



Nichtlineare Zustandsbeobachtung mit bildbasierter Validierung am inversen Doppelpendel

Studienarbeit M-Monat/Jahr-Nummer

Andreas Serov Matrikelnummer 2871560

Hannover, März 2017

Erstprüfer Prof. Dr.-Ing. T. Ortmaier Betreuer M. Sc. Steffen Bosselmann Ich versichere, dass ich diese Studienarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Hannover, Tag. Monat Jahr

Inhaltsverzeichnis

•	WOU	emerui	ig des Doppeiperideis	•
2	Zust	andsre	gelung des inversen Doppelpendels	7
	2.1	Zustan	ndsraumdarstellung	7
	2.2	Steuer	barkeit	11
	2.3	Zustar	ndsregelung mittels LQ-Regelung	11
3	Nich	itlinear	e Zustandsbeobachtung	17
	3.1	Linear	e Beobachtbarkeit des Doppelpendels	17
	3.2	Nichtl	ineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels	18
	3.3	Das E	rweiterte Kalmanfilter	22
		3.3.1	Voraussetzungen des EKF	22
		3.3.2	Algorithmus des EKF	23
		3.3.3	Einstellregeln des EKF	26
		3.3.4	Simuationsergebnisse der Zustandsbeobachtung	28
4	Bild	basiert	e Beobachtervalidierung	33
	4.1	Bildba	sierte Winkelmessung	33
	4.2	Validio	erung der bildbasierten Winkelbestimmung	38
Ar	nhang			40
	A.1	Nichtl	ineare Bewegungsgleichungen des Doppelpendels	42
l it	toratu	rvorzoi	chnic	/12

Bildverzeichnis

1.1	Skizze des inversen Doppelpendels	2
1.2	Relative Wagenposition beim Ausschwingvorgang des Doppelpendels	5
2.1	Signalflussplan des Zustandsraums ohne Durchgangsanteil	7
2.2	Signalflussplan der Zustandsrückführung	12
2.3	Zustandsregelung mittels LQR des Doppelpendels	16
3.1	Signalflussplan der allgemeinen Zustandsbeobachtung	17
3.2	Schematischer Ablauf des EKF Algorithmus	25
3.3	Signalflussplan der Zustandsbeobachtung in der Simulation	29
3.4	Zustandsschätzung des EKF beim Ausschwingen des Doppelpendels: Pendel-	
	winkel (oben), Pendelwinkelgeschwindigkeiten (unten)	30
3.5	Zustandsschätzung des EKF bei der harmonischen Wagenanregung: Pendel-	
	winkel (oben), Pendelwinkelgeschwindigkeiten (unten)	31
4.1	Skizze eines Einzelbilds des Doppelpendels mit Farbmarkern	34
4.2	Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Graustufenbild nach	
	Anwendung von (4.5) (unten)	36
4.3	Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Binärmasken der drei	
	Farbkanäle mit berechneten Winkeln $\varphi_{1,K}$ und $\varphi_{2,K}$ (unten)	38
4.4	Gleichgerichtete Signale der Winkelmessung	39

Tabellenverzeichnis

1.1	Gemessene und geschätzte Werte der Systemparameter	6
2.1	Einträge der Wichtungsmatrizen Q_{LO} und R_{LO} der Zustandsregelung	14

1 Modellierung des Doppelpendels

Die Grundlage für die nichtlineare Zustandsbeobachtung des inversen Doppelpendels bilden die dynamischen Bewegungsgleichungen des Systems, welche in diesem Kapitel hergeleitet werden. Die Differentialgleichungen werden mithilfe des Lagrange-Formalismus ermittelt. Dafür wird zunächst eine mechanische Modellierung des Systems vergenommen.

Der generelle Aufbau des inversen Doppelpendels mit den relevanten, physikalischen Größen kann Bild 1.1 entnommen werden. Das mechatronische System besteht aus einem Wagen auf einer Linearführung, zwei miteinander gekoppelte Stäben sowie einem Motor, welches das Drehmoment $M_{\rm Motor}$ zum Ansteuern des Wagens liefert. Durch die Umsetzung des Motormoments resultiert eine Antriebskraft $F_{\rm a}$ auf den Wagen sowie eine entgegengesetzte Reibkraft der Linearführung $F_{\rm r}$. Beide Pendelstäbe sind rotatorisch miteinander gelagert, sodass sie Bewegungen nur in der x-y-Ebene durchführen können. Für die Modellierung werden die Winkelpositionen φ , die Längen ℓ , die Gewichte m, die Dämpfungskonstanten d sowie die Massenträgheitsmomente $J^{\rm S}$ der Pendel benötigt. Für die Anwendung des Lagrange-Formalismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{\mathrm{n.k.}}$$
(1.1)

ist eine energetische Betrachtung des Systems nötig. In (1.1) repräsentieren q die generalisierten Koordinaten, \dot{q} ihre zeitlichen Ableitungen und $Q_{\rm n.k.}$ auftretende nicht konservative Kräfte. Im vorliegenden Fall werden die generalisierten Koordinaten x(t), $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ verwendet, da für diese Variablen die entsprechenden Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Diese Größen hängen von der Zeit ab, jedoch wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Zeitabhängigkeit in diesem Kapitel vorausgesetzt und nicht explizit aufgeführt. Die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \tag{1.2}$$

setzt sich aus der kinetischen Energie T des Systems und der potentiellen Energie L zusammen. Die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} J_i^S \varphi_i^2$$
 (1.3)

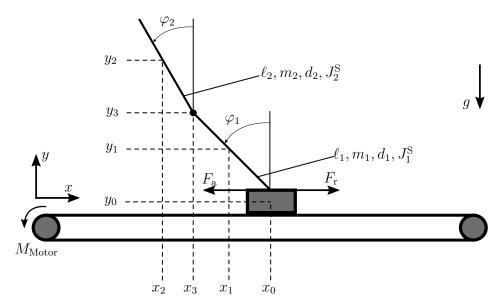


Bild 1.1: Skizze des inversen Doppelpendels

besteht aus der translatorischen Bewegungsenergie der Schwerpunkte und der Rotationsenergie der Pendelstäbe. Die Trägheiten der Pendel werden über das Massenträgheitsmoment eines dünnen Stabes um den Schwerpunkt mit

$$J_i^{\rm S} = \frac{1}{12} m_i \ell_i^2 \tag{1.4}$$

approximiert. Bei der Modellierung des Doppelpendels ist die Betrachtung von vier Schwerpunkten, die Bild 1.1 zu entnehmen sind, notwendig. Neben den Schwerpunkten des Wagens und der beiden Pendel, die über die Indizes 0, 1 und 2 verfügen, ist noch das Verbindungsgelenk der Stäbe zu beachten. Das Gewicht des Gelenks ist so hoch, dass es bei der Modellierung berücksichtigt wird und nicht vernachlässigt werden kann. Das Gelenk wird als Punktmasse behandelt und mit dem Index 3 versehen. Damit werden die Positionen der Massen

$$x_{0} = x, y_{0} = 0,$$

$$x_{1} = x_{0} - \frac{1}{2}\ell_{1}\sin(\varphi_{1}), y_{1} = \frac{1}{2}\ell_{1}\cos(\varphi_{1}),$$

$$x_{2} = x_{0} - \ell_{1}\sin(\varphi_{1}) - \frac{1}{2}\ell_{2}\sin(\varphi_{2}), y_{2} = \ell_{1}\cos(\varphi_{1}) + \frac{1}{2}\ell_{2}\cos(\varphi_{2}),$$

$$x_{3} = x_{0} - \ell_{1}\sin(\varphi_{1}), y_{3} = \ell_{1}\cos(\varphi_{1})$$

bestimmt. Zur Ermittlung der Schwerpunktgeschwindigkeiten werden die zeitlichen Ableitun-

gen

$$\begin{split} \dot{x}_0 &= \dot{x}, & \dot{y}_0 &= 0, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \frac{1}{2}\ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_0 - \ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\ell_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, & \dot{y}_2 &= -\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\ell_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 - \ell_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_3 &= -\ell_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \end{split}$$

berechnet. Die Ermittlung der Gesamtgeschwindigkeit in der x-y-Ebene unter Berücksichtigung von $\dot{x}_0 = \dot{x}$ ist über eine Betragsbildung möglich und liefert

$$\begin{split} v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}^2, \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 - \ell_1 \cos(\varphi_1) \dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4} \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ &= \dot{x}^2 + \ell_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - 2 \dot{x}^2 \ell_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - \ell_2 \dot{x} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 + \ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2, \\ v_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = \dot{x}^2 - 2 \ell_1 \cos(\varphi_1) \dot{x} \dot{\varphi}_1 + \ell_1^2 \dot{\varphi}_1. \end{split}$$

Somit ergibt sich die kinetische Energie des Systems gemäß (1.3) zu

$$T = \frac{1}{2} (m_0 v_0^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + J_1^S \varphi_1^2 + J_2^S \varphi_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} \Big((m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}^2 + (\frac{1}{4} m_1 + m_2 + m_3) \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$- (m_1 + 2m_2 + 2m_3) \ell_1 \dot{x} \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + m_2 (\frac{1}{4} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - \ell_2 \dot{x} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2)$$

$$+ \ell_1 \ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + J_1^S \dot{\varphi}_1^2 + J_2^S \dot{\varphi}_2^2 \Big).$$

$$(1.5)$$

Die potentielle Energie des Systems lässt sich im vorliegenden Fall auf das Höhenpotential

$$U = g \sum_{i=0}^{3} m_i y_i \tag{1.6}$$

beschränken. Das Nullniveau des Potentials wird auf die Höhe des Wagens y_0 gelegt. Somit lautet die potentielle Energie

$$U = g\left(\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)\ell_1\cos(\varphi_1) + \frac{1}{2}m_2\ell_2\cos(\varphi_2)\right). \tag{1.7}$$

Mithilfe von (1.5) und (1.7) werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_{\mathrm{a}} - F_{\mathrm{r}} \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_{\mathrm{a}} - F_{\mathrm{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{1}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1}} = d_{2}(\dot{\varphi}_{2} - \dot{\varphi}_{1}) - d_{1}\dot{\varphi}_{1}$$
(1.8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \tag{1.10}$$

aufgestellt. Die nicht-konservativen Kräfte sind Kräfte, die sich nicht aus einem generalisierten Potential $P(q, \dot{q})$ ableiten lassen können. Nicht-konservative Kräfte treten beim Energieaustausch des Systems mit der Umgebung auf. Im vorliegenden Fall sind die Antriebskraft des Motors, die Reibung zwischen der Linearführung und dem Wagen sowie die Dämpfungsterme der Pendellager Kräfte nicht-konservativer Natur. In [Beh16] werden zwei Möglichkeiten zur Regelung und Steuerung des mechatronischen Systems aufgezeigt. Zum einen kann der Wagen momentengesteuert betrieben werden. Hierbei wird ein Wunschmoment M_{soll} an den Motor übertragen. Bei der Umsetzung des Moments hat die Reibung der Linearführung und jedoch einen großen Einfluss auf die letztendlich resultierende Beschleunigung des Wagens. Um eine realitätsnahe Modellierung des Systems zu gewährleisten, wird eine Berücksichtigung der Reibung vorausgesetzt, wenn das Pendel momentengesteuert betrieben wird. Zum anderen ist es möglich, eine Sollgeschwindigkkeit $v_{\rm soll}$ vorzugeben. Dies hat den Vorteil, dass die Reibung des Systems vernachlässigt werden kann. Außerdem wird in [Beh16] aufgezeigt, dass bei der Regelung des realen, inversen Einfachpendels mit Drehzahlvorgabe deutlich bessere Regelungsergebnisse erzielt werden. In diesem Zusammenhang wird die Vermutung aufgestellt, dass aufgrund der hohen Reibung der Linearführung und des geringen Gewichts der realen Pendelstäbe eine Rückwirkung der Pendelbewegung auf die Wagenposition nicht vorliegt. Diese Annahme wird verifiziert, indem die relative Auslenkung des Wagens während eines Ausschwingvorgangs des Doppelpendels gemessen wird. In Bild 1.2 ist zu sehen, dass die maximale Auslenkung wenige Mikrometer beträgt, wodurch der Einfluss der Pendelbewegung auf die Wagenposition im Folgenden vernachlässigt werden kann. Aus den genannten Gründen wird die Wagenbeschleunigung \ddot{x} als Eingangsgröße des Systems gewählt.

