

COMPORTAMENTO DO CAMPO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA CONDUTORA E CARREGADA

BEHAVIOR OF THE ELECTRIC FIELD THROUGH A CONDUCTIVE AND CHARGED SPHERICAL SURFACE

Gustavo Elia Assad¹, Pelágio Nerício², Dhiego Veloso³

¹Instituto Federal de Educação da Paraíba – campus Santa Rita (IFPB-SR),
gustavo.elia.assad@gmail.com.br

²Colégio Motiva - JP, pelagionericio@gmail.com

³Instituto Federal de Educação da Paraíba – campus João Pessoa (IFPB-JP),
dhiego.veloso@ifpb.edu.br

Resumo

Neste artigo tratamos de um problema clássico no âmbito do ensino de Física: como se comporta o campo na superfície de um condutor esférico em equilíbrio eletrostático? Ao utilizarmos um modelo de distribuição homogênea de cargas em uma superfície de espessura desprezível, mostramos que o campo não está definido em pontos da superfície (pontos pertencentes à superfície carregada). Ao mesmo tempo, em um modelo mais realista, onde as cargas em excesso distribuem-se em uma nuvem de espessura finita ($\sim 2\text{\AA}$), mostramos que o campo evolui suavemente, desde sua nulidade no interior do condutor esférico até seu valor máximo em pontos da superfície externa da nuvem. Sendo assim, objetivando esclarecer este comportamento que tanto confunde alunos de Física, apresentamos uma formulação matemática robusta que demonstra tal comportamento através de equações e gráficos. Não obstante, confrontamos a ideia de que o campo elétrico, em uma distribuição superficial homogênea de cargas sobre uma esfera possa assumir um valor equivalente à metade do campo no exterior da esfera e muito próximos a ela ($E_{\text{sup}} = E_{\text{ext}}/2$).

Palavras-chave: Campo Elétrico, Descontinuidade, Lei de Gauss

Abstract

In this article we deal with a classic problem in the context of Physics teaching: how does the field behave on the surface of a spherical conductor in electrostatic equilibrium? By using a homogeneous charge distribution model on a surface of negligible thickness, we show that the field is not defined at points on the surface (points belonging to the charged surface). At the same time, in a more realistic model, where excess charges are distributed in a cloud of finite thickness ($\sim 2\text{\AA}$), we show that the field evolves smoothly, from its nullity inside the spherical conductor to its maximum value at points the outer surface of the cloud. Therefore, aiming to clarify this behavior that so confuses Physics students, we present a robust mathematical formulation that demonstrates this behavior through equations and graphs. However, we confront the idea that the electric field, in a homogeneous surface distribution of charges on a

sphere, can assume a value equivalent to half the field outside the sphere and very close to it ($E_{\text{sup}}=E_{\text{ext}}/2$).

Keywords: Electric Field, Discontinuity, Gauss's Law.

1. Introdução

Recentemente, diversos artigos científicos abordaram a questão do valor do campo elétrico na superfície de um condutor esférico, resultando em conflitos com alguns resultados clássicos. Um exemplo disso é a discrepância observada no campo elétrico ao considerar uma distribuição superficial uniforme de cargas em um condutor esférico, contrariando a expectativa de descontinuidade. Em outras palavras, alguns

estudos propõem modelos matemáticos inovadores, como os apresentados por Slodkowski et al, Lima e Al-Jaber & Saadeddin [1-3], que sugerem um valor específico para o campo elétrico em um ponto exatamente sobre a superfície do condutor esférico com distribuição uniforme de cargas. Este artigo revisita essa discussão, utilizando os mesmos modelos mencionados, a fim de demonstrar que o resultado associado ao fator presente nos valores do campo nas referências citadas não representa adequadamente o campo proveniente dessa distribuição superficial de cargas. Em outras palavras, argumenta-se que o comportamento do campo não pode ser descrito conforme ilustrado na figura 1.

