

Nichtlineare Zustandsbeobachtung mit bildbasierter Validierung am inversen Doppelpendel

Studienarbeit S-03/17-608

Andreas Serov
Matrikelnummer 2871560

Hannover, März 2017

Erstprüfer Prof. Dr.-Ing. T. Ortmaier
Betreuer M. Sc. Steffen Bosselmann

Ich versichere, dass ich diese Studienarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Hannover, 28. März 2017

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Bildverzeichnis | iii |
| Symbolverzeichnis | iv |
| 1 Einleitung | 1 |
| 2 Stand der Technik | 2 |
| 3 Modellierung des Doppelpendels | 3 |
| 4 Zustandsregelung des inversen Doppelpendels | 9 |
| 4.1 Zustandsraumdarstellung | 9 |
| 4.2 Steuerbarkeit | 12 |
| 4.3 Zustandsregelung mittels LQ-Regelung | 13 |
| 5 Nichtlineare Zustandsbeobachtung | 19 |
| 5.1 Lineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels | 19 |
| 5.2 Nichtlineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels | 20 |
| 5.3 Das Erweiterte Kalmanfilter | 24 |
| 5.3.1 Voraussetzungen des EKF | 24 |
| 5.3.2 Algorithmus des EKF | 25 |
| 5.3.3 Einstellregeln des EKF | 27 |
| 5.3.4 Simulationsergebnisse der Zustandsbeobachtung | 31 |
| 6 Bildbasierte Beobachtermultistepung | 35 |
| 6.1 Bildbasierte Winkelbestimmung | 35 |
| 6.2 Validierung der bildbasierten Winkelbestimmung | 41 |
| 6.3 Bildbasierte Validierung der Zustandsschätzung des EKF | 42 |
| 7 Zusammenfassung und Ausblick | 47 |
| Anhang | 48 |
| A.1 Nichtlineare Bewegungsgleichungen des Doppelpendels | 49 |
| Literaturverzeichnis | 50 |

Bildverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Skizze des inversen Doppelpendels | 4 |
| 3.2 | Relative Wagenposition beim Ausschwingvorgang des Doppelpendels | 7 |
| 4.1 | Signalflussplan des Zustandsraums ohne Durchgangsanteil | 9 |
| 4.2 | Signalflussplan der Zustandsrückführung | 14 |
| 4.3 | Zustandsregelung des Doppelpendels mittels LQ-Rgelung | 18 |
| 5.1 | Signalflussplan der allgemeinen Zustandsbeobachtung | 19 |
| 5.2 | Schematischer Ablauf des EKF Algorithmus | 28 |
| 5.3 | Signalflussplan der Zustandsbeobachtung in der Simulation | 31 |
| 5.4 | Zustandsschätzung der Pendelwinkel in der Simulation | 32 |
| 5.5 | Zustandsschätzung der Pendelwinkelgeschwindigkeiten | 34 |
| 6.1 | Skizze eines Einzelbilds des Doppelpendels mit Farbmarkern | 36 |
| 6.2 | Einzelbild des Doppelpendels vor und nach der Farbsegmentierung | 38 |
| 6.3 | Einzelbild des Doppelpendels vor und nach der Bildverarbeitung | 40 |
| 6.4 | Validierung der bildbasierten Winkelbestimmung | 42 |
| 6.5 | Zustandsschätzung des Doppelpendels am Versuchsstand | 43 |
| 6.6 | Zustandsschätzung der Pendelwinkel am realen Doppelpendel | 45 |
| 6.7 | Zustandsschätzung der Pendelwinkelgeschwindigkeiten am realen Doppelpendel | 46 |

Symbolverzeichnis

Doppelpendel

| | |
|--------------------|--|
| φ_1 | Winkel des inneren Pendels |
| φ_2 | Winkel des äußeren Pendels |
| d_1 | Dämpfungskonstante des inneren Pendels |
| d_2 | Dämpfungskonstante des äußeren Pendels |
| F_a | Antriebskraft des Wagens |
| F_r | Reibkraft zwischen Wagen und Linearführung |
| g | Erdbeschleunigung |
| J_1^S | Massenträgheitsmoment des inneren Pendels um den Schwerpunkt |
| J_2^S | Massenträgheitsmoment des äußeren Pendels um den Schwerpunkt |
| L | Lagrange-Funktion |
| ℓ_1 | Länge des inneren Pendels |
| ℓ_2 | Länge des äußeren Pendels |
| m_0 | Masse des Wagens |
| m_1 | Masse des inneren Pendels |
| m_2 | Masse des äußeren Pendels |
| m_3 | Masse des Gelenks |
| M_{Motor} | Antriebsmoment des Motors |
| \mathbf{q} | Vektor der generalisierten Koordinaten |
| $Q_{\text{n.k.}}$ | Nichtkonservative Kräfte |
| T | Kinetische Energie |
| U | Potentielle Energie |
| v | Schwerpunktsgeschwindigkeit |
| x | Wagenposition |

Zustandsregelung

| | |
|-------------|--|
| A | Systemmatrix |
| \tilde{A} | Systemmatrix des geschlossenen Kreises |
| b | Steuervektor |
| C | Beobachtungsmatrix |
| J | Gütefunktional |
| k^T | Rückführvektor |
| P | Lösung der Matrix-Ricattigleichung |
| Q_{LQ} | Wichtungsmatrix des Zustandsvektors |
| R_{LQ} | Wichtungsfaktor der Eingangsgröße |
| S_S | Steuerbarkeitsmatrix |
| $u(t)$ | Eingangsgröße |
| V | Vorfilter der Führungsgröße |
| $w(t)$ | Führungsgröße |
| $x(t)$ | Zustandsvektor |
| x_0 | Anfangszustand |
| $y(t)$ | Ausgangsvektor |

Nichtlineare Zustandsbeobachtung

| | |
|-------------------|-------------------------------------|
| ω | Kreisfrequenz |
| e | Fehler der Zustandsschätzung |
| K_k | Kalmanverstärkung |
| P_0 | Initiale Fehlerkovarianz |
| P_k | Matrix der Fehlerkovarianz |
| Q_{EKF} | Matrix des Prozessrauschens |
| R_{EKF} | Matrix des Messrauschens |
| S_B | Lineare Beobachtbarkeitsmatrix |
| $S_{B,nl}$ | Nichtlineare Beobachtbarkeitsmatrix |
| v_k | Vektor des Messrauschens |
| w_k | Vektor des Prozessrauschens |
| \hat{x} | Geschätzter Zustandsvektor |
| $\ddot{x}(t)$ | Wagenbeschleunigung |
| \ddot{x}_{\max} | Amplitude der Wagenbeschleunigung |
| $\Delta\ddot{x}$ | Phasenversatz |

Beobachtervalidierung

| | |
|-----------------|---|
| α_1 | innerer Pendelwinkel im Bildkoordinatensystem |
| α_2 | äußerer Pendelwinkel im Bildkoordinatensystem |
| $\varphi_{1,B}$ | Bildbasierter innerer Pendelwinkel |
| $\varphi_{2,B}$ | Bildbasierter äußerer Pendelwinkel |
| A | Fläche eines Bildobjekts |
| B | RGB-Einzelbild |
| B^r | Einzelbild des roten Farbkanals |
| B^g | Einzelbild des grünen Farbkanals |
| B^b | Einzelbild des blauen Farbkanals |
| c_r | Schwerpunkt des roten Farbmarkers |
| c_g | Schwerpunkt des grünen Farbmarkers |
| c_b | Schwerpunkt des blauen Farbmarkers |
| G^r | Einzelbild in Graustufen |
| I | Intensitätsschwellwert |
| KS_B | Bildkoordinatensystem |
| SW | Binärmaske eines Einzelbilds |
| u_S | Schwerpunktkoordinate der u -Achse |
| v_S | Schwerpunktkoordinate der v -Achse |

1 Einleitung

In der Regelungstechnik gewinnen Zustandsrückführungen immer mehr an Bedeutung. Zum einen ist durch die Zustandsrückführung eine Auslegung der dynamischen Eigenschaften des Regelkreises möglich. Instabile Systeme wie das Doppelpendel können so durch die Manipulation der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises stabilisiert werden. Zum anderen genügen bei der Zustandsrückführung proportional wirkende Regler, wodurch die Umsetzung des Reglergesetzes durch einfach Additionen und Multiplikation vollzogen werden kann, vgl. [Lun10]. Für die Anwendung einer Zustandsrückführung müssen jedoch alle Zustände vorhanden sein. In vielen Fällen sind nicht alle Systemzustände aufgrund fehlender Sensorik oder finanziellem Mehraufwand messbar. Wenn die Voraussetzungen der Beobachtbarkeit eines Systems erfüllt sind, können Zustandsbeobachter nicht messbare Größen rekonstruieren.

Zu Demonstrations- und Forschungszwecken wurde am *Institut für Mechatronische Systeme* ein inverses Pendel auf einem verfahrbaren Wagen aufgebaut. Im Rahmen dieser Studienarbeit wird das inverse Pendel mit einem zweiten Stabs zum Doppelpendel erweitert. Während der innere Pendelwinkel gemessen wird, verfügt das äußere Pendel über keine Sensorik zur Lagebestimmung. Es ist mithilfe von Zustandsbeobachtern trotzdem möglich, den äußeren Pendelwinkel zu schätzen. Beobachter rekonstruieren Systemzustände unter Verwendung des zugrundeliegenden mathematischen Modells. Die nichtlineare Beobachtung der Zustände des inversen Doppelpendels ist Gegenstand dieser Arbeit.

Die Studienarbeit ist wie folgt gegliedert. Zuerst werden die dynamischen Bewegungsgleichungen des inversen Doppelpendels hergeleitet. Als nächstes wird die Zustandsregelung des Doppelpendels, welche als Motivation für die Zustandsbeobachtung dient, in der oberen, stabilen Gleichgewichtslage simuliert. In Kapitel 5 wird die Systemeigenschaft der Beobachtbarkeit untersucht, um anschließend die Implementierung eines nichtlinearen Beobachterkonzepts für das inverse Doppelpendel vorzunehmen. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Erweiterte Kalmanfilter als Zustandsbeobachter verwendet. Die Winkelschätzung der Pendelstäbe wird nach einer Erläuterung der bildbasierten Winkelbestimmung am realen Versuchsstand validiert und die Ergebnisse werden diskutiert.

2 Stand der Technik

In der Regelungstechnik ist das inverse Doppelpendel ein vielfach untersuchtes System. Dabei lässt sich die Grundidee der Stabilisierung dieses Systems auf diverse Anwendungsfälle übertragen. In [OAN13] wird die Regelung eines reibungsbehafteten Einrads, welches mithilfe der dynamischen Gleichungen des Doppelpendels modelliert wird, behandelt. In der humanoiden Robotik ist der aufrechte Stand unter Einwirkung von Störeinflüssen eine zu meisternde Hürde. Die Stabilisierung des aufrechten Stands, welche mithilfe des Doppelpendelmodells abstrahiert wird, ist Gegenstand von [HMF14]. Hierbei wird das Verbindungsgelenk der Pendelstäbe in die Hüfte des menschlichen Modells gesetzt. Die zur Stabilisierung erforderliche Krafteinwirkung erfolgt über die Füße.

Die Zustandsschätzung des äußeren Pendelwinkels φ_2 wird in [SSER10] behandelt. Es wird ein Vergleich zwischen dem Kalmanfilter und der Zustandsbeobachtung durch die *Active Learning Method* (ALM) vollzogen, wobei die ALM bessere Ergebnisse liefert. Neben der Zustandsschätzung lassen sich Beobachter auch für die Identifikation von Systemparametern nutzen. In [MWJ04] wird neben einer Zustandsschätzung der Pendelwinkel, welche für die Stabilisierung des Doppelpendels mittels einer optimalen Regelung verwendet wird, eine Parameteridentifikation der Wagen- und Pendelmassen sowie der Pendellängen durchgeführt. Die Zustandsschätzung und Parameteridentifikation basiert auf verrauschten Messungen der Wagenposition, Wangengeschwindigkeit und des äußeren Pendelwinkels. Der verwendete Beobachter ist das *Unscented Kalmanfilter*. Das Doppelpendel lässt sich durch Hinzunahme eines dritten Stabs zu einem Dreifachpendel erweitern. In [GEK13] wird der Aufschwingversuch sowie eine Zustandsschätzung am Dreifachpendel untersucht. Von großer Relevanz ist die technische Umsetzung des realen Dreifachpendels, um dieses erfolgreich aufschwingen zu lassen und dann in der oberen Gleichgewichtslage regeln zu können.

Das besondere an dieser Arbeit ist, dass die Zustandsschätzung mittels *Erweitertem Kalmanfilter* zunächst in der Simulation durchgeführt und dann am realen Versuchsstand validiert wird. Die Validierung wird mit einer berührungslosen, bildbasierten Winkelbestimmung der Pendelwinkel realisiert. Diese Art der Pendelwinkelbestimmung verändert die Dynamik des Systems nicht.

3 Modellierung des Doppelpendels

Die Grundlage für die nichtlineare Zustandsbeobachtung des inversen Doppelpendels bilden die dynamischen Bewegungsgleichungen des Systems, welche in diesem Kapitel hergeleitet werden. Die Differentialgleichungen werden mithilfe des Lagrange-Formalismus ermittelt. Dafür wird zunächst eine mechanische Modellierung des Systems vorgenommen.

Der generelle Aufbau des inversen Doppelpendels mit den relevanten, physikalischen Größen kann Bild 3.1 entnommen werden. Das mechatronische System besteht aus einem Wagen auf einer Linearführung, zwei miteinander gekoppelten Stäben sowie einem Motor, welcher das Drehmoment M_{Motor} zum Ansteuern des Wagens liefert. Durch die Umsetzung des Motormoments resultiert eine Antriebskraft F_a auf den Wagen sowie eine entgegengesetzte Reibkraft der Linearführung F_r . Beide Pendelstäbe sind rotatorisch miteinander gelagert, sodass sie Bewegungen nur in der x - y -Ebene durchführen können. Für die Modellierung werden die Winkellagen φ_i , die Längen ℓ_i , die Gewichte m_i , die Dämpfungskonstanten d_i sowie die Massenträgheitsmomente um den Schwerpunkt J_i^S der Pendel benötigt. Für die Anwendung des Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{\text{n.k.}} \quad (3.1)$$

ist eine energetische Betrachtung des Systems nötig. In (3.1) repräsentieren \mathbf{q} die generalisierten Koordinaten, $\dot{\mathbf{q}}$ ihre zeitlichen Ableitungen und $\mathbf{Q}_{\text{n.k.}}$ auftretende nicht konservative Kräfte. Im vorliegenden Fall werden die generalisierten Koordinaten $x(t)$, $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ verwendet, da diese Variablen den Freiheitsgraden des Systems entsprechen. Diese Größen hängen von der Zeit ab, jedoch wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zeitabhängigkeit in diesem Kapitel vorausgesetzt und im Folgenden nicht explizit aufgeführt. Die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (3.2)$$

setzt sich aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U des Systems zusammen. Die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 J_i^S \dot{\varphi}_i^2 \quad (3.3)$$

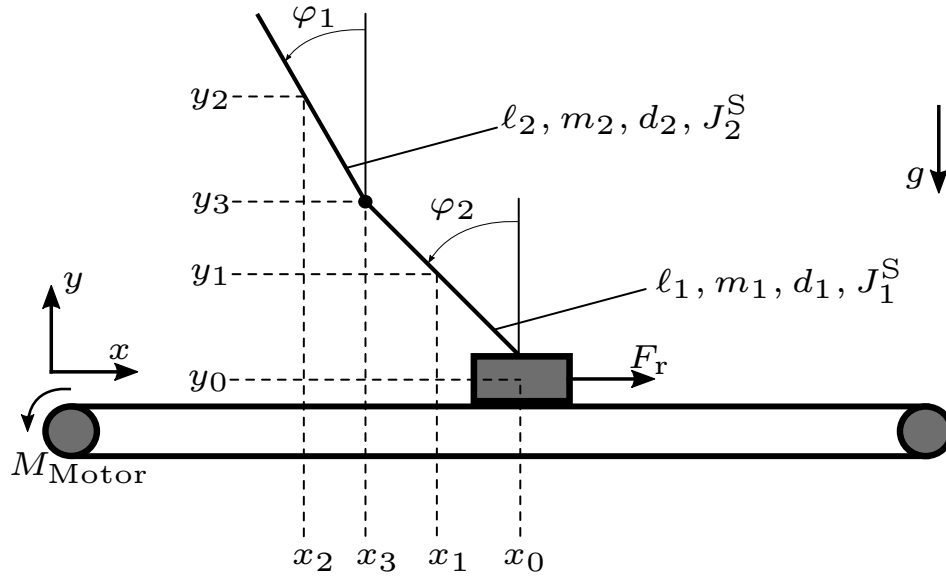


Bild 3.1: Skizze des inversen Doppelpendels

besteht aus der translatorischen Bewegungsenergie der Schwerpunkte und der Rotationsenergie der Pendelstäbe. Die Trägheiten der Pendel werden über das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes um den Schwerpunkt mit

$$J_i^S = \frac{1}{12} m_i \ell_i^2 \quad (3.4)$$

approximiert. Bei der Modellierung des Doppelpendels ist die Betrachtung von vier Schwerpunkten, die Bild 3.1 zu entnehmen sind, notwendig. Neben den Schwerpunkten des Wagens und der beiden Pendel, die über die Indizes 0, 1 und 2 verfügen, ist noch das Verbindungsgelenk der Stäbe zu beachten. Das Gewicht des Gelenks ist so hoch, dass es bei der Modellierung berücksichtigt wird und nicht vernachlässigt werden kann. Das Gelenk wird als Punktmasse behandelt und mit dem Index 3 versehen. Damit werden die Positionen der Massen

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & y_0 &= 0, \\ x_1 &= x_0 - \frac{1}{2} \ell_1 \sin(\varphi_1), & y_1 &= \frac{1}{2} \ell_1 \cos(\varphi_1), \\ x_2 &= x_0 - \ell_1 \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2} \ell_2 \sin(\varphi_2), & y_2 &= \ell_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} \ell_2 \cos(\varphi_2), \\ x_3 &= x_0 - \ell_1 \sin(\varphi_1), & y_3 &= \ell_1 \cos(\varphi_1) \end{aligned}$$

bestimmt. Zur Ermittlung der Schwerpunktgeschwindigkeiten werden die zeitlichen Ableitun-

gen

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= \dot{x}, & \dot{y}_0 &= 0, \\
 \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \frac{1}{2}\ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, \\
 \dot{x}_2 &= \dot{x}_0 - \ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\ell_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, & \dot{y}_2 &= -\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\ell_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \\
 \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 - \ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_3 &= -\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1
 \end{aligned}$$

berechnet. Die Ermittlung der Gesamtgeschwindigkeit in der x - y -Ebene unter Berücksichtigung von $\dot{x}_0 = \dot{x}$ ist über eine Betragsbildung möglich und liefert

$$\begin{aligned}
 v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}^2, \\
 v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 - \ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}_1\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2, \\
 v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\
 &= \dot{x}^2 + \ell_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{x}\ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \ell_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + \ell_1\ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2, \\
 v_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = \dot{x}^2 - 2\ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}\dot{\varphi}_1 + \ell_1^2\dot{\varphi}_1^2.
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die kinetische Energie des Systems gemäß (3.3) zu

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(m_0v_0^2 + m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2) \\
 &= \frac{1}{2}\left((m_0 + m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3\right)\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 \right. \\
 &\quad \left. - (m_1 + 2m_2 + 2m_3)\ell_1\dot{x} \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + m_2\left(\frac{1}{4}\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2 - \ell_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2\right) \right. \\
 &\quad \left. + \ell_1\ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2\right).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die potentielle Energie des Systems lässt sich im vorliegenden Fall auf das Höhenpotential

$$U = g \sum_{i=0}^3 m_i y_i \tag{3.6}$$

beschränken. Das Nullniveau des Potentials wird auf die Höhe des Wagens y_0 gelegt. Somit lautet die potentielle Energie

$$U = g\left(\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)\ell_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2}m_2\ell_2 \cos(\varphi_2)\right). \tag{3.7}$$

Mithilfe von (3.5) und (3.7) werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_a - F_r \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \quad (3.10)$$

aufgestellt. Die nicht-konservativen Kräfte auf der rechten Seite der Gleichungen sind Kräfte, die sich nicht aus einem generalisierten Potential $P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ableiten lassen können. Nicht-konservative Kräfte treten beim Energieaustausch des Systems mit der Umgebung auf. Im vorliegenden Fall sind die Antriebskraft des Motors, die Reibung zwischen der Linearführung und dem Wagen sowie die Dämpfungsterme der Pendellager Kräfte nicht-konservativer Natur.