Für die Ansteuerung des Motors, wird die Sollgeschwindigkeit durch eine einfache Integration der vorgegebenen Beschleunigung ermittelt. Dadurch ist die explizite Lösung von (1.8), die die Bewegungsgleichung des Wagens liefert, nicht mehr notwendig. Nach einer Bildung der Ableitungen der Lagrange-Funktion und Umformen von (1.9) und (1.10) lassen sich die Bewegungsgleichungen des inversen Doppelpendels aufstellen:

$$\ddot{x} = u \tag{1.11}$$

$$\ddot{\varphi}_{1} = \frac{1}{J_{1}^{S} + (\frac{1}{4}m_{1} + m_{2} + m_{3})\ell_{1}^{2}} \left(d_{2}(\dot{\varphi}_{2} - \dot{\varphi}_{1}) - d_{1}\dot{\varphi}_{1} + (\frac{1}{2}m_{1} + m_{2} + m_{3})\ell_{1}\cos(\varphi_{1})\ddot{x} + (\frac{1}{2}m_{1} + m_{2} + m_{3})\ell_{1}g\sin(\varphi_{1}) - \frac{1}{2}m_{2}\ell_{1}\ell_{2}(\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})\ddot{\varphi}_{2} + \sin(\varphi_{1} - \varphi_{2})\dot{\varphi}_{2}^{2}) \right)$$

$$(1.12)$$

$$\ddot{\varphi}_{2} = \frac{1}{J_{2}^{S} + \frac{1}{4}m_{2}\ell_{2}^{2}} \left(-d_{2}(\dot{\varphi}_{2} - \dot{\varphi}_{1}) + \frac{1}{2}m_{2}\ell_{2}\cos(\varphi_{2})\ddot{x} + \frac{1}{2}m_{2}\ell_{2}g\sin(\varphi_{2}) + \frac{1}{2}m_{2}\ell_{1}\ell_{2}(\sin(\varphi_{1} - \varphi_{2})\dot{\varphi}_{1}^{2} - \cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})\ddot{\varphi}_{1}) \right)$$

$$(1.13)$$

In den Gleichungen (1.12) und (1.13) ist zu sehen, dass Winkelbeschleunigungen jeweils noch voneinander abhängen. In der Bewegungsgleichung für den inneren Pendelstab $\ddot{\varphi}_1$ taucht die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_2$ auf und umgekehrt. Das Ergebnis der einen Gleichung wird im selben Zeitschritt für die Auswertung der anderen Winkelbeschleunigung benötigt. Um dieses

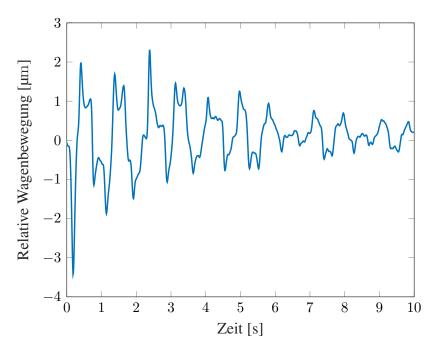


Bild 1.2: Relative Wagenposition beim Ausschwingvorgang des Doppelpendels

Problem zu umgehen, werden die Gleichungen entkoppelt. Die Gleichungen der Form

$$\ddot{\varphi}_1 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2), \tag{1.14}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = f(\ddot{x}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \tag{1.15}$$

werden für die Ermittlung der Pendelwinkelbeschleunigungen verwendet. Eine vollständige Darstellung von (1.14) und (1.15) ist in Anhang A.1 vorzufinden. An dieser Stelle wird auf die in der Zustandsregelung und -beobachtung verwendeten Systemparameter verwiesen, die Tabelle 1.1 zu entnehmen sind.

Tabelle 1.1: Gemessene und geschätzte Werte der Systemparameter

Variable	Wert	Beschreibung
$\overline{l_1}$	$0,194{\rm m}$	Länge des inneren Pendelstabs
l_2	$0.1855\mathrm{m}$	Länge des äußeren Pendelstabs
m_1	$0{,}0313\mathrm{kg}$	Masse des inneren Pendelstabs
m_2	$0,0313\mathrm{kg}$	Masse des äußeren Pendelstabs
m_3	$0,0308\mathrm{kg}$	Masse des Gelenks
d_1, d_2	$0.001 \mathrm{kg} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$	Dämpfungskonstante der Pendelstäbe
g	$9.81 \mathrm{m/s^2}$	Erdbeschleunigung

Mithilfe der hergeleiteten Bewegungsgleichungen wird im folgenden Kapitel zunächst die Zustandsregelung des Doppelpendels in der oberen, instabilen Gleichgewichtslage untersucht.

2 Zustandsregelung des inversen Doppelpendels

In diesem Kapitel wird zuerst die Zustandsraumdarstellung des inversen Doppelpendels hergeleitet. Im Anschluss wird die grundlegende Systemeigenschaft der Steuerbarkeit erläutert und für das vorliegende System nachgewiesen. Zuletzt wird das Doppelpendel mittels einer optimalen Zustandsregelung in der oberen, instabilen Gleichgewichtslage stabilisiert. Die Simulationsergebnisse werden dargestellt und diskutiert.

2.1 Zustandsraumdarstellung

Die Herleitung der Zustandsraumdarstellung ist Gegenstand dieses Abschnitts. Die Vorteile einer Analyse eines Systems im Zustandsraum ist die gute Interpretierbarkeit der untersuchten physikalischen Zustände und eine einfache rechnergestützte Simulation [Lun10]. Der Signalflussplan des Zustandsraums mit den wesentlichen Größen kann Bild 2.1 entnommen werden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Zeitabängigkeit der Zustände und der Eingangsgröße wieder dargestellt wird. Das Ziel ist es, die in Kapitel 1 hergeleiteten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen durch eine Linearisierung im Zustandsraum eines Mehrgrößensystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \text{ mit } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.2}$$

mit einer Eingangsgröße und mehreren Ausgängen darzustellen. Die hier dargestellte Zustandsraumdarstellung entspricht nicht der allgemeinen Form, sondern ist bereits an das untersuchte

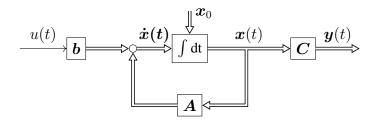


Bild 2.1: Signalflussplan des Zustandsraums ohne Durchgangsanteil

inverse Doppelpendel mit verfahrbarem Wagen angepasst. Da das System nicht sprungfähig ist, wird der Durchgangsanteil D=0 in den obigen Gleichungen nicht aufgeführt. Im vorliegenden gelten für die einzelnen Variablen die Bezeichnungen und Dimensionen:

Bezeichnung	Variable	Dimension
Zustandsvektor	$\boldsymbol{x}(t)$	$(n \times 1)$
Anfangszustand	$oldsymbol{x}_0$	$(n \times 1)$
Eingangsgröße	u(t)	(1×1)
Ausgangsvektor	$oldsymbol{y}(t)$	$(p \times 1)$
Systemmatrix	\boldsymbol{A}	$(n \times n)$
Steuervektor	\boldsymbol{b}	$(n \times 1)$
Beobachtungsmatrix	$oldsymbol{C}$	$(p \times n)$

Für das Aufstellen des Systems ist zunächst eine geeignete Wahl des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$ notwendig. Nach [Lun14] repräsentieren Zustände die physikalischen Energiespeicher eines Systems. In Anlehnung an den Lagrange-Formalismus aus Kapitel 1, welche den Energieerhalt des inversen Doppelpendels beschreibt, stellen die Position sowie Geschwindigkeit des Wagens und analog der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit der beiden Pendelstäbe Energiespeicher dar. Demzufolge sind 6 Zustände relevant und ein geeigneter Zustandsvektor lautet

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[x(t), \dot{x}(t), \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \varphi_2(t), \dot{\varphi}_2(t) \right]^{\mathrm{T}}.$$
 (2.3)

Die Zustandsgleichung (2.1) beinhaltet die Zustände \boldsymbol{x} und deren zeitlichen Ableitungen $\dot{\boldsymbol{x}}$. Ausgehend vom Startpunkt t=0 und den Startwerten $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ wird das dynamische, zeitinvariante Verhalten des Systems beschrieben und modelliert. Die obigen Gleichungen stellen ein bereits linearisiertes System dar. Für die Wahl der Ausgangsgrößen eignen sich die messbaren Größen des mechatronischen Systems. Diese sind die Wagenposition $\boldsymbol{x}(t)$ und der innere Pendelwinkel $\varphi_1(t)$, welche in (2.2) gebildet werden. Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen liegen in nichtlinearer Form vor. Mithilfe einer Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$T_{(1,(\boldsymbol{x}_{AP},u_0))}(\boldsymbol{x}(t),u(t)) = f(\boldsymbol{x}_{AP},u_0) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}(t)} \bigg|_{(\boldsymbol{x}_{AP},u_0)} (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{AP}) + \frac{\partial f}{\partial u(t)} \bigg|_{(\boldsymbol{x}_{AP},u_0)} (u(t) - u_0)$$

$$(2.4)$$

werden nichtlineare Funktionen durch Abbruch der Taylor-Reihe nach dem 1. Glied angenähert. Das Ergebnis ist eine lineare Approximation des nichtlinearen Verhaltens in der Nähe des Arbeitspunkts. Für die Regelung des inversen Doppelpendels um die obere, instabile

Gleichgewichtslage ergibt sich der Arbeitspunkt

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{AP}} = \left[x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0 \right]^{\mathrm{T}} \text{ und } u_0 = 0.$$

Damit werden (1.12) und (1.13) linearisiert und liefern

$$\ddot{\varphi}_{1}(t) = \frac{1}{J_{1,\text{ges}}} \left(d_{2}(\dot{\varphi}_{2}(t) - \dot{\varphi}_{1}(t)) - d_{1}\dot{\varphi}_{1}(t) + (\frac{1}{2}m_{1} + m_{2} + m_{3})l_{1}u(t) - \frac{1}{2}m_{2}l_{1}l_{2}\ddot{\varphi}_{2}(t) + (\frac{1}{2}m_{1} + m_{2} + m_{3})l_{1}g\varphi_{1}(t) \right), \tag{2.5}$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{J_{2,\text{ges}}} \left(d_2(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1(t) + \frac{1}{2} m_2 l_2 u(t) + \frac{1}{2} m_2 l_2 g \varphi_2(t) \right)$$
(2.6)

mit

$$J_{1,\text{ges}} = (\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3)l_1^2 \text{ und } J_{2,\text{ges}} = \frac{1}{3}m_2l_2^2.$$

Nach einer Entkopplung der Winkelbeschleunigungsterme in (2.5) und (2.6) ist das Aufstellen der Systemmatrix A, des Steuervektors b und der Beobachtungsmatrix C möglich. Es ergeben sich für die Matrizen folgende Formen

Die einzelnen Einträge der Matrizen lauten

$$a_{43} = \frac{3g(2m_1 + 4m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{44} = \frac{-3(4d_1l_2 + d_2(6l_1 + 4l_2))}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{45} = \frac{-9gm_2}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{46} = \frac{6d_2(3l_1 + 2l_2)}{l_1^2l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{63} = \frac{-9g(m_1 + 2m_2 + 2m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{64} = \frac{18d_1l_2m_2 + 6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3) + 3l_2m_2)}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{65} = \frac{6g(m_1 + 3m_2 + 3m_3)}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$a_{66} = \frac{-6d_2(l_1(2m_1 + 6m_2 + 6m_3 + 3l_2m_2))}{l_1l_2^2m_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_2)}.$$

und

$$b_4 = \frac{3(2m_1 + m_2 + 4m_3)}{l_1(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)},$$

$$b_6 = \frac{-3m_1}{l_2(4m_1 + 3m_2 + 12m_3)}.$$

Damit ist die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung vollständig gebildet. Der Zustandsraum ist der Ausgangspunkt für Untersuchungen weiterer Systemeigenschaften. Für die Zustandsregelung ist die Steuerbarkeit des Doppelpendels relevant, welche im folgenden Abschnitt untersucht wird.

2.2 Steuerbarkeit

Bevor die hier angewendete Optimalregelung erläutert wird, wird die grundsätzliche Eigenschaften der *vollständigen Steuerbarkeit* eingeführt. Die in diesem Abschnitt dargestellten Zusammenhänge sind angelehnt an [Lun10].

Es ist für eine beliebige Regelungsaufgabe zu klären, ob mithilfe der Eingangsgröße u(t) die Zustände von einem beliebigen Anfangszustand \boldsymbol{x}_0 in einen gewünschten Endzustand \boldsymbol{x}_e überführt werden können. Ist diese Bedingung erfüllt, nennt man das System *vollständig steuerbar*. Es gibt diverse Ansätze die Steuerbarkeit eines Systems zu überprüfen, wobei im Rahmen dieser Arbeit das Steuerbarkeitskriterium von *Kalman* herangezogen wird. Der Vorteil dieses Kriteriums ist der einfache Nachweis. Es genügt eine Untersuchung der $(n \times n)$ -Steuerbarkeitsmatrix bestehend aus der Systemmatrix und dem Steuervektor:

$$S_{\rm S} = (b \ Ab \ A^2b \ \dots \ A^{n-1}b).$$
 (2.7)

Für die *vollständige Steuerbarkeit* des Systems muss S_S den vollen Rang $\operatorname{rang}(S_S) = n = \dim(x)$ aufweisen. Eine quadratische Matrix besitzt genau dann vollen Rang, wenn die Determinante der Matrix ungleich null ist. Mit der in Abschnitt 2.1 aufgestellten Systemmatrix A und dem Steuervektor b wird die *vollständige Steuerbarkeit* nachgewiesen:

$$\det(\boldsymbol{S}_S) = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,70 & -12,22 & 553,55 & -4450,75 & 99131,28 \\ 5,70 & -12,22 & 553,55 & 4450,75 & 99131,28 & -1307247,75 \\ 0 & -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 \\ -0,86 & 37,45 & -1074,92 & 14488,56 & -293533,44 & 4293776,72 \end{array} \right| = -7.0768 \cdot 10^{14} \neq 0$$

Folglich lässt sich das Doppelpendel mithilfe der Eingangsgröße \ddot{x} aus einem beliebigen Anfangszustand x_0 in einen Endzustand x_0 überführen. Das bedeutet, dass die Zustandsregelung in die obere Gleichgewichtslage möglich ist.

