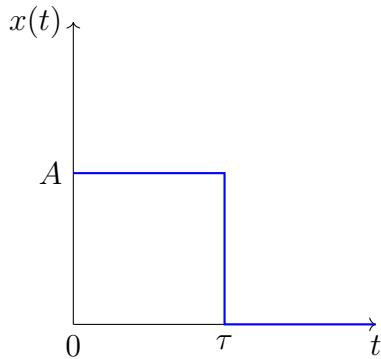
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (144) \cdot (2T) = 144$$

Com base nestas definições, podemos classificar os sinais em dois tipos:

- 1. Sinais de Energia:** apresentam energia total finita; consequentemente, a potência média total é nula.

**Exemplo:**

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$E_{TOTAL} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\tau} A^2 dt = A^2 \tau$$

- 2. Sinais de Potência:** apresentam potência média total finita e diferente de zero. Para isso, a energia total deve tender ao infinito.

**Exemplo:**  $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Trata-se de um sinal periódico, com período  $T_0$ .

- Potência instantânea:

$$|x(t)|^2 = A^2 \cos^2(\omega_0 t) = A^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) \right)$$

- Potência média em um período:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{A^2}{2} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt + \underbrace{\int_0^{T_0} \frac{A^2}{2T_0} \cos(2\omega_0 t) dt}_{\substack{\text{integral ao longo} \\ \text{de um múltiplo} \\ \text{do período da} \\ \text{cosenóide}}} = \frac{A^2}{2}$$

OBS.: O sinal  $x(t) = t$ ,  $\forall t$  possui  $E_{TOTAL} \rightarrow \infty$  e, ao mesmo tempo,  $P_{Média} \rightarrow \infty$ .

## 1.3 Transformação da Variável Independente

### 1.3.1 Deslocamento

Essa operação implementa um deslocamento no eixo do tempo, como por exemplo, o tempo de propagação de um sinal em um meio físico. Essa operação é muito comum em sistemas de comunicação, onde o sinal é transmitido com um atraso ou adiantamento devido a limitações físicas. Dado um sinal

$x(t)$ , o sinal  $\varphi = x(t - t_0)$  é idêntico a  $x(t)$  deslocado no eixo do tempo. Tudo que acontece em  $x(t)$  acontece em  $\varphi$   $t_0$  segundos depois.

$$\varphi(t + t_0) = x(t)$$

$$\varphi(t) = x(t - t_0)$$

- Se  $t_0 < 0$  estamos falando de um atraso (deslocamento para a direita).
- Se  $t_0 > 0$  estamos falando de um adiantamento (deslocamento para a esquerda).

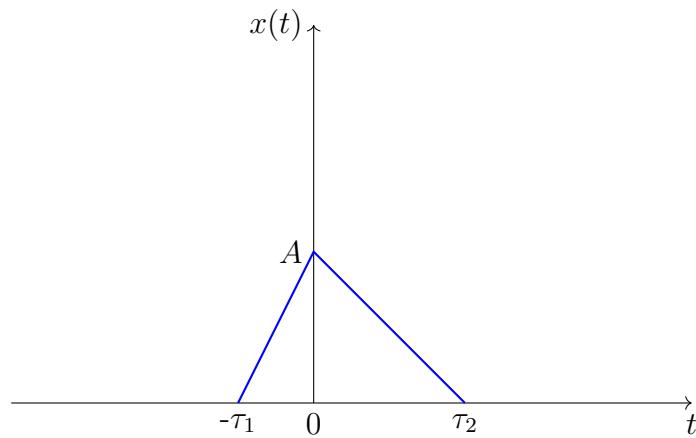


Figura 1.16: Sinal  $x(t)$  original

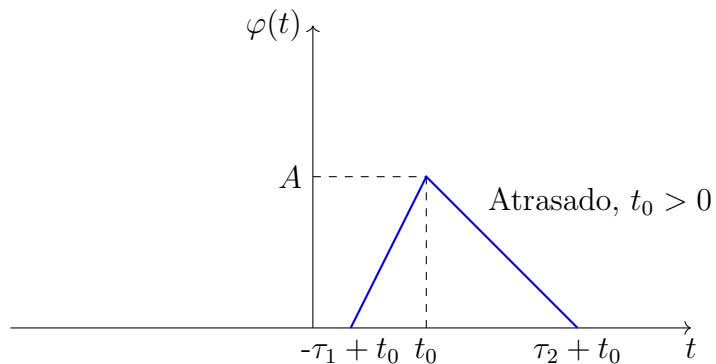


Figura 1.17: Sinal  $x(t - t_0)$  atrasado

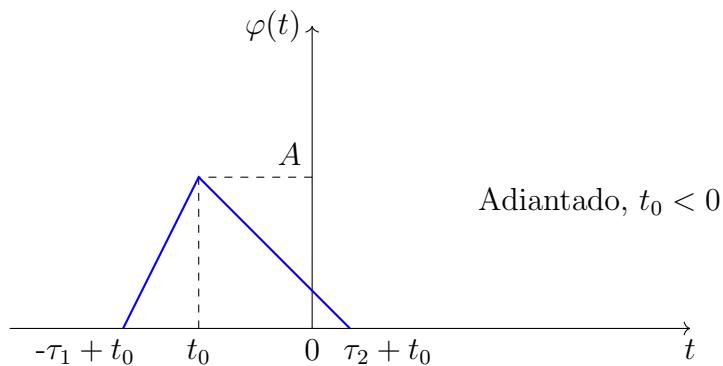


Figura 1.18: Sinal  $x(t + t_0)$  adiantado

### 1.3.2 Inversão no eixo do tempo

A operação de inversão no eixo do tempo é uma transformação que reflete o sinal em torno do eixo vertical. Essa operação modela alguns fenômenos físicos, como a reflexão de ondas em superfícies ou operações de filtragem onde desejamos obter um filtro casado. Dado um sinal  $x(t)$ , o sinal  $\varphi$  é idêntico à  $x(t)$ , mas o que acontece em  $x$  no tempo  $t$ , acontece em  $\varphi$  em  $-t$ .  $\varphi$ , portanto, é o resultado da rotação de  $x(t)$  em torno do eixo vertical.

$$\varphi(t) = x(-t)$$

**Atenção:**  $x(-t) \neq -x(t)$

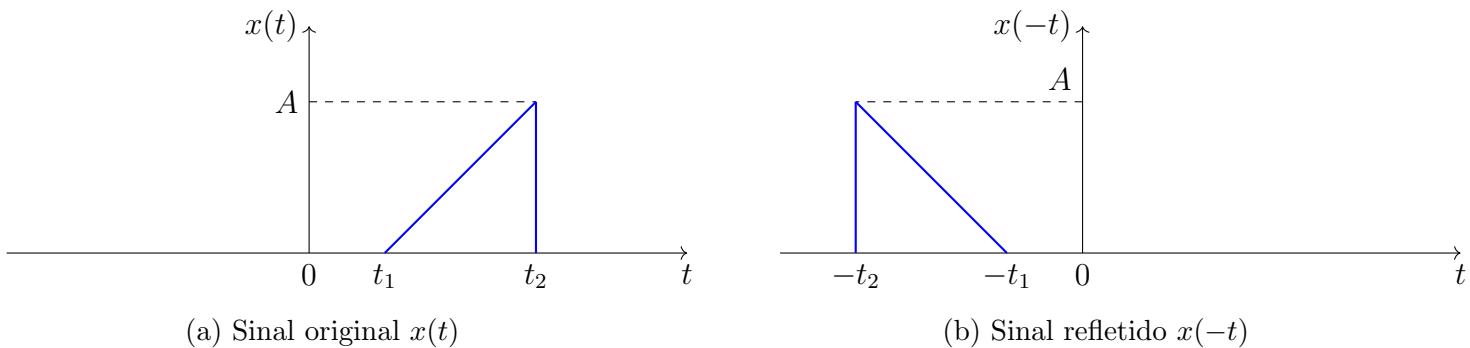
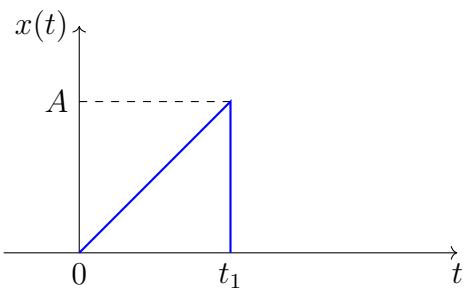


Figura 1.19: Inversão no eixo do tempo

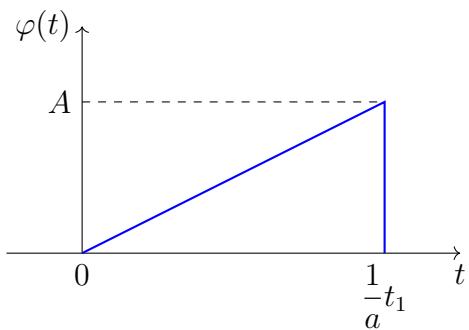
### 1.3.3 Escalonamento

O escalonamento temporal é uma transformação que altera a taxa de variação do sinal ao longo do tempo. Essa operação é útil para modelar operações de processamento de sinais como aplicação de zoom em uma imagem ou alguns efeitos físicos como o efeito Doppler. Dado um sinal  $x(t)$ , o sinal  $\varphi(t) = x(at)$ ,  $a > 0$ , é idêntico a  $x$ , mas tudo que acontece em  $x$  no tempo  $t$ , acontece em  $\varphi$  no tempo  $\frac{t}{a}$ . A depender do sinal de  $a$ ,  $\varphi$  é uma versão ampliada ou reduzida de  $x(t)$ .

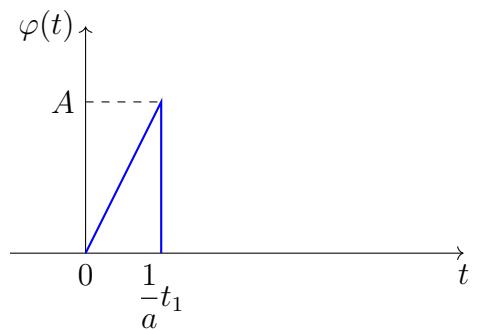
Um exemplo dessa operação é um sinal de áudio reproduzido com o dobro da velocidade.



(a) Sinal original  $x(t)$



(b) Sinal ampliado ( $a < 1$ )



(c) Sinal reduzido ( $a > 1$ )

Figura 1.20: Escalonamento temporal de  $x(t)$ : ampliação ( $a < 1$ ) e redução ( $a > 1$ )

### 1.3.4 Operações combinadas

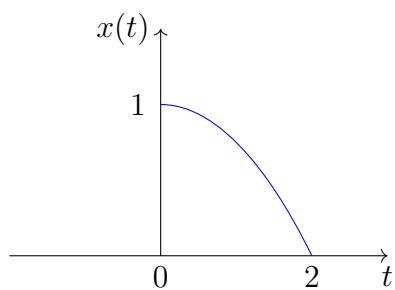
As transformações de deslocamento, inversão e escalonamento também podem ser combinadas para construir operações mais complexas. A operação geral é dada por:

$$\varphi(t) = x(at - b)$$

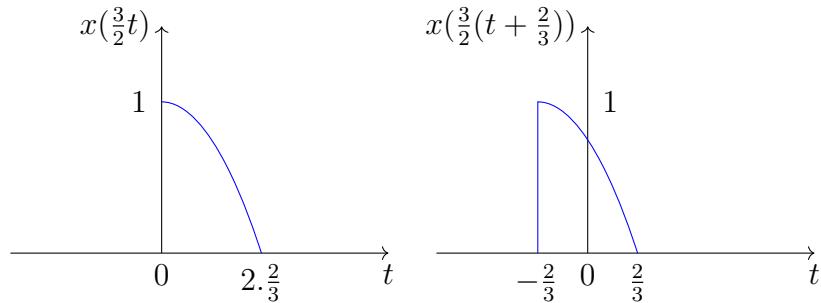
que pode ser implementada em duas sequências de operações diferentes:

1. Deslocamento temporal de  $x(t)$  em  $b$  segundos, obtendo  $x(t-b)$ , seguido de escalonamento temporal por  $a$ , resultando em  $x(at-b)$ .
2. Escalonamento temporal de  $x(t)$  por  $a$ , obtendo  $x(at)$ , seguido de deslocamento temporal de  $\frac{b}{a}$ , resultando em  $x(a[t-\frac{b}{a}])$ , obtendo  $x(at-b)$ .

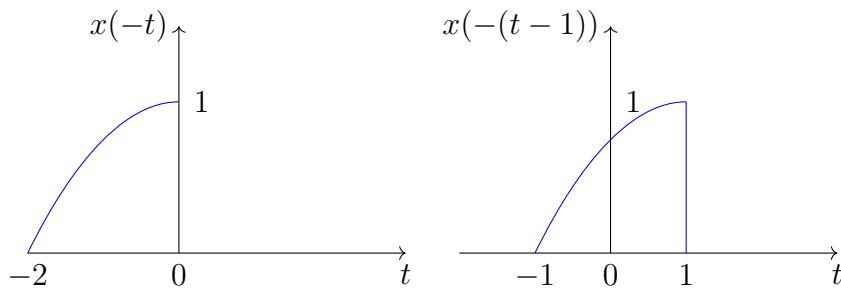
**Exemplo:** queremos obter  $x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$  e  $x(-t + 1)$ .



$x\left(\frac{3}{2}t + 1\right) = x\left(\frac{3}{2}(t + 2/3)\right)$ . A partir de  $x(t)$ , geramos  $x\left(\frac{3}{2}t\right)$  e, em seguida, aplicamos o deslocamento  $t_0 = -2/3$  para obter  $x\left(\frac{3}{2}(t + 2/3)\right)$ .



$x(-t + 1) = x(-(t - 1))$ . A partir de  $x(t)$ , geramos  $x(-t)$  e, em seguida, aplicamos o deslocamento para obter  $x(-t + 1)$ .



## 1.4 Sinais e Sequências Exponenciais

Uma classe particularmente importante de sinais e sequências para este curso está associada às funções exponenciais complexas. Começaremos caracterizando as exponenciais complexas contínuas, passando, então, às sequências exponenciais.

### 1.4.1 Sinais exponenciais contínuos

**Forma geral:**

$$x(t) = ce^{at}, \quad a, c \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

#### Exponenciais reais

Primeiro, vamos avaliar as exponenciais reais da forma  $x(t) = ce^{at}$ , com  $a, c \in \mathbb{R}$ . Essa classe de função pode assumir três tipos de comportamentos, a depender do sinal de  $a$ :

- $a < 0$ : a exponencial decai para zero conforme  $t$  aumenta, ou seja,  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , como mostrado na figura 1.21a.
- $a = 0$ : a exponencial se torna uma constante, ou seja,  $x(t) = c$ , como mostrado na figura 1.21b.

- $a > 0$ : a exponencial cresce sem limites conforme  $t$  aumenta, ou seja,  $x(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , como mostrado na figura 1.21c.

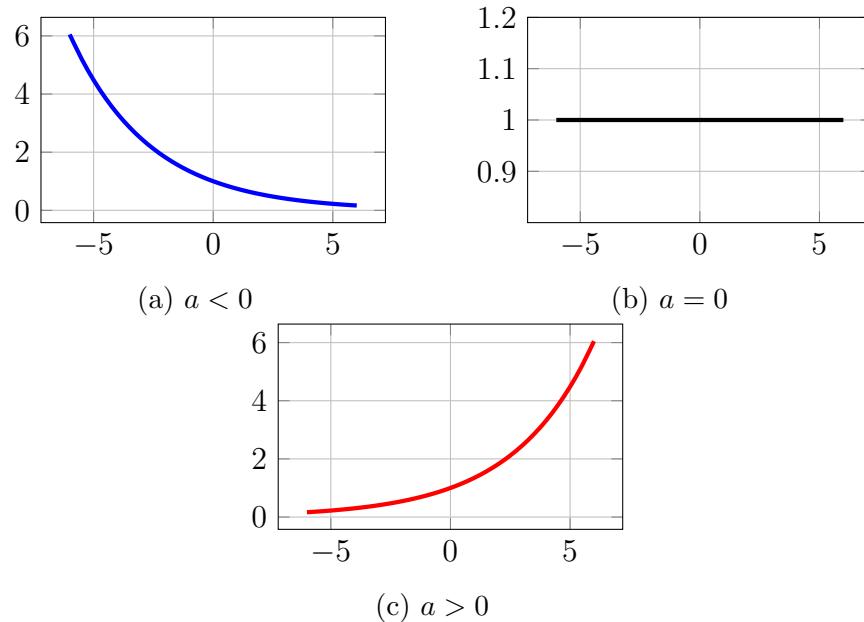


Figura 1.21: Comportamento das exponenciais reais  $x(t) = ce^{at}$  para diferentes valores de  $a$ .

### Exponenciais puramente complexas

Inicialmente, vamos avaliar as exponenciais complexas, onde  $a$  é um número puramente imaginário,  $c$  real. Por simplicidade, vamos adotar  $c = 1$ .

A partir das definições de seno e cosseno:

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \quad \text{sen}(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \quad (1.12)$$

Então, se  $x(t) = e^{at} \xrightarrow{a=j\omega_0} x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ,  $-\infty < t < \infty$ , podemos manipular as equações (1.12) para escrever a exponencial complexa  $e^{j\omega_0 t}$  como:

**Fórmula de Euler:**  $e^{j\omega_0 t} = \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{real}} + j\underbrace{\text{sen}(\omega_0 t)}_{\text{imaginária}}$

A partir da fórmula de Euler, podemos observar que  $e^{j\omega_0 t}$  é um numero complexo que tem como parte real  $\cos(\omega_0 t)$  e como parte imaginária  $\text{sen}(\omega_0 t)$ . Assim, o comportamento de  $e^{j\omega_0 t}$  pode ser visualizado no plano complexo, conforme ilustrado na Figura 1.22.

Tomando o módulo de  $e^{j\omega_0 t}$ , temos:

$$|e^{j\omega_0 t}| = \sqrt{\cos^2(\omega_0 t) + \text{sen}^2(\omega_0 t)} = \sqrt{1} = 1 \quad (1.13)$$

Então, vemos que independente de  $t$ , o módulo de  $e^{j\omega_0 t}$  é sempre igual a 1, ou seja, o ponto  $e^{j\omega_0 t}$  está sempre localizado na circunferência unitária do plano complexo.

Em relação à fase, temos:

$$\arg(e^{j\omega_0 t}) = \arctan\left(\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)}\right) = \arctan(\tan(\omega_0 t)) = \omega_0 t \quad (1.14)$$

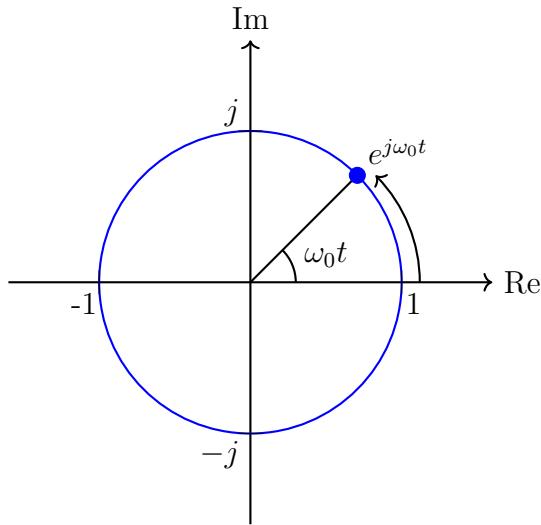


Figura 1.22: Representação de  $e^{j\omega_0 t}$  no plano complexo

Mostrando que  $e^{j\omega_0 t}$  é um número complexo “girando” sobre o círculo unitário com velocidade angular  $\omega_0$ . O período de rotação dessa função é  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , pois:

$$e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j2\pi} = e^{j\omega_0 t} \quad (1.15)$$

A partir dessa interpretação, vamos trabalhar com três grandezas diferentes, relacionadas a esse período de rotação.

- $T_0$ : período fundamental (em segundos);
- $f_0$ : frequência fundamental (em Hertz),  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ;
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ : frequência angular (em rad/s).

E, como  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  é uma função periódica, podemos calcular a energia e potência associadas a esse sinal:

- Energia em um período:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \underbrace{|e^{j\omega_0 t}|^2}_{=1} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} 1 dt = T_0 \quad (1.16)$$

- Energia total: ilimitada
- Potência média em um período:  $\frac{E_{\text{período}}}{T_0} = 1$
- Potência média total: 1

## Exponenciais complexas gerais

Vamos generalizar a forma da equação (1.11), de forma que tanto  $a$  quanto  $c$  admitam parte real e imaginária. Então,

Seja  $c = |c|e^{j\theta}$  e  $a = r + j\omega$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= |c|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} \\ x(t) &= |c|e^{rt}e^{j\omega t}e^{j\theta} \\ x(t) &= \underbrace{|c|e^{rt}}_{\substack{\text{amplitude } c/ \\ \text{variação} \\ \text{exponencial}}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega t+\theta)}}_{\substack{\text{componente} \\ \text{periódica}}} \end{aligned}$$

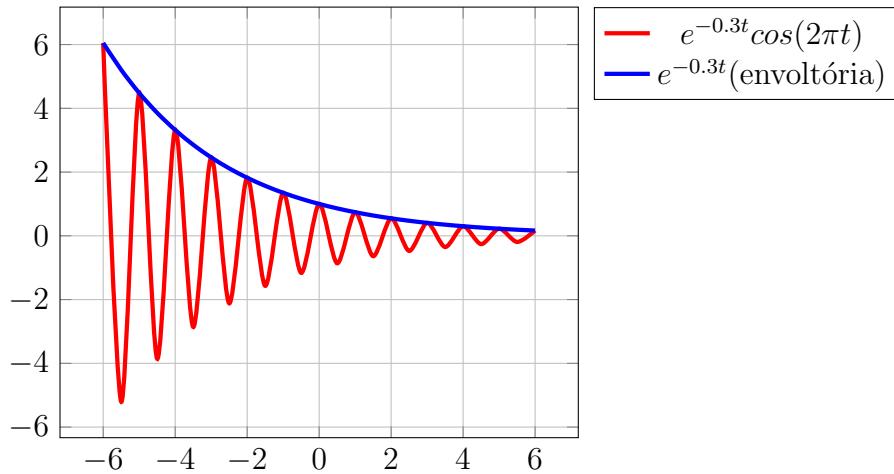
Neste curso vamos tratar exclusivamente de sinais reais, e nesse caso, sempre que aparecer uma exponencial complexa como  $e^{j\omega_0 t}$ , o seu complexo conjugado  $e^{-j\omega_0 t}$  também estará presente, então,  $x(t) = |c|e^{rt} [e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$ .

Usando a fórmula de Euler:

$$x(t) = |c|e^{rt} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta) - j \sin(\omega t + \theta)] \quad (1.17)$$

$$x(t) = 2|c|e^{rt} \cos(\omega t + \theta) \quad (1.18)$$

Exemplo:  $r < 0$ : amplitude amortecida



Dica para manipulação matemática:

$$x(t) = e^{j\theta_1 t} + e^{j\theta_2 t} = e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t} \left( e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} + e^{-j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} \right) \quad (1.19)$$

$$= 2e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t} \frac{\left( e^{j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} + e^{-j\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)t} \right)}{2} \quad (1.20)$$

$$= 2e^{j\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)t} \cos\left(\frac{(\theta_1 - \theta_2)t}{2}\right). \quad (1.21)$$

### 1.4.2 Sequências exponenciais discretas

**Forma Geral:**  $x[n] = c\alpha^n = ce^{\beta n}$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $n$  inteiro,  $e^\beta = \alpha$ .

#### Exponenciais reais

Nos casos onde  $c, \alpha \in \mathbb{R}$ . Ilustramos o comportamento desse tipo de sequência na Figura 2, considerando, sem perda de generalidade, o caso em que  $c = 1$ . Assim como no caso contínuo, temos múltiplos comportamentos, a depender do valor de  $\alpha$ :

- $\alpha > 1$  : A sequência diverge para conforme  $n$  aumenta, ou seja,  $x[n] \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como mostrado na Figura 1.23a.
- $0 < \alpha < 1$  : A sequência converge para zero conforme  $n$  aumenta, ou seja,  $x[n] \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , como mostrado na Figura 1.23b.
- $0 < \alpha < 1$  : A sequência converge para zero conforme  $n$  aumenta, mas alternando seu sinal. Ou seja,  $x[n] \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , mas  $x[n]$  é negativo para  $n$  ímpares e positivo para  $n$  pares, como mostrado na figura 1.23c.
- $\alpha = -1$  : A sequência alterna entre  $c$  e  $-c$ , ou seja,  $x[n] = (-1)^n c$  para todo  $n$ .
- $\alpha < -1$  : A sequência diverge conforme  $n$  aumenta, mas alternando seu sinal. Ou seja,  $x[n] \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , mas  $x[n]$  é negativo para  $n$  ímpares e positivo para  $n$  pares, como mostrado na figura 1.23c.

#### Exponenciais complexas puramente imaginárias

Assim como no caso contínuo, vamos assumir  $c = 1$  e  $\beta = j\omega_0$ . Portanto, a sequência é dada por:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad (1.22)$$

Como  $e^{j\omega_0 n} = \cos[\omega_0 n] + j\sin[\omega_0 n]$ , temos que  $\cos[\omega_0 n] = \operatorname{Re}\{e^{j\omega_0 n}\}$  e  $\sin[\omega_0 n] = \operatorname{Im}\{e^{j\omega_0 n}\}$ .

Vamos, então, analisar as propriedades de periodicidade de  $e^{j\omega_0 n}$ , destacando as suas semelhanças e diferenças em relação a  $e^{j\omega_0 t}$ .

#### Periodicidade de $\cos[nt + \theta]$

Novamente, como trabalhamos estritamente com sinais reais, pela fórmula de Euler, podemos concluir que toda exponencial complexa se trata de um cosseno, modulado ou não por outras funções.

Podemos escrever o cosseno discreto como sendo:

$$x[n] = C \cos(\Omega n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.23)$$

Da equação (1.23), podemos observar que o sinal discreto é um cosseno cujo ângulo é determinado por  $\Omega n$ . Portanto, a cada avanço amostral  $n$ , temos um avanço angular correspondente a  $\Omega$  denominado frequência com unidade de rad/amostra.

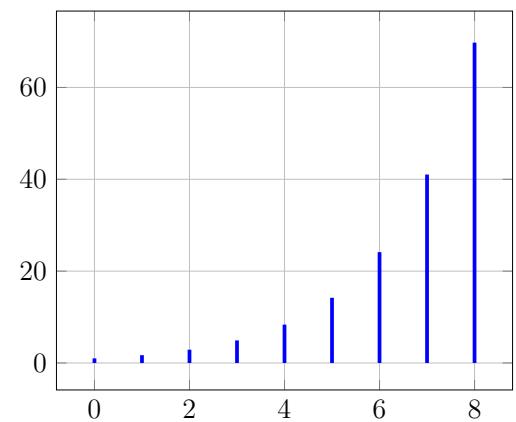
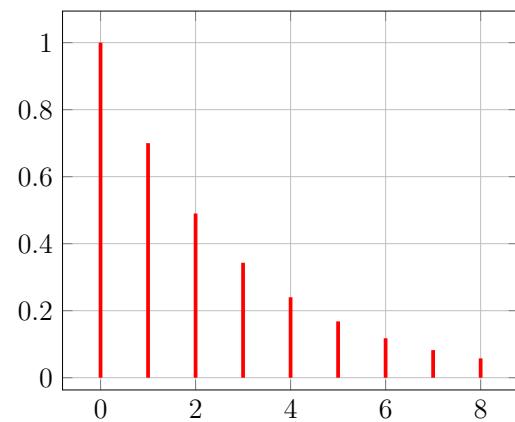
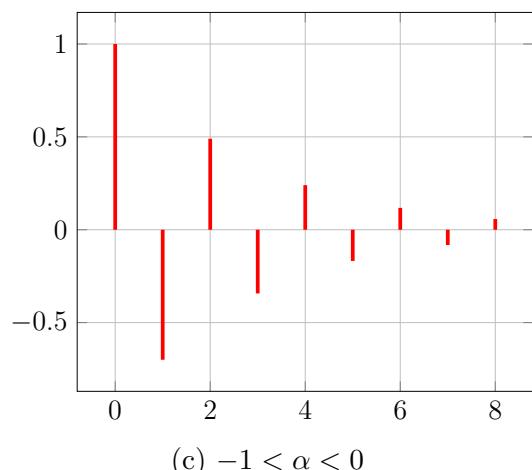
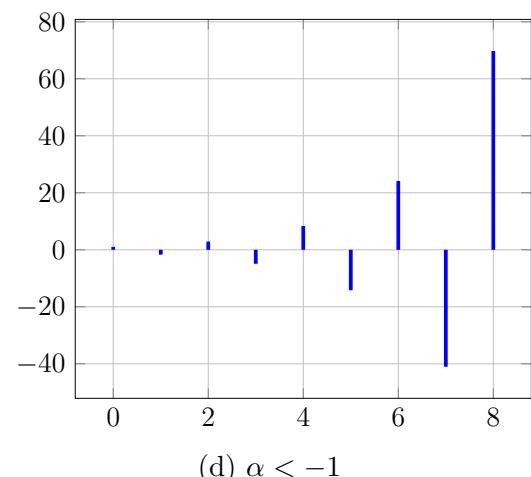
(a)  $\alpha > 1$ (b)  $0 < \alpha < 1$ (c)  $-1 < \alpha < 0$ (d)  $\alpha < -1$ 

Figura 1.23: Possíveis comportamentos para as exponenciais reais.

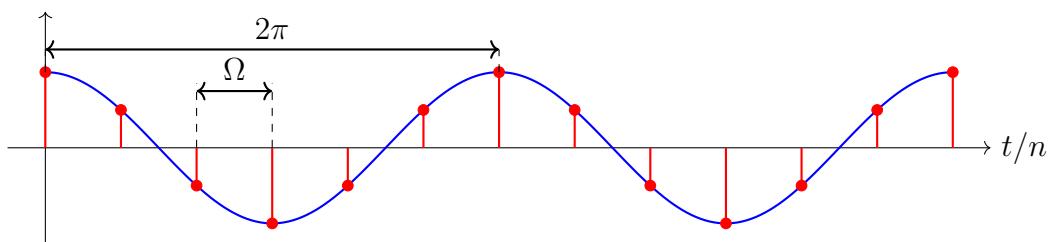


Figura 1.24: Relação entre frequências discretas

Como a onda discreta é amostrada, ela pode ser vista como uma versão "picotada" da onda contínua. Se a frequência angular é dada por  $\Omega$ , então podemos observar que o período fundamental do sinal discreto, isso é, o número de amostras necessárias para que  $x[n] = x[n + N_0]$ , é dado por  $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Como  $N_0$  deve ser um número inteiro, então  $\Omega$  deve ser um múltiplo racional de  $2\pi$ , ou seja,  $\Omega = \frac{2\pi}{N_0}k$ , com  $k$  inteiro.

### Retornando ao caso exponencial

Essa relação com o cosseno nos permite tirar algumas conclusões sobre o sinal discreto.

- $e^{j\omega_0 t}$  é distinta para cada valor de  $\omega_0$ . Contudo,  $e^{j\Omega n}$  é periódica em  $\Omega$  com período fundamental  $2\pi$ , pois

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega n}. \quad (1.24)$$

Assim, todas as possíveis exponenciais complexas do tipo  $e^{j\Omega n}$  são descritas em um intervalo de tamanho  $2\pi$  em  $\Omega$ , i.e.,  $\theta \leq \Omega \leq \theta + 2\pi$ . Ou seja, os valores de  $\Omega$  em um intervalo de duração  $2\pi$  são suficientes para caracterizar todas as exponenciais discretas.

- $e^{j\omega_0 t}$  é periódica em  $t$  para qualquer valor de  $\omega_0$ , com período  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Todavia,  $e^{j\Omega n}$  nem sempre é periódica em  $n$ , pois exige-se que  $\exists N$  inteiro tal que  $e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n}$ ,  $\forall n$ . Isso se verifica se e somente se  $e^{j\Omega N} = 1 \rightarrow \Omega N = 2\pi k$ , para algum inteiro  $k$ .

$$\Omega = \frac{k}{N} 2\pi \rightarrow \Omega = (\text{racional}) \times \pi. \quad (1.25)$$

Sendo assim, se  $\Omega = (\text{racional}) \times \pi$ , então  $e^{j\Omega n}$  é periódico, com período  $N_0$ . Mas qual o valor de  $N_0$ ?

$$e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N_0)} \rightarrow e^{j\Omega N_0} = e^{j\Omega n} e^{j\Omega N_0} \rightarrow e^{j\Omega N_0} = 1. \quad (1.26)$$

Logo,

$$\Omega_0 N_0 = (\text{inteiro positivo}) \times 2\pi \quad (1.27)$$

$N_0$  será o período fundamental quando tomarmos o menor inteiro positivo que preserve a igualdade acima. Ou seja, para um valor fixo de  $\Omega_0$ , devemos encontrar o menor inteiro positivo que quando multiplicado por  $\frac{2\pi}{\Omega_0}$  resulte em um número natural, o qual representará o período fundamental.

- $e^{j\omega_0 t}$  oscila com frequência  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Quanto maior o valor de  $\omega_0$ , maior o número de oscilações por segundo e menor o período  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Porém, para  $e^{j\Omega n}$ ,  $\Omega = \text{racional} \times \pi$ , a frequência cresce com  $0 \leq \Omega \leq \pi$ , mas decresce com  $\Omega$  para  $\pi \leq \Omega \leq 2\pi$ . Afinal, devido à periodicidade em  $\Omega$ , o comportamento ao redor de  $\Omega = 2\pi$  é igual ao comportamento ao redor de  $\Omega = 0$ .

Corolário: seja  $x_k[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)n}$ , com  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ ,  $k$  inteiro. Quantas exponenciais discretas periódicas com frequências múltiplas de  $\frac{2\pi}{N}$  diferentes existem?

Como frequências afastadas de  $2\pi$  são equivalentes, o índice  $k$  deve percorrer um conjunto de apenas  $N$  valores diferentes. Isto quer dizer que existem somente  $N$  exponenciais complexas que são distinguíveis com frequências múltiplas de  $\frac{2\pi}{N}$ .

**Exemplo** Seja  $x(t)$  o sinal exponencial complexo de tempo contínuo

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1.28)$$

com frequência fundamental  $\omega_0$  e período fundamental  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Considere o sinal de tempo discreto obtido pela amostragem de  $x(t)$  com espaçamento uniforme — isto é,

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}. \quad (1.29)$$

**(a)** Mostre que  $x[n]$  é periódico se e somente se  $T/T_0$  é um número racional — isto é, se e somente se algum múltiplo do intervalo de amostragem  $T$  é *exatamente* igual a um múltiplo do período de  $x(t)$ .

Para que  $x[n]$  seja periódico, deve existir um inteiro positivo  $N$  tal que:

$$x[n + N] = x[n] \quad \text{para todo } n \quad (1.30)$$

Substituindo a definição de  $x[n]$ :

$$e^{j\omega_0(n+N)T} = e^{j\omega_0 n T} \quad (1.31)$$

Isso implica:

$$e^{j\omega_0 NT} = 1 \quad (1.32)$$

Para que isso seja verdade, devemos ter:

$$\omega_0 NT = 2\pi k \quad (1.33)$$

para algum inteiro  $k$ . Rearranjando:

$$NT = \frac{2\pi k}{\omega_0} = kT_0 \quad (1.34)$$

Portanto:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k}{N} \quad (1.35)$$

Como  $k$  e  $N$  são inteiros,  $T/T_0$  deve ser racional.

**(b)** Suponha que  $x[n]$  seja periódico — isto é, que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q} \quad (1.36)$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros. Quais são o período fundamental e a frequência fundamental de  $x[n]$ ? Expresse a frequência fundamental como uma função de  $\omega_0 T$ .

Se  $T/T_0 = p/q$  onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos, então da equação anterior:

$$\frac{p}{q} = \frac{k}{N} \quad (1.37)$$

O menor valor de  $N$  que satisfaz a periodicidade é  $N_0 = q/\gcd(p, q)$ , onde  $\gcd(p, q)$  é o máximo divisor comum de  $p$  e  $q$ . O valor correspondente de  $k$  é  $k_0 = p/\gcd(p, q)$ .

Assim, o período fundamental de  $x[n]$  é  $N_0 = q/\gcd(p, q)$ .

A frequência fundamental de  $x[n]$  é:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi \gcd(p, q)}{q} \quad (1.38)$$

ou, em função de  $\omega_0 T$ :

$$\Omega_0 = \omega_0 T \cdot \frac{\gcd(p, q)}{p} \quad (1.39)$$

**(c)** Novamente assumindo que  $T/T_0$  satisfaz a equação acima, determine precisamente quantos períodos de  $x(t)$  são necessários para obter as amostras que formam um único período de  $x[n]$ .

Para formar um período completo de  $x[n]$  (que tem  $q$  amostras), precisamos de amostras de  $x(t)$  durante um intervalo de tempo de  $(q - 1)T$ . Este intervalo corresponde a:

$$\frac{(q - 1)T}{T_0} = (q - 1)\frac{p}{q} \quad (1.40)$$

períodos de  $x(t)$ . Como precisamos de um número inteiro de períodos, consideraremos o intervalo  $qT$ , que corresponde a:

$$\frac{qT}{T_0} = q \cdot \frac{p}{q} = p \quad (1.41)$$

períodos de  $x(t)$ .

Portanto, são necessários exatamente  $p$  períodos de  $x(t)$  para obter as amostras que formam um período completo de  $x[n]$ .

