análise de sinais - teste 03

• tópico 1: transformada de fourier

- extensão periódica de um sinal → para aplicar a série de fourier em um sinal não-periódico
  - repetições "artificiais" do sinal

  como, agora, $x_{T_0}(t)$ é periódico, podemos representá-lo como $\boxed{x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}}$, T_0 → período, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

  $$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- representação da extensão periódica
  - $+T_0 = -\omega_0$ = harmônicas $n\omega_0$ fiquem mais próximas entre si
  - $+T_0 = -D_n$ = - amplitude do espectro da série de fourier
  - se $T_0 \to \infty$, $\boxed{D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}$
  - envoltória do espectro da série de fourier (quando $T_0 \to \infty$) → $\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$ → transformada direta de fourier

    $\omega = n\omega_0$
  - $x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$
  - $\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$ → integral de fourier → transformada inversa de fourier

• tópico 2: transformada de fourier de algumas funções comuns

- função porta unitária → $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, \text{ se } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, \text{ se } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$
  - como a função $x(t)$ vale 1 no intervalo $[-T/2, T/2]$ e 0 fora, temos: $X(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$ =>

    $X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right|_{-T/2}^{T/2}$ => $\frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega T/2}\right)$
  - $\boxed{\text{fórmula de euler} \to e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)}$
  - $X(\omega) = \frac{j}{\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}\right) = \frac{j}{\omega}\left(j\sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$
  - logo, $X(\omega) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega} = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$, T → largura do pulso
  - largura de banda de $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ → quanto $+T$ = menor largura de banda

    → $\omega = 2\pi/T$

análise de sinais - teste 03

- **tópico 2: transformada de fourier de algumas funções comuns**

– função impulso unitário → $\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$

- $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jwt} dt = e^{-jwt}|_{t=0} = 1$
- módulo $|X(w)| = 1$
- fase $\angle X(w) = w$
- <u>transformada inversa do pulso</u> → $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w) e^{jwt} dw = \frac{1}{2\pi} e^{jwt}|_{w=0} = \frac{1}{2\pi}$

- **tópico 3: propriedades da transformada de fourier**

– linearidade → $a x_1(t) + b x_2(t) \Leftrightarrow a X_1(w) + b X_2(w)$

– dualidade tempo - frequência → se $x(t) \leftrightarrow X(w)$, então $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-w)$

– escalonamento → $\mathfrak{F}(x(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-jwt} dt = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$

- se um sinal é comprimido no tempo, sua transformada de fourier se expande no domínio da frequência

– deslocamento no tempo → $\mathfrak{F}(x(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-jwt} dt = e^{-jwt_0} X(w)$

– deslocamento na frequência → como $x'(t) = e^{jw_0t} x(t)$, temos $x(t)\cos(w_0t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(X(w-w_0) + X(w+w_0))$

- $X(\omega - \omega_0) \Longleftrightarrow \exp(j\omega_0 t)x(t)$

– convolução → $\mathfrak{F}\{x_1 * x_2\} = X_2(w) X_1(w)$

- **tópico 4: resposta em frequência de sistemas LTI**

– a resposta ao impulso de um sistema LTI carrega toda a informação necessária para descrever o comportamento de entrada do sistema. → a mesma deve valer para a transformação de fourier!

– autofunção do sistema LTI → função exponencial, pois, quando a entrada é exponencial, a saída é a própria exponencial modulada por um valor complexo avaliado em $w = w_0$

- $y(t) = e^{jw_0t} \overbrace{H(w_0)}^{\text{autovalor}}$

  ↳ <u>definição da transformada de fourier</u> → $H(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jwt} dt$

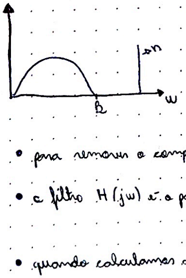
- **atenção!** → $\boxed{z = a + jb}$ $\boxed{\angle z = \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$ $\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\,\text{sen}(\theta)}$