2.3 Zustandsregelung mittels LQ-Regelung

In diesem Abschnitt wird die Zustandsregelung mithilfe der optimalen LQ-Regelung dargestellt. Im Gegensatz zur PID-Regelung wird bei der Zustandsregelung nicht die Ausgangsgröße zurückgeführt sondern die Systemzustände. Die allgemeine Zustandsrückführung bei einer skalaren Eingangsgröße lautet

$$u(t) = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) + Vw(t), \tag{2.8}$$

wobei $k^T \in \mathbb{R}^n$ der Rückführvektor ist und der zweite Summand für eine Führungsregelung benötigt wird. Es sind V ein Vorfilter und w(t) die Führungsgröße. Im Fall der Stabilisierung

des Doppelpendels ist keine Führungsgröße vorhanden, stattdessen wird das Pendel aus einem ausgelenkten Zustand x_0 in den Arbeitspunkt (2.3) geregelt. Hierfür genügt es für die Untersuchung der Regelkreisdynamik den ersten Summanden der Zustandsrückführung (2.8) zu betrachten. Mithilfe der Gleichung (2.8) lässt sich der Signalflussplan, wie in Bild 2.2 zu sehen, ableiten. Unter Berücksichtigung der Eingangsgröße von (2.8) ergibt sich das folgende System:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}})}_{\tilde{\boldsymbol{A}}} \boldsymbol{x}(t), \text{ mit } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_{0},$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t).$$
(2.9)

Hierbei ist \tilde{A} die Systemmatrix des geschlossenen Kreises mit Zustandsrückführung. Die Eigenwerte der Regelstrecke, welche über eine Untersuchung der Systemmatrix A berechnet werden können, beschreiben die Dynamik der Regelstrecke. Es ist direkt ersichtlich, dass der Rückführvektor $k^{\rm T}$ einen Einfluss auf die Eigenwerte des geschlossenen Kreises hat. Somit ist es möglich, die geschlossene Systemdynamik über die Einträge des Rückführvektors zu beeinflussen. Zwei häufig verwendete Methoden der Reglerauslegung stellen die *Polvorgabe* und die *Linear-Quadratische-Regelung* (LQ-Regelung) dar. Die hier dargestellten Aufführungen beziehen sich auf [Lun10].

Bei der ersten Methode wird die Systemdynamik des geschlossenen Kreises über die Wahl bestimmter Pole der Übertragungsfunktion, welche das Ein- und Ausgangsverhalten des Systems beschreibt, vorgegeben. Hierbei werden die Pole in der komplexen Ebene platziert, wobei diese bestimmte Eigenschaften erfüllen sollten. Unter anderem muss die Reglerdynamik höher als die der Strecke sein. Das bedeutet, dass die vorgegebenen Pole betragsmäßig fünf bis sechs Mal so weit links in der komplexen Ebene als die der Regelstrecke liegen sollten. Jedoch wird durch eine härtere Auslegung des Reglers unerwünschtes Messrauschen zusätzlich verstärkt.

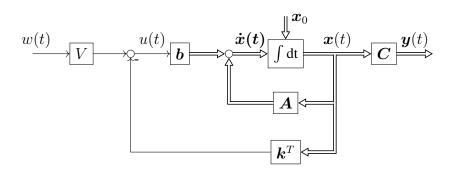


Bild 2.2: Signalflussplan der Zustandsrückführung

Bei der LQ-Regelung wird auf die Pole des geschlossenen Kreises auch Einfluss genommen, jedoch geschieht dies auf indirekte Art und Weise. Die LQ-Regelung gehört zur Gruppe der optimalen Regelungsverfahren. Über die Definition eines Gütefunktionals, welches die Stellund Regelgrößen bewertet, kann die Regelungsaufgabe in ein Optimierungsproblem überführt werden. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Stell- und Regelgrößen ist einen Vorteil der optimalen Regelung gegenüber der Polzuweisung. Besonders in Hinblick auf das reale Pendel mit geringem Verfahrweg ist die Beschränkung von $\pm x_{\rm max}$ hilfreich, vgl. [Beh16]. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit die LQ-Regelung für die Stabilisierung des Doppelpendels verwendet und im folgenden näher beleuchtet.

Das Gütefunktional eines zeitinvarianten Reglers mit unendlichem Zeithorizont lautet

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_{\mathrm{LQ}}\boldsymbol{x}(t) + u(t)\boldsymbol{R}_{\mathrm{LQ}}u(t)) \,\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

wobei $Q_{\rm LQ}$ und $R_{\rm LQ}$ Wichtungsmatrizen darstellen. Die Einstellregeln der Wichtungsmatrizen werden später in diesem Abschnitt behandelt. Es wird für die Lösung des Optimierungsproblems vorausgesetzt, dass beide Matrizen positiv definit sind, sodass das Paar $(A, \tilde{Q}_{\rm LQ})$ vollständig beobachtbar ist. Die Matrix $\tilde{Q}_{\rm LQ}$ ergibt sich aus der Zerlegung

$$oldsymbol{Q}_{ ext{LQ}} = ilde{oldsymbol{Q}}_{ ext{LQ}}^{ ext{T}} ilde{oldsymbol{Q}}_{ ext{LQ}}.$$

Damit die Gütefunktion einen endlichen Wert liefert, muss $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ gelten. Dies ist bei einer erfolgreichen Regelung in der oberen Gleichgewichtslage in Anlehnung an den Arbeitspunkt (2.3), der in den Nullpunkt des Systems führt, der Fall. Es lässt sich nun das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}} J$$

mittels der Zustandsrückführung

$$u(t) = -\boldsymbol{k}_{\text{opt}}^{\text{T}} \boldsymbol{x}(t)$$

mit

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{LQ}}^{-1} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \tag{2.11}$$

lösen. Hierbei ist P die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Ricattigleichung

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{R}_{\mathrm{LQ}}^{-1}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q}_{\mathrm{LQ}} = 0. \tag{2.12}$$

Eine genau Herleitung und Lösung der Matrix-Ricattigleichung wird an dieser Stelle nicht aufgeführt.

Nun wird die Reglerauslegung betrachtet, welche in erster Linie über die Wichtungsmatrizen $Q_{\rm LQ}$ und $R_{\rm LQ}$ bewerkstelligt wird. Eine Methode für die Wahl der Wichtungseinträge ist in [LL95] dargestellt. Anstatt die Einträge iterativ zu bestimmen, werden nur die Diagonaleinträge der Matrizen mit positiven Werten besetzt, wodurch die Bedingung der positiven Definitheit erfüllt ist. Die Diagonaleinträge werden in Abhängigkeit der realen, maximal zulässigen Zustands- bzw. Eingangswerte gewählt und lauten

$$q_{ii} = 1/x_{i,\text{max}}^2,$$
 $q_{ij} = 0, \text{ für } i \neq j,$ $r_{ii} = 1/u_{i,\text{max}}^2,$ $r_{ij} = 0, \text{ für } i \neq j.$ (2.13)

Somit ist das zu minimierende Gütefunktional (2.10) an die limitierenden Faktoren des untersuchten Systems geknüpft. In Anlehnung an das reale Doppelpendel ergeben sich die Wichtungseinträge, die in der Tabelle 2.1 zu sehen sind. Über die Wahl der Wichtungseinträge von $Q_{\rm LQ}$ und $R_{\rm LQ}$ lassen sich die Zustände und Stellgrößen bewerten.

Einerseits bedeuten hohe Einträge, dass die jeweiligen Zustände und Stellgrößen im Rahmen einer Minimierung von (2.10) stark bestraft werden. Eine starke Bestrafung impliziert, dass die jeweiligen Größen gering gehalten werden. In diesem Zusammenhang ist vor allem der geringe Verfahrweg des Doppelpendels zu nennen. Eine Überschreitung des Verfahrwegs soll in jedem Fall unterbunden werden, weshalb dieser Wichtungseintrag nach (2.13) im Vergleich zu den anderen Größen hoch ausfällt. Andererseits werden mit kleinen Wichtungseinträgen die Zustände und Stellgrößen weniger stark bestraft. Das heißt, es werden auch sehr hohe Werte für diese Größen akzeptiert. Hier stechen vor allem die Winkelgeschwindigkeiten der Pendelstäbe hervor. Mit einer geringen Bestrafung der Winkelgeschwindigkeiten werden schnelle Bewegungen des Doppelpendels akzeptiert, was hilfreich für die Stabilisierung des Doppelpendels ist.

Tabelle 2.1 : Einträge der Wichtungsmatrizen $Q_{\rm LO}$ und $R_{\rm LO}$ der Zustandsreg	gelung
---	--------

Variable	Wert & Einheit	Beschreibung	Wichtungseintrag
x_{max}	$0.2\mathrm{m}$	Verfahrweg in pos. und neg. Richtung	$25{\rm m}^{-2}$
$\dot{x}_{ m max}$	$5\mathrm{ms^{-1}}$	maximale Verfahrgeschwindigkeit	$0.04\mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}$
$\varphi_{1,\max}$	$20^{\circ} = 0.349 \mathrm{rad}$	Winkelabweichung vom Arbeitspunkt	$8,207 \mathrm{rad^{-2}}$
$\dot{arphi}_{1, ext{max}}$	$100\mathrm{rads^{-1}}$	maximale Winkelgeschwindigkeit	$1 \cdot 10^{-4} \mathrm{s}^2 \mathrm{rad}^{-2}$
$arphi_{2, ext{max}}$	$20^{\circ} = 0.349 \mathrm{rad}$	Winkelabweichung vom Arbeitspunkt	$8,207 \mathrm{rad^{-2}}$
$\dot{arphi}_{2, ext{max}}$	$100\mathrm{rads^{-1}}$	Maximale Winkelgeschwindigkeit	$1 \cdot 10^{-4} \mathrm{s}^2 \mathrm{rad}^{-2}$
$u_{\rm max}$	$20 \mathrm{m s^{-2}}$	Maximale Wagenbeschleunigung	$2.5 \cdot 10^{-3} \mathrm{s}^4 \mathrm{m}^{-2}$

Damit kann die Zustandsregelung mittels LQR vollzogen werden und das Minimierungsproblems (2.10) gelöst werden. Es ergibt sich der optimale Rückführvektor

$$\boldsymbol{k}_{\text{opt}}^{\text{T}} = \begin{bmatrix} 100 \, \text{s}^{-2} \\ 70,16 \, \text{s}^{-1} \\ 233,24 \, \text{m rad}^{-1} \, \text{s}^{-2} \\ -12,12 \, \text{m rad}^{-1} \, \text{s}^{-1} \\ -464,10 \, \text{m rad}^{-1} \, \text{s}^{-2} \\ -39,33 \, \text{m rad}^{-1} \, \text{s}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Für die Regelung in die obere, instabile Gleichgewichtslage wird der Anfangszustand

$$\boldsymbol{x}_0 = \left[x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \varphi_{1,0} = -4^{\circ}, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = -5^{\circ}, \dot{\varphi}_{2,0} = 0 \right]^{\mathrm{T}}$$

gewählt. Davon ausgehend wird das Doppelpendel sowie der Wagen in den Nullzustand geregelt. Das Simulationsergebnis ist in Bild 2.3 dargestellt. Es ist zu sehen, dass bei der relativ kleinen Anfangsauslenkung von 4 bis 5° bereits ein Großteil des maximalen Verfahrwegs von $20~\mathrm{cm}$ ausgenutzt wird. Eine weitere Entfernung der Startwinkel vom Arbeitspunkt führt zu Instabilität. Es ist anzumerken, dass die in der Simulation verwendeten Massenträgheiten der Pendel, welche einen erheblichen Einfluss auf die Stabilität des Systems haben, relativ gering sind. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die realen Pendelstäbe aus Aluminium, welches eine geringere Dichte als z.B. Eisen besitzt, bestehen. Werden Pendelstäbe aus Eisen mit den Massen $m_1 = m_2 = 0,1341~\mathrm{kg}$ verwendet, lässt sich das Doppelpendel mit einer Anfangsauslenkung von über 10° noch in die obere Gleichgewichtslage regeln. Das liegt an den damit verbundenen größeren Massenträgheitsmomenten der Pendel gemäß (1.4), die das System träger werden lassen.