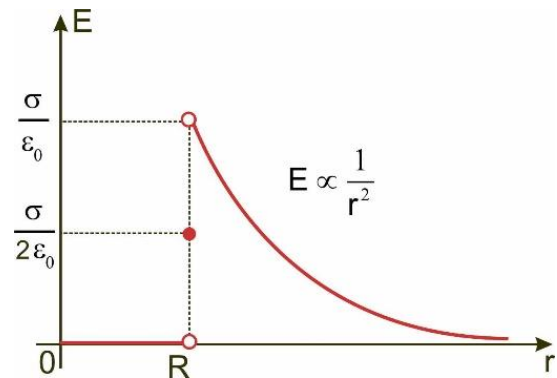


Figura 1: campo devido a uma esfera condutora de raio R , como função da distância r com relação ao seu centro, desprezando-se a espessura da região onde se concentra o excesso de cargas [1].

2. Modelo A: distribuição em nuvem eletrônica

Neste modelo, consideramos o campo elétrico gerado por uma esfera com carga uniformemente distribuída. Supõe-se que a carga líquida, em escala atômica, está distribuída em uma nuvem eletrônica com densidade volumétrica de cargas variável (ou não), ocupando aproximadamente o volume de uma casca esférica com espessura 2δ , representando uma ou duas camadas eletrônicas (onde $\delta \sim 1\text{\AA}$) [5-7].

Essa nuvem envolve o raio R da esfera, conforme proposto por Slodkowski et al [1]. Para abordar o problema, apresentamos as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Os raios interno e externo da casca (nuvem eletrônica) são, respectivamente, R_1 e R_2 , com $R_2 = R_1 + 2\delta$;
- O campo é radial, apontando para fora da casca, assumindo a situação de equilíbrio eletrostático quando não nulo;
- A densidade de cargas é uma função do raio dada por $\rho(r) = Cr^n$, onde C é uma constante arbitrária e n é um expoente determinado pelo modelo escolhido;
- A carga total da casca é denotada por Q .
- Para determinar o campo no interior da casca ($R_1 \leq r \leq R_2$), recorreremos à lei de Gauss, considerando uma superfície gaussiana esférica de raio r concêntrica à casca e escrevendo-se:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{A} = q_{Env}(r) \quad (1)$$

Assim,

$$E(r) = \frac{q_{Env}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (2)$$

onde $q_{Env}(r)$ é a carga envolvida pela superfície gaussiana. Esta carga é dada por

$$q_{Env}(r) = \iiint \rho(r') dV = \int_{R_1}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int_{R_1}^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (3)$$

Como $\rho(r) = Cr^n$, através da equação (3), expressa-se a carga envolvida pela superfície gaussiana em termos da carga total líquida da esfera por:

$$q_{Env}(r) = Q \frac{(r^{n+3} - R_1^{n+3})}{(R_2^{n+3} - R_1^{n+3})} \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na equação (2) e tomando os resultados para os campos internos e externos à casca, o sistema mostrado no conjunto da equação (5) completa a descrição analítica do campo.

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) = 0, \quad 0 \leq r < R_1 \\ E(r) = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \right) \frac{r^{n+1}}{R_2^{n+1}} \left(\frac{1 - \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+3}}}{1 - \frac{R_1^{n+3}}{R_2^{n+3}}} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2 \\ E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R_2 \end{array} \right. \quad (5a-c)$$

Para fins de comparação e validação da formulação matemática, os resultados mostrados na equação (5) concordam, exatamente, com o mostrado em [1], quando se faz $n=0$, ou seja, quando a densidade de cargas é constante na casca esférica (ou nuvem eletrônica). Observa-se ainda que, com o uso da equação (5b), o campo transita de $E(R_1)=0$ para $E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$ ao longo da casca sem descontinuidade

alguma. A figura 2 mostra o comportamento do campo para alguns valores de n , indicando, qualitativamente, a transição entre valores internos e externos, considerando-se uma casca de espessura não desprezível em relação aos raios da casca.

