S T Q Q S S D Data: . .

lista 04 - questões opcionais

1. Nós temos que provar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e maior ou igual a 2 e para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, existe um único $y \in \{x+1, x+2, \dots, x+n\}$ tal que $n \mid y$.

Primeiramente, temos que $n \mid y \iff y = k \cdot n$, sendo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, para realizar essa prova, precisamos dividí-la em 2 partes: provar que y existe e depois provar que y é único.

1) y existe.

Seja $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ e $x \in \mathbb{Z}$. Temos que existe $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $x = q \cdot n + r$.

Seja $k = n - r$. Temos que para $k > 0$, $x < x + k \leq x + n$, posto que o menor valor possível de r é 0.

Assim, temos $x + k \in \{x+1, x+2, x+3, \dots, x+n\}$ e sabemos que $x + k =$

$qn + r + n - r = (q+1)n$ e, portanto, $n \mid (x+k)$ para algum valor de k.

Logo, sendo $y = x + k$, está provado que existe y tal que $n \mid y$.

2) y é único.

Sejam y' e $y'' \in \{x+1, x+2, \dots, x+n\}$ e $n \mid y'$ e $n \mid y''$. Suponha por absurdo que $y' \neq y''$, temos que: $y' = q' \cdot n$ e $y'' = q'' \cdot n$.

Supondo que $y'' > y'$, já que são diferentes, podemos reescrever y'' como

$y'' = y' + q'' \cdot n$ para $q'' \geq 1$.

existe $k' \in \{1, \dots, n\}$, $y' = x + k'$ e, portanto, $y'' = x + k' + q'' \cdot n > x + n$.

Isso é um absurdo, pois $y'' \leq x + n$.

Data: . .

S T Q Q S S D

Lista 04 - questões opcionais

2. $R_1 = \{1,2\}$ $R_1^{-1} = \{2,1\}$

$R_2 = \{1,0\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,0\}, \{2,1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,0\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,4\}$

$R_3 = \{1,1\}$

Assim, temos que $R_1 \circ R_2 = \{2,2\}, \{3,2\}$

$R_2 \circ R_1 = \{1,0\}, \{1,1\}, \{1,3\}, \{1,4\}$

$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = \{1,1\}$

$R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{2,2\}, \{2,3\}$

3. Primeiramente, nós temos que $R^n = \underbrace{R \circ R \circ R \ldots R}_{n \text{ vezes}}$

Por definição, uma relação é transitiva se $\forall (x,y,z) \in X$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.

Assim, se $(a,b) \in R$, $(a,b) \in R^n$ se, e somente se, existe uma sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de elementos em X tal que:

$a_0 = a$, $a_n = b$, e $a_i R a_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$

1) prova da ida: se R é transitiva, então $R^n \subseteq R$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

base: $n=1$. Nós temos que $R^1 \subseteq R$, já que $R = R$. Logo, é válido para $n=1$.

hipótese por indução: $\exists k \geq 1$ tal que $R^k \subseteq R$.

passo de indução: queremos provar que $R^{k+1} \subseteq R$ também vale

seja $(a,b) \in R^{k+1}$. Pela definição da composição de relações, $R^{k+1} = R \circ R^k$.

então, existe um elemento $c \in X$ tal que $(a,c) \in R^k$ e $(c,b) \in R$

Pela hipótese da indução, se $(a,c) \in R^k$, então $(a,c) \in R$.

Como $(a,c) \in R$ e $(c,b) \in R$ e R é transitiva, concluímos que $(a,b) \in R$.

Logo, $(a,b) \in R$ para todo $(a,b) \in R^{k+1}$.

Portanto $R^{k+1} \subseteq R$.

lista 04 - questões ~~[illegible]~~ opcionais

3. 2) prova da volta: se $R^n \subseteq R$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então R é transitiva

Pela definição da composição de relações, se $(a,c) \in R^2 \Rightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$, sendo $b \in A$.

Assim, se aRb e bRc, então $(a,c) \in R^2$.