Die hier durchgeführte Zustandsregelung setzt voraus, dass in jedem Zeitschritt die Zustände x bekannt sind. In der Simulation lassen sich die Zustände über die Bewegungsgleichungen ermitteln, welche bei der Zustandsrückführung verwendet werden. In Realität liegt jedoch nur die Messung für den inneren Pendelwinkel $\varphi_1(t)$ vor. Die Ermittlung des äußeren Pendelwinkels $\varphi_2(t)$ kann mithilfe einer nichtlinearen Zustandsbeobachtung bewerkstelligt werden. Die nichtlineare Zustandsbeobachtung ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

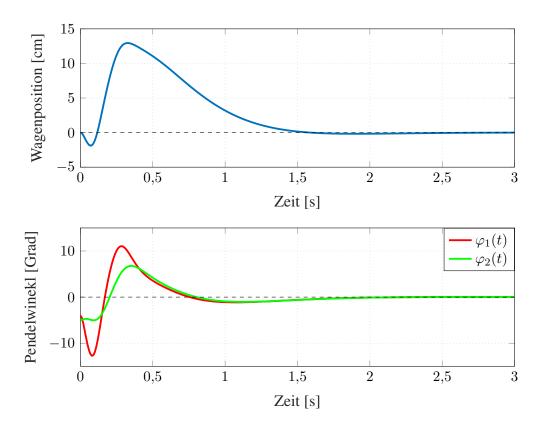


Bild 2.3: Zustandsregelung mittels LQR des Doppelpendels

3 Nichtlineare Zustandsbeobachtung

In diesem Kapitel wird zunächst die lineare und nichtlineare Beobachtbarkeit des inversen Doppelpendels untersucht. Als nächstes wird das für die Zustandsbeobachtung verwendete EKF vorgestellt. Im Anschluss werden die Simulationsergebnisse der Zustandsbeobachtung des Doppelpendels dargestellt und diskutiert.

Während des Betriebs des realen Doppelpendels ist der zweite Pendelwinkel $\varphi_2(t)$ aufgrund fehlender Sensorik nicht messbar. Trotzdem ist es mithilfe von Beobachtern möglich, Zustände über die Systemgleichungen zu rekonstruieren. Der schematische Aufbau einer Zustandsbeobachtung ist in Bild 3.1 dargestellt. Geschätzte Größen sind mit einem Dach über der Variable versehen.

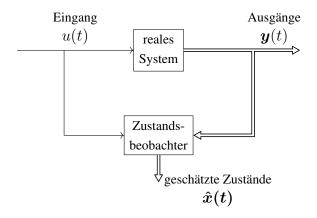


Bild 3.1: Signalflussplan der allgemeinen Zustandsbeobachtung

3.1 Lineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels

Bevor die Beobachtung des äußeren Pendelwinkels simuliert wird, wird die Systemeigenschaft der Beobachtbarkeit eingeführt und untersucht. An dieser Stelle wird die lineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels in dem Arbeitspunkt (2.3) nachgewiesen.

Kann ein Anfangszustand x_0 aus dem bekannten Verlauf der Eingangsgröße u(t) und der Ausgangsgröße y(t) in einem endlichen Zeitintervall $0 \le t \le t_e$ rekonstruiert werden, so

heißt das System *vollständig beobachtbar*. Aufgrund des einfachen Nachweises wird das Beobachtbarkeitskriterium nach *Kalman* herangezogen. Die $(p \cdot n \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$S_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{2} \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$(3.1)$$

muss den vollen Rang $n=\dim(\boldsymbol{x})$ besitzen. Da es sich bei $\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}}$ um eine nicht quadratische Matrix handelt wird hier anstelle der Determinante der Rang der Matrix ermittelt. Mit der in Abschnitt 2.1 ermittelten Systemmatrix \boldsymbol{A} und der Beobachtungsmatrix \boldsymbol{C} überprüft ergibt sich: $\mathrm{rang}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{B}})=\dim(\boldsymbol{x})=6$, womit die *vollständige Beobachtbarkeit* nachgewiesen ist. Das bedeutet, dass in dem linearisierten Zustandsraum eine Rekonstruktion des äußeren Pendelwinkels $\varphi_2(t)$ möglich ist.

3.2 Nichtlineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels

Mit dem im vorigen Abschnitt angewandten Kriterium nach *Kalman* ist es nur möglich, die Beobachtbarkeit linearer Systeme nachzuweisen. Da die Beobachtung des äußeren Pendelwinkels jedoch auf dem gesamten Arbeitsraum geschehen soll, wird die nichtlineare Beobachtbarkeit des Doppelpendels betrachtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die explizite Zeitabhängigkeit der Eingangs- und Ausgangsgrößen sowie der Zustände nur in den Definitionen der *globalen* und *schwachen Beobachtbarkeit* aufgeführt. Nach [Ada14] wird das allgemeine nichtlineare System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u), \text{ mit } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

$$y = g(\boldsymbol{x}, u) \tag{3.2}$$

betrachtet. Es soll darauf hingewiesen sein, dass eine skalare Ausgangsgröße in (3.2) verwendet wird. Dies hängt mit dem hier dargestellten Nachweis der Beobachtbarkeit für den äußeren Pendelwinkel φ_2 zusammen. Es werden zunächst die Begriffe der globalen und schwachen Beobachtbarkeit definiert.

Das System (3.2) sei für $x \in D_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C_u \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $y \in \mathbb{R}$. Das System heißt global beobachtbar, wenn alle Anfangsvektoren $x_0 \in D_x$ aus der Kenntnis von u(t) und y(t) in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ für alle $u \subseteq C_u$ eindeutig bestimmbar

sind. C_u ist dabei der Raum der (n-1) mal stetig differenzierbaren Funktion u(t) und D_x ist der Definitionsbereich der Zustände.

Für die schwache Beobachtbarkeit wird nicht der exakte Anfangsvektor x_0 rekonstruiert, sondern in einer Umgebung des Anfangszustands betrachtet.

Das System (3.2) sei für $x \in D_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in C_u \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $y \in \mathbb{R}$. Sind alle Anfangsvektoren $x_0 \in D_x$ in einer Umgebung

$$U = \{ \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n | \parallel \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p \parallel < \rho \}$$

eines Punktes $x_p \in D_x$ aus der Kenntnis von u(t) und y(t) in einem Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ für alle $u \in D_x$ eindeutig bestimmbar, so heißt das System schwach beobachtbar.

Für den rechnerischen Nachweis der nichtlinearen Beobachtbarkeit werden n-1 zeitliche Ableitungen der Art

$$\dot{y} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} = h_1(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}),
\ddot{y} = \frac{h_1}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial h_1}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h_1}{\partial \dot{u}} \ddot{u} = h_2(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, \ddot{u}),
\ddot{y} = \frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial h_2}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial \ddot{u}} \ddot{u} = h_3(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ddot{u}),
\vdots$$

$$\dot{y}^{n-1} = \frac{\partial h_{n-1}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h_{n-2}}{\partial u^{(i-1)}} u^{(i)} = h_{n-1}(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)})$$

benötigt. Es wird der nichtlineare Vektor

$$z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x, u) \\ h_1(x, u, \dot{u}) \\ h_2(x, u, \dot{u}, \ddot{u}) \\ \vdots \\ h_{n-1}(x, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)}) \end{bmatrix} = q(x, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)})$$
(3.3)

definiert. Mit (3.3) ist es nun möglich, Kritierien für die *globale* und *schwache Beobachtbarkeit* aufzustellen.

Das in (3.2) definierte System ist *global beobachtbar*, wenn die Abbildung

$$z = q(x, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)})$$

für alle $x \in D_x$ und $u \in C_u$ eindeutig nach x auflösbar ist, d.h. die Umkehrfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z}, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)})$$
 (3.4)

existiert und gebildet werden kann. Der Nachweis der *globalen Beobachtbarkeit* ist jedoch nur für einfache Systeme möglich, da die analytische Lösung der Umkehrfunktion schwierig zu bestimmen ist. Im Fall des inversen Doppelpendels ist das Auffinden von (3.4) aufgrund der Vielzahl von nichtlinearen Termen in (1.14) und (1.15) nicht zu bewerkstelligen. Aus diesem Grund wird hier auf den Nachweis der *schwachen Beobachtbarkeit* zurückgegriffen. Dazu wird zunächst die nichtlineare Beobachtbarkeitsmatrix

$$S_{\text{B,nl}}\left(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)})}{\partial \boldsymbol{x}}$$
(3.5)

definiert. Das in (3.2) definierte System ist schwach beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\operatorname{rang}\left(\boldsymbol{S}_{B,\operatorname{nl}}\left(\boldsymbol{x},u,\dot{u},...,u^{(n-1)}\right)\right) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \frac{\partial g(\boldsymbol{x},u)}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \frac{\partial h_{1}(\boldsymbol{x},u,\dot{u})}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \frac{\partial h_{2}(\boldsymbol{x},u,\dot{u},\ddot{u})}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_{n-1}(\boldsymbol{x},u,\dot{u},...,u^{(n-1)})}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = n$$
(3.6)

erfüllt ist. Mit (3.6) wird die Beobachtbarkeit an beliebigen Stützstellen des Arbeitsraums $(x, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)})$ überprüft.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Pendelwinkel φ_1 und φ_2 beobachtet. Die Wagenbeschleunigung \ddot{x} ist weiterhin die Eingangsgröße u des Systems. Der innere Pendelwinkel φ_1 stellt den Ausgang y in (3.2) dar. Die Wagenposition ist mittels des Inkrementalgebers des Servomotors bestimmbar und wird im Fall der Zustandsbeobachtung nicht rekonstruiert. Dementsprechend wird im folgenden der reduzierte Zustandsvektor

$$oldsymbol{x} = \left[arphi_1, \dot{arphi}_1, arphi_2, \dot{arphi}_2
ight]^{\mathrm{T}}$$

betrachtet. Das reduzierte Gesamtsystem ergibt sich zu

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 (\boldsymbol{x}, u) \\ \dot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 (\boldsymbol{x}, u) \end{bmatrix}$$

$$y = g(\boldsymbol{x}, u) = \varphi_1. \tag{3.7}$$

Als nächstes wird die Abbildung

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\boldsymbol{x}, u) = \varphi_1 \\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u} \dot{u}}_{=0} = h_1(\boldsymbol{x}) = \dot{\varphi}_1 \\ \frac{h_1}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial u} \dot{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial h_1}{\partial \dot{u}} \ddot{u}}_{=0} = h_2(\boldsymbol{x}, u) = \ddot{\varphi}_1(\boldsymbol{x}, u) \\ \frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \underbrace{\frac{\partial h_2}{\partial u} \dot{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial h_2}{\partial \dot{u}} \ddot{u}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial h_2}{\partial \ddot{u}} \ddot{u}}_{=0} = h_3(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}) \end{bmatrix}$$

$$= q(x, u, \dot{u}). \tag{3.8}$$

gemäß (3.3) gebildet. Hierbei entspricht $\ddot{\varphi}_1(\boldsymbol{x}, u)$ der entkoppelten Bewegungsgleichung (1.14). Auf eine genaue Darstellung von $h_3(\boldsymbol{x}, u, \dot{u})$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Mit der nichtlinearen Abbildung (3.8) wird die Beobachtbarkeitsmatrix mit der Form

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{O,nl}}\left(\boldsymbol{x},u,\dot{u}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{\varphi}_{1}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \varphi_{1}} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_{1}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \dot{\varphi}_{1}} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_{1}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \varphi_{2}} & \frac{\partial \ddot{\varphi}_{1}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \dot{\varphi}_{2}} \\ \frac{\partial h_{3}(\boldsymbol{x},u,\dot{u})}{\partial \varphi_{1}} & \frac{\partial h_{3}(\boldsymbol{x},u,\dot{u})}{\partial \dot{\varphi}_{1}} & \frac{\partial h_{3}(\boldsymbol{x},u,\dot{u})}{\partial \varphi_{2}} & \frac{\partial h_{3}(\boldsymbol{x},u,\dot{u})}{\partial \dot{\varphi}_{2}} \end{bmatrix}$$

gebildet. Wie bereits erwähnt, lässt sich nun die nichtlineare Beobachtbarkeit an beliebigen Stellen des Arbeitsraums auswerten. Examplarisch wird für die Stützstelle

$$(\boldsymbol{x}, u, \dot{u}, ..., u^{(n-1)}) = \left[\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = \pi, \dot{\varphi}_2 = 0, u = 1 \,\mathrm{m\,s}^{-2}, \dot{u} = 0\right]$$

die Determinante der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\det \left(\mathbf{S}_{\text{O,nl}} \left(\mathbf{x}_{\text{S}}, 1 \,\text{m s}^{-2}, 0 \right) \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.86 & -0.73 & -1.67 & 0.37 \\ -64.12 & -2.30 & 39.11 & -6.29 \end{vmatrix} = -3.83 \neq 0$$

berechnet. Die Determinante ist ungleich null, wodurch die Bedingung (3.6) erfüllt ist. Die nichtlineare Beobachtbarkeit ist damit in der Stützstelle nachgewiesen. Da der Nachweis der *globalen Beobachtbarkeit* nicht möglich ist, wird angenommen, dass das Doppelpendel für beide Pendelwinkel und -winkelgeschwindigkeiten im gesamten Arbeitsraum beobachtbar ist. Im Folgenden wird das in dieser Arbeit verwendete EKF vorgestellt.

3.3 Das Erweiterte Kalmanfilter

In diesem Abschnitt werden zuerst die Grundlagen und dann die Arbeitsweise des EKF erläutert. Das EKF ermöglicht die Beobachtung nichtlinearer Systeme mithilfe einer Approximation zeitdiskreter Differenzengleichungen.