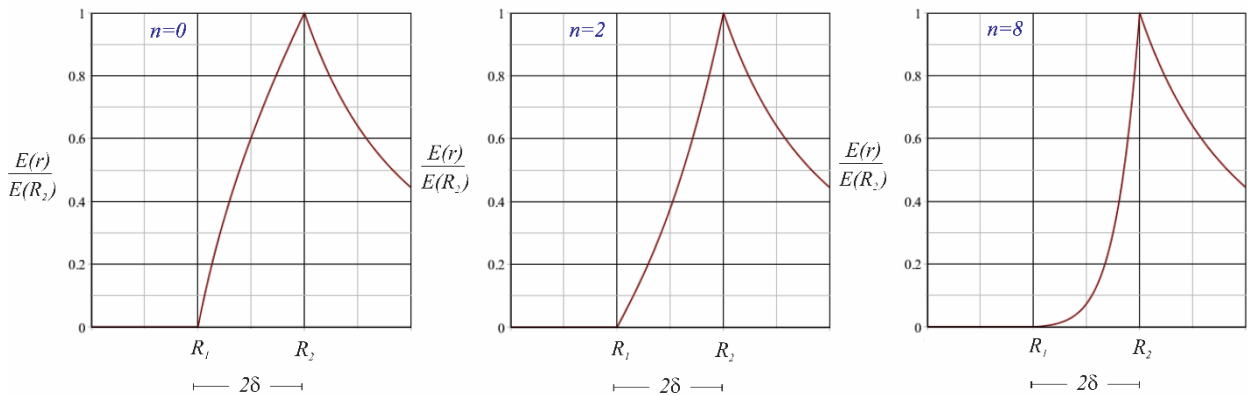


Figura 2: mostra o comportamento do campo para uma casca esférica com diferentes densidades de carga: (a) $\rho = \text{cte}$; $n=0$, (b) $\rho \propto r^2$; $n=2$ e (c) $\rho \propto r^8$; $n=8$.

Considerando uma escala mais realista, quando R_1 e R_2 se aproximam, de modo que a espessura da nuvem seja de $R_2 - R_1 = 2\delta = 2 \cdot 10^{-10} \text{m}$, conforme sugerem as referências [5-7], a transição entre $0 < \frac{E(r)}{E(R_2)} = \tilde{E}(\tilde{r}) < 1$, com $\frac{r}{R_1} = \tilde{r}$ apresenta um comportamento

linear, indicado na figura 3. Tal formulação pode ser encontrada em [8]. Em tempo, observa-se claramente que o campo na superfície física da esfera depende de seu

posicionamento em relação à nuvem eletrônica, será $\frac{1}{2}$ se ela estiver no ponto médio entre R_1 e R_2 mas poderia assumir qualquer outro valor, como $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, etc.

