

1 Modellbildung des Doppelpendels

Die Grundlage für die Simulation des inversen Doppelpendels bilden die dynamischen Bewegungsgleichungen des Systems. In diesem Kapitel wird auf die Herleitung der Gleichungen eingegangen. In einem ersten Schritt werden die Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art hergeleitet. Im Anschluss wird aus den Bewegungsgleichungen die Zustandsraumdarstellung abgeleitet. Diese ist für die hier angewendeten Regelungskonzepte des Doppelpendels notwendig.

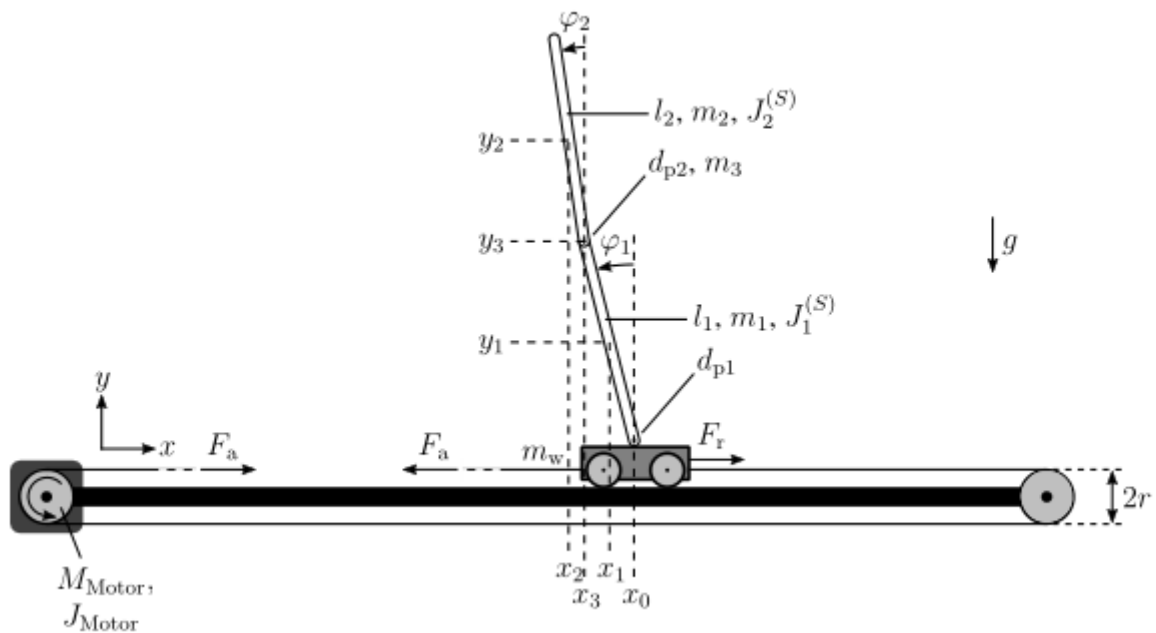


Bild 1.1: Aufbau des inversen Doppelpendels EIGENE SKIZZE NOCH ZU ERSTELLEN

Der generelle Aufbau des inversen Doppelpendels kann Bild 1.1 entnommen werden. Das mechatronische System besteht aus einem Wagen und zwei miteinander gekoppelte Stäben. Der Wagen wird auf einer Linearführung bewegt und mit einem Motor angesteuert. Beide Pendelstäbe sind rotatorisch miteinander gelagert, sodass sie Bewegungen nur in der x-y-Ebene

durchführen können. Für die Anwendung des Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\text{n.k.}} \quad (1.1)$$

ist eine energetische Betrachtung des Systems nötig. In Gleichung 1.1 repräsentieren q_i die generalisierten Koordinaten, \dot{q}_i ihre zeitlichen Ableitungen und $Q_i^{\text{n.k.}}$ auftretende nicht konservative Kräfte. Im vorliegenden Fall werden die generalisierten Koordinaten $x(t)$, $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ verwendet. Diese Größen hängen von der Zeit ab, jedoch wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zeitabhängigkeit in diesem Kapitel vorausgesetzt und nicht explizit aufgeführt. Die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (1.2)$$