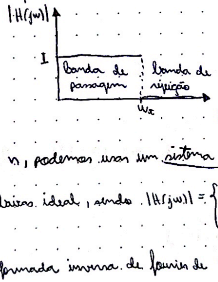
- Parte par de uma função -> $x(t)$ par $= \frac{x(t) + x(-t)}{2}$
- Parte ímpar de uma função -> $x(t)$ ímpar $= \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

filtros

- os filtros são característicos pela sua resposta em frequência $\boxed{H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta_H}}$
- quando colocamos um sinal no filtro,
  - $Y(j\omega) = H(j\omega)\, X(j\omega)$
  - $|Y(j\omega)|\, e^{j\theta_Y} = |H(j\omega)|\, e^{j\theta_H} \cdot |X(j\omega)|\, e^{j\theta_X}$
- logo,
  - $|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)|$
  - $\underline{/Y(j\omega)} = \underline{/X(j\omega)} + \underline{/H(j\omega)}$
- distorção de amplitude $\rightarrow$ acontece quando $|H(j\omega)|$ não é constante para todas as frequências
- distorção de fase $\rightarrow$ para evitar a distorção de fase, $y(t) = x(t - t_0)$

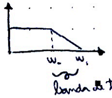
  $\hookrightarrow$ para garantir a distorção de fase, $\underline{/H(j\omega)} = -\omega t_0$
- sem distorção $\rightarrow$ para que não ocorra nenhuma distorção, $\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \underline{/H(j\omega)} = -\omega t_0 \end{cases}$
- exemplo $\rightarrow$ vamos imaginar o seguinte sinal



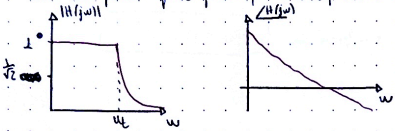


  - para remover a componente n, podemos usar um sistema com resposta
  - o filtro $H(j\omega)$ é o passa-baixas ideal, sendo $|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \omega \geq \omega_0 \end{cases}$
  - quando calculamos a transformada inversa de Fourier de $H(j\omega)$,

    $h(j\omega) \rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega} \, d\omega = \text{sinc}(\omega_0 t / \pi) \rightarrow h(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right)$
  - como o sinc tem duração infinita, $h(t)$ não é realizável.
- filtros reais $\rightarrow$



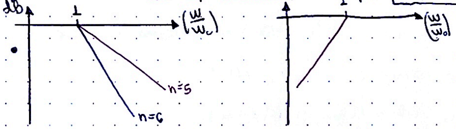
- um exemplo de filtro que cumpre esses requisitos é o filtro butterworth



- o filtro butterworth tem uma forma analítica para $|H(jw)|$ → $\boxed{|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{w_0}{w}\right)^{2N}}}}$, onde ε determina a suavidade da transição e N é a ordem do filtro

- maior ordem = maior seletividade = maior a distorção

- para construir um filtro passa-altas, podemos fazer $\boxed{H_{PA} = 1 - H_{PB}}$ quando H_{PB} é ideal



passa-baixas   passa-altas

- para um filtro passa-faixa, $H_{PF} = H_{PB} \cdot H_{PA}$ → separa uma frequência
- o filtro rejeita-faixa pode ser construído como → $H_{PF} = H_{PA} + H_{PB}$
- $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N\left(\frac{w}{w_0}\right)}^{2N}}$

  ↳ polinômio de chebyshev

- exemplo
  - $f_p = 10\,KHz$ $f_0 = 15\,KHz$ atenuação BP = 1dB atenuação BR = 25dB
  - usando log, em w_0 $|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$
  - $A_{dB} = 10\left[\log(1) - \frac{\log(1+\varepsilon^2)}{2}\right]$
  - qual é o ε que me dá no máximo 1dB de manutenção?
  - $-1 = 10 \cdot \left(-\frac{\log(1+\varepsilon^2)}{2}\right) \rightarrow \varepsilon = 0{,}5088$
  - lembrando: $A_{dB} = 10\log_{10}(A)$, sendo $A = |H(jw)|$
  - para descobrir ordem, $-25 = \frac{1}{1+0{,}508^2\left(\frac{15}{10}\right)^{2N}}$

Apêndice A

Ortogonalidade de funções senoidais

Vamos discutir aqui a ortogonalidade dos sinais utilizados como base para a decomposição de sinais nas séries de Fourier discutidas no Capítulo 3. Para essa análise vamos utilizar a definição de produto interno entre sinais apresentada em 3.6. Vamos considerar que os sinais estão sendo integrados sobre um período completo T_0 (ou um múltiplo inteiro de T_0).

