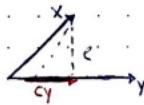


Componentes vetoriais

- definimos para os vetores x, y $|x \cdot y| = |x| |y| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre x e y

- se y é a projeção de x na direção de y , e podemos escrever x como $x = cy + e$



- coeficiente da projeção ortogonal $\rightarrow c = \frac{1}{|y|^2} x \cdot y$

- podemos estender a ideia de projeção ortogonal para sinalos

- vamos procurar uma aproximação do sinal $x(t)$ em termos de um segundo sinal $y(t)$

$$\bullet x(t) \approx cy(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\bullet \text{erro de representação} \rightarrow e(t) = \begin{cases} x(t) - y(t), & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

\bullet vamos tentar minimizar a energia de $e(t)$. $\rightarrow E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)]^2 dt$

$$\bullet \frac{dE_e}{dt} = 0$$

\bullet a partir dessa equação, temos que

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y(t) dt$$

projeção em um espaço de sinalos ortogonais

p. elemento da base

- para decompor $x(t)$ na direção de $x_i(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$,

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

- se o conjunto da base for ortogonal, $E_e = E_x - \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n$

série de Fourier

- vamos escolher como base o conjunto $\{\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ para representar os sinalos periódicos

- a frequência fundamental ω_0 no intervalo de decomposição $[t_1, t_2]$ que na verão caso seja T_0 , tal que $x(t) = x(t + T_0)$ e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

série trigonométrica de Fourier

$$- X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_0 t_n) + b_n \sin(\omega_0 t_n)]$$

$\downarrow a_0 \cos(\omega_0 t)$

- $a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} X(t) \cos(n\omega_0 t) dt$

- $b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} X(t) \sin(n\omega_0 t) dt$

- $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} X(t) dt \rightarrow$ média nível DC (média do sinal no tempo de período)

série trigonométrica compacta

$$- X(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$- C_0 = a_0$$

$$- C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \rightarrow$$
 módulo

$$- \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \rightarrow$$
 fase

série exponencial de Fourier

- a base da série são: $\{e^0, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, \dots\}$

$$- X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

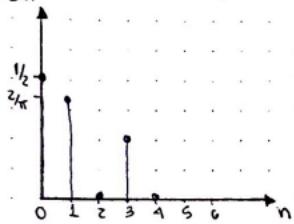
- $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

- $\text{se } X(t) = x^*(t), \text{ em sinal, for real, } D_n = D_n^*$

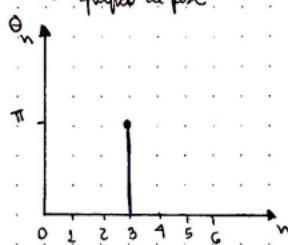
Especro de Fourier

- No exemplo da onda quadrada, $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$
- $\underbrace{\quad}_{\text{termo de fase}}$
 $\left(\frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t + \phi) \right)$, já que ωt é negativo.

- gráfico da amplitude



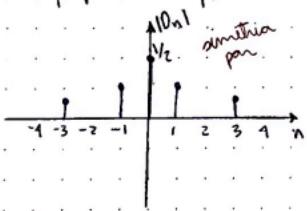
- gráfico de fase



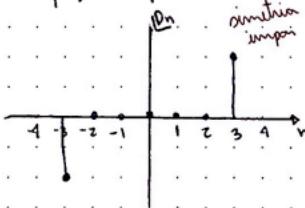
- No caso da série exponencial, quando $x(t) \propto e^{j\omega t}$, $c_n = \delta_{n,-m}$ (ou seja, possui simetria par) quanto à amplitude e simetria ímpar para a fase

- Exemplo, apesar de ter coeficientes e valores negativos, podemos apenas olhar para os casos positivos e descrever os outros valores.

- gráfico da amplitude



- gráfico de fase



- A largura de banda de um sinal é o "tamanho" do espaço ocupado por ele no espectro.