Como $R^2 \subseteq R$, $(a,c) \in R$.

Logo, a condição de transitividade é satisfeita.

4.

a) $(c,d) \in T$: $c \in C$ e $d \in D$

$(a,b) \in R$, sendo $a \in A$ e $b \in B$

$(b,c) \in S$, sendo $b \in B$ e $c \in C$

Nós temos que $S \circ R = \{(a,c) \in A \times C : \exists (a,b) \in R \wedge \exists (b,c) \in S\}$

$T \circ (S \circ R) = \{(a,d) \in A \times D : \exists (a,c) \in S \circ R \wedge \exists (c,d) \in T\}$

Paralelamente, $T \circ S = \{(b,d) \in B \times D : \exists (b,c) \in S \wedge \exists (c,d) \in T\}$

$(T \circ S) \circ R = \{(a,d) \in A \times D : \exists (a,b) \in R \wedge \exists (b,d) \in (T \circ S)\}$

b) Nós temos que $(T \circ (S \circ R))^{-1} = \{(d,a) \in D \times A : (a,d) \in (T \circ (S \circ R))\}$

Simultaneamente, $S^{-1} = \{(c,b) \in C \times B : (b,c) \in S\}$

$T^{-1} = \{(d,c) \in D \times C : (c,d) \in T\}$

$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}$

Então, $S^{-1} \circ T^{-1} = \{(d,b) \in D \times B : \exists (c,b) \in S^{-1} \wedge \exists (d,c) \in T^{-1}\}$

$R^{-1} \circ (S^{-1} \circ T^{-1}) = \{(d,a) \in D \times A : \exists (b,a) \in R^{-1} \wedge \exists (d,b) \in S^{-1} \circ T^{-1}\}$

observação: como visto em aula, temos o seguinte lema: para quaisquer conjuntos X, Y, Z e relações $U \subseteq X \times Y$ e $V \subseteq Y \times Z$, temos $(V \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1}$.

Data:

lista 04 - questões opicionais

5. Nós temos que R_1 é uma relação em N tal que $R_1 = \{(x,y) \in N \times N : 3 | (x-y)\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in N \times N : 4 | (x-y)\}$.

Queremos o momento em que as duas relações são válidas simultaneamente.

Temos que $R_1 \cap R_2 = \{(a,b) \in N \times N : 3 | (a-b) \wedge 4 | (a-b)\}$.

Nós temos que, para $k, q \in N$, $(a-b) = 3k$ e $(a-b) = 4q$.

Como $(a-b)$ precisa ser dividido por 3 e 4 ao mesmo tempo, temos que $(a-b) = 12j$, pois $12 = 3 \cdot 4$. Logo, $R_1 \cap R_2 \subseteq R_3$.

Agora temos que provar que $R_3 \subseteq R_1 \cap R_2$.

Nós temos, de R_3, que $(x-y) = 12k = 3 \cdot 4k$

Como $3 | 12k$ e $4 | 12k$, segue que $3 | (x-y)$ e $4 | (x-y)$. Logo, $R_3 \subseteq R_1 \cap R_2$.

6.

a) Possui elemento minimal $\to$ não existe nenhum elemento menor que ele e ele se relaciona com todos.

$R := \{(a,b) \in N \times N : a \leq b\}$, 0 é o elemento minimal.

b) $R := \{(a,b) \in Z \times Z : 0 \geq a \geq b\}$ 0 é o elemento maximal.

c) $R_<^{\circ} = \{(a,b) \in (0,1)^2 \mid a \leq b\}$. Não há elemento minimal nem maximal.

8. Nós queremos provar que, para todo inteiro positivo n, vale $n! \leq n^n$.

Vamos dizer que $P(n) \iff n! \leq n^n$

Por absurdo vamos definir $S = \{n \in N : \neg P(n)\}$ e que $S \neq \emptyset$.

Caso base: $n = 1$. Temos que $1! = 1$ e $1^1 = 1$. Logo, $P(1)$ vale.