In [Beh16] werden zwei Möglichkeiten zur Regelung und Steuerung des mechatronischen Systems aufgezeigt. Zum einen kann der Wagen momentengesteuert betrieben werden. Hierbei wird ein Wunschmodent M_{soll} an den Motor übertragen. Bei der Umsetzung des Moments hat die Reibung zwischen dem Wagen und der Linearführung jedoch einen großen Einfluss auf die letztendlich resultierende Beschleunigung des Wagens. Um eine realitätsnahe Modellierung des Systems zu gewährleisten, wird eine Berücksichtigung der Reibung vorausgesetzt, wenn das Pendel momentengesteuert betrieben wird.

Zum anderen ist es möglich, das Doppelpendel mittels Drehzahlvorgabe anzusteuern. Dabei setzt der Motor eine vorgegebene Sollgeschwindigkeit v_{soll} um. Dies hat den Vorteil, dass die Reibung des Systems vernachlässigt werden kann. Außerdem wird in [Beh16] aufgezeigt, dass bei der Regelung des realen, inversen Einfachpendels mit Drehzahlvorgabe deutlich bessere Regelungsergebnisse erzielt werden. In diesem Zusammenhang wird die Vermutung aufgestellt, dass aufgrund der hohen Reibung der Linearführung und des geringen Gewichts der realen Pendelstäbe keine Rückwirkung der Pendelbewegung auf die Wagenposition vorliegt. Diese Annahme wird verifiziert, indem die relative Auslenkung des Wagens während eines Ausschwingvorgangs des Doppelpendels gemessen wird. In Bild 3.2 ist zu sehen, dass die maximale Auslenkung wenige Mikrometer beträgt, wodurch der Einfluss der Pendelbewegung auf die Wagenposition im Folgenden vernachlässigt werden kann.

Aus den genannten Gründen wird die Wagenbeschleunigung \ddot{x} als Eingangsgröße des Systems gewählt. Für die Ansteuerung des Motors, wird die Sollgeschwindigkeit durch eine einfache Integration der vorgegebenen Beschleunigung ermittelt. Dadurch ist die explizite Lösung von (3.8), die die Bewegungsgleichung des Wagens liefert, nicht mehr notwendig. Nach einer Bildung der Ableitungen der Lagrange-Funktion und Umformen von (3.9) und (3.10) lassen

sich die Bewegungsgleichungen des inversen Doppelpendels aufstellen:

$$\ddot{x} = u \quad (3.11)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{J_1^S + (\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3)\ell_1^2} \left(d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)\ell_1 \cos(\varphi_1)\ddot{x} \right. \\ \left. + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)\ell_1 g \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2}m_2\ell_1\ell_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2) \right) \quad (3.12)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{J_2^S + \frac{1}{4}m_2\ell_2^2} \left(-d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2}m_2\ell_2 \cos(\varphi_2)\ddot{x} + \frac{1}{2}m_2\ell_2 g \sin(\varphi_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}m_2\ell_1\ell_2(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1) \right) \quad (3.13)$$

In den Gleichungen (3.12) und (3.13) ist zu sehen, dass Winkelbeschleunigungen jeweils noch voneinander abhängen. In der Bewegungsgleichung für den inneren Pendelstab $\ddot{\varphi}_1$ taucht die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_2$ auf und umgekehrt. Das Ergebnis der einen Gleichung wird im selben Zeitschritt für die Auswertung der anderen Winkelbeschleunigung benötigt. Um dieses

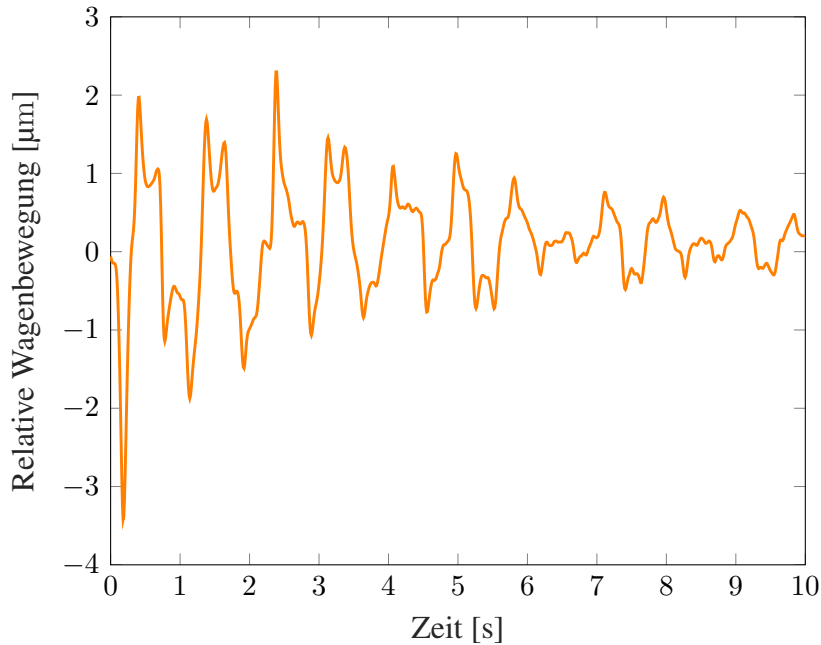


Bild 3.2: Relative Wagenposition beim Ausschwingvorgang des Doppelpendels

Problem zu umgehen, werden die Gleichungen entkoppelt. Die Gleichungen der Form

$$\ddot{\varphi}_1 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2), \quad (3.14)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \quad (3.15)$$

werden für die Ermittlung der Pendelwinkelbeschleunigungen verwendet. Eine vollständige Darstellung von (3.14) und (3.15) ist in Anhang A.1 vorzufinden. An dieser Stelle wird auf die in der Zustandsregelung und -beobachtung verwendeten Systemparameter verwiesen, die Tabelle 3.1 zu entnehmen sind.

Tabelle 3.1: Gemessene und geschätzte Werte der Systemparameter

| Variable | Wert | Beschreibung |
|------------|----------------------------|-------------------------------------|
| l_1 | 0,194 m | Länge des inneren Pendelstabs |
| l_2 | 0,1855 m | Länge des äußeren Pendelstabs |
| m_1 | 0,0313 kg | Masse des inneren Pendelstabs |
| m_2 | 0,0313 kg | Masse des äußeren Pendelstabs |
| m_3 | 0,0308 kg | Masse des Gelenks |
| d_1, d_2 | 0,001 kg m ² /s | Dämpfungskonstanten der Pendelstäbe |
| g | 9,81 m/s ² | Erdbeschleunigung |

Mithilfe der hergeleiteten Bewegungsgleichungen wird im folgenden Kapitel zunächst die Zustandsregelung des Doppelpendels in der oberen, instabilen Gleichgewichtslage untersucht.

4 Zustandsregelung des inversen Doppelpendels

In diesem Kapitel wird zuerst die Zustandsraumdarstellung des inversen Doppelpendels hergeleitet. Im Anschluss erfolgt die Untersuchung der grundlegenden Systemeigenschaft der Steuerbarkeit für das vorliegende, lineare System. Zuletzt wird das Doppelpendel mittels einer optimalen Zustandsregelung in der oberen, instabilen Gleichgewichtslage stabilisiert. Die Simulationsergebnisse werden dargestellt und diskutiert.

4.1 Zustandsraumdarstellung

Die Herleitung der Zustandsraumdarstellung ist Gegenstand dieses Abschnitts. Die Vorteile einer Analyse eines Systems im Zustandsraum ist die gute Interpretierbarkeit der untersuchten physikalischen Zustände und eine einfache rechnergestützte Simulation [Lun10]. Der Signalflussplan des Zustandsraums mit den wesentlichen Größen kann Bild 4.1 entnommen werden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Zeitabhängigkeit der Systemzustände und der Eingangsgröße wieder dargestellt wird. Das Ziel ist es, die in Kapitel 3 hergeleiteten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen durch eine Linearisierung in den Zustandsraum eines Mehrgrößensystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \text{ mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.2)$$

mit einer Eingangsgröße und mehreren Ausgängen zu überführen. Da das System nicht sprung-

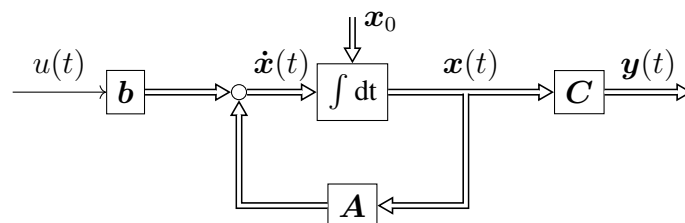


Bild 4.1: Signalflussplan des Zustandsraums ohne Durchgangsanteil

fähig ist, wird der Durchgangsanteil $D = 0$ in den obigen Gleichungen nicht aufgeführt. Für die einzelnen Variablen gelten die folgenden Bezeichnungen und Dimensionen:

| Bezeichnung | Variable | Dimension |
|--------------------|-----------------|----------------|
| Zustandsvektor | $\mathbf{x}(t)$ | $(n \times 1)$ |
| Anfangszustand | \mathbf{x}_0 | $(n \times 1)$ |
| Eingangsgröße | $u(t)$ | (1×1) |
| Ausgangsvektor | $\mathbf{y}(t)$ | $(p \times 1)$ |
| Systemmatrix | \mathbf{A} | $(n \times n)$ |
| Steuervektor | \mathbf{b} | $(n \times 1)$ |
| Beobachtungsmatrix | \mathbf{C} | $(p \times n)$ |

Für das Aufstellen des Systems ist zunächst eine geeignete Wahl des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ notwendig. Nach [Lun14] repräsentieren Zustände die physikalischen Energiespeicher eines Systems. In Anlehnung an den Lagrange-Formalismus aus Kapitel 3, welche den Energieerhalt des inversen Doppelpendels beschreibt, stellen die Position sowie Geschwindigkeit des Wagens und analog der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit der beiden Pendelstäbe Energiespeicher dar. Demzufolge sind 6 Zustände relevant und ein geeigneter Zustandsvektor lautet

$$\mathbf{x}(t) = \left[x(t), \dot{x}(t), \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \varphi_2(t), \dot{\varphi}_2(t) \right]^T. \quad (4.3)$$

Die Zustandsgleichung (4.1) beinhaltet die Zustände \mathbf{x} und deren zeitlichen Ableitungen $\dot{\mathbf{x}}$. Ausgehend vom Startpunkt $t = 0$ und den Startwerten $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ wird das dynamische, zeitinvariante Verhalten des Systems beschrieben und modelliert. Die obigen Gleichungen stellen ein bereits linearisiertes System dar. Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen liegen in nichtlinearer Form vor. Mithilfe einer Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$\begin{aligned} T_{(1,(\mathbf{x}_{AP}, u_0))}(\mathbf{x}(t), u(t)) &= f(\mathbf{x}_{AP}, u_{AP}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{(\mathbf{x}_{AP}, u_{AP})} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{AP}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial f}{\partial u(t)} \right|_{(\mathbf{x}_{AP}, u_{AP})} (u(t) - u_{AP}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

werden nichtlineare Funktionen durch Abbruch der Taylor-Reihe nach dem 1. Glied angenähert. Das Ergebnis ist eine lineare Approximation des nichtlinearen Verhaltens des Systems in der Nähe des Arbeitspunkts. Für die Regelung des inversen Doppelpendels um die obere, instabile Gleichgewichtslage ergibt sich der Arbeitspunkt

$$\mathbf{x}_{AP} = \left[x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0 \right]^T \text{ und } u_{AP} = 0.$$

Damit werden (3.12) und (3.13) linearisiert und liefern

$$\ddot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{J_{1,\text{ges}}} \left(d_2(\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t)) - d_1\dot{\varphi}_1(t) + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1u(t) - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2(t) + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1g\varphi_1(t) \right), \quad (4.5)$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{J_{2,\text{ges}}} \left(d_2(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) - \frac{1}{2}m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1(t) + \frac{1}{2}m_2l_2u(t) + \frac{1}{2}m_2l_2g\varphi_2(t) \right) \quad (4.6)$$

mit

$$J_{1,\text{ges}} = \left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1^2 \quad \text{und} \quad J_{2,\text{ges}} = \frac{1}{3}m_2l_2^2.$$

Nach einer Entkopplung der Winkelbeschleunigungsterme in (4.5) und (4.6) ist das Aufstellen der Systemmatrix \mathbf{A} , des Steuervektors \mathbf{b} und der Beobachtungsmatrix \mathbf{C} möglich. Für die Wahl der Ausgangsgrößen eignen sich die messbaren Größen des mechatronischen Systems. Diese sind die Wagenposition $x(t)$ und der innere Pendelwinkel $\varphi_1(t)$, welche in (4.2) gebildet werden. Es ergeben sich für die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die einzelnen Einträge lauten

$$\begin{aligned} a_{43} &= \frac{3g(2m_1 + 4m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\ a_{44} &= \frac{-3(4d_1l_2 + d_2(6l_1 + 4l_2))}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\ a_{45} &= \frac{-9gm_2}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\ a_{46} &= \frac{6d_2(3l_1 + 2l_2)}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{63} &= \frac{-9g(m_1 + 2m_2 + 2m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\
a_{64} &= \frac{18d_1l_2m_2 + 6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3) + 3l_2m_2)}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\
a_{65} &= \frac{6g(m_1 + 3m_2 + 3m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\
a_{66} &= \frac{-6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3 + 3l_2m_2))}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_4 &= \frac{3(2m_1 + m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}, \\
b_6 &= \frac{-3m_1}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung vollständig gebildet. Der Zustandsraum ist der Ausgangspunkt für Untersuchungen weiterer Systemeigenschaften. Für die Zustandsregelung ist die Steuerbarkeit des Doppelpendels relevant, welche im folgenden Abschnitt untersucht wird.

4.2 Steuerbarkeit

Bevor die hier angewendete Optimalregelung erläutert wird, wird die grundsätzliche Eigenschaften der *vollständigen Steuerbarkeit* eingeführt. Die in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenhänge sind angelehnt an [Lun10].

Es ist für eine beliebige Regelungsaufgabe zu klären, ob mithilfe der Eingangsgröße $u(t)$ die Zustände von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einen gewünschten Endzustand \mathbf{x}_e überführt werden können. Ist diese Bedingung erfüllt, nennt man das System *vollständig steuerbar*. Es gibt diverse Ansätze die Steuerbarkeit eines Systems zu überprüfen, wobei im Rahmen dieser Arbeit das Steuerbarkeitskriterium von *Kalman* herangezogen wird. Der Vorteil dieses Kriteriums ist der einfache Nachweis. Es genügt eine Untersuchung der $(n \times n)$ -Steuerbarkeitsmatrix

bestehend aus der Systemmatrix und dem Steuervektor:

$$\mathbf{S}_S = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}). \quad (4.7)$$

Für die *vollständige Steuerbarkeit* des Systems muss die Steuerbarkeitsmatrix den vollen Rang $\text{rang}(\mathbf{S}_S) = \dim(\mathbf{x}) = n$ aufweisen. Eine quadratische Matrix besitzt genau dann vollen Rang, wenn die Determinante der Matrix ungleich null ist. Mit der in Abschnitt 4.1 aufgestellten Systemmatrix \mathbf{A} und dem Steuervektor \mathbf{b} wird die *vollständige Steuerbarkeit* nachgewiesen:

$$\det(\mathbf{S}_S) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,70 & -12,22 & 553,55 & -4450,75 & 99131,28 \\ 5,70 & -12,22 & 553,55 & 4450,75 & 99131,28 & -1307247,75 \\ 0 & -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 \\ -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 & 4293776,72 \end{vmatrix} = -7.0768 \cdot 10^{14} \neq 0$$

Folglich lässt sich das Doppelpendel mithilfe der Eingangsgröße $\ddot{x}(t)$ aus einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in einen Endzustand \mathbf{x}_e überführen. Das bedeutet, dass die Zustandsregelung in die obere Gleichgewichtslage für das linearisierte Modell theoretisch möglich ist.