## 1.5 Degrau e Impulso

### 1.5.1 Função degrau unitário $u(t)$

Como a maior parte das nossas discussões envolvem exclusivamente sinais *causais*<sup>1</sup>, podemos usar o degrau unitário para descrever e compor esses sinais. A função degrau unitário é definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.42)$$

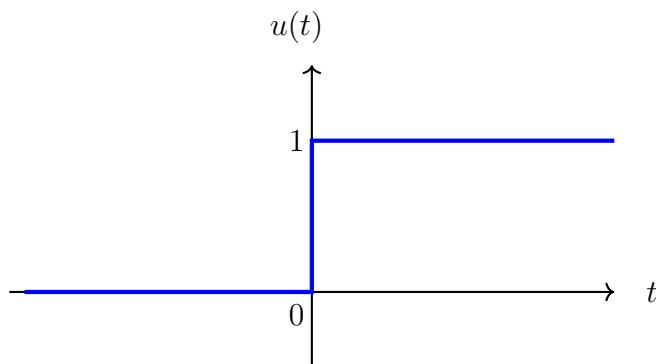


Figura 1.25: Função degrau unitário  $u(t)$

**Exemplo:** A função  $x(t) = e^{-2t}$  descreve a função exponencial desde  $t = -\infty$ . Para transformar essa função em um sinal causal, podemos escrever  $x(t) = e^{-2t}u(t)$

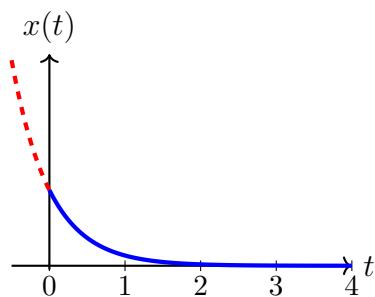


Figura 1.26: Curva  $e^{-2t}$  (vermelho tracejado) e  $e^{-2t}u(t)$  (azul)

<sup>1</sup>Um sinal é dito causal se  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ .

A função degrau também é útil para descrever sinais que tem diferentes comportamentos ao longo do tempo. Por exemplo, na figura 1.27 temos o sinal  $x(t) = u(t - 2) - u(t - 5)$ .

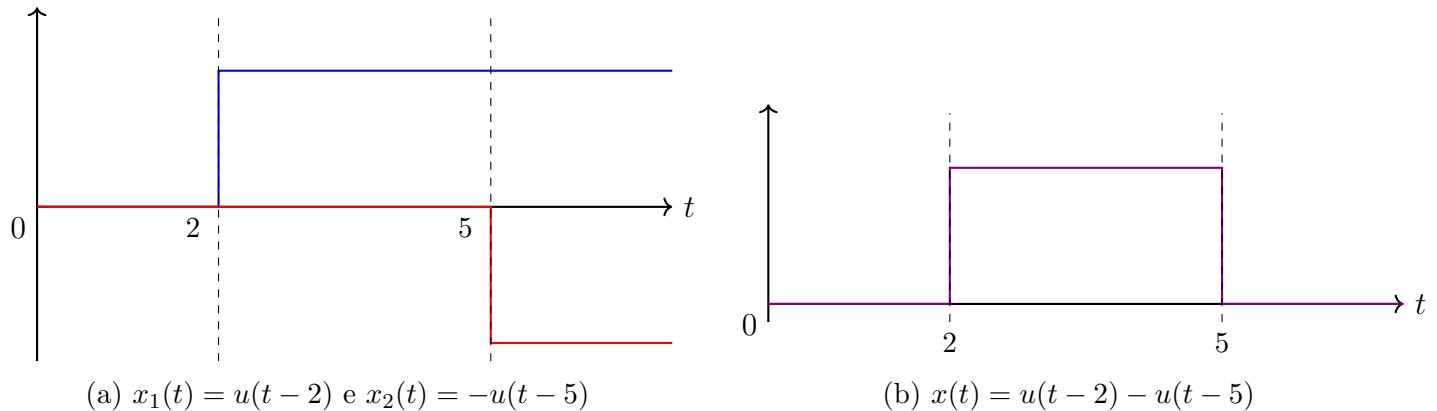


Figura 1.27: Construção de um sinal janela como a soma de dois degraus unitários

**Exemplo:** Descreva o sinal da figura 1.28.

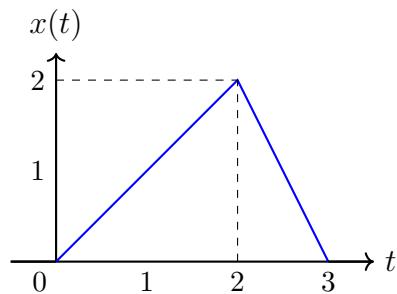


Figura 1.28: Sinal  $x(t)$

Para descrever o sinal da figura 1.28, vamos separar em duas partes: a rampa unitária de  $t = 0$  a  $t = 2$  e a reta que vai de  $(2, 2)$  a  $(3, 0)$ . A primeira rampa pode ser descrita como

$$x_1(t) = t [u(t) - u(t - 2)]$$

enquanto a segunda parte é

$$x_2(t) = -2(t - 3) [u(t - 2) - u(t - 3)]$$

Assim, o sinal  $x(t)$  será a soma dessas duas partes:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = t [u(t) - u(t - 2)] - 2(t - 3) [u(t - 2) - u(t - 3)].$$

**Exemplo:** Descreva o sinal da figura 1.14.

Considerando o intervalo  $[-1, 0]$  o sinal pode ser descrito como uma constante de valor 2, então

$$x_1(t) = 2 [u(t + 1) - u(t)].$$

Para o intervalo  $[0, \infty]$ , o sinal pode ser descrito como

$$x_2(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} u(t).$$

Portanto, o sinal  $x(t)$  será a soma dessas duas partes:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 [u(t + 1) - u(t)] + 2e^{-\frac{t}{2}} u(t).$$

$$x(t) = 2u(t + 1) - 2u(t) + 2e^{-\frac{t}{2}} u(t).$$

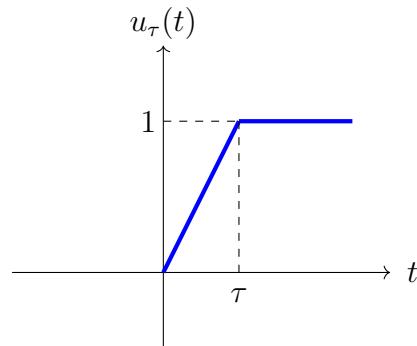
### 1.5.2 Função impulso unitário $\delta(t)$

Uma das funções mais importantes na teoria de sinais é a função impulso unitário, que é definida como:

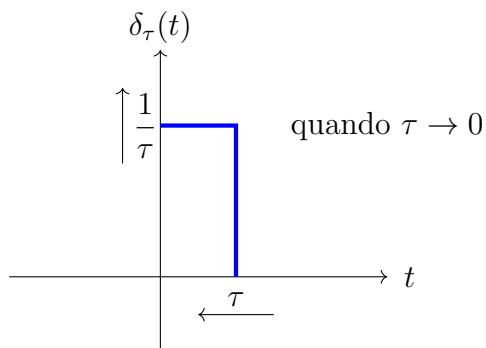
$$\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.43)$$

Podemos imaginar  $\delta(t)$  como um pulso retangular, alto e estreito em torno de  $t = 0$ , com área total igual a 1. Para construir esse sinal, considere  $\tau > 0$  e

$$u_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/\tau, & 0 \leq t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases} \quad (1.44)$$



Seja  $\delta_{\tau}(t) = \frac{du_{\tau}(t)}{dt}$ .



Definimos a “função” impulso unitário como

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_{\tau}(t)$$

A largura desse pulso é muito pequena ( $\tau \rightarrow 0$ ) e a altura é muito grande ( $\frac{1}{\tau} \rightarrow \infty$ ), de forma que área total do pulso é sempre igual a 1. A amplitude desse sinal é indefinida, então representamos a função impulso como uma seta posicionada em  $t = 0$ .

O importante da função  $\delta(t)$  não é o seu valor em  $t = 0$ , mas o fato de que sua área é unitária e que seu valor é zero em todos os outros pontos.

Claramente a função impulso não existe no mundo real, podendo apenas ser aproximada, mas para as modelagens matemáticas,  $\delta(t)$  é muito importante.

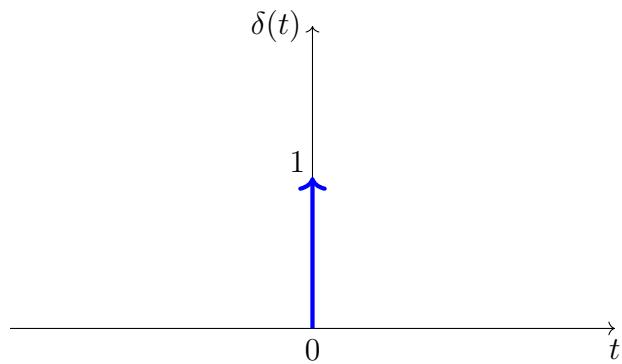


Figura 1.29: Representação do impulso unitário  $\delta(t)$ .

Vejamos mais algumas propriedades do impulso  $\delta(t)$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$  e  $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = 1, \forall \epsilon > 0$

- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{du_\tau(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \lim_{\tau \rightarrow 0} u_\tau(t) \right] = \frac{du(t)}{dt}$$

- $\delta(t) = \delta(-t)$

- $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau$

- $u(t) = \int_0^\infty \delta(t - \alpha)d\alpha$

- $x(t).\delta(t - t_0) = x(t_0).\delta(t - t_0)$

### Multiplicando $\delta(t)$ por uma função

Se tomarmos uma função  $x(t)$  e observarmos o produto  $x(t)\delta(t)$ , teremos que este produto vale 0 para todo  $t \neq 0$  e  $x(0)\delta(t)$  para  $t = 0$ . Podemos generalizar isso para um impulso deslocado para qualquer ponto  $t_0$ :

$$x(t)\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0)x(t_0), & t = t_0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Se calcularmos então a integral de  $x(t)\delta(t - t_0)$ , teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (1.46)$$

Assim, a função impulso unitário  $\delta(t)$  atua como uma função *amostradora* de  $x(t)$  em qualquer instante  $t_0$  para onde ela é deslocada.

Alternativamente, ao invés de multiplicar o sinal pelo impulso deslocado, podemos deslocar o sinal e manter o impulso na origem:

$$x(t - t_0)\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \delta(0)x(-t_0), & t = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Neste caso, tomando a integral, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t_0) \delta(0) dt = x(-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) dt = x(-t_0) \quad (1.48)$$

### Discutindo a função impulso unitário $\delta(t)$

Este material está baseado nos vídeos [O que é o Delta de Dirac?](#) [Visão Física e Delta de Dirac 2: Definição, Propriedades e Exemplo](#), preparados pelo Prof. Renato Lopes (FEEC/UNICAMP). Vale a pena assistir!

Em um primeiro momento, a definição do delta de Dirac – o impulso unitário a tempo contínuo – pode parecer um pouco estranha.

A primeira coisa que devemos compreender é que o delta de Dirac, denotado por  $\delta(t)$ , não é uma função propriamente dita, mas sim uma distribuição (ou função generalizada). A operação base que define o impulso unitário  $\delta(t)$  recebe como argumento uma função e devolve um valor numérico:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0),$$

onde  $x(t)$  é a função sobre a qual o  $\delta(t)$  atua, e  $x(0)$  é o resultado da operação; sempre que o argumento do  $\delta(\cdot)$  for igual à variável de integração, o resultado será a função-alvo avaliada no ponto em que o argumento do  $\delta(\cdot)$  se anula. Dessa maneira, *não definimos o que o delta de Dirac é, mas sim o que ele faz*: usando o  $\delta(t)$  conseguimos capturar o valor instantâneo de um sinal de uma maneira que será muito conveniente no decorrer do curso.

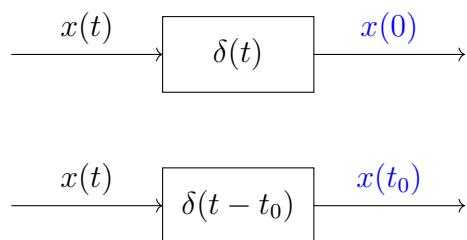


Figura 1.30: Usando o delta de Dirac, podemos capturar o valor instantâneo de um sinal.

Do ponto de vista físico, o delta de Dirac representa qualquer<sup>2</sup> ação de curta duração, porém de alta intensidade, tais como um taco atingindo uma bola em um jogo de sinuca, ou mesmo um jogador de futebol realizando um chute. Nessas situações, a energia da ação feita sobre o sistema (a força exercida pelo taco ou pelo pé do jogador sobre a bola) é mais relevante do que o perfil temporal de tal ação. Desse modo, duas forças que carreguem a mesma energia, mas que apresentem perfis temporais distintos, terão efeitos idênticos sobre o sistema.

Para analisar essa questão com mais detalhes, vamos considerar um sistema massa-mola, conforme ilustrado na Figura 1.31. Em tal sistema, temos uma massa  $m$ , presa a uma mola de constante elástica  $k$ , sujeita à ação de uma força  $F(t)$ . O que desejamos saber é o deslocamento da massa em função do tempo,  $y(t)$ .

<sup>2</sup>Aqui precisamos tomar certo cuidado: para que algo possa ser considerado como um impulso unitário, algumas propriedades adicionais precisam ser satisfeitas, mas não entraremos nesses detalhes aqui.

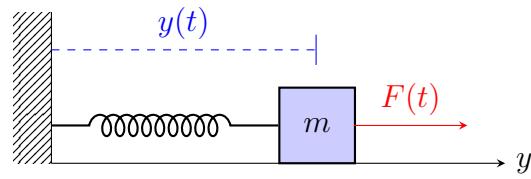


Figura 1.31: Sistema massa-mola.

Tomando  $c$  como o coeficiente de atrito viscoso em relação à superfície, temos a seguinte equação diferencial para o sistema:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t).$$

Para a força externa  $F(t)$ , iremos considerar duas funções candidatas a impulso, representadas por  $t_\Delta(t)$  e  $r_\Delta(t)$ , conforme a Figura 1.32.

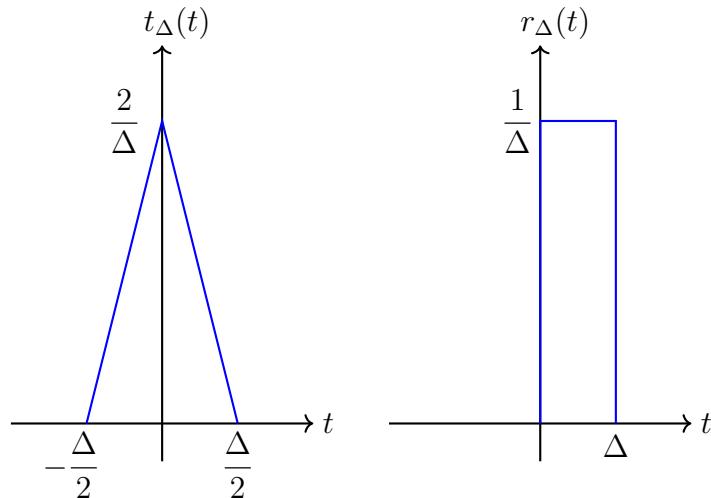


Figura 1.32: Diferentes perfis temporais candidatos a  $\delta(t)$ , mas com a mesma área. À medida que  $\Delta \rightarrow 0$ , o efeito dessas duas ações sobre o sistema se torna idêntico.

Simulando este sistema com  $m = 1$  [kg],  $k = 10$  [N/m],  $c = 1$  [N/(m/s)] e  $\Delta = 4.10^{-2}$  s, e considerando no Modelo 1 que  $F(t) = t_\Delta(t)$ , e no Modelo 2 que  $F(t) = r_\Delta(t)$ , temos as seguintes respostas  $y(t)$ :

Resposta do sistema massa-mola para cada um dos modelos considerados

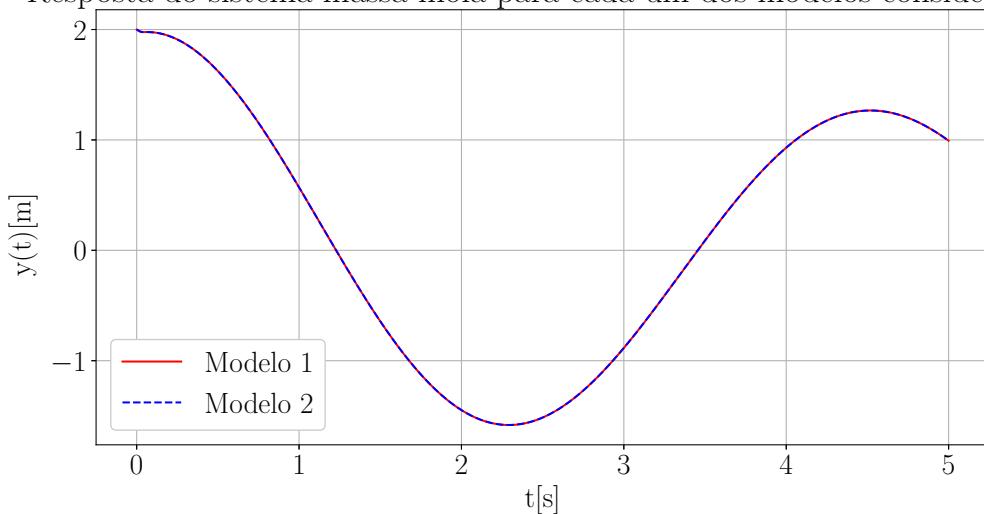


Figura 1.33: Apesar dos diferentes perfis temporais, o efeito que  $t_\Delta(t)$  e  $r_\Delta(t)$  têm sobre o sistema é o mesmo.

Podemos perceber na Figura 1.33 que os dois modelos produzem respostas idênticas para a posição da massa ao longo do tempo, apesar da diferença no perfil temporal de  $F(t)$ . Contudo, essa equivalência entre  $t_\Delta(t)$  e  $r_\Delta(t)$  só é válida quando adotamos um valor para  $\Delta$  suficientemente pequeno.

Na Figura 1.34 vemos como esse parâmetro afeta a resposta produzida por cada modelo: se adotamos um valor inadequado para  $\Delta$ , tal como  $\Delta = 0,5$  s ou  $\Delta = 0,2$  s, os dois sistemas produzirão respostas diferentes; à medida que reduzimos o tempo de duração de  $F(t)$  (*e.g.*,  $\Delta = 0,1$  s ou  $\Delta = 0,01$  s, os dois modelos passam a produzir respostas virtualmente idênticas.

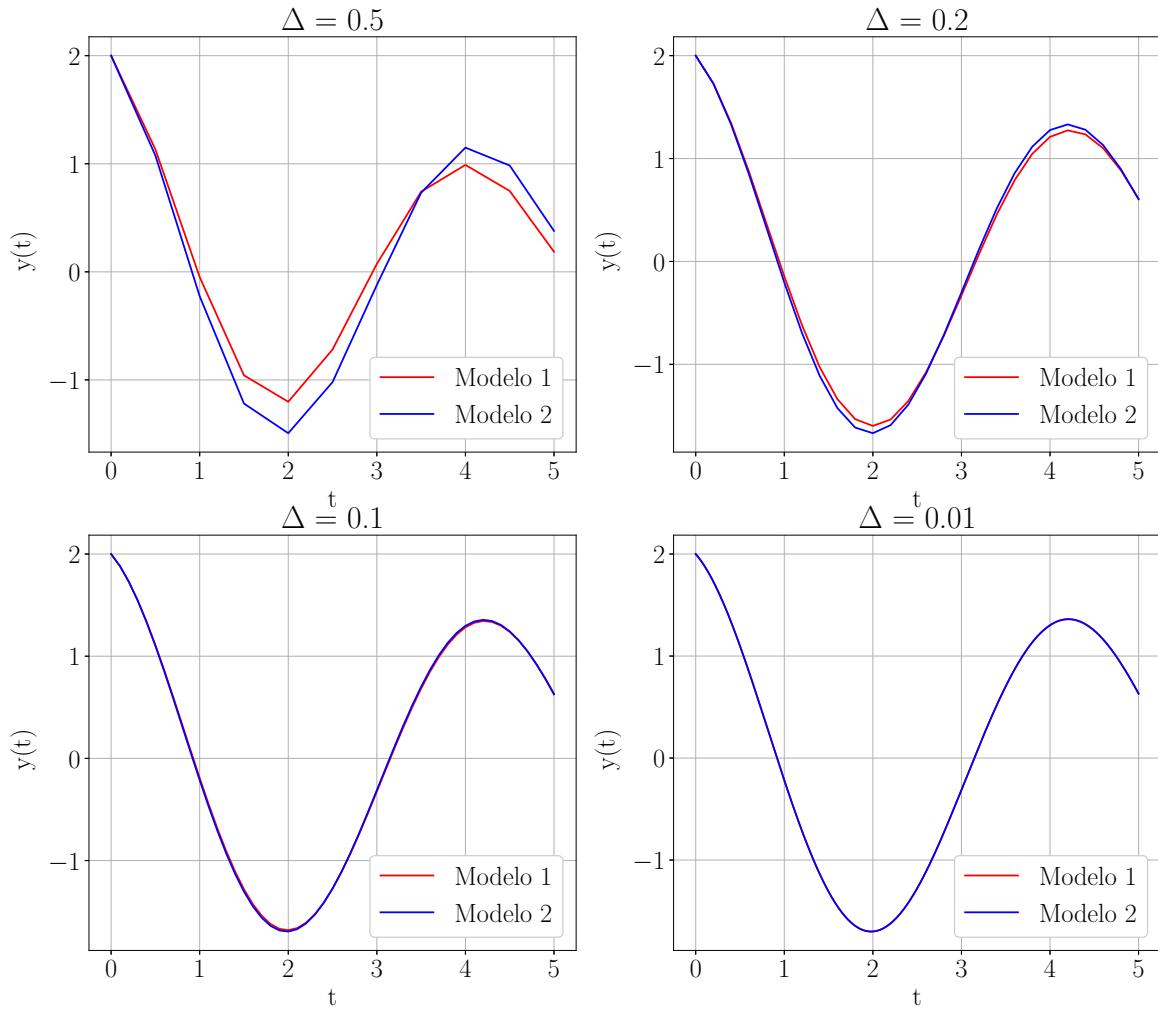


Figura 1.34: Para um valor de  $\Delta$  suficientemente pequeno, os dois sistemas produzem respostas idênticas.

Desse modo, quando reduzimos o tempo de duração de  $t_\Delta(\tau)$  e  $r_\Delta(\tau)$ , obtemos o mesmo efeito sobre o sistema. Isso é equivalente a dizer que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) t_\Delta(\tau) d\tau = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) r_\Delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau = x(0).$$

Portanto, para os cenários de aplicação, estamos mais interessados na área de  $\delta(t)$ , do que no seu perfil temporal.

### Atenção!

Se verificamos o limite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) t_\Delta(\tau) d\tau = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) r_\Delta(\tau) d\tau$$

para dois perfis  $t_\Delta(\tau)$  e  $r_\Delta(\tau)$  candidatos a  $\delta(t)$ , isso **não** implica que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} t_\Delta(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} r_\Delta(\tau).$$

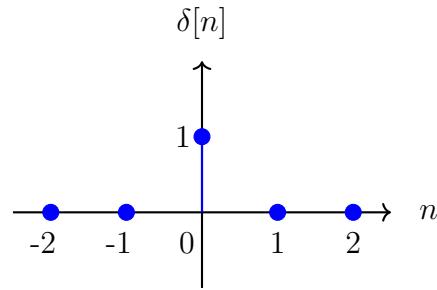
Ou seja, se dois perfis produzem o mesmo efeito sobre um sistema, não podemos afirmar que esses perfis são idênticos, mesmo quando reduzimos o tempo de duração a um instante.

### 1.5.3 Degrau e Impulso Discretos

Assim como as funções contínuas, também podemos definir as sequências impulso unitário e degrau unitário discretos, que são fundamentais para a análise de sinais discretos.

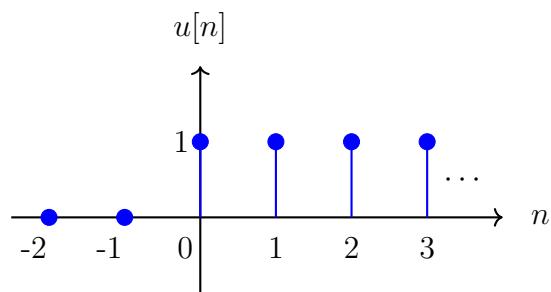
A sequencia impulso unitário discreto é definida como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.49)$$



E a sequência degrau unitário discreto é definida como:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.50)$$



Assim como na versão contínua, essas sequências tem algumas propriedades:

- $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$ ;
- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$ ;
- $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots$

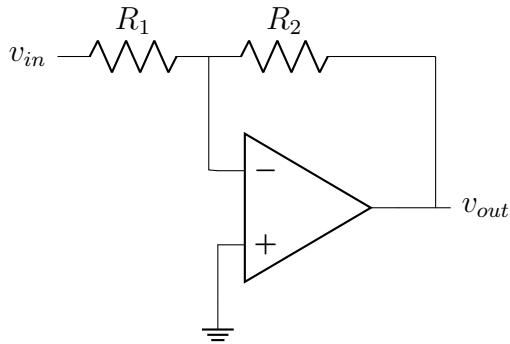
E a função impulso unitário pode ser usada como uma função amostradora de sinais discretos, assim como a função impulso unitário contínua.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] =$$
$$\cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots + \underbrace{x[n]\delta[0]}_{\substack{\text{único} \\ \text{termo} \\ \text{não-nulo}}} + \cdots = x[n].$$

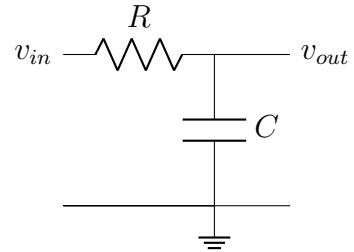
# Capítulo 2

## Introdução aos Sistemas Lineares

Assim como definimos os sinais como funções que representam informações ao longo do tempo, podemos definir um sistema como um elemento físico que transforma um sinal de entrada em um sinal de saída. Genericamente, um sistema é composto por componentes interconectados que interagem com o sinal de entrada de acordo com suas características mapeadas em funções matemáticas. Por exemplo, um amplificador é um sistema que transforma um sinal de entrada em um sinal de saída com amplitude maior, enquanto um filtro é um sistema que atenua ou amplifica certas frequências do sinal de entrada.



(a) Amplificador operacional



(b) Filtro passa-baixas RC

Figura 2.1: Exemplos de sistemas elétricos: (a) amplificador operacional e (b) filtro passa-baixas RC.

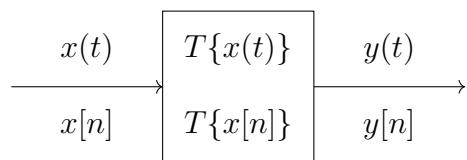
No exemplo de sistemas elétricos, as relações de entrada e saída são as relações de tensão e corrente que conhecemos para dispositivos eletrônicos (resistores, capacitores, amplificadores operacionais, etc.). Usando essas leis, podemos determinar o comportamento do sistema e como ele transforma o sinal de entrada em um sinal de saída. Nos exemplos da figura 2.1, a saída do amplificador é dada por

$$v_{out}(t) = -\frac{R_2}{R_1}v_{in}(t) \quad (2.1)$$

e a saída do filtro passa-baixas é dada por

$$v_{out}(t) = RC \frac{dv_{in}(t)}{dt} \quad (2.2)$$

Na prática, não precisamos saber quais são os componentes presentes no interior de um sistema. Basta saber qual a sua resposta a um sinal qualquer e podemos tratar o interior como uma “caixa-preta”.



## 2.1 Classificação de Sistemas

Podemos classificar os sistemas em diferentes categorias com base em suas características.

### 2.1.1 Sistemas variantes e invariantes no tempo

Um sistema é invariante com o tempo se e somente se suas características (no tocante à transformação entrada-saída) não mudam com o tempo. Isto é, se  $x(t) \iff y(t)$ , então necessariamente  $x(t - t_0) \iff y(t - t_0)$ . Essa propriedade implica que seus parâmetros internos não variam conforme o tempo passa.

Um exemplo de sistema variante no tempo é o sistema que modela a propagação de ondas eletromagnéticas na atmosfera. Conforme as condições meteorológicas variam (temperatura, umidade do ar, incidência de luz solar, cobertura de nuvens, etc), a propagação de ondas de rádio se modifica, implementando que a mesma estação pode ou não ser captada num determinado local a depender da hora do dia.

### 2.1.2 Sistemas instantâneos e dinâmicos

Sistemas instantâneos (ou sem memória) são aqueles cuja saída em um determinado instante depende apenas da entrada nesse mesmo instante. Em outras palavras, a saída não é afetada por valores passados da entrada. Um exemplo de sistema instantâneo é um amplificador de áudio, onde a saída em um instante depende apenas do sinal de entrada naquele instante.

Sistemas dinâmicos, por outro lado, são aqueles cuja saída em um determinado instante depende não apenas da entrada nesse instante, mas também de valores passados da entrada. Um exemplo de sistema dinâmico é um filtro passa-baixas, onde a saída depende do valor atual e dos valores anteriores da entrada. Sistemas dinâmicos têm como propriedade adicional os seus estados internos, que modificam a resposta observada.

### 2.1.3 Sistemas causais e não-causais

Sistemas causais são aqueles cuja saída em um determinado instante depende apenas da entrada nesse instante e de entradas passadas. Em resumo, nos sistemas causais a saída não pode começar antes da entrada correspondente ser aplicada. Todo sistema que viola essa característica é chamado de não-causal, ou antecipativo.

Qualquer sistema que opere em tempo real (isto é, que produza a saída à medida que a entrada evolui no tempo) é obrigatoriamente causal.

#### Porque estudar sistemas não-causais?

Pare contra-intuitivo que nós imaginemos a existência de sistemas não-causais, ou sistemas que preveem o futuro. Primeiramente, podemos admitir a existência de sistemas não causais quando consideramos outra variável independentes que não seja o tempo. Por exemplo, podemos considerar um sistema que recebe como entrada a posição de um objeto e produz como saída a sua velocidade. Nesse

caso, a saída não depende do tempo, mas sim da posição do objeto, e podemos considerar que o sistema é não causal, pois a velocidade “atual” depende de valores “futuros” da posição do objeto. Na realidade, a ideia de que todo sistema físico é causal só vale quando consideramos os sistemas que tem como variável independente o tempo.

Além disso, mesmo nos sistemas temporais, existem sistemas não-causais de interesse. Em sistemas de processamento de sinais, podemos ter acesso a dados armazenados em memória ou disco, e podemos processar esses dados de forma não-causal. Isso é comum em aplicações como edição de áudio e vídeo, onde o processamento pode envolver informações futuras para melhorar a qualidade do sinal. Um exemplo é um sistema que recupera imagens de segurança de uma câmera por 5 segundos antes e depois de um alarme soar. A decisão de incluir ou não um quadro depende de uma entrada futura (o alarme ser ativado em um intervalo de até 5 segundos) para ser tomada. Evidentemente esse sistema só é implementável com dados gravados.

### 2.1.4 Sistemas lineares e não-lineares

Um sistema é linear se e somente se a sua resposta a uma combinação linear de entradas for a combinação linear das respectivas saídas (sobreposição dos efeitos). Ou seja, se várias entradas estão atuando em um sistema, o efeito total no sistema pode ser determinado considerando uma entrada por vez e assumindo todas as outras iguais a zero. O efeito total é a soma de todas as componentes individuais.

$$ax_1(t) + bx_2(t) \iff ay_1(t) + by_2(t), \text{ onde } y_1(t) = T\{x_1(t)\} \text{ e } y_2(t) = T\{x_2(t)\} \quad (2.3)$$

A linearidade implica duas propriedades essenciais: a *homogeneidade* e a *aditividade*. Quando ambas as propriedades estão combinadas chamamos de *superposição*. Para todo sistema linear a superposição é válida<sup>1</sup>.

#### Considerações sobre sistemas lineares

O estudo dos sistemas lineares é um dos pilares do estudo de engenharia elétrica. Apesar de não ser o foco dessa disciplina, é inevitável mencionar algumas propriedades que decorrem da linearidade.

Primeiro, todo resposta de um sistema linear decorre da soma de duas respostas básicas. A *resposta à entrada nula*, que se trata da resposta do sistema a nenhuma entrada, decorrente das propriedades de memória e do estado *interno* do sistema no momento em que estamos medindo e a *resposta ao estado nulo*, que é a resposta do sistema à entrada que estamos aplicando, considerando que os estados internos são todos zero<sup>2</sup>. Pela propriedade da superposição, podemos calcular separadamente ambas as respostas para determinar a saída completa do sistema.

Segundo, quase todos os sistemas observados na prática são não-lineares em sua essência. No entanto a maioria dos sistemas podem ser aproximados por sistemas lineares em uma faixa de operação específica, que denominamos *pequenos sinais*.

### 2.1.5 Sistemas estáveis e instáveis

Por último, podemos classificar um sinal como sendo estável ou instável. Um sinal é considerado estável se sua amplitude permanece limitada ao longo do tempo. Esses sistemas também são denominados

<sup>1</sup>Além da superposição, sistemas lineares satisfazem a condição de suavidade, onde pequenas variações da entrada geram pequenas variações na saída.

<sup>2</sup>A partir dessa decomposição, podemos concluir que a saída de um sistema é nula se e somente se a entrada e os estados internos foram nulos

BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*) estáveis.

Resumidamente, se um sistema atua de maneira que para qualquer entrada limitada (não-infinita) a sua saída também é limitada, dizemos que o sistema é estável.

### 2.1.6 Sistemas lineares invariantes no tempo (LTI)

Uma classe particularmente importante de sistemas é a dos sistemas lineares invariantes no tempo (LTI). Essa é a classe de sistemas para os quais a entrada  $x(t)$  e a saída  $y(t)$  estão relacionadas por uma equação diferencial linear, e cujas propriedades não mudam ao longo do tempo.

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_M \frac{d^M x}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.4)$$

onde todos os coeficientes são constantes.

**Exemplo:** Determinar as características do sistema  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ .

Neste caso, vamos analisar apenas a validade de duas propriedades: linearidade e invariância com o tempo.

- Linearidade

Seja  $x'(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  a entrada do sistema. Então, a saída corresponde a:

$$y'(t) = \frac{dx'(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)].$$

Como a derivada é um operador linear,

$$y'(t) = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta \frac{dx_2(t)}{dt} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),$$

onde  $y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$  e  $y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$  representam as saídas do sistema para as entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente. Vemos, portanto, que **o sistema é linear**.

- Invariância com o tempo

Considerando a entrada  $z(t) = x(t - t_0)$ , a saída do sistema corresponde a:

$$y_{t_0}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t - t_0)}{dt}.$$

Por sua vez, a saída do sistema deslocada no tempo por  $t_0$  é dada por:

$$y(t - t_0) = \frac{dx(t - t_0)}{dt}.$$

Como  $y(t - t_0) = y_{t_0}(t)$ , concluímos que **o sistema é invariante com o tempo**.

**Exemplo:** Determinar as características do sistema  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

Novamente, vamos verificar somente as propriedades da linearidade e da invariância com o tempo.

- Linearidade

Seja  $x'(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  a entrada do sistema. Então, a saída corresponde a:

$$y'(t) = \int_{-\infty}^t x'(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t (\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)) d\tau.$$

Como a integral é um operador linear,

$$y'(t) = \alpha \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + \beta \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),$$

onde  $y_1(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$  e  $y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$  representam as saídas do sistema para as entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente. Vemos, portanto, que **o sistema é linear**.

- Invariância com o tempo

Considerando a entrada  $z(t) = x(t - t_0)$ , a saída do sistema corresponde a:

$$y_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau.$$

Reescrevendo a integral em termos da variável  $\nu = \tau - t_0$ , temos que:

$$y_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\nu) d\nu.$$

Por sua vez, a saída do sistema deslocada no tempo por  $t_0$  é dada por:

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau.$$

Como  $y(t - t_0) = y_{t_0}(t)$ , concluímos que **o sistema é invariante com o tempo**.

## 2.2 Sistemas discretos

Todas as propriedades apresentadas para os sistemas contínuos também se aplicam aos sistemas discretos, com algumas adaptações.

A propriedade da linearidade continua idêntica, com as mesmas consequências observadas. Idem para as propriedades de estabilidade, causalidade e memória. A invariância no tempo é elaborada da mesma forma, como a imutabilidade dos parâmetros internos do sistema, com a ressalva de que ao invés do deslocamento temporal, em sistemas discretos ela é verificada através de deslocamentos no índice de amostragem. Para ilustrar, vamos determinar no exemplo abaixo as características de um sistema discreto

**Exemplo:** Determinar as características do sistema  $y[n] = x[-n]$

Vamos analisar quais propriedades são válidas para este sistema discreto.

- Linearidade

Para checar se o sistema é linear, vamos considerar duas entradas,  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$ , e as saídas correspondentes,  $y_1[n] = x_1[-n]$  e  $y_2[n] = x_2[-n]$ . Então, vamos analisar qual é a resposta do sistema para uma entrada  $x'[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ :

$$y'[n] = x'[-n] = \alpha x_1[-n] + \beta x_2[-n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n].$$

Observe que a saída é equivalente à combinação linear das saídas individuais ( $y_1[n]$  e  $y_2[n]$ ). Logo, concluímos que **o sistema é linear**.

- Causalidade

Devemos verificar se a saída  $y[n]$  depende da entrada em instantes futuros ( $n+1, n+2, \dots$ ). Note que quando  $n > 0$ , a saída  $y[n]$  depende da entrada em instantes negativos (e.g.,  $y[2] = x[-2]$ ). Por outro lado, para  $n < 0$ , a saída  $y[n]$  depende da entrada em instantes positivos (e.g.,  $y[-4] = x[-(-4)] = x[4]$ ). Neste caso, o sistema precisa conhecer a entrada em um instante futuro para determinar a saída. Logo, **o sistema não é causal**.