3.3.1 Voraussetzungen des EKF

Das zeitdiskrete, nichtlineare System besitzt die Zustandsdifferenzengleichung

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, u_k, \boldsymbol{w}_k) \tag{3.9}$$

und die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k). \tag{3.10}$$

Neben dem Zustandsvektor und der Eingangsgröße hängt das Filter zusätzlich von zwei weiteren, zufällig verteilten Variablen ab. Es sind w_k das Prozessrauschen und v_k das Messrauschen des Systems. Unter realen Umständen ist es nicht möglich, Zustände exakt zu bestimmen. Gründe dafür können ungenau identifizierter Systemparameter des mathematischen Modells oder Sensorrauschen der Messeinrichtungen sein. Das EKF berücksichtigt stochastische Störgrößen, wobei diese die bestimmte Eigenschaften erfüllen müssen, vgl. [TO15]. Das Prozess-und Messrauschen sind:

• gegenseitig unkorreliert:

$$E\left\{\boldsymbol{w}_{k}\boldsymbol{v}_{k}^{\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{0}$$

• mittelwertfrei:

$$E\left\{\boldsymbol{w}_k\right\} = \mathbf{0}$$
$$E\left\{\boldsymbol{v}_k\right\} = \mathbf{0}$$

• weiß und normalverteilt.

Desweiteren sind die Kovarianzmatrizen des Prozess- und Messrauschens positiv semidefinit:

$$E\left\{ oldsymbol{w}_{k}^{\mathrm{T}}
ight\} = oldsymbol{Q}_{\mathrm{EKF}}$$
 $E\left\{ oldsymbol{v}_{k}^{\mathrm{T}}
ight\} = oldsymbol{R}_{\mathrm{EKF}}.$

Sind die genannten Bedingungen erfüllt, wird die Schätzfehlerkovarianz zwischen dem realen und geschätzten Zustand

$$P_k = E\left\{ (\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k) \right\}, \tag{3.11}$$

welche im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, bei Anwendung des EKF minimiert. Dadurch wird der Zustand \hat{x}_k im Zeitschritt k im Sinne einer Minimierung der Fehlerkovarianz optimal geschätzt.

3.3.2 Algorithmus des EKF

Der EKF-Algorithmus basiert auf zwei sich wiederholenden Schritten: einer *a priori* Zustandsprädiktion und einer *a posteriori* Zustandskorrektur. Später in diesem Abschnitt werden die Schritte im Detail erklärt. Zunächst werden (3.9) und (3.10) verwendet, um die Zustände und die Messung ohne das Rauschen zu approximieren, vgl. [GW06]:

$$\hat{x}_{k+1}^{-} = f(\hat{x}_k, u_k, 0) \tag{3.12}$$

und

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k}^{-} = \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{-}, \mathbf{0}). \tag{3.13}$$

Dieser Schritt ist notwendig, da in Realität das genaue Prozess- und Modellrauschen nicht ermittelbar ist. Die Gleichungen (3.12) und (3.13) bilden die Grundlage für die linearisierte Zustandsschätzung

$$\boldsymbol{x}_{k+1} \approx \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k \right) + \boldsymbol{W} \boldsymbol{w}_k, \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} \approx \hat{\boldsymbol{y}}_{k}^{-} + C(\boldsymbol{x}_{k} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{-}) + V\boldsymbol{v}_{k}, \tag{3.15}$$

wobei folgende Notation gilt:

- ullet $oldsymbol{x}_{k+1}$ und $oldsymbol{y}_{k+1}$ sind die realen Zuständs- und Ausgangsvektoren im Zeitschritt k+1
- ullet $\hat{m{x}}_k^-$ und $\hat{m{y}}_k^-$ sind die a priori geschätzten Zuständs- und Messungsvektoren
- ullet $\hat{oldsymbol{x}}_k$ ist die *a posteriori* Zustandsschätzung
- ullet A ist die Jacobi-Matrix von f in Bezug zu x_k mit

$$oldsymbol{A}_k = rac{\partial oldsymbol{f}}{\partial oldsymbol{x}_k}igg|_{(\hat{oldsymbol{x}}_{oldsymbol{k}}, u_k, oldsymbol{0})}$$

ullet C ist die Jacobi-Matrix von $oldsymbol{g}$ in Bezug zu $oldsymbol{x}_k$ mit

$$oldsymbol{C}_k = rac{\partial oldsymbol{g}}{\partial oldsymbol{x}_k}igg|_{(ilde{oldsymbol{x}}_{oldsymbol{k}},oldsymbol{0})}$$

ullet $oldsymbol{W}$ ist die Jacobi-Matrix von $oldsymbol{f}$ in Bezug zu $oldsymbol{w}_k$ mit

$$oldsymbol{W}_k = rac{\partial oldsymbol{f}}{\partial oldsymbol{w}_k}igg|_{(oldsymbol{\hat{x}_k}, u_k, oldsymbol{0})}$$

ullet $oldsymbol{V}$ ist die Jacobi-Matrix von $oldsymbol{g}$ in Bezug zu $oldsymbol{w}_k$ mit

$$oldsymbol{V}_k = rac{\partial oldsymbol{g}}{\partial oldsymbol{w}_k}igg|_{(oldsymbol{ ilde{x}_k,0})}$$

Die Matrizen A_k und C_k stellen die lineare Approximation des Systems im Arbeitspunkt dar. C_k und V_k repräsentieren das Prozess- und Messrauschen, wobei für die Matrizen die in Abschnitt 3.3.1 aufgeführten Bedingungen gelten. Das besondere dieser Jacobi-Matrizen gegenüber linearer Beobachter ist, dass sie in jedem Zeitschritt in Abhängigkeit des vorliegenden Zustands neu berechnet werden und so nichtlineare Systeme beobachtet werden können. Mithilfe der angegeben Matrizen und Vektoren können nun die eingangs erwähnten Schritte der Prädiktion und Korrektur formuliert werden.

Im Prädiktionsschritt berechnet man die Zustände

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}, u_k, 0)$$

und die Fehlerkovarianzmatrix

$$oldsymbol{P}_{k+1}^{\scriptscriptstyle -} = oldsymbol{A}_k oldsymbol{P}_k oldsymbol{A}_k^{\scriptscriptstyle \mathrm{T}} + oldsymbol{W}_k oldsymbol{Q}_{\mathrm{EKF}} oldsymbol{W}_k^{\scriptscriptstyle \mathrm{T}}$$

für den Zeitschritt k+1 mit den im vorigen Zeitschritt ermittelten Zustandsvektor \hat{x}_k und der Fehlerkovarianzmatrix P_k . Für die Initialisierung des Algorithmus ist es deswegen notwendig, einen initialen Schätzvektor \hat{x}_0 und eine Fehlerkovarianzmatrix P_0 vorzugeben.

Nun erfolgt die **Korrektur** im aktualisierten Schritt k unter Verwendung der Messung y_k und der a priori Prädiktion \hat{x}_k^- . Zuerst wird die Kalmanverstärkung

$$oldsymbol{K}_k = oldsymbol{P}_k^{ ext{-}}oldsymbol{C}_k^{ ext{T}} \left(oldsymbol{C}_koldsymbol{P}_k^{ ext{-}}oldsymbol{C}_k^{ ext{T}} + oldsymbol{V}_koldsymbol{R}_{ ext{EKF}}oldsymbol{V}_k^{ ext{T}}
ight)^{-1}$$

ermittelt. Als nächstes erfolgt die a posteriori Zustandsschätzung

$$oldsymbol{\hat{x}}_k = oldsymbol{\hat{x}}_k^- + oldsymbol{K}_k \left(oldsymbol{y}_k - oldsymbol{g}(oldsymbol{\hat{x}}_k^-, oldsymbol{0})
ight) = oldsymbol{\hat{x}}_k^- - oldsymbol{K}_k (oldsymbol{y}_k - oldsymbol{\hat{y}}_k^-)$$

und die Aktualisierung der Schätzfehlerkovarianzmatrix

$$P_k = (E - K_k C_k) P_k^-$$

Der gesamte Ablauf des Algorithmus kann Bild 3.2 entnommen werden. Die Jacobi-Matrizen des Prozess- und Messrauschens W_k und V_k sind in den einzelnen Zeitschritten nicht bekannt, weshalb die Annahme $V_k = W_k = E$ getroffen wird. Folglich wird die Zustandsschätzung des EKF maßgeblich durch die Kovarianzmatrizen $Q_{\rm EKF}$ und $R_{\rm EKF}$ und die Initialisierung mit x_0 und P_0 beeinflusst. Der Umgang mit diesen Einstellfaktoren ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

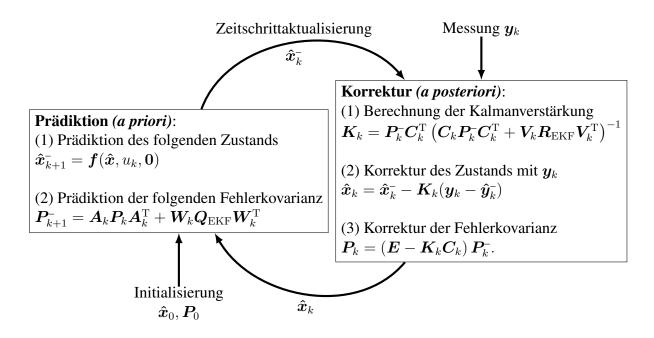


Bild 3.2: Schematischer Ablauf des EKF Algorithmus

3.3.3 Einstellregeln des EKF

Bevor die Zustandsbeobachtung in der Simulation durchgeführt wird, soll an dieser Stelle auf die Einstellregeln des EKF eingegangen werden. Obwohl in Realität das Prozess- und Messrauschen vom jeweiligen Zustand abhängt, werden sie in der Praxis oft als konstant angenommen. Dies hat den Vorteil, dass die Voraussetzungen aus Abschnitt 3.3.1 leicht erfüllt werden können. Für das Einschwingverhalten und die Dynamik des Filters ist vor allem das Verhältnis des Prozessrauschens $Q_{\rm EKF}$ und des Messrauschens $R_{\rm EKF}$ zueinander ausschlaggebend. Für hohe Einträge in $Q_{\rm EKF}$ wird eine hohe Prozessgüte unterstellt. Das heißt, das Vertrauen in das aufgestellte mathematische Modell ist hoch. Das EKF vertraut dem Prozess und wird diesem eher folgen. Ein geringes $Q_{\rm EKF}$ hingegen impliziert, dass die Modellgüte gering ist. Möglicherweise spielen falsch identifizierte Systemparameter eine Rolle für ein ungenaues Modell.

Für das Messrauschen folgern wir analog, dass bei einer genauen Messung $R_{\rm EKF}$ gering eingestellt werden sollte, da der Messung hohes Vertrauen geschenkt wird. Das Filter folgt der Messung verstärkt. Insbesondere ist über eine Grenzwertbetrachtung der Kalmanverstärkung mit einer "perfekten" Messung $R_{\rm EKF} \to 0$

$$\lim_{\boldsymbol{R}_{\text{EKF}}\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{K}_{k} = \lim_{\boldsymbol{R}_{\text{EKF}}\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} \boldsymbol{C}_{k}^{\text{T}} \left(\boldsymbol{C}_{k} \boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} \boldsymbol{C}_{k}^{\text{T}} + \boldsymbol{V}_{k} \boldsymbol{R}_{\text{EKF}} \boldsymbol{V}_{k}^{\text{T}} \right)^{-1}$$

$$= \boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} \boldsymbol{C}_{k}^{\text{T}} \left(\boldsymbol{C}_{k} \boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} \boldsymbol{C}_{k}^{\text{T}} \right)^{-1} = \boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} \underbrace{\boldsymbol{C}_{k}^{\text{T}} \boldsymbol{C}_{k}^{\text{-T}}}_{\boldsymbol{E}} (\boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}})^{-1} \boldsymbol{C}^{-1}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}} (\boldsymbol{P}_{k}^{\text{-}})^{-1}}_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1},$$

wodurch für die a posteriori Zustandsschätzung folgt

$$oldsymbol{\hat{x}}_k = oldsymbol{\hat{x}}_k^- + oldsymbol{C}_k^{-1}(oldsymbol{y}_k - oldsymbol{C}oldsymbol{\hat{x}}_k^-) = oldsymbol{C}_k^{-1}oldsymbol{y}_k$$

ersichtlich, dass die Bildung der Zustandsschätzung alleinig über das zugrunde liegende Modell erfolgt. Andererseits impliziert ein hohes $R_{\rm EKF}$, dass der Messung kein großes Vertrauen geschenkt wird.