4.3 Zustandsregelung mittels LQ-Regelung

In diesem Abschnitt wird die Zustandsregelung mithilfe der optimalen *Linear-Quadratischen-Regelung* (LQ-Regelung) dargestellt. Im Gegensatz zur PID-Regelung wird bei der Zustandsregelung nicht die Ausgangsgröße zurückgeführt sondern die Systemzustände. Die allgemeine Zustandsrückführung bei einer skalaren Eingangsgröße lautet

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t) + Vw(t), \quad (4.8)$$

wobei $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ der Rückführvektor ist und der zweite Summand für eine Führungsregelung benötigt wird. Es sind V ein Vorfilter und $w(t)$ die Führungsgröße. In Bild 4.2 ist der allgemeine Signalflussplan der Zustandsrückführung abgebildet. Im Fall der Stabilisierung des Doppelpendels ist keine Führungsgröße vorhanden, stattdessen wird das Pendel aus einem ausgelenkten Zustand \mathbf{x}_0 in den Arbeitspunkt (4.3) geregelt. Hierfür genügt es für die Untersuchung der Regelkreisdynamik den ersten Summanden von (4.8) zu betrachten. Es ergibt sich das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{x}(t), \text{ mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

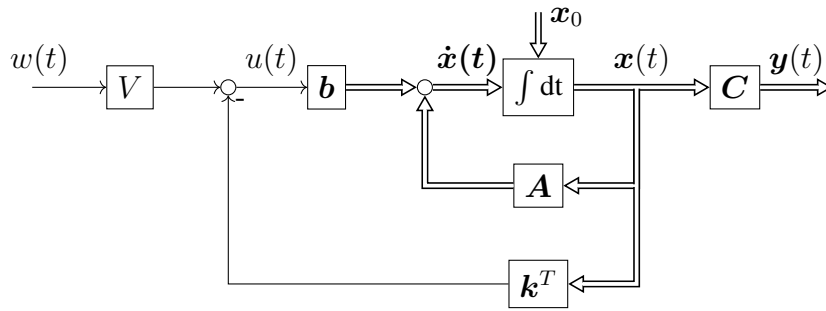


Bild 4.2: Signalflussplan der Zustandsrückführung

Hierbei ist \tilde{A} die Systemmatrix des geschlossenen Kreises mit Zustandsrückführung. Es ist direkt ersichtlich, dass der Rückführvektor \mathbf{k}^T einen Einfluss auf die Eigenwerte des geschlossenen Kreises hat. Somit ist es möglich, die geschlossene Systemdynamik über die Einträge des Rückführvektors zu beeinflussen. Zwei häufig verwendete Methoden der Reglerauslegung stellen die *Polvorgabe* und die LQ-Regelung dar. Die hier dargestellten Ausführungen beziehen sich auf Kapitel 7 in [Lun10].

Bei der ersten Methode wird die Systemdynamik des geschlossenen Kreises über die Wahl bestimmter Pole der Übertragungsfunktion, welche das Ein- und Ausgangsverhalten des Systems beschreibt, vorgegeben. Hierbei werden die Pole in der komplexen Ebene platziert, wobei diese bestimmte Eigenschaften erfüllen sollten. Unter anderem muss die Reglerdynamik höher als die der Strecke sein. Dafür werden die vorgegebenen Pole betragsmäßig fünf bis sechs Mal größer als die der Regelstrecke ausgelegt und in der komplexen Ebene links platziert. Jedoch wird durch eine härtere Auslegung des Reglers unerwünschtes Messrauschen zusätzlich verstärkt. Bei der LQ-Regelung wird auf die Pole des geschlossenen Kreises auch Einfluss genommen, jedoch geschieht dies auf indirekte Art und Weise. Die LQ-Regelung gehört zur Gruppe der optimalen Regelungsverfahren. Über die Definition eines Gütefunktional, welches die Stell- und Regelgrößen bewertet, kann die Regelungsaufgabe in ein Optimierungsproblem überführt werden. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Stell- und Regelgrößen ist ein Vorteil der optimalen Regelung gegenüber der Polzuweisung. Besonders in Hinblick auf das reale Doppelpendel mit geringem Verfahrensweg ist die Beschränkung des maximalen Verfahrenswegs $\pm x_{\max}$ hilfreich, vgl. [Beh16]. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die LQ-Regelung für die Stabilisierung des Doppelpendels verwendet und im folgenden näher beleuchtet.

Das Gütefunktional eines zeitinvarianten Reglers mit unendlichem Zeithorizont lautet

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{LQ} \mathbf{x}(t) + u(t) R_{LQ} u(t)) dt, \quad (4.10)$$

wobei \mathbf{Q}_{LQ} die Wichtungsmatrix des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ und R_{LQ} der Wichtungsfaktor der Eingangsgröße sind. Die Einstellregeln der Wichtungen werden später in diesem Abschnitt behandelt. Es wird für die Lösung des Optimierungsproblems vorausgesetzt, dass beide Matrizen positiv definit sind, sodass das Paar $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{LQ}})$ vollständig beobachtbar ist. Die Matrix $\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{LQ}}$ ergibt sich aus der Zerlegung

$$\mathbf{Q}_{\text{LQ}} = \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{LQ}}^{\text{T}} \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{LQ}}.$$

Damit die Gütefunktion einen endlichen Wert liefert, muss $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ gelten. Dies ist bei einer erfolgreichen Regelung in der oberen Gleichgewichtslage in Anlehnung an den Arbeitspunkt (4.3), der in den Nullpunkt des Systems führt, der Fall. Es lässt sich nun das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{k}^{\text{T}}} J$$

mittels der Zustandsrückführung

$$u(t) = -\mathbf{k}_{\text{opt}}^{\text{T}} \mathbf{x}(t)$$

mit

$$\mathbf{k}_{\text{opt}}^{\text{T}} = R_{\text{LQ}}^{-1} \mathbf{b}^{\text{T}} \mathbf{P} \quad (4.11)$$

lösen. Hierbei ist \mathbf{P} die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Ricattigleichung

$$\mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{b} R_{\text{LQ}}^{-1} \mathbf{b}^{\text{T}} \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{\text{LQ}} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Eine genau Herleitung und Lösung der Matrix-Ricattigleichung wird an dieser Stelle nicht aufgeführt.

Nun wird die Reglerauslegung betrachtet, welche in erster Linie über die Wichtungen \mathbf{Q}_{LQ} und R_{LQ} bewerkstelligt wird. Eine Methode für die Wahl der Wichtungseinträge ist in [LL95] dargestellt. Es werden nur die Diagonaleinträge der Matrizen mit positiven Werten besetzt, wodurch die Bedingung der positiven Definitheit erfüllt ist. Die Diagonaleinträge werden in Abhängigkeit der realen, maximal zulässigen Zustands- bzw. Eingangswerte gewählt und lauten

$$\begin{aligned} q_{ii} &= 1/x_{i,\text{max}}^2, \\ q_{ij} &= 0 \text{ für } i \neq j, \\ R_{\text{LQ}} &= 1/u_{\text{max}}^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Bei Anwendung von (4.13) erfolgt eine Normierung der Wichtungen hinsichtlich der physikalischen Einheiten im quadratischen Gütefunktional (4.10). Außerdem ist das zu minimierende Gütefunktional an die limitierenden Faktoren des untersuchten Systems geknüpft. In Anlehnung an das reale Doppelpendel ergeben sich die Wichtungseinträge, die in der Tabelle 4.1 zu sehen sind. Über die Wahl der Wichtungseinträge von Q_{LQ} und R_{LQ} lassen sich die Zustände und Stellgrößen bewerten.

Einerseits bedeuten hohe Wichtungen, dass die jeweiligen Zustände und Stellgrößen im Rahmen einer Minimierung von (4.10) stark bestraft werden. Eine starke Bestrafung impliziert, dass die jeweiligen Größen bei der Regelung gering gehalten werden. In diesem Zusammenhang ist vor allem der geringe Verfahrweg des Doppelpendels zu nennen. Eine Überschreitung des Verfahrwegs soll in jedem Fall unterbunden werden, weshalb dieser Wichtungseintrag nach (4.13) im Vergleich zu den anderen Größen hoch ausfällt.

Andererseits werden mit kleinen Wichtungseinträgen die Zustände und Stellgrößen weniger stark bestraft. Das heißt, es werden auch hohe Werte während der Regelung für diese Größen akzeptiert. Hier stechen vor allem die Winkelgeschwindigkeiten der Pendelstäbe hervor. Mit einer geringen Bestrafung der Winkelgeschwindigkeiten werden schnelle Bewegungen des Doppelpendels akzeptiert, was hilfreich für die Stabilisierung des Doppelpendels ist.

Damit kann die Zustandsregelung mittels der LQ-Regelung vollzogen werden. Das Minimierungsproblem (4.10) wird mit dem optimalen Rückführvektor

$$\mathbf{k}_{\text{opt}}^T = \begin{bmatrix} 100 \text{ s}^{-2} \\ 70,16 \text{ s}^{-1} \\ 233,24 \text{ m rad}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ -12,12 \text{ m rad}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ -464,10 \text{ m rad}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ -39,33 \text{ m rad}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tabelle 4.1: Einträge der Wichtungsmatrizen Q_{LQ} und R_{LQ} der Zustandsregelung

| Variable | Größe | Beschreibung | Wichtungseintrag |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------------------|---|
| x_{\max} | 0,2 m | Verfahrweg in pos. und neg. Richtung | $q_{11} = 25 \text{ m}^{-2}$ |
| \dot{x}_{\max} | 5 m s^{-1} | maximale Verfahrgeschwindigkeit | $q_{22} = 0,04 \text{ s}^2 \text{ m}^{-2}$ |
| $\varphi_{1,\max}$ | 0,349 rad | Winkelabweichung vom Arbeitspunkt | $q_{33} = 8,207 \text{ rad}^{-2}$ |
| $\dot{\varphi}_{1,\max}$ | 100 rads^{-1} | maximale Winkelgeschwindigkeit | $q_{44} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2 \text{ rad}^{-2}$ |
| $\varphi_{2,\max}$ | 0,349 rad | Winkelabweichung vom Arbeitspunkt | $q_{55} = 8,207 \text{ rad}^{-2}$ |
| $\dot{\varphi}_{2,\max}$ | 100 rads^{-1} | Maximale Winkelgeschwindigkeit | $q_{66} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2 \text{ rad}^{-2}$ |
| u_{\max} | 20 m s^{-2} | Maximale Wagenbeschleunigung | $R_{LQ} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^4 \text{ m}^{-2}$ |

gelöst. Für die Regelung in die obere, instabile Gleichgewichtslage wird der Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \left[x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \varphi_{1,0} = -4^\circ, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = -5^\circ, \dot{\varphi}_{2,0} = 0 \right]^T$$

gewählt. Davon ausgehend wird das Doppelpendel sowie der Wagen in den Nullzustand geregelt. Das Simulationsergebnis ist in Bild 4.3 dargestellt. Es ist zu sehen, dass bei der relativ kleinen Anfangsauslenkung von 4 bis 5° bereits 13 cm des Fahrwegs ausgenutzt werden. Eine weitere Entfernung der Startwinkel vom Arbeitspunkt führt zu Instabilität. Es ist anzumerken, dass die in der Simulation verwendeten Massenträgheiten der Pendel, welche einen erheblichen Einfluss auf die Stabilität des Systems haben, relativ gering sind. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die realen Pendelstäbe aus Aluminium, welches eine geringere Dichte als z.B. Eisen besitzt, bestehen. Werden Pendelstäbe aus Eisen mit den Massen $m_1 = m_2 = 0,1341$ kg verwendet, lässt sich das Doppelpendel mit einer Anfangsauslenkung von über 10° noch in die obere Gleichgewichtslage regeln. Das liegt an den damit verbundenen größeren Massenträgheitsmomenten der Pendelstäbe gemäß (3.4), die das System träger werden lassen.

Die hier durchgeführte Zustandsregelung setzt voraus, dass in jedem Zeitschritt die Zustände \mathbf{x} bekannt sind. In der Simulation lassen sich die Zustände, welche bei der Zustandsrückführung verwendet werden, über die Bewegungsgleichungen ermitteln. In Realität liegt jedoch nur die Messung für den inneren Pendelwinkel $\varphi_1(t)$ vor. Die Ermittlung des äußeren Pendelwinkels $\varphi_2(t)$ kann mithilfe einer nichtlinearen Zustandsbeobachtung bewerkstelligt werden. Die nichtlineare Zustandsbeobachtung in der Simulation ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

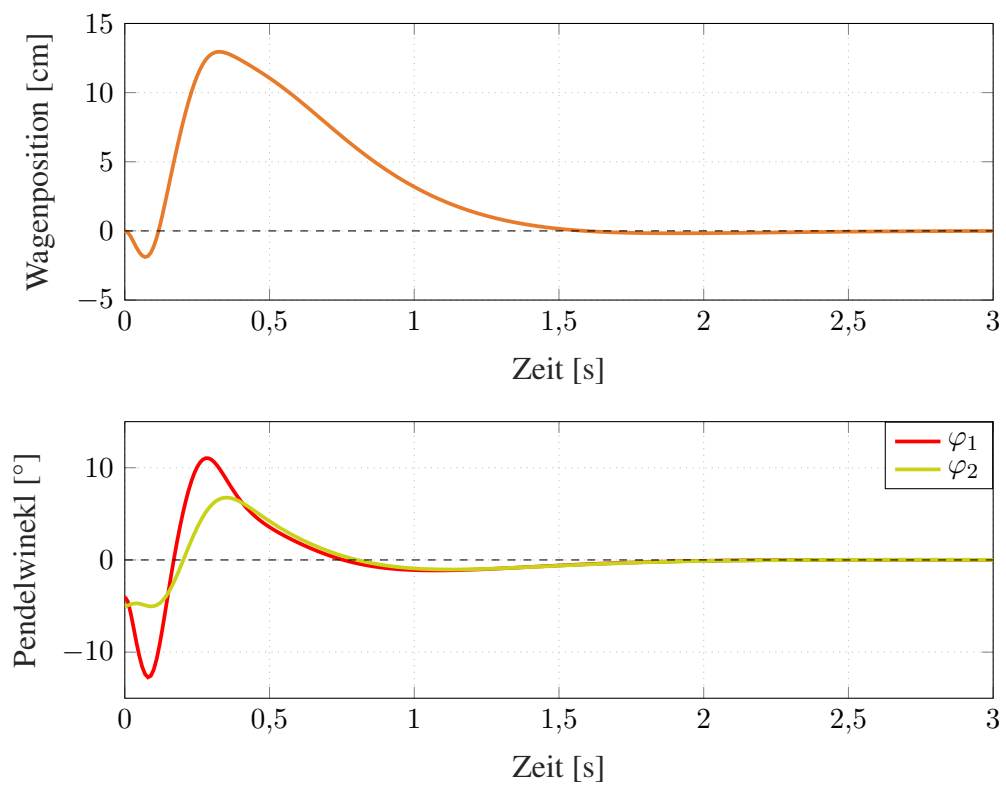


Bild 4.3: Zustandsregelung des Doppelpendels mittels LQ-Regelung: Wagenposition (oben), Pendelwinkel (unten)

5 Nichtlineare Zustandsbeobachtung

In diesem Kapitel wird zunächst die lineare und nichtlineare Beobachtbarkeit des inversen Doppelpendels untersucht. Als nächstes wird das für die Zustandsbeobachtung verwendete EKF vorgestellt. Im Anschluss werden die Simulationsergebnisse der Zustandsbeobachtung des Doppelpendels dargestellt und diskutiert.

Während des Betriebs des realen Doppelpendels ist der zweite Pendelwinkel $\varphi_2(t)$ aufgrund fehlender Sensorik nicht messbar. Trotzdem ist es mithilfe von Beobachtern möglich, Zustände über die Systemgleichungen zu rekonstruieren. Der schematische Aufbau einer Zustandsbeobachtung ist in Bild 5.1 dargestellt. Geschätzte Größen sind mit einem Dach über der Variable versehen.

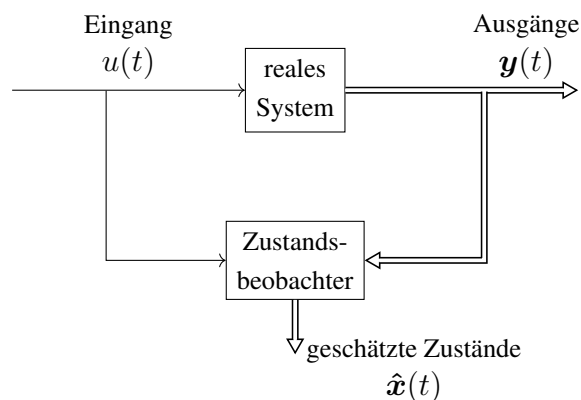


Bild 5.1: Signalflussplan der allgemeinen Zustandsbeobachtung

5.1 Lineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels

Bevor die Beobachtung des äußeren Pendelwinkels simuliert wird, wird die Systemeigenschaft der Beobachtbarkeit eingeführt und untersucht. An dieser Stelle wird die lineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels in dem Arbeitspunkt (4.3) aus Abschnitt 4.1 nachgewiesen. Es wird der Begriff der *vollständigen Beobachtbarkeit* eingeführt.

Kann ein Anfangszustand x_0 aus dem bekannten Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ in einem endlichen Zeitintervall $0 \leq t \leq t_e$ rekonstruiert werden, so

heißt das System *vollständig beobachtbar*. Aufgrund des einfachen Nachweises wird das Beobachtbarkeitskriterium nach *Kalman* herangezogen. Die $(p \cdot n \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

muss den vollen Rang $\text{rang}(\mathbf{S}_B) = \dim(\mathbf{x}) = n$ besitzen. Da es sich bei \mathbf{S}_B um eine nicht quadratische Matrix handelt wird hier anstelle der Determinante der Rang der Matrix ermittelt. Mit der in Abschnitt 4.1 ermittelten Systemmatrix \mathbf{A} und der Beobachtungsmatrix \mathbf{C} ergibt sich: $\text{rang}(\mathbf{S}_B) = \dim(\mathbf{x}) = 6$, womit die *vollständige Beobachtbarkeit* nachgewiesen ist. Das bedeutet, dass in dem linearisierten Zustandsraum in der Nähe der oberen, instabilen Gleichgewichtslage eine Rekonstruktion des äußeren Pendelwinkels $\varphi_2(t)$ möglich ist.