Hipótese indutiva: $\exists k \geq 1$ tal que $k! \leq k^k$.

Passo indutivo: como 1 vale e $S \neq \emptyset$, temos que $m \in S$. Se $m \in S$, isso significa que m é o menor valor de S. Logo, $m \geq 1$ e $m-1$ não pode pertencer a S, já que $m-1 < m$ e m é o mínimo.

lista 01 - questões opcionais.

8. Assim, se $(m-1)$ não pertence a S, temos que $P(m-1)$ vale.

Logo, $(m-1)! \leq (m-1)^{m-1}$

Nós temos que $(m-1)^{m-1} = \frac{(m-1)^m}{m-1}$

Além disso, temos que $(m-1) < m$, então $(m-1)^{m-1} < m^{m-1}$

Assim, podemos substituir

$$(m-1)! \leq (m-1)^{m-1} < m^{m-1} \Leftrightarrow (m-1)! \leq m^{m-1}$$

Multiplicando por m nos dois lados,

$$m \cdot (m-1)! \leq m^{m-1} \cdot m \Leftrightarrow m! \leq m^m$$

Logo, temos que $P(m)$ é válido, contrariando a suposição de que $m \in S$. Assim $S = \emptyset$ e podemos afirmar, por absurdo, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$.

questões obrigatórias - Bruna Dahen - 253863

1.

a) Para que uma relação seja de ordem, temos que ela precisa ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.
Nós temos que $R_1 = \{(a,b) : |D_a^+| \leq |D_b^+|\}$, sendo $a, b \in N^*$ e $|D_x^+|$ o conjunto de divisores positivos de X.

1. reflexividade → $\forall x \in N^*$, (x,x) precisa pertencer a R.
Como $|D_x^+| = |D_x^+|$, temos que R_1 é válida como reflexiva para qualquer número X pertencente aos N^*.

2. antissimetria → $\forall x, y \in N^*$, se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, então $x = y$ necessariamente.
Por contraexemplo, vamos usar $a = 2$ e $b = 7$. Nós temos que, para esse caso, $|D_a^+| = 2$, pois $D_a^+ = \{1,2\}$. Já $|D_b^+| = 2$, enquanto $D_b^+ = \{1,7\}$.
Portanto, teríamos que $(2,7) \in R$, pois $|D_2^+| \leq |D_7^+|$, já que são ambos iguais, e também teríamos $(7,2) \in R$, pois $|D_7^+| \leq |D_2^+|$ também é válido $(2,2)$.
Assim, mesmo $(2,7) \in R$ e $(7,2) \in R$, $2 \neq 7$, o que contraria a ideia de antissimetria.
Logo, já podemos afirmar que R_1 não é uma relação de ordem.

3. transitividade → $\forall x, y, z \in N^*$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.
Nós temos que se $(x,y) \in R$, $|D_x^+| \leq |D_y^+|$. Paralelamente, se $(y,z) \in R$, temos que $|D_y^+| \leq |D_z^+|$.
Dessa forma, como $|D_y^+|$ é estritamente menor ou igual a $|D_z^+|$, podemos reescrever $|D_x^+| \leq |D_y^+|$ como $|D_x^+| \leq |D_y^+| \leq |D_z^+|$. Logo $|D_x^+| \leq |D_z^+|$, indicando que $(x,z) \in R$.

Como a relação não é antissimétrica, não se trata de uma relação de ordem.

b) Para uma relação ser de ordem, ela precisa ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.
Nós temos que $R_2 = \{(a,b) : D_a^+ \subseteq D_b^+\}$, ou seja, os divisores positivos de a estão contidos nos divisores positivos de b.

1. reflexividade → como $D_a^+ \subseteq D_a^+$, já que são o mesmo conjunto ($D_a^+ = D_a^+$), temos que $\forall a \in N^*$, $(a,a) \in R_2$. Logo, R_2 é reflexiva.