setzt sich aus der kinetischen Energie T des Systems und der potentiellen Energie U zusammen. Die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 J_i^S \varphi_i^2 \quad (1.3)$$

besteht aus der translatorischen Bewegungsenergie der n Schwerpunkte und der Rotationsenergie der Pendelstäbe. Die Trägheiten der Pendel werden über das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes mit

$$J_i^S = \frac{1}{12} m_i l_i^2$$

um den Schwerpunkt approximiert. Die potentielle Energie des Systems lässt sich im vorliegenden Fall auf das Höhenpotential

$$U = g \sum_{i=0}^n m_i y_i \quad (1.4)$$

beschränken. Das Nullniveau des Potentials wird auf die Höhe y_0 des Wagens gelegt, sodass sich die potentielle Energie

$$U = \dots = g \left(\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 \right) l_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \cos(\varphi_2) \right) \quad (1.5)$$

ergibt. Bei der Modellierung des Doppelpendels ist die Betrachtung von vier Schwerpunkten, die Bild 1.1 zu entnehmen sind, notwendig. Neben den Schwerpunkten des Wagens und der beiden Pendel, die über die Indizes 0, 1 und 2 verfügen, ist noch das Verbindungsgelenk

der Stäbe zu beachten. Das Gewicht des Gelenks ist so hoch, dass es bei der Modellierung berücksichtigt wird und nicht vernachlässigt werden kann. Das Gelenk wird als Punktmasse behandelt und mit dem Index 3 versehen. Damit werden die Position der Massen

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & y_0 &= 0, \\ x_1 &= x_0 - \frac{1}{2}l_1 \sin(\varphi_1), & y_1 &= \frac{1}{2}l_1 \cos(\varphi_1), \\ x_2 &= x_0 - l_1 \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2), & y_2 &= l_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2), \\ x_3 &= x_0 - l_1 \sin(\varphi_1), & y_3 &= l_1 \cos(\varphi_1) \end{aligned}$$

bestimmt. Zur Ermittlung der Schwerpunktgeschwindigkeiten werden die zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x}, & \dot{y}_0 &= 0, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \frac{1}{2}l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_0 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_3 &= -l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \end{aligned}$$

benötigt. Die Ermittlung der Gesamtgeschwindigkeit in der x - y -Ebene unter Berücksichtigung von $\dot{x}_0 = \dot{x}$ ist über eine Betragsbildung möglich und liefert

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}^2, \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}_1\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}l_1^2\dot{\varphi}_1^2, \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ &= \dot{x}^2 + l_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{x}^2l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - l_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2, \\ v_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = \dot{x}^2 - 2l_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}\dot{\varphi}_1 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die kinetische Energie des Systems gemäß Gleichung 1.3 zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_0v_0^2 + m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2) \\ &= \dots = \frac{1}{2}\left((m_0 + m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \right. \\ &\quad \left. - (m_1 + 2m_2 + 2m_3)l_1\dot{x} \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - l_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2\right) \right. \\ &\quad \left. + l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2\right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Mithilfe der Gleichungen 1.6 und 1.5 werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_a - F_r \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \quad (1.9)$$