Teorema de Parseval

- $x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

- A potência total será a soma das potências (os coeficientes mostram o quanto influencia)

- Potência total = $c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$
 → intensidade das componentes (ou seja, fase não importa).

relação entre coeficientes

- como as séries precisam ser iguais, temos que $a_0 = c_0 = b_0$

- $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\theta_n = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ → mudança para série compacta

- $a_n - jb_n = c_n e^{j\theta_n} = 2b_n$ e $|c_n| = 2b_n$ e $\theta_n = \operatorname{Im}$

- exemplo

$$\bullet x(t) = \underbrace{b_0}_{=2} + 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) + 2 \sin(3t + 53,13^\circ) - \cos(7t + 150^\circ)$$

$$a_0 = c_0 = b_0 = 2$$

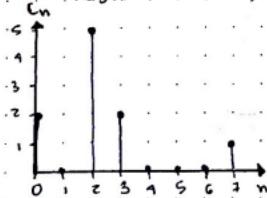
$$n=2, \text{ temos } 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) = 5 \cos(2t - 53,13^\circ)$$

$$n=3, \text{ temos } 2 \sin(3t + 30^\circ) = 2 \cos(3t - 60^\circ)$$

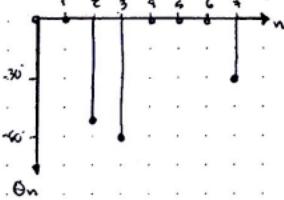
transformação direta de sen para cos

$$n=7, \text{ temos } -\cos(7t + 150^\circ) = \cos(7t + 150^\circ - \pi) = \cos(7t - 30^\circ)$$

$$\bullet \text{nos termos: } c_0 = 2, c_1 = 0, c_2 = 5, c_3 = 2, c_7 = 1$$



$$\bullet \text{nos termos: } \theta_0 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = -53,13^\circ, \theta_3 = -60^\circ, \theta_7 = -30^\circ$$



convergência da série de Fourier

- os coeficientes a_0, a_n e b_n são determinados a partir de

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{array} \right.$$

- para que os coeficientes existam, precisamos que

$$\int_{t_0}^{\infty} |X(t)| dt < \infty$$

- além disso, precisamos que

- $X(t)$ deve ser absolutamente integrável em um período

- $X(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades finitas em um período

- $X(t)$ deve ter um número finito de máximas e mínimas em um período

propriedades da série de Fourier

- linearidade \rightarrow sejam $x(t)$ e $y(t)$ duas ondas diferentes com período T_0 onde:

- para $x(t)$, $D_{IN} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt$

- para $y(t)$, $D_{2N} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j\omega_0 t} dt$

- se tivermos $z(t) = \alpha x(t)$, $D'_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-j\omega_0 n t} dt = \alpha D_{IN}$

- se tivermos $z(t) = x(t) + y(t)$, $D'_n = D_{IN} + D_{2N}$

- deslocamento no tempo \rightarrow se $x(t)$ com período T_0 e coeficiente D_{IN} , se tivermos $x(t-t_0)$

- $D'_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t-t_0) e^{-j\omega_0 n t} dt$, usando $j = t - t_0$, temos

$$D'_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(j) e^{-j\omega_0 n (j+t_0)} dj = \frac{1}{T_0} e^{j\omega_0 n t_0} \int_{T_0} x(j) e^{-j\omega_0 n j} dj = [e^{j\omega_0 n t_0}] D_{IN}$$

o módulo 1

- derivação $\rightarrow \frac{dX(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty} D'_n e^{jn\omega_0 t}$, com $D'_n = (jn\omega_0) D_n$.

- dualidade \rightarrow existe uma relação simétrica entre o domínio de tempo e o da frequência

- se $x(t)$ sua transformada $X(w)$, então $x(t)$ sua transformada proporcional a $x(-w)$

- escalonamento \rightarrow se $x(t) \rightarrow X(w)$, vamos procurar a transformada de $x(at)$

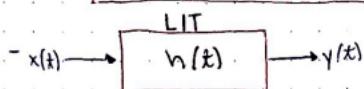
- $F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du$

- $X'(w) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$

Série de Fourier e sistemas LIT

- se $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}$, então, pela propriedade de linearidade e antievolução, a saída é dada por

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(j k \omega_0) e^{j k \omega_0 t}$$



Filtros

Filtros passa-baixas (FB)

- a fazenda de passagem especifica as frequências que são preservadas
- perfeitamente plana na faixa de passagem + resposta nula na faixa de rejeição + transição entre faixas é instantânea e acena na frequência de corte W_c .