A.1 $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}
\int_{T_0} \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt &= \frac{1}{2}\int_{T_0} \sin(2\omega t)dt \\
&= -\frac{1}{4\omega}[\cos(2\omega t)]_0^{T_0} \\
&= -\frac{1}{4\omega}(\cos(2\omega T_0) - \cos(0)) \\
&= -\frac{1}{4\omega}(\cos(4\pi) - 1) \\
&= -\frac{1}{4\omega}(1 - 1) = 0
\end{aligned}$$

A.2 $\sin(\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$

$$\begin{aligned}
\int_{T_0} \sin(\omega t)\sin(n\omega t)dt &= \frac{1}{2}\int_{T_0} [\cos((n-1)\omega t) - \cos((n+1)\omega t)]dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)\omega}\sin((n-1)\omega t) - \frac{1}{(n+1)\omega}\sin((n+1)\omega t)\right]_0^{T_0} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)\omega}\sin((n-1)\omega T_0) - \frac{1}{(n+1)\omega}\sin((n+1)\omega T_0)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

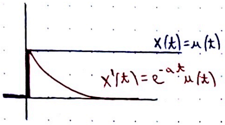
Evidentemente, para $n \neq 1$.

A.3 $e^{j\omega t}$ e $e^{jn\omega t}$

$$
\begin{aligned}
\int_{T_0} e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} dt &= \int_{T_0} e^{j(1-n)\omega t} dt \\
&= \left[\frac{1}{j(1-n)\omega} e^{j(1-n)\omega t} \right]_0^{T_0} \\
&= \frac{1}{j(1-n)\omega} (e^{j(1-n)\omega T_0} - e^0) \\
&= \frac{1}{j(1-n)\omega} (e^{j(1-n)2\pi} - 1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Exercícios - análise de sinais

1.



transformada da função azul $\rightarrow$ $X(w) = \int_0^{\infty} e^{-jwt} dt = \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{jw}$

transformada da função vermelha $\rightarrow$ $X(w) = \int_0^{\infty} e^{(-a-jw)t} dt = \frac{1}{-a-jw} e^{-at-jwt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{jw+a}$

vamos decompor em parte real e imaginária:

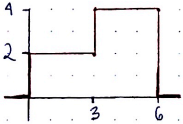
$X(w) = \underbrace{\frac{a}{a^2+w^2}}_{} + \frac{1}{jw}$

$\rightarrow$ energia $= \pi$, logo $X(w) = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$

$\rightarrow$ sempre que E_x não for limitada.

isso porque para $x'(t) \rightarrow x(t)$, $\lim_{a \to 0} x'(t) = \frac{1}{jw}$

2.



transformada da função $\rightarrow$ $X(w) = \underbrace{\int_0^3 2e^{-jwt}}_{} + \underbrace{\int_3^6 4e^{-jwt}}_{}$

$\frac{-2e^{-jwt}}{jw}\Big|_0^3 + \frac{-4}{jw} e^{-jwt}\Big|_3^6$

logo, temos $X(w) = \frac{-2e^{-3jw}}{jw} + \frac{2}{jw} - \frac{4(e^{-3jw})^2}{jw} + \frac{4e^{-3jw}}{jw}$

$X(w) = \frac{2e^{-3jw}}{jw} + \frac{2}{jw} - \frac{4e^{-6jw}}{jw}$

Exercícios - análise de sinais

3. Nós temos $x(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$ e queremos encontrar a faixa de frequência em que o sinal está em 95% a preservação da energia (frequência de corte mínima)

Pela tabela, $e^{-a|t|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ e, pela dualidade, $e^{-a|\omega|} \longleftarrow \frac{2a}{a^2+t^2}$

A energia do sinal x é: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}|X(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$

Portanto, queremos encontrar os limites de integração tal que: $\boxed{\int_{-B}^{B} |X(\omega)|^2 d\omega = 0{,}95\, E_x}$