aufgestellt. Die nicht-konservativen Kräfte sind die Antriebskraft des Motors, die Reibung zwischen Linearführung und Wagen sowie die Dämpfungen der Pendellager. In [?] werden zwei Möglichkeiten zur Regelung und Steuerung des mechatronischen Systems aufgezeigt. Zum einen kann der Wagen momentengesteuert bewegt werden. Hierbei wird ein Wunschmodent M_{soll} an den Motor übertragen. Bei der Umsetzung des Moments hat die Reibung der Linearführung und jedoch einen großen Einfluss auf die letztendlich resultierende Geschwindigkeit des Wagens. Um eine realitätstreue Modellierung des Systems zu gewährleisten, wird eine Berücksichtigung der Reibung vorausgesetzt, wenn das Pendel momentengesteuert betrieben wird. Zum anderen ist es möglich, eine Sollgeschwindigkeit v_{soll} vorzugeben. Dies hat den Vorteil, dass die Reibung des Systems vernachlässigt werden kann. Außerdem wird in [?] aufgezeigt, dass bei der Regelung des inversen Einfachpendels mit Drehzahlvorgabe bessere Regelungsgebnisse erzielt werden. Es wird die Vermutung aufgestellt, dass aufgrund der hohen Haftreibung der Linearführung und des geringen Gewichts der realen Pendelstäbe eine Rückwirkung der Pendelbewegung auf die Wagenposition ausgeschlossen wird. Diese Annahme wird verifiziert, indem die relative Auslenkung des Wagens während eines Ausschwingvorgangs des Doppelpendels gemessen wird. In Bild 1.2 ist zu sehen, dass die maximale Auslenkung wenige Mikrometer beträgt, wodurch der Einfluss der Pendelbewegung auf die Wagenposition im folgenden vernachlässigt werden kann. Aus den genannten Gründen wird die Wagenbeschleunigung \ddot{x} als Eingangsgröße des Systems gewählt. Für die Ansteuerung des Motors, wird die Sollgeschwindigkeit durch eine einfache Integration der vorgegebenen Beschleunigung ermittelt. Dadurch ist die explizite Lösung von Gleichung 1.7, die die Bewegungsgleichung des Wagens liefert, nicht mehr notwendig. Nach Bildung der Ableitungen der Lagrange-Funktion und Umformen von Gleichungen 1.8 und 1.9 lassen sich die Bewegungsgleichungen des inversen Doppelpendels aufstellen:

$$\ddot{x} = u \quad (1.10)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{J_1^S + (\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3)l_1^2} \left(d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)l_1 \cos(\varphi_1)\ddot{x} \right. \\ \left. + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)l_1 g \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2) \right) \quad (1.11)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{J_2^S + \frac{1}{4}m_2 l_2^2} \left(-d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\ddot{x} + \frac{1}{2}m_2 l_2 g \sin(\varphi_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 (\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1) \right) \quad (1.12)$$

In den Gleichungen 1.11 und 1.12 ist zu sehen, dass Winkelbeschleunigungen jeweils noch voneinander abhängen. In der Bewegungsgleichung für den inneren Pendelstab $\ddot{\varphi}_1$ taucht die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_2$ auf und umgekehrt. Führt man Simulationen mit den Gleichungen 1.11 und 1.12 aus, tritt eine algebraische Schleife auf. Das Ergebnis der einen Gleichung wird im selben Zeitschritt für die Auswertung der anderen Winkelbeschleunigung benötigt. Um dieses Problem zu umgehen, werden die Gleichungen entkoppelt. Die Gleichungen der Form

$$\ddot{\varphi}_1 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2), \quad (1.13)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \quad (1.14)$$

werden in sämtlichen Simulationen verwendet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf eine vollständige Darstellung der Gleichungen 1.13 und 1.14 verzichtet.

