MC358 - Lista de exercícios 05

IC - Unicamp

4 de novembro de 2025

Questões Opcionais

Exercícios de prática e fixação. Suas resoluções não precisam ser entregues no classroom, mas você deve resolvê-los!

1. Seja $\mathcal{R}$ uma relação definida sobre $\mathbb{Z}^*$ (inteiros sem o 0) tal que $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow ab > 0$. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, encontre as classes de equivalência e descreva o conjunto quociente $\mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$.

   (Solução) Para provar que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, vamos provar que satisfaz a reflexividade, simetria e transitividade.

   - Reflexividade: Seja $a \in \mathbb{Z}^*$, temos que $aa > 0$, seja a positivo ou negativo, logo $(a, a) \in \mathcal{R}$. Portanto, $\mathcal{R}$ é reflexiva.
   - Simetria: Seja $(a, b) \in \mathcal{R}$, temos que $ab > 0$ e pela comutatividade da multiplicação, $ba > 0$, portanto $(b, a) \in \mathcal{R}$ e a relação é simétrica.
   - Transitividade: sejam $(a, b) \in \mathcal{R} \land (b, c) \in \mathcal{R}$, temos que $ab > 0 \land bc > 0$. Tem-se então que $(ab)(bc) = ab^2c > 0$, pois $(ab), (bc)$ são número positivos. Além disso, $b^2 > 0$ é positivo, e portanto $ac > 0$, o que implica que $(a, c) \in \mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ é transitiva.

   Para encontrar as classes de equivalência, vamos analisar o caso de um inteiro positivo e um negativo. Seja $a \in \mathbb{Z}^*, a > 0$, temos que $[a]_\mathcal{R} = \{b | (a, b) \in \mathcal{R}\} = \{b | ab > 0\} = \{b \in \mathbb{Z}^* | b > 0\} = \mathbb{Z}_{>0}$. Similarmente, tem-se que se $a < 0$, $[a]_\mathcal{R} = \mathbb{Z}_{<0}$. Logo, $\mathbb{Z}^*/\mathcal{R} = \{[-1]_\mathcal{R}, [1]_\mathcal{R}\} = \{\mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Z}_{>0}\}$.

2. Seja f uma função e R uma relação definida sobre $Dom(f)$ tal que $(x, y) \in R \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Prove que R é uma relação de equivalência e encontre as classes de equivalência.

3. Prove que a equação $14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$ não possui solução (x, y) inteira.

   (Solução) Suponha por absurdo que a equação possui solução inteira, por tanto, a congruência deve valer para todo $\mod n$. Temos que $7 \equiv 1 \mod 3 \implies 7^{2000} \equiv 1 \mod 3$ e:

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000} \Leftrightarrow \tag{1}$$
$$2x^2 + 0y^2 \equiv 1 \mod 3 \Leftrightarrow \tag{2}$$
$$2x^2 \equiv 1 \mod 3 \tag{3}$$

   Para que essa equação possua solução, precisamos que x^2 seja o inverso multiplicativo de $2 \mod 3$, que é o próprio 2, isto é, $x^2 \equiv 2 \mod 3$. Porém, $x \equiv 0 \mod 3 \implies x^2 \equiv 0$

mod 3, $x \equiv 1 \mod 3 \implies x^2 \equiv 1 \mod 3$, e $x \equiv 2 \mod 3 \implies x^2 \equiv 1 \mod 3$. Logo, não há $x \in \mathbb{Z}_3$ que satisfaça a equação, o que é um absurdo, e portanto não há solução inteira.

4. Usando operações modulares, prove as seguintes afirmações:

   (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$

   (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid (n^3 - n)$.