- Estabilidade

Considere uma entrada  $x[n]$  limitada em amplitude, i.e.,  $|x[n]| \leq B_x < \infty, \forall n$ . A magnitude da saída é dada por  $|y[n]| = |x[-n]|$ . Como  $|x[n]| \leq B_x$  para todo instante de tempo,  $|y[n]|$  também é inferior ao limitante  $B_x$ . Ou seja, a saída também é limitada em amplitude. Portanto, **o sistema é estável**.

- Memória

A saída  $y[n]$  para instantes  $n > 0$  depende da entrada em instantes negativos (e.g.,  $y[5] = x[-5]$ ). Logo, **o sistema possui memória**.

- Invariância com o tempo

Para avaliarmos se o sistema é invariante com o tempo, temos que obter: (1) a saída do sistema para uma entrada deslocada, aqui denotada por  $z[n] = x[n - n_0]$ ; e (2) a saída deslocada no tempo (ou seja,  $y[n - n_0]$ ).

Considerando a entrada  $z[n] = x[n - n_0]$ , a saída do sistema corresponde a:

$$y_{n_0}[n] = z[-n] = x[-n - n_0].$$

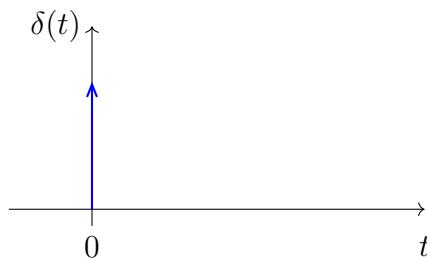
Por sua vez, sabendo que  $y[n] = x[-n]$ , podemos escrever que a saída do sistema deslocada no tempo é dada por:

$$y[n - n_0] = x[-(n - n_0)] = x[-n + n_0].$$

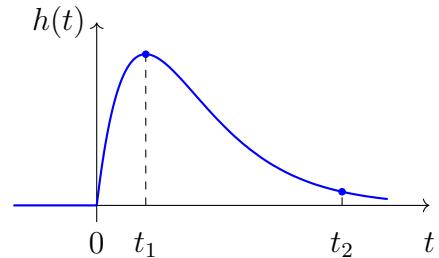
Observe que  $y[n - n_0] \neq y_{n_0}[n]$ . Ou seja, a saída do sistema para uma entrada deslocada  $x[n - n_0]$  não é igual à saída original deslocada pelo mesmo intervalo  $n_0$ . Portanto, concluímos que **o sistema não é invariante com o tempo**.

## 2.3 Resposta ao impulso $h(t)$

Agora que definimos o impulso unitário na seção 1.5.2, vamos utilizá-la para estimar a resposta de um sistema. A resposta  $h(t)$  ao impulso é a resposta do sistema a uma entrada impulsiva aplicada em  $t = 0$ , com todas as condições iniciais nulas em  $t = 0^-$ . Uma entrada em impulso  $\delta(t)$  é como um raio, o qual atinge o sistema instantaneamente e depois some. Mas em seu caminho, naquele momento singular, os objetos atingidos são influenciados. A partir daquele momento, essa interação resulta no armazenamento de energia pelo sistema, ou seja, cria condições iniciais não nulas para  $t = 0^-$ . Apesar do sistema de entrada sumir para  $t > 0$ , o sistema continua a responder a essa interação por um tempo, até que toda a energia armazenada seja dissipada. A informação contida no comportamento do sistema quando submetido a uma entrada impulsiva nos dá a intuição de por quanto tempo um sistema “armazena” energia em seus estados internos e como ele dissipava essa energia em sua saída.



(a) Impulso unitário  $\delta(t)$



(b) Resposta ao impulso  $h(t)$

Figura 2.2: Impulso unitário e resposta ao impulso de um sistema.

Por exemplo, na resposta da figura 2.2 vemos que o sistema responde a um impulso unitário com uma resposta que cresce rapidamente, atinge um pico em  $t = t_1$  e decai até o tempo  $t_2$  onde a maior parte da resposta já se dissipou. A partir desse exemplo, podemos inferir que o sistema tem uma memória de duração  $t_2$  segundos.

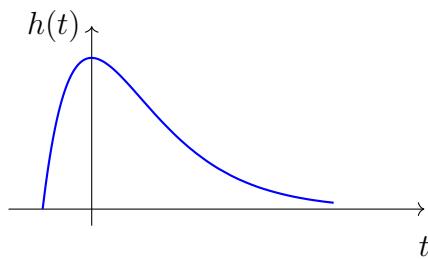


Figura 2.3: Resposta ao impulso  $h(t)$  não causal

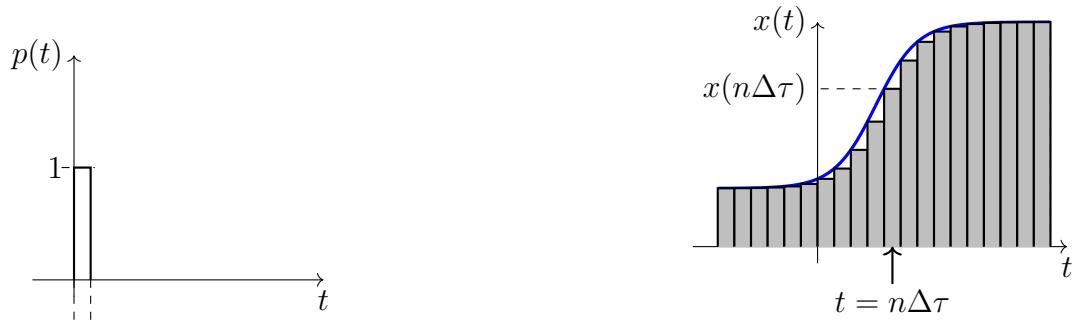
Na figura 2.3 observamos outra resposta ao impulso, no entanto, a resposta ao sinal de entrada começa antes da sua aplicação (em  $t = 0$ ). Assim, podemos determinar que o sistema que gera essa resposta é não-causal.

## 2.4 Resposta do sistema à entrada externa

A resposta de um sistema a uma entrada externa é a saída do sistema quando uma entrada específica é aplicada. Essa resposta pode ser determinada usando as propriedades do sistema, como linearidade

e invariância no tempo. Vamos considerar duas coisas para toda a sequência do curso. Nós estamos interessados em determinar o efeito de um sistema em um determinado sinal, então vamos desconsiderar o estado interno desse sistema, uma vez que ele não é relevante para a análise de sinais. Em segundo lugar, vamos considerar que o sistema é invariante no tempo, ou seja, suas características não mudam ao longo do tempo.

Para determinar a resposta do sistema a uma entrada externa, vamos analisar o efeito do sistema a um pequeno trecho de um sinal, por exemplo, um breve pulso de duração  $\Delta\tau$ . Vamos decompor o sinal como uma sequência desses breves pulsos, e avaliar individualmente como o sistema responde a cada um deles.



(a) Pulso unitário  $p(t)$  de largura  $\Delta\tau$

(b) Sinal  $x(t)$  e sua aproximação por pulsos de largura  $\Delta\tau$

Figura 2.4: Decomposição de um sinal em pulsos de largura  $\Delta\tau$ .

Como os pulsos  $p(t)$  tem amplitude unitária, podemos escrever qualquer ponto do sinal  $x(t)$  como sendo o produto entre  $x(t)$  no ponto em questão e um pulso  $p(t)$  deslocado no tempo.

$$x(n\Delta\tau) = x(n\Delta\tau) \cdot p(t - n\Delta\tau) \quad (2.5)$$

E então podemos reconstruir o sinal  $x(t)$  como a soma de todas as contribuições dos pulsos:

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot p(t - n\Delta\tau) \quad (2.6)$$

E aumentamos a precisão dessa aproximação, tomando o limite com  $\Delta\tau \rightarrow 0$ :

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot p(t - n\Delta\tau) \quad (2.7)$$

Manipulando essa relação,

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] \cdot p(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad (2.8)$$

Assim, o elemento  $\left[ \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right] \cdot p(t - n\Delta\tau)$  é o pulso  $p(t - n\Delta\tau)$  com altura  $\left[ \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} \right]$ , que conforme  $\Delta\tau \rightarrow 0$  se aproxima cada vez mais do impulso deslocado  $\delta(t - n\Delta\tau)$ , escalado por  $x(n\Delta\tau)$ . Portanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot \delta(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \quad (2.9)$$

A partir dessa relação, podemos usar as propriedades já conhecidas sobre sistemas LTI para analisar a resposta do sistema a uma entrada qualquer.

entrada $\implies$ saída	
$\delta(t) \implies h(t)$	Resposta ao impulso
$\delta(t - n\Delta\tau) \implies h(t - n\Delta\tau)$	Invariância no tempo
$x(n\Delta\tau) \cdot \delta(t - n\Delta\tau) \implies x(n\Delta\tau) \cdot h(t - n\Delta\tau)$	Linearidade
$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot \delta(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau \implies \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot h(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau$	Superposição

Dessa maneira, chegamos à conclusão de que a saída de um sistema LTI a uma entrada  $x(t)$  qualquer é dada por

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \cdot h(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.10)$$

onde, para a integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.11)$$

damos o nome de *convolução*.

### 2.4.1 Interpretação da convolução

Como vimos, a resposta ao impulso  $h(t)$  nos fornece a informação de por quanto tempo um sistema armazena em seus estados internos a energia da entrada  $x(t)$ . A operação de convolução, que resulta na saída  $y(t)$ , pode ser interpretada como uma forma de “pesar” a contribuição de cada ponto da entrada ao longo do tempo, levando em conta a forma como o sistema responde a essas contribuições. A cada instante de tempo  $t$ , a saída  $y(t)$  é calculada como uma soma da intensidade das entradas passadas (e futuras, se o sistema for não-causal)  $x(\tau)$ , ponderadas pela influência de cada entrada, decorrido o tempo  $t - \tau$  entre o presente e o momento quando a entrada ocorreu.

Essa interpretação nos ajuda a entender como os sistemas LTI processam sinais e como a memória do sistema influencia a saída em resposta a entradas específicas.

A integral (2.11) tem importância ímpar nas ciências físicas, engenharia e matemática. A convolução de dois sinais é denotada por  $x(t) * h(t)$ .

#### Aplicação: Elefante em uma Garrafa

A teoria de sistemas LIT e a generalidade da operação de convolução podem ser úteis para o tratamento de muitos problemas práticos, como, por exemplo, o desafio de colocar um elefante dentro de uma garrafa. Este curioso dilema é explorado pelo Prof. Jugurta Montalvão (UFS) em um vídeo bastante didático ([Desmistificando a Convolução](#)).

Do ponto de vista acústico, esse desafio equivale a tentar produzir o som de um elefante como se ele estivesse dentro de uma garrafa.

O caminho para conseguir esta “proeza” consiste em enxergar a garrafa como um sistema LIT que, sendo alimentado com um sinal de entrada, produz uma saída (sinal sonoro) a partir da operação de convolução. Dessa maneira, se conhecemos a resposta ao impulso da garrafa, podemos saber, usando a operação de convolução, o som que um elefante faria dentro de tal garrafa, mesmo que esse experimento seja impossível no mundo real.



Figura 2.5: Com a operação de convolução, podemos colocar um elefante dentro de uma garrafa. Imagem extraída do vídeo do Prof. Jugurta Montalvão.

A convolução, apesar de parecer complicada à primeira vista, permite que se soubermos como um sistema responde ao equivalente ao “átomo” de um sinal (impulso unitário), saberemos como este sistema responde a qualquer combinação dessas unidades, ou seja, como esse sistema lidará com qualquer sinal de entrada.

#### 2.4.2 Propriedades da convolução

A operação de convolução possui várias propriedades importantes que facilitam a análise e o entendimento dos sistemas LTI. Algumas das principais propriedades são:

- **Comutatividade:** A ordem dos sinais na convolução não altera o resultado.

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (2.12)$$

- **Associatividade:** A convolução de múltiplos sinais pode ser agrupada de qualquer forma sem alterar o resultado.

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (2.13)$$

- **Distributividade:** A convolução distribui sobre a adição de sinais.

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.14)$$

- **Identidade:** Convoluir um sinal com um impulso unitário resulta no próprio sinal.

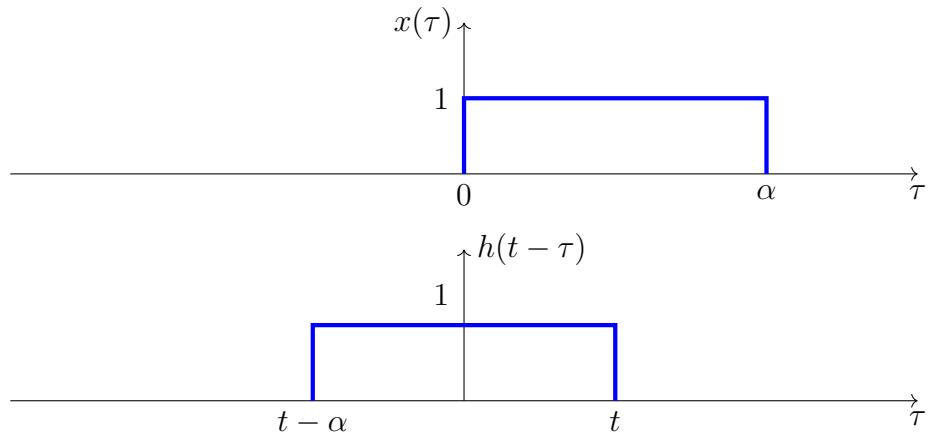
$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (2.15)$$

- **Deslocamento no tempo:** Convoluir um sinal com um impulso deslocado resulta no sinal deslocado.

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (2.16)$$

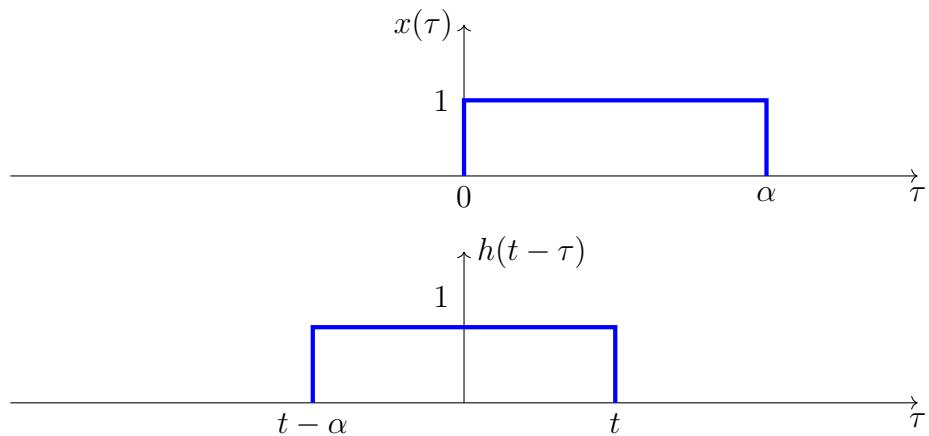
### 2.4.3 Como calcular o resultado da integral de convolução?

$$x(t) = u(t) - u(t - \alpha), \quad h(t) = u(t) - u(t - \alpha) \quad (2.17)$$



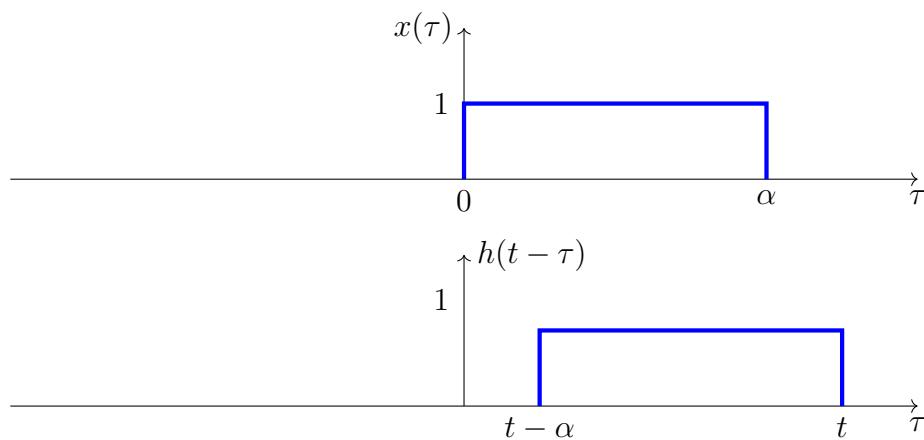
Região 1:  $t < 0$ ; a interseção é nula e  $y(t) = 0$ .

Região 2:  $0 \leq t \leq \alpha$ .



$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t 1d\tau = t$$

Região 3:  $\alpha < t \leq 2\alpha$ .

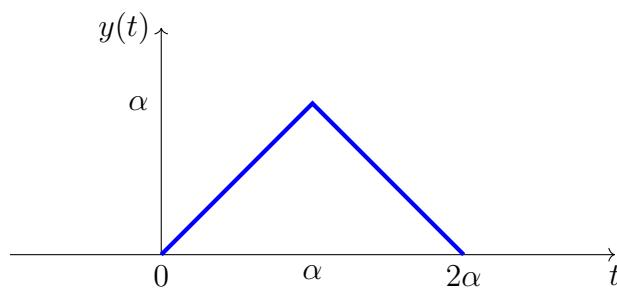


$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{\alpha} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-\alpha}^{\alpha} 1d\tau = \alpha - (t - \alpha) = 2\alpha - t$$

Região 4:  $t > 2\alpha$ . Não haverá interseção entre  $x(\tau)$  e  $h(t - \tau)$ , de modo que  $y(t) = 0$ .

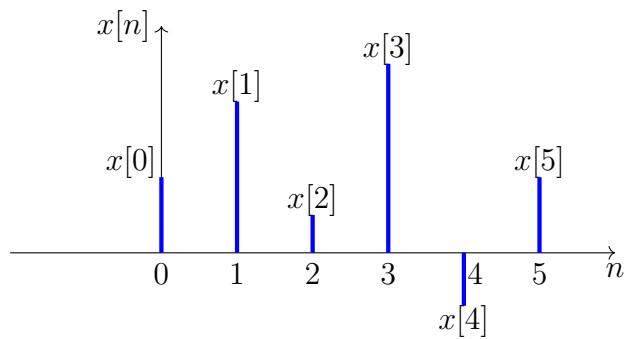
Resumindo:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 2\alpha - t, & \alpha < t \leq 2\alpha \\ 0, & t > 2\alpha \end{cases}$$



## 2.5 Resposta do sistema discreto

Assim como no caso contínuo, a resposta de um sistema discreto a um impulso unitário é fundamental para entender seu comportamento.



Qualquer sequência  $x[n]$  pode ser escrita em função do impulso unitário:

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (2.18)$$

Considere um sistema discreto que ao receber em sua entrada o sinal  $\delta[n]$  (impulso unitário), produza a sequência  $h[n]$  como saída:

$$\delta[n] \xrightarrow{T\{\cdot\}} h[n]$$

Se o sistema é **linear**, então:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \xrightarrow{T\{\cdot\}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad (2.19)$$

Sendo também **invariante com o tempo**, sabemos que:

$$\delta[n-k] \xrightarrow{T\{\cdot\}} h[n-k] \quad (2.20)$$

Assim,  $h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$  e, com isto, a saída  $y[n]$  pode ser escrita como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad (2.21)$$

**Importante:** a saída de um sistema LIT, em resposta a uma entrada qualquer, pode ser calculada usando a entrada e a resposta ao impulso  $h[n]$  do sistema. Portanto, o comportamento de um sistema LIT é única e perfeitamente descrito por sua resposta ao impulso  $h[n]$ .

### 2.5.1 Como calcular o resultado da soma de convolução?

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.22)$$

Procedimento:

1. Representamos a sequência  $x[n]$  de entrada no eixo  $k$ ;
2. A sequência  $h[n-k]$  é uma versão invertida e deslocada de  $h[k]$ ;

3. Efetuamos o produto entre  $x[k]$  e  $h[n - k]$  (ponto a ponto);
4. Somamos todas as amostras do produto  $x[k]h[n - k]$ , obtendo o valor de  $y[n]$ .

Os passos acima são repetidos para todos os valores de  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo:**

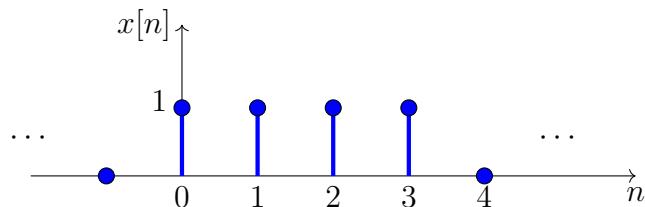


Figura 2.6:  $x[n] = u[n] - u[n - 4]$ .

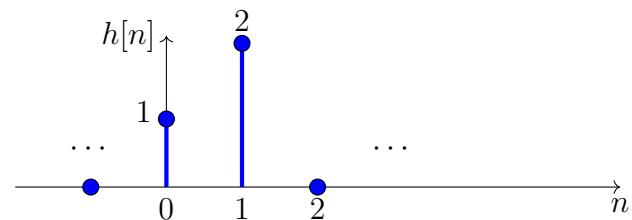
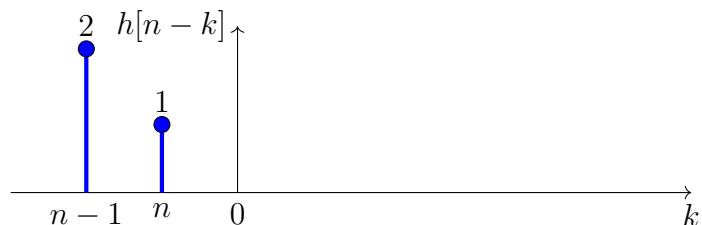
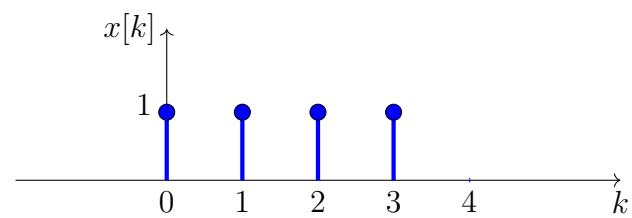


Figura 2.7: Resposta ao impulso  $h[n]$ .

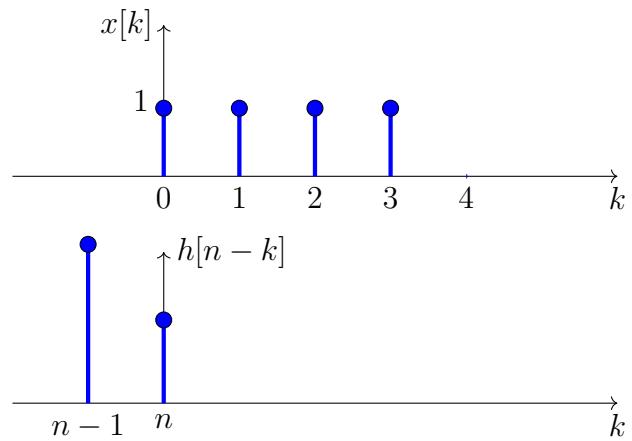
Primeiro, desenhamos as sequências  $x[k]$  e  $h[n - k]$  no eixo  $k$ .



Dependendo do valor de  $n$ , o produto das sequências  $x[k]$  e  $h[n - k]$  poderá assumir valores diferentes. Por isso, faremos uma análise por regiões ou intervalos.

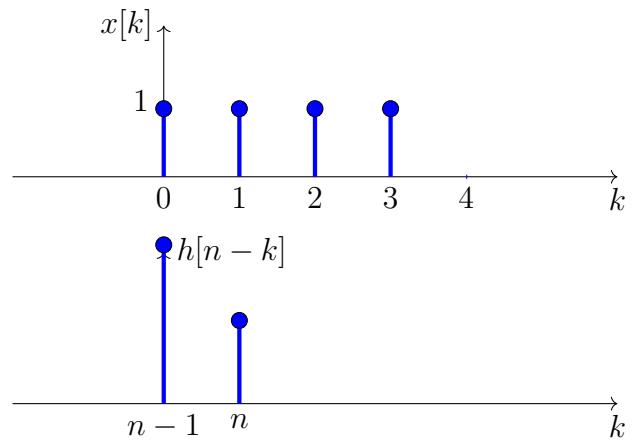
- Região 1:  $n < 0$  – é a situação desenhada acima.  
 $y[n] = 0$ , pois não há interseção não-nula entre as sequências.

- Região 2:  $n = 0$ .



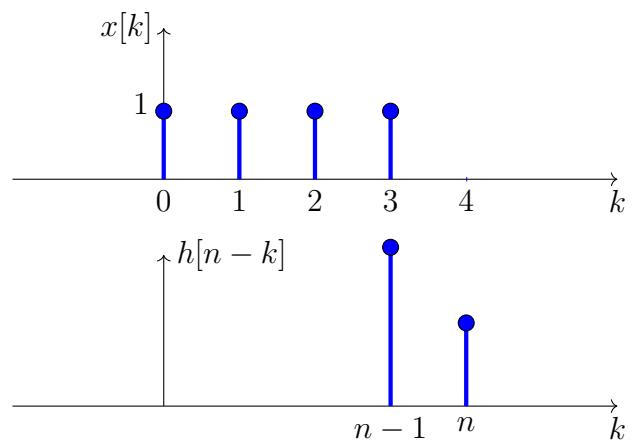
Neste caso,  $y[n] = 1$ .

- Região 3:  $0 < n \leq 3$ .



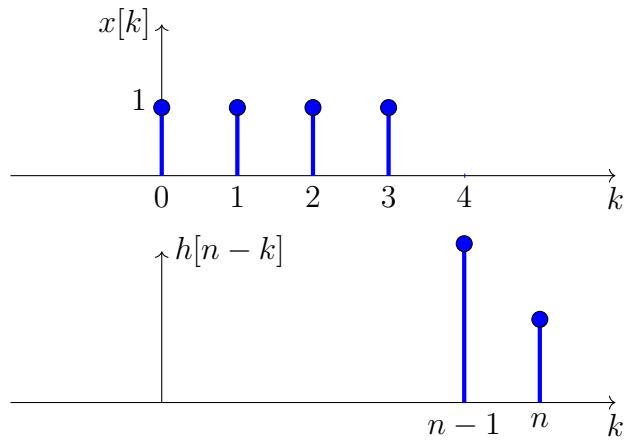
Para todos estes valores de  $n$ ,  $y[n] = 3$ .

- Região 4:  $n = 4$ .



Neste caso,  $y[n] = 2$ .

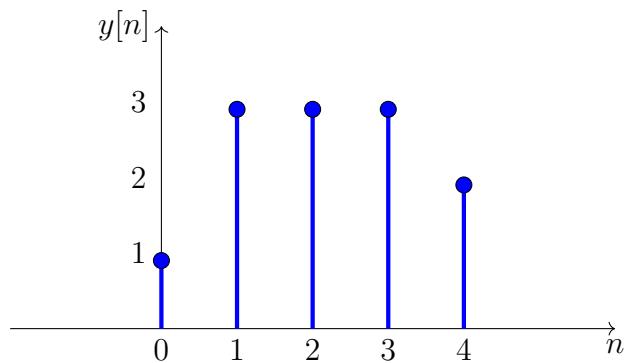
- Região 5:  $n \geq 5$ .



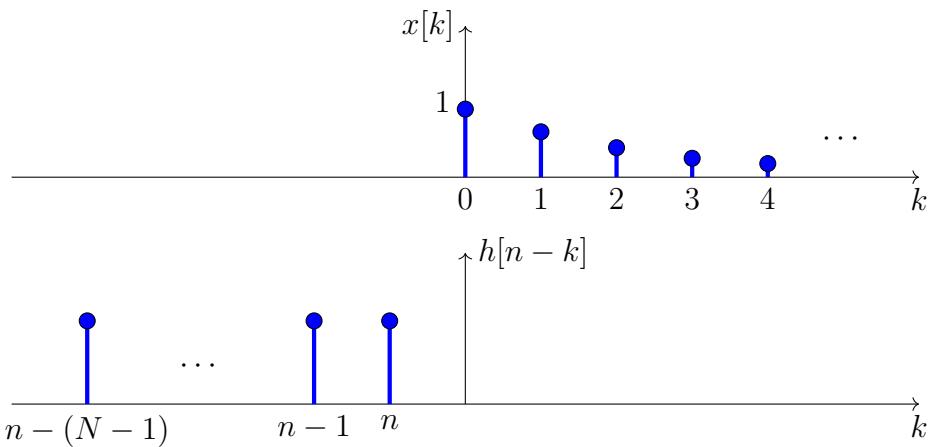
Como não há interseção não-nula entre as sequências,  $y[n] = 0$ .

Resumindo,

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 3, & 0 < n \leq 3 \\ 2, & n = 4 \\ 0, & n > 4 \end{cases} \quad (2.23)$$

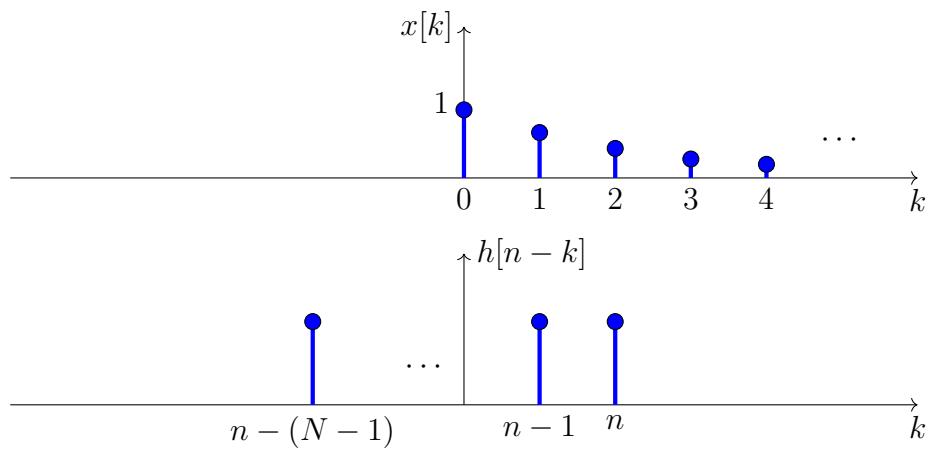


Exemplo 2:  $x[n] = a^n u[n]$ ,  $0 < a < 1$ ,  $h[n] = u[n] - u[n - N]$ .



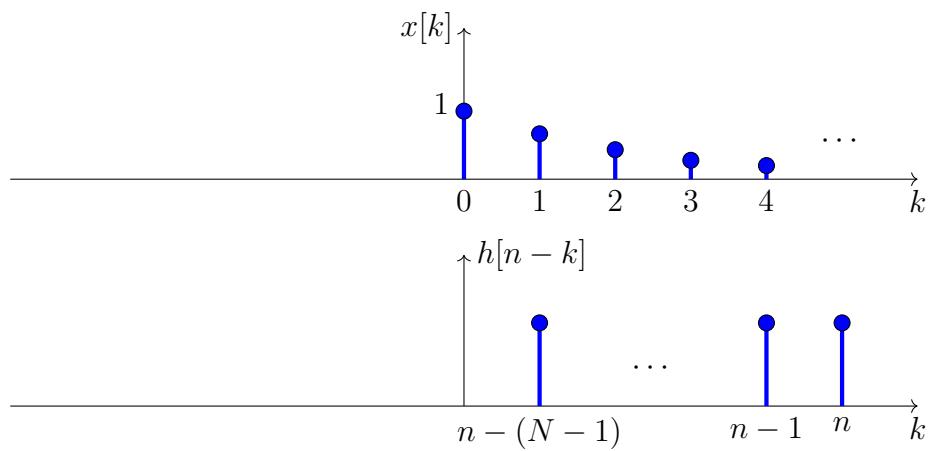
A saída  $y[n]$  resulta da soma de todos os valores gerados pelo produto de  $x[k]$  por  $h[n - k]$ .

- Se  $n < 0$ , não há interseção entre  $x[k]$  e  $h[n - k]$ , então  $x[k]h[n - k] = 0$  e  $y[n] = 0$ .
- Para  $0 \leq n < N - 1$ ,



$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

- Para  $n \geq N - 1$ ,



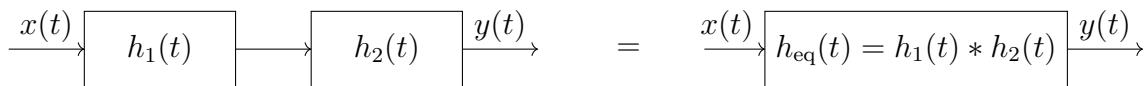
$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=n-(N-1)}^n x[k] h[n-k]^{-1} \\
 &= \sum_{k=n-(N-1)}^n a^k = \frac{a^n [a^{-(N-1)} - a]}{1 - a} \\
 &= \frac{a^n (a^{1-N} - a)}{1 - a} = \frac{a^{n+1} (a^{-N} - 1)}{1 - a}
 \end{aligned}$$

Resumindo,

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n < N - 1 \\ \frac{a^{n+1} (a^{-N} - 1)}{1 - a}, & n \geq N - 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

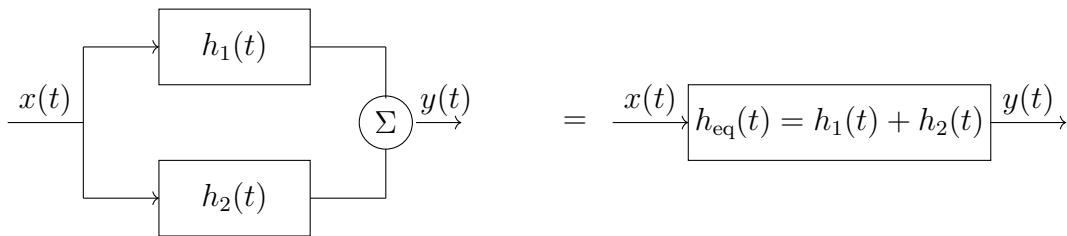
## 2.6 Propriedades dos Sistemas LIT

- Conexão em série (cascata)



$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_{\text{eq}}(t)$$

- Conexão em paralelo



$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_{\text{eq}}(t)$$

Estas duas propriedades valem para sistemas a tempo discreto.

- Causalidade

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$$

Para o sistema ser causal,  $y[n]$  só pode depender de  $x[n]$  nos instantes  $n' \leq n$ , ou seja, em  $n, n-1, n-2, \dots$ . Para isto ocorrer,  $h[-1], h[-2], h[-3], \dots$ , têm de ser zero. Em outras palavras,  $h[n] = 0$  para  $n < 0$  garante causalidade. Analogamente, para sistemas contínuos  $h(t) = 0$  para  $t < 0$  garante a causalidade.

- Estabilidade (BIBO)

$$|y[n]| = \left| \sum_k h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_k |h[k]| \cdot |x[n-k]|$$

Se a entrada é limitada,  $|x[n]| \leq B_x, \forall n$ . Logo,  $|x[n-k]| \leq B_x$ .

Sendo assim é correto afirmar que  $|y[n]| \leq \sum_k |h[k]| \cdot |x[n-k]| \leq \sum_k |h[k]| B_x$

O produto  $B_x \sum_k |h[k]|$  será limitado (*i.e.*, menor que infinito) se  $\sum_k |h[k]| < \infty$

O sistema LIT será estável (no sentido BIBO) se houver um limitante  $B_h$  tal que  $\sum_k |h[k]| \leq B_h < \infty$ .

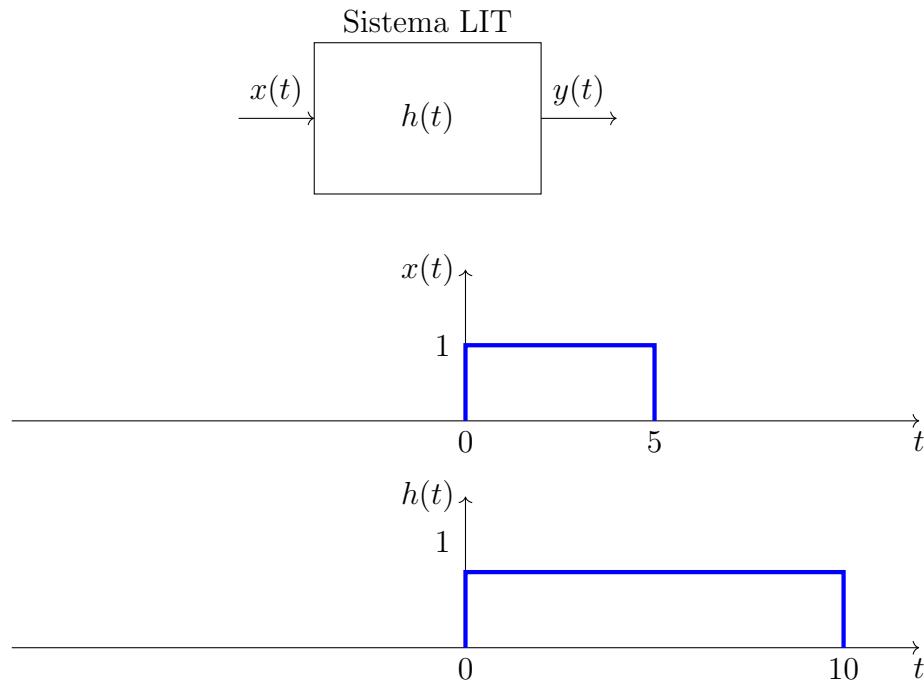
Analogamente, para sistemas contínuos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

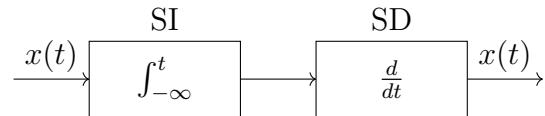
é a condição para a estabilidade.

### Exemplo:

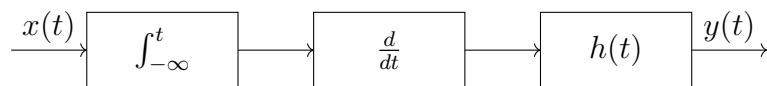
Vamos ilustrar como as propriedades da convolução podem ser usadas para facilitar o cálculo da resposta de um sistema a uma determinada entrada. No caso, vamos considerar o cenário apresentado na figura abaixo.