Insgesamt lässt sich sagen, dass das Verhältnis des Prozess- und Messrauschens für die Dynamik des Filters ausschlaggebend sind. Ähnlich wie für die Wichtungsmatrizen der LQ-Regelung im Abschnitt 2.3 werden nur die Diagonaleinträge der Kovarianzmatrizen des Prozess- und Messrauschens mit positiven Einträgen besetzt, um positive Definitheit zu garantieren. Das Ziel der Beobachtung ist es, den äußeren Pendelwinkel φ_2 möglichst gut zu schätzen. Dementsprechend macht es Sinn, ein Gütemaß an den geschätzten zweiten Pendelwinkel $\hat{\varphi}_2$ zu knüpfen. In der Simulation liegt der anhand der Bewegungsgleichungen exakt berechnete äußere Pendelwinkel

als Referenz vor. Also ist es möglich, die Schätzung auf den tatsächlichen Winkel zu beziehen und die Abweichung auszurechnen. Ein Mittel für die Berechnung des Fehlers zwischen dem geschätzten und realen Winkelverlauf ist die Summe der Fehlerquadrate. Demzufolge wird Fehler

$$E_{\text{EKF}} = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{(\varphi_{2,i} - \hat{\varphi}_{2,i})^2},$$
(3.16)

definiert, wobei N der Anzahl der Zeitschritte entspricht. Der Winkel φ_2 ist die simulierte Referenz und $\hat{\varphi}_2$ der beobachtete Zustand. Da nur das Verhältnis von $Q_{\rm EKF}$ und $R_{\rm EKF}$ eine Rolle spielt, wird das Messrauschen auf einen konstanten Wert gesetzt. Die Ermittlung von $Q_{\rm EKF}$ erfolgt, indem der Fehler (3.16) als Gütemaß beim Iterieren der einzelnen Diagonaleinträge von $Q_{\rm EKF}$ verwendet wird. In dem Algorithmus 1 ist die vereinfachte Ermittlung der optimalen Gewichtungen des Prozessrauschens dargestellt.

Algorithmus 1 Ermittlung der optimalen Q_{EKF} -Einträge

```
(1) Setze E_{\text{EKF,opt}} = \infty
(2) Setze \mathbf{R}_{\text{EKF}} = const
for (q_{11} = q_{\min} \text{ to } q_{\max}) do
     for (q_{22} = q_{\min} \text{ to } q_{\max}) do
           for (q_{33} = q_{\min} \text{ to } q_{\max}) do
                 for (q_{44} = q_{\min} \text{ to } q_{\max}) do
                       (3) Ermittle \hat{\varphi}_2 in Abhängigkeit von \mathbf{Q}_{\text{EKF}} = \text{diag} \Big( [q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{44}] \Big)
                       (4) Berechne den Fehler E_{
m EKF}
                       if (E_{\rm EKF} < E_{\rm EKF,opt}) then
                             (5) Aktualisiere E_{\text{EKF,opt}} = E_{\text{EKF}}
                             (6) Aktualisiere Q_{\rm EKF,opt} = Q_{\rm EKF}
                       end if
                 end for
           end for
     end for
end for
```

Hierbei repräsentieren $E_{\rm EKF,opt}$ den Fehler mit der minimalen Abweichung zwischen dem geschätzten und dem tatsächlichen Winkelverlauf gemäß (3.16) und $Q_{\rm EKF,opt}$ ist die dazugehörige Matrix des Prozessrauschens. Die Variablen $q_{\rm min}$ und $q_{\rm max}$ stellen die Grenzen des Suchbereichs für die Einträge von $Q_{\rm EKF}$ dar, wobei die Werte zwischen dem kleinsten und größten Eintrag mit logarithmischen Abstand bestimmt werden. Des Weiteren spielt die initiale Fehlerkovarianz eine wesentliche Rolle für das Verhalten des EKF. Es wird als erstes die Annahme getroffen, dass zwischen dem vorliegenden Zustand x_k und der *a priori* Schätzung x_k^- eine sehr geringe

Abweichung vorliegt. Damit lässt sich über die Grenzwertbetrachtung zeigen:

$$\lim_{\boldsymbol{P}_{k}^{-} \rightarrow \boldsymbol{0}} \boldsymbol{K}_{k} = \lim_{\boldsymbol{P}_{k}^{-} \rightarrow \boldsymbol{0}} \boldsymbol{P}_{k}^{-} \boldsymbol{C}_{k}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{C}_{k} \boldsymbol{P}_{k}^{-} \boldsymbol{C}_{k}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{V}_{k} \boldsymbol{R}_{\mathrm{EKF}} \boldsymbol{V}_{k}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} = \boldsymbol{0}$$

und folglich

$$\hat{oldsymbol{x}}_k = \hat{oldsymbol{x}}_k^-$$

Dies bedeutet, dass der Fehler zwischen dem Modell und dem realen System keine Rolle bei der Schätzung spielt. Hingegen reagiert das Filter stärker auf den genannten Fehler, wenn der Schätzfehler ungleich null angenommen wird. Da die Fehlerkovarianzmatrix nach [GW06] schlussendlich für fast alle P_0 konvergiert, genügt es bei der Initialisierung $P_0 \neq 0$ anzunehmen. Aus diesem Grund wird $P_0 = E_n$ gewählt.

Mit den hier aufgeführten Einstellregeln folgt die simulierte Zustandsbeobachtung des inversen Doppelpendels.

3.3.4 Simuationsergebnisse der Zustandsbeobachtung

In der Simulation des Doppelpendels mit Zustandsbeobachtung durch das EKF werden zwei Fälle betrachtet. Zum einen werden die Zustände bei einem Ausschwingversuch des inversen Doppelpendels beobachtet. Zum anderen wird das Doppelpendel aus der unteren, stabilen Ruhelage mit einer harmonischen Wagenbeschleunigung angeregt. In Bild 3.3 ist der Signalflussplan der Zustandsbeobachtung zu sehen. Wie im vorigen Abschnitt erwähnt sind die Eingänge des EKF die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ und der Systemausgang $\varphi_1(t)$. Um eine Aussagekraft über das Verhalten des Filters unter realen Bedingungen zu erhalten, wird der Winkel $\varphi_1(t)$ mit einem normalverteilten Rauschsignal beaufschlagt.

Es wird zunächst der Ausschwingvorgang des Doppelpendels untersucht. Bei der Beobachtung des Auschwingverhaltens wird der Anfangszustand des Pendels

$$\boldsymbol{x}_0 = \left[\varphi_{1,0} = 1^{\circ}, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = 0, \dot{\varphi}_{2,0} = 0\right]^{\mathrm{T}}$$

in die Nähe der oberen, instabilen Gleichgewichtslage festgelegt. Das EKF wird mit einem abweichenden Anfangszustand

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \left[\hat{\varphi}_{1,0} = 50^{\circ}, \hat{\varphi}_{1,0} = 286^{\circ} \, s^{-1}, \hat{\varphi}_{2,0} = -50^{\circ}, \hat{\varphi}_{2,0} = 230^{\circ} \, s^{-1} \right]^{T}$$

initialisiert, um das Einschwingverhalten des Filters zu untersuchen. Beim Ausschwingen gilt für die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t) = 0$. Nach Anwendung des Algorithmus 1 ergibt sich für

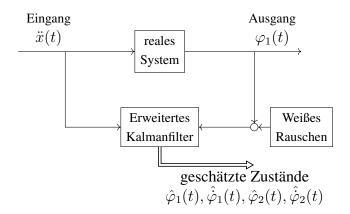


Bild 3.3: Signalflussplan der Zustandsbeobachtung in der Simulation

das Prozess- und Messrauschen:

$$oldsymbol{Q}_{\mathrm{EKF,opt}} = \mathrm{diag}\Big(egin{bmatrix} 0,0001 & 1 & 0,1 & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big)$$
 und $R_{\mathrm{EKF}} = 1.$

Das Ergebnis der Zustandsschätzung ist in Bild 3.4 zu sehen. Die Referenzgrößen sind mit einer stetigen Linie und die Schätzungen gestrichelt dargestellt. Wie erwartet, schwingen beide Pendel nach kurzer Zeit um die untere, stabile Gleichgewichtslage bei $\pm 180^\circ$, wie im oberen Graphen zu sehen. Innerhalb weniger Zeitschritte folgt die Schätzung $\hat{\varphi}_1(t)$ der rauschbehafteten Messung $\varphi_1(t)$ trotz der abweichenden Initialisierung des EKF. Die Schätzung des äußeren Pendelwinkels $\hat{\varphi}_2(t)$ benötigt etwa $0.8\,\mathrm{s}$, bevor sie dem Referenzverlauf folgt. Aufgrund des Wertebereichs von mehreren Hundert Grad ist die Abweichung des Referenzund des Schätzungsverlaufs nach Ablauf des Einschwingvorgangs nicht erkennbar, kann jedoch rechnerisch bestimmt werden. Um die falsche Initialisierung auszuschließen, wird die maximale Differenz der Verläufe nach einer Sekunde bestimmt. Die maximale Winkelabweichung für den inneren Pendelwinkel beträgt $\Delta\varphi_{1,\mathrm{max}}=0.24^\circ$ und für den äußeren Pendelwinkel $\Delta\varphi_{2,\mathrm{max}}=1.87^\circ$.

Die Im unteren Graphen sind Ergebnisse der Zustandsschätzung für die Winkelgeschwindigkeiten illustriert. Die Winkelgeschwindigkeit des inneren Pendels $\dot{\varphi}_1(t)$ resultiert aus der ungefilterten Bildung des Vorwärtsdifferenzenquotienten der rauschbehafteten Messung $\varphi_1(t)$. Hierbei wird das Rauschen Ableiten des Winkelverlaufs zusätzlich verstärkt. Die Schätzung $\dot{\varphi}_1(t)$ rekonstruiert den Winkelgeschwindigkeitsverlauf, wobei sie im das Zentrum des verrauschten Signals $\dot{\varphi}_1(t)$ verläuft. Die Winkelgeschwindigkeitsschätzung des äußeren Pendels $\dot{\varphi}_2(t)$ benötigt nach der unkorrekten Initialisierung etwa $0.8\,\mathrm{s}$, bis sie dem tatsächlichen Verlauf folgt.

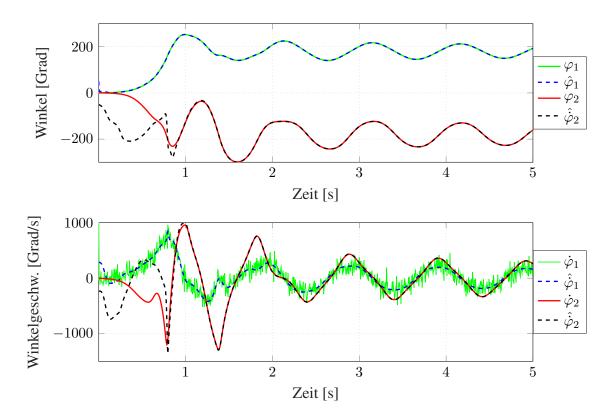


Bild 3.4: Zustandsschätzung des EKF beim Ausschwingen des Doppelpendels: Pendelwinkel (oben), Pendelwinkelgeschwindigkeiten (unten)

Im zweiten Fall der Zustandsbeobachtung wird neben der Doppelpendelbewegung nun auch die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ als Eingangsgröße des EKF betrachtet. Für die Wagenbeschleunigung wird eine harmonische Anregung

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_{\text{max}} \sin(\omega t + \Delta \varphi) \tag{3.17}$$

gewählt. Es sind \ddot{x}_{max} ist die Amplitude der Anregung, ω die Kreisfrequenz und $\Delta \varphi$ der Phasenversatz. Die hier betrachtete Wagenanregung weist die Parameter

$$\ddot{x}_{\rm max} = 5\,{\rm m\,s^{-2}},\, \omega = 2\pi\,{\rm rad\,s^{-1}} \;{\rm und}\; \Delta\varphi = 0.$$

Der reale Anfangszustand in der unteren, stabilen Gleichgewichtslage lautet

$$\boldsymbol{x}_0 = \left[\varphi_{1,0} = 180^{\circ}, \dot{\varphi}_{1,0} = 0, \varphi_{2,0} = 180^{\circ}, \dot{\varphi_{2,0}} = 0 \right]^{\mathrm{T}}.$$

Für das Prozess- und Messrauschen werden die gleichen Einstellungen getroffen wie beim

Ausschwingen verwendet. Das EKF wird mit dem Zustandsvektor

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \left[\hat{\varphi}_{1,0} = 0^{\circ}, \hat{\varphi}_{1,0} = 573^{\circ} \,\mathrm{s}^{-1}, \hat{\varphi}_{2,0} = 300^{\circ}, \hat{\varphi}_{2,0} = -573^{\circ} \,\mathrm{s}^{-1} \right]^{\mathrm{T}}.$$

abweichend vom realen Zustand initialisiert. Die Zustandsbeobachtung ist in Bild 3.5 zu sehen. Aufgrund der hier gewählten Wagenanregung schwingen die Pendel nicht um die stabile, untere Ruhelage, sondern rotieren mehrere Male um die Gelenkachsen. Das ist aus dem Wertebereich des Winkelverlaufs ersichtlich, der Werte von über 360°. Die Schätzungen des EKF ist in der Lage, dem Referenzverlauf der Zustände zu folgen. Hinsichtlich der Einschwingzeit ist verhält