5.2 Nichtlineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels

Mit dem im vorigen Abschnitt angewandten Kriterium nach *Kalman* ist es nur möglich, die Beobachtbarkeit linearer Systeme nachzuweisen. Da die Beobachtung des äußeren Pendelwinkels jedoch auf dem gesamten Arbeitsraum des Doppelpendels geschehen soll, wird die nichtlineare Beobachtbarkeit des Systems betrachtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die explizite Zeitabhängigkeit der Eingangs- und Ausgangsgrößen sowie der Zustände nur in den Definitionen der *globalen* und *schwachen Beobachtbarkeit* aufgeführt. Nach [Ada14] wird das allgemeine nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \text{ mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y &= g(\mathbf{x}, u) \end{aligned} \quad (5.2)$$

betrachtet. Es soll darauf hingewiesen sein, dass eine skalare Ausgangsgröße in (5.2) verwendet wird. Es werden zunächst die Begriffe der *globalen* und *schwachen Beobachtbarkeit* definiert.

Das System (5.2) sei für $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C_u \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $y \in \mathbb{R}$. Das System heißt *global beobachtbar*, wenn alle Anfangsvektoren $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$ aus der Kenntnis von $u(t)$ und $y(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty)$ für alle $u \in C_u$ eindeutig bestimmbar sind. C_u ist dabei der Raum der $(n - 1)$ mal stetig differenzierbaren Funktion $u(t)$ und $D_{\mathbf{x}}$ ist der Definitionsbereich der Zustände.

Bei der Definition der *schwachen Beobachtbarkeit* wird nicht der exakte Anfangszustand \mathbf{x}_0 rekonstruiert sondern ein Anfangszustand, der sich in einer Umgebung von \mathbf{x}_0 befindet.

Das System (5.2) sei für $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C_u \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $y \in \mathbb{R}$. Sind alle Anfangsvektoren $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$ in einer Umgebung

$$U = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p\| < \rho\}$$

eines Punktes $\mathbf{x}_p \in D_{\mathbf{x}}$ aus der Kenntnis von $u(t)$ und $y(t)$ in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty)$ für alle $u \in D_x$ eindeutig bestimmbar, so heißt das System *schwach beobachtbar*.

Für den rechnerischen Nachweis der nichtlinearen Beobachtbarkeit werden $n - 1$ zeitliche Ableitungen des Systemausgangs y der Art

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} &&= h_1(\mathbf{x}, u, \dot{u}), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial h_1}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h_1}{\partial \ddot{u}} \ddot{u} &&= h_2(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \ddot{u}), \\ \dddot{y} &= \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial h_2}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial \ddot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial \ddot{\ddot{u}}} \ddot{\ddot{u}} &&= h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ddot{\ddot{u}}), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \frac{\partial h_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h_{n-1}}{\partial u^{(i-1)}} u^{(i)} &&= h_{n-1}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \end{aligned}$$

benötigt. Im Anschluss wird der nichtlineare Vektor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}, u) \\ h_1(\mathbf{x}, u, \dot{u}) \\ h_2(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \ddot{u}) \\ \vdots \\ h_{n-1}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \end{bmatrix} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \quad (5.3)$$

definiert. Die vektorwertige Funktion \mathbf{q} hängt von den Zuständen \mathbf{x} , der Eingangsgröße u und den $n - 1$ Ableitungen der Eingangsgröße ab. Mit (5.3) ist es nun möglich, Kriterien für die *globale* und *schwache Beobachtbarkeit* aufzustellen.

Das in (5.2) definierte System ist *global beobachtbar*, wenn die Abbildung

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

für alle $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$ und $u \in C_u$ eindeutig nach \mathbf{x} auflösbar ist, d.h. die Umkehrfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \quad (5.4)$$

existiert und berechnet werden kann. Der Nachweis der *globalen Beobachtbarkeit* ist jedoch nur für einfache Systeme möglich, da die analytische Lösung der Umkehrfunktion schwierig zu bestimmen ist. Im Fall des inversen Doppelpendels ist das Auffinden von (5.4) aufgrund der Vielzahl von nichtlinearen Termen in (3.14) und (3.15) nicht zu bewerkstelligen. Aus diesem Grund wird hier auf den Nachweis der *schwachen Beobachtbarkeit* zurückgegriffen. Dazu wird zunächst die nichtlineare Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_{B, \text{nl}}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.5)$$

definiert. Das in (5.2) definierte System ist *schwach beobachtbar*, wenn die Bedingung

$$\text{rang}(\mathbf{S}_{B, \text{nl}}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})) = \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u, \dot{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \ddot{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_{n-1}(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = n \quad (5.6)$$

erfüllt ist. Mit (5.6) wird die Beobachtbarkeit an beliebigen Stützstellen $(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$ des Arbeitsraums überprüft.

Für den Nachweis der nichtlinearen Beobachtbarkeit des Doppelpendels wird zunächst der Zustandsvektor an die in dieser Arbeit durchgeführte Zustandsbeobachtung angepasst. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Zustände φ_1 , $\dot{\varphi}_1$, φ_2 , und $\dot{\varphi}_2$ beobachtet. Die Wagenbeschleunigung \ddot{x} ist die Eingangsgröße u des Systems. Der innere Pendelwinkel φ_1 stellt den Systemausgang y in (5.2) dar. Die Wagenposition ist mittels des Inkrementalgebers des Servomotors bestimmbar und wird im Fall der Zustandsbeobachtung nicht rekonstruiert. Außerdem wird im Zusammenhang mit der Modellierung des mechatronischen Systems in Kapitel 3 die Rückwirkung der Pendelbewegung auf die Wagenposition ausgeschlossen. Dementsprechend kann aus der Winkelmessung φ_1 die Wagenposition nicht rekonstruiert werden. Der reduzierte Zustandsvektor lautet:

$$\mathbf{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2]^T$$

Das reduzierte Gesamtsystem ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u) \\ \dot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_2(\mathbf{x}, u) \end{bmatrix} \\ y = g(\mathbf{x}, u) &= \varphi_1.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Mit (5.7) wird die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}, u) = \varphi_1 \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \dot{u}}_{=0} = h_1(\mathbf{x}) = \dot{\varphi}_1 \\ \frac{h_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) + \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial u} \dot{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial \dot{u}} \ddot{u}}_{=0} = h_2(\mathbf{x}, u) = \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u) \\ \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) + \frac{\partial h_2}{\partial u} \dot{u} + \underbrace{\frac{\partial h_2}{\partial \dot{u}} \ddot{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial h_2}{\partial \ddot{u}} \ddot{\ddot{u}}}_{=0} = h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u}) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}(\mathbf{x}, u, \dot{u}).\end{aligned}\tag{5.8}$$

gemäß (5.3) ermittelt. Hierbei entspricht $\ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u)$ (3.14). Auf eine genaue Darstellung von $h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u})$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Mit der nichtlinearen Abbildung (5.8) wird die Beobachtbarkeitsmatrix mit der Form

$$\mathbf{S}_{\text{B,nl}}(\mathbf{x}, u, \dot{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u)}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u)}{\partial \dot{\varphi}_1} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u)}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_1(\mathbf{x}, u)}{\partial \dot{\varphi}_2} \\ \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u})}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u})}{\partial \dot{\varphi}_1} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u})}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u, \dot{u})}{\partial \dot{\varphi}_2} \end{bmatrix}\tag{5.9}$$

gebildet. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass die Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems von der Eingangsgröße u abhängen kann. Die lineare Beobachtbarkeit hingegen hängt nie von der Eingangsgröße u ab, vgl. [Lun10]. Dieser Unterschied ist auch an der Struktur der linearen und nichtlinearen Beobachtbarkeitsmatrizen zu erkennen. In der nichtlinearen

Beobachtbarkeitsmatrix (5.9) taucht u auf in der linearen (5.1) hingegen nicht. Wie bereits erwähnt, lässt sich nun die nichtlineare Beobachtbarkeit an beliebigen Stellen des Arbeitsraums auswerten. Exemplarisch wird für die Stützstelle

$$(\mathbf{x}_S, u_S, \dot{u}_S) = \left[\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0, 1 \text{ m s}^{-2}, 0 \right]$$

die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\det \left(\mathbf{S}_{B, \text{nl}} \left[\frac{\pi}{2}, 0, \pi, 0, 1 \text{ m s}^{-2}, 0 \right] \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.86 & -0.73 & -1.67 & 0.37 \\ -64.12 & -2.30 & 39.11 & -6.29 \end{vmatrix} = -3.83 \neq 0$$

berechnet. Die Determinante ist ungleich null, wodurch die Bedingung (5.6) erfüllt ist. Die nichtlineare Beobachtbarkeit ist damit in der Stützstelle nachgewiesen. Da der Nachweis der *globalen Beobachtbarkeit* nicht möglich ist, wird angenommen, dass das Doppelpendel für beide Pendelwinkel und -winkelgeschwindigkeiten im gesamten Arbeitsraum beobachtbar ist. Damit wird nun das in dieser Arbeit verwendete EKF vorgestellt.

5.3 Das Erweiterte Kalmanfilter

In diesem Abschnitt werden zuerst die Grundlagen und dann die Arbeitsweise des EKF erläutert. Die im Rahmen dieser Arbeit angewendeten Einstellregeln des EKF sind Gegenstand des folgenden Abschnitts. Zuletzt wird die Zustandsbeobachtung des inversen Doppelpendels in der Simulation durchgeführt und die Ergebnisse werden diskutiert.

5.3.1 Voraussetzungen des EKF

Das EKF ermöglicht die Beobachtung nichtlinearer Systeme mithilfe einer Approximation zeitdiskreter Differenzengleichungen. An dieser Stelle werden zunächst die Voraussetzungen für eine Zustandsbeobachtung mit dem EKF aufgeführt. Das zeitdiskrete, nichtlineare System besitzt die Zustandsdifferenzengleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k, \mathbf{w}_k) \quad (5.10)$$

und die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k). \quad (5.11)$$

Da es unter realen Umständen nicht möglich ist, Zustände exakt zu bestimmen, hängt das diskrete System neben dem Zustandsvektor \mathbf{x}_k und der Eingangsgröße u_k zusätzlich von zwei weiteren, zufällig verteilten Variablen \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k ab. Es sind \mathbf{w}_k das Prozessrauschen und \mathbf{v}_k das Messrauschen des Systems. Ungenau identifizierte Systemparameter des mathematischen Modells oder Sensorrauschen der Messeinrichtungen sind Gründe für nicht exakt bestimmbare Zustände. Das EKF berücksichtigt stochastische Störgrößen, wobei diese bestimmte Eigenschaften erfüllen müssen, vgl. [OHB⁺15]. Das Prozess- und Messrauschen sind gegenseitig unkorreliert:

$$E \{ \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T \} = \mathbf{0},$$

mittelwertfrei:

$$E \{ \mathbf{w}_k \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \mathbf{v}_k \} = \mathbf{0},$$

und normalverteilt. Desweiteren sind die Kovarianzmatrizen des Prozess- und Messrauschens positiv semidefinit:

$$E \{ \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \} = \mathbf{Q}_{\text{EKF}}$$

$$E \{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \} = \mathbf{R}_{\text{EKF}}.$$

\mathbf{Q}_{EKF} ist die Matrix des Prozessrauschens und \mathbf{R}_{EKF} die Matrix des Messrauschens. Sind die genannten Bedingungen erfüllt, wird die Schätzfehlerkovarianz zwischen dem realen und geschätzten Zustand

$$\mathbf{P}_k = E \{ (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \}, \quad (5.12)$$

welche im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, bei Anwendung des EKF minimiert. Dadurch wird der geschätzte Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k$ im Zeitschritt k im Sinne einer Minimierung der Fehlerkovarianz optimal bestimmt.

5.3.2 Algorithmus des EKF

Der EKF-Algorithmus basiert auf zwei sich wiederholenden Schritten: einer *a priori* Zustandssprädiktion und einer *a posteriori* Zustandskorrektur. Später in diesem Abschnitt werden die Schritte im Detail erklärt. Zunächst werden (5.10) und (5.11) verwendet, um die Zustände und

die Messung ohne das Rauschen zu approximieren, vgl. [WB06]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) \quad (5.13)$$

und

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}). \quad (5.14)$$

Dieser Schritt ist notwendig, da in Realität das genaue Prozess- und Modellrauschen nicht ermittelbar ist. Die Gleichungen (5.13) und (5.14) bilden die Grundlage für die linearisierte Zustandsschätzung

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{W}_k \mathbf{w}_k, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} \approx \hat{\mathbf{y}}_k^- + \mathbf{C}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k, \quad (5.16)$$

wobei folgende Notation gilt:

- \mathbf{x}_{k+1} und \mathbf{y}_{k+1} sind die realen Zustands- und Ausgangsvektoren im Zeitschritt $k + 1$
- $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ und $\hat{\mathbf{y}}_k^-$ sind die *a priori* geschätzten Zustands- und Messungsvektoren
- $\hat{\mathbf{x}}_k$ ist die *a posteriori* Zustandsschätzung
- \mathbf{A}_k ist die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} in Bezug zu \mathbf{x}_k mit

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0})}$$

- \mathbf{C}_k ist die Jacobi-Matrix von \mathbf{g} in Bezug zu \mathbf{x}_k mit

$$\mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0})}$$

- \mathbf{W}_k ist die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} in Bezug zu \mathbf{w}_k mit

$$\mathbf{W}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}_k} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0})}$$

- \mathbf{V}_k ist die Jacobi-Matrix von \mathbf{g} in Bezug zu \mathbf{w}_k mit

$$\mathbf{V}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{w}_k} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0})}$$

Die Matrizen \mathbf{A}_k und \mathbf{C}_k stellen die lineare Approximation des Systems im Arbeitspunkt dar. \mathbf{W}_k und \mathbf{V}_k repräsentieren das Prozess- und Messrauschen, wobei für die Matrizen die in Abschnitt 5.3.1 aufgeführten Bedingungen gelten. Das besondere dieser Jacobi-Matrizen gegenüber linearer Beobachter ist, dass sie in jedem Zeitschritt in Abhängigkeit des vorliegenden

Zustands \mathbf{x}_k neu berechnet werden und so nichtlineare Systeme auf dem gesamten Arbeitsraum beobachtet werden können. Mithilfe der angegebenen Matrizen und Vektoren können nun die eingangs erwähnten Schritte der Prädiktion und Korrektur formuliert werden.

Im **Prädiktionsschritt** werden die Zustände

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, u_{k-1}, \mathbf{0})$$

und die Fehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{Q}_{\text{EKF}} \mathbf{W}_{k-1}^T$$

für den Zeitschritt $k + 1$ mit den im vorigen Zeitschritt geschätzten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_k$ und der Fehlerkovarianzmatrix \mathbf{P}_k . Für die Initialisierung des Algorithmus ist es deswegen notwendig, einen Schätzvektor $\hat{\mathbf{x}}_0$ und eine Fehlerkovarianzmatrix \mathbf{P}_0 vorzugeben.

Nun erfolgt die **Korrektur** im aktualisierten Schritt k unter Verwendung der Messung \mathbf{y}_k und der *a priori* Prädiktion $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. Zuerst wird die Kalmanverstärkung

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_{\text{EKF}} \mathbf{V}_k^T)^{-1}$$

ermittelt. Als nächstes erfolgt die *a posteriori* Zustandsschätzung

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})) = \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-)$$

und die Aktualisierung der Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-.$$

Der gesamte Ablauf des Algorithmus kann Bild 5.2 entnommen werden. Die Jacobi-Matrizen des Prozess- und Messrauschens \mathbf{W}_k und \mathbf{V}_k sind in den einzelnen Zeitschritten nicht bekannt, weshalb die Annahme $\mathbf{V}_k = \mathbf{W}_k = \mathbf{E}$ getroffen wird. Folglich wird die Zustandsschätzung des EKF maßgeblich durch die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q}_{EKF} und \mathbf{R}_{EKF} und die Initialisierung mit \mathbf{x}_0 und \mathbf{P}_0 beeinflusst. Der Umgang mit diesen Einstellfaktoren ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

5.3.3 Einstellregeln des EKF

Bevor die Zustandsbeobachtung in der Simulation durchgeführt wird, soll an dieser Stelle auf die Einstellregeln des EKF eingegangen werden. Obwohl in Realität das Prozess- und Messrauschen vom jeweiligen Zustand abhängt, werden sie in dieser Arbeit als konstant angenommen.