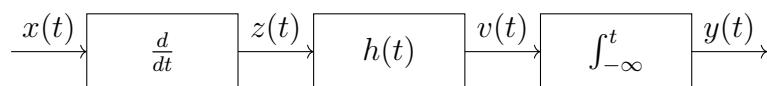
Conforme demonstrado no Tópico 1, tanto o sistema integrador (SI) quanto o sistema diferenciador (SD) são LIT. Além disso, sabemos que suas operações entrada-saída estão inversamente relacionadas, de maneira que passar um sinal por uma cascata formada por um SI seguido de um SD não modifica esse sinal. Ou seja, um sistema desfaz o que o outro fez, e a cascata não tem efeito algum sobre um sinal<sup>3</sup>:



Tendo isto em mente, em vez de diretamente calcularmos  $y(t) = x(t) * h(t)$ , vamos explorar a cascata SI-SD (que, como vimos, não tem efeito algum sobre um sinal), inserindo-a em série com o sistema LIT original.



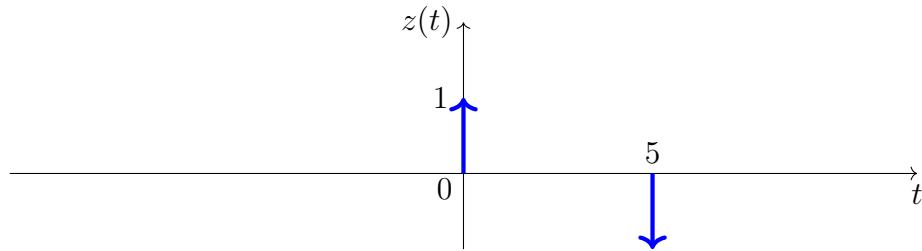
Embora esta ideia pareça ter complicado nossa tarefa, podemos utilizar o fato de que a ordem dos sistemas em uma cascata é irrelevante e, então, rearranjá-los da seguinte forma:



O caminho que vamos percorrer para obter a saída  $y(t)$  consiste em: (1) calcular  $z(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ; (2) determinar a convolução entre  $z(t)$  e  $h(t)$ , i.e.,  $v(t) = z(t) * h(t)$ ; e (3) calcular  $y(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ .

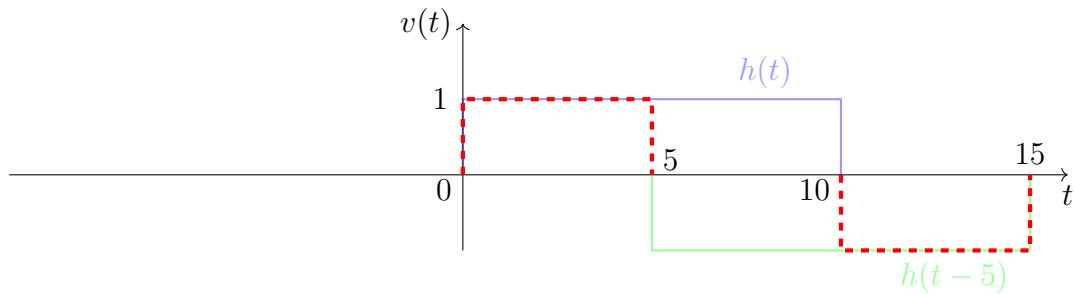
<sup>3</sup>Essa característica é verdadeira para a grande maioria dos sinais de interesse. Contudo, como os dois sistemas (integrador e diferenciador) são instáveis, existem alguns sinais especiais que podem levar a saída a divergir; nesses casos particulares, não é possível explorar a cascata.

Ora, o sinal de entrada pode ser escrito como  $x(t) = u(t) - u(t - 5)$ . Então, sua derivada corresponde a  $z(t) = \delta(t) - \delta(t - 5)$ , conforme ilustra a figura abaixo.

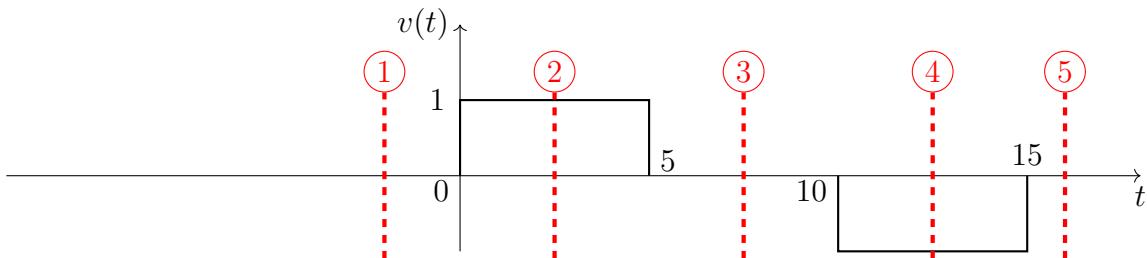


Em seguida, podemos determinar  $v(t)$  fazendo a convolução de  $z(t)$  com  $h(t)$ . Aqui, podemos perceber uma grande simplificação: como  $z(t)$  é um sinal formado por impulsos, a convolução com  $h(t)$  pode ser facilmente obtida, uma vez que  $\delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0)$ . Por isso:

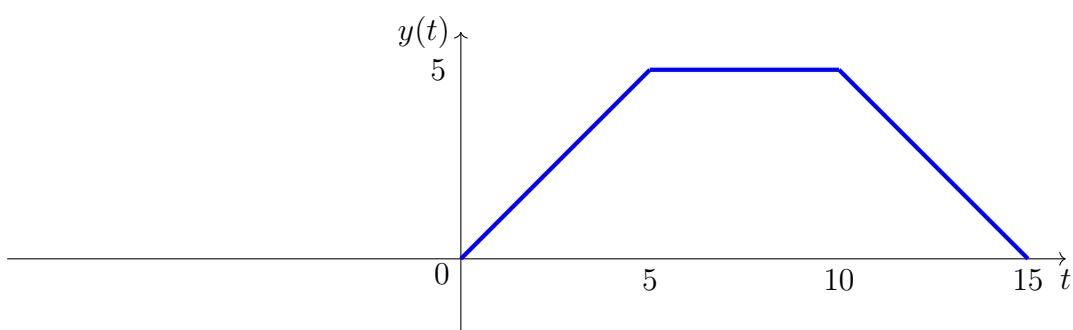
$$v(t) = z(t) * h(t) = [\delta(t) - \delta(t - 5)] * h(t) = h(t) - h(t - 5).$$



Finalmente, a saída do sistema LIT original é dada pela resposta do sistema integrador ao sinal  $v(t)$ . Note que, para cada instante  $t$ , a resposta  $y(t)$  equivale à área total de  $v(t)$  considerando seu conteúdo desde  $-\infty$  até o instante  $t$ . Há, portanto, cinco situações pertinentes para analisar, as quais estão indicadas na figura abaixo.



Se  $t \leq 0$  (ponto ①), a integral é nula; para  $0 < t \leq 5$  (ponto ②), a integral aumenta de valor linearmente com  $t$ ; para  $5 < t \leq 10$  (ponto ③), a integral mantém um valor constante e igual a 5, correspondente à área do primeiro retângulo; para  $10 < t \leq 15$  (ponto ④), a área passa a diminuir cada vez mais conforme  $t$  aumenta, até chegar em 0 quando  $t > 15$  (ponto ⑤). Sendo assim, o sinal de saída  $y(t)$  corresponde a:



# Capítulo 3

## Análise de sinais periódicos no tempo contínuo

Até agora, tratamos da representação de sinais exclusivamente no seu domínio “natural” (que para a grande maioria dos casos é o tempo). No entanto, a quantidade de informações que podemos extrair dos sinais pode ser significativamente aumentada ao considerarmos sua representação em outros domínios. Por exemplo, pode ser interessante extrair de um sinal informações sobre elementos que compõem sua estrutura. Por exemplo, um sinal sonoro pode ser interpretado como uma soma de diferentes tons que variam em frequências e amplitudes. A análise dessas componentes pode revelar informações importantes sobre o conteúdo do sinal, como a presença de ruídos ou a identificação de padrões específicos.

A representação de sinais no domínio da frequência é particularmente útil para esse tipo de análise, com aplicações relevantes em processamento de áudio, compressão de dados e análise de sistemas dinâmicos. Nessa representação, vamos procurar decompor os sinais em elementos básicos, que podem ser interpretados individualmente.

### 3.1 Decomposição de sinais

#### 3.1.1 Componentes vetoriais

Para decompor os sinais, vamos utilizar um conjunto de ferramentas usualmente empregadas em vetores, o que pode parecer incomum à primeira vista, no entanto, é possível estabelecer uma analogia completa entre sinais e vetores.

Retomando alguns conceitos básicos de álgebra linear, um vetor em um espaço vetorial é uma entidade definida por uma magnitude (ou norma) e uma direção. A magnitude de um vetor é uma medida escalar que representa o tamanho ou a extensão do vetor, enquanto a direção indica a orientação do vetor no espaço. A norma de um vetor  $\mathbf{x}$  é frequentemente denotada por  $|\mathbf{x}|$ . Para dois vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , o produto interno (ou escalar) é definido como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos(\theta), \quad (3.1)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . O produto interno pode ser interpretado como uma medida de similaridade entre os dois vetores. Se o produto interno for zero, os vetores são ortogonais (perpendiculares). Se o produto interno for positivo, os vetores estão apontando na mesma direção geral, e se for negativo, estão apontando em direções opostas.

Quando temos dois vetores, também podemos procurar qual a componente de um vetor na direção do outro. Essa componente  $c_y$  também é chamada de projeção de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{y}$ , como na figura 3.1.

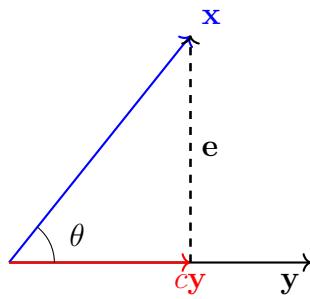


Figura 3.1: Projeção de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{y}$ .

O vetor  $\mathbf{x}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{x} = c\mathbf{y} + \mathbf{e}. \quad (3.2)$$

onde  $x \approx c\mathbf{y}$ , e  $\mathbf{e}$  é o erro de representação da aproximação. Essa decomposição não é única, podemos ter várias outras projeções de  $\mathbf{x}$  da forma  $c_n\mathbf{y} + \mathbf{e}$  como na figura 3.2.

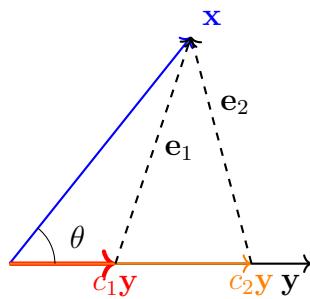


Figura 3.2: Outras projeções de  $\mathbf{x}$  sobre  $\mathbf{y}$

Podemos padronizar a escolha da projeção, escolhendo  $c$  de forma que o erro de representação seja minimizado. A partir da figura 3.1, podemos ver que o erro de representação é minimizado quando o vetor de erro  $\mathbf{e}$  é ortogonal ao vetor  $\mathbf{y}$ , e  $c$  pode ser obtido como:

$$\begin{aligned} c|\mathbf{y}| &= |\mathbf{x}| \cos(\theta) \\ c|\mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos(\theta) \\ c &= \frac{1}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

A partir dessa conclusão, podemos interpretar o produto interno como uma forma de medir quanto existe de  $\mathbf{y}$  na direção de  $\mathbf{x}$ . Caso eles sejam ortogonais, o produto interno será zero, indicando que não há componente de  $\mathbf{y}$  em  $\mathbf{x}$ .

### 3.1.2 Projeção de sinais reais

O conceito de componente e produto interno pode ser estendido para os sinais. Assim como os vetores, os sinais podem ser interpretados como uma sequência de valores, onde cada ponto no tempo representa uma dimensão diferente. Por exemplo, um sinal  $x(t)$  pode ser representado como um vetor em um espaço de dimensões infinitas, onde cada dimensão corresponde a um instante de tempo específico. Assim como nos vetores, podemos procurar uma aproximação de um sinal  $x(t)$  em termos de um segundo sinal  $y(t)$ , ao longo de um intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ .

$$x(t) \approx cy(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

E para essa aproximação,

$$e(t) = \begin{cases} x(t) - cy(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim como no caso vetorial, queremos uma boa aproximação, então vamos procurar a constante  $c$  que minimiza o erro de representação, usando como critério a energia do sinal de erro no intervalo  $[t_1, t_2]$ :

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - cy(t)]^2 dt$$

Para minimizar  $E_e$ , vamos procurar  $c$  que resolve:

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \left[ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right] - \frac{d}{dc} \left[ 2c \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \right] + \frac{d}{dc} \left[ c^2 \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt \right] &= 0 \\ -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt + 2c \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt &= 0 \\ c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt} &= \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da equação (3.5) podemos notar a similaridade com a decomposição de um vetor na direção de outro. Assim como no caso vetorial, a constante  $c$  representa a projeção do sinal  $x(t)$  na direção do sinal  $y(t)$ . Definimos a operação

$$x(t) \cdot y(t) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) dt \tag{3.6}$$

Como o produto interno de  $x(t)$  e  $y(t)$ . E assim como no caso vetorial, podemos interpretar a operação  $x(t) \cdot y(t)$  como uma medida de similaridade entre os sinais  $x(t)$  e  $y(t)$ . Quando  $x(t)$  e  $y(t)$  são ortogonais, o produto interno será zero, indicando que não há componente de  $y(t)$  em  $x(t)$  no intervalo  $[t_1, t_2]$ .

**Exemplo:** Determine a projeção da onda quadrada  $x(t)$ , apresentada na figura 3.3, no sinal  $y(t) = \sin(t)$  durante o período  $[0, 2\pi]$ .

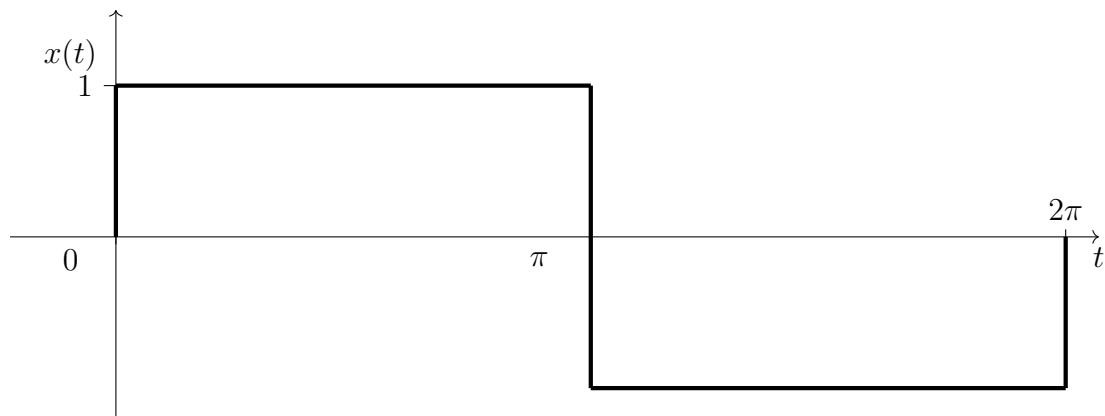


Figura 3.3: Onda quadrada  $x(t)$ ,  $t$  de  $0$  a  $2\pi$ .

Procuramos então representar a onda quadrada como:

$$x(t) \approx c \sin(t) \quad 0 < t < 2\pi$$

minimizando o erro de representação. Nesta caso,

$$y(t) = \sin(t) \quad \text{e} \quad E_y = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

A partir da equação (3.5), temos:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(t) dt \\ c &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t) dt + \int_\pi^{2\pi} -1 \cdot \sin(t) dt \right] \\ c &= \frac{1}{\pi} \left[ -\cos(t) \Big|_0^\pi + \cos(t) \Big|_\pi^{2\pi} \right] \\ c &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Portanto,  $x(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(t)$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ . A figura 3.4 mostra a onda quadrada  $x(t)$  e o sinal  $y(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t)$ , com o erro de representação sombreado.

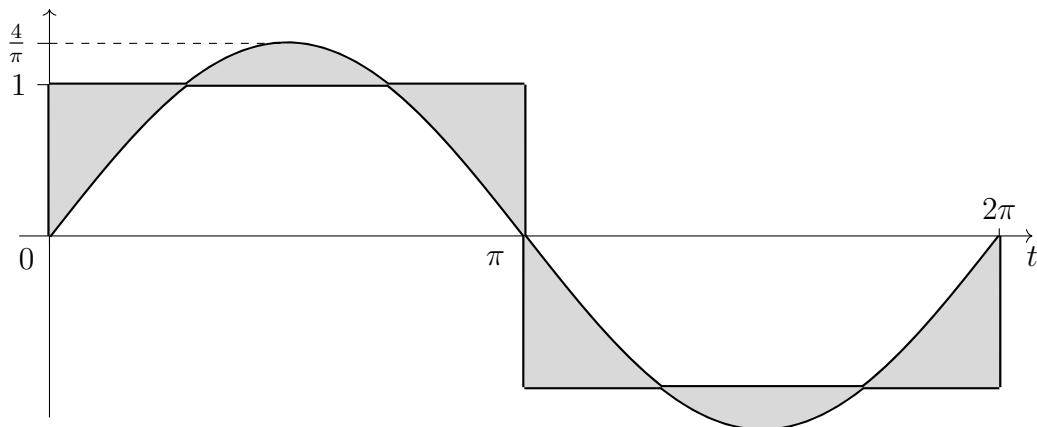


Figura 3.4: Onda quadrada  $x(t)$  e seno  $y(t)$ , área entre os sinais sombreada,  $t$  de  $0$  a  $2\pi$ .

### 3.1.3 Projeção de sinais complexos

No caso onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são sinais complexos, a projeção de  $x(t)$  sobre  $y(t)$  pode ser obtida de forma semelhante ao caso real, mas utilizando as definições extendidas:

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (3.7)$$

$$x(t) \cdot y(t) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt \quad (3.8)$$

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt \quad (3.9)$$

## 3.2 Projeção em uma base de sinais ortogonais

Novamente, da álgebra linear, podemos representar qualquer sinal como a soma de vetores ortogonais entre si, que formam um sistema de coordenadas de um espaço vetorial.

Essa representação será perfeita quando usamos como base um conjunto completo, ou seja, que forma todo o espaço vetorial onde o vetor decomposto reside. Novamente, o problema em sinais é análogo ao problema de vetores.

Para isso, vamos tomar um conjunto de sinais  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$  que atendam:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t)x_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ E_n & \text{se } m = n \end{cases}$$

Esse conjunto é dito ortogonal, ou ainda, ortonormal se, além da ortogonalidade, os sinais forem normalizados, ou seja, se  $E_n = 1$  para todo  $n$ .

Vamos agora aproximar um sinal arbitrário  $x(t)$  como

$$x(t) \approx c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \approx \sum_{n=1}^N c_nx_n(t) \quad (3.10)$$

O erro de representação dessa aproximação é dado por:

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=1}^N c_nx_n(t) \quad (3.11)$$

E sua energia é dada por:

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{n=1}^N c_nx_n(t) \right]^2 dt \quad (3.12)$$

Nosso critério para uma boa representação é que o erro de representação seja mínimo, então:

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{n=1}^N c_nx_n(t) \right]^2 dt = 0 \quad (3.13)$$

Quando expandimos esse polinômio, observamos que os termos de multiplicação cruzada dos sinais são 0, afinal os elementos da base são ortogonais. Além disso, a derivada em relação a  $c_i$  dos elementos que não contém  $c_n$  também é 0. Portanto, para cada  $n$ -ésimo elemento da base, apenas dois termos não são nulos:

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} [x(t)x_n(t)] dt + 2c_n \int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t) dt = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.14)$$

Então,

$$c_n = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t) dt} \int_{t_1}^{t_2} x(t)x_n(t) dt = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} x(t)x_n(t) dt \quad (3.15)$$

A partir dessa relação, concluímos que o valor ótimo do coeficiente  $c_n$  trará-se apenas da projeção de  $x(t)$  sobre  $x_n(t)$ , e independe do número de elementos da base ou de quem são os outros elementos da base, contanto que eles sejam ortogonais entre si.

### 3.2.1 Energia do erro de representação

Substituindo os coeficientes da equação (3.15) na expressão da energia do erro de representação, temos:

$$\begin{aligned} E_e &= \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t) dt - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_{t_1}^{t_2} x(t)x_n(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n - 2 \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n \end{aligned}$$

Como o termo  $c_n^2 E_n$  é não-negativo, podemos concluir que a energia do erro de representação sempre decresce quando aumentamos o número de elementos da base. É possível, então, que conforme  $N \rightarrow \infty$ ,  $E_e \rightarrow 0$ . Quando isso acontece, o conjunto de sinais ortogonais é dito completo. Neste caso,

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \quad t_1 < t < t_2 \quad (3.16)$$

## 3.3 Séries de Fourier

As séries de Fourier são casos especiais de representação de sinais em um espaço de sinais ortogonais. Elas são particularmente úteis para representar sinais periódicos, decompondo-os em uma soma de funções trigonométricas (senos e cossenos).

### 3.3.1 Período fundamental e componentes harmônicas

Como vimos na seção 1.1.3, um sinal é periódico quando a propriedade

$$x(t) = x(t + T_0) \quad t \in \mathbb{R}$$

é atendida. Chamamos de período fundamental o menor valor de  $T_0$  que satisfaz essa propriedade. Associado ao período fundamental, temos a frequência fundamental  $\omega_0$ , dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{rad/s}$$

a menor frequência presente no sinal periódico analisado.

Como discutimos anteriormente, essa propriedade implica que  $x(t)$  é infinito, começando em  $-\infty$  e terminando em  $+\infty$ . No entanto, podemos considerar apenas um intervalo de tempo de duração  $T_0$ , ou seja, para quaisquer  $t$

$$\int_a^{a+T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt = \int_{T_0} x(t) dt \quad a, b \in \mathbb{R}$$

As componentes harmônicas são os múltiplos inteiros do período fundamental, ou seja,  $T_n = nT_0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

### 3.3.2 Série trigonométrica de Fourier

Se tratando de sinais periódicos, a escolha óbvia para utilizar como base é um conjunto da forma  $\{\sin(\omega_n t), \cos(\omega_n t), \sin(2\omega_n t), \cos(2\omega_n t), \dots\}$ . Esses sinais são ortogonais entre si, como mostrado no apêndice A.

Vamos então, considerar a decomposição de  $x(t)$  em uma soma de senos e cossenos de frequência  $\omega_0$  e todas as suas harmônicas<sup>1</sup>:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (3.17)$$

Para determinar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , usamos a equação (3.15) sobre um período  $T_0$ , tomando os sinais da base como  $\cos(n\omega_0 t)$  e  $\sin(n\omega_0 t)$ , ambos com energia  $E_n = T_0/2$ . Assim, temos:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3.18)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (3.19)$$

Para o caso de  $a_0$ <sup>2</sup>:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (3.20)$$

<sup>1</sup>Consideramos também a harmônica zero do sinal em questão, materializada na forma da constante  $a_0$ , uma vez que  $a_0 \cos(0\omega_0 t) + b_0 \sin(0\omega_0 t)$  é uma constante de valor  $a_0$ .

<sup>2</sup>No caso do coeficiente  $a_0$ , a energia é  $E_0 = T_0$ , uma vez que o sinal é uma constante. O coeficiente  $a_0$  pode ser interpretado como a média do sinal ao longo de um período.

## Série trigonométrica compacta de Fourier

No caso de  $x(t)$  ser um sinal real, podemos usar propriedades trigonométricas das funções  $\sin(t)$  e  $\cos(t)$  para reescrever a série de Fourier da forma:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (3.21)$$

Onde os coeficientes das duas formas se relacionam da seguinte maneira:

$$C_0 = a_0 \quad (3.22)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.23)$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3.24)$$

A maneira compacta ressalta algumas interpretações da série de Fourier. Primeiro notamos que  $C_0$ , assim como  $a_0$ , representa a média do sinal ao longo de um período. Além disso, todos os comportamentos não constantes podem ser representados como a soma de cossenos de diferentes frequências, cada um com uma amplitude  $C_n$  e um atraso, representado como uma variação de fase  $\theta_n$ .

**Exemplo:** Considere o sinal periódico  $x(t)$  mostrado na figura 3.5. Determine os coeficientes da série trigonométrica de Fourier e da série compacta de Fourier.

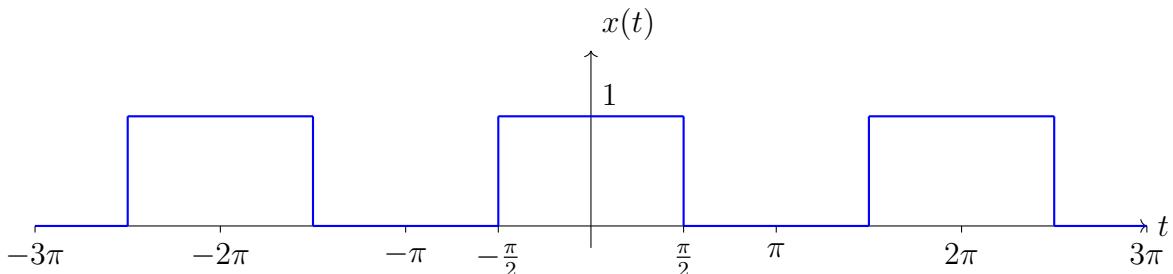


Figura 3.5: Onda quadrada periódica

Neste caso o período  $T_0 = 2\pi$ , e a frequência fundamental é  $\omega_0 = 1$  rad/s. A função é definida por  $x(t) = 1$  para  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  e se repete periodicamente.

Os coeficientes da série trigonométrica de Fourier são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Os coeficientes  $a_n$  são:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sin(nt) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n = \{1, 5, 9, \dots\} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{se } n = \{3, 7, 11, \dots\} \end{cases}$$

Os coeficientes  $b_n$  são:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{n\pi} \cos(nt) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

A série trigonométrica de Fourier desse sinal é:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t) - \dots$$

a partir desses coeficientes, podemos calcular os coeficientes da série compacta de Fourier:

$n$	$a_n$	$b_n$	$C_n$	$\theta_n$
1	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0
2	0	0	0	0
3	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	$-\pi$
4	0	0	0	0
5	$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	$-\pi$

**Exemplo:** Determine os primeiros 5 coeficientes da série compacta de Fourier para a onda dente de serra mostrada na figura 3.6.

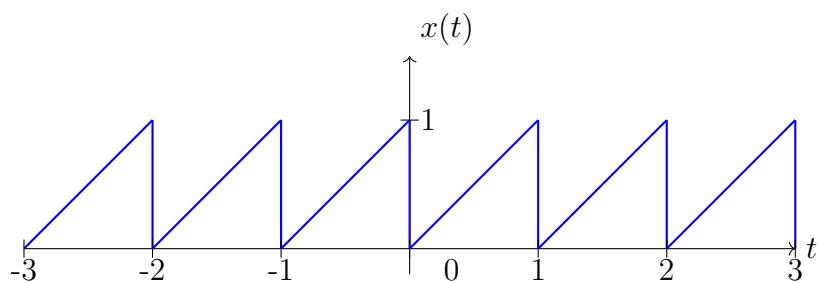


Figura 3.6: Onda dente de serra periódica

Neste caso, o período fundamental é  $T_0 = 1$ , e a frequência fundamental é  $\omega_0 = 2\pi$  rad/s. A função é definida por  $x(t) = t$  para  $t \in [0, 1)$  e se repete periodicamente.

O coeficiente  $a_0$  é a média do sinal ao longo de um período:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \\ &= \int_0^1 x(t) dt \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Os coeficientes  $a_n$  são:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 t \cos(2\pi nt) dt \\ &= \frac{1}{4n^2\pi^2} [\cos(2\pi nt) - 2\pi nt \sin(2\pi nt)] \Big|_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Os coeficientes  $b_n$  são:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt \\ &= \frac{2}{4n^2\pi^2} [\sin(2\pi nt) - 2\pi nt \cos(2\pi nt)] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2n^2\pi^2} (-2\pi n) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

A série trigonométrica de Fourier desse sinal é:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi nt)$$

a partir desses coeficientes, podemos calcular os coeficientes da série compacta de Fourier:

$n$	$a_n$	$b_n$	$C_n$	$\theta_n$
1	0	$-\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	$-\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
3	0	$-\frac{1}{6\pi}$	$\frac{1}{6\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
4	0	$-\frac{1}{8\pi}$	$\frac{1}{8\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	$-\frac{1}{10\pi}$	$\frac{1}{10\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$

### 3.3.3 Série Exponencial de Fourier

Podemos generalizar a representação da série de Fourier para sinais  $x(t)$  complexos utilizando como base o conjunto  $\{e^0, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots\}$ , cuja ortogonalidade é apresentada no apêndice A e onde  $\omega_0$  é a frequência fundamental.

Assim a reconstrução do sinal  $x(t)$  é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.25)$$

E obtemos os coeficientes  $D_n$  a partir da projeção de  $x(t)$  sobre  $e^{jn\omega_0 t}$ , com energia  $E_n = T_0$ , calculada na forma da equação (3.9). Assim, temos:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.26)$$

Neste caso,  $D_n \in \mathbb{C}$ . A série exponencial de Fourier é mais compacta e conveniente para análise de sinais. Se  $x(t)$  for um sinal real, então:

$$x(t) = x^*(t)$$

Aplicando a representação de Fourier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* e^{-jm\omega_0 t}$$

No caso onde  $n = -m$ , temos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n} e^{jn\omega_0 t}$$

Então:

$$D_n = D_{-n}^* \quad (3.27)$$

Ou seja, para sinais reais, os coeficientes da série exponencial de Fourier são conjugados simétricos.

### Frequências negativas

A existência de frequências negativas na série exponencial de Fourier pode parecer contra-intuitiva, uma vez que a frequência é definida como a quantidade de repetições em um segundo e é estritamente positiva. Qual é, então, a interpretação física de uma frequência  $-n\omega_0$  que aparece na série exponencial de Fourier?

Podemos interpretar a presença da frequência negativa como uma manifestação da existência de senóides para construir um sinal real. Afinal, pela fórmula de Euler, temos que:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

Se não existisse a frequência negativa, não seria possível cancelar a parte imaginária do sinal, e o resultado da soma das senóides seria um sinal complexo. Essa relação fica evidente quando observamos que a componente  $C_n$  da série trigonométrica se relaciona com  $D_n$  da forma  $C_n = 2|D_n|$ , ou seja, a energia fornecida pela  $n$ -ésima componente da série trigonométrica é a soma da energia das componentes positivas e negativas da série exponencial (uma vez que os módulos são iguais para sinais reais).

### 3.3.4 Espectro da série de Fourier

O espectro da série de Fourier é uma representação dos coeficientes da série em função da frequência. Para a série trigonométrica, o espectro é dado pelos pares de coeficientes  $(a_n, b_n)$ , enquanto para a série compacta, é dado pelos coeficientes  $C_n$  e  $\theta_n$ . No caso da série exponencial, o espectro é representado pelos coeficientes  $D_n$ .

A partir do espectro, podemos analisar a composição do sinal em função das suas componentes harmônicas. O espectro das séries trigonométricas é puramente real e existe apenas para valores inteiros positivos. Usualmente traçamos o espectro da série trigonométrica compacta como dois gráficos separados de magnitude e fase. Por exemplo, a figura 3.7 mostra o espectro de magnitude e fase para a onda quadrada do exemplo anterior.

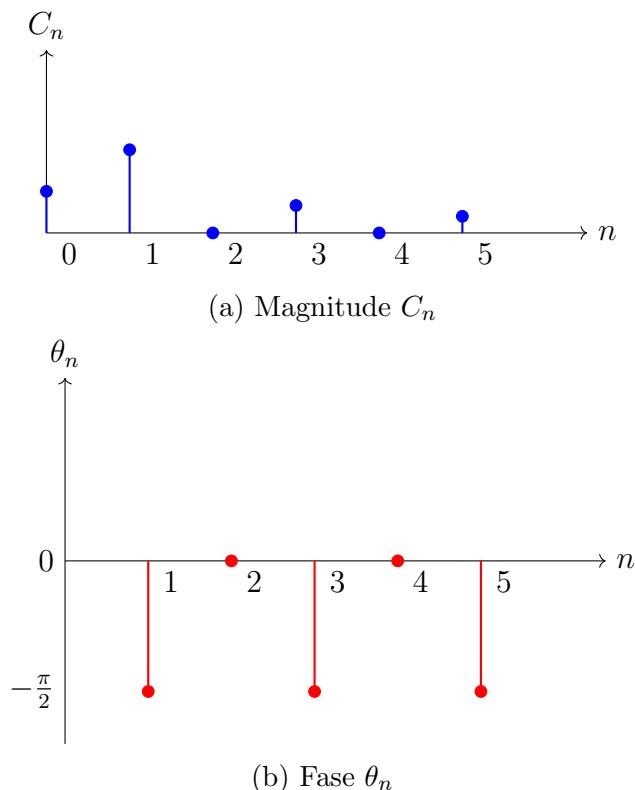


Figura 3.7: Espectro de magnitude e fase para a onda quadrada do exemplo.

No caso da série exponencial, o espectro é complexo e existe para valores inteiros positivos e negativos. O espectro da série exponencial é usualmente representado como dois gráficos separados de magnitude e fase, ou como um gráfico de parte real e parte imaginária. A figura 3.8 mostra o espectro de magnitude e fase para a onda quadrada do exemplo anterior.

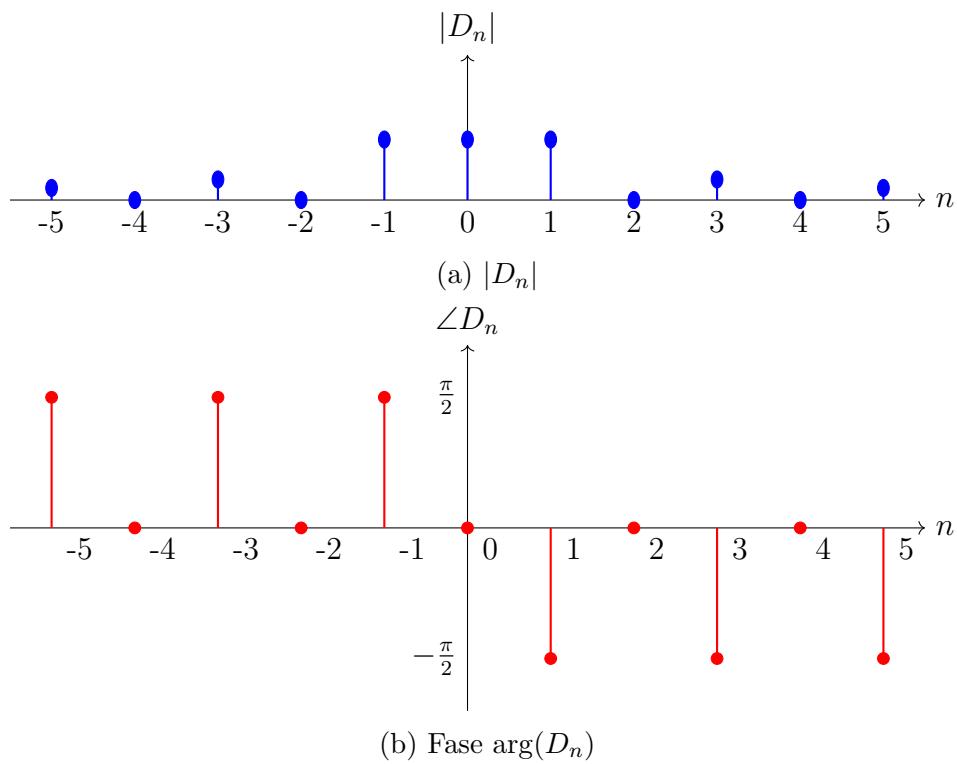


Figura 3.8: Espectro exponencial ( $\angle D_n$ ) para a onda quadrada do exemplo.

### Teorema de Parseval

O Teorema de Parseval estabelece uma relação entre a energia de um sinal no domínio do tempo e a energia de sua representação no domínio da frequência.

A série trigonométrica de Fourier de um sinal é dada pela equação .

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Cada termo da série representa uma componente de frequência específica do sinal. A potência total do sinal pode ser obtida somando as potências de cada componente.

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

Esse resultado é o teorema de Parseval, que nos diz que a energia (ou potência, no caso de sinais de potência) de um sinal é igual à soma das energias de suas componentes de frequência. O mesmo pode ser dito dos componentes da série exponencial:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Ou, no caso de sinais reais, como  $|D_n| = |D_{-n}|$ :

$$P_x = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 \quad (3.28)$$

## Largura de banda de um sinal

A diferença entre a maior e a menor frequências presentes em um sinal é chamada de *Largura de banda* do sinal. Essa medida é importante na análise de sinais, pois indica a faixa de frequências que o sinal ocupa no espectro. Para diversas aplicações de telecomunicações e processamento de sinais, essa informação é importantíssima, uma vez que está diretamente ligada com a capacidade de transmissão de dados do sinal. Além disso, para aplicações de filtragem, a largura de banda ajuda a determinar os parâmetros dos filtros necessários para isolar ou remover certas componentes de frequência do sinal.

## Simetria do espectro

A simetria do espectro de um sinal é uma propriedade importante que pode simplificar a análise e a síntese de sinais. Para sinais reais, os coeficientes da série de Fourier possuem uma relação de simetria específica, mostrada na equação (3.27):

$$D_{-n} = \overline{D_n} \quad (3.29)$$

Isso significa que os coeficientes negativos são conjugados dos coeficientes positivos. Essa simetria é uma consequência da natureza real do sinal e tem implicações importantes na representação espectral. O espectro do módulo dos coeficientes da série exponencial de Fourier é par, ou seja,  $|D_{-n}| = |D_n|$ , enquanto o espectro da fase é ímpar, ou seja,  $\angle D_{-n} = -\angle D_n$ .