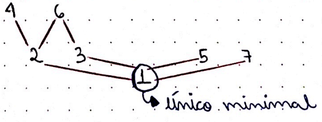
2. antissimetria → $\forall x, y \in N^*$, se $(x,y) \in R_2$ e $(y,x) \in R_2$, então x precisa ser igual a y.
se $(x,y) \in R_2$, $D_x^+ \subseteq D_y^+$; e se $(y,x) \in R_2$, $D_y^+ \subseteq D_x^+$. A única situação em que dois conjuntos se contêm reciprocamente é quando eles são iguais. Logo, $x = y$ e R_2 é uma relação antissimétrica.

3. transitividade → se $(x,y) \in R_2$ e $(y,z) \in R_2$, sendo $\{x,y,z\} \in N^*$, temos que $(x,z) \in R_2$.
Isso porque se $(x,y) \in R_2$, $D_x^+ \subseteq D_y^+$ e se $(y,z) \in R_2$, $D_y^+ \subseteq D_z^+$.
Logo, podemos reescrever que $D_x^+ \subseteq D_y^+ \subseteq D_z^+$, mostrando que $D_x^+ \subseteq D_z^+$. Logo, $(x,z) \in R_2$ e R_2 é uma relação transitiva.

Como a relação R_2 satisfaz todas as 3 condições anteriores, podemos afirmar que se trata de uma relação de ordem.

Diagrama de Hasse em $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

- $D_1^+ = \{1\}$
- $D_2^+ = \{1,2\}$
- $D_3^+ = \{1,3\}$
- $D_4^+ = \{1,2,4\}$
- $D_5^+ = \{1,5\}$
- $D_6^+ = \{1,2,3,6\}$
- $D_7^+ = \{1,7\}$



questões obrigatórias - Bruna Dalher - 253863

2. Seja R uma relação de A de ordem e S uma relação de A. Temos que o fecho transitivo de uma relação é definido como $S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$ e que a relação identidade I_A é $I_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

Nós queremos provar que se S é tal que $I_A \subseteq S \subseteq R$, então S^* é uma relação de ordem.

Primeiramente, nós temos que uma ~~relação~~ composição de relações é definida da seguinte forma: sejam R e S duas relações, temos, se $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$, $S \circ R = \{(a,c) \in A \times C : \exists (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$.

Para que uma relação ~~■~~ seja de ordem, ela precisa ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.

1. Reflexividade → como $I_A \subseteq S$ e $S^i \subseteq S^*$, temos que ~~■■ para qualquer~~ $\forall a \in A$, $(a,a) \in S^*$, já que $I_A \subseteq S^i \subseteq S^*$. Logo, S^* é reflexiva.

2. Antissimetria → para provar a antissimetria de S^*, precisamos, antes de mais nada, provar que $S^* \subseteq R$. Utilizando a prova por indução, temos ~~■~~ que provar que $S^i \subseteq R$ para todo $i \geq 1$.
caso base: tomando $i = 1$, temos $S^1 \subseteq R$, o que, pelo enunciado, é válido
~~passo~~ hipótese indutiva: $S^k \subseteq R$ para algum $k \geq 1$
passo indutivo: supondo que $S^k \subseteq R$ e usando $(a,c) \in S^{k+1} = S^k \circ S$.
Podemos, então, pela definição de composição de relações, dizer que existe ~~b~~ $a,b,c \in A$ tal que $(a,b) \in S$ e $(b,c) \in S^k$.
Assim, temos $S^{k+1} = S^k \circ S$ e, pela definição de composição de relações, $(a,c) \in S^{k+1}$
Pela hipótese indutiva, se $S^k \subseteq R$, $(b,c) \in R$.
Pelo caso base inicial e hipótese inicial, se $S \subseteq R$, então $(a,b) \in R$.
Como R é uma relação de ordem, ela precisa ser transitiva e, portanto $(a,c) \in R$.

Logo, $(a,c) \in R$ para $\forall (a,c) \in S^{k+1}$, o que prova que $S^{k+1} \subseteq R$.