Dies hat den Vorteil, dass die Voraussetzungen aus Abschnitt 5.3.1 leicht erfüllt werden können. Für das Einschwingverhalten und die Dynamik des Filters ist vor allem das Verhältnis des Prozessrauschens \mathbf{Q}_{EKF} und des Messrauschens \mathbf{R}_{EKF} zueinander ausschlaggebend. Für hohe Einträge in \mathbf{Q}_{EKF} wird eine hohe Prozessgüte unterstellt. Das heißt, das Vertrauen in das aufgestellte mathematische Modell ist hoch. Das EKF vertraut dem Prozess und wird diesem eher folgen. Ein geringes \mathbf{Q}_{EKF} hingegen impliziert, dass die Modellgüte gering ist. Möglicherweise spielen falsch identifizierte Systemparameter eine Rolle für ein ungenaues Modell. Für das Messrauschen folgern wir analog, dass bei einer genauen Messung \mathbf{R}_{EKF} gering eingestellt werden sollte, da der Messung hohes Vertrauen geschenkt wird. Das Filter folgt der Messung verstärkt. Insbesondere ist über eine Grenzwertbetrachtung der Kalmanverstärkung mit einer „perfekten“ Messung $\mathbf{R}_{\text{EKF}} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{R}_{\text{EKF}} \rightarrow 0} \mathbf{K}_k &= \lim_{\mathbf{R}_{\text{EKF}} \rightarrow 0} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_{\text{EKF}} \mathbf{V}_k^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T)^{-1} = \mathbf{P}_k^- \underbrace{\mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k^{-T}}_E (\mathbf{P}_k^-)^{-1} \mathbf{C}^{-1} \\ &= \underbrace{\mathbf{P}_k^- (\mathbf{P}_k^-)^{-1}}_E \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned}$$

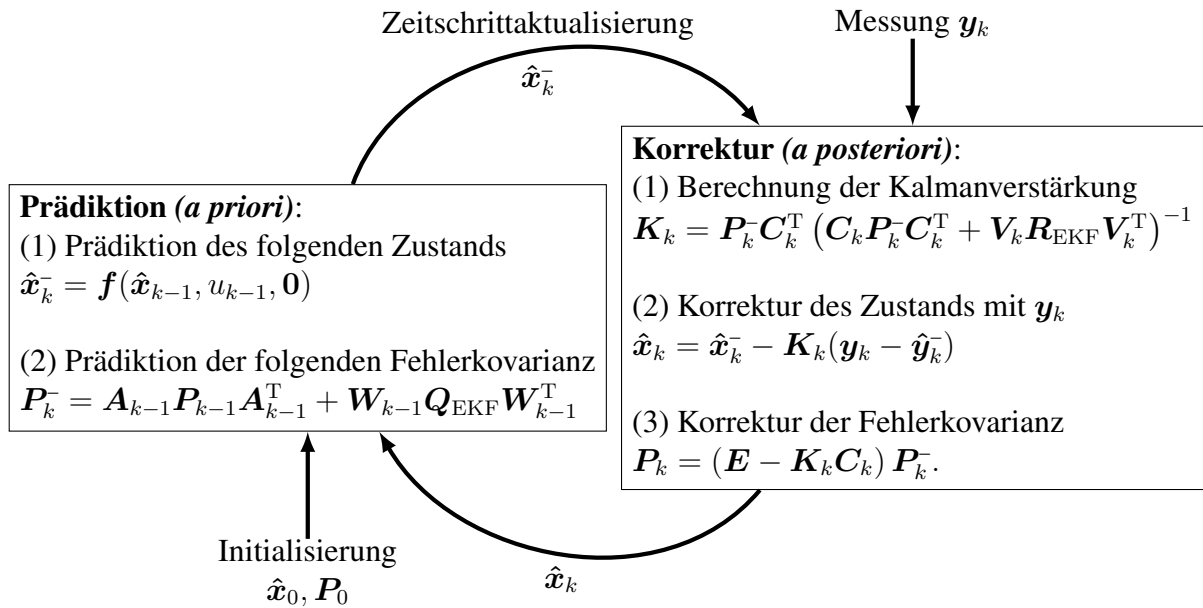


Bild 5.2: Schematischer Ablauf des EKF Algorithmus

wodurch für die *a posteriori* Zustandsschätzung folgt

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{C}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathbf{C}_k^{-1}\mathbf{y}_k,$$

ersichtlich, dass die Bildung der Zustandsschätzung alleinig über das zugrunde liegende Modell erfolgt. Andererseits impliziert ein hohes \mathbf{R}_{EKF} , dass der Messung kein großes Vertrauen geschenkt wird.

Insgesamt lässt sich sagen, dass das Verhältnis des Prozess- und Messrauschens für die Dynamik des Filters ausschlaggebend sind. Ähnlich wie für die Wichtungsmatrizen der LQ-Regelung im Abschnitt 4.3 werden nur die Diagonaleinträge der Kovarianzmatrizen des Prozess- und Messrauschens mit positiven Einträgen besetzt, um positive Definitheit zu garantieren. Das Ziel der Beobachtung ist es, den äußeren Pendelwinkel φ_2 möglichst gut zu schätzen. Dementsprechend macht es Sinn, ein Gütemaß an den beobachteten zweiten Pendelwinkel $\hat{\varphi}_2$ zu knüpfen. In der Simulation liegt der anhand der Bewegungsgleichungen exakt berechnete äußere Pendelwinkel φ_2 als Referenz vor. Also ist es möglich, die Schätzung auf den tatsächlichen Winkel zu beziehen und die Abweichung auszurechnen. Ein Mittel für die Berechnung des Fehlers zwischen dem geschätzten und realen Winkelverlauf ist die Summe der Fehlerquadrate. Demzufolge wird Fehler

$$e = \sqrt{\sum_{i=0}^N (\varphi_{2,i} - \hat{\varphi}_{2,i})^2}, \quad (5.17)$$

definiert, wobei N der Anzahl der Zeitschritte entspricht. Der Winkel φ_2 ist die simulierte Referenz und $\hat{\varphi}_2$ der beobachtete Zustand. Da nur das Verhältnis von \mathbf{Q}_{EKF} und \mathbf{R}_{EKF} eine Rolle spielt, wird das Messrauschen auf einen konstanten Wert gesetzt. Die Ermittlung von \mathbf{Q}_{EKF} erfolgt, indem der Fehler (5.17) als Gütemaß beim Iterieren der einzelnen Diagonaleinträge von \mathbf{Q}_{EKF} minimiert wird. In dem Algorithmus 1 ist die Ermittlung der optimalen Einträge des Prozessrauschens vereinfacht dargestellt.

Hierbei repräsentieren e_{\min} den Fehler mit der minimalen Abweichung zwischen dem geschätzten und dem tatsächlichen Winkelverlauf gemäß (5.17) und $\mathbf{Q}_{\text{EKF,opt}}$ ist die dazugehörige Matrix des Prozessrauschens. Die Variablen q_{\min} und q_{\max} stellen die Grenzen des Suchbereichs für die Einträge von \mathbf{Q}_{EKF} dar, wobei die Werte zwischen dem kleinsten und größten Eintrag mit logarithmischen Abstand bestimmt werden.

Neben den Wichtungseinträgen von \mathbf{Q}_{EKF} und \mathbf{R}_{EKF} spielt die initiale Fehlerkovarianz eine wichtige Rolle für das Verhalten des EKF. Es wird als erstes die Annahme getroffen, dass zwischen dem vorliegenden Zustand \mathbf{x}_k und der *a priori* Schätzung \mathbf{x}_k^- eine sehr geringe

Algorithmus 1 Ermittlung der optimalen $\mathbf{Q}_{\text{EKF,opt}}$ -Einträge

```

(1) Setze  $e_{\min} = \infty$ 
(2) Setze  $\mathbf{R}_{\text{EKF}} = \text{const}$ 
for ( $q_{11} = q_{\min}$  to  $q_{\max}$ ) do
  for ( $q_{22} = q_{\min}$  to  $q_{\max}$ ) do
    for ( $q_{33} = q_{\min}$  to  $q_{\max}$ ) do
      for ( $q_{44} = q_{\min}$  to  $q_{\max}$ ) do
        (3) Ermittle  $\hat{\varphi}_2$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{Q}_{\text{EKF}} = \text{diag}([q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{44}]^T)$ 
        (4) Berechne den Fehler  $e$ 
        if ( $e < e_{\min}$ ) then
          (5) Aktualisiere  $e_{\min} = e$ 
          (6) Aktualisiere  $\mathbf{Q}_{\text{EKF,opt}} = \mathbf{Q}_{\text{EKF}}$ 
        end if
      end for
    end for
  end for
end for

```

Abweichung vorliegt. Damit lässt sich über die Grenzwertbetrachtung zeigen:

$$\lim_{\mathbf{P}_k \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{K}_k = \lim_{\mathbf{P}_k \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_{\text{EKF}} \mathbf{V}_k^T)^{-1} = \mathbf{0}$$

und folglich

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-.$$

Dies bedeutet, dass der Fehler zwischen dem Modell und dem realen System keine Rolle bei der Schätzung spielt. Hingegen reagiert das Filter stärker auf den genannten Fehler, wenn der Schätzfehler ungleich null angenommen wird. Da die Fehlerkovarianzmatrix nach [WB06] schlussendlich für fast alle \mathbf{P}_0 konvergiert, genügt es bei der Initialisierung $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{0}$ anzunehmen. Aus diesem Grund wird $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}$ gewählt.

Als letztes wird die Initialisierung des Zustandsbeobachters mit der Anfangsschätzung $\hat{\mathbf{x}}_0$ betrachtet. Man kann das EKF einerseits mit dem korrekten Anfangszustand $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$ initialisieren. Dies ist hilfreich, wenn das EKF direkt nach der Initialisierung die Zustandsvariablen schnell rekonstruieren soll. Dafür muss aber der reale Anfangszustand \mathbf{x}_0 bekannt sein. Andererseits kann der Beobachter mit einem abweichenden Anfangszustand $\hat{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{x}_0$ initialisiert werden. In diesem Fall kann das Einschwingverhalten des Filters untersucht werden. Außerdem gibt die Zustandsschätzung bei falscher Initialisierung Aufschluss darüber, wie robust der Zustandsbeobachter gegenüber falschen Startwerten ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird das EKF vorrangig

falsch initialisiert.

Mit den hier aufgeführten Einstellregeln für das Prozessrauschen \mathbf{Q}_{EKF} , das Messrauschen \mathbf{R}_{EKF} sowie der Initialisierung durch die Fehlerkovarianzmatrix \mathbf{P}_0 und den geschätzten Anfangszustand \mathbf{x}_0 folgt die simulierte Zustandsbeobachtung des inversen Doppelpendels im nächsten Abschnitt.

5.3.4 Simulationsergebnisse der Zustandsbeobachtung

In der Simulation des Doppelpendels mit einer Zustandsbeobachtung durch das EKF wird exemplarisch der Fall betrachtet, in dem der verfahrbare Wagen harmonisch beschleunigt wird. In Bild 5.3 ist der Signalflussplan der Zustandsbeobachtung zu sehen. Wie im vorigen Abschnitt erwähnt sind die Eingänge des EKF die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ und der Systemausgang $\varphi_1(t)$. Um eine Aussagekraft über das Verhalten des Filters unter Bedingungen mit Störeinflüssen zu erhalten, wird der Winkel $\varphi_1(t)$ mit einem normalverteilten Rauschsignal beaufschlagt. Das EKF basiert auf zeitdiskreten Differenzengleichungen, weshalb der Filtereingang und die Messung mit der Messfrequenz von 1000 Hz abgetastet werden.

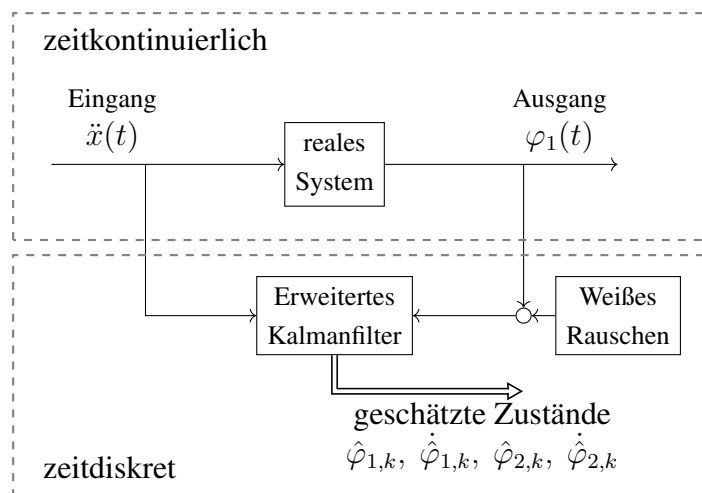


Bild 5.3: Signalflussplan der Zustandsbeobachtung in der Simulation

Für die Wagenbeschleunigung wird eine harmonische Anregung

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_{\max} \sin(\omega t + \Delta\ddot{x}) \quad (5.18)$$

festgelegt. Es sind \ddot{x}_{\max} ist die Amplitude der Beschleunigung, ω die Kreisfrequenz und $\Delta\ddot{x}$

der Phasenversatz. Die in der Simulation verwendeten Parameter weisen die Werte

$$\ddot{x}_{\max} = 5 \text{ m s}^{-2}, \omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1} \text{ und } \Delta\ddot{x} = 0$$

auf. Der reale Anfangszustand in der unteren, stabilen Gleichgewichtslage lautet

$$\mathbf{x}_0 = \left[\varphi_{1,0} = 180^\circ, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = 180^\circ, \dot{\varphi}_{2,0} = 0 \right]^T.$$

Das EKF wird mit einem abweichenden Anfangszustand

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \left[\hat{\varphi}_{1,0} = 0^\circ, \dot{\hat{\varphi}}_{1,0} = 573^\circ \text{ s}^{-1}, \hat{\varphi}_{2,0} = 300^\circ, \dot{\hat{\varphi}}_{2,0} = -573^\circ \text{ s}^{-1} \right]^T.$$

abweichend vom realen Zustand initialisiert. Die initiale Zustandsschätzung weicht damit stark vom tatsächlichen Anfangszustand ab. Die Zustandsbeobachtung der Pendelwinkel ist in Bild 5.4 zu sehen. Nach Anwendung des Algorithmus 1 ergibt sich für das Prozess- und

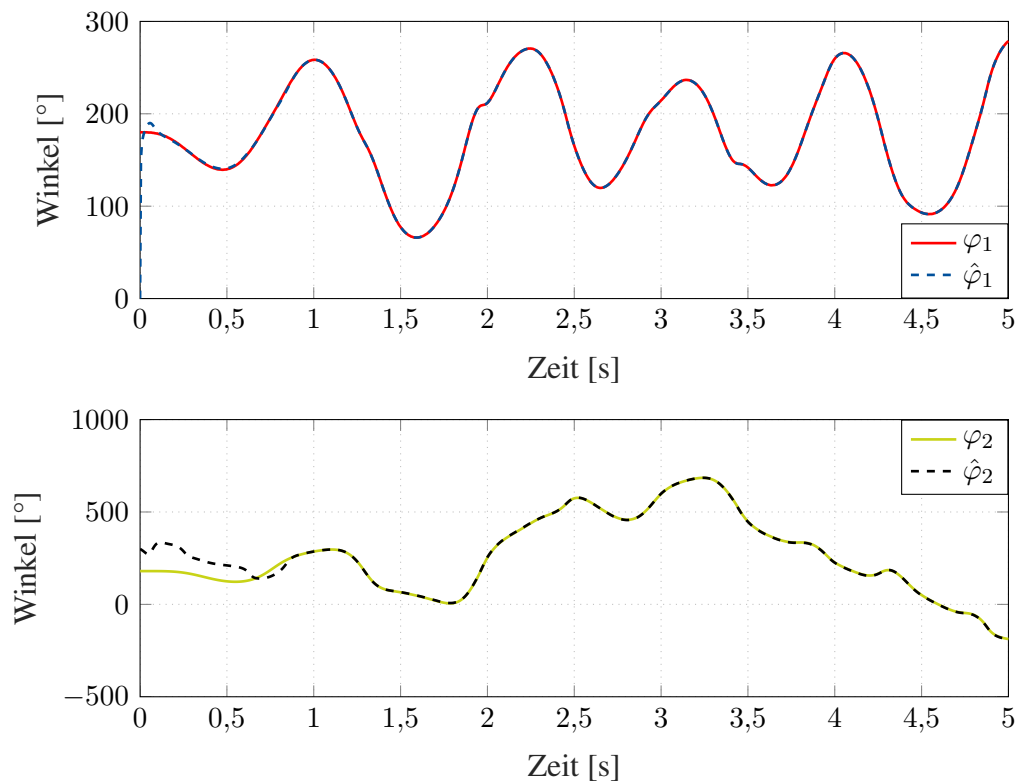


Bild 5.4: Zustandsschätzung der Pendelwinkel in der Simulation bei der harmonischen Wagenanregung: innerer Pendelwinkel (oben), äußerer Pendelwinkel (unten)

Messrauschen:

$$\mathbf{Q}_{\text{EKF,opt}} = \text{diag} \left([1 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2, \quad 1 \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}, \quad 0,1 \text{ rad}^2, \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}]^T \right),$$

$$R_{\text{EKF}} = 1 \text{ rad}^2.$$

Aufgrund der hier gewählten Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ schwingt der innere Pendelstab um die stabile, untere Ruhelage. Der äußere Pendelstab hingegen rotiert mehrere Male um die Gelenkachse. Das ist aus dem Wertebereich des Winkelverlaufs ersichtlich, der Werte von über $\pm 360^\circ$ annimmt. Der geschätzte innere Pendelwinkel $\hat{\varphi}_1$ folgt der Messung φ_1 bereits nach 0,1 s. Bis der rekonstruierte Winkelverlauf des äußeren Pendelstabs $\hat{\varphi}_2$ der Referenz φ_2 folgt, vergehen etwa 0,8 s. Die Einschwingzeit des Zustands, welcher gemessen wird, ist demnach wesentlich geringer als bei dem zu rekonstruierenden Zustand. Aufgrund des Wertebereichs von mehreren Hundert Grad ist die geringe Abweichung zwischen dem Referenzverlauf und der Rekonstruktion der Zustände nicht in den Graphen erkennbar, kann jedoch rechnerisch bestimmt werden. Damit die zunächst hohe Abweichung der Winkelverläufe bedingt durch die absichtlich falsche Initialisierung des EKF ausgeschlossen wird, wird die maximale Differenz der Winkelverläufe nach Ablauf von einer Sekunde berechnet. Die Abweichung beträgt $\Delta\varphi_{1,\text{max}} = 0,27^\circ$ für den inneren Pendelwinkel und $\Delta\varphi_{2,\text{max}} = 2,7^\circ$ für den äußeren. Das EKF ist demnach in der Lage, die Messung φ_1 besser zu schätzen als den prinzipiell unbekannten äußeren Pendelwinkel φ_2 .

