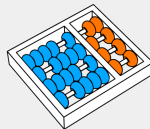


MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

13 de novembro de 2025



Instituto de computação



UNICAMP

- 1 Estimativas assintóticas para relações de recorrência
- 2 Estimativas assintóticas com variável extra
- 3 Perguntas, observações, comentários?

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para alguns tipos específicos de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para alguns tipos específicos de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Mas, e se só estivermos interessados em achar uma estimativa assintótica?

Então, achar uma fórmula fechada pode ser desnecessariamente trabalhoso...

Já vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1 \in O(2^n)$.

Então, é natural achar que $g(n) = 2g(n-1) - 1 \in O(2^n)$.

Como podemos provar isso?

Considere $g(0) = 1$.

Provamos, por indução matemática, que $g(n) \in O(2^n)$, onde $g(0) = 1$ e $g(n) = 2g(n-1) - 1$ para $n \geq 1$.

- Normalmente, fazemos um rascunho do passo indutivo e do caso base para achar as constantes c e n_0
- Depois, provamos de fato, usando indução, que

$$\forall n \geq n_0, P(n)$$

onde $P(n) \Leftrightarrow (g(n) \leq c2^n)$

- Você não deve provar que para todo n , $f(n) \in O(g(n))$
- As constantes c e n_0 não podem mudar no caso base, no passo e na HI

Exemplo com passo multiplicativo

Em vez de definirmos a relação de recorrência em função de um passo $n - k$, vamos considerar n/k .

Por exemplo:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar g tal que $f(n) \in O(g(n))$.

Exemplo com passo multiplicativo

Agora considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Estimativas assintóticas com variável extra

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese de indução supondo algo como $f(k) \leq cg(k) + d(k)$ e depois ajustamos $d(k)$ para obtermos o que queremos.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese de indução supondo algo como $f(k) \leq cg(k) + d(k)$ e depois ajustamos $d(k)$ para obtermos o que queremos.

Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n-1) + 9 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos tentar provar que $f(n) \in O(2^n)$ primeiro usando $P(i) = "f(i) \leq c \cdot 2^i"$ depois usando $P(i) = "f(i) \leq c \cdot 2^i + d(i)"$.

Como escolher a expressão $d(n)$?

Normalmente, escolher algo parecido com o termo que queremos eliminar já funciona.

Por exemplo:

- p/ eliminar 9: podemos escolher $d(n)$ constante
- p/ eliminar $5 \cdot n$: podemos escolher $d(n) = \alpha \cdot n + \beta$ (linear)
- etc...

Perguntas, observações, comentários?