   (Solução)

   (a) Vamos provar que $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \equiv 0 \mod 133$. Primeiro, vamos trabalhar em cada termo:

$$\begin{aligned} 11^{n+2} &\equiv 11^n \cdot 11^2 \mod 133 && (4)\\ &\equiv 11^n \cdot 121 \mod 133 && (5)\\ &\equiv 11^n \cdot -12 \mod 133 && (6) \end{aligned}$$

   Onde o último passo foi feito com a observação que $121 = 133 - 12$. Temos também que:

$$\begin{aligned} 12^{2n+1} &\equiv 144^n \cdot 12 \mod 133 && (7)\\ &\equiv 11^n \cdot 12 \mod 133 && (8) \end{aligned}$$

   Onde o último passo foi feito com a observação que $144 = 133 + 11$. Unindo os dois resultados:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 11^n \cdot -12 + 11^n \cdot 12 \equiv 0 \mod 133 \qquad (9)$$

   (b) Primeiro, vamos provar que se $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \mid n \wedge 3 \mid n \implies 6 \mid n$. Se $2 \mid n$, então $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$ e se $3 \mid n$ então $\exists k' \in \mathbb{N},\ n = 3k'$. Logo, $2k = 3k'$. Como $k' \in \mathbb{N}$, então $k' = 2(k/3)$ e é par, logo $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $k' = 2q$. Temos então que $n = 3k' = 3(2q) = 6q$ e portanto $6 \mid n$.
   Usando essa propriedade, vamos provar que $2 \mid (n^3 - n)$ e $3 \mid (n^3 - n)$ para todo n natural.

   - Seja $n \equiv q \mod 2$. Observe que $1^3 \equiv 1 \mod 2$ e $0^3 \equiv 0 \mod 2$. Como $q \in \{0, 1\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} n^3 - n &\equiv q^3 - q \mod 2 && (10)\\ &\equiv q - q \equiv 0 \mod 2 && (11) \end{aligned}$$

   - Seja $n \equiv q \mod 3$. Novamente tem-se que $i^3 \equiv i \mod 3$ para $i \in \{0, 1, 2\}$. Então:

$$\begin{aligned} n^3 - n &\equiv q^3 - q \mod 3 && (12)\\ &\equiv q - q \equiv 0 \mod 3 && (13) \end{aligned}$$

   Logo, $2 \mid (n^3 - n) \wedge 3 \mid (n^3 - 3) \implies 6 \mid (n^3 - 3)$.

5. Prove que para todo k inteiro, $\left((3 + k \cdot 11)^{9^{821}} - 4\right)$ é divisível por 11.

6. Um conjunto X é dito incontável se não existir uma função sobrejetora de $\mathbb{N}$ para X. Mostre que se A é um conjunto incontável e $A \subseteq B$, então B é incontável.

   (Solução) Suponha por absurdo que B é contável, logo, existe $f : \mathbb{N} \to B$ que é sobrejetora. Defina a função $g : \mathbb{N} \to A$ tal que $a \in A$ é um elemento qualquer:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } f(x) \in A \\ a \text{ c.c.} \end{cases} \tag{14}$$

   Seja $a' \in A$, como $A \subseteq B$ então $a' \in B$, logo, existe $x' \in \mathbb{N}$ tal que $f(x') = a'$ pois f é sobrejetora. Pela definição de g então $g(x') = a'$. Como isso é válido para qualquer $a' \in A$, g é sobrejetora. O que é um absurdo, pois A é incontável. Portanto, B é incontável.

7. Seja $\mathcal{L}$ uma relação sobre o conjunto dos pares ordenados de números reais (isto é, $\mathcal{L} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$) tal que $(a, b)\mathcal{L}(c, d)$ se, e somente se, os pontos (a, b) e (c, d) estão à mesma distância da origem $(0, 0)$.

   (a) Prove que $\mathcal{L}$ é uma relação de equivalência.

   (b) Descreva a classe de equivalência de $(0, 0)$ segundo a relação $\mathcal{L}$.

   (c) Caracterize o conjunto quociente $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/\mathcal{L}$.

8. Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável.

   (Solução) Vamos primeiro provar que se A e B são contáveis, então $A \times B$ é contável. Como visto em aula, sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável, portanto existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é sobrejetora. Além disso, como A, B são contáveis, existe $g' : \mathbb{N} \to A, g'' : \mathbb{N} \to B$ que são sobrejetoras. Defina a função $h : \mathbb{N} \to A \times B$ como $h(x) = (g'(f_1(x)), g''(f_2(x)))$ onde $f_i(x)$ retorna o i-ésimo elemento de $f(x)$ para $i \in \{1, 2\}$. Vamos provar que h é sobrejetora. Seja $(a, b) \in A \times B$. Como g', g'' são sobrejetoras, existem $x', x'' \in \mathbb{N}$ tal que $g'(x') = a$ e $g''(x'') = b$. Como f é sobrejetora, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = (x', x'')$, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = (a, b)$.