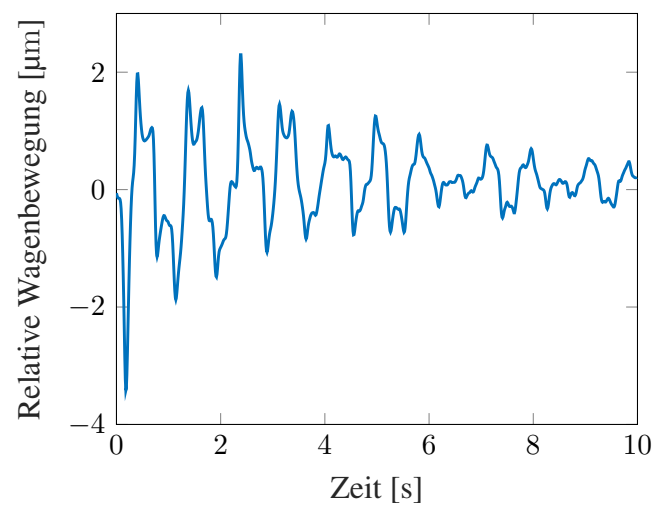


Bild 1.2: Relative Wagenposition beim Ausschwingvorgang des Doppelpendels

2 Zustandsregelung des inversen Doppelpendels

2.1 Zustandsraumdarstellung

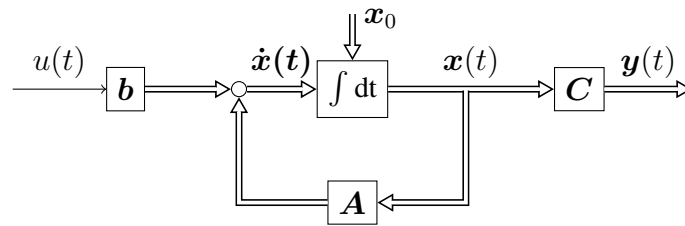


Bild 2.1: Signalflussplan des Zustandsraums ohne Durchgangsanteil

Das Doppelpendel wird in der oberen Gleichgewichtslage mittels Zustandsregelung stabilisiert. Die Vorteile einer Analyse eines Systems im Zustandsraum ist die gute Interpretierbarkeit der untersuchten physikalischen Zustände und eine einfache rechnergestützte Simulation [?]. Der Signalflussplan des Zustandsraums mit den wesentlichen Größen kann Bild 2.1 entnommen werden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Zeitabhängigkeit sämtlicher Größen wieder dargestellt wird. Das Ziel ist es, die in Abschnitt ?? hergeleiteten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen durch geeignete Umformungen im Zustandsraum eines Mehrgrößensystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.2)$$

mit einer Eingangsgröße und mehreren Ausgängen darzustellen. Es wird darauf hingewiesen, dass die hier dargestellte Zustandsraumdarstellung nicht der allgemeinen Form entspricht, sondern bereits an das untersuchte inverse Doppelpendel mit verfahrbarem Wagen angepasst ist. So wird bspw. der nicht vorhandene Durchgangsanteil $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ nicht aufgeführt. Im vorliegenden gelten für die einzelnen Variablen die Bezeichnungen und Dimensionen:

Zustandsvektor	$\mathbf{x}(t)$	$(n \times 1)$
Eingangsgröße	$u(t)$	(1×1)
Ausgangsvektor	$\mathbf{y}(t)$	$(p \times 1)$
Systemmatrix	\mathbf{A}	$(n \times n)$
Steuervektor	\mathbf{b}	$(n \times 1)$
Beobachtungsmatrix	\mathbf{C}	$(p \times n)$

Für das Aufstellen des Systems ist zunächst eine geeignete Wahl des Zustandsvektors \mathbf{x} notwendig. Nach [?] repräsentieren Zustände die physikalischen Energiespeicher eines Systems. In Anlehnung an den Lagrange-Formalismus aus Abschnitt ??, welche den Energieerhalt des inversen Doppelpendels beschreibt, stellen die Position sowie Geschwindigkeit des Wagens und analog der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit der beiden Pendelstäbe Energiespeicher dar. Demzufolge sind 6 Zustände relevant und ein geeigneter Zustandsvektor lautet

$$\mathbf{x}^T(t) = (x(t), \dot{x}(t), \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \varphi_2(t), \dot{\varphi}_2(t)). \quad (2.3)$$

Die Zustandsgleichung 2.1 beinhaltet die Zustände \mathbf{x} und deren zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{x}}$. Ausgehend vom Startpunkt $t = 0$ und den Startwerten $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ wird das dynamische, zeitinvariante Verhalten des Systems beschrieben und modelliert. Die obigen Gleichungen stellen hierbei ein bereits linearisierte System dar. Für die Wahl der Ausgangsgrößen eignen sich die Position des Wagens sowie die Winkel der Pendelstäbe. Die Größen $x(t)$, $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ werden in der Ausgangsgleichung 2.2 gebildet. Die in Abschnitt ?? hergeleiteten Bewegungsgleichungen liegen in nichtlinearer Form vor. Mithilfe einer Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$T_{(1,(\mathbf{x}_{AP}, u_0))}(\mathbf{x}(t), u)(t) = f(\mathbf{x}_{AP}, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial (\mathbf{x}(t), u(t))} \right|_{(\mathbf{x}_{AP}, u_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{AP})(u - u_0) \quad (2.4)$$