### 3.3.5 Relação entre coeficientes

Como as três versões da série de Fourier são equivalentes, é possível relacionar os coeficientes entre si. A relação entre os coeficientes da série trigonométrica e da série compacta é dada por:

- $a_0 = C_0 = D_0$
- $a_n - jb_n = C_n e^{j\theta_n} = 2D_n$
- $a_n + jb_n = C_n e^{-j\theta_n} = 2D_{-n}$
- $C_n = 2|D_n|$
- $\theta_n = \angle(D_n)$

**Exemplo:** Um sinal periódico  $x(t)$  é representado pela série trigonométrica de Fourier como:

$$x(t) = 2 + 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) + 2 \sin(3t + 30^\circ) - \cos(7t + 150^\circ)$$

Expresse essa série como uma série compacta de Fourier e trace o espectro de amplitude e fase de  $x(t)$

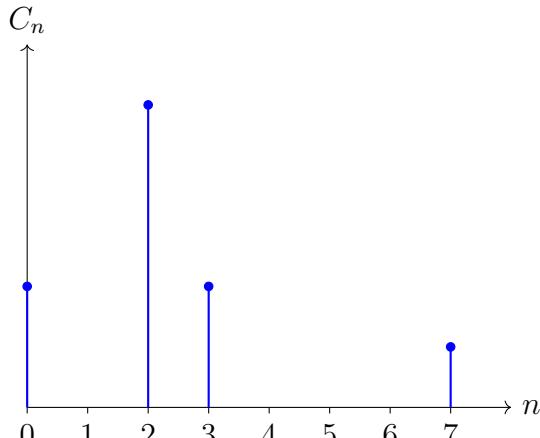
Primeiro associamos os elementos de  $x(t)$  com a mesma frequência:

- $3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) = 5 \cos(2t - 53.13^\circ)$
- $2 \sin(3t + 30^\circ) = 2 \cos(3t + 30^\circ - 90^\circ) = 2 \cos(3t - 60^\circ)$
- $-\cos(7t + 150^\circ) = \cos(7t + 150^\circ - 180^\circ) = \cos(7t - 30^\circ)$

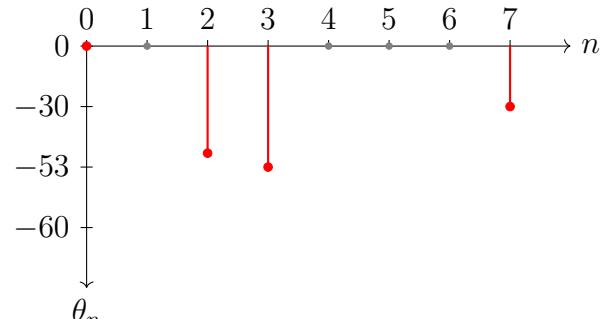
Então, a série compacta de Fourier é:

$$x(t) = 2 + 5 \cos(2t - 53.13^\circ) + 2 \cos(3t - 60^\circ) + \cos(7t - 30^\circ)$$

Daí, podemos traçar o espectro de amplitude e fase:



(a)  $C_n$



(b)  $\theta_n$

Figura 3.9: Espectro de amplitude e fase para a série compacta do exemplo.

### 3.4 Convergência das séries de Fourier

Para que a série de Fourier exista, os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  (da série trigonométrica) devem ser finitos. Pelas equações (3.20), (3.18) e (3.19), a existência dos coeficientes depende de  $x(t)$  ser absolutamente integrável em um período, ou seja:

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (3.30)$$

Mas não basta garantir a existência dos coeficientes para que a série de Fourier converja para o sinal  $x(t)$ . A convergência da série de Fourier depende de certas condições sobre o sinal  $x(t)$ , conhecidas como condições de Dirichlet. Essas condições são:

- $x(t)$  deve ser absolutamente integrável em um período.
- $x(t)$  deve ter um número finito de descontinuidades finitas em um período.
- $x(t)$  deve ter um número finito de máximos e mínimos em um período.

Todos os sinais que satisfazem as condições de Dirichlet têm suas séries de Fourier convergindo para o próprio sinal em quase todo lugar. Na prática, quase todos os sinais de interesse são contínuos e atendem às condições de Dirichlet.

### 3.5 Reconstrução de um sinal a partir dos coeficientes da série de Fourier

A série de Fourier permite a reconstrução de um sinal periódico a partir de seus coeficientes. A precisão da reconstrução depende do número de termos considerados na série. Quanto mais termos forem incluídos, mais próxima será a aproximação do sinal original.

Além disso, cada elemento contribui de forma diferente para a reconstrução do sinal. A componente  $C_0$  representa a média do sinal ao longo de um período, enquanto as componentes  $C_n$  e  $\theta_n$  representam as variações do sinal em diferentes frequências. Frequências baixas têm um impacto maior na forma geral do sinal, enquanto frequências mais altas capturam detalhes mais finos, como as rápidas variações. Sinais que tem variações mais abruptas exigem mais componentes na série de Fourier para serem representados com precisão. A figura 3.10 mostra o processo de reconstrução de uma onda quadrada, adicionando uma harmônica de cada vez.

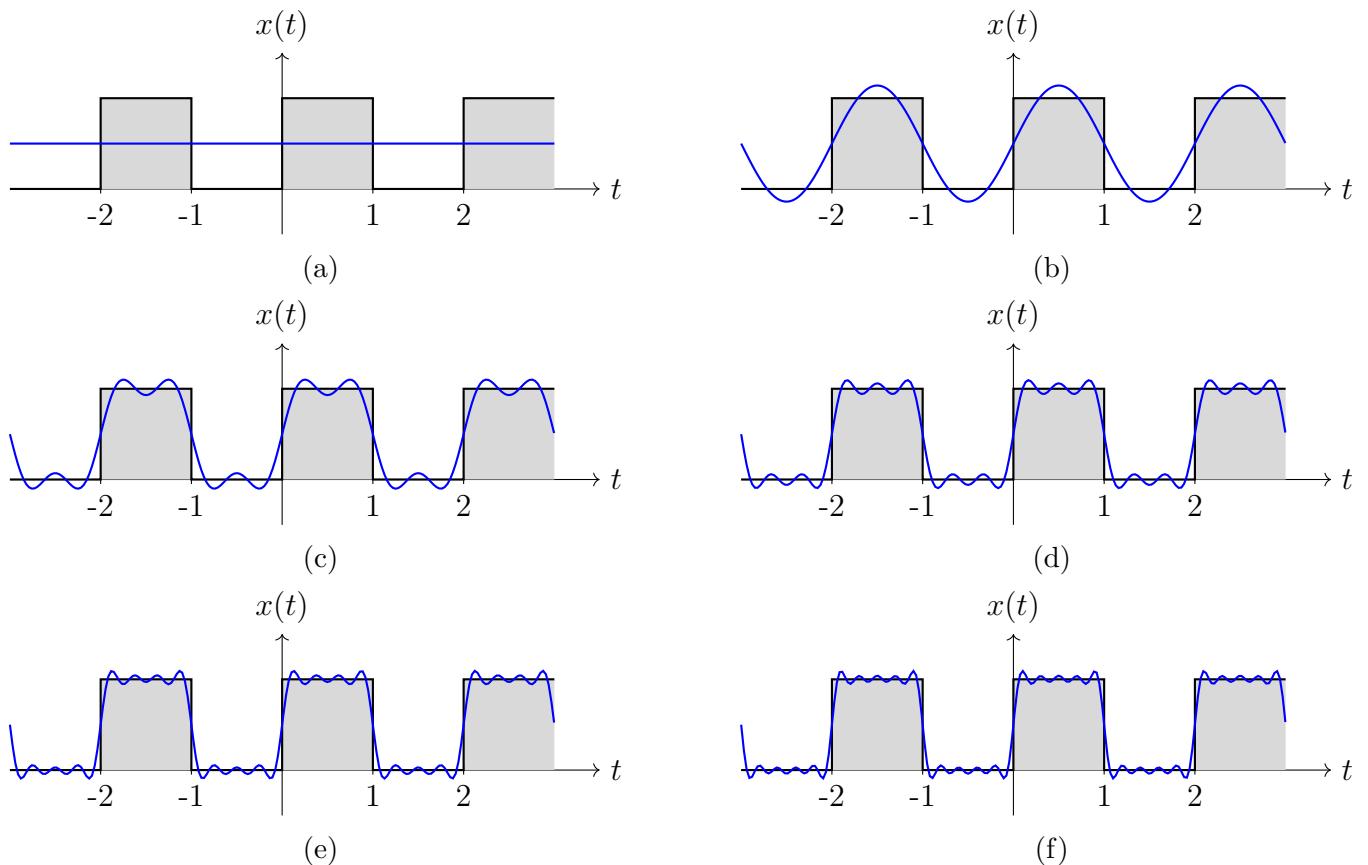


Figura 3.10: Reconstrução progressiva de uma onda quadrada (período  $T=2$ , amplitude 0 a 1) usando a série de Fourier. À medida que mais harmônicas são adicionadas, a aproximação se torna mais precisa.

**Exemplo:** Considere a onda quadrada periódica  $x(t)$  com período  $T = 2$  segundos, que oscila entre 0 e 1, conforme mostrado na figura 3.10. Determine o percentual da potência total do sinal que é capturada em cada uma de suas harmônicas.

Para iniciar, precisamos determinar os coeficientes da série de Fourier para esta onda quadrada. Como o período da onda é  $T = 2$ , a frequência angular fundamental é  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$  rad/s.

A primeira componente  $a_0$  (média do sinal) é dada por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 1 dt + \int_1^2 0 dt \right) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0.5$$

Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são calculados como:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 1 \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 0 \cdot \cos(n\pi t) dt \right)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - 0 \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 1 \cdot \sin(n\pi t) dt + \int_1^2 0 \cdot \sin(n\pi t) dt \right)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right)$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Portanto, os coeficientes da série compacta de Fourier são:

$$C_0 = a_0 = 0.5$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A potência média do sinal original é dada por:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 1^2 dt + \int_1^2 0^2 dt \right) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0.5$$

Pelo teorema de Parseval, a potência total do sinal também pode ser expressa em termos dos coeficientes da série de Fourier:

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

Substituindo os valores dos coeficientes, temos:

$$0.5 = (0.5)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} \left( \frac{2}{n\pi} \right)^2 = 0.25 + \frac{1}{2} \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2}$$

A primeira componente (nível DC) contribui com 0.25 para a potência total de 0.5, ou seja, 50%. A contribuição percentual de cada harmônica ímpar pode ser dada por:

$$P_n = \frac{C_n^2}{2P_x} = C_n^2$$

**Exemplo:** Determine a série exponencial de Fourier e trace o espectro de Fourier  $D_n$  correspondente em função de  $\omega$  para o seno retificado (onda completa) mostrado na figura 3.11.

Podemos considerar  $|\sin(t)| = \sin(t)$  nos semicírculos positivos de  $\sin(t)$  e calcular a integral de  $\sin(t)e^{jn2t}$  no intervalo  $0 \leq t \leq \pi$ .

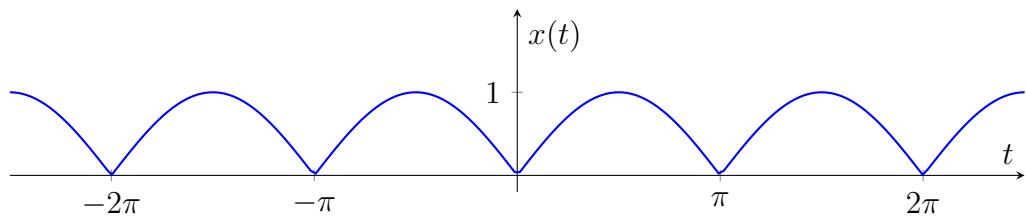


Figura 3.11: Seno retificado

$$T_0 = \pi \implies \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$$

Obtendo os coeficientes  $D_n$  da forma exponencial:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t e^{jn2t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} e^{j2nt} dt = \frac{1}{j2\pi} \int_0^\pi (e^{j(2n+1)t} - e^{j(2n-1)t}) dt \\ &= \frac{1}{j2\pi} \left[ \frac{e^{j(2n+1)t}}{j(2n+1)} - \frac{e^{j(2n-1)t}}{j(2n-1)} \right]_0^\pi = \frac{-1}{2\pi} \left[ \frac{-1 - 1}{(2n+1)} - \frac{-1 - 1}{(2n-1)} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{1 - 4n^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} e^{j2nt}$$

**Exemplo:** O sinal  $x(t)$  da figura 3.11 é aproximado pelos  $2N + 1$  primeiros termos (de  $n = -N$  a  $N$ ) de sua série exponencial de Fourier dada no Exercício E6.5. Determine o valor de  $N$  para que esta série de potência de Fourier com  $(2N + 1)$  termos tenha no mínimo 99,75% da potência de  $x(t)$ .

Obtendo a potência  $P_x$  de  $|\sin(t)|$  a partir da fórmula original de potência de um sinal:

$$P_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^\pi = \frac{1}{2}$$

Precisamos encontrar o número de coeficientes  $(2N + 1)$  da série de Fourier tal que:

$$P_x \geq \frac{1}{2} \cdot 99,75\% = 0,49875$$

A partir do teorema de Parseval para sinais reais:

$$P_x = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1 - 4n^2}\right)^2$$

Quando  $N = 1$ ,

$$P_x \approx 0,4053 + 0,0901 = 0,4954$$

Quando  $N = 2$ ,

$$P_x \approx 0,4053 + 0,0901 + 0,0036 = 0,499$$

Logo,  $N = 2$ .

## Efeito de Gibbs

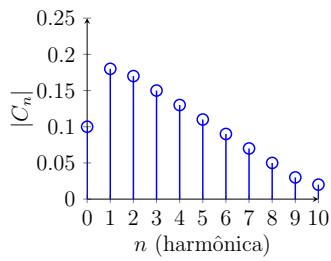
O efeito de Gibbs é um fenômeno que ocorre na representação de sinais com descontinuidades usando séries de Fourier. Quando uma onda com descontinuidades é aproximada por uma série de Fourier, as oscilações indesejadas podem aparecer nas proximidades das descontinuidades. Esse fenômeno é conhecido como sobressinal e pode ser visualizado na figura 3.10. Conforme adicionamos harmônicas de frequências mais altas, esperamos que a série converja exatamente para  $x(t)$  conforme  $N \rightarrow \infty$ . No entanto, mesmo aumentando o número de harmônicas, as ondulações próximas às descontinuidades não desaparecem completamente.

A formulação que adotamos da série de Fourier garante que ao longo de um período, a energia do erro de representação tende a 0 conforme adicionamos mais componentes, no entanto, essa garantia não se aplica localmente, ou seja, não garante que o erro seja 0 em *todos* os pontos. O efeito de Gibbs é uma manifestação dessa limitação, onde as oscilações persistem perto das descontinuidades, mesmo com um número crescente de termos na série. De fato, o que observamos é que nas descontinuidades, a série converge para o valor médio dos limites laterais do sinal, ou seja, se  $x(t)$  tem uma descontinuidade em  $t = t_0$ , então a série de Fourier converge para  $\frac{1}{2}[x(t_0^-) + x(t_0^+)]$ .

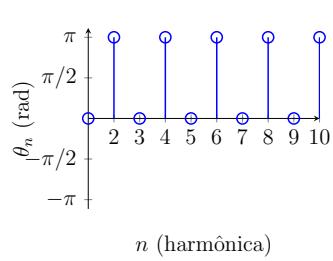
## Efeito da fase

O papel do espectro de amplitude na reconstrução dos sinais a partir das suas componentes de Fourier é muito claro. No entanto, o espectro de fase também desempenha um papel crucial. A fase de cada componente harmônica determina como essas componentes se combinam no tempo para formar o sinal original. Se a fase de uma harmônica for alterada, isso pode resultar em uma forma de onda completamente diferente, mesmo que a amplitude permaneça a mesma. Podemos imaginar um sinal com uma descontinuidade no tempo, ou seja, um instante onde seu valor se altera bruscamente. Para construir esse salto, as componentes de alta frequência da série de Fourier entram em cena, permitindo essa rápida transição. Mas além da amplitude, precisamos alinhar essas componentes, de forma que imediatamente antes da transição elas tenham um sinal e após a transição tenham outro. Esse alinhamento aparece como os valores do espectro de fase das componentes de alta frequência.

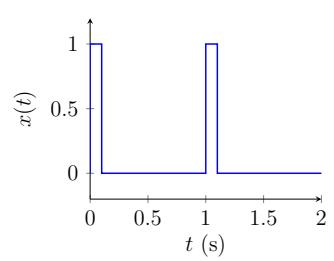
As figuras 3.12 e 3.13 mostram os espectros de amplitude e fase para uma onda pulsada com duty cycle de 10% e 90%, respectivamente. Note que, apesar das evidentes diferenças no tempo, os espectros de amplitude são idênticos<sup>3</sup>, mas os espectros de fase são diferentes. A diferença na fase das componentes de alta frequência é o que permite a construção dos diferentes formatos de onda, com transições rápidas em momentos distintos.



(a) Espectro de Amplitude - 10%



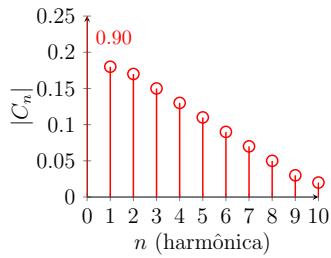
(b) Espectro de Fase - 10%



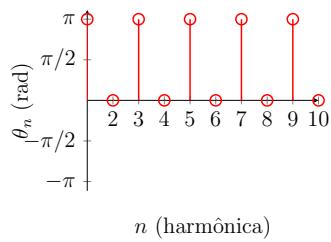
(c) Forma de Onda - 10%

Figura 3.12: Espectros de amplitude e fase e forma de onda pulsada com duty cycle 10%.

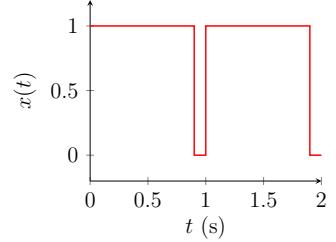
<sup>3</sup>São idênticos com a pequena exceção de que a componente 0, que representa a média do sinal, é diferente.



(a) Espectro de Amplitude - 90%



(b) Espectro de Fase - 90%



(c) Forma de Onda - 90%

Figura 3.13: Espectros de amplitude e fase e forma de onda pulsada com duty cycle 90%.

## 3.6 Propriedades da Série de Fourier

A série de Fourier possui várias propriedades úteis que facilitam a análise e manipulação de sinais periódicos. Algumas das principais propriedades são:

### 3.6.1 Linearidade

Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  dois sinais periódicos com o mesmo período  $T_0$ . Para o sinal  $x(t)$ , podemos calcular os coeficientes da série de Fourier  $D_{1n}$ , e para o sinal  $y(t)$ , os coeficientes  $D_{2n}$  da seguinte forma:

$$D_{1n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$D_{2n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Se considerarmos uma nova função  $z(t) = \alpha x(t)$ ,

$$D'_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} [\alpha x(t)] e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \alpha \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \alpha D_{1n}$$

Ou seja, a multiplicação do sinal por uma constante  $\alpha$  resulta na multiplicação dos coeficientes da série de Fourier por essa mesma constante.

Para o caso da soma de dois sinais,  $z(t) = x(t) + y(t)$ , temos:

$$D'_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} [x(t) + y(t)] e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= D_{1n} + D_{2n}$$

Ou seja, a soma de dois sinais resulta na soma dos coeficientes da série de Fourier correspondentes. Essas propriedades podem ser combinadas para expressar a linearidade da série de Fourier

### 3.6.2 Deslocamento no tempo

Se  $x(t)$  é um sinal periódico com período  $T_0$  e coeficientes da série de Fourier  $D_n$ , então o sinal deslocado no tempo  $x(t - t_0)$  também é periódico com o mesmo período  $T_0$ . Os coeficientes da série de Fourier do sinal deslocado são dados por:

$$\begin{aligned} D'_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0(\tau+t_0)} d\tau \quad (\text{substituindo } \tau = t - t_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0 t_0} d\tau \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} D_{1n} \end{aligned}$$

### 3.6.3 Derivação

Se  $x(t)$  é um sinal periódico com período  $T_0$ , podemos escrever sua série de Fourier como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

A derivada de  $x(t)$  em relação ao tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{d}{dt} (e^{jn\omega_0 t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n (jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0 D_n) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D'_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Com  $D'_n = jn\omega_0 D_n$ . Ou seja, a derivada do sinal resulta na multiplicação dos coeficientes da série de Fourier por  $jn\omega_0$ .

### 3.6.4 Integração

Se  $x(t)$  é um sinal periódico com período  $T_0$ , podemos escrever sua série de Fourier como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

A integral de  $x(t)$  em relação ao tempo é dada por:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^t x(t) dt &= \int_{-\infty}^t \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 \tau} \right) d\tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{-\infty}^t e^{jn\omega_0 \tau} d\tau \quad \text{Substituindo } u(t) = jn\omega_0 \tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \left( \frac{1}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 \tau} \Big|_{-\infty}^t \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{D_n}{jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D'_n e^{jn\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

Com  $D'_n = \frac{D_n}{jn\omega_0}$  para  $n \neq 0$  e  $D'_0 = 0$ . Ou seja, a integral do sinal resulta na divisão dos coeficientes da série de Fourier por  $j n \omega_0$ , exceto para o termo DC ( $n = 0$ ), que é zero para garantir a convergência da série.

**Exemplo:** Obtenha os coeficientes da série de Fourier da onda dente de serra da figura 3.14 a partir da sua derivada.

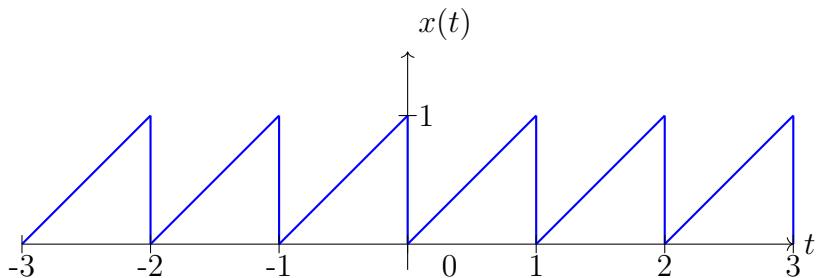


Figura 3.14: Onda dente de serra periódica

$$T_0 = 1 \implies \omega_0 = 2\pi$$

Relembrando os coeficientes da série de Fourier da onda dente de serra que foram calculados na seção 3.3.2:

$$a_0 = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b_n = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt = -\frac{1}{\pi n}$$

Então:

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{j}{\pi n} \right) = \frac{j}{2\pi n}$$

Agora, calculando  $D_n$  a partir de  $D'_n$ . Primeiro obtemos  $x'(t)$ :

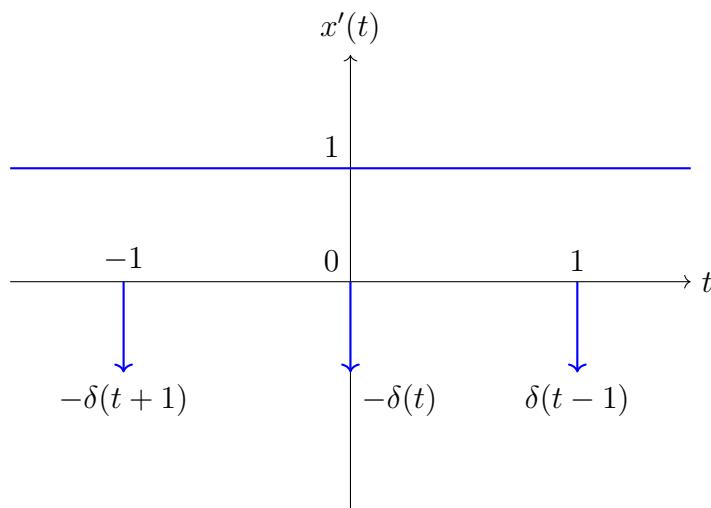


Figura 3.15: Derivada da onda dente de serra periódica da figura 3.14

$$D'_n = - \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t) e^{-j2\pi nt} dt = -e^{-j2\pi n \cdot 0} = -1$$

Aplicando a propriedade da integração:

$$D_n = \frac{D'_n}{j\omega_0 n} = \frac{-1}{j2\pi n} = \frac{j}{2\pi n}$$

Quando derivamos uma função, o nível DC acaba sendo eliminado e, por isso, não dá para ser recuperado pela propriedade da integração. No entanto, podemos calculá-lo à parte, como foi feito acima ( $D_0 = a_0 = \frac{1}{2}$ ), de forma trivial. A vantagem de usar a propriedade da integração aqui é resolver uma integral mais simples que a do sinal original para obter os outros coeficientes.

# Capítulo 4

## Análise de sinais não-periódicos no tempo contínuo

No capítulo 3, mostramos que conseguimos decompor um sinal como uma soma de funções ortogonais, e que para um intervalo finito, conseguimos representar qualquer função perfeitamente como essa soma. Para sinais periódicos, aproveitamos que se algo acontece em um período, se repete para sempre, e assim conseguimos representar sinais periódicos como uma soma infinita de funções mais simples, como senos e cossenos. Mas e se o sinal não for periódico? E se o sinal for definido em todo o eixo real, e não apenas em um intervalo finito? Como podemos representar esses sinais?

### 4.1 Transformada de Fourier

#### 4.1.1 Extensão periódica de um sinal

Para tentar empregar o que vimos no capítulo anterior, podemos tentar estender o sinal não-periódico de forma periódica. Ou seja, se temos um sinal  $x(t)$  definido em todo o eixo real, podemos definir um novo sinal  $x_{T_0}(t)$  como sendo a extensão periódica de  $x(t)$  com período  $T_0$ . Essa extensão periódica compreende o sinal original e repetições “artificiais” do sinal antes e depois do intervalo original. A figura 4.1 ilustra esse conceito.

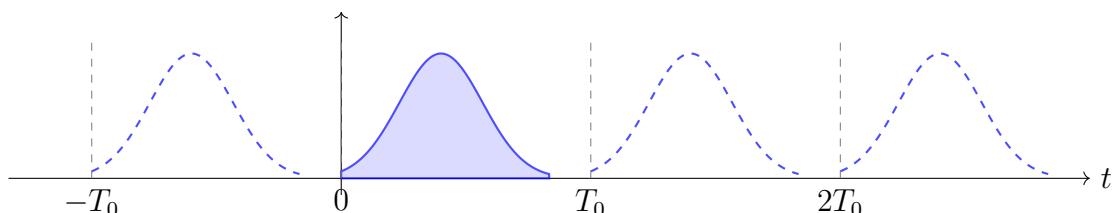


Figura 4.1: Extensão periódica de um sinal  $x(t)$ : o mesmo padrão se repete a cada  $T_0$  segundos.

Escolhemos  $T_0$  suficientemente grande para que as repetições não interfiram no sinal original. Quando aumentamos o tamanho do período  $T_0$ , as repetições ficam mais espaçadas, e o sinal original fica mais parecido com o sinal estendido. Assim, podemos pensar que, à medida que  $T_0$  tende ao infinito, o sinal estendido se aproxima do sinal original. No limite:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) \quad (4.1)$$

Como agora  $x_{T_0}(t)$  é periódico, podemos usar a série de Fourier para representá-lo:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

onde  $D_n$  são os coeficientes da série de Fourier, dados por:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.2)$$

e  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  é a frequência fundamental.

#### 4.1.2 Representação da extensão periódica

Para encontrar a representação do sinal original  $x(t)$ , precisamos analisar o que acontece com a série de Fourier de  $x_{T_0}(t)$  quando modificamos o período da extensão periódica  $T_0$ . Conforme aumentamos esse período, reduzimos a frequência fundamental  $\omega_0$ , o que faz com que as harmônicas  $n\omega_0$  fiquem mais próximas umas das outras. Se, por exemplo, dobrarmos o período, o espaço entre cada harmônica é reduzido pela metade, “densificando” o espectro da série de Fourier e aumentando a quantidade de harmônicas presentes em um intervalo fixo de frequências. A figura 4.2 ilustra esse fenômeno.

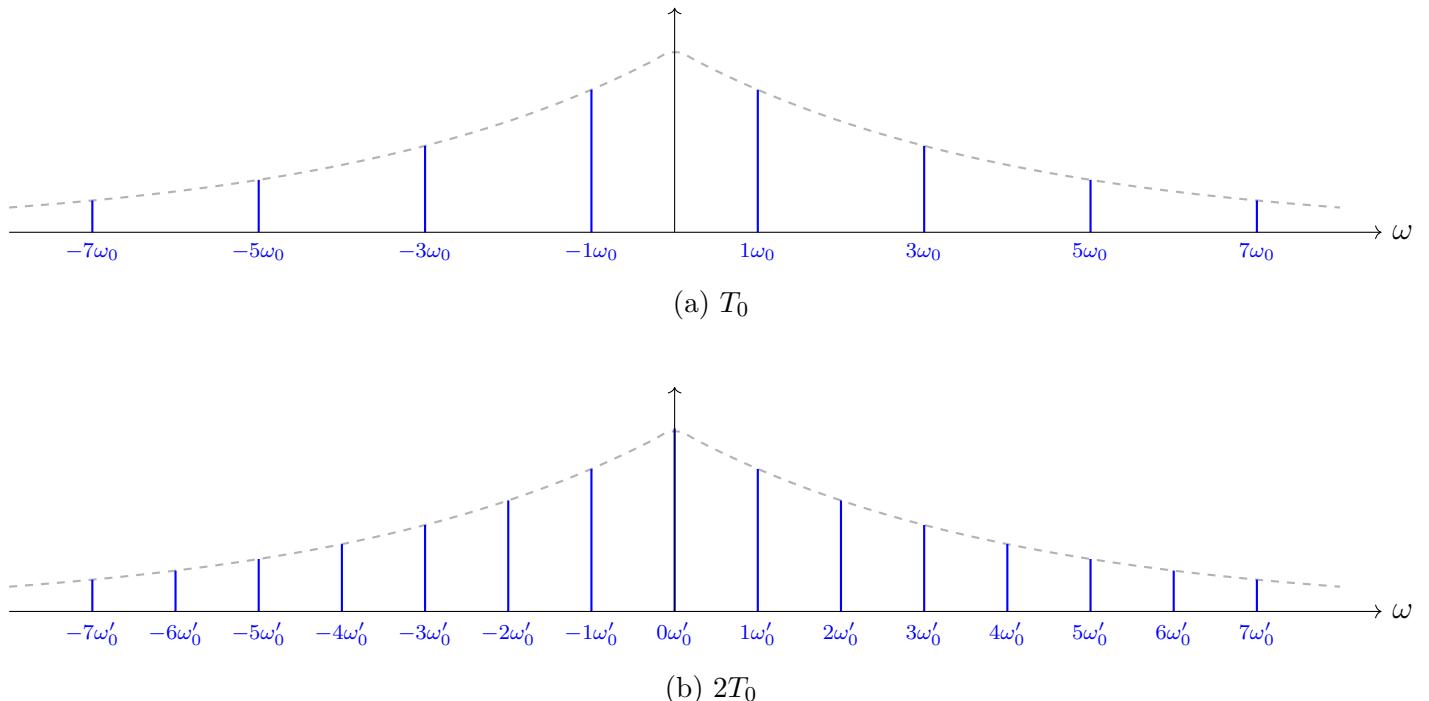


Figura 4.2: Densificação do espectro de Fourier: ao aumentar  $T_0$ , as raias espectrais ficam mais próximas (menor espaçamento em  $\omega$ ), ilustrado por  $\omega'_0 < \omega_0$ .

Ao mesmo tempo, reduzimos a amplitude do espectro da série de Fourier, uma vez que os coeficientes  $D_n$  são divididos por um valor maior (o período  $T_0$ ). Quando  $T_0 \rightarrow \infty$ , os coeficientes (4.2) passam a ser:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.3)$$

Note que, como  $T_0 \rightarrow \infty$ , o intervalo de integração se estende para todo o eixo real. Além disso, como  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ , quando  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow 0$ , transformando o intervalo das harmônicas, discreto com elementos  $n\omega_0$ , em um intervalo contínuo. Outra coisa que observamos é que neste limite, o valor de  $D_n$  tende a zero, uma vez que o fator  $\frac{1}{T_0}$  tende a zero. Isso faz com que o espectro de Fourier tenha uma característica de densidade de energia, onde a energia total do sinal é distribuída ao longo de um espectro contínuo, em vez de estar concentrada em frequências discretas.

Assim, podemos definir uma nova variável contínua  $X(\omega)$ , que representa a envoltória do espectro da série de Fourier quando  $T_0 \rightarrow \infty$ :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.4)$$

E as amostras  $D_n$  dessa envoltória são dadas por:

$$D_n = \frac{1}{T_0} X(\omega) \quad \text{com} \quad \omega = n\omega_0 \quad (4.5)$$

A série de Fourier de  $x_{T_0}(t)$  pode ser reescrita como:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad \text{com} \quad \omega = n\omega_0$$

Quando  $T_0 \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0$  tende a zero, e adotamos uma notação mais adequada para esse intervalo infinitesimal:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$$

Finalmente, como  $x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t)$ , temos:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.6)$$

A equação (4.6) é a integral de Fourier, que relaciona um sinal não periódico  $x(t)$  com elementos no domínio da frequência, assim como a série de Fourier fazia para sinais periódicos.

A função (4.4), que apresenta justamente essa envoltória do espectro, é chamada de *Transformada direta de Fourier* de  $x(t)$ . Ela representa o sinal  $x(t)$  no domínio da frequência, mostrando como o sinal é composto por todas as diferentes frequências possíveis. A função (4.6) é chamada de *Transformada inversa de Fourier*, e permite recuperar o sinal original  $x(t)$  a partir de sua transformada  $X(\omega)$ . Esse par transformada direta e inversa formam uma relação única entre os domínios do tempo e da frequência, permitindo fazer a transformação e análise de sinais em ambos os domínios.

É importante observar que a transformada de Fourier se trata de uma extensão da ideia gestada na série de Fourier, removendo a condição necessária de periodicidade (ou de intervalo finito) de um sinal. Assim quase todas as discussões e propriedades observadas para a série de Fourier se aplicam também para a transformada de Fourier, com as devidas adaptações.

### Condições para existência da transformada de Fourier

Como a transformada de Fourier é uma extensão da série de Fourier, ela possui as mesmas qualificações e limitações observadas no capítulo anterior, ressalvadas as alterações necessárias para o caso de sinais não-periódicos. Assim, da mesma forma que para a série, se o sinal  $x(t)$  atender a algumas condições (Condições de Dirichlet), a transformada de Fourier existe e é única.

Apesar das condições garantirem a existência da transformada, elas não são necessárias para a existência pontual da transformada. Na prática, observamos que a esmagadora maioria dos sinais de interesse prático possuem transformadas de Fourier bem definidas, via de regra, vamos adotar que se um sinal pode ser gerado fisicamente de qualquer maneira, a sua existência física garante a existência da sua transformada de Fourier.

## 4.2 Transformada de Fourier de algumas funções comuns

### 4.2.1 Função porta unitária

A função porta unitária é definida como:

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (4.7)$$

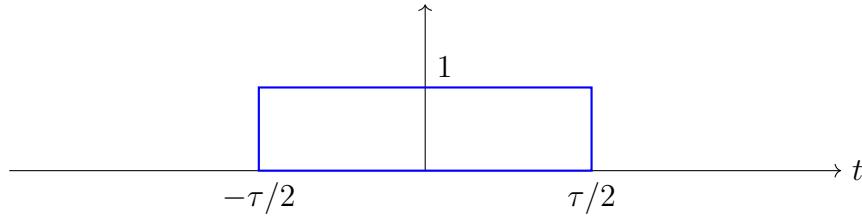


Figura 4.3: Função porta  $x(t)$  de largura  $\tau$  e amplitude 1.

Como a função  $x(t)$  vale 1 no intervalo  $[-\tau/2, \tau/2]$  e 0 fora desse intervalo, podemos calcular sua transformada de Fourier como:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ X(\omega) &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}) \\ X(\omega) &= \frac{2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} \\ X(\omega) &= \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \\ X(\omega) &= \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

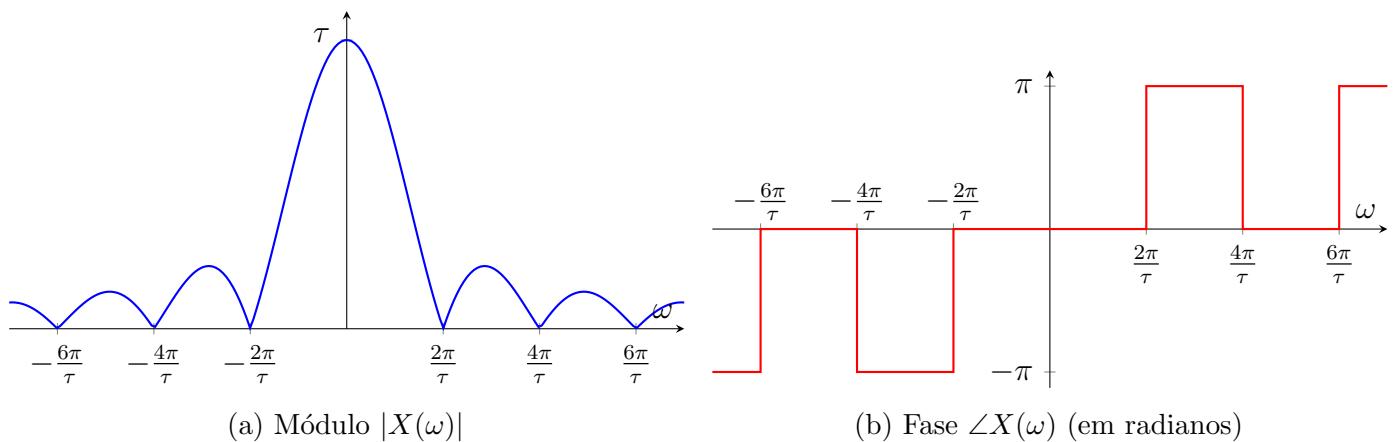


Figura 4.4: Módulo e fase da transformada de Fourier  $X(\omega)$  da função porta unitária de largura  $\tau$ .