   Com esse resultado, temos que $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ é contável pois $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é contável (visto em aula) e $\mathbb{N}$ é contável (trivial pela definição). Seja então f tal que para todo $((a, b), c) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = ((a, b), c)$ e defina a função $s : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $s((a, b), c) = (a, b, c)$. Obviamente s é bijetiva. Portanto, a função composta $s \circ f$ é uma função sobrejetora de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

9. Mostre que $\mathbb{Q}$ é contável.

10. Suponha que R seja uma ordem parcial em A e S seja uma ordem parcial em B. Defina uma relação T em A × B da seguinte forma: $T = \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B) \times (A \times B) | aRa' \text{ e } bSb'\}$. Mostre que T é uma ordem parcial em $A \times B$. Se R e S forem ordens totais, T também será uma ordem total?

11. Se um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado possui exatamente um elemento minimal, esse elemento deve ser o mínimo? Dê uma demonstração ou um contraexemplo para justificar sua resposta.

12. A Conjectura de Euler, em 1769, afirmava que não existem soluções inteiras positivas para a equação.

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4.$$

   Valores inteiros para a, b, c, d que satisfazem esta equação foram descobertos pela primeira vez em 1986. Portanto, Euler errou o palpite, mas levou mais de duzentos anos para provar. Agora, vamos considerar a equação de Lehman, semelhante à de Euler, mas com alguns coeficientes:

$$8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4.$$

Prove utilizando o *Princípio da Boa Ordenação* que a equação de Lehman realmente não possui soluções inteiras positivas. *Dica:* Considere definir o conjunto com os valores da variável a que satisfazem a equação, depois analise a paridade das variáveis.

Questões Obrigatórias

A resolução dos cinco exercícios a seguir deve ser entregue (pdf único) no classroom para correção e avaliação.

1. Prove que se m e n são números naturais, então $3^m + 3^n + 1$ não é um quadrado perfeito.

2. Lembre-se de que uma matriz quadrada tem inversa se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. Além disso, o determinante tem as sequintes propriedades:

   (1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ e (2) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

   Seja $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$, ou seja, o conjunto de matrizes quadradas, com n linhas e n colunas, com entradas reais, e que possuem inversas. Seja $\mathbb{H} = \{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$, isto é, o conjunto de matrizes inteiras, $n \times n$, com determinante igual a um. Note que $\mathbb{H} \subset GL_n(\mathbb{R})$.

   Considere a relação

   $$\mathcal{R} = \{(A, B) \in GL_n(\mathbb{R})^2 : A \cdot B^{-1} \in \mathbb{H}\}$$

   Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência, descreva as classes de equivalência e encontre o quociente $GL_n(\mathbb{R})^2/\mathcal{R}$.

3. Seja $\mathcal{F}_X = \{f \subseteq X \times X$ tal que f é uma função bijetora$\}$. Por exemplo, se $X = \{0, 1\}$, então existem duas bijeções: $f = \{(0, 0), (1, 1)\}$ e $g = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Então, $\mathcal{F}_X = \{f, g\}$. Note que se X é finito, tendo, digamos, n elementos, então, $|\mathcal{F}_X| = n!$, logo, $\mathcal{F}_X$ também é finito, portanto, contável.

   Mostre que $\mathcal{F}_\mathbb{N}$ não é contável.

4. Suponha que R e S sejam relações de equivalência em um conjunto A. Seja $T = R \cap S$.

   (a) Prove que T é uma relação de equivalência em A.

   (b) Prove que, para todo $x \in A$,

   $$[x]_T = [x]_R \cap [x]_S.$$

5. Seja $R \subseteq A \times A$ uma relação. O *fechamento reflexivo-simétrico* de R é o menor conjunto $S \subseteq A \times A$ tal que

   $$R \subseteq S, \quad S \text{ é reflexiva, e } S \text{ é simétrica,}$$

   se tal conjunto menor existir. Prove que toda relação possui um fechamento reflexivo-simétrico.