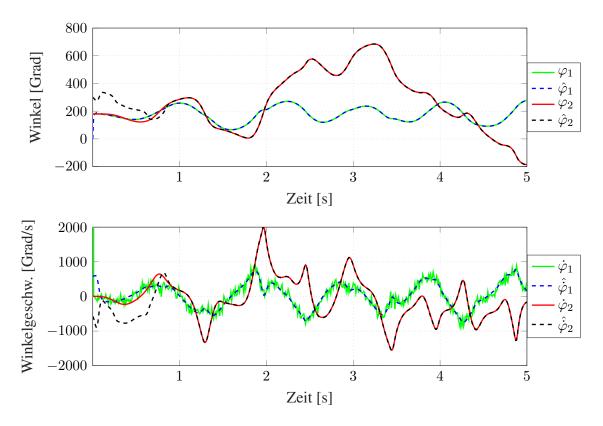


Bild 3.5: Zustandsschätzung des EKF bei der harmonischen Wagenanregung: Pendelwinkel (oben), Pendelwinkelgeschwindigkeiten (unten)

sich das Filter ähnlich wie im Fall des Ausschwingens. Um dem Referenzverlauf der Messung $\varphi_1(t)$ und dem sich daraus ergebenden Vorwärtsdifferenzenquotienten $\dot{\varphi}_1(t)$ zu folgen, braucht das EKF weniger als $0.2\,\mathrm{s}$. Bis die Rekonstruktion der Verläufe von $\hat{\varphi}_2(t)$ und $\hat{\varphi}_2(t)$ den Referenzen folgt, vergehen etwa $0.9\,\mathrm{s}$. Die maximalen Abweichungen der Winkelverläufe nach Ablauf von einer Sekunde betragen im Fall der harmonischen Wagenanregung $\Delta\varphi_{1,\mathrm{max}}=0.27^\circ$ und $\Delta\varphi_{2,\mathrm{max}}=2.7^\circ$. Die Abweichung bei der Rekonstruktion des zweiten Pendelwinkels $\varphi_2(t)$

ist im Fall der harmonischen Wagenanregung größer als beim Ausschwingen. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass sich das äußere Pendel im zweiten Fall wesentlich schneller bewegt als im ersten Fall. Die Maximalgeschwindigkeit im ersten Fall beträgt $1000^{\circ} \mathrm{s}^{-1}$ und im zweiten Fall ist sie etwa doppelt so groß. Das bedeutet, dass bei schnelleren Bewegungen die Winkelschätzung tendenziell ungenauer wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Zustandsschätzung am inversen Doppelpendel in der Simulation erfolgreich ist. Sowohl beim Ausschwingen des Doppelpendels, wobei die Wagenbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ auf Null gesetzt wird, und bei der harmonischen Wagenanregung gelingt eine zufriedenstellende Rekonstruktion der Zustände. Die Zustandsschätzung des EKF wird im nächsten Kapitel am realen Versuchsstand validiert.

4 Bildbasierte Beobachtervalidierung

In diesem Kapitel wird die Validierung der Zustandsbeobachtung am realen Doppelpendel behandelt. Hierfür wird im ersten Abschnitt die bildbasierte Winkelbestimmung der Pendel erläutert.

4.1 Bildbasierte Winkelmessung

Der äußere Pendelwinkel $\varphi_2(t)$ muss am realen Doppelpendel gemessen werden, um die Zustandsbeobachtung des EKF bewerten zu können. Wird das mechatronische System für die Winkelmessung mit zusätzlicher Sensorik ausgestattet, hat dies zur Folge, dass die Massenträgheiten des Pendels verändert werden. Folglich wäre die Modellierung aus Kapitel 1 nicht mehr korrekt und müsste angepasst werden. Geschieht die Winkelmessung hingegen berührungslos, kann das bereits modellierte System weiterhin verwendet werden. Eine Möglichkeit der berührungslosen Winkelbestimmung der Pendel kann mithilfe von Kameraaufnahmen bewerkstelligt werden. Die Bilder einer Kamera liefern eine zweidimensionale Aufnahme einer dreidimensionalen Umgebung. Es wird die Annahme getroffen, dass die zweidimensionale Abbildung des Doppelpendels ausreichend ist, um die Pendelwinkel hinreichend genau zu bestimmen, wenn die Kamera zentral vor dem Doppelpendel ausgerichtet wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine GoPro HERO4 RGB-Kamera verwendet. Dieses Kamerasystem ist in der Lage, Videoaufnahmen mit einer Bildfrequenz von 240 fps bei einer Auflösung von 720×1280 Pixeln zu erzeugen. Im Vergleich dazu wird die Wagenposition x(t) und der innere Pendelwinkel $\varphi_1(t)$ mit einer etwa vier Mal so großen Frequenz von 1000 Hz abgetastet. Für die Winkelbestimmung des Doppelpendels ist vor allem eine hohe Bildfrequenz von Vorteil, damit auch schnelle Pendelbewegungen ausreichend oft pro Sekunde erfasst werden.

Die Winkelbestimmung der Pendelstäbe wird mithilfe einer Farbsegmentierung der Bilddaten unter Verwendung von Markern, die an den Stäben befestigt werden, bewerkstelligt. Die Marker weisen eine so geringe Masse auf, dass der Einfluss auf die Massenträgheiten der Pendelstäbe vernachlässigt wird. Es werden drei Farb-Marker benötigt, um beide Pendelwinkel eindeutig bestimmen zu können. Ein Marker ist jeweils am Rotationsgelenk der Pendelstäbe angebracht und der letzte Marker ist am äußeren Ende des zweiten Pendels befestigt. Eine Skizze dieses Aufbaus ist in Bild 4.1 zu sehen. Für die Beobachtervalidierung ist prinzipiell nur die bildbasierte Bestimmung des äußeren Winkels $\varphi_2(t)$ notwendig. Trotzdem werden beide

Pendelwinkel bildbasiert ermittelt, wobei der Winkel $\varphi_1(t)$ benötigt wird, um die Winkelbestimmung mittels Kameraaufnahmen im Abgleich mit der Resolverwinkelmessung zu validieren. Es wird zunächst die Winkelberechnung anhand von fertig verarbeiteten Bilddaten behandelt. Der Grundgedanke der Winkelbestimmung liegt darin, die Schwerpunkte der Farbmarker in jedem Einzelbild im Koordinatensystem KS_B zu bestimmen. Ein Schwerpunkt setzt sich aus den Schwerpunktkoordinten eines in den Bilddaten erkannten, zusammenhängenden Objekts zusammen. Die detaillierte Berechnung der Schwerpunkte wird später in diesem Abschnitt behandelt. Mithilfe der Schwerpunkte

$$oldsymbol{c}_{ ext{r}} = \left[u_{ ext{r}}, v_{ ext{r}}
ight]^{ ext{T}}$$
 , $oldsymbol{c}_{ ext{g}} = \left[u_{ ext{g}}, v_{ ext{g}}
ight]^{ ext{T}}$ und $oldsymbol{c}_{ ext{b}} = \left[u_{ ext{b}}, v_{ ext{b}}
ight]^{ ext{T}}$

lassen sich die Winkel jeweils vom inneren Stabende zum äußeren bestimmen. Da die Winkelbestimmung anhand von Einzelbildern der Videoaufnahmen betrachtet wird, wird die Zeitabhängigkeit der Winkelgrößen im folgenden nicht aufgeführt. Es werden die Schritte für die Berechnung des Winkels $\varphi_{1,K}$ dargestellt. Die Winkel der Pendelstäbe, die mithilfe von Kameraaufnahmen ermittelt werden erhalten das zusätzliche Subkript K. Die Pixel der Bilddaten werden im Bildkoordinatensystem KS_B mit den Hauptachsen u und v dargestellt. Die Winkel α_1 und α_2 werden zusätzlich als Hilfsgrößen für die Winkelbestimmung eingeführt. Es wird die Differenz der Schwerpunktkoordinaten

$$\Delta u_1 = u_b - u_g \text{ und } \Delta v_1 = v_b - v_g \tag{4.1}$$

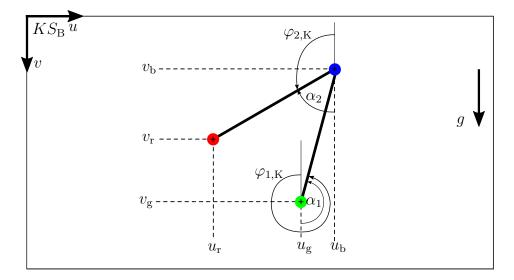


Bild 4.1: Skizze eines Einzelbilds des Doppelpendels mit Farbmarkern

vom grünen zum blauen Farbmarker gebildet. Es wird die Arcustangens-Funktion $\arctan 2(x,y)$ mit dem Wertebereich $[-\pi,\pi]$ verwendet, um den Winkel α_1 zu bestimmen:

$$\alpha_1 = \arctan(\Delta v_1, \Delta u_1). \tag{4.2}$$

Im Anschluss kann durch die Additionen des Winkelversatzes der gesuchte Pendelwinkel

$$\varphi_{1,K} = \alpha_1 + \pi \tag{4.3}$$

berechnet werden. Der äußere Pendelwinkel φ_2 wird analog mit den Schwerpunkten c_b und c_r berechnet.

Für die Berechnung der Winkel anhand der Videoaufnahmen des Doppelpendels muss das Videorohmaterial verarbeitet werden. Das Ziel ist es, aus den Einzelbildern der Kameraaufnahmen drei Binärmasken zu erzeugen, in denen nur noch die Farbmarker abgebildet werden. Die RGB-Einzelbilder der Kamera werden mit einer mehrdimensionalen Matrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{(h \times b \times 3)}$ repräsentiert. Es sind h Anzahl der Pixel auf der v-Achse und b die Pixelanzahl auf der u-Achse. Mit der hier verwendeten Auflösung der $GoPro\ Hero\ 4$ ergibt sich h=720 und b=1280. Die Matrix \boldsymbol{B} besitzt drei Schichten $\boldsymbol{B}^{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{g}}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^{(h \times b)}$, welche den Farbkanälen rot, grün und blau zugeordnet sind. Die Einträge der Matrizen entsprechen den Intensitätswerten des Pixels an der jeweiligen Stelle im Bild. Die Pixel besitzen eine 8-bit Farbtiefe für jeden Farbkanal. Die Farbsegmentierung wird für den roten Farbkanal exemplarisch erläutert. Zunächst wird das Farbbild in ein Graustufenbild überführt, wobei für die Intensität jedes Pixel

$$G_{ij} = \frac{B_{ij}^{\text{r}}}{3} + \frac{B_{ij}^{\text{g}}}{3} + \frac{B_{ij}^{\text{b}}}{3}$$
 für $i = 1, ..., 720$ und $j = 1, ..., 1280$ (4.4)

gilt. Im Anschluss wird Differenz zwischen den Intensitäten des Farbkanals und des Graustufenbilds

$$\Delta \boldsymbol{B}_{ij}^{r} = \begin{cases} \boldsymbol{B}_{ij}^{r} - \boldsymbol{G}_{ij} & \text{für } \boldsymbol{B}_{ij}^{r} \geq \boldsymbol{G}_{ij} \text{ und } i = 1, ..., 720, j = 1, ..., 1280 \\ 0 & \text{für } \boldsymbol{B}_{ij}^{r} < \boldsymbol{G}_{ij} \text{ und } i = 1, ..., 720, j = 1, ..., 1280 \end{cases}$$

$$(4.5)$$

berechnet. Dies hat zur Folge, dass die Pixel des Farbkanals $\boldsymbol{B}^{\mathrm{r}}$ mit einer hohen Farbintensität in auch hohe Werte in $\Delta \boldsymbol{B}_{ij}^{\mathrm{r}}$ aufweisen. Der Vergleich zwischen einem unverarbeiteten RGB-Einzelbild und dem Ergebnis der Anwendung von (4.5) ist in Bild 4.2 zu sehen. Bei dem hier gezeigten Bild handelt es sich um eine typische Aufnahme des Doppelpendels, die bei der Winkelmessung entsteht. Der rote Farbmarker am Ende des äußeren Pendelstabs ist im rechten Bild als hellgrauer Punkt zu sehen. Der Rest des Bilds weist dunkelgraue Töne auf.

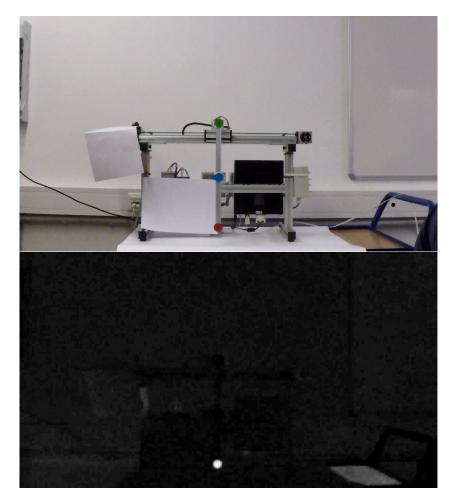


Bild 4.2: Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Graustufenbild nach Anwendung von (4.5) (unten)

Für die Aufnahmen des Doppelpendels wird versucht, Störeinflüsse bei der Farbsegmentierung zu vermeiden. Es tauchen neben den Markern keine farbigen Objekte auf. Das Doppelpendel wird vor eine weiße Wand gestellt. Außerdem werden farbige Kabel oder der braune Tisch mit weißem Papier verdeckt, um diese nicht fälschlicherweise als farbige Objekte zu ermitteln. Dies erleichtert die Identifikation der Marker bei der Farbsegmentierung.