werden nichtlineare Funktionen durch Abbruch der Taylor-Reihe nach dem ersten Glied angenähert. Das Ergebnis ist eine Gerade, die durch den Arbeitspunkt läuft und das nichtlineare Verhalten in der Nähe des Arbeitspunktes approximiert. Für die Regelung des inversen Doppelpendels um die obere, instabile Gleichgewichtslage ergibt sich der Arbeitspunkt

$$\mathbf{x}_{AP}^T = (x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0) \text{ und } u_0 = 0.$$

Damit werden die Gleichungen 1.11 und 1.12 linearisiert und liefern

$$\ddot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{J_{1,\text{ges}}} \left(d_2(\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t)) - d_1\dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1u(t) - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2(t) + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1g\varphi_1(t) \right) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{J_{2,\text{ges}}} \left(d_2(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1(t) + \frac{1}{2}m_2l_2u(t) + \frac{1}{2}m_2l_2g\varphi_2(t) \right). \quad (2.6)$$

mit

$$J_{1,\text{ges}} = \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1^2 \quad \text{und} \quad J_{2,\text{ges}} = \frac{1}{3}m_2l_2^2.$$

Nach einer Entkopplung der Winkelbeschleunigungsterme in den Gleichungen 2.5 und 1.14 ist das Aufstellen der Systemmatrix \mathbf{A} , des Steuervektors \mathbf{B} und der Beobachtungsmatrix \mathbf{C} möglich. Aus den Gleichungen 2.5 und 2.6 ergeben sich für die Matrizen folgende Formen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ b_6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Einträge der Matrizen lauten

$$a_{43} = \frac{3g(2m_1 + 4m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{44} = \frac{-3(4d_1l_2 + d_2(6l_1 + 4l_2))}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{45} = \frac{-9gm_2}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{46} = \frac{6d_2(3l_1 + 2l_2)}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{63} = \frac{-9g(m_1 + 2m_2 + 2m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{64} = \frac{18d_1l_2m_2 + 6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3) + 3l_2m_2)}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{65} = \frac{6g(m_1 + 3m_2 + 3m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{66} = \frac{-6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3 + 3l_2m_2))}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}.$$

und

$$b_4 = \frac{3(2m_1 + m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$b_6 = \frac{-3m_1}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}.$$

2.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Bevor die hier angewendete *Optimalregelung* erläutert wird, werden die grundsätzlichen Eigenschaften der *vollständigen Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* eingeführt. Die in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenhänge beziehen sich auf ??.

Es ist für eine beliebige Regelung zu klären, ob mithilfe der Eingangsgröße $u(t)$ die Zustände von einem beliebigen Anfangszustand x_0 in einen gewünschten Endzustand x_e überführt werden können. Ist diese Bedingung erfüllt, nennt man das System *vollständig steuerbar*. Es gibt diverse Ansätze die Steuerbarkeit eines Systems zu überprüfen, wobei im Rahmen dieser Arbeit das Steuerbarkeitskriterium von *Kalman* herangezogen wird. Der Vorteil dieses Kriteriums ist der einfache Nachweis. Es genügt eine Untersuchung der $(n \times n)$ -Steuerbarkeitsmatrix, bestehend aus der System- und Steuervektor:

$$S_S = (b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b) \quad (2.7)$$

Für die *vollständige Steuerbarkeit* des Systems muss S_S den vollen Rang $n = \dim(x)$ aufweisen. Eine quadratische Matrix besitzt genau dann vollen Rang, wenn die Determinante der Matrix ungleich null ist. Mit den in Abschnitt 2.1 aufgestellten Systemmatrix A und dem