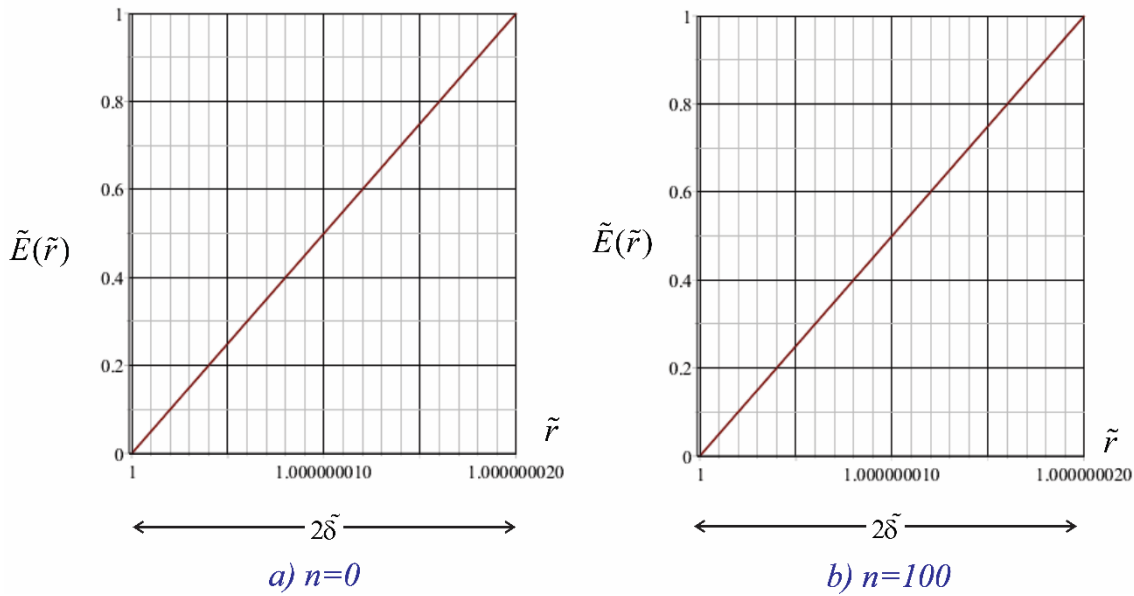


Figura 3: mostra a transição do campo elétrico no interior da nuvem de espessura $2\tilde{\delta}$ quando seu raio interno é $R_1 \sim 1\text{cm}$ em duas distribuições de cargas distintas: a) $\rho = \text{cte}$; $n=0$, b) $\rho \propto r^{100}$; $n=100$.

3. Modelo B: distribuição superficial de cargas

Tomemos um condutor esférico de raio R , com carga superficial Q uniformemente distribuída, densidade superficial de cargas σ e colocado no vácuo, cuja permissividade é ϵ_0 . Considerando a simetria esférica da distribuição de cargas, o campo no exterior deste condutor é radial e só depende da distância r ao centro dele. Usando a lei de Gauss, é fácil ver que o campo no interior do condutor ($r < R$) é nulo, pois as cargas se distribuem na superfície do condutor, não há carga líquida no interior dele. Para pontos externos ($r > R$), o campo se comporta como se a carga Q estivesse concentrada no seu centro, tendo intensidade variável com inverso do quadrado da distância a este ponto, de acordo com a Eq. (1), abaixo:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (6)$$

Dessa forma, se tomarmos pontos muitíssimo próximos do condutor, com um afastamento infinitesimal dr da superfície ($r=R+dr$) e utilizarmos a Eq. (6), concluiremos que, como $Q=4\pi R^2\sigma$, o valor do campo nesta região vale σ/ϵ_0 .

Vários bons textos de autores renomados [9-12] observam que este resultado, σ/ϵ_0 , é exatamente igual ao dobro do valor campo de um pequeno disco uniformemente carregado em pontos próximos de seu centro, $\sigma/2\epsilon_0$. Pois bem, dividindo-se a carga de um condutor em duas partes - uma devida a um pequeno disco circular tomado sobre a superfície e outra devido ao restante das cargas - o disco produz campos de intensidade $\sigma/2\epsilon_0$ acima e abaixo dele e em sentidos opostos, assim, o restante das cargas deve “conspirar” para produzir um campo no valor $\sigma/2\epsilon_0$ de dentro para fora do condutor e fazer com que o campo seja nulo no seu interior ($\sigma/2\epsilon_0 - \sigma/2\epsilon_0 = 0 = E_{int}$) e igual a σ/ϵ_0 em suas proximidades ($\sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0 = E_{prox}$). Observe a figura 4. Este resultado não nos diz que o valor do campo na superfície é metade do valor do campo nas proximidades desse condutor. O condutor é a composição do disco com seu entorno, e não um ou outro isoladamente. Um condutor furado não está completo, e o campo do condutor esférico é dado pela superposição dos campos dos dois elementos. Se

considerarmos que o pequeno disco apresenta uma pequena fração da carga total, dQ , e o recolocarmos na sua posição de origem no condutor, a força exercida pelo restante das cargas sobre ele terá intensidade dada por $F = dQ \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, será radial e para

fora do condutor. Este resultado não deve ser confundido com o de um campo na superfície do condutor. É bem sabido que há uma descontinuidade de σ/ϵ_0 ao atravessarmos uma superfície condutora carregada. Sendo assim, neste modelo, o comportamento do campo é mostrado na figura 5.

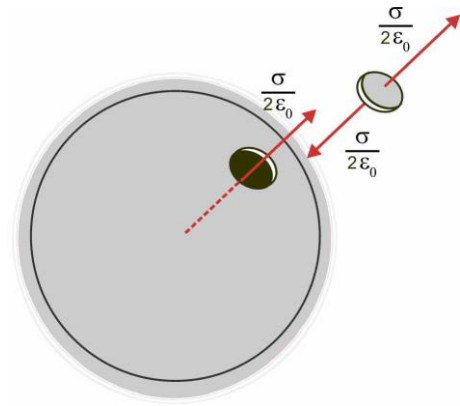


Figura 4 – Esquema que mostra o campo nas proximidades do disco e o campo do restante das cargas. O campo do condutor esférico é então dado pela superposição desses dois.