In Bild 5.5 wird die Zustandsschätzung der Pendelwinkelgeschwindigkeiten abgebildet. Die Winkelgeschwindigkeit des inneren Pendels $\dot{\varphi}_1$ resultiert aus der ungefilterten Bildung des Vorwärtsdifferenzenquotienten der rauschbehafteten Messung φ_1 . Hierbei wird das Rauschen Ableiten des Winkelverlaufs zusätzlich verstärkt. Die Schätzung $\hat{\dot{\varphi}}_1$ rekonstruiert den Winkelgeschwindigkeitsverlauf, wobei sie entlang des Mittelwerts des verrauschten Signals $\dot{\varphi}_1$ verläuft. Die Winkelgeschwindigkeitsschätzung des äußeren Pendels $\hat{\dot{\varphi}}_2$ benötigt nach der unkorrekten Initialisierung etwa 0,8 s, bis sie dem tatsächlichen Verlauf folgt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Zustandsschätzung am inversen Doppelpendel in der Simulation erfolgreich ist. Bei der harmonischen Wagenanregung gelingt eine zufriedenstellende Rekonstruktion der Zustände. Die Zustandsschätzung des EKF wird im nächsten Kapitel am realen Versuchsstand validiert.

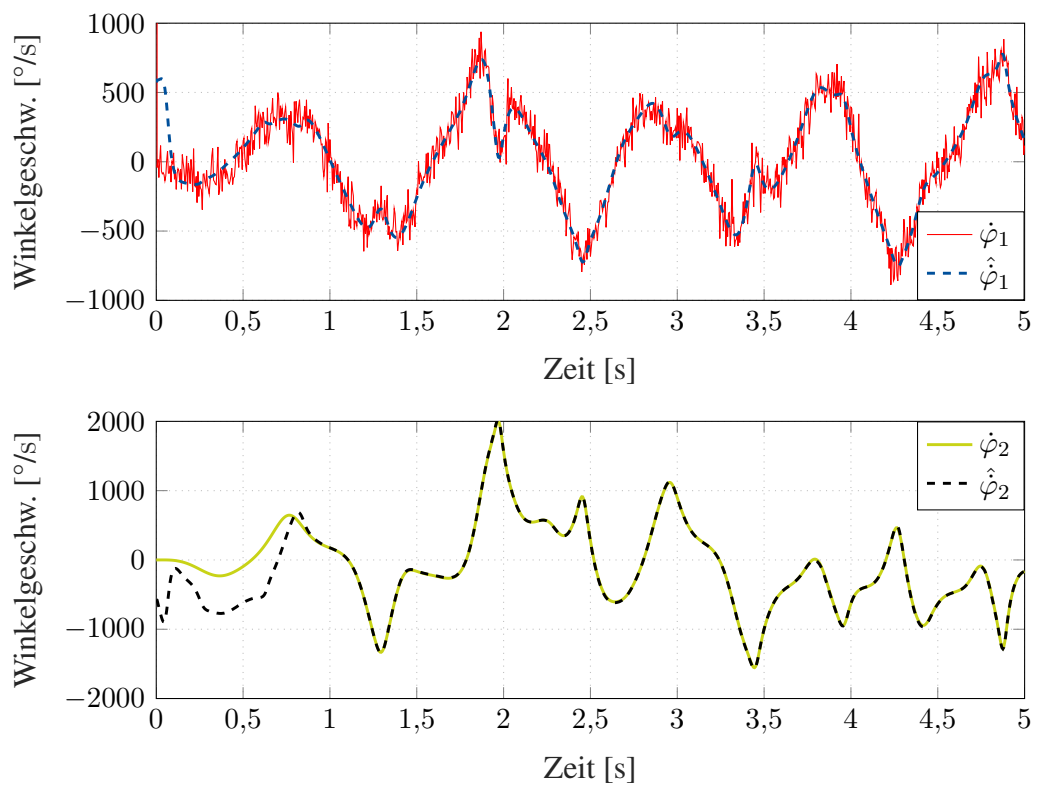


Bild 5.5: Zustandsschätzung der Pendelwinkelgeschwindigkeiten bei der harmonischen Wagenanregung: innere Pendelwinkelgeschw. (oben), äußere Pendelwinkelgeschw. (unten)

6 Bildbasierte Beobachterschätzung

In diesem Kapitel wird die Zustandsbeobachtung des Doppelpendels am Versuchsstand validiert. Hierfür wird im ersten Abschnitt die bildbasierte Bestimmung der Pendelwinkel erläutert. Anschließend wird die bildbasierte Winkelbestimmung mit der tatsächlichen Messung des inneren Pendelwinkels φ_1 bei einem Ausschwingversuch validiert. Zuletzt wird eine Zustandsbeobachtung am realen Doppelpendel durchgeführt und die Ergebnisse werden diskutiert.

6.1 Bildbasierte Winkelbestimmung

Der äußere Pendelwinkel φ_2 muss am realen Doppelpendel gemessen werden, um die Zustandsbeobachtung des EKF bewerten zu können. Wird das mechatronische System für die Winkelmessung mit zusätzlicher Sensorik ausgestattet, hat dies zur Folge, dass die Massenträgheiten der Pendel verändert werden. Folglich wäre die Modellierung aus Kapitel 3 nicht mehr korrekt und müsste angepasst werden. Geschieht die Winkelmessung hingegen berührungslos, kann das bereits modellierte System weiterhin verwendet werden. Eine Möglichkeit der berührungslosen Winkelbestimmung der Pendel kann mithilfe von Kameraaufnahmen bewerkstelligt werden. Die Bilder einer Kamera liefern eine zweidimensionale Aufnahme einer dreidimensionalen Umgebung. Es wird die Annahme getroffen, dass die zweidimensionale Abbildung des Doppelpendels ausreichend ist, um die Pendelwinkel hinreichend genau zu bestimmen, wenn die Kamera zentral vor dem Doppelpendel ausgerichtet wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine *GoPro HERO4* RGB-Kamera verwendet. Dieses Kamerasystem ist in der Lage, Videoaufnahmen mit einer Bildfrequenz von 240 fps bei einer Auflösung von 720×1280 Pixeln zu erzeugen. Im Vergleich dazu wird die Wagenposition x und der innere Pendelwinkel φ_1 mit einer etwa vier Mal so großen Frequenz von 1000 Hz abgetastet. Für die Winkelbestimmung des Doppelpendels ist vor allem eine hohe Bildfrequenz von Vorteil, damit auch schnelle Pendelbewegungen ausreichend oft pro Sekunde erfasst werden.

Die Winkelbestimmung der Pendelstäbe wird mithilfe einer Farbsegmentierung der RGB-Bilddaten unter Verwendung von Markern, die an den Stäben befestigt werden, bewerkstelligt. Die Marker weisen eine so geringe Masse auf, dass der Einfluss auf die Massenträgheiten der Pendelstäbe vernachlässigt wird. Es werden drei Farb-Marker an die Pendelstäbe angebracht, um beide Pendelwinkel eindeutig bestimmen zu können. Ein Marker ist jeweils am Rotationsgelenk der Pendelstäbe angebracht und der letzte Marker ist am äußeren Ende des zweiten Pendels

befestigt. Eine Skizze dieses Aufbaus ist in Bild 6.1 zu sehen. Für die Beobachtersvalidierung ist prinzipiell nur die Messung des äußeren Winkels φ_2 notwendig. Trotzdem werden beide Pendelwinkel bildbasiert ermittelt, wobei der Winkel φ_1 benötigt wird, um die Winkelbestimmung mittels Kameraaufnahmen im Abgleich Sensorwinkelmessung zu validieren.

Es wird zunächst die Winkelberechnung anhand von fertig verarbeiteten Bilddaten behandelt. Der Grundgedanke der Winkelbestimmung liegt darin, die Schwerpunkte der Farbmarker in jedem Einzelbild im Bildkoordinatensystem KS_B zu bestimmen. Ein Schwerpunkt setzt sich aus den Schwerpunktkoordinaten eines in den Bilddaten erkannten, zusammenhängenden Objekts zusammen. Die detaillierte Berechnung der Schwerpunkte anhand von Bilddaten wird später in diesem Abschnitt behandelt. Mithilfe der Schwerpunkte

$$\mathbf{c}_r = [u_r, v_r]^T, \mathbf{c}_g = [u_g, v_g]^T \text{ und } \mathbf{c}_b = [u_b, v_b]^T$$

lassen sich die Winkel jeweils vom inneren zum äußeren Stabende berechnen. Es werden die Schritte für die Berechnung des Winkels $\varphi_{1,B}$ dargestellt. Die Winkel der Pendelstäbe, die mithilfe von Kameraaufnahmen ermittelt werden, erhalten das zusätzliche Subskript B. Die Pixel der Bilddaten werden im Bildkoordinatensystem KS_B mit den Hauptachsen u und v dargestellt. Die Winkel α_1 und α_2 werden als Hilfsgrößen für die Winkelbestimmung eingeführt. Es wird die Differenz der Schwerpunktkoordinaten

$$\Delta u_1 = u_b - u_g \text{ und } \Delta v_1 = v_b - v_g \quad (6.1)$$

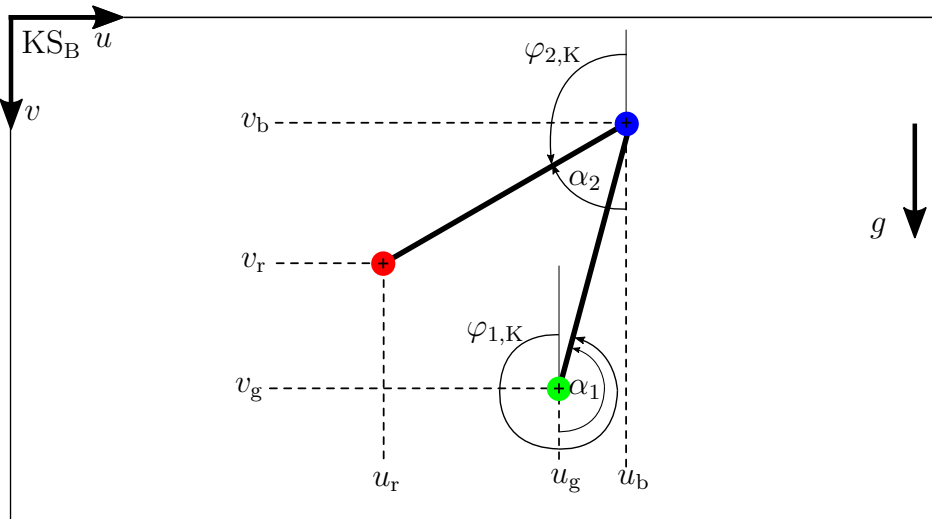


Bild 6.1: Skizze eines Einzelbilds des Doppelpendels mit Farbmarkern

vom grünen zum blauen Farbmarker gebildet. Die Funktion $\arctan2(x, y)$ mit dem Wertebereich $[-\pi, \pi]$ wird verwendet, um den Winkel α_1 zu bestimmen:

$$\alpha_1 = \arctan2(\Delta v_1, \Delta u_1). \quad (6.2)$$

Im Anschluss kann durch die Additionen des Winkelversatzes der gesuchte Pendelwinkel

$$\varphi_{1,B} = \alpha_1 + \pi \quad (6.3)$$

berechnet werden. Der äußere Pendelwinkel φ_2 wird analog mit den Schwerpunkten c_b und c_r berechnet.

Für die Berechnung der Winkel anhand der Videoaufnahmen des Doppelpendels muss das Videomaterial verarbeitet werden. Das Ziel ist es, aus den Einzelbildern der Kameraaufnahmen drei Binärmasken zu erzeugen, in denen nur noch die Farbmarker abgebildet werden. Die RGB-Einzelbilder der Kamera werden mit einer mehrdimensionalen Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(h \times b \times 3)}$ repräsentiert. Es sind h Anzahl der Pixel auf der v -Achse und b die Pixelanzahl auf der u -Achse. Mit der hier verwendeten Auflösung der *GoPro Hero 4* ergibt sich $h = 720$ und $b = 1280$. Die Matrix \mathbf{B} besitzt drei Schichten $\mathbf{B}^r, \mathbf{B}^g, \mathbf{B}^b \in \mathbb{R}^{(h \times b)}$, welche den Farbkanälen rot, grün und blau zugeordnet sind. Die Einträge der Matrizen entsprechen den Intensitätswerten des Pixels an der jeweiligen Stelle im Bild. Die Pixel besitzen eine 8-bit Farbtiefe für jeden Farbkanal. Die Farbsegmentierung wird für den roten Farbkanal exemplarisch erläutert. Die im Folgenden aufgeführten Gleichungen werden jeweils für $i = 1, \dots, h$ und $j = 1, \dots, b$ angewendet. Zunächst wird das Farbbild in ein Graustufenbild überführt, wobei für die Intensität jedes Pixel

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\mathbf{B}_{ij}^r}{3} + \frac{\mathbf{B}_{ij}^g}{3} + \frac{\mathbf{B}_{ij}^b}{3} \quad (6.4)$$

gilt. Im Anschluss wird Differenz zwischen den Intensitäten des Farbkanals und des Graustufenbilds

$$\Delta \mathbf{B}_{ij}^r = \begin{cases} \mathbf{B}_{ij}^r - \mathbf{G}_{ij} & \text{für } \mathbf{B}_{ij}^r \geq \mathbf{G}_{ij} \\ 0 & \text{für } \mathbf{B}_{ij}^r < \mathbf{G}_{ij} \end{cases} \quad (6.5)$$

berechnet. Dies hat zur Folge, dass die Pixel des Farbkanals \mathbf{B}^r mit einer hohen Farbintensität in auch hohe Werte in $\Delta \mathbf{B}_{ij}^r$ aufweisen. Der Vergleich zwischen einem unverarbeiteten RGB-Einzelbild und dem Ergebnis der Anwendung von (6.5) ist in Bild 6.2 zu sehen. Bei dem hier gezeigten Bild handelt es sich um eine typische Aufnahme des Doppelpendels, die bei der bildbasierten Winkelmessung entsteht. Der rote Farbmarker am Ende des äußeren Pendelstabs

ist in der unteren Abbildung als hellgrauer Punkt zu sehen. Der Rest des Bilds weist dunkelgraue Töne auf.

Für die Aufnahmen des Doppelpendels wird versucht, Störeinflüsse bei der Farbsegmentierung zu vermeiden. Es tauchen neben den Markern kaum farbige Objekte auf. Das Doppelpendel wird vor eine weiße Wand gestellt. Außerdem werden farbige Kabel oder die braune Tischoberfläche mit weißem Papier verdeckt, um diese nicht fälschlicherweise als farbige Objekte zu ermitteln. Dies erleichtert die Identifikation der Marker bei der Farbsegmentierung. Zusätzlich werden die Pixelintensitäten von Objekten, die nicht mit dem Arbeitsraum des Doppelpendels kollidieren, manuell auf Null gesetzt. Dieses Vorgehen wird für den blauen Griff des verfahrbaren Tisches in Bild 6.2 angewendet. Ein weiterer Störfaktor könnte durch eine Verdeckung des grünen Farbmarkers durch den äußeren Pendelstab hervorgerufen werden. Da jedoch der innere

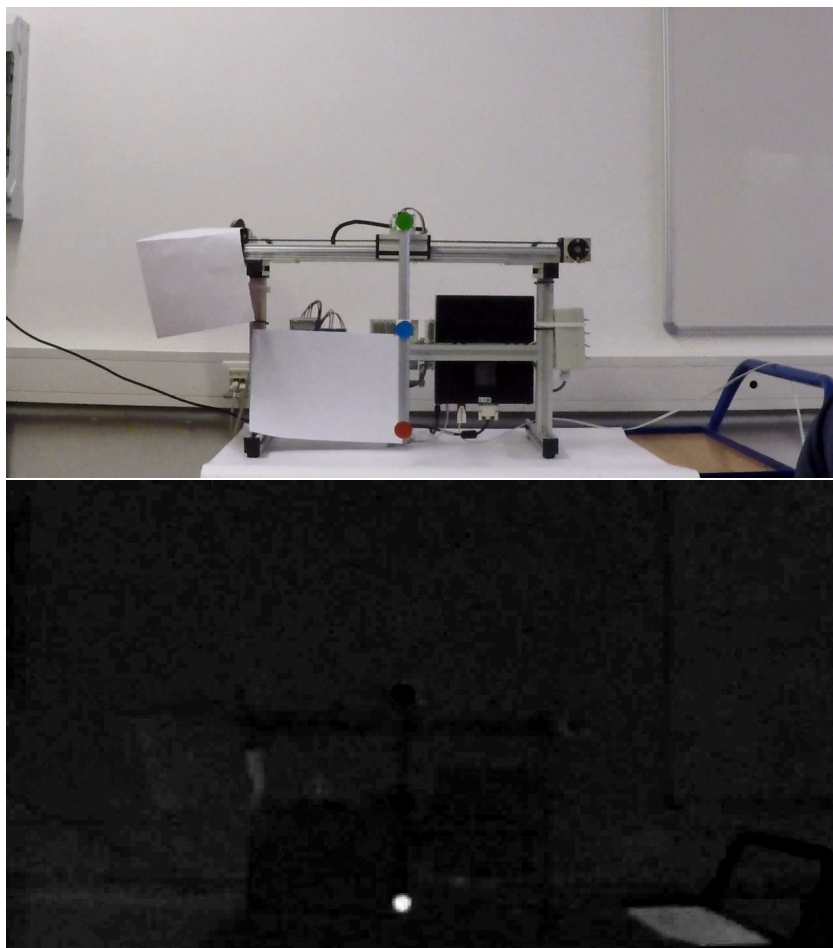


Bild 6.2: Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Graustufenbild nach Anwendung von (6.5) (unten)

Pendelstab länger als der äußere ist, kommt es nicht zu diesem Fall. Der grüne Marker wird zu jedem Zeitpunkt erkannt.