Steuervektor \mathbf{b} wird die *vollständige Steuerbarkeit* nachgewiesen:

$$\det(\mathbf{S}_S) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,70 & -12,22 & 553,55 & -4450,75 & 99131,28 \\ 5,70 & -12,22 & 553,55 & 4450,75 & 99131,28 & -1307247,75 \\ 0 & -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 \\ -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 & 4293776,72 \end{vmatrix} = -7.0768 \cdot 10^{14} \neq 0$$

Für die Stabilisierung des inversen Doppelpendels im Zustandsraum müssen die Systemvariablen bekannt sein. In der Simulation ist die Bestimmung des Zustandsvektors mithilfe der ermittelten Bewegungsgleichungen möglich. Während des Betriebs des realen Doppelpendels hingegen ist der zweite Pendelwinkel $\varphi_2(t)$ aufgrund fehlender Sensorik nicht messbar. Trotzdem ist es mithilfe von Beobachtern möglich, Zustände über die Systemgleichungen zu rekonstruieren. Kann ein Anfangszustand \mathbf{x}_0 aus dem bekannten Verlauf der Eingangsgröße \mathbf{u} und der Ausgangsgröße \mathbf{y} in einem endlichen Zeitintervall bestimmt werden, so heißt das System *vollständig beobachtbar*. Auch hier wird aufgrund des einfachen Nachweises das Beobachtbarkeitskriterium von *Kalman* angewendet. Die $(p \cdot n \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

muss wiederum den vollen Rang $n = \dim(\mathbf{x})$ besitzen. Da es sich bei \mathbf{S}_B um eine nicht quadratische Matrix handelt wird hier der Rang der Matrix mit den in Abschnitt 2.1 ermittelten Ergebnissen überprüft. Es ergibt sich: $\text{rg}(\mathbf{S}_B) = \dim(\mathbf{x}) = 6$, womit die *vollständige Beobachtbarkeit* nachgewiesen ist.

2.3 Zustandsregelung mittels LQ-Regelung

Die allgemeine Zustandsrückführung bei einer skalaren Eingangsgröße lautet

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t) + \underbrace{Vw(t)}_{\stackrel{\text{hier}}{=} 0}, \quad (2.9)$$

wobei $\mathbf{k}^T \in \mathbb{R}^n$ der Rückführvektor ist und der zweite Summand für eine Führungsregelung benötigt wird. Hierbei sind V ein Vorfilter und $w(t)$ die neue Führungsgröße. Im Fall der Stabilisierung des Doppelpendels ist keine neue Führungsgröße vorhanden, stattdessen wird versucht das Pendel aus einem ausgelenkten Zustand in den Arbeitspunkt 2.3 zu regeln. Hierfür

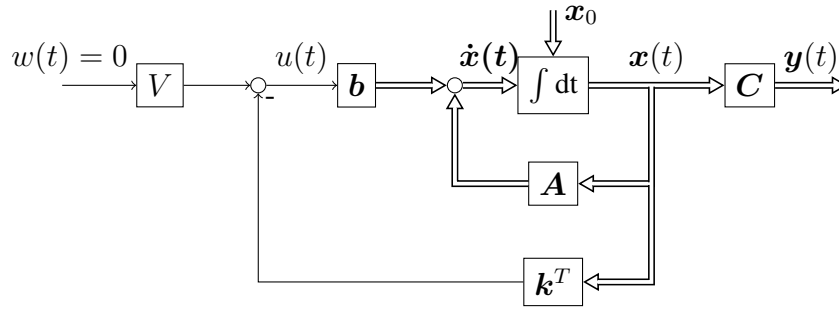


Bild 2.2: Signalflussplan der Zustandsrückführung

genügt es für die Untersuchung der Regelkreisdynamik den ersten Summanden der Zustandsrückführung 2.9 zu betrachten. Mithilfe der Gleichung 2.9 lässt sich der Signalflussplan, wie in Bild 2.2 zu sehen, ableiten. Unter Berücksichtigung der neuen Eingangsgröße aus Gleichung 2.9 ergibt sich das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\tilde{\mathbf{A}}$ die neue Systemmatrix. Es ist direkt ersichtlich, dass der Rückführvektor \mathbf{k}^T einen Einfluss auf die Eigenwerte des Systems hat. Somit ist es möglich, die Systemdynamik über die Einträge des Rückführvektors zu beeinflussen. Zwei beliebte Methoden der Zustandsregelung stellen die *Polvorgabe* und die *Linear-Quadratische-Regelung* (LQ-Regelung) dar.