### Largura de banda de $\Pi(t/\tau)$

Teoricamente o espectro ocupado pela função porta é infinito, uma vez que a função sinc nunca é zero. No entanto, como sua amplitude descrece conforme a frequência aumenta, na prática, podemos definir uma largura de banda útil do sinal, considerando a frequência onde o primeiro zero da função sinc ocorre. Esse primeiro zero ocorre quando o argumento da função seno é igual a  $\pi$ , ou seja, quando  $\frac{\omega\tau}{2} = \pi$ , o que implica que  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ . Observamos também uma relação entre a largura do pulso e a largura de banda: quanto maior a largura do pulso (maior  $\tau$ ), menor a faixa de frequências necessárias para representar razoavelmente o sinal (menor largura de banda).

#### 4.2.2 Função impulso unitário

A função impulso unitário, como definida na equação (1.43), assume os seguintes valores:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

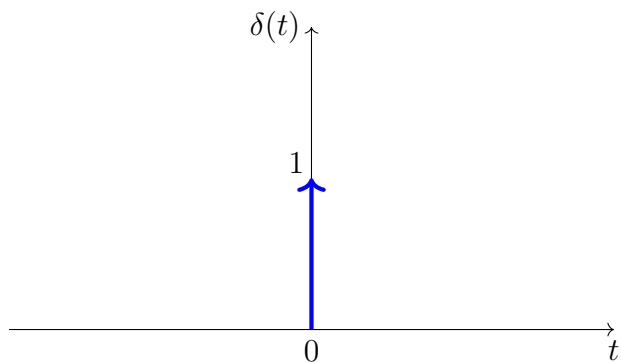


Figura 4.5: Impulso unitário  $\delta(t)$ .

Pela definição da transformada de Fourier (4.4), a transformada do impulso unitário é dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

Utilizando a propriedade de amostragem da função impulso unitário, demonstrada na equação (1.46), temos:

$$X(\omega) = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

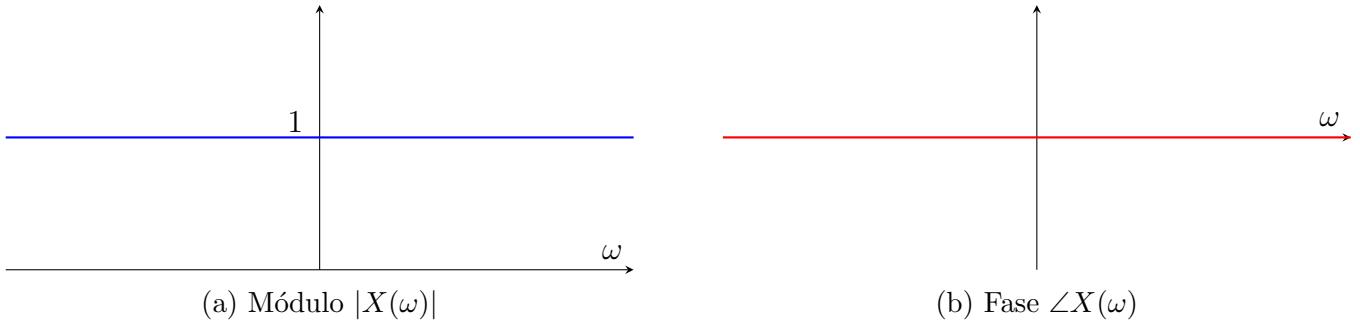


Figura 4.6: Módulo e fase da transformada de Fourier  $X(\omega)$  do impulso unitário.

A transformada do impulso unitário ser uma constante nos traz uma interpretação muito valiosa. O impulso é o sinal que contém todas as frequências com a mesma amplitude, ou seja, é um sinal que não privilegia nenhuma frequência em detrimento de outra. Quando pensamos que o impulso é um sinal de duração infinitamente curta, podemos entender que um sinal que ocorre em um instante específico no tempo não pode ser associado a uma frequência específica, mas precisa da contribuição de todas as frequências para existir.

#### 4.2.3 Transformada inversa do impulso

Como vimos, a transformada direta do impulso unitário é uma função constante igual a 1. Pela similaridade das relações entre transformada e a inversa, a transformada inversa de um impulso deveria ser uma constante, podemos verificar isso diretamente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Assim, verificamos que um impulso na origem em frequências corresponde a uma constante no domínio do tempo, corroborando a intepretação da série de que a frequência zero representa o valor médio (ou nível DC) do sinal. Mas e se o impulso não estiver na origem, mas sim em uma frequência  $\omega_0$  qualquer? Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Assim, um impulso em uma frequência  $\omega_0$  qualquer corresponde a uma senoide complexa no domínio do tempo, com frequência  $\omega_0$ . Isso reforça a interpretação da série de Fourier, onde cada termo da série

representa uma senoide complexa em uma frequência específica. Claro que um sinal real não comporta uma senoide complexa, mas pela propriedade de simetria do espectro, sabemos que para todo sinal real, se seu espectro contém um impulso deslocado em  $\omega_0$ , ele também contém um impulso em  $-\omega_0$ . Neste caso, a transformada inversa resulta em:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega \\x(t) &= \frac{1}{2\pi} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\x(t) &= \frac{1}{\pi} \cos(\omega_0 t)\end{aligned}$$

## 4.3 Propriedades da transformada de Fourier

A transformada de Fourier, assim como a série de Fourier, possui diversas propriedades que facilitam a análise e manipulação de sinais no domínio da frequência. Como ela se trata de uma extensão da série de Fourier, muitas das propriedades vistas no capítulo anterior se aplicam aqui, com as devidas adaptações.

### 4.3.1 Linearidade

A transformada de Fourier é uma operação linear, o que significa que a transformada de uma soma ponderada de sinais é igual à soma ponderada das transformadas desses sinais. A demonstração dessa propriedade é rigorosamente a mesma que a da série de Fourier, e assim, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são dois sinais com transformadas  $X_1(\omega)$  e  $X_2(\omega)$ , respectivamente, então:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

### 4.3.2 Dualidade tempo-frequência

A propriedade de dualidade estabelece uma relação simétrica entre o domínio do tempo e o domínio da frequência. Se um sinal  $x(t)$  tem uma transformada de Fourier  $X(\omega)$ , então a transformada inversa de  $X(t)$  (onde trocamos o papel do tempo e da frequência) é proporcional a  $x(-\omega)$ . Essa propriedade decorre da profunda similaridade entre as definições da transformada direta e inversa de Fourier. A única diferença entre as duas definições é o sinal no expoente e o fator de normalização<sup>1</sup>  $\frac{1}{2\pi}$ . O valor da propriedade da dualidade é que ele nos permite racionalizar que se observamos um determinado comportamento em um domínio, podemos esperar um comportamento análogo no outro domínio. Assim, se  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ , então:

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

---

<sup>1</sup>Esse fator decorre da unidade de freqüências adotada nessa apostila ( $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ). Se adotamos como unidade de frequência o seu valor em  $\text{Hz}$ , o fator de normalização se torna igual em ambas as direções.

### 4.3.3 Escalamento

Para uma função  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(\omega)$ , podemos avaliar:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt \\ \text{fazendo } u = at \Rightarrow dt &= \frac{du}{a} \\ \mathcal{F}\{x(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} \frac{du}{a} \\ \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u} du \\ \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

A função  $x(at)$  é uma versão comprimida (se  $|a| > 1$ ) ou estendida (se  $|a| < 1$ ) de  $x(t)$  no domínio do tempo. A propriedade de escalamento mostra que essa compressão ou extensão no tempo resulta em uma expansão ou compressão correspondente no domínio da frequência, com um fator de escala inverso, ou seja, um sinal comprimido no tempo exige um numero maior de frequências mais altas para ser representado, e vice-versa. O fator  $\frac{1}{|a|}$  garante que a energia total do sinal permaneça constante, independentemente do fator de escala aplicado.

### Duração no tempo e largura de banda

A propriedade de escalamento nos permite entender a relação inversa entre a duração de um sinal no tempo e sua largura de banda no domínio da frequência. Se um sinal é comprimido no tempo (ou seja, sua duração diminui), sua transformada de Fourier se expande no domínio da frequência, indicando que o sinal agora contém uma gama mais ampla de frequências. Isso significa que sinais de curta duração tendem a ter uma largura de banda maior, pois eles precisam de mais componentes de alta frequência para representar suas rápidas variações. Por outro lado, se um sinal é estendido no tempo (ou seja, sua duração aumenta), sua transformada de Fourier se comprime no domínio da frequência, indicando que o sinal agora contém uma gama mais estreita de frequências. Isso significa que sinais de longa duração tendem a ter uma largura de banda menor, pois eles podem ser representados com menos componentes de alta frequência.

### 4.3.4 Deslocamento no tempo

Para uma função  $x(t)$  com transformada de Fourier  $X(\omega)$ , podemos avaliar:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt \\ \text{fazendo } u = t - t_0 \Rightarrow dt &= du \\ \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)} du \\ \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u} du \\ \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= e^{-j\omega t_0} X(\omega)\end{aligned}\tag{4.8}$$

A função  $x(t - t_0)$  é uma versão deslocada de  $x(t)$  no domínio do tempo. A propriedade de deslocamento mostra que esse deslocamento no tempo resulta em uma modulação da fase no domínio da frequência, onde cada componente de frequência é multiplicado por um fator complexo  $e^{-j\omega t_0}$ . Esse fator representa uma alteração na fase de cada componente de frequência, proporcional à frequência  $\omega$  e ao deslocamento temporal  $t_0$ . Note que o módulo do espectro não é alterado, apenas a fase. O fator  $e^{-j\omega t_0}$  pode ser interpretado como uma rotação no plano complexo, onde a quantidade de rotação depende da frequência  $\omega$  e do deslocamento temporal  $t_0$ . Podemos inferir isso quando levamos em consideração que frequências diferentes precisam de fases diferentes para atingir o mesmo deslocamento temporal, como observamos na Figura 4.7. Isso significa que diferentes componentes de frequência do sinal original são afetados de maneira diferente pelo deslocamento no tempo, resultando em uma mudança na forma geral do sinal no domínio da frequência. Essa distorção é especialmente relevante em sistemas de comunicação e processamento de sinais, onde o tempo de chegada dos sinais pode variar.

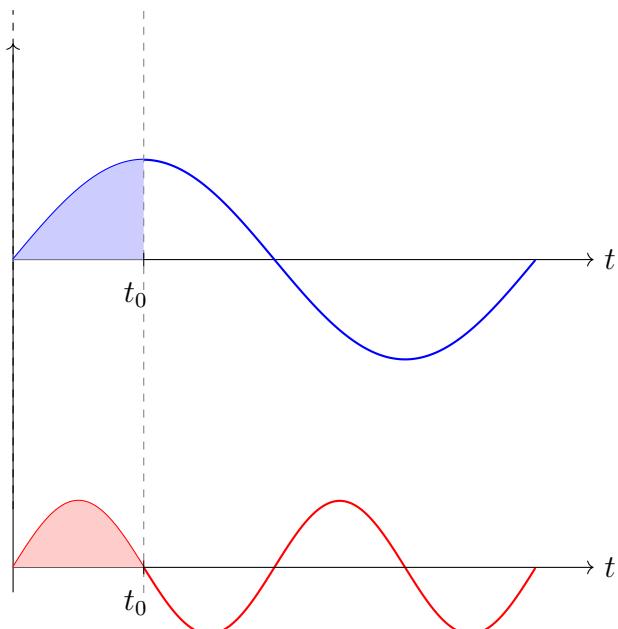


Figura 4.7: Comparaçāo da defasagem temporal entre duas senoides de frequências  $\omega$  e  $2\omega$ . O mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$  corresponde a  $\pi/2$  radianos na senoide azul (frequência  $\omega$ ) e  $\pi$  radianos na senoide vermelha (frequência  $2\omega$ ).

#### 4.3.5 Deslocamento na frequência

Pela dualidade entre tempo e frequência, devemos esperar que um deslocamento no domínio da frequência resulte em um comportamento análogo ao deslocamento no tempo. Verificamos isso quando

observamos que a transformada inversa de Fourier de  $X(\omega - \omega_0)$  resulta em:

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

fazendo  $u = \omega - \omega_0 \Rightarrow d\omega = du$

$$x'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{j(u+\omega_0)t} du$$

$$x'(t) = e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{jut} du$$

$$x'(t) = e^{j\omega_0 t} x(t) \quad (4.9)$$

Portanto, ao multiplicar o sinal original  $x(t)$  por uma exponencial complexa  $e^{j\omega_0 t}$ , estamos deslocando o espectro do sinal em  $\omega_0$  no domínio da frequência. Como  $e^{j\omega_0 t}$  é um sinal complexo, na prática, para sinais reais obtemos esse deslocamento em frequência ao multiplicar o sinal original por um cosseno de frequência  $\omega_0$ , o que resulta em dois deslocamentos simétricos no espectro, um em  $\omega_0$  e outro em  $-\omega_0$ .

$$\begin{aligned} x(t) \cos(\omega_0 t) &= \frac{1}{2} (x(t) e^{j\omega_0 t} + x(t) e^{-j\omega_0 t}) \\ x(t) \cos(\omega_0 t) &\leftrightarrow \frac{1}{2} (X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

## Modulação AM

Esse processo de deslocamento na frequência é a base da modulação em amplitude (AM), onde um sinal de informação (geralmente de baixa frequência) é multiplicado por um sinal senoidal na fixa de frequências para onde desejamos transladar o espectro do sinal. Esse sinal senoidal é chamado de portadora, e o processo de multiplicação é chamado de modulação.

Utilizamos esse processo por alguns motivos. Frequentemente os sinais de informação possuem frequências muito baixas, o que os torna inadequados para transmissão eficiente através de meios físicos, como cabos ou ondas eletromagnéticas. Ao deslocar o espectro do sinal para uma faixa de frequências mais alta, podemos aproveitar melhor as propriedades de propagação dessas ondas no meio desejado. Além disso, frequentemente nos deparamos com a necessidade de compartilhar o mesmo meio de transmissão para múltiplos sinais diferentes. Uma das estratégias mais simples para conseguir isso é alocar cada sinal em uma faixa de frequências diferente, uma vez que sinais senoidais de diferentes frequências não se misturam (devido à ortogonalidade). Desta maneira, ao garantir que cada sinal ocupe uma faixa de frequências diferente, podemos transmitir múltiplos sinais simultaneamente sem interferência entre eles. Esse conceito é a base da multiplexação por divisão de frequência (FDM), amplamente utilizada em sistemas de comunicação modernos.

#### 4.3.6 Convolução

Tomando dois sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  com transformadas de Fourier  $X_1(\omega)$  e  $X_2(\omega)$ , vamos avaliar a transformada de Fourier da convolução dos dois sinais:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t} dt\right) d\tau\end{aligned}$$

A segunda integral, trata-se da transformada de Fourier de  $x_2(t - \tau)$ , que já vimos na equação (4.8), e é dada por  $e^{-j\omega\tau}X_2(\omega)$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}X_2(\omega)d\tau \\ &= X_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= X_2(\omega)X_1(\omega)\end{aligned}$$

Portanto, observamos uma importante propriedade da transformada de Fourier: a transformada de Fourier da convolução de dois sinais no domínio do tempo é igual ao produto das transformadas de Fourier desses sinais no domínio da frequência. No estudo dos sistemas LIT, observamos então, que, dado uma resposta ao impulso  $h(t)$  e a sua correspondente transformada de Fourier  $H(\omega)$ :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (4.10)$$

E como vimos na seção 4.4.1, a função  $H(\omega)$  pode ser obtida diretamente, medindo a resposta do sistema a cada frequência individualmente, sem a necessidade de gerar um impulso físico.

### 4.4 Resposta em frequência de sistemas LTI

Como vimos na seção 2.4, a resposta ao impulso de um sistema LTI carrega toda a informação necessária para descrever o comportamento do sistema a qualquer entrada. Se a resposta ao impulso carrega essa informação, sua transformada de Fourier deve carregar a mesma informação, mas no domínio da frequência. Podemos chegar a essa resposta de duas maneiras diferentes, evitando ter de determinar a resposta ao impulso no tempo e posteriormente calcular sua transformada de Fourier.

#### 4.4.1 Autofunções de sistemas LTI

Vamos retomar brevemente a análise de sistemas LTI no domínio do tempo. Se um sistema LTI é excitado por uma senoide complexa<sup>2</sup>  $e^{j\omega_0 t}$ , a saída do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ y(t) &= h(t) * e^{j\omega_0 t} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ y(t) &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ y(t) &= e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) \end{aligned}$$

Então, para a entrada exponencial, a saída é a própria exponencial modulada por um valor complexo  $H(\omega)$ , avaliado em  $\omega = \omega_0$ . Esse comportamento nos leva a chamar a função exponencial de *autofunção* do sistema e o valor complexo  $H(\omega_0)$  de *autovalor* do sistema. Como vimos, a exponencial complexa é uma senóide de frequência  $\omega_0$ , então o autovalor  $H(\omega_0)$  se trata da resposta do sistema a essa frequência específica. Assim, se conhecemos o autovalor do sistema para todas as frequências, ou seja, se conhecemos  $H(\omega)$  para todo  $\omega$ , podemos prever a saída do sistema para qualquer entrada, desde que essa entrada possa ser decomposta em termos de suas frequências constituintes. Mais do que isso, a integral:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

é exatamente a definição da transformada de Fourier da resposta ao impulso do sistema. Portanto, a função que define os autovalores para cada frequência é a transformada de Fourier da resposta ao impulso do sistema. Essa função é chamada de *função de transferência* do sistema, e assim como a resposta ao impulso define o sistema no domínio do tempo, a função de transferência define o sistema no domínio da frequência.

#### Resposta ao impulso (na frequência)

Nós vimos na seção 2.4 que a resposta ao impulso de um sistema é uma ferramenta poderosa para analisar sistemas lineares e invariantes no tempo. A resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema é a saída do sistema quando a entrada é um impulso unitário  $\delta(t)$  e carrega toda a informação necessária para descrever o comportamento do sistema a qualquer entrada. Nós também vimos que o impulso é um sinal teórico, difícil de ser replicado na prática.

No entanto, a transformada de Fourier do impulso é uma constante, o que significa que o impulso contém todas as frequências com a mesma amplitude. Isso nos permite analisar a resposta em frequência do sistema diretamente, sem a necessidade de gerar um impulso físico. Ao medir a resposta do sistema a cada uma das frequências individualmente, podemos construir a resposta em frequência do sistema, que é a transformada de Fourier da resposta ao impulso. A partir dela podemos calcular qual a resposta ao impulso do sistema sem precisar gerar um impulso físico, utilizando a transformada inversa de Fourier. Mais do que isso, essa resposta em frequência, por conter a mesma informação que a resposta ao impulso, pode ser usada para prever a saída do sistema para qualquer entrada, quando decomposta em termos de suas frequências constituintes.

<sup>2</sup>Na verdade, essa observação vale para qualquer exponencial da forma  $e^{st}$   $s \in \mathbb{C}$ . Vamos explorar as exponenciais puramente imaginárias para demonstrar a relação com Fourier.

#### 4.4.2 Diagrama de resposta em frequência

A partir da função de transferência  $H(\omega)$ , podemos construir o diagrama de resposta em frequência do sistema, que é uma representação gráfica da função de transferência. Esse diagrama é composto por dois gráficos: um para o módulo  $|H(\omega)|$  e outro para a fase  $\angle H(\omega)$ . O gráfico do módulo mostra como a amplitude do sinal de saída varia em relação à amplitude do sinal de entrada para cada frequência, enquanto o gráfico da fase mostra como a fase do sinal de saída varia em relação à fase do sinal de entrada para cada frequência. Esses gráficos são essenciais para entender como o sistema afeta diferentes componentes de frequência do sinal de entrada. Eles nos permitem identificar características importantes do sistema, como faixas de frequências onde o sistema amplifica ou atenua o sinal, e como o sistema altera a fase do sinal em diferentes frequências.

**Exemplo:** Considere um sistema LTI com a seguinte resposta ao impulso:

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

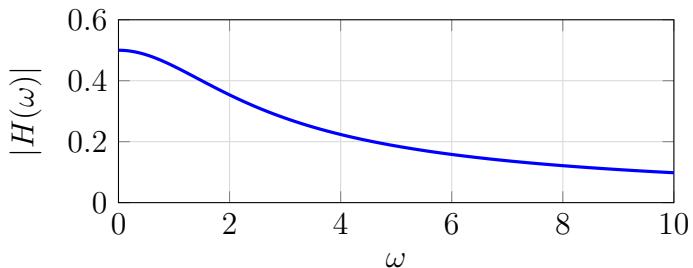
A transformada de Fourier dessa resposta ao impulso é dada por:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \\ H(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt \\ H(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt \\ H(\omega) &= \left[ \frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)} \right]_0^{\infty} \\ H(\omega) &= \frac{1}{2+j\omega} \end{aligned}$$

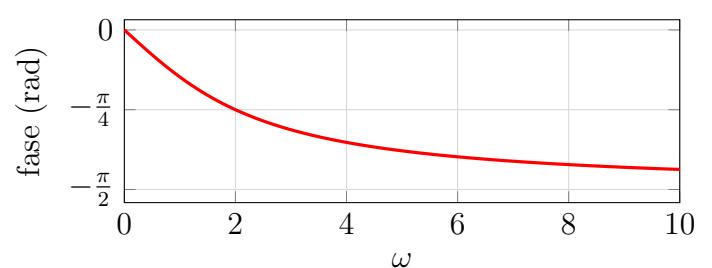
O módulo e a fase dessa função de transferência são dados por:

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \\ \angle H(\omega) &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

O diagrama de resposta em frequência do sistema é mostrado na Figura 4.8.



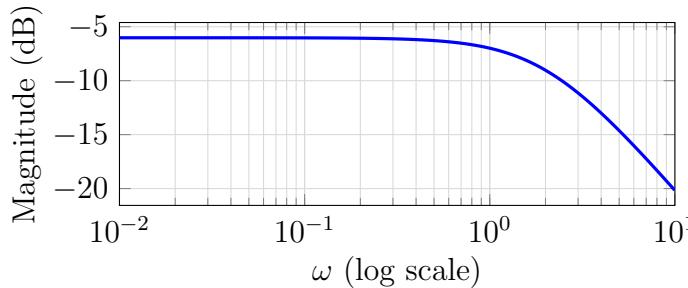
(a) Módulo  $|H(\omega)|$



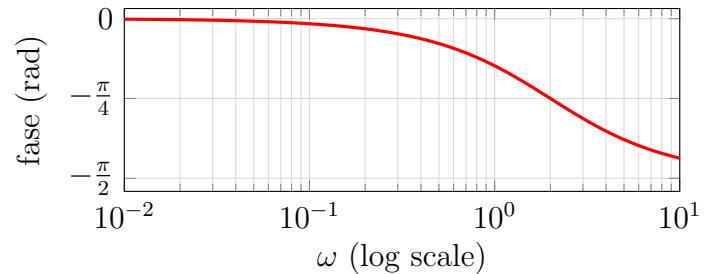
(b) Fase  $\angle H(\omega)$

Figura 4.8: Diagrama de resposta em frequência do sistema cuja resposta ao impulso é  $e^{-2t}u(t)$ .

Usualmente, o diagrama de resposta em frequência é apresentado em uma escala logarítmica para o eixo das frequências, o que facilita a visualização de uma ampla faixa de frequências. Além disso, o módulo é frequentemente expresso em decibéis (dB), que é uma escala logarítmica que representa a razão entre duas potências.



(a) Módulo em dB



(b) Fase  $\angle H(\omega)$

Figura 4.9: Resposta em frequência do sistema em escala logarítmica (módulo em dB).

# Capítulo 5

## Filtragem de sinais

### 5.1 Introdução

Filtros são sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) artificiais, projetados para permitir a modificação de certas características de um sinal, ressaltando ou atenuando componentes específicas de sua faixa de frequência. A filtragem é um conceito de projeto fundamental na eletrônica e em sistemas de comunicação, tendo como principal objetivo suprimir sinais interferentes e garantir que o sinal desejado possa ser detectado. A base para entender o funcionamento dos filtros reside na análise de sua Resposta em Frequência, que descreve como o filtro afeta diferentes componentes de frequência do sinal de entrada, como vimos na seção 4.4. Essa resposta em frequência normalmente é representada por uma função complexa  $H(\omega)$ , que pode ser decomposta em sua magnitude  $|H(\omega)|$  e fase  $\angle H(\omega)$ , permitindo uma análise detalhada do comportamento do filtro em diferentes faixas de frequência.

#### 5.1.1 Distorção e atraso de grupo

A distorção é um efeito causado em sinais quando após a filtragem, diferentes componentes de frequência do sinal sofrem alterações distintas em sua amplitude e fase. Isso pode resultar em mudanças indesejadas na forma do sinal original, afetando sua integridade e qualidade. A distorção pode ser classificada em dois tipos principais: distorção de amplitude e distorção de fase. Definindo a resposta em frequência do filtro como  $H(\omega)$ , o sinal de saída  $Y(\omega)$  em função do sinal de entrada  $X(\omega)$  é dado por:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\ |Y(\omega)|e^{j\theta_Y} &= |H(\omega)|e^{j\theta_H}|X(\omega)|e^{j\theta_X} \\ |Y(\omega)|e^{j\theta_Y} &= |H(\omega)||X(\omega)|e^{j(\theta_H+\theta_X)} \end{aligned}$$

Portanto, a magnitude e a fase do sinal de saída são dadas por:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| \quad (5.1)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \quad (5.2)$$

#### Distorção de amplitude

A distorção de amplitude ocorre quando a magnitude da resposta em frequência do filtro varia para diferentes componentes de frequência do sinal. Isso significa que algumas frequências são amplificadas enquanto outras são atenuadas, resultando em uma alteração na forma de onda do sinal filtrado em

relação ao sinal original. Essa distorção pode ser indesejável, especialmente em aplicações de áudio e comunicação, onde a fidelidade do sinal é crucial. Para garantir que não haja distorção de amplitude em uma determinada faixa de frequências, o módulo de  $H(\omega)$  deve ser constante nessa faixa, ou seja:

$$|H(\omega)| = K, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (5.3)$$

onde  $K$  é uma constante real positiva. Isso assegura que todas as componentes de frequência dentro do intervalo especificado sejam tratadas igualmente em termos de amplitude, preservando a forma do sinal original nessa faixa.

### Distorção de fase

Nós vimos na seção de reconstrução do sinal que a fase de cada componente de frequência é crucial para a forma do sinal no domínio do tempo. A distorção de fase ocorre quando o tempo de atraso para cada componente introduzido pelo filtro varia com a frequência. Isso pode levar a uma alteração na forma do sinal, mesmo que a magnitude da resposta em frequência seja constante. Para que não haja distorção de fase, o sinal de saída do filtro deve ser da forma:

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (5.4)$$

onde  $K$  é uma constante real positiva e  $t_0$  é um atraso fixo. Na frequência, temos que:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= KX(\omega)e^{-j\omega t_0} \\ |Y(\omega)|e^{j\theta_Y} &= K|X(\omega)|e^{j(\theta_X - \omega t_0)} \\ |Y(\omega)|e^{j\theta_Y} &= Ke^{j(-\omega t_0)}|X(\omega)|e^{j\theta_X} \end{aligned}$$

Portanto, a fase de  $H(\omega)$  deve ser da forma:

$$\angle H(\omega) = -\omega t_0 \quad (5.5)$$

Onde o sinal de saída é uma versão atrasada do sinal de entrada, sem distorção de fase.

### Atraso de grupo

A distorção de fase pode ser analisada em termos do atraso de grupo, que é uma medida de como o tempo de atraso varia com a frequência. O atraso de grupo  $\tau_g(\omega)$  é definido como:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega} \quad (5.6)$$

Se o atraso de grupo for constante em uma determinada faixa de frequências, isso indica que todas as componentes de frequência nessa faixa sofrem o mesmo atraso, evitando distorção de fase. Portanto, para evitar distorção de fase, o atraso de grupo deve ser constante:

$$\tau_g(\omega) = t_0, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (5.7)$$

onde  $t_0$  é uma constante real positiva. Isso assegura que o filtro introduza um atraso uniforme para todas as componentes de frequência dentro do intervalo especificado, preservando a forma do sinal original nessa faixa.

## 5.2 Filtros ideais

Filtros ideais são sistemas teóricos que possuem uma resposta em frequência perfeita, não causando nenhuma distorção de amplitude ou fase dentro da faixa de frequências de interesse. Eles são caracterizados por uma resposta em frequência que é constante (sem variação) dentro de uma faixa específica e zero fora dessa faixa. Existem quatro tipos principais de filtros ideais: passa-baixa, passa-alta, passa-banda e rejeita-banda. Todos os filtros podem ser construídos como combinações lineares dos outros tipos, então, vamos discutir apenas os filtros passa-baixa.

A resposta dos filtros é dividida em duas regiões principais: a banda de passagem, onde o filtro permite a passagem do sinal com mínima atenuação, e a banda de rejeição, onde o filtro atenua significativamente o sinal. Em filtros ideias, a transição entre essas duas regiões é instantânea. A figura 5.1 ilustra a resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal, destacando as regiões de banda de passagem e banda de rejeição.

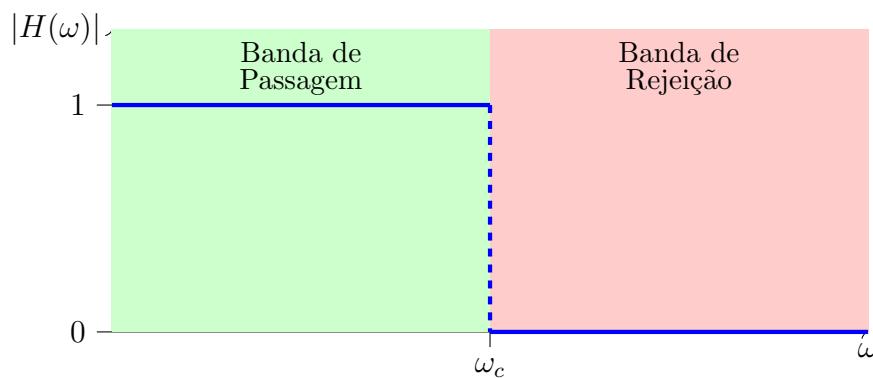


Figura 5.1: Resposta em frequência de um filtro passa-baixas ideal, mostrando as regiões de banda de passagem e banda de rejeição.

O filtro passa-baixas ideal é definido pela seguinte resposta em frequência:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.8)$$

onde  $\omega_c$  é a frequência de corte do filtro. Dentro da banda de passagem ( $|\omega| \leq \omega_c$ ), o filtro permite a passagem do sinal sem atenuação, enquanto na banda de rejeição ( $|\omega| > \omega_c$ ), o filtro atenua completamente o sinal. A resposta de fase desse filtro é perfeitamente linear, resultando em um atraso de grupo constante, o que significa que não há distorção de fase.

A resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal pode ser obtida através da Transformada Inversa

de Fourier da sua resposta em frequência:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{jt} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2j \sin(\omega_c t)}{jt} \right) \\
 &= \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}
 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal é dada por:

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \quad (5.9)$$

Essa implementação do filtro ideal apresenta algumas limitações práticas. A resposta ao impulso  $h(t)$  se estende infinitamente no tempo, o que significa que o filtro ideal não é causal e não pode ser implementado em sistemas reais. Podemos aproximar o filtro ideal utilizando filtros reais que tem uma resposta similar, mas com transições mais suaves entre a banda de passagem e a banda de rejeição. Essa região de transição é caracterizada pela largura de banda de transição, que define a faixa de frequências onde a resposta do filtro muda de 1 para 0. A figura 5.2 ilustra a resposta em frequência de um filtro passa-baixas real, destacando a banda de passagem, a banda de rejeição e a largura de banda de transição.

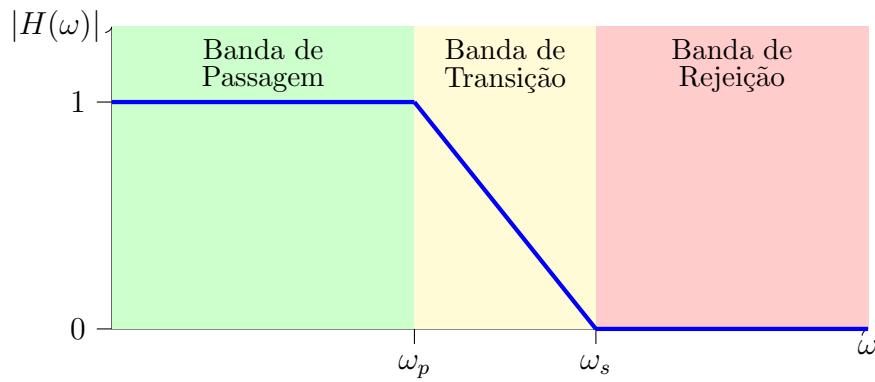


Figura 5.2: Resposta em frequência de um filtro passa-baixas real com banda de transição entre  $\omega_p$  e  $\omega_s$ .

A razão entre a frequência de passagem  $\omega_p$  e a frequência de rejeição  $\omega_s$  é chamada de fator de qualidade do filtro, e avalia a seletividade do filtro. Filtros com um fator de qualidade mais alto possuem uma transição mais abrupta entre a banda de passagem e a banda de rejeição, o que é desejável em muitas aplicações, porém com o custo de uma maior complexidade de implementação. Filtros com transição mais abrupta também tendem a introduzir mais distorção de fase, o que pode ser um fator limitante em aplicações sensíveis à integridade do sinal.

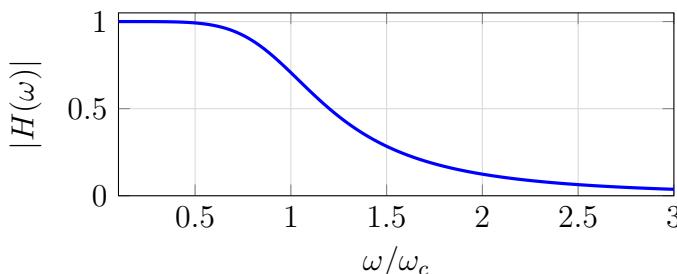
## 5.3 Filtros reais

### 5.3.1 Filtro Butterworth

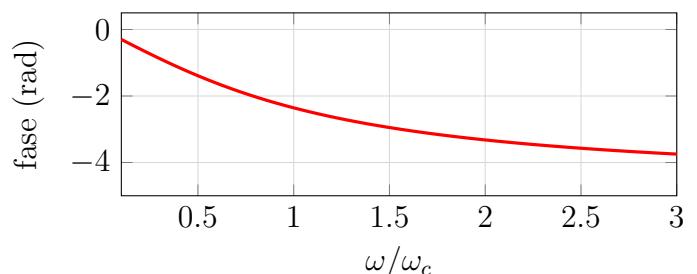
Para implementar filtros reais que se aproximem do comportamento dos filtros ideais, diversas técnicas de projeto de filtros foram desenvolvidas. Uma das abordagens mais comuns é o uso de filtros Butterworth, que são projetados para ter uma resposta em frequência o mais plana possível na banda de passagem, minimizando a distorção de amplitude. A resposta em frequência de um filtro Butterworth é dada por:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (5.10)$$

Onde  $\omega_c$  é a frequência de corte do filtro,  $\epsilon$  é um parâmetro que determina a suavidade da transição e  $n$  é a ordem do filtro. À medida que a ordem do filtro aumenta, a transição entre a banda de passagem e a banda de rejeição torna-se mais abrupta, aproximando-se do comportamento de um filtro ideal. A resposta de fase de um filtro Butterworth não é linear, o que pode introduzir distorção de fase, mas o atraso de grupo tende a ser mais constante na banda de passagem para ordens mais altas. A Figura 5.3 mostra a resposta em módulo e fase de um filtro Butterworth de ordem  $n = 3$ . Observamos essa não linearidade da fase, que pode ser um fator limitante em aplicações sensíveis à distorção de fase.



(a) Butterworth  $n = 3$  – módulo



(b) Butterworth  $n = 3$  – fase

Figura 5.3: Butterworth de ordem  $n = 3$ : módulo (esquerda) e fase (direita), normalizados ( $\omega_c = 1$ ).

Podemos melhorar o fator de qualidade do filtro se a inclinação da resposta em frequência na região de transição for mais acentuada. Isso pode ser alcançado aumentando a ordem do filtro. A Figura 5.4 compara a resposta em magnitude (em dB) de filtros Butterworth normalizados ( $\omega_c = 1$ ) para diferentes ordens ( $n = 1, 3, 6, 9$ ). Observamos que à medida que a ordem do filtro aumenta, a transição entre a banda de passagem e a banda de rejeição torna-se mais abrupta, aproximando-se do comportamento ideal. No entanto, é importante notar que aumentar a ordem do filtro também pode aumentar a complexidade do projeto e a sensibilidade a variações nos componentes do circuito.