Auf das Graustufenbild wird ein nichtlineares (3×3) -Medianfilter angewendet, um das Bild zu glätten und sogenannte Ausreieta erpixel zu eliminieren. In der definierten Umgebung des untersuchten Pixels werden die Grauwerte der Größe nach sortiert und der mittlere Intensitätswert für das Pixel eingesetzt. Damit wird sichergestellt, dass die Marker als zusammenhängendes Objekt erkannt werden und Pixel mit deutlich zu hohen oder geringen Intensitätswerten nicht berücksichtigt werden.

Im letzten Schritt der Farbsegmentierung wird das gefilterte Graustufenbild in eine binäre Maske

$$SW_{ij}^{r} = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta B_{ij}^{r} \geq I_{r} \text{ und } i = 1, ..., 720, j = 1, ..., 1280 \\ 0 & \text{für } \Delta B_{ij}^{r} < I_{r} \text{ und } i = 1, ..., 720, j = 1, ..., 1280 \end{cases}$$

$$(4.6)$$

überführt mit $SW_{ij}^{\rm r} \in \mathbb{R}^{(h \times b)}$. Es werden alle Einträge der Maske, die gleich oder größer als der Schwellwert $I_{\rm r}$ sind, auf 1 und die restlichen Werte auf 0 gesetzt. Der Schwellwert wird so eingestellt, dass neben dem farbigen Marker keine weiteren Objekte in der binären Maske auftauchen. Die Ermittlung der binären Masken $SW^{\rm g}$ und $SW^{\rm b}$ für den grünen und blauen Farbkanal werden analog unter Anwendung von (4.5), des (3×3) -Medianfilters und (4.6) mit den Matrizen $B^{\rm g}$, $B^{\rm b}$ bestimmt. Für die Berechnung des Objektschwerpunkts wird die Fläche des Objekts

$$A = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{b} SW_{ij}$$
 (4.7)

ermittelt. Trotz geschickter Wahl des Schwellwerts I bei der Bildung der binären Maske in (4.6) können Pixel, die nicht zum Farbmarker gehören, fälschlicherweise in dem Binärbild auftauchen. Aus diesem Grund werden alle Objekte, die eine Mindestfläche A_{\min} unterschreiten, nicht beachtet. In den Binärmasken taucht nun genau ein zusammenhängendes Objekt auf, welches dem farblichen Marker entspricht. Die Schwerpunktkoordinaten $u_{\rm S}$ und $v_{\rm S}$ im Bildkoordinatensystem $KS_{\rm B}$ eines detektierten Markers in der Binärmaske ergeben sich damit zu

$$u_{\rm S} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{h} \left(i \sum_{j=1}^{b} \mathbf{S} \mathbf{W}_{ij} \right), \tag{4.8}$$

$$v_{\rm S} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{b} \left(j \sum_{i=1}^{h} \mathbf{S} \mathbf{W}_{ij} \right). \tag{4.9}$$

Die Schwerpunkte $c_{\rm r}$, $c_{\rm g}$ und $c_{\rm b}$ der Marker werden mit (4.8) und (4.9) bestimmt. Damit sind alle notwendigen Schritte für die Winkelberechnung gemäß (4.3) getätigt. In Bild 4.3 ist ein Einzelbild des Doppelpendels vor und nach der Bildverarbeitung zu sehen. Es sind im unteren Bild die Schwerpunktkoordinaten der einzelnen Objekte und die berechneten Winkel $\varphi_{1,\rm K}$ und $\varphi_{2,\rm K}$ zu sehen.

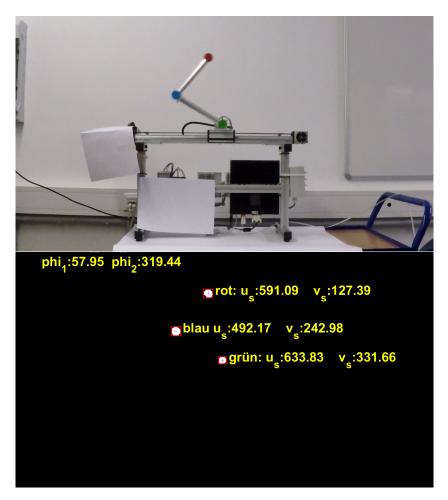


Bild 4.3: Einzelbild des Doppelpendels: RGB-Rohbild (oben), Binärmasken der drei Farbkanäle mit berechneten Winkeln $\varphi_{1,K}$ und $\varphi_{2,K}$ (unten)

4.2 Validierung der bildbasierten Winkelbestimmung

Bevor die Zustandsschätzung des EKF mit der bildbasierten Winkelbestimmung verglichen wird, wird der innere Pendelwinkel $\varphi_{1,\mathrm{K}}(t)$ anhand der Winkelmessung des Resolvers $\varphi_1(t)$ validiert. Die Signale $\varphi_1(t)$ und $\varphi_{1,\mathrm{K}}(t)$ weisen unterschiedliche Merkmale auf. Sie besitzen zum einen unterschiedliche Abtastraten, wie in Abschnitt 4.1 erläutert. Zum anderen weisen die Signale unterschiedliche Startzeitpunkte und Längen auf, da es nicht möglich ist, die Messungen der Wagenposition x(t) und des Winkels $\varphi_1(t)$ und die Kameraufnahmen synchron zu starten. Um die Winkelsignale miteinander zu vergleichen, wird das Kamerasignal $\varphi_{1,\mathrm{K}}(t)$ mit einer Bildfrequenz von 240 fps mit der Abtastrate des mechatronischen Systems von $1000~\mathrm{Hz}$ erneut abgetastet und interpoliert. Im Anschluss wird eine Kreuzkorrelation von $\varphi_1(t)$ und $\varphi_{1,\mathrm{K}}(t)$ vorgenommen, um den Zeitversatz beider Signale zu ermitteln. Im Anschluss

können beide Signale gleichgerichtet werden. Die einzelnen Schritte der erneuten Abtastung und Kreuzkorrelation werden an dieser Stelle nicht im Detail erläutert.

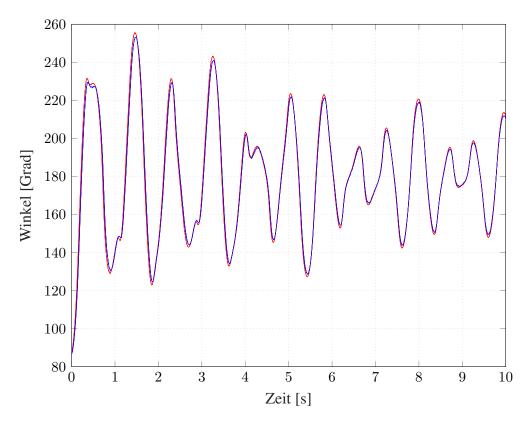


Bild 4.4: Gleichgerichtete Signale der Winkelmessung

Anhang

Anhang 41

A 1			
Δnna	naev	Δr7Δi	rhnie
AIIII	uigav	CIZCI	chnis

A.I NICHUHICAIC DEWESUHSSSICICHUHSCH UCS DODDCHDCHUCIS	A.1	Nichtlineare Bew	egungsgleichunger	n des Doppelpendels						,	4	2
--	-----	------------------	-------------------	---------------------	--	--	--	--	--	---	---	---

Anhang 42

A.1 Nichtlineare Bewegungsgleichungen des Doppelpendels

In diesem Abschnitt werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen vollständig dargestellt. Nach der Entkopplung von (1.14) und (1.15) ergibt sich:

$$\ddot{\varphi}_{1} = \left[12d_{2}l_{2}\dot{\varphi}_{2} - 12d_{2}l_{2}\dot{\varphi}_{1} - 12d_{1}l_{2}\dot{\varphi}_{1} - 18d_{2}l_{1}\dot{\varphi}_{1}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2}) \right. \\
+ 18d_{2}l_{1}\dot{\varphi}_{2}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2}) + 6l_{1}l_{2}m_{1}\ddot{x}\cos(\varphi_{1}) + 12l_{1}l_{2}m_{2}\ddot{x}\cos(\varphi_{1}) \\
+ 12l_{1}l_{2}m_{3}\ddot{x}\cos(\varphi_{1}) + 6gl_{1}l_{2}m_{1}\sin(\varphi_{1}) + 12gl_{1}l_{2}m_{2}\sin(\varphi_{1}) \\
+ 12gl_{1}l_{2}m_{3}\sin(\varphi_{1}) - 6l_{1}l_{2}^{2}m_{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}\sin(\varphi_{1} - \varphi_{2}) \\
- 9l_{1}l_{2}m_{2}\ddot{x}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})\cos(\varphi_{2}) - 9gl_{1}l_{2}m_{2}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})\sin(\varphi_{2}) \\
- 9l_{1}^{2}l_{2}m_{2}\dot{\varphi}_{1}^{2}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})\sin(\varphi_{1} - \varphi_{2}) \right] \\
\left. \left. \left[l_{1}^{2}l_{2}\left(-9m_{2}\cos(\varphi_{1} - \varphi_{2})^{2} + 4m_{1} + 12m_{2} + 12m_{3} \right) \right] \right. \tag{A.1}$$

$$\ddot{\varphi}_{2} = \left[12d_{2}l_{1}m_{1}\dot{\varphi}_{1} + 36d_{2}l_{1}m_{2}\dot{\varphi}_{1} - 12d_{2}l_{1}m_{1}\dot{\varphi}_{2} + 36d_{2}l_{1}m_{3}\dot{\varphi}_{1} - 36d_{2}l_{1}m_{2}\dot{\varphi}_{2} \right. \\
\left. - 36d_{2}l_{1}m_{3}\dot{\varphi}_{2} + 18d_{1}l_{2}m_{2}\dot{\varphi}_{1}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) + 18d_{2}l_{2}m_{2}\dot{\varphi}_{1}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) \\
\left. - 18d_{2}l_{2}m_{2}\dot{\varphi}_{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) + 18l_{1}l_{2}m_{2}^{2}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{2}\right) + 18gl_{1}l_{2}m_{2}^{2}\sin\left(\varphi_{2}\right) \\
+ 18l_{1}^{2}l_{2}m_{2}^{2}\dot{\varphi}_{1}^{2}\sin\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) + 6l_{1}l_{2}m_{1}m_{2}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{2}\right) + 18l_{1}l_{2}m_{2}m_{3}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{2}\right) \\
+ 6gl_{1}l_{2}m_{1}m_{2}\sin\left(\varphi_{2}\right) + 18gl_{1}l_{2}m_{2}m_{3}\sin\left(\varphi_{2}\right) + 6l_{1}^{2}l_{2}m_{1}m_{2}\dot{\varphi}_{1}^{2}\sin\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) \\
\left. - 18l_{1}l_{2}m_{2}^{2}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\cos\left(\varphi_{1}\right) - 18gl_{1}l_{2}m_{2}^{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) \\
+ 18l_{1}^{2}l_{2}m_{2}m_{3}\dot{\varphi}_{1}^{2}\sin\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) + 9l_{1}l_{2}^{2}m_{2}^{2}\dot{\varphi}_{2}^{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right) \\
\left. - 9l_{1}l_{2}m_{1}m_{2}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\cos\left(\varphi_{1}\right) - 18l_{1}l_{2}m_{2}m_{3}\ddot{x}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) \\
\left. - 9gl_{1}l_{2}m_{1}m_{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) - 18gl_{1}l_{2}m_{2}m_{3}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) \\
\left. - 9gl_{1}l_{2}m_{1}m_{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) - 18gl_{1}l_{2}m_{2}m_{3}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)\sin\left(\varphi_{1}\right) \\
\left. - \left[l_{1}^{2}l_{2}\left(-9m_{2}\cos\left(\varphi_{1} - \varphi_{2}\right)^{2} + 4m_{1} + 12m_{2} + 12m_{3} \right) \right] \right) \right\}$$

$$(A.2)$$

Literaturverzeichnis

- [Ada14] ADAMY, Jürgen: Nichtlineare Systeme und Regelungen. Springer-Verlag GmbH, 2014 http://www.ebook.de/de/product/22487513/juergen_adamy_nichtlineare_systeme_und_regelungen.html. ISBN 3642450121
- [Beh16] BEHM, Alexander: Aufbau, Inbetriebnahme und Regelung eines inversen Pendels zu Demonstrationszwecken in Forschung und Lehre, Leibniz Universität Hannover, Diplomarbeit, 2016
- [GW06] GREG WELCH, Gary B.: An Introduction to the Kalman Filter. In: *Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill* (2006)
- [LL95] Luo, Jia; Lan, C. E.: Determination of weighting matrices of a linear quadratic regulator. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18 (1995), nov, Nr. 6, S. 1462–1463. http://dx.doi.org/10.2514/3.21569. DOI 10.2514/3.21569
- [Lun10] LUNZE, Jan: Regelungstechnik 2. Springer Berlin Heidelberg, 2010. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-10198-4. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-10198-4
- [Lun14] LUNZE, Jan: Regelungstechnik 1. Springer Berlin Heidelberg, 2014. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-53909-1. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-53909-1
- [TO15] TOBIAS ORTMAIER, Steffen Bosselmann Lutz Rissing Mathias Rechel Daniel K. Christian Hansen H. Christian Hansen: Skript zur Vorlesung Mechatronische Systeme. Fakultät für Maschinenbau der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Institut für Mechatronische Systeme (imes), Institut für Mikroproduktionstechnik (IMPT), 2015