Bei der ersten Methode wird die Systemdynamik des geschlossenen Kreises strikt über die Wahl bestimmter Pole der Übertragungsfunktion vorgegeben. Der Nachteil hierbei ist, dass es keine eleganten Auswahlkriterien bei der Polvorgabe gibt. Außerdem nimmt mit zunehmender Systemordnung die Anzahl der zu wählenden Pole automatisch zu. Offensichtlich müssen die Pole für ein stabiles System in der linken s-Halbebene liegen. Jedoch steht dann offen, in welcher Größenordnung die Pole vorzuliegen haben, in welchem Abstand sie angeordnet werden und in welcher Weise komplexe Pole berücksichtigt werden können. Besonders bei hoch instabilen Systemen wie dem inversen Doppelpendel, kann das Auffinden geeigneter Pole zur Systemstabilisierung zu Schwierigkeiten führen.

Bei der LQ-Regelung werden die Pole des geschlossenen Kreises auch verändert, jedoch geschieht dies auf indirekte Art und Weise. Die LQ-Regelung gehört zur Gruppe der optimalen Regelungsverfahren. Über die Definition eines Gütefunktional, welches die Stell- und Regelgrößen bewertet, kann die Regelungsaufgabe in ein Optimierungsproblem umgeformt werden.

Der große Vorteil von optimalen Regelung ist die gleichzeitige Berücksichtigung der Stell- und Regelgrößen, was bei der Zustandsrückführung mittels Polvorgabe nicht möglich ist. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit die LQ-Regelung für die Stabilisierung des Doppelpendels verwendet und im folgenden näher beleuchtet. Die hier aufgeführten Darstellungen beziehen sich auf Kapitel 7 von [?].

Das Gütefunktional eines zeitinvarianten Reglers mit unendlichem Zeithorizont lautet

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u(t) \mathbf{R} u(t)) dt, \quad (2.11)$$

wobei \mathbf{Q} und \mathbf{R} Wichtungsmatrizen darstellen. Die Einstellregeln der Wichtungsmatrizen werden später in diesem Abschnitt behandelt. Es wird für die Lösung des Optimierungsproblems vorausgesetzt, dass beide Matrizen positiv definit sind, sodass das Paar $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{Q}})$ vollständig beobachtbar ist. Die Matrix $\tilde{\mathbf{Q}}$ ergibt sich aus der Zerlegung

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{Q}}.$$

Damit die Gütefunktion einen endlichen Wert liefert, muss $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ gelten. Dies ist bei einer erfolgreichen Regelung in der oberen Gleichgewichtslage in Anlehnung an den Arbeitspunkt 2.3, der in den Nullpunkt des Systems führt, der Fall. Es lässt sich nun das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{k}^T} J$$

mittels der Zustandsrückführung

$$u(t) = -\mathbf{k}_{\text{opt}}^T \mathbf{x}(t)$$

mit

$$\mathbf{k}_{\text{opt}}^T = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \quad (2.12)$$

lösen. Hierbei ist \mathbf{P} die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Ricattigleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

