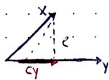


Componentes ortogonais

- definimos para os vetores x, y $x \cdot y = |x||y| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre x e y

- $c y$ é a projeção de x na direção de y e podemos escrever x como $x = c y + e$



- coeficiente da projeção ortogonal $\rightarrow c = \frac{1}{|y|^2} x \cdot y$

- podemos estender a ideia de projeção ortogonal para sinais

- vamos procurar uma aproximação do sinal $x(t)$ em termos de um único sinal $y(t)$

$$x(t) \approx c y(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

• erro de representação $\rightarrow e(t) = \begin{cases} x(t) - y(t), & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

• vamos tentar minimizar a energia de $e(t)$. $\rightarrow E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)]^2 dt$
 $\hookrightarrow \frac{dE_e}{dc} = 0$

• a partir dessa equação, temos que

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) dt$$

projeção em um espaço de sinais ortogonais

- para decompor $x(t)$ na direção de $x_i(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$, $\xrightarrow{\text{elementos da base}}$

$$x(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

- se o conjunto da base for ortogonal, $E_e = E_x - \sum_{n=1}^N c_n^2 E_n$

série de Fourier

- vamos escolher como base o conjunto $\{\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ para representar os sinais periódicos.

- a frequência fundamental ω_0 no intervalo de decomposição $[t_1, t_2]$ que no nosso caso será t_0 tal que $x(t) = x(t + t_0)$ e $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

série trigonométrica de Fourier

$$x(t) = \boxed{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

↖ $a_0 \cos(0\omega_0 t)$

$$\bullet a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$\bullet b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \rightarrow \text{média nível DC (média do sinal ao longo do período)}$$

série trigonométrica compacta

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \rightarrow \text{módulo}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \rightarrow \text{fase}$$

série exponencial de Fourier

- a base da série são $\{e^j, e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}, \dots\}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

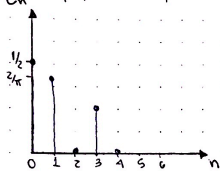
$$\bullet D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- se $x(t) = x^*(t)$, ou seja, for real, $D_n = D_n^*$

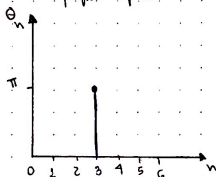
espectro de fourier

- no exemplo da onda quadrada, $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t) + \dots$
 $\left(\pm \frac{2}{3\pi} \cos(3t + \pi) \right)$, já que $+\pi$ para negativo

• gráficos da amplitude



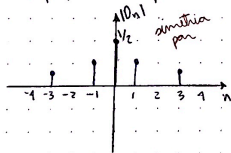
• gráficos de fase



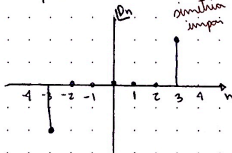
- no caso da série exponencial, quando $x(t) \in \mathbb{R}$, $D_n = D_{-n}^*$. (ou seja, possui simetria por conjugado a amplitude e simetria ímpar para a fase)

- logo, apesar de ter coeficientes e valores negativos, podemos apenas olhar para os casos positivos e descrever os outros valores.

• gráficos da amplitude



• gráficos de fase



- a largura de banda de um sinal é o "tamanho" do espaço ocupado por ele no espectro

- teorema de parseval

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

- a potência total seria a soma das potências (os coeficientes mostram o quanto influencia)

$$\text{Potência total} = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

↳ intensidade das componentes (ou seja, fase não interfere).

relação entre coeficientes

- como as séries precisam ser iguais, temos que $a_0 = c_0 = b_0$

- $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\theta_n = \text{tg}^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \rightarrow$ mudança para série compacta

- $a_n - j b_n = C_n e^{j\theta_n} = 2 D_n$ e $C_n = 2 |D_n|$ e $\theta_n = \angle D_n$

- exemplo

$$x(t) = 3 + 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) + 2 \sin(3t + 30^\circ) - \cos(7t + 150^\circ)$$

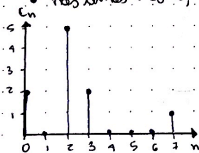
$$a_0 = c_0 = b_0 = 2$$

$$n=2, \text{ pois que temos } 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t) = 5 \cos(2t - 53,13^\circ)$$

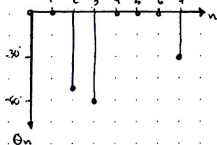
$$n=3, \text{ pois que temos } 2 \sin(3t + 30^\circ) = 2 \cos(3t - 60^\circ) \rightarrow \text{transformação direta de sen para cos}$$

$$n=7, \text{ temos } -\cos(7t + 150^\circ) = \cos(7t + 150^\circ - \pi) = \cos(7t - 30^\circ)$$

$$\bullet \text{ nos temos: } c_0 = 2, c_1 = 0, c_2 = 5, c_3 = 2, c_7 = 1$$



$$\bullet \text{ nos temos: } \theta_0 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = -53,13^\circ, \theta_3 = -60^\circ, \theta_7 = -30^\circ$$



construção da série de fourier

- os coeficientes a_0, a_n e b_n são determinados a partir de

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

- para que os coeficientes existam, precisamos que $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$

- além disso, precisamos que

- $x(t)$ deve ser absolutamente integrável em um período
- $x(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades finitas em um período
- $x(t)$ deve ter um número finito de máximos e mínimos em um período

propriedades da série de Fourier

- linearidade \rightarrow sejam $x(t)$ e $y(t)$ duas séries diferentes com período T_0 onde:

- para $x(t)$, $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j\omega_n t} dt$

- para $y(t)$, $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j\omega_n t} dt$

- se tivermos $y(t) = a x(t)$, $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j\omega_n t} dt = a D_n$

- se tivermos $y(t) = x(t) + y(t)$, $D_n = D_n + D_n$

- deslocamento no tempo \rightarrow se $x(t)$ com período T_0 e coeficiente D_n , se tivermos $x(t-t_0)$

- $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t-t_0) e^{-j\omega_n t} dt$, usando $s = t - t_0$, temos

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(s) e^{-j\omega_n (s+t_0)} ds = \frac{1}{T_0} e^{-j\omega_n t_0} \int_{T_0} x(s) e^{-j\omega_n s} ds = \boxed{e^{-j\omega_n t_0}} D_n$$

↳ módulo 1

- derivação $\rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_n t}$, com $D'_n = (j\omega_n) D_n$

- dualidade \rightarrow existe uma relação simétrica entre o domínio do tempo e o da frequência

- se $x(t)$ tem transformada $X(\omega)$, então $x(t)$ tem transformada proporcional a $x(-\omega)$

- escalonamento \rightarrow se $x(t) \rightarrow X(\omega)$, vamos procurar a transformada de $x(at)$

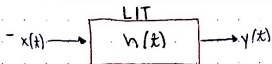
- $F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du$

- $X'(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

série de fourier e sistemas LIT

- se $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$, então, pela propriedade de linearidade e invariância, a saída é dada

por $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$



filtragem

- filtro passa-baixas (FPB)

- a faixa de passagem especifica as frequências que são preservadas
- perfeitamente plana na faixa de passagem + rejeita tudo na faixa de rejeição + transição entre faixas e instantânea e ocorre na frequência de corte ω_c