lista 05 - questões opcionais

1. Para R ser uma relação de equivalência, ela precisa ser:

1. Simétrica

Nós temos que $(a,b) \in R$ se $ab > 0$.

$(b,a) \in R \Leftrightarrow ba > 0$ e como $ab = ba$, temos uma simetria.

Logo, R é simétrica.

2. Reflexiva

Seja $a \in \mathbb{Z}^*$, nós temos que $aa > 0$. Logo, $(a,a) \in R$, mostrando que a relação é reflexiva.

3. Transitiva

Seja $a,b,c \in \mathbb{Z}^*$. Nós temos que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$. Logo,

$ab > 0$ e $bc > 0$. Isso significa que $(ab)(bc) > 0 \Leftrightarrow acb^2 > 0$. Como

$b^2 > 0$, temos que $ac > 0$. Logo, $(a,c) \in R$, mostrando que R é uma

relação transitiva.

Como R é simétrica, reflexiva e transitiva, podemos afirmar que R é uma relação de equivalência.

Para encontrar as classes de equivalência, vamos analisar o caso de um inteiro positivo e um negativo. Seja $a \in \mathbb{Z}^*$, $a > 0$, temos que $[a]_R = \{b \in \mathbb{Z}^* \mid b > 0\}$, já que $a \cdot b$ precisa ser maior que 0

Já quando $a < 0$, b precisa ser menor do que 0. Logo, temos que

$\mathbb{Z}^*/R = \{[-1]_R, [1]_R\} = \{\mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Z}_{>0}\}$

lista 05 - exercícios opcionais

2. Para que R seja uma relação de equivalência, ela precisa ser reflexiva, simétrica e transitiva simultaneamente.

1. Reflexiva

Nós temos que $f(x) = f(x)$. Logo, como $(x,y) \in R \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, então $(x,x) \in R$. Então, R é reflexiva.

2. Simétrica

Seja $(a,b) \in R$, então $f(a) = f(b)$, o que pode ser reorganizado para $f(b) = f(a)$ $\Leftrightarrow (b,a) \in R$. Portanto, R é simétrica.

3. Transitiva

Seja $(a,b,c) \in Dom(f)$ e $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$.

Como $(a,b) \in R$, temos que $f(a) = f(b)$.

Como $(b,c) \in R$, temos que $f(b) = f(c)$

Assim, se $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$, podemos substituir, na primeira igualdade, $f(b)$ por $f(c)$. Logo $f(a) = f(c) \Leftrightarrow (a,c) \in R$.

Portanto, R é uma relação transitiva

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, podemos defini-la como uma relação de equivalência.

As classes de equivalência são os conjuntos das pré-imagens de cada valor de f.

$[x] = \{ y \in Dom(f) \mid f(y) = f(x) \}$

lista 05 - exercícios opcionais

3. Suponha por absurdo que a equação possui solução inteira.

Nós temos que $7 \equiv 1 \mod 3$ e $7^{2000} = 1 \mod 3$.

Logo, podemos substituir os valores da equação pelo valor em mod 3.

Temos que $14 = 2 \mod 3$ e $15 = 0 \mod 3$. Portanto,

$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000} \iff 2x^2 + 0y^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Assim, temos $2x^2 \equiv 1 \mod 3$.

Para que isso seja verdade, fazemos a seguinte conversão:

Um número a tem inverso módulo n se existe b tal que $a \cdot b \equiv 1 \mod (n)$

Nesse caso, o inverso de 2 mod 3 é o próprio 2.

Agora, podemos dividir os 2 lados por 2 multiplicando pelo inverso multiplicativo de 2 mod 3

Assim, $2 \cdot 2x^2 \equiv 2 \cdot 1 \mod 3 \iff 4x^2 \equiv 2 \mod 3$. Como $4 \equiv 1 \mod 3$,

$x^2 \equiv 2 \mod 3$.

Mas, temos que os possíveis quadrados mod 3 são:

se $x \equiv 0 \mod 3$, $x^2 \equiv 0$

$x \equiv 1 \mod 3$, $x^2 \equiv 1$

$x \equiv 2 \mod 3$, $x^2 \equiv 4 \equiv 1$

Logo, só existem 2 restos quadrados possíveis: 0 e 1.

Como 2 não pertence ao conjunto $\{0, 1\}$, então $x^2 \equiv 2 \pmod 3$ é impossível e portanto a equação <u>não</u> possui solução inteira lista 05 - questões opcionais

4.