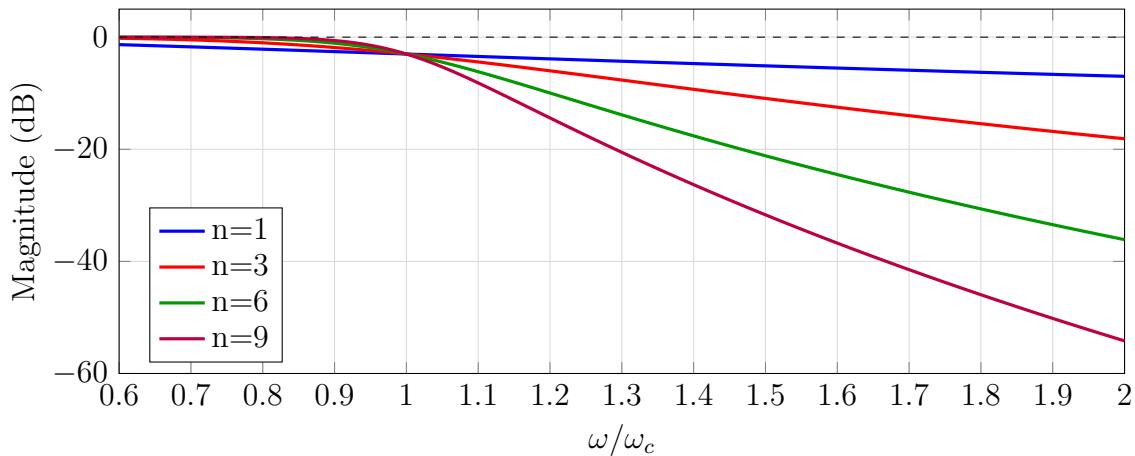


Figura 5.4: Comparação da resposta em magnitude (dB) de filtros Butterworth normalizados ( $\omega_c = 1$ ) para ordens  $n = 1, 3, 6, 9$ .

O filtro Butterworth é uma implementação simples e largamente utilizada para a construção de dispositivos de filtragem. Como a sua função de transferência é uma função racional, ele pode ser implementado utilizando componentes eletrônicos passivos (resistores, capacitores e indutores) ou ativos (amplificadores operacionais). A escolha da ordem do filtro e da frequência de corte depende dos requisitos específicos da aplicação, incluindo a faixa de frequências que precisam ser preservadas e a quantidade de atenuação necessária na banda de rejeição.

### Construção de outros tipos de filtros

A partir dos filtros passa-baixas ideais, podemos construir outros tipos de filtros, como passa-altas, passa-banda e rejeita-banda, utilizando transformações de frequência apropriadas. Essas transformações permitem que a resposta em frequência do filtro seja ajustada para atender aos requisitos específicos de diferentes aplicações. Por exemplo, um filtro passa-alta pode ser obtido invertendo a resposta em frequência de um filtro passa-baixas. Para construir uma filtro passa-altas de frequência de corte  $\omega_c$ , podemos utilizar a seguinte transformação:

$$H_{PA}(\omega) = 1 - H_{PB}(\omega) \quad (5.11)$$

onde  $H_{PB}(\omega)$  é a resposta em frequência do filtro passa-baixas com a mesma frequência de corte. Os filtros passa-faixa e rejeita-faixa podem ser construídos combinando filtros passa-baixas e passa-altas. Um filtro passa-faixa pode ser obtido conectando em série um filtro passa-baixas com frequência de corte  $\omega_{c1}$  e um filtro passa-altas com frequência de corte  $\omega_{c2}$ , onde  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ . A resposta em frequência do filtro passa-faixa é dada por:

$$H_{PF}(\omega) = H_{PB}(\omega, \omega_{c2}) \cdot H_{PA}(\omega, \omega_{c1}) \quad (5.12)$$

onde  $H_{PB}(\omega, \omega_{c2})$  é a resposta em frequência do filtro passa-baixas com frequência de corte  $\omega_{c2}$  e  $H_{PA}(\omega, \omega_{c1})$  é a resposta em frequência do filtro passa-altas com frequência de corte  $\omega_{c1}$ . Um filtro rejeita-faixa pode ser obtido conectando em paralelo um filtro passa-baixas com frequência de corte  $\omega_{c1}$  e um filtro passa-altas com frequência de corte  $\omega_{c2}$ , onde  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ . A resposta em frequência do filtro rejeita-faixa é dada por:

$$H_{RF}(\omega) = H_{PB}(\omega, \omega_{c1}) + H_{PA}(\omega, \omega_{c2}) \quad (5.13)$$

onde  $H_{PB}(\omega, \omega_{c1})$  é a resposta em frequência do filtro passa-baixas com frequência de corte  $\omega_{c1}$  e  $H_{PA}(\omega, \omega_{c2})$  é a resposta em frequência do filtro passa-altas com frequência de corte  $\omega_{c2}$ .

## 5.4 Outros tipos de filtros

Além do filtro Butterworth, existem outros tipos de filtros que são amplamente utilizados em diversas aplicações. Cada tipo de filtro possui características específicas em termos de resposta em frequência, distorção de fase e complexidade de implementação. A seguir, discutiremos brevemente algumas outras implementações de filtros.

### 5.4.1 Filtro Chebyshev

O filtro Chebyshev é projetado para ter uma resposta em frequência com ondulações na banda de passagem, o que permite uma transição mais rápida entre a banda de passagem e a banda de rejeição em comparação com o filtro Butterworth. Existem dois tipos principais de filtros Chebyshev: Tipo I, que possui ondulações na banda de passagem, e Tipo II, que possui ondulações na banda de rejeição. A resposta em frequência do filtro Chebyshev Tipo I é dada por:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)}} \quad (5.14)$$

onde  $\epsilon$  é a magnitude da ondulação na banda de passagem e  $T_n \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$  é o polinômio de Chebyshev de ordem  $n$ . A principal vantagem do filtro Chebyshev é a sua capacidade de fornecer uma transição mais acentuada entre a banda de passagem e a banda de rejeição, o que é útil em aplicações onde a seletividade é crucial. No entanto, a presença de ondulações na banda de passagem pode introduzir distorção de amplitude, o que pode ser indesejável em algumas aplicações.

Chebyshev Tipo I, ordem  $n = 6$ ,  $\epsilon = 0.5$

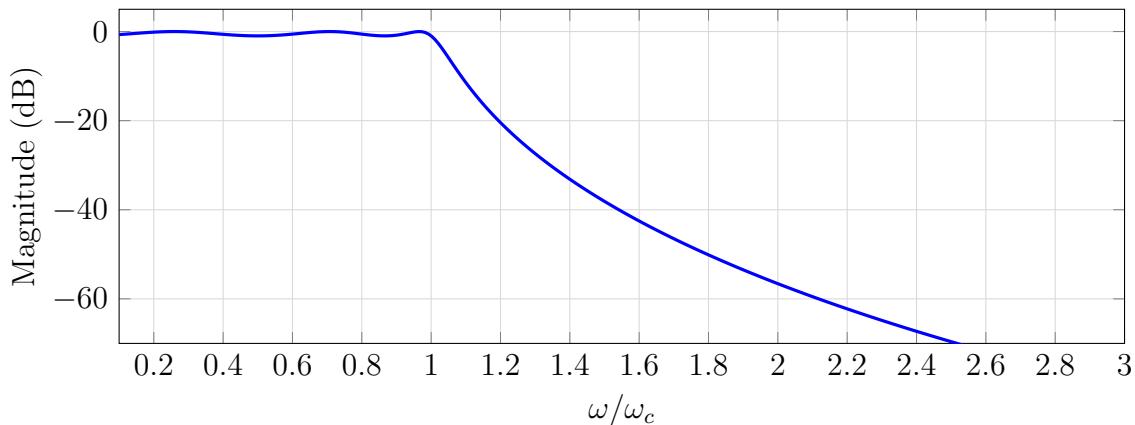


Figura 5.5: Resposta em magnitude (dB) de um filtro Chebyshev Tipo I de ordem 6, com  $\epsilon = 0.5$  (normalizado,  $\omega_c = 1$ ).

### 5.4.2 Filtros adaptativos

Filtros adaptativos são sistemas de filtragem que ajustam seus parâmetros em tempo real com base nas características do sinal de entrada. Eles são particularmente úteis em ambientes dinâmicos onde as propriedades do sinal ou do ruído podem variar ao longo do tempo. Filtros adaptativos utilizam algoritmos de adaptação, como o algoritmo LMS (Least Mean Squares) ou o algoritmo RLS (Recursive

Least Squares), para minimizar um critério de erro, geralmente a diferença entre o sinal desejado e o sinal filtrado. Esses filtros são amplamente utilizados em aplicações como cancelamento de ruído, equalização de canais e processamento de sinais biomédicos. A principal vantagem dos filtros adaptativos é sua capacidade de se ajustar automaticamente às mudanças no ambiente, proporcionando uma performance superior em comparação com filtros fixos em situações onde as condições do sinal são variáveis. Um exemplo clássico de aplicação de filtros adaptativos é o cancelamento de ruído em sistemas de comunicação, onde o filtro pode aprender a atenuar o ruído indesejado enquanto preserva o sinal útil. Outro exemplo é a equalização de canais em sistemas de transmissão digital, onde o filtro adaptativo pode compensar as distorções introduzidas pelo canal de comunicação, melhorando a qualidade do sinal recebido.

### 5.4.3 Estimadores lineares

Estimadores lineares são técnicas utilizadas para estimar um sinal desejado a partir de um conjunto de observações ruidosas, assumindo que a relação entre o sinal e as observações pode ser modelada como uma combinação linear. Esses estimadores são amplamente aplicados em diversas áreas, incluindo processamento de sinais, estatística e aprendizado de máquina. O objetivo principal dos estimadores lineares é minimizar o erro quadrático médio (MSE) entre o sinal estimado e o sinal verdadeiro. Um exemplo clássico de estimador linear é o filtro de Wiener, que é projetado para fornecer a melhor estimativa linear do sinal desejado em presença de ruído aditivo. O filtro de Wiener utiliza informações sobre as estatísticas do sinal e do ruído para calcular os coeficientes do filtro que minimizam o MSE. Outro exemplo é o método dos mínimos quadrados, que ajusta os coeficientes de um modelo linear para minimizar a soma dos quadrados dos resíduos entre as observações e as previsões do modelo. Estimadores lineares são valorizados por sua simplicidade e eficiência computacional, embora possam não ser adequados para todos os tipos de sinais ou distribuições de ruído, especialmente quando as relações entre variáveis são não lineares.

**Exemplo:** Projete um filtro Butterworth passa-baixas que atenda às seguintes especificações:

- $f_p = 10\text{kHz}$
- $f_s = 15\text{kHz}$
- Atenuação na banda de passagem: 1dB
- Atenuação na banda de rejeição: 25dB

A partir da atenuação na banda de passagem, podemos determinar o valor de  $\epsilon$ :

$$A_p = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \implies \epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} \approx 0.5088$$

A partir da atenuação na banda de rejeição, podemos determinar a ordem mínima do filtro:

$$A_s = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2 (\omega_s/\omega_p)^{2n}) \implies n \geq \frac{\log_{10}((10^{A_s/10} - 1)/\epsilon^2)}{2 \log_{10}(\omega_s/\omega_p)}$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log_{10}((10^{25/10} - 1)/0.5088^2)}{2 \log_{10}(15kHz/10kHz)} \\ n &\geq \frac{\log_{10}(316.2278/0.2589)}{2 \log_{10}(1.5)} \\ n &\geq \frac{\log_{10}(1221.4)}{2 \log_{10}(1.5)} \\ n &\geq \frac{3.086}{2 \times 0.1761} \\ n &\geq 8.76 \end{aligned}$$

Portanto, a ordem mínima do filtro é  $n = 9$  (arredondando para o próximo inteiro). A frequência de corte  $\omega_c$  pode ser determinada a partir da frequência de passagem:

$$\omega_c = 2\pi f_p = 2\pi \times 10kHz \approx 62831.85 rad/s$$

A função de transferência do filtro Butterworth passa-baixas de ordem 9 é dada por:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{18}}}$$

A resposta em frequência do filtro pode ser plotada para verificar se atende às especificações de atenuação na banda de passagem e rejeição. A implementação prática do filtro pode ser realizada utilizando componentes eletrônicos passivos ou ativos, dependendo dos requisitos de desempenho e complexidade do circuito.

Resposta em magnitude (dB) do Butterworth projetado, ordem  $n = 9$

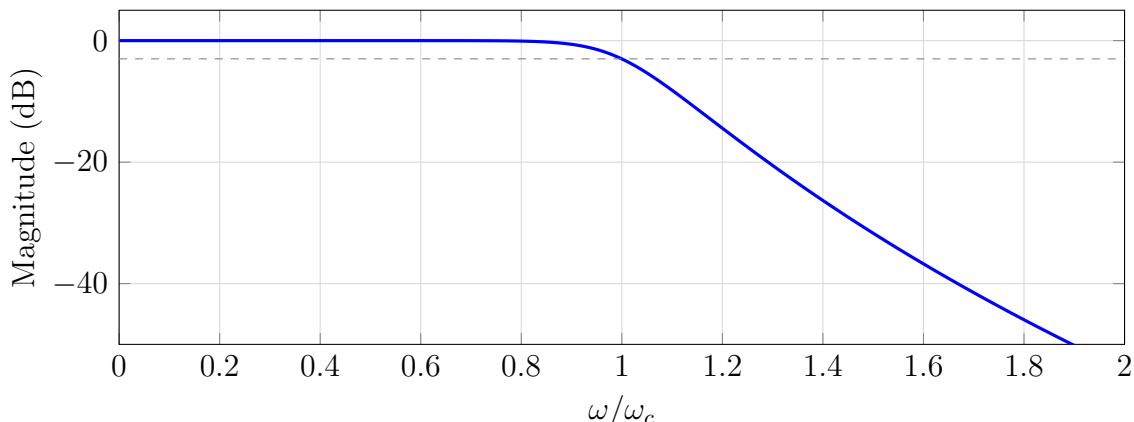


Figura 5.6: Módulo da resposta em frequência do filtro Butterworth passa-baixas projetado (ordem  $n = 9$ , normalizado).

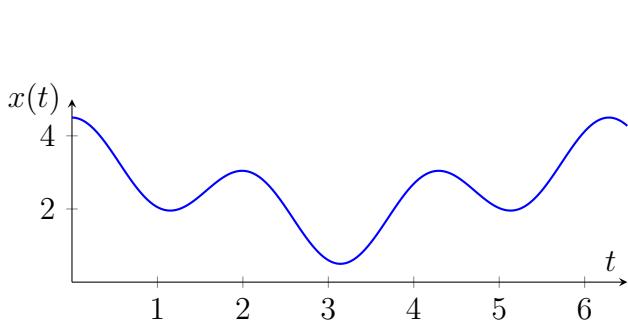
# Capítulo 6

## Amostragem de sinais contínuos

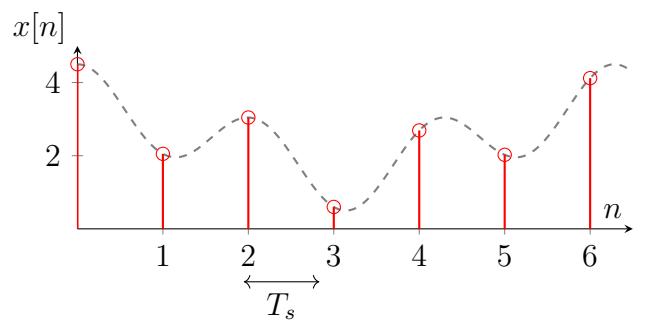
Até agora vimos ferramentas para analisar e extrair informações de sinais contínuos no tempo. No entanto, a implementação dessas ferramentas de forma contínua não é simples, limitando a aplicação a sistemas simples. Sistemas de processamento mais complexos podem ser implementados em computadores, mas isso exige que o sinal sob análise seja representado de forma discreta. A conversão de um sinal contínuo em um sinal discreto é feita por meio de um processo chamado *amostragem*. Neste capítulo, discutiremos os princípios da amostragem, incluindo o Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon, que estabelece as condições para a reconstrução perfeita de um sinal contínuo a partir de suas amostras discretas. Também exploraremos técnicas práticas de amostragem e os desafios associados, como o aliasing e a necessidade de filtros anti-aliasing.

### 6.1 Teorema da amostragem

Vamos imaginar um sinal contínuo no tempo  $x(t)$ , que deve ser transformado em um sinal discreto no tempo  $x[n]$ . A forma mais simples de fazer isso é amostrando o sinal original em intervalos regulares de tempo, ou seja, coletando o valor do sinal a cada  $T_s$  segundos.



(a) Sinal contínuo



(b) Sinal amostrado em intervalos  $T_s$

Figura 6.1: Processo de amostragem: sinal contínuo e suas amostras.

Na Figura 6.1, ilustramos esse processo. A Figura 6.1a mostra um sinal contínuo  $x(t)$  e a Figura 6.1b mostra as amostras coletadas em intervalos regulares de tempo  $T_s$ . Esse sinal amostrado pode ser representado como o produto de  $x(t)$  por uma função impulso periódica, também chamada de trem de impulsos, que consiste em impulsos de Dirac espaçados por  $T_s$  segundos. O sinal amostrado, então é constituído por impulsos ponderados pelos valores do sinal original nos instantes de amostragem. O

$n$ -ésimo valor amostrado pode ser representado como:

$$x[n] = x(nT_s) \quad (6.1)$$

e o sinal amostrado pode ser expresso como:

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s} = \sum_n x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (6.2)$$

O trem de impulsos  $\delta_{T_s}$  é uma função periódica, com período  $T_s$ , e portanto, pode ser decomposto como a série de Fourier abaixo:

$$\delta_{T_s} = \frac{1}{T} \left[ 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{T_s}t\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi}{T_s}t\right) + \dots \right] \quad (6.3)$$

Portanto, o sinal amostrado pode ser escrito como:

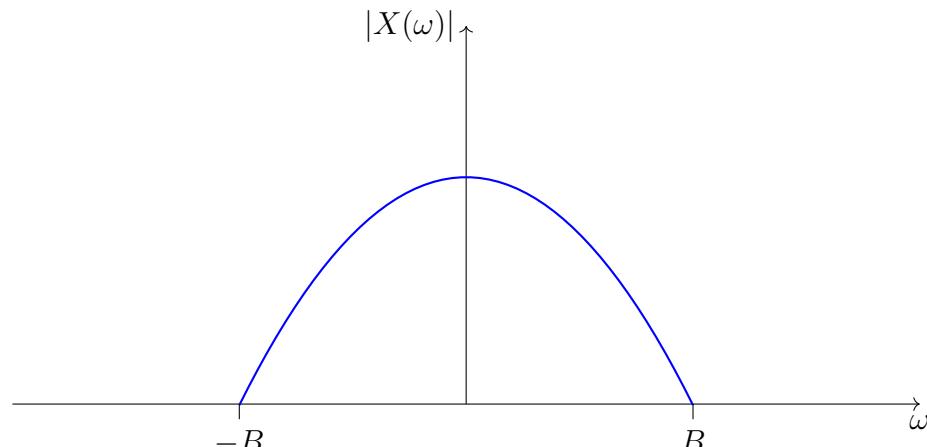
$$x_s(t) = \frac{1}{T_s} \left[ x(t) + 2x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right) + 2x(t) \cos\left(\frac{4\pi}{T_s}t\right) + 2x(t) \cos\left(\frac{6\pi}{T_s}t\right) + \dots \right] \quad (6.4)$$

Lembrando a propriedade da transformada de Fourier, temos que a transformada de Fourier do sinal amostrado é dada pela soma das transformadas de cada parcela da soma da equação 6.4. Cada uma dessas parcelas é o produto do sinal original  $x(t)$  por um cosseno, e sabemos que o produto no domínio do tempo corresponde a uma convolução no domínio da frequência. A transformada de Fourier do cosseno é dada por dois impulsos de Dirac, localizados nas frequências  $\pm\omega_s$ , onde  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$  é a frequência de amostragem em rad/s. Essa mesma conclusão pode ser obtida se olharmos o produto  $x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right)$  como a modulação do sinal  $x(t)$  por uma portadora cossenoidal de frequência  $\omega_s$ .

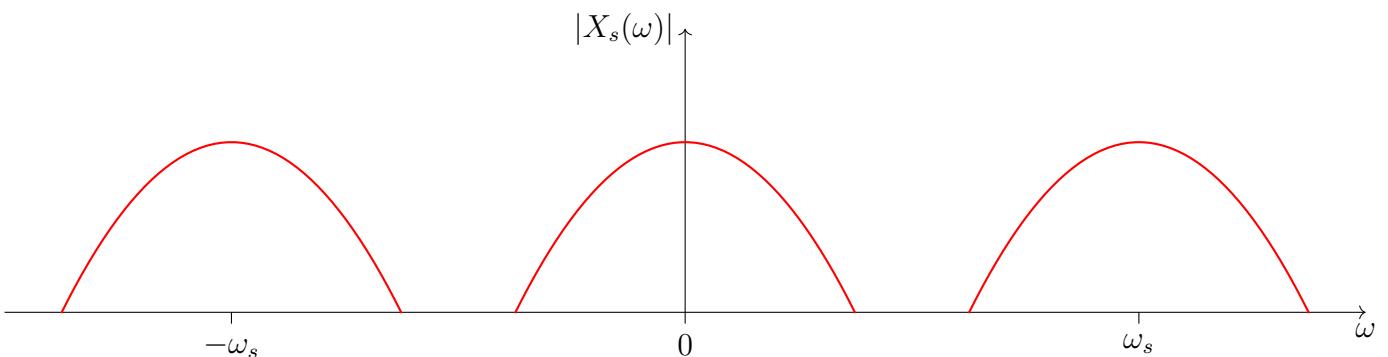
Portanto, usando a propriedade de modulação no domínio da frequência, a transformada de Fourier do sinal amostrado é dada por:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} [X(j\omega) + X(j(\omega - \omega_s)) + X(j(\omega + \omega_s)) + X(j(\omega - 2\omega_s)) + X(j(\omega + 2\omega_s)) + \dots] ?? \quad (6.5)$$

A Figura 6.2 ilustra o efeito da amostragem no domínio da frequência. A Figura 6.2a mostra o espectro do sinal contínuo original  $X(\omega)$ , que é limitado em banda, ou seja, possui componentes de frequência apenas até uma frequência máxima  $B$ . A Figura 6.2b mostra o espectro do sinal amostrado  $X_s(\omega)$ , que consiste no espectro original e suas réplicas periódicas, espaçadas pela frequência de amostragem  $\omega_s$ .



(a) Espectro do sinal contínuo  $X(\omega)$



(b) Espectro do sinal amostrado  $X_s(\omega)$

Figura 6.2: Efeito da amostragem no domínio da frequência: espectro original e suas réplicas periódicas.

Mas a principal implicação do processo de amostragem é a possibilidade de recuperar o sinal contínuo original a partir de suas amostras. Pela representação na freqüência, observamos um resultado contraintuitivo. Quando fazemos o processo de amostragem, apesar de estarmos coletando apenas uma fração dos valores do sinal original, não estamos perdendo informações, na realidade estamos adicionando. A implicação da amostragem é adicionar ao espectro original de  $x(t)$  suas réplicas periódicas espaçadas por  $\omega_s$ . Para recuperar o sinal contínuo, basta retirar essas informações adicionais, por exemplo, utilizando um filtro passa baixas que preserve apenas a banda original do sinal. A figura 6.3 ilustra esse processo, onde o retângulo tracejado representa a resposta em frequência do filtro passa-baixas utilizado para recuperar o sinal original.

Percebemos também que para recuperar o sinal original, precisamos garantir que as réplicas do espectro não se sobreponham. Para isso, precisamos que a distância entre o fim do espectro original e o início da primeira réplica seja o suficiente. Pela equação do espectro do sinal amostrado, vemos que a primeira réplica começa em  $\omega = \omega_s - B$  e a última componente do espectro original termina em  $\omega = B$ . Como  $B$  é um valor fixo, característico do sinal amostrado, a única forma de garantir que não haja sobreposição é que a frequência onde o espectro será replicado seja suficientemente alta:

$$\omega_s - B \geq B \implies \omega_s \geq 2B \quad (6.6)$$

Portanto, para garantir a recuperação perfeita do sinal contínuo original a partir de suas amostras, a

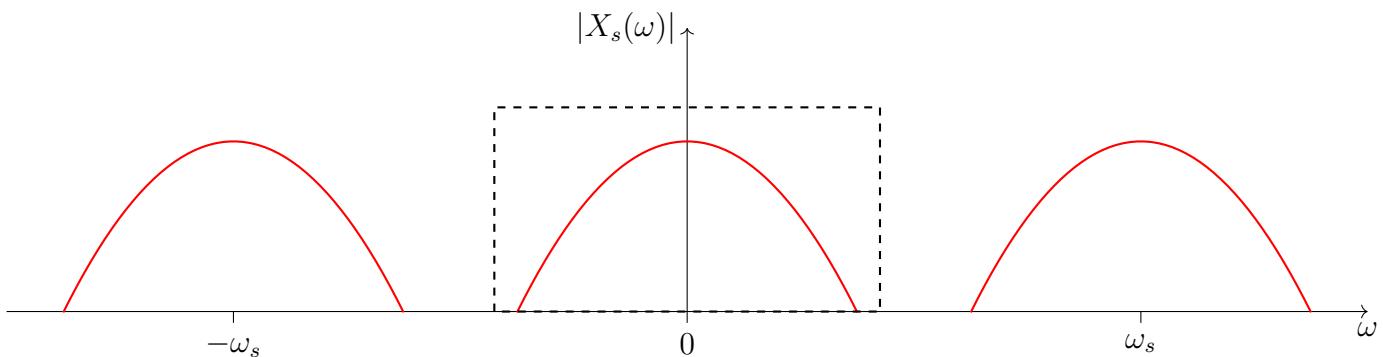


Figura 6.3: Espectro do sinal amostrado com filtro passa-baixas (retângulo tracejado) para recuperação do sinal original.

frequência de amostragem deve ser pelo menos o dobro da maior frequência presente no sinal original. Essa condição é conhecida como o Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon.

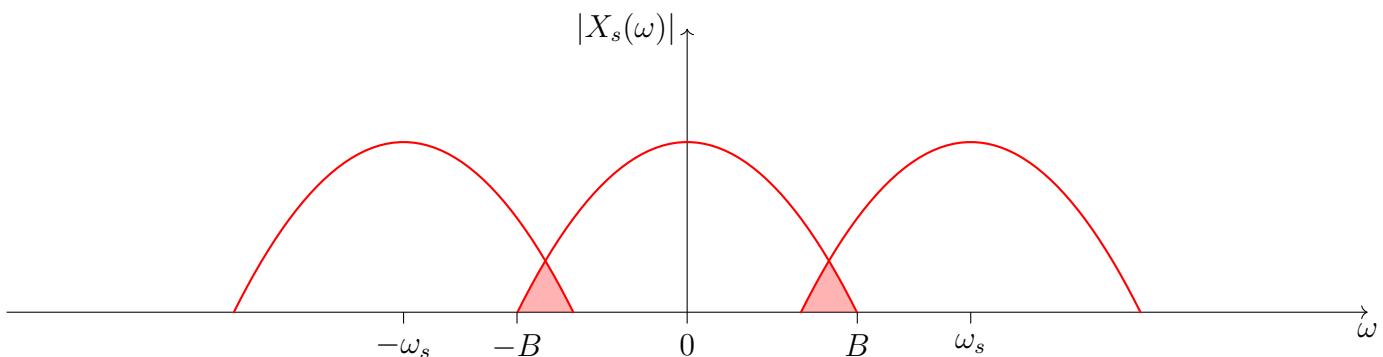


Figura 6.4: Espectro do sinal amostrado com  $\omega_s < 2B$ , mostrando sobreposição (aliasing) nas regiões sombreadas.

A figura 6.4 ilustra o que acontece quando a frequência de amostragem é menor que o dobro da maior frequência do sinal original ( $\omega_s < 2B$ ). Nesse caso, as réplicas do espectro se sobrepõem, resultando em um fenômeno conhecido como *aliasing*. O aliasing causa distorção no sinal recuperado, pois as componentes de frequência se misturam, tornando impossível a recuperação perfeita do sinal original. Portanto, para evitar o aliasing e garantir a integridade do sinal amostrado, é crucial escolher uma frequência de amostragem adequada, conforme estabelecido pelo Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon. Na realidade a implicação do teorema é a de que caso o critério seja atendido, a recuperação do sinal original é garantida, enquanto que se o critério não for atendido, a recuperação do sinal original é impossível.

No tempo, podemos observar esse efeito quando um sinal de alta frequência é amostrado a uma taxa insuficiente. A figura 6.5 mostra um exemplo onde um sinal senoidal de alta frequência (azul) é amostrado a uma taxa que não atende ao critério de Nyquist. As amostras coletadas (pontos vermelhos) não representam adequadamente o sinal original, e quando tentamos reconstruir o sinal a partir dessas amostras, obtemos uma senóide de frequência mais baixa (vermelho tracejado), ilustrando o efeito do aliasing no domínio do tempo.

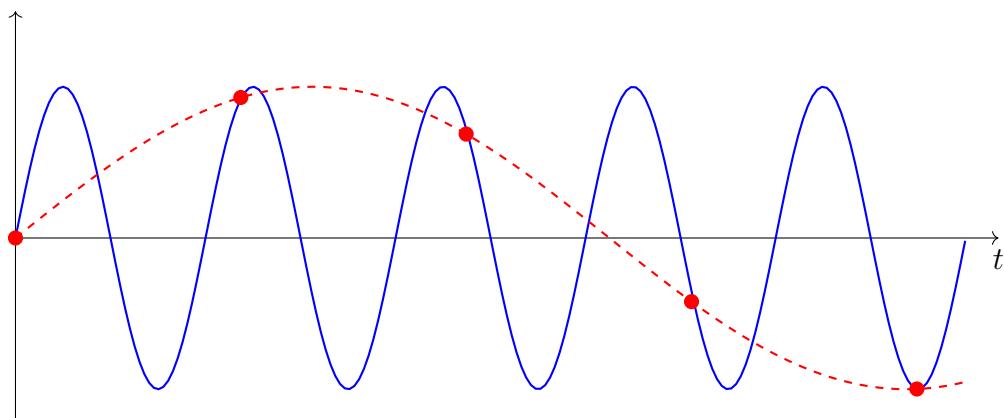


Figura 6.5: Demonstração do aliasing no domínio do tempo: sinal de alta frequência (azul) subamostrado resulta em um sinal reconstruído de frequência mais baixa (vermelho tracejado).

Pode parecer improvável que um conjunto de pontos discretos possa representar fielmente um único sinal contínuo. Podemos inclusive imaginar múltiplos sinais que passem pelos mesmos pontos amostrados, no entanto, nenhum dos outros sinais tem seu espectro de frequências totalmente contido na banda  $B = \frac{\omega_s}{2}$ , e portanto, não atendem ao critério do Teorema da Amostragem. Por outro lado, caso o critério do Teorema da Amostragem seja atendido, apenas um sinal passa por todos os pontos.

## 6.2 Aliasing

Vamos discutir um pouco mais a implicação de não atender ao critério do Teorema da Amostragem, ou seja, quando a frequência de amostragem é menor que o dobro da maior frequência do sinal original ( $\omega_s < 2B$ ). Nesse caso, como ilustrado na figura 6.4, as réplicas do espectro se sobrepõem, resultando em um fenômeno conhecido como *aliasing*. Mas qual é a implicação desse fenômeno? Vamos observar o que acontece com senóides de diferentes frequências quando são amostradas a diferentes taxas. Imagine um sinal senoidal contínuo no tempo, dado por:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6.7)$$

O espectro desse sinal é dado por

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (6.8)$$

A figura 6.6 mostra o espectro desse sinal senoidal, juntamente com a indicação de uma frequência de amostragem  $\omega_s$  que não atende ao critério de Nyquist para esse sinal. A princípio, tudo certo, afinal, sabemos que a amostragem só representa bem frequências entre  $-\frac{\omega_s}{2}$  e  $\frac{\omega_s}{2}$ , e nosso sinal não está nesse intervalo. No entanto quando amostramos esse sinal, o espectro do sinal amostrado será dado por:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} [X(j\omega) + X(j(\omega - \omega_s)) + X(j(\omega + \omega_s)) + \dots] \quad (6.9)$$

Que agora contém, além do espectro original, repetições do espectro centradas em múltiplos inteiros de  $\omega_s$ .

A figura 6.7 ilustra o espectro do sinal amostrado, onde podemos ver que cada réplica do sinal amostrado contém impulsos localizados em  $\pm\omega_0 \pm k\omega_s$ , onde  $k$  é um número inteiro. Note que as réplicas centradas em  $-\omega_s$  e  $\omega_s$  possuem impulsos em  $-\omega_0 + \omega_s$  e  $\omega_0 - \omega_s$ , respectivamente, que caem

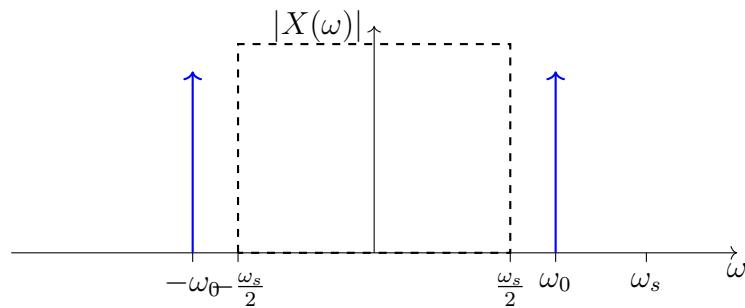


Figura 6.6: Espectro do sinal senoidal  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$  com filtro anti-aliasing (retângulo tracejado) e frequência de amostragem  $\omega_s$ .

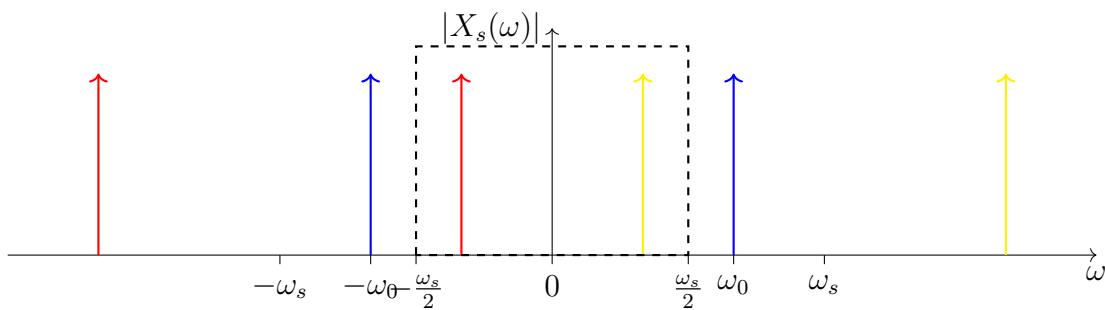


Figura 6.7: Espectro amostrado do sinal senoidal mostrando sobreposição (aliasing) das réplicas especiais dentro da banda do filtro.

dentro da banda do filtro anti-aliasing, ou seja, entre  $-\frac{\omega_s}{2}$  e  $\frac{\omega_s}{2}$ . Esses impulsos são vistos como uma frequência  $\omega_a = |\omega_0 - \omega_s|$  que não existe no sinal original, mas se trata de um efeito da amostragem inadequada. Esse fenômeno é o aliasing, onde uma frequência mais alta é "mascarada" como uma frequência mais baixa devido à insuficiência da taxa de amostragem. Portanto, quando um sinal é amostrado a uma taxa inferior ao dobro de sua maior frequência, componentes de alta frequência podem ser erroneamente interpretadas como componentes de baixa frequência no sinal amostrado. Isso pode levar a distorções significativas na reconstrução do sinal original, tornando impossível recuperar o sinal contínuo corretamente a partir das amostras coletadas.

## Filtros anti-aliasing

E como podemos fazer para lidar com o aliasing na prática? A solução mais comum é utilizar um filtro anti-aliasing **antes** do processo de amostragem. O aliasing é um efeito inevitável do processo de amostragem do sinal, então, todas as componentes que estão acima da frequência de Nyquist (metade da frequência de amostragem) irão gerar frequências inexistentes no sinal amostrado. Portanto, a única forma de evitar o aliasing é garantir que o sinal original não possua componentes de frequência acima da frequência de Nyquist. Isso é feito utilizando um filtro passa-baixas com frequência de corte igual ou inferior à frequência de Nyquist, antes do processo de amostragem. Dessa forma, todas as componentes de alta frequência são atenuadas, evitando que elas causem aliasing no sinal amostrado.

Nos sinais reais, o problema do aliasing é ainda mais complexo, uma vez que na prática, todos os sinais são limitados no tempo (não existe sinal desde o início dos tempos e *felizmente* ainda não chegamos no final dos tempos). Existe um teorema chamado Teorema de Gabor que afirma que um sinal não pode ser simultaneamente limitado no tempo e na frequência. A consequência disso é que todos os sinais reais possuem espectro de frequência teoricamente infinito, e portanto, sempre haverá componentes de alta

frequência que podem causar aliasing.

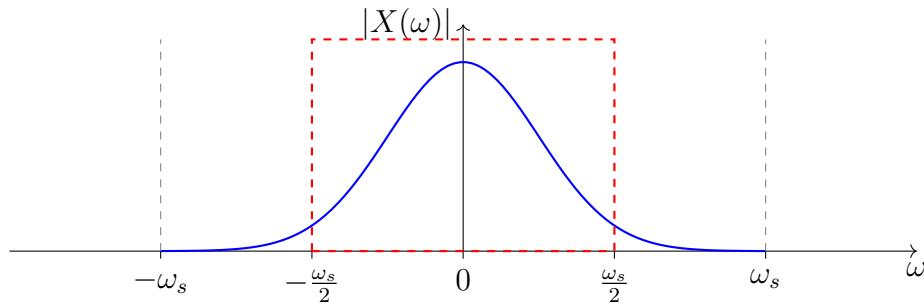


Figura 6.8: Espectro de um sinal com banda infinita

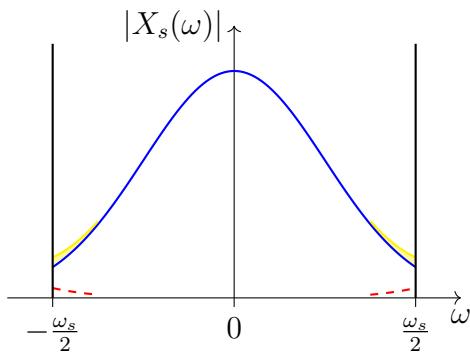


Figura 6.9: Distorção por aliasing: caudas da gaussiana dobram para dentro da área útil

As Figuras 6.8 e 6.9 ilustram esse conceito. A Figura 6.8 mostra o espectro de um sinal com banda infinita, onde a área útil da amostragem é indicada pelo retângulo tracejado vermelho. A Figura 6.9 mostra como as caudas do espectro (representadas pela gaussiana) que estão fora da área útil acabam "dobrando" para dentro dessa área, causando distorção no espectro do sinal amostrado (representado pela curva amarela). Essa limitação implica não só em perder as frequências que estão fora da faixa útil da amostragem, mas em corromper as frequências que estão dentro dela. As regiões sombreadas em amarelo indicam as áreas onde ocorre o aliasing, resultando em uma representação incorreta do sinal original no domínio da frequência. Portanto, o uso de filtros anti-aliasing é essencial para reduzir os efeitos do efeito, garantindo que o sinal amostrado represente fielmente o sinal contínuo original dentro da banda de interesse.