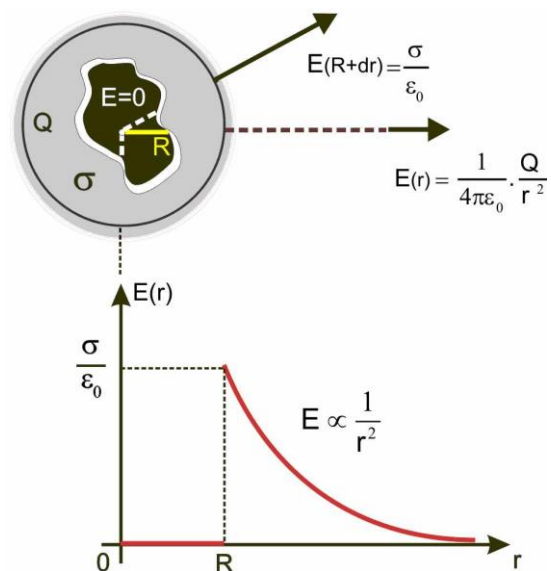


Figura 5 – Comportamento do campo elétrico de um condutor esférico junto ao gráfico de sua intensidade em função da distância ao seu centro, ressaltando a descontinuidade do campo para $r=R$.

4. Conclusões

No modelo de distribuição em nuvem eletrônica mostrou-se que o campo evolui continuamente de 0 a σ/ϵ_0 de pontos internos a pontos externos desta nuvem, chegando a ser linear quando a espessura se torna infinitesimal (ou $\sim 2 \text{ \AA}$). A posição da superfície física do condutor em relação à nuvem ditará qual o valor do intervalo acima recairá sobre ela. No segundo modelo, onde há uma distribuição superficial de cargas, o campo é descontínuo para pontos da superfície. A recomendação para que este tema seja corretamente abordado em sala de aula é que haja uma uniformidade de discurso e texto como o sugerido a seguir:

o campo é nulo no interior do condutor, é descontínuo em pontos de sua superfície e vale $E = k \frac{|Q|}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ em pontos muito próximos dela. Em uma escala atômica há uma

transição quase linear através da nuvem de distribuição de cargas.

Referências

- [1] K. Slodkowski, M. C. Pinheiro, T. C. Luchese, Rev. Bras. Ensino Fís., 40, e2311 (2018).
<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0155>.
- [2] F. M. S. Lima, Reson, 23 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s12045-018-0731-y>.
- [3] S. M. Al-Jaber, I. Saadeddin, Applied Mathematics, 10 (2019).
<https://doi.org/10.4236/am.2019.104017>.
- [4] G. E. Assad, Rev. Bras. Ens. Fís., 34, p4701 (2012).
<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172012000400024>.
- [5] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, NewYork, 1998), third edition, p. 20-21.
- [6] N. D. Lang, W. Kohn. Phys. Rev. B 3, 1215 (1971).
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.3.1215>.
- [7] H. M. Nussenzveig, Curso de Física Básica – Eletromagnetismo (Edgard Blücher, São Paulo, 1997), v.3, p. 31.
- [8] G. E. Assad, Rev. Bras. Ens. Fís., 42, e20190245 (2020)
<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0245>.
- [9] E. M. Purcell, Eletricidade e Magnetismo, Curso de Física de Berkeley (Edgard Blücher, São Paulo, 1970) v. 2, p. 48.

[10] E. M. Purcell, D. J. Morin, Electricity and Magnetism (Cambridge University Press, New York, 2013) v. 2, p.30.

[11] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics (Prentice Hall, Upper Saddle River-NJ, 1999) p. 71.

[12] H. S. Carslaw, Introduction to the theory of Fourier's series and integrals (Dover Publications Inc., New York, 1930).