3. Transitividade → para uma relação ser transitiva, nós temos que para quaisquer $(x,y,z) \in A$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.
Consideramos $(a,b,c) \in A$
Assim, se $(a,b) \in S^*$ e $(b,c) \in S^*$, podemos afirmar que existem inteiros $m, n \geq 1$ que $(a,b) \in S^m$ e $(b,c) \in S^n$.

Pela definição de composição da relação S descrita no enunciado, temos que $S^{m+n} = S^n \circ S^m$.

Logo, como $(a,c) \in S^{m+n}$, já que $S^{m+n} = S^n \circ S^m = \{(a,c) \in A \times A : \exists (a,b) \in S^m \wedge (b,c) \in S^n\}$,

e $S^{m+n} \subseteq S^*$, podemos afirmar que S^* é transitiva.

Assim, como S^* é reflexiva, antissimétrica e transitiva, podemos afirmar que S^* é uma relação de ordem.

questões obrigatórias - Bruna Dalun - 253863

3. Nós queremos provar que todo natural maior do que 1 pode ser escrito como um produto de fatores primos.

Para isso, utilizaremos o PBO na criação de uma contradição.

Nós temos o conjunto $H = \{n \in \mathbb{N} ; n > 1$ e que não podem ser representados como um produto de fatores primos$\}$. Assim, pelo enunciado, H, necessariamente, é vazio ($H = \emptyset$).

Visando uma contradição, vamos assumir que $H \neq \emptyset$.

Pelo PBO, H possui um mínimo. Ou seja, $\exists\, m = \min(H)$

m não é primo, pois, se fosse, já seria representado por um produto de fatores primos ($m = m \cdot 1$) e não poderia estar em H. Logo, podemos escrever que $m = a \cdot b$, sendo a, b números inteiros, maiores do que 1 e menores que m ($1 < a < m$ e $1 < b < m$).

Pelo fato de m ser o termo mínimo de H, isso significa que a e b não pertencem a H (se pertencessem, por serem menores que m, fariam m deixar de ser o termo mínimo. Logo, se a e b não pertencem a H, temos que a e b podem ser escritos como produtos de números primos.

Logo, seja $a = j \cdot h$ e $b = p \cdot n$ e j, h, p, n números primos, temos:

$m = a \cdot b \Leftrightarrow m = j \cdot h \cdot p \cdot n$, o que mostra que m pode ser escrito como um produto de fatores primos. Assim, m não pertence a H, mostrando, por contradição, que $H = \emptyset$.

Portanto, todo natural maior do que 1 pode ser escrito como um produto de fatores primos!

4. Nós queremos provar que, seja R uma relação de ordem do conjunto A, R^{-1} também é uma relação de ordem. Nós dizemos que R é uma relação de ordem se, e somente se, ela for reflexiva, transitiva e antissimétrica. Além disso, por definição, temos que $R^{-1} = \{(b,a) \in A \times A : (a,b) \in R\}$ (1)

1. Reflexividade → como R é reflexiva, temos que $(a,a) \in R$ para todo $a \in A$. Então, pela definição (1), temos que $(a,a) \in R^{-1}$. Logo, R^{-1} é reflexiva.

ótimo

2. Antissimetria → supondo que $(a,b) \in R^{-1}$ e $(b,a) \in R^{-1}$. Isso indica, pela definição (1), que $(b,a) \in R$ e $(a,b) \in R$. Como R é antissimétrica, já que é uma relação de ordem, isso significa que $a = b$. Portanto, R^{-1} é antissimétrica.

3. Transitividade → supondo que $(a,b) \in R^{-1}$ e $(b,c) \in R^{-1}$. Então, pela definição (1), temos que $(b,a) \in R$ e $(c,b) \in R$. Pela transitividade de R, temos que $(c,a) \in R$. Aplicando a definição (1), isso indica que $(a,c) \in R^{-1}$. Logo, R^{-1} é transitiva.

Como R^{-1} é reflexiva, antissimétrica e transitiva, podemos afirmar que R^{-1} é uma relação de ordem em A.

OBS: cuidado com a formalidade.
prova perfeita