**Exemplo:** Uma senoide em tempo contínuo com  $\cos(2\pi ft + \theta)$  é amostrada a uma taxa de  $f_s = 1000$  Hz. Determine o sinal observado após a amostragem se  $f$  for:

- (a) 400 Hz
- (b) 600 Hz
- (c) 1000 Hz
- (d) 2400 Hz

**Solução:** A frequência de amostragem é  $f_s = 1000$  Hz, portanto a frequência de Nyquist é  $\frac{f_s}{2} = 500$  Hz. Vamos analisar cada caso:

- (a) Para  $f = 400$  Hz, que está abaixo da frequência de Nyquist, o sinal amostrado será exatamente o mesmo que o sinal original:  $\cos(2\pi \cdot 400t + \theta)$ .
- (b) Para  $f = 600$  Hz, que está acima da frequência de Nyquist, ocorre aliasing. A frequência observada após a amostragem será dada por  $f_a = |f - f_s| = |600 - 1000| = 400$  Hz. Portanto, o sinal amostrado será  $\cos(2\pi \cdot 400t + \theta)$ .
- (c) Para  $f = 1000$  Hz, que é igual à frequência de amostragem, o sinal amostrado será uma constante, pois todas as amostras capturarão o mesmo valor do cosseno em seus pontos de amostragem. Portanto, o sinal amostrado será  $\cos(\theta)$ .
- (d) Para  $f = 2400$  Hz, que está muito acima da frequência de Nyquist, ocorre aliasing novamente. A frequência observada após a amostragem será dada por  $f_a = |f - 2f_s| = |2400 - 2000| = 400$  Hz. Portanto, o sinal amostrado será  $\cos(2\pi \cdot 400t + \theta)$ .

## 6.3 Reconstrução do sinal amostrado

### 6.3.1 Reconstrução ideal

Após a amostragem de um sinal contínuo, o próximo passo é a reconstrução do sinal original a partir das amostras coletadas. A reconstrução ideal pode ser alcançada utilizando um filtro passa-baixas com uma frequência de corte igual à frequência de Nyquist, que é metade da frequência de amostragem. Esse filtro permite a passagem das componentes de frequência do sinal original enquanto atenua as réplicas espectrais introduzidas pelo processo de amostragem. A esse processo de reconstrução, damos o nome de interpolação. A interpolação é o processo de estimar valores intermediários entre os pontos amostrados, permitindo a reconstrução do sinal contínuo original.

O filtro passa-baixas ideal mostrado na figura 6.3 tem uma resposta em frequência que é uma função retangular, permitindo a passagem de todas as frequências abaixo da frequência de Nyquist e bloqueando todas as frequências acima dela. A resposta ao impulso desse filtro é uma função sinc, dada por:

$$h(t) = \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} \quad (6.10)$$

onde  $f_c$  é a frequência de corte do filtro, que deve ser igual à frequência de Nyquist ( $f_c = \frac{f_s}{2}$ ). O processo de filtragem então, do sinal amostrado é dado por:

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t) \quad (6.11)$$

onde  $x_r(t)$  é o sinal reconstruído,  $x_s(t)$  é o sinal amostrado, e  $h(t)$  é a resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal. Como o sinal amostrado é uma série de impulsos deslocados, a convolução com a função sinc resulta na soma ponderada das funções sinc deslocadas, cada uma ponderada pelo valor da amostra correspondente. A expressão final para o sinal reconstruído é:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \frac{\sin(\pi f_c(t - nT_s))}{\pi f_c(t - nT_s)} \quad (6.12)$$

Perceba que nessa equação, cada amostra  $x(nT_s)$  contribui para o sinal reconstruído através de uma função sinc centrada em  $nT_s$ . Além disso, nos instantes de amostragem ( $t = nT_s$ ), as funções sinc dos outros termos se anulam, garantindo que o sinal reconstruído passe exatamente pelos pontos amostrados.

O problema dessa estratégia é que, como vimos no capítulo 5, filtros ideais não são realizáveis na prática, pois sua resposta ao impulso se estende infinitamente no tempo. Portanto, vamos tentar outras formas de reconstruir o sinal contínuo a partir das amostras coletadas.

### 6.3.2 Reconstrução por segurador de ordem zero

Uma abordagem simples para a reconstrução do sinal amostrado é o uso do segurador de ordem zero (zero-order hold, ZOH). Nesse método, cada amostra é mantida constante até a próxima amostra ser coletada. Isso resulta em um sinal reconstruído que é uma série de degraus, onde cada degrau corresponde ao valor da amostra mais recente. A resposta ao impulso do segurador de ordem zero é uma função retangular, dada por:

$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.13)$$

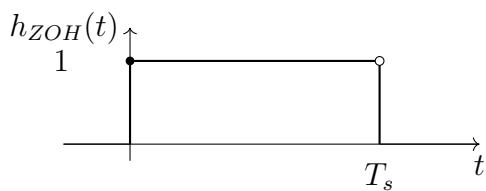


Figura 6.10: Resposta ao impulso do segurador de ordem zero (ZOH):  $h_{ZOH}(t) = 1$  para  $0 \leq t < T_s$  e 0 caso contrário.

A resposta em frequência do ZOH é dada por:

$$H_{ZOH}(j\omega) = T_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \quad (6.14)$$

A resposta em frequência do ZOH tem um ganho de  $T_s$  na frequência zero e atenua as altas frequências, resultando em um filtro passa-baixas. No entanto, o ZOH não tem resposta nula para  $\omega > \frac{\omega_s}{2}$ , o que significa que ele não é capaz de eliminar completamente as réplicas espectrais introduzidas pelo processo de amostragem. Portanto, embora o ZOH possa ser usado para reconstruir o sinal amostrado, ele pode introduzir distorções no sinal reconstruído, especialmente se o sinal original contiver componentes de alta frequência próximas da frequência de Nyquist.

A convolução do sinal amostrado com a resposta ao impulso do ZOH resulta em um sinal reconstruído que mantém o valor de cada amostra constante até a próxima amostra ser coletada. A expressão para o sinal reconstruído usando o ZOH é dada por:

$$x_{ZOH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot h_{ZOH}(t - nT_s) \quad (6.15)$$

onde  $x_{ZOH}(t)$  é o sinal reconstruído usando o ZOH,  $x(nT_s)$  são as amostras do sinal original, e  $h_{ZOH}(t - nT_s)$  é a resposta ao impulso do ZOH deslocada para cada instante de amostragem.

A figura 6.11 ilustra o processo de reconstrução usando o ZOH. O sinal original  $x(t) = \sin(t)$  é mostrado em azul tracejado, enquanto as amostras coletadas são representadas por setas pretas. O sinal reconstruído usando o ZOH é mostrado em vermelho, onde cada segmento horizontal representa o valor da amostra mais recente mantido constante até a próxima amostra ser coletada. Note que o sinal reconstruído apresenta uma forma de escada, refletindo a natureza do ZOH.

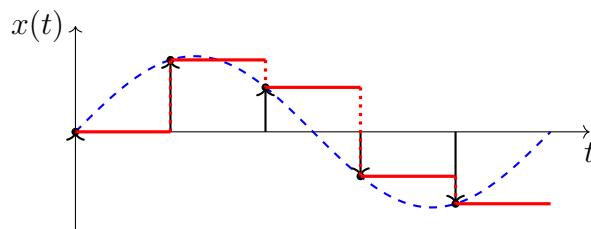


Figura 6.11: Sinal  $x_s(t) = \sin(t)$  amostrado 5 vezes no período  $[0, 2\pi]$  e sua reconstrução pelo segurador de ordem zero (ZOH).

### 6.3.3 Superamostragem

A distorção introduzida pelo ZOH decorre do fato de que os lobos secundários do sinc não são nulos para frequências acima da frequência de amostragem, permitindo que as réplicas espetrais se sobreponham mesmo amostrando acima da taxa de Nyquist. Uma estratégia para mitigar esse problema é a superamostragem, que consiste em amostrar o sinal original a uma taxa significativamente maior do que a taxa mínima exigida pelo Teorema da Amostragem. Ao aumentar a frequência de amostragem, as réplicas espetrais são deslocadas para frequências mais altas, levando a uma menor sobreposição entre elas e o espectro do segurador de ordem zero. Isso reduz a distorção no sinal reconstruído, melhorando a fidelidade da reconstrução. Após a superamostragem, um filtro passa-baixas pode ser aplicado para suavizar o sinal reconstruído, eliminando quaisquer artefatos remanescentes causados pelo processo de amostragem e reconstrução.

Espectralmente, a superamostragem pode ser visualizada como um aumento na distância entre as réplicas espetrais do sinal amostrado. Além disso, a resposta em frequência do segurador de ordem zero com uma frequência de amostragem mais alta apresenta um lobo principal que tem características de banda plana na região de interesse do sinal, agora muito menor que a frequência de amostragem. Isso resulta em uma melhor preservação das componentes de frequência do sinal original durante o processo de reconstrução.

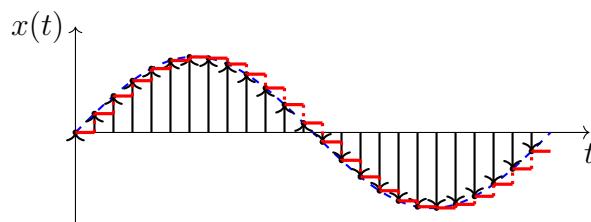


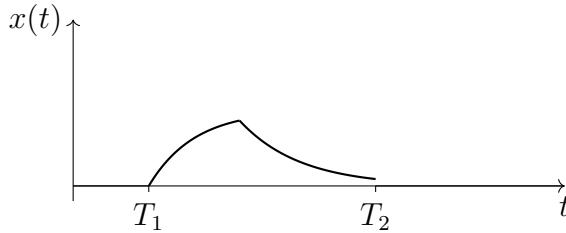
Figura 6.12: Superamostragem:  $x(t) = \sin(t)$  com 25 amostras por período  $[0, 2\pi]$  e reconstrução pelo segurador de ordem zero (ZOH).

## 6.4 Amostragem espectral

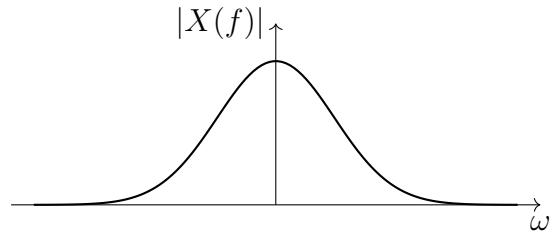
Assim como os outros aspectos da análise no domínio do tempo, o processo de amostragem também tem o seu dual no domínio da frequência. Se amostrar no tempo corresponde a repetir o espectro no domínio da frequência a cada  $\omega_s$ , então o processo de amostragem no domínio da frequência deve corresponder a algo similar.

Para entender esse conceito, vamos imaginar um sinal limitado no tempo, ou seja, um sinal que é diferente de zero apenas em um intervalo finito de tempo  $\tau$ . O espectro desse sinal será uma função

contínua no domínio da frequência. A Figura 6.13 mostra um sinal limitado no tempo  $x(t)$  e seu espectro  $X(\omega)$ .



(a)  $x(t)$



(b)  $|X(f)|$

Figura 6.13: Sinal limitado no tempo  $x(t)$  e seu espectro  $X(f)$ .

Quando amostramos esse espectro em intervalos regulares de frequência  $\Delta\omega$ , estamos efetivamente criando uma série de impulsos no domínio da frequência, cada um representando o valor do espectro original naquele ponto específico. Esse processo é análogo à amostragem no domínio do tempo, onde o sinal contínuo é representado por uma série de impulsos no tempo.

A função resultante da transformada de Fourier de  $x(t)$  é dada por:

$$X(\omega) = \int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Para gerar um espectro discreto a partir desse espectro contínuo, podemos repetir o sinal  $x(t)$  periodicamente no tempo com período  $T > \tau$ . Isso resulta em um novo sinal  $x_p(t)$ , que é uma soma infinita de cópias deslocadas de  $x(t)$ . Esse novo sinal  $x_p(t)$  é periódico no tempo, e pode ser descrito pela série exponencial de Fourier da seguinte forma:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad (6.16)$$

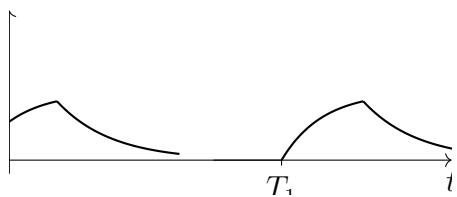
Onde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  é a frequência fundamental do sinal periódico, e os coeficientes  $D_k$  são dados por:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (6.17)$$

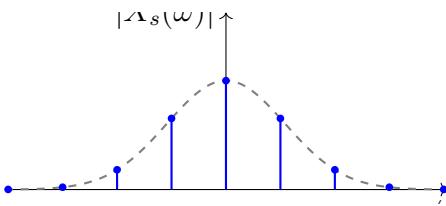
Associando as duas representações do espectro, temos que:

$$D_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) \quad (6.18)$$

Ou seja, os coeficientes da série de Fourier do sinal periódico  $x_p(t)$  são proporcionais aos valores do espectro original  $X(\omega)$  amostrados em intervalos regulares de  $\omega_0$ . Dessa forma, a amostragem do espectro no domínio da frequência pode ser vista como a criação de um sinal periódico no domínio do tempo, onde cada componente harmônica do sinal periódico corresponde a uma amostra do espectro original.



(a)  $x(t)$  repetido periodicamente.



(b) Espectro  $X(\omega)$  amostrado a cada  $\Delta\omega$ .

Figura 6.14: Amostragem espectral: repetindo um sinal limitado no tempo obtemos um sinal periódico no tempo e amostras discretas do seu espectro.

Assim como na amostragem temporal, onde a taxa de amostragem deve ser suficientemente alta para evitar o aliasing, na amostragem espectral, para que a equação 6.17 seja válida, o período  $T$  deve ser maior que a duração do sinal original  $\tau$ . Em termos de espectro, isso implica que as amostras devem ser separadas de no máximo  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} < \frac{2\pi}{\tau}$ . Se essa condição não for satisfeita, as réplicas espetráis do sinal amostrado se sobreporão, resultando em distorção no domínio do tempo, análogo ao aliasing na amostragem temporal.

# Capítulo 7

## Análise de sinais no tempo discreto

Agora que cobrimos o domínio dos sinais contínuos no tempo, vamos estender o estudo para sinais no tempo discreto. Sinais no tempo discreto são sequências de valores que são definidas apenas em instantes específicos no tempo. Eles podem ser obtidos através da amostragem de sinais contínuos ou podem ser gerados diretamente por sistemas digitais. No capítulo 1.4.2 apresentamos as principais características dos sinais exponenciais no tempo discreto, que são fundamentais para a análise e processamento de sinais nesse domínio. Assim como no domínio contínuo, a análise em frequência no domínio discreto pode ser realizada utilizando duas ferramentas diferentes para diferentes tipos de sinais. Para sinais discretos e infinitos no tempo, utilizamos a Transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT - Discrete-Time Fourier Transform). Já para sinais discretos e finitos no tempo, utilizamos a Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform). Apesar do nome similar, a DFT é uma ferramenta distinta da DTFT, e cada uma delas possui suas próprias propriedades e aplicações específicas. A DTFT é usada para analisar sinais que se estendem infinitamente no tempo, enquanto a DFT é aplicada a sinais que são limitados em duração. Ambas as transformadas são essenciais para o processamento de sinais digitais, permitindo a análise espectral e a manipulação de sinais em diversas aplicações práticas.

### 7.1 Transformada de Fourier em Tempo Discreto - DTFT

#### 7.1.1 Periodicidade discreta

Como vimos no capítulo 1.4.2, um sinal contínuo do tipo  $\cos(\omega_0 t)$  é periódico para qualquer frequência  $\omega_0$ . No entanto, no domínio do tempo discreto, um sinal do tipo  $x[n] = \cos(\Omega n)$  é periódico apenas se:

$$\begin{aligned}\cos(\Omega n) &= \cos(\Omega(n + N_0)) \\ \Omega N_0 &= 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Ou seja,  $\cos(\Omega n)$  é periódico somente se

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{k}{N_0} \tag{7.1}$$

Neste caso, o período fundamental  $N_0$  é dado por:

$$N_0 = \frac{2\pi k}{\Omega} \tag{7.2}$$

Onde  $k$  e  $N_0$  são inteiros positivos. A menor combinação de  $k$  e  $N_0$  que satisfaz a equação 7.1 determina o período fundamental do sinal discreto. Se  $\frac{\Omega}{2\pi}$  não puder ser expresso como uma fração de inteiros, o sinal não será periódico no domínio do tempo discreto. A figura 7.1 ilustra dois exemplos: o sinal  $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$  é periódico com período  $N_0 = 4$ , enquanto o sinal  $x[n] = \cos\left(\frac{3}{2}n\right)$  não é periódico.

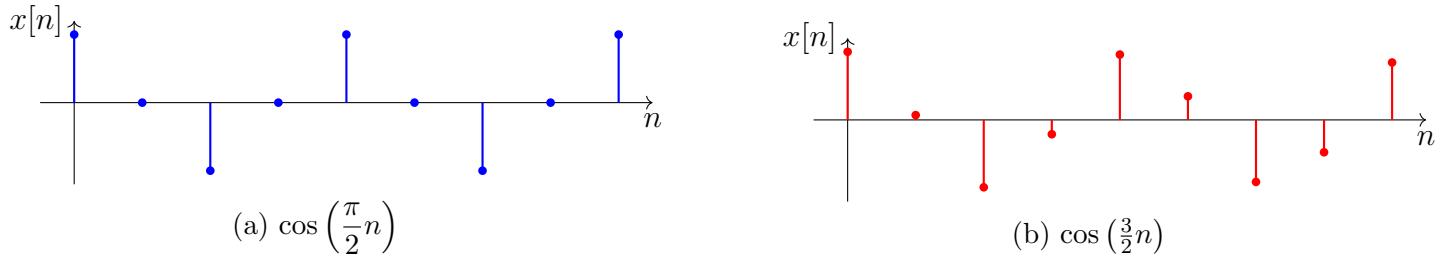


Figura 7.1: Exemplos de sinais periódicos e aperiódicos no tempo discreto.

### 7.1.2 Série de Fourier discreta

Assim como na série de Fourier para sinais contínuos e periódicos, um sinal discreto e periódico  $x[n]$  com período  $N_0$  pode ser representado como uma soma infinita de exponenciais complexas. No domínio contínuo, a base do espaço vetorial de funções que decomponemos o sinal era  $\{1, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, \dots\}$ . No domínio discreto, vamos utilizar uma base análoga, composta por funções do tipo  $e^{\pm j\Omega_0 n}$ , onde  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ .

Até agora não há grandes diferenças entre os sinais contínuos e discretos. No entanto, a periodicidade discreta introduz uma particularidade importante. Na série contínua, existem infinitas componentes harmônicas distintas, pois  $\omega_0 k$  pode assumir qualquer valor real múltiplo de  $\omega_0$ . No entanto, no domínio discreto, observamos que:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n} \quad (7.3)$$

Ou seja, adicionar  $2\pi$  a qualquer frequência angular  $\Omega$  não altera a função exponencial complexa no domínio discreto. Isso implica que as frequências no domínio discreto estão limitadas ao intervalo  $[0, 2\pi)$ , e qualquer frequência fora desse intervalo pode ser mapeada de volta para ele. Portanto, as componentes harmônicas de um sinal discreto periódico são repetitivas, diferentemente do caso contínuo onde as frequências podem se estender infinitamente. A consequência disso é que a  $m$ -ésima harmônica de um sinal discreto periódico é idêntica à  $(m + kN_0)$ -ésima harmônica, para qualquer inteiro  $k$ . Em outras palavras, existem apenas  $N_0$  componentes harmônicas distintas para um sinal discreto periódico com período  $N_0$ . A série de Fourier discreta é uma série com **finitos** termos, ao contrário da série contínua que possui infinitas componentes harmônicas.

A decomposição de um sinal discreto periódico  $x[n]$  em termos de suas componentes harmônicas é dada por:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} D[k] e^{j\Omega_0 kn} \quad (7.4)$$

Onde os coeficientes  $D[k]$  são calculados por:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\Omega_0 mn} &= \sum_{m=0}^{N_0-1} \sum_{k=0}^{N_0-1} D[k] e^{j\Omega_0 k(n-m)} \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} D[k] \sum_{m=0}^{N_0-1} e^{j\Omega_0 (k-m)n} \end{aligned}$$

Como a soma interna é igual a  $N_0$  quando  $k = m$  e zero caso contrário, temos que:

$$D[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \quad (7.5)$$

Assim como na série contínua, o espectro de um sinal discreto periódico é composto por linhas espetrais localizadas nas frequências  $\Omega = \Omega_0 k$ , onde  $k = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ . Cada linha espectral tem uma amplitude e fase determinadas pelos coeficientes  $D[k]$ .

### 7.1.3 Extensão para sinais aperiódicos

A série de Fourier discreta apresentada nas equações 7.4 e 7.5 é válida apenas para sinais discretos e periódicos. No entanto, muitos sinais de interesse são aperiódicos. Para estender a análise em frequência para sinais discretos aperiódicos, podemos fazer a mesma extensão que fizemos no domínio contínuo: considerar o período  $N_0$  tendendo ao infinito. Assim, um sinal discreto aperiódico  $x[n]$  pode ser visto como um sinal discreto periódico com período infinito. Nesse caso, a extensão periódica do sinal  $x[n]$  com período  $N_0$  é dada por:

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} X_{N_0}[n] = x[n] \quad (7.6)$$

Assim, a série de Fourier apresentada na equação 7.4 para o sinal  $x_{N_0}[n]$  é:

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=<N_0>} D[k] e^{j\Omega_0 kn} \quad (7.7)$$

onde  $D[k]$  é dado por:

$$D[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \quad (7.8)$$

Com  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ .

Queremos observar o comportamento de  $D[k]$  conforme  $N_0$  tende ao infinito. Para isso, definimos uma nova variável contínua  $\Omega$  e uma função  $X(\Omega)$  como:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (7.9)$$

Assim, podemos reescrever  $D[k]$  como:

$$D[k] = \left. \frac{1}{N_0} X(\Omega) \right|_{\Omega=\Omega_0 k} \quad (7.10)$$

Assim, novamente, os coeficientes  $D[k]$  são amostras da função  $X(\Omega)$ , espaçadas por  $\Delta\Omega = \Omega_0 \frac{rad}{s}$ . Conforme  $N_0$  tende ao infinito,  $\Delta\Omega$  tende a zero, e as amostras de  $X(\Omega)$  se tornam cada vez mais próximas. Nesse limite, podemos interpretar  $X(\Omega)$  como a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT) do sinal discreto aperiódico  $x[n]$ .

Assim, como no caso contínuo, no limite de  $N_0 \rightarrow \infty$ ,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (7.11)$$

A diferença crucial entre a DTFT e a Transformada de Fourier contínua é que a DTFT é definida agora como uma soma infinita, conforme mostrado na equação 7.9. Além disso, a integral na equação 7.11 é limitada ao intervalo de  $-\pi$  a  $\pi$ , refletindo a periodicidade das frequências no domínio discreto.

### 7.1.4 Espectro da DTFT

Apesar de  $x[n]$  ser um sinal discreto, sua DTFT  $X(\Omega)$  é uma função contínua de  $\Omega$ , que pode assumir qualquer valor em um intervalo contínuo.

No entanto, vamos analisar melhor a equação 7.9:

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = X(\Omega) \quad (7.12)$$

Então,  $X(\Omega)$  é uma função periódica de  $\Omega$  com período  $2\pi$ . Isso significa que o espectro de um sinal discreto aperiódico é repetitivo, com réplicas do espectro original aparecendo a cada intervalo de  $2\pi$  em  $\Omega$ . Portanto, para analisar completamente o espectro de um sinal discreto, é suficiente considerar apenas o intervalo fundamental de  $\Omega$  entre  $-\pi$  e  $\pi$  (Ou de 0 a  $2\pi$ , apesar de ser uma escolha menos comum). Diferente do espectro contínuo, que se estende infinitamente, o espectro discreto é confinado a um intervalo finito, decorrente das propriedades de periodicidade de sinais discretos.

A DTFT é utilizada para analisar sinais discretos e infinitos no tempo, permitindo a compreensão de suas características espetrais e facilitando o processamento de sinais digitais em diversas aplicações práticas. Normalmente, a DTFT é empregada em sinais naturalmente discretos, não provenientes de um processo de amostragem, uma vez que para seu cálculo, é necessário que o sinal tenha uma forma fechada ou uma expressão matemática que permita a avaliação da soma infinita na equação 7.9.

## 7.2 Transformada discreta de Fourier - DFT

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) é uma ferramenta fundamental para a análise de sinais discretos e finitos no tempo. Diferentemente da DTFT, que é aplicada a sinais discretos e infinitos, a DFT é utilizada quando o sinal possui um número finito de amostras. A DFT converte um sinal discreto no tempo em sua representação no domínio da frequência, permitindo a análise espectral e a manipulação do sinal em termos de suas componentes de frequência. A DFT é amplamente utilizada em diversas aplicações, como processamento de áudio, análise de imagens, e comunicações digitais, devido à sua capacidade de fornecer uma visão detalhada do conteúdo espectral de sinais discretos finitos, normalmente provenientes de um processo de amostragem.

### 7.2.1 Dupla amostragem

A motivação para o uso da DFT surge da necessidade de analisar sinais contínuos no tempo através de computadores. Primeiro que os computadores só podem lidar com um número finito de dados, o que torna impraticável a análise de sinais contínuos ou infinitos, exigindo que eles sejam amostrados. Vamos começar imaginando um sinal  $x(t)$  contínuo e limitado no tempo, ou seja, um sinal que é diferente de zero apenas em um intervalo finito de tempo  $\tau$ . Como  $x(t)$  é limitado no tempo, seu espectro  $X(\omega)$  é infinito e contínuo. Como vimos no teorema da amostragem, ao amostrar o sinal  $x(t)$  com uma taxa de amostragem  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ , obtemos um sinal discreto  $x[n] = x(nT_s)$ . O espectro do sinal amostrado  $X_s(\omega)$  é uma réplica periódica do espectro original  $X(\omega)$ , com réplicas espaçadas por  $\omega_s$ .

No entanto, assim como um computador não consegue processar um sinal a tempo contínuo, ele também não consegue lidar com um número infinito de frequências. Portanto, além de amostrar o sinal no tempo, também precisamos amostrar seu espectro no domínio da frequência. De acordo com o teorema da amostragem espectral, o efeito da amostragem espectral a uma taxa de  $T_0$  amostras por  $\frac{rad}{s}$  é a replicação do sinal no domínio do tempo a cada  $\frac{T_0}{2\pi}$  segundos. Neste contexto de dupla amostragem,

temos nos dois domínios (tempo e freqüências), sinais amostrados e periódicos. Nossa objetivo com a DFT é de alguma maneira relacionar o sinais amostrados nos dois domínios.

### 7.2.2 Número de amostras

Vamos considerar que o sinal  $x(t)$  de duração  $T_0$  segundos é amostrado no tempo com uma taxa de  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ , resultando no sinal discreto  $x[n] = x(nT_s)$ . O espectro do sinal amostrado  $X_s(\omega)$  é periódico, com réplicas do espectro original  $X(\omega)$  aparecendo a cada  $\omega_s$ . O numero de amostras do sinal discreto  $x[n]$  resultante é dado por:

$$N = \frac{T_0}{T_s} \quad (7.13)$$

Paralelamente, vamos amostrar o espectro  $X_s(\omega)$ . Para isso, criamos replicas temporais do sinal amostrado a cada  $T = \frac{2\pi}{T_0}$  segundos. O sinal resultante  $x_p(t)$  é periódico, com período  $T_0$ . O efeito disso é que o espectro do sinal é amostrado em intervalos regulares de  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Como o espectro já se repetia a cada  $\omega_s$ , o número de amostras do espectro  $X_s(\omega)$  dentro de um período é dado por:

$$M = \frac{\omega_s}{\omega_0} \quad (7.14)$$

Substituindo os valores de  $\omega_s$  e  $\omega_0$ , temos:

$$M = \frac{\frac{2\pi}{T_s}}{\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{T_0}{T_s} = N \quad (7.15)$$

Ou seja, o número de amostras em um período no domínio do tempo é igual ao número de amostras em um período no domínio da frequênciā.

### 7.2.3 Cálculo da DFT

Agora, vamos relacionar as amostras do sinal no domínio do tempo com as amostras do espectro no domínio da frequênciā. Vamos tomar  $x(nT_s)$  e  $X(k\omega_0)$  como as amostras do sinal no tempo e no espectro, respectivamente.

O sinal amostrado  $\bar{x}(t)$  pode ser escrito como:

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (7.16)$$

Como a transformada de fourier de um impulso  $\delta(t - nT_s)$  é  $e^{-j\omega nT_s}$ , a transformada do sinal amostrado  $\bar{X}(\omega)$  é dada por<sup>1</sup>:

$$\bar{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \quad (7.17)$$

Na equação ??, chegamos à conclusão de que o espectro amostrado  $X_s(\omega)$  no intervalo  $|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$  é igual a  $\frac{1}{T_s}X(\omega)$ . Portanto, podemos escrever:

$$X(\omega) = T_s \bar{X}(\omega) = T_s \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (7.18)$$

<sup>1</sup>Vamos lembrar que  $x(nT_s)$  é um número real, o valor do sinal amostrado em  $nT_s$

Avaliando a expressão para  $X(\omega)$  na frequência amostrada  $\omega = k\omega_0$ , obtemos:

$$X(k\omega_0) = T_s \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT_s) e^{-jk\omega_0 n T_s} \quad (7.19)$$

Considerando que  $\omega_0 T_s$  é uma constante adimensional fazendo o papel da frequência discreta fundamental, vamos chamar  $\Omega_0 = \omega_0 T_s$ . A partir das conclusões que tiramos sobre o número de amostras, sabemos que  $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ . Portanto, podemos reescrever a expressão para  $X(k\omega_0)$  como:

$$X(k\omega_0) = T_s \sum_{n=0}^{N_0-1} x(nT_s) e^{-jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (7.20)$$

A equação 7.20 é a definição da Transformada Discreta de Fourier (DFT). Ela relaciona cada amostra do sinal no domínio do tempo  $x(nT_s)$  com uma amostra do espectro no domínio da frequência  $X(k\omega_0)$ .

A frequência angular discreta  $\Omega_0$  determina o espaçamento entre cada amostra no domínio da frequência. Quando lembramos que todas as frequências no domínio discreto são periódicas com período  $2\pi$ , podemos observar que o número de amostras  $N_0$  define o intervalo entre duas amostras consecutivas no domínio da frequência, e portanto, a resolução espectral da DFT.

### Determinando $N_0$ e $T_s$

Para calcular adequadamente a DFT de um sinal contínuo  $x(t)$ , precisamos escolher valores adequados para a taxa de amostragem  $T_s$  e o número de amostras de  $x(t)$  que serão utilizadas para o cálculo,  $N_0$ .

A escolha de  $T_s$  é baseada no mesmo processo de avaliação do teorema da amostragem. Devemos garantir que a taxa de amostragem seja suficientemente alta para evitar o *aliasing*, ou seja, que a frequência de amostragem  $\omega_s$  seja maior que o dobro da maior frequência presente no sinal original  $x(t)$ . Portanto para um sinal com largura de banda limitada a  $B$ ,

$$\omega_s > 2B \Rightarrow T_s < \frac{\pi}{B} \quad (7.21)$$

A escolha de  $N_0$  depende da duração do sinal  $x(t)$  que desejamos analisar e impacta na resolução de frequência do espectro da DFT. Se o sinal for limitado no tempo a um intervalo de duração  $T_0$ , então:

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \quad (7.22)$$

E portanto, a resolução em frequências da DFT é dada por:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi T_s}{T_0} \quad (7.23)$$

Essa resolução determina a capacidade da DFT de distinguir entre diferentes componentes de frequência no sinal. Quanto maior o valor de  $N_0$ , maior será a resolução em frequências, permitindo uma análise mais detalhada do espectro do sinal. Para o caso de sinais limitados no tempo, a única forma de aumentar a resolução em frequências é aumentar a taxa de amostragem do sinal original, ou seja, diminuir  $T_s$ . No limite onde  $N_0$  tende ao infinito, a resolução em frequências  $\Omega_0$  tende a zero, e a DFT se aproxima da DTFT do sinal discreto.

Para sinais ilimitados no tempo, como sinais periódicos ou sinais que se estendem infinitamente, a escolha de  $N_0$  é arbitrária e depende do número de amostras que desejamos utilizar para o cálculo da DFT. Nesse caso, a resolução em frequências da DFT é determinada exclusivamente pelo valor escolhido para  $N_0$ . Novamente, quanto maior o valor de  $N_0$ , maior será a resolução em frequências, permitindo uma análise mais detalhada do espectro do sinal.

### 7.2.4 Relação entre $k$ , $\Omega$ , e $\omega$

A maior parte dos algoritmos de cálculo da DFT utilizam dessa associação direta das amostras de  $x(t)$  e as amostras de  $X(\omega)$  para o cálculo. Isso reflete diretamente na forma como os valores dos coeficientes são apresentados. Frequentemente o resultado da DFT é fornecido como um conjunto de valores em função de  $k$ , ou seja, da amostra temporal que gerou aquele componente espectral. No entanto, é importante entender como esses valores se relacionam com as frequências angulares discretas  $\Omega$  e as frequências angulares contínuas  $\omega$  do sinal, uma vez que esse é o objetivo do processo de transformação.

Como nós vimos, a frequência angular discreta fundamental da DFT é dada por  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ . Portanto, a frequência angular discreta correspondente à  $k$ -ésima amostra do espectro é dada por:

$$\Omega_k = k\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}k \quad (7.24)$$

O coeficiente associado a  $\Omega_k$  representa a contribuição do sinal exponencial complexo discreto  $e^{j\Omega_k n}$  na composição do sinal discreto  $x[n]$ .

Além disso, podemos relacionar a frequência angular discreta  $\Omega_k$  com a frequência angular contínua  $\omega_k$  do sinal original. Sabemos que a maior frequência angular que pode ser representada no domínio discreto é limitada pela frequência de amostragem  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ . Além disso, as frequências discretas são periódicas e limitadas ao intervalo  $[0, 2\pi]$  em  $\Omega$ . Portanto, a frequência angular contínua correspondente a  $\Omega_k$  é dada por:

$$\omega_k = \frac{\Omega_k}{T_s} = \frac{2\pi}{N_0 T_s} k \quad (7.25)$$

Essa relação permite interpretar os coeficientes da DFT em termos das frequências angulares contínuas do sinal original, facilitando a análise espectral e a compreensão das características de frequência do sinal.

# Apêndice A

## Ortogonalidade de funções senoidais

Vamos discutir aqui a ortogonalidade dos sinais utilizados como base para a decomposição de sinais nas séries de Fourier discutidas no Capítulo 3. Para essa análise vamos utilizar a definição de produto interno entre sinais apresentada em 3.6. Vamos considerar que os sinais estão sendo integrados sobre um período completo  $T_0$  (ou um múltiplo inteiro de  $T_0$ ).

### A.1 $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{T_0} \sin(2\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{4\omega} [\cos(2\omega t)]_0^{T_0} \\ &= -\frac{1}{4\omega} (\cos(2\omega T_0) - \cos(0)) \\ &= -\frac{1}{4\omega} (\cos(4\pi) - 1) \\ &= -\frac{1}{4\omega} (1 - 1) = 0\end{aligned}$$

### A.2 $\sin(\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{T_0} [\cos((n-1)\omega t) - \cos((n+1)\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-1)\omega} \sin((n-1)\omega t) - \frac{1}{(n+1)\omega} \sin((n+1)\omega t) \right]_0^{T_0} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-1)\omega} \sin((n-1)\omega T_0) - \frac{1}{(n+1)\omega} \sin((n+1)\omega T_0) \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Evidentemente, para  $n \neq 1$ .

### A.3 $e^{j\omega t}$ e $e^{jn\omega t}$

$$\begin{aligned}\int_{T_0} e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} dt &= \int_{T_0} e^{j(1-n)\omega t} dt \\&= \left[ \frac{1}{j(1-n)\omega} e^{j(1-n)\omega t} \right]_0^{T_0} \\&= \frac{1}{j(1-n)\omega} (e^{j(1-n)\omega T_0} - e^0) \\&= \frac{1}{j(1-n)\omega} (e^{j(1-n)2\pi} - 1) \\&= 0\end{aligned}$$

## Apêndice B

### Tabela de transformadas de Fourier

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	Condição
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$	$a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10	$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
12	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
13	$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
14	$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
15	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
16	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
17	$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	

---

18	$\frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wt)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$
20	$\frac{W}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

---

Tabela B.1: Tabela de pares de transformadas de Fourier.