Auf das Graustufenbild wird ein nichtlineares (3×3) -Medianfilter angewendet, um das Bild zu glätten und sogenannte *Ausreißerpixel* zu eliminieren. In der definierten Umgebung des untersuchten Pixels werden die Grauwerte der Größe nach sortiert und der mittlere Intensitätswert für das Pixel eingesetzt. Damit wird sichergestellt, dass die Marker als zusammenhängendes Objekt erkannt werden und Pixel mit deutlich zu hohen oder geringen Intensitätswerten nicht berücksichtigt werden. Im letzten Schritt der Farbsegmentierung wird das gefilterte Graustufenbild in eine binäre Maske des roten Farbkanals

$$SW_{ij}^r = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta B_{ij}^r \geq I_r \\ 0 & \text{für } \Delta B_{ij}^r < I_r \end{cases} \quad (6.6)$$

überführt mit $SW_{ij}^r \in \mathbb{R}^{(h \times b)}$. Es werden alle Einträge der Maske, die gleich oder größer als der Schwellwert für die rote Farbintensität I_r sind, auf 1 und die restlichen Werte auf 0 gesetzt. Der Schwellwert wird so eingestellt, dass neben dem farbigen Marker keine weiteren Objekte in der binären Maske auftauchen. Die Ermittlung der binären Masken SW^g und SW^b für den grünen und blauen Farbkanal werden analog unter Anwendung von (6.5), des (3×3) -Medianfilters und (6.6) mit den Matrizen B^g , B^b bestimmt. Für die Berechnung des Objektschwerpunkts wird die Fläche des Objekts

$$A = \sum_{i=1}^h \left(\sum_{j=1}^b SW_{ij} \right) \quad (6.7)$$

ermittelt. Trotz geschickter Wahl des Schwellwerts I bei der Bildung der binären Maske in (6.6) können Pixel, die nicht zum Farbmarker gehören, fälschlicherweise in dem Binärbild auftauchen. Aus diesem Grund werden alle Objekte, die eine Mindestfläche A_{\min} unterschreiten, nicht beachtet. In den Binärmasken taucht nun genau ein zusammenhängendes Objekt auf, welches dem farblichen Marker entspricht. Die Schwerpunktkoordinaten u_S und v_S im Bildkoordinatensystem KS_B eines detektierten Markers in der Binärmaske ergeben sich damit zu

$$u_S = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^h \left(i \sum_{j=1}^b SW_{ij} \right), \quad (6.8)$$

$$v_S = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^b \left(j \sum_{i=1}^h SW_{ij} \right). \quad (6.9)$$

Die Schwerpunkte c_r , c_g und c_b der Marker werden mit (6.8) und (6.9) bestimmt. Damit sind alle notwendigen Schritte für die Winkelberechnung gemäß (6.3) getätigt. In Bild 6.3 ist ein Einzelbild des Doppelpendels vor und nach der Bildverarbeitung zu sehen.

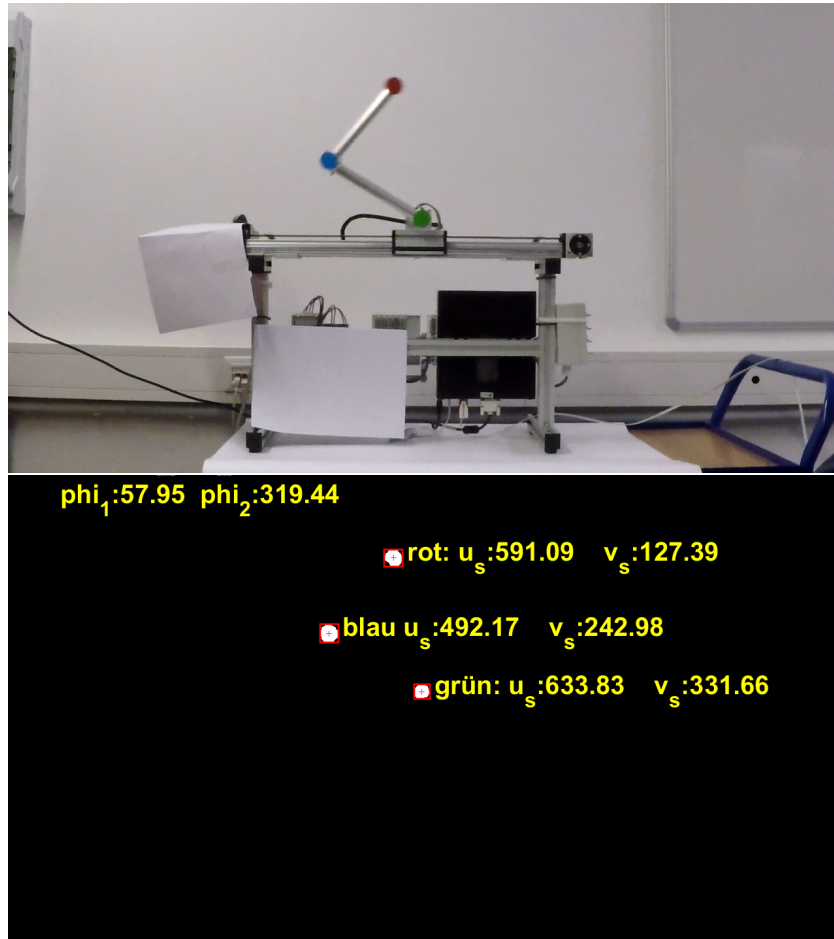


Bild 6.3: Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Binärmasken der drei Farbkanäle mit berechneten Winkeln $\varphi_{1,B}$ und $\varphi_{2,B}$ (unten)

Es sind im unteren Bild die Schwerpunktkoordinaten der einzelnen Objekte und die berechneten Winkel $\varphi_{1,B}$ und $\varphi_{2,B}$ zu sehen. Um die bildbasierte Winkelbestimmung für die Validierung der Zustandsschätzung durch das EKF verwenden zu können, wird diese zunächst anhand einer Messung des inneren Pendelwinkels φ_1 überprüft.

6.2 Validierung der bildbasierten Winkelbestimmung

Der bildbasierte innere Pendelwinkel $\varphi_{1,B}$ wird anhand der Messung des Winkelsensors φ_1 validiert. Die Signale φ_1 und $\varphi_{1,B}$ weisen unterschiedliche Merkmale auf. Sie besitzen zum einen unterschiedliche Abtastraten, wie in Abschnitt 6.1 erläutert. Zum anderen weisen die Signale abweichende Startzeitpunkte und Zeitspannen auf, da es nicht möglich ist, die Messungen der Wagenposition x und des Winkels φ_1 und die Kameraaufnahmen synchron zu starten und zu beenden. Um die Winkelsignale miteinander zu vergleichen, wird das Kamerasignal $\varphi_{1,B}$ mit einer Bildfrequenz von 240 fps mit der Abtastrate des mechatronischen Systems von 1000 Hz erneut abgetastet und interpoliert. Im Anschluss wird eine Kreuzkorrelation von φ_1 und $\varphi_{1,B}$ vorgenommen, um den Zeitversatz beider Signale zu ermitteln. Danach können beide Signale mit dem gleichen Startzeitpunkt ausgerichtet werden. Die einzelnen Schritte der erneuten Abtastung und Kreuzkorrelation werden an dieser Stelle nicht im Detail erläutert. In Bild 6.4 sind die gleichgerichteten Winkel für einen Ausschwingversuch des Doppelpendels zu sehen. Der Anfangszustand lautet in diesem Fall:

$$\mathbf{x}_0 = \left[\varphi_{1,0} = 90^\circ, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = 0, \dot{\varphi}_{2,0} = 180 \right]^T.$$

Es ist zu sehen, dass beide Winkelverläufe eine hohe Übereinstimmung aufweisen. Der Korrelationskoeffizient der beiden Winkelmessungen beträgt $\varrho = 0.9956$. Der Fehler zwischen den beiden Winkelmessungen ist bei einem Versatz von $\pm 45^\circ$ aus der vertikalen Ruhelage mit $\varphi_1 = 180^\circ$ aus am größten und beträgt maximal etwa 3° . Diese Stellen entsprechen den Eckpunkten des Kamerakoordinatensystems KS_B . Eine mögliche Fehlerursache könnten radiale und tangentiale Linsenverzeichnungen der Kamera sein. Nach [OT16] resultieren radiale Verzeichnungen aus der konvexen Oberfläche der Linse und tangentiale Verzeichnungen aus fertigungsbedingten Ungenauigkeiten der Kamera. Eine Möglichkeit diese potentiellen Fehler zu vermeiden, besteht darin die Kamera zu kalibrieren und die 5 Verzeichnungsparameter zu bestimmen. Im Anschluss werden die Bilddaten mithilfe der Verzeichnungsparameter transformiert und so ein kalibriertes Bild erzeugt. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch auf eine Kamerakalibrierung verzichtet, da die bildbasierte Winkelbestimmung zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Eine weitere Ursache für Abweichungen zwischen φ_1 und $\varphi_{1,B}$ liegt in der eventuell nicht exakt horizontal ausgerichteten Kamera vor dem Doppelpendel, wodurch ein perspektivischer Fehler entstehen kann.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die bildbasierte Winkelbestimmung für den Zweck der Beobachtermvalidierung hinreichend genau ist. Es folgt die Validierung der Zustandsschätzung des EKF am inversen Doppelpendel.

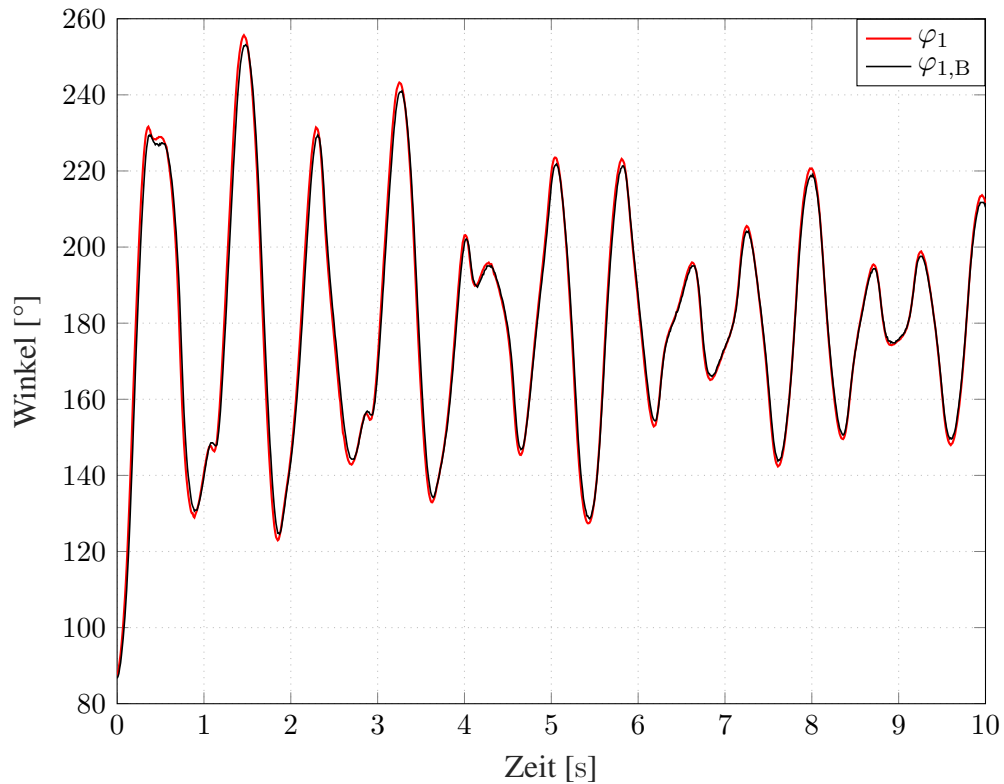


Bild 6.4: Validierung der bildbasierten Winkelbestimmung des inneren Pendelwinkels mittels Winkelmessung

6.3 Bildbasierte Validierung der Zustandsschätzung des EKF

Für die Zustandsschätzung des EKF am realen Doppelpendel werden wie in Abschnitt 5.3.4 die Systemzustände bei einer harmonischen Wagenbeschleunigung gemäß (5.18) beobachtet. Die Validierung der Zustandsschätzung erfolgt *offline*. Während des Betriebs des Doppelpendels wird eine Videoaufnahme des Doppelpendels mit der *GoPro Hero 4* erstellt. Im Anschluss werden die Kameraaufnahmen mit den in Abschnitt 6.1 aufgezeigten Schritten bearbeitet, um den bildbasierten Winkelverläufe $\varphi_{1,B}$ und $\varphi_{1,B}$ zu erhalten. Dann erfolgt die Zustandsschätzung mit der vorgegebenen Wagenbeschleunigung \ddot{x} und dem gemessenen Winkelverlauf φ_1 .

Für die Zustandsbeobachtung gilt der Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \left[\varphi_{1,0} = 180^\circ, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = 180^\circ, \dot{\varphi}_{2,0} = 180^\circ \right]^T \quad (6.10)$$

gewählt. Davon abweichend wird der geschätzte Anfangszustand

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \left[\hat{\varphi}_{1,0} = 230^\circ, \dot{\hat{\varphi}}_{1,0} = 573^\circ \text{ s}^{-1}, \hat{\varphi}_{2,0} = 100, \dot{\hat{\varphi}}_{2,0} = -573^\circ \text{ s}^{-1} \right]^T. \quad (6.11)$$

eingestellt. Die Parameter der harmonischen Wagenbeschleunigung lauten:

$$\ddot{x}_{\max} = 1,5 \text{ m s}^{-2}, \omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1} \text{ und } \Delta \ddot{x} = 0.$$

Die Zustandsschätzung ist in Bild 6.5 dargestellt. Bei der Fehlerberechnung nach (5.17) im Experiment wird der bildbasierte Winkel $\varphi_{2,B}$ als Referenzwert gewählt. Bei der Bestimmung der optimalen Wichtungseinträge mittels des Algorithmus 1 ergibt sich für das Prozess- und Messrauschen:

$$\mathbf{Q}_{\text{EKF,opt}} = \text{diag} \left([1 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2, 0,1 \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}, 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}^2, 1 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}]^T \right),$$

$$\mathbf{R}_{\text{EKF}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^2.$$

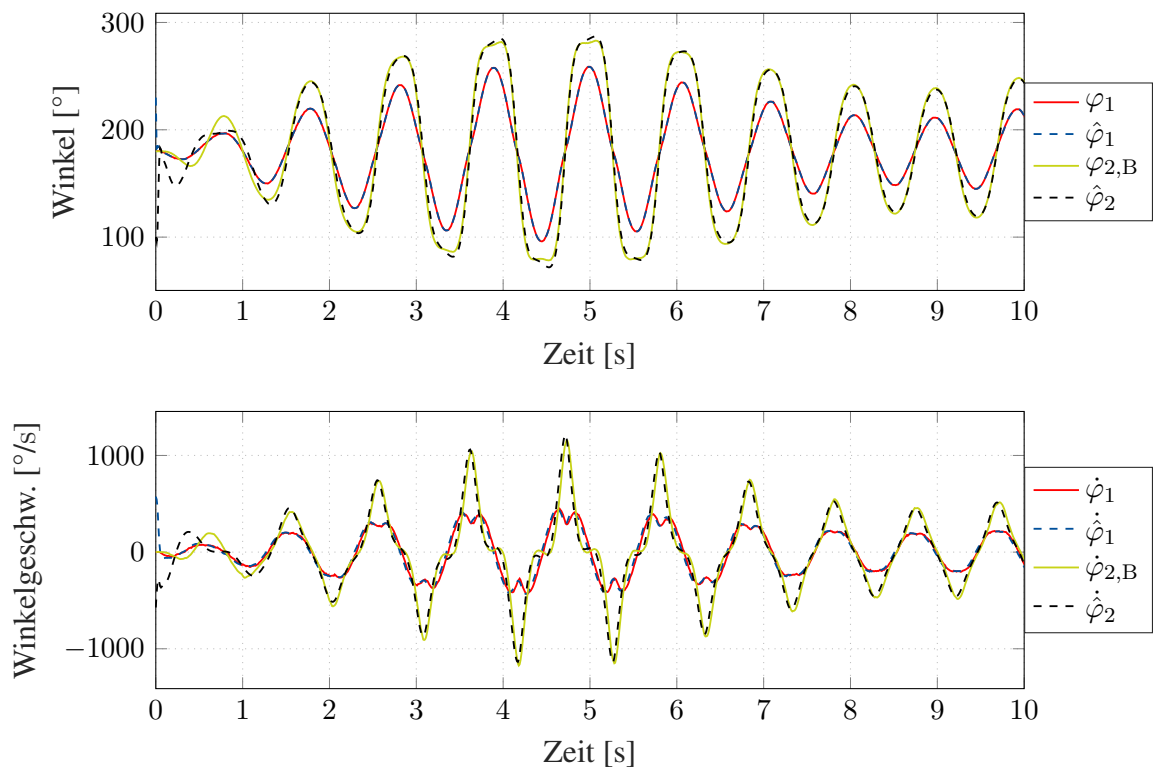


Bild 6.5: Zustandsschätzung des Doppelpendels am Versuchsstand: Pendelwinkel (oben), Pendelwinkelgeschwindigkeiten (unten)

Bei der gewählten Wagenanregung schwingt das Doppelpendel aus der unteren Ruhelage auf und beide Pendelstäbe führen sinusförmige Bewegungen durch. Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_{2,B}$ resultieren aus dem tiefpassgefilterten Vorwärtsdifferenzenquotienten der Messung φ_1 und dem bildbasierten Winkelverlauf $\varphi_{2,B}$. Der Tiefpassfilter wird angewendet um das hochfrequente Rauschen der Abtastfrequenz von 1000 Hz zu eliminieren. Die Zustandsschätzung des EKF ist robust gegen die unkorrekte Initialisierung. Alle Einschwingvorgänge sind spätestens nach anderthalb Sekunden abgeschlossen und die Zustandsschätzungen folgen den tatsächlichen Winkel- und Winkelgeschwindigkeitsverläufen. Die maximale Differenz nach Abschluss des Einschwingvorgangs des inneren Pendelwinkels $\Delta\varphi_{1,\max}$ beträgt $1,48^\circ$. Für den äußeren Pendelwinkel ist die Differenz deutlich größer mit $\Delta\varphi_{2,\max} = 11,45^\circ$. Ein Grund hierfür ist die gegenüber der Winkelmessung φ_1 ungenauere bildbasierte Winkelbestimmung $\varphi_{2,B}$. Mit den hier dargestellten Ergebnissen lässt sich jedoch die Zustandsschätzung des EKF mithilfe einer bildbasierten Winkelbestimmung validieren.