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$.

Nós temos que $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \equiv 0 \mod 133$.

Primeiramente, vamos trabalhar com cada elemento da soma de forma isolada.

$(11^{n+2}) \equiv 0 \mod 133$ e $12^{2n+1} \equiv 0 \mod 133$

$11^2 \cdot 11^n \equiv 0 \mod 133$. e $12^{2n} \cdot 12 = 0 \mod 133$.

$121 \cdot 11^n \equiv 0 \mod 133$. e $144^n \cdot 12 = 0 \mod 133$.

Nós sabemos que $121 = 133 - 12$. Logo, $121 \equiv -12 \mod 133$.

$-12 \cdot 11^n = 0 \pmod{133}$

Paralelamente, $144^n = (\underbrace{133}_{0} + 11)^n \Rightarrow 144 = 11^n \Rightarrow 11^n \cdot 12 = 0 \mod 133$

Logo, juntando, temos $-12 \cdot 11^n + 11^n \cdot 12 = 0 \mod 133 \Leftrightarrow 0 \equiv 0 \mod 133$.

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$.

- observação $\rightarrow$ o truque usado ~~em~~ nesse exercício é que podemos substituir qualquer número por outro que tenha o mesmo resto quando dividido pelo n de mod n

Lista 05 - exercícios opcionais

4. b) Nós temos que $n^3 - n \equiv 0 \pmod 6$.

isso pode ser dividido em $n^3 - n \equiv 0 \pmod 2$ e $n^3 - n \equiv 0 \pmod 3$.

Para o 1º caso, temos que:

As opções para o resto de 2 são 0 e 1. Se o número for par, temos que $n = 2K$ e $n \equiv 0 \pmod 2$ e $n^3 \equiv 0 \pmod 2$.

Agora, se o número for ímpar, temos que $n \equiv 1 \pmod 2$ e $n^3 \equiv 1 \pmod 2$.

Como $n \equiv n^3$, então $n^3 - n = 0$. Logo, $n^3 - n \equiv 0 \pmod 2$ é válido para todos os naturais.

Para $n^3 - n \equiv 0 \pmod 3$, temos que os restos para $\pmod 3$ podem ser $\{0, 1, 2\}$.

Se $n = 3K$, temos que $n^3 = 3^3K^3 = 27K^3$. Logo, $n \equiv n^3 \equiv 0 \pmod 3$.

Se $n = 3K+1$, temos que $n^3 = (9K^2 + 6K + 1)(3K+1) = 27K^3 + 9K^2 + 18K^2 + 9K + 1$

$\Leftrightarrow n^3 = 3(9K^3 + 9K^2 + 3K) + 1$. Logo, $n^3 \equiv n \equiv 1 \pmod 3$.

Por fim, $n = 3K+2$, temos que $n^3 = (9K^2 + 12K + 4)(3K+2) = 27K^3 + 18K^2 + 36K^2 + 24K + 12K + 8$

$\Leftrightarrow n^3 = 3(9K^3 + 18K^2 + 12K + 2) + 2$.

Portanto, como $n \equiv n^3$ em todos os casos, temos que $n^3 - n \equiv 0 \pmod 3$

Dessa forma, como $n^3 - n \equiv 0 \pmod 3$ e $n^3 - n \equiv 0 \pmod 2$, temos que $n^3 - n \equiv 0 \pmod 6$ para $\forall n \in \mathbb{N}$.

Data: S T Q Q S S D

lista 05 - questões opcionais

5. Nós temos que provar que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $(3+k11)^{9^{821}} - 4 \equiv 0 \pmod{11}$

Primeiramente, temos que $11 \equiv 0 \pmod{11}$. Logo,

$$(3)^{3^{2\cdot 821}} - 4 = 3^{3^{1642}} - 4 \pmod{11}$$

Nós sabemos que $3\cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243 = 3^5 \equiv 1 \pmod{11}$

Logo, $(3^5)^n \equiv 1^n \pmod{11}$

$$\frac{1642\cdot 3}{5} = \frac{4926}{5} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 4926 & 5 \\ 42 & 985 \\ 26 & \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 3^{3^{1642}} = 3 \cdot \underbrace{3^{5\cdot 985}}_{1}$$

$$3 - 4 \equiv -1 \neq 0 \pmod{11}$$