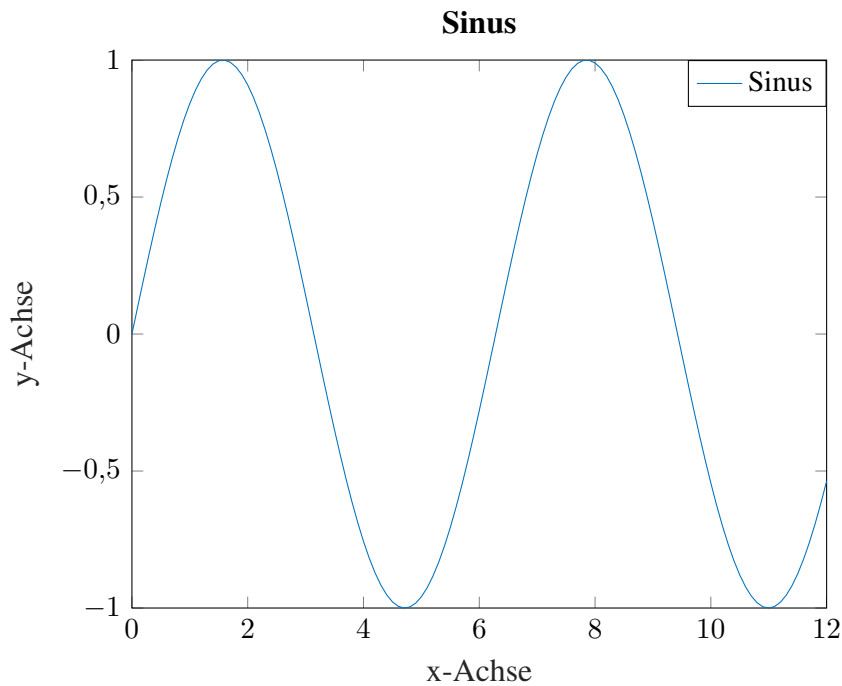
Eine genau Herleitung und Lösung der Matrix-Ricattigleichung wird an dieser Stelle nicht aufgeführt. In Kapitel 7 von[?] sind Details einsehbar.

Über die Wahl der Wichtungseinträge von \mathbf{Q} und \mathbf{R} lassen sich die Gütewerte der Zustände und der Stellgröße bewerten. Werden die Einträge von \mathbf{Q} bspw. höher als die von \mathbf{R} gewählt,

werden hohe Zustandswerte im Rahmen einer Minimierung stärker bestraft als die Stellgröße. Eine Methode für die Wahl der Wichtungseinträge ist in[?] dargestellt. Anstatt die Einträge iterativ zu bestimmen, werden nur die Diagonaleinträge der Matrizen mit positiven Werten besetzt, wodurch die Bedingung der positiven Definitheit erfüllt ist. Die Diagonaleinträge werden in Abhängigkeit der realen, maximal zulässigen Zustands- bzw. Eingangswerte gewählt und lauten

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= 1/x_{i,\max}^2, & Q_{i,j} &= 0, \text{ für } i \neq j, \\ R_{ii} &= 1/u_{i,\max}^2, & R_{i,j} &= 0, \text{ für } i \neq j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Somit ist das zu minimierende Gütefunktional 2.11 an die limitierenden Faktoren des untersuchten Systems geknüpft.



3 Zustandsbeobachtung

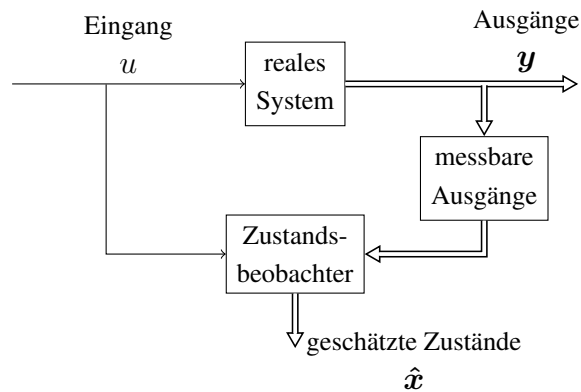


Bild 3.1: Signalflussplan der allgemeinen Zustandsbeobachtung

Bild 3.1 zeigt die allgemeine Idee der Zustandsbeobachtung auf. Die Eingänge des Zustandsbeobachters, der auf den Systemgleichungen des Zustandsraums beruht, sind die Eingangsgröße $u = \ddot{x}$ sowie der messbare Ausgang φ_1 . Der Zustandsbeobachter rekonstruiert mithilfe zugrunde liegender Systemgleichungen den geschätzten Zustandsvektor \hat{x} .