Abschließend wird eine harmonische Wagenbeschleunigung mit den Parametern

$$\ddot{x}_{\max} = 2,5 \text{ m s}^{-2}, \omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1} \text{ und } \Delta\ddot{x} = 0$$

betrachtet. Das Ergebnis der Zustandsschätzung der Pendelwinkel ist in Bild 6.6 dargestellt. Da das Einschwingverhalten des EKF in diesem Abschnitt bereits behandelt wurde, wird das EKF mit dem tatsächlichen Anfangszustand gemäß (6.10) initialisiert. Das besondere an diesem Fall ist, dass das sich Doppelpendel zunächst sinusförmig aufschwingt. Der äußere Pendelstab fängt ab etwa 11 Sekunden an, mehrere, chaotische Rotationen um die Gelenkachse durchzuführen. In den ersten 11 Sekunden stimmt die Zustandsschätzung $\hat{\varphi}_2$ des EKF mit der bildbasierten Winkelmessung $\varphi_{2,B}$ überein. Nachdem die Bewegung des äußeren Pendels beginnt hohe Nichtlinearitäten aufzuweisen, ist die Schätzung zeitweise nicht mehr in der Lage, den wahren Winkelverlauf zu rekonstruieren. Die Schätzung $\hat{\varphi}_2$ entfernt sich von der Referenz $\varphi_{2,B}$, sodass beide Winkelverläufe sich nicht mehr auf dem Wertebereich des gleichen Kreisumfangs befinden. Trotz der kurzzeitigen falschen Zustandsschätzung ist das EKF in der Lage, den Referenzverlauf des äußeren Pendelwinkels zu rekonstruieren, wenn die Nichtlinearitäten wieder abnehmen. Dies ist anhand des symmetrischen Winkelverlaufs ab etwa 17 Sekunden im unteren Graphen von Bild 6.6 zu sehen. Die Schätzung und die Referenz stimmen hier überein, wenn der Phasenversatz zwischen beiden Winkelverläufen aufgehoben wird. Der Grund für die inkorrekte Zustandsbeobachtung in diesem Fall liegt an dem verwendeten Beobachter. Wie in Abschnitt 5.3.2 erläutert, bildet das EKF eine lineare Approximation des untersuchten nichtlinearen Systems im vorherrschenden Zustand x_k des Zeitschritts k . Die lineare Approximation ist in der Lage, Nichtlinearitäten bis zu einem gewissen Grad zu rekonstruieren. Für den Fall

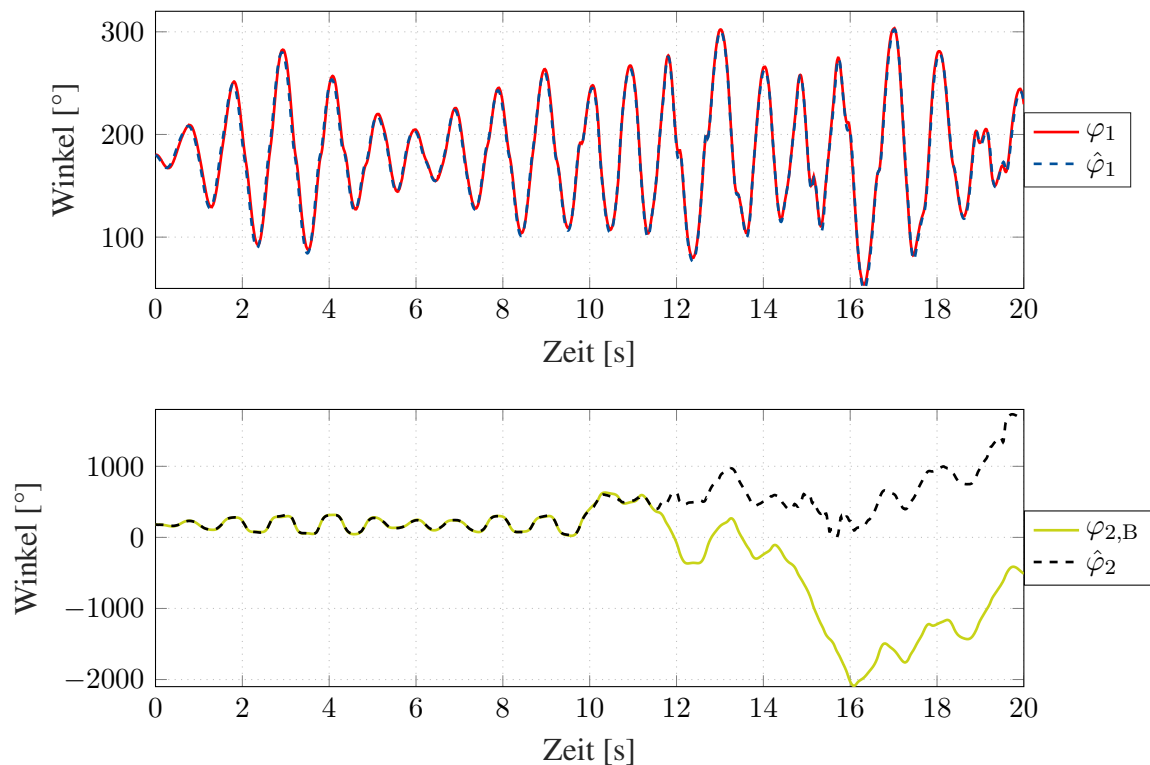


Bild 6.6: Zustandsschätzung des Doppelpendels am Versuchsstand: innerer Pendelwinkel (oben), äußerer Pendelwinkel (unten)

des chaotisch rotierenden, äußeren Pendelstabs sind die Nichtlinearitäten jedoch zu hoch. Die Graphen der Zustandsschätzung der Winkelgeschwindigkeiten sind in Bild 6.7 abgebildet. Für die Beobachtung der Winkelgeschwindigkeiten ergibt sich ein ähnliches Ergebnis wie für die Pendelwinkel. Die Schätzung der inneren Pendelwinkelgeschwindigkeit $\dot{\hat{\varphi}}_1$ liefert ein zufriedenstellendes Ergebnis. Die beobachtete Pendelwinkelgeschwindigkeit $\dot{\hat{\varphi}}_2$ hingegen ist zeitweise inkorrekt, solange die Bewegung des äußeren Pendelstabs zu schnell ist. Dieser Fall tritt, wie bereits erwähnt, ab etwa 11 Sekunden ein.

Abschließend lässt sich sagen, dass das EKF die Zustände des inversen Doppelpendels auf dem gesamten Arbeitsraum rekonstruieren kann, solange die Nichtlinearitäten des Doppelpendels nicht zu hoch sind. Es wurden exemplarisch die Systemzustände für den Fall einer harmonischen Wagenbeschleunigung untersucht.

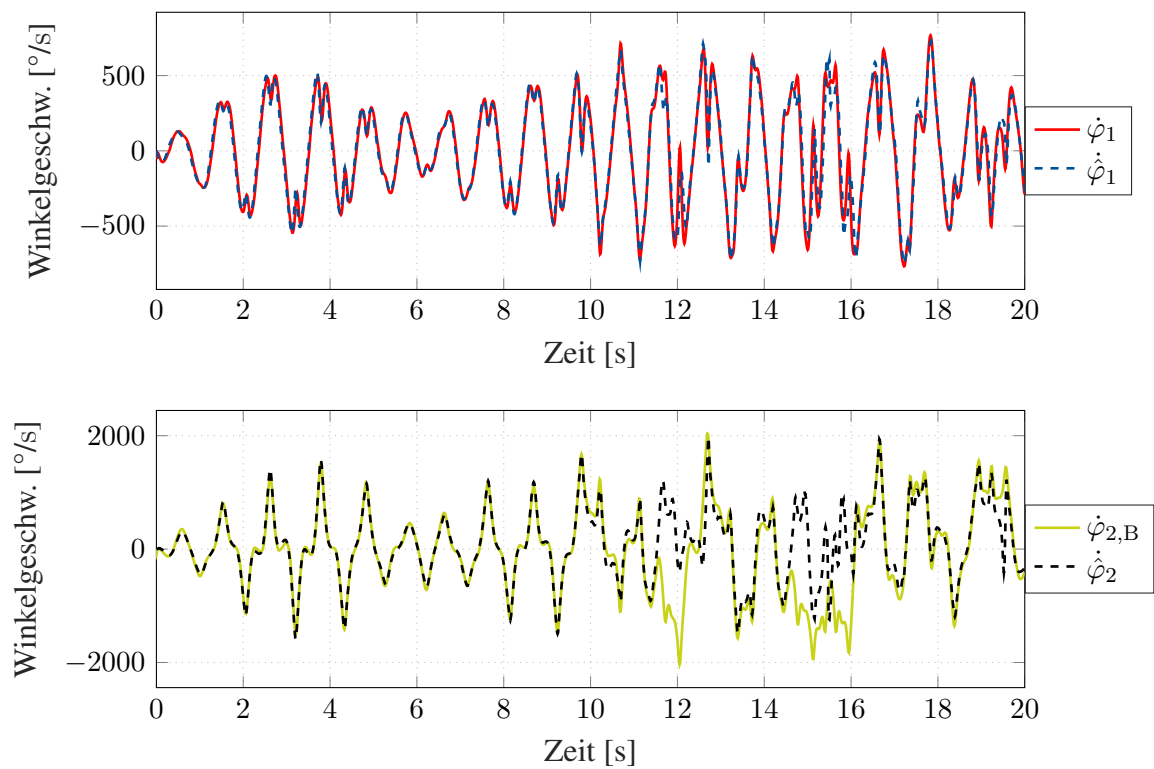


Bild 6.7: Zustandsschätzung des Doppelpendels am Versuchsstand: innere Pendelwinkelgeschw. (oben), äußere Pendelwinkelgeschw. (unten)

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine nichtlineare Zustandsbeobachtung am inversen Doppelpendel durchgeführt. Nach einer Modellierung des Doppelpendels wurde als Eingangsexperiment die Zustandsregelung in der instabilen, oberen Gleichgewichtslage simuliert. Die grundlegende Systemeigenschaft der linearen und nichtlinearen Beobachtbarkeit des Doppelpendels wurde untersucht und nachgewiesen. Im Anschluss wurde das EKF als Beobachter für die Zustandsschätzung implementiert. Ein besonderes Augenmerk lag dabei auf den Einstellregeln des EKF. Die Zustandsschätzungen des EKF wurden mithilfe einer bildbasierten Pendelwinkelmessung validiert. Die Rekonstruktion der Zustände des Doppelpendels durch das EKF erweist sich als zufriedenstellend, solange die Nichtlinearitäten der beobachteten Pendelbewegung nicht zu hoch sind.

Da das EKF auf einer linearen Approximation des Systems im betrachteten Zustand basiert, liefert es eine zeitweise unkorrekte Zustandsschätzung bei sehr schnellen Bewegungen des äußeren Pendelstabs. Auf diese Arbeit aufbauend bietet es sich an, weitere nichtlineare Zustandsbeobachter für die Schätzung der Pendelwinkel zu verwenden. Ein möglicher Kandidat ist das Unscented Kalmanfilter (UKF). Dieser Zustandsbeobachter verspricht bessere Ergebnisse hinsichtlich der Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme, vgl. [WM00]. Die bildbasierte Winkelbestimmung mit der *GoPro Hero 4* RGB-Kamera erweist sich als ausreichend für die Validierung des Beobachters. Eine Verbesserung der bildbasierten Winkelmessung kann durch eine Kamerakalibrierung bewirkt werden. Mit dem in dieser Arbeit verwendeten Kamerasystem ist die Validierung der Ergebnisse nur *offline* möglich. Es könnte eine Online-Validierung implementiert werden. Hierfür ist ein Kamerasystem, welches eine Schnittstelle zu *Simulink Real-Time* aufweist, notwendig. Außerdem ist sicherzustellen, dass die Bildverarbeitungsalgorithmen in Echtzeit durchgeführt werden können. Dies kann problematisch sein, da die Verarbeitung der drei Farbkanäle eines Einzelbilds rechenintensiv ist. Es müsste auch gewährleistet werden, dass die Bildverarbeitung bei hohen Bildfrequenzen von über 240 fps durchführbar ist.

Mithilfe der nichtlinearen Zustandsschätzung können weitere Experimente am Doppelpendel durchgeführt werden. Das EKF rekonstruiert die fehlenden Zustände des äußeren Pendels, wodurch theoretisch die Regelung des Doppelpendels mittels einer Zustandsrückführung in die instabile, obere Gleichgewichtslage möglich ist. Gelingt die Stabilisierung, kann darauf aufbauend die Zustandsschätzung für eine Implementierung eines Aufschwingvorgangs des Doppelpendels aus der stabilen, unteren Gleichgewichtslage verwendet werden.

Anhang

A.1 Nichtlineare Bewegungsgleichungen des Doppelpendels

In diesem Abschnitt werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen vollständig dargestellt. Nach der Entkopplung von (3.14) und (3.15) ergibt sich:

$$\ddot{\varphi}_1 = \left[12d_2l_2\dot{\varphi}_2 - 12d_2l_2\dot{\varphi}_1 - 12d_1l_2\dot{\varphi}_1 - 18d_2l_1\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right. \\ + 18d_2l_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 6l_1l_2m_1\ddot{x} \cos(\varphi_1) + 12l_1l_2m_2\ddot{x} \cos(\varphi_1) \\ + 12l_1l_2m_3\ddot{x} \cos(\varphi_1) + 6gl_1l_2m_1 \sin(\varphi_1) + 12gl_1l_2m_2 \sin(\varphi_1) \\ + 12gl_1l_2m_3 \sin(\varphi_1) - 6l_1l_2^2m_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - 9l_1l_2m_2\ddot{x} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_2) - 9gl_1l_2m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_2) \\ \left. - 9l_1^2l_2m_2\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \\ \left/ \left[l_1^2l_2 \left(-9m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 4m_1 + 12m_2 + 12m_3 \right) \right] \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \left[12d_2l_1m_1\dot{\varphi}_1 + 36d_2l_1m_2\dot{\varphi}_1 - 12d_2l_1m_1\dot{\varphi}_2 + 36d_2l_1m_3\dot{\varphi}_1 - 36d_2l_1m_2\dot{\varphi}_2 \right. \\ - 36d_2l_1m_3\dot{\varphi}_2 + 18d_1l_2m_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 18d_2l_2m_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - 18d_2l_2m_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 18l_1l_2m_2^2\ddot{x} \cos(\varphi_2) + 18gl_1l_2m_2^2 \sin(\varphi_2) \\ + 18l_1^2l_2m_2^2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 6l_1l_2m_1m_2\ddot{x} \cos(\varphi_2) + 18l_1l_2m_2m_3\ddot{x} \cos(\varphi_2) \\ + 6gl_1l_2m_1m_2 \sin(\varphi_2) + 18gl_1l_2m_2m_3 \sin(\varphi_2) + 6l_1^2l_2m_1m_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - 18l_1l_2m_2^2\ddot{x} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1) - 18gl_1l_2m_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1) \\ + 18l_1^2l_2m_2m_3\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 9l_1l_2^2m_2^2\dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - 9l_1l_2m_1m_2\ddot{x} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1) - 18l_1l_2m_2m_3\ddot{x} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1) \\ - 9gl_1l_2m_1m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1) - 18gl_1l_2m_2m_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1) \left. \right] \\ \left/ \left[l_1^2l_2 \left(-9m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 4m_1 + 12m_2 + 12m_3 \right) \right] \right. \quad (\text{A.2})$$

Literaturverzeichnis

- [Ada14] ADAMY, Jürgen: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Springer-Verlag GmbH, 2014. http://www.ebook.de/de/product/22487513/juergen_adamy_nichtlineare_systeme_und_regelungen.html. – ISBN 3642450121
- [Beh16] BEHM, Alexander: *Aufbau, Inbetriebnahme und Regelung eines inversen Pendels zu Demonstrationszwecken in Forschung und Lehre*, Leibniz Universität Hannover, Diplomarbeit, 2016
- [GEK13] GLÜCK, Tobias ; EDER, Andreas ; KUGI, Andreas: Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. In: *Automatica* 49 (2013), mar, Nr. 3, S. 801–808. <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2012.12.006>. – DOI 10.1016/j.automatica.2012.12.006
- [HMF14] HETTICH, Georg ; MERGNER, Thomas ; FENNELL, Luminous: Double Inverted Pendulum Model of Reactive Human Stance Control, 2014
- [LL95] LUO, Jia ; LAN, C. E.: Determination of weighting matrices of a linear quadratic regulator. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18 (1995), nov, Nr. 6, S. 1462–1463. <http://dx.doi.org/10.2514/3.21569>. – DOI 10.2514/3.21569
- [Lun10] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-10198-4>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-10198-4>
- [Lun14] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-53909-1>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-53909-1>
- [MWJ04] MERWE, Rudolph van d. ; WAN, Eric ; JULIER, Simon: Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion: Applications to Integrated Navigation. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), aug 2004

- [OAN13] OLEJNIK, Pawel ; AWREJCEWICZ, Jan ; NIELACZNY, Michal: Solution of the Kalman filtering problem in control and modeling of a double inverted pendulum with rolling friction / Department of Automation and Biomechanics, Lodz University of Technology. 2013. – Forschungsbericht
- [OHB⁺15] ORTMAIER, Tobias ; HANSEN, Christian ; BOSSELMANN, Steffen ; RISSING, Lutz ; RECHEL, Mathias ; KLAAS, Daniel: *Skript zur Vorlesung Mechatronische Systeme*. Fakultät für Maschinenbau der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität, Institut für Mechatronische Systeme (imes), Institut für Mikroproduktionstechnik (IMPT), 2015
- [OT16] ORTMAIER, Tobias ; TAPPE, Svenja: *Skript zur Vorlesung Robotik II*. Fakultät für Maschinenbau der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität, Institut für Mechatronische Systeme (imes), 2016
- [SSER10] SAMANI, Alireza G. ; SHOURAKI, Saeed B. ; EGHBALI, Reza ; ROSTAMI, Mohammad G.: Control of a Non Observable Double Inverted Pendulum Using a Novel Active Learning Method Based State Estimator. In: *2010 Fourth UKSim European Symposium on Computer Modeling and Simulation*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), nov 2010
- [WB06] WELCH, Greg ; BISHOP, Gary: An Introduction to the Kalman Filter. In: *Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill* (2006)
- [WM00] WAN, E.A. ; MERWE, R. Van D.: The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2000