MC358 - Fundamentos matemáticos da computação

Prof. Dr. Hilder Vitor Lima Pereira

Instituto de computação

UNICAMP

13 de novembro de 2025

1. Estimativas assintóticas para relações de recorrência
2. Estimativas assintóticas com variável extra
3. Perguntas, observações, comentários?

Estimativas assintóticas para relações de recorrência

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Solução exata versus assintótica

Até agora, vimos como encontrar fórmulas fechadas para *alguns tipos específicos* de relações de recorrência.

Com uma solução exata, é trivial achar uma estimativa assintótica.

Por exemplo, no nosso primeiro exemplo, vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1$ tinha como solução $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$. Logo,

$$f(n) \in O(2^n)$$

Mas, e se só estivermos interessados em achar uma estimativa assintótica?

Então, achar uma fórmula fechada pode ser desnecessariamente trabalhoso...

Já vimos que $f(n) = 2f(n-1) + 1 \in O(2^n)$.

Então, é natural achar que $g(n) = 2g(n-1) - 1 \in O(2^n)$.

Como podemos provar isso?

Considere $g(0) = 1$.

Provamos, por indução matemática, que $g(n) \in O(2^n)$, onde $g(0) = 1$ e $g(n) = 2g(n-1) - 1$ para $n \geq 1$.

- Normalmente, fazemos um rascunho do passo indutivo e do caso base para achar as constantes c e n_0
- Depois, provamos de fato, usando indução, que

$$\forall n \geq n_0, P(n)$$

onde $P(n) \Leftrightarrow (g(n) \leq c2^n)$

Erros comuns

- Você não deve provar que para todo n, $f(n) \in O(g(n))$
- As constantes c e n_0 não podem mudar no caso base, no passo e na HI

Exemplo com passo multiplicativo

Em vez de definirmos a relação de recorrência em função de um passo $n - k$, vamos considerar n/k.
Por exemplo:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos encontrar g tal que $f(n) \in O(g(n))$.

Exemplo com passo multiplicativo

Agora considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos provar que $f(n) \in O(n \log n)$.

Estimativas assintóticas com variável extra

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese de indução supondo algo como $f(k) \leq cg(k) + d(k)$ e depois ajustamos $d(k)$ para obtermos o que queremos.

Mais uma variável = mais poder

Às vezes, para provar $f(n) \in O(g(n))$, não basta usar $f(k) \leq cg(n)$ na hipótese de indução.

Então, "fortalecemos" a hipótese de indução supondo algo como $f(k) \leq cg(k) + d(k)$ e depois ajustamos $d(k)$ para obtermos o que queremos.

Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 2f(n-1) + 9 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vamos tentar provar que $f(n) \in O(2^n)$ primeiro usando $P(i) =$ "$f(i) \leq c \cdot 2^i$" depois usando $P(i) =$ "$f(i) \leq c \cdot 2^i + d(i)$".

Como escolher a expressão $d(n)$?
Normalmente, escolher algo parecido com o termo que queremos eliminar já funciona.
Por exemplo:

- p/ eliminar 9: podemos escolher $d(n)$ constante
- p/ eliminar $5 \cdot n$: podemos escolher $d(n) = \alpha \cdot n + \beta$ (linear)
- etc...

Perguntas, observações, comentários?