

# 1 Modellierung und Zustandsraumdarstellung des Doppelpendels

Die Grundlage für die Simulation des inversen Doppelpendels bilden die dynamischen Bewegungsgleichungen des Systems. In diesem Kapitel wird auf die Herleitung der Gleichungen eingegangen. In einem ersten Schritt werden die Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art hergeleitet. Im Anschluss wird aus den Bewegungsgleichungen die Zustandsraumdarstellung abgeleitet. Diese ist für die hier angewendeten Regelungskonzepte des Doppelpendels notwendig.

## 1.1 Dynamische Gleichungen

Der generelle Aufbau des inversen Doppelpendels kann Bild 1.1 entnommen werden. Das mechatronische System besteht aus einem Wagen und zwei miteinander gekoppelte Stäben. Der Wagen wird auf einer Linearführung bewegt und mit einem Motor angesteuert. Beide Pendelstäbe sind rotatorisch miteinander gelagert, sodass sie Bewegungen nur in der x-y-Ebene durchführen können. Für die Anwendung des Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\text{n.k.}} \quad (1.1)$$

zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen ist eine energetische Betrachtung des Systems nötig. Hierbei repräsentieren  $q_i$  die generalisierten Koordinaten,  $\dot{q}_i$  ihre zeitlichen Ableitungen und  $Q_i^{\text{n.k.}}$  eventuell auftretende nicht konservative Kräfte. Die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (1.2)$$

setzt sich aus der kinetischen Energie  $T$  des Systems und der potentiellen Energie  $U$  zusammen. Die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 J_i^S \varphi_i^2 \quad (1.3)$$

besteht aus der translatorischen Bewegungsenergie der  $n$  Schwerpunkte und der Rotationsenergie der Pendelstäbe. Die Trägheiten der Pendel werden über das Massenträgheitsmoment eines

dünnen Stabes mit

$$J_i^S = \frac{1}{12} m_i l_i^2$$

approximiert. Die potentielle Energie des Systems lässt sich im vorliegenden Fall auf das Höhenpotential

$$U = g \sum_{i=0}^n m_i y_i \quad (1.4)$$

beschränken. Das Nullniveau des Potentials wird auf die Höhe  $y_0$  des Wagens gelegt, sodass sich die potentielle Energie wie folgt ergibt:

$$U = \dots = g \left( \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3 \right) l_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} m_2 l_2 \cos(\varphi_2) \right). \quad (1.5)$$

Bei der Modellierung des Doppelpendels ist die Betrachtung von vier Schwerpunkten, die Bild 1.1 zu entnehmen sind, notwendig. Neben den Schwerpunkten des Wagens und der beiden Pendel, die über die Indizes 0, 1 und 2 verfügen, ist noch das Verbindungsgelenk der Stäbe zu beachten. Das Gelenk wird als Punktmasse behandelt mit dem Index 3 versehen. Damit werden die Position der Massen zu

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & y_0 &= 0, \\ x_1 &= x_0 - \frac{1}{2} l_1 \sin(\varphi_1), & y_1 &= \frac{1}{2} l_1 \cos(\varphi_1), \\ x_2 &= x_0 - l_1 \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2} l_2 \sin(\varphi_2), & y_2 &= l_1 \cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} l_2 \cos(\varphi_2), \\ x_3 &= x_0 - l_1 \sin(\varphi_1), & y_3 &= l_1 \cos(\varphi_1) \end{aligned}$$

bestimmt. Zur Ermittlung der Schwerpunktgeschwindigkeiten werden die zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= \dot{x}, & \dot{y}_0 &= 0, \\
\dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \frac{1}{2}l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_1 &= -\frac{1}{2}l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_0 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}l_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}l_2 \sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2, \\
\dot{x}_3 &= \dot{x}_0 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1, & \dot{y}_3 &= -l_1 \sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1
\end{aligned}$$

benötigt. Die Ermittlung der Gesamtgeschwindigkeit in der  $x$ - $y$ -Ebene unter Berücksichtigung von  $\dot{x}_0 = \dot{x}$  ist über eine Betragsbildung möglich und liefert

$$\begin{aligned}
v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}^2, \\
v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 - l_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}l_1^2\dot{\varphi}_1^2, \\
v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\
&= \dot{x}^2 + l_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{x}l_1 \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - l_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2, \\
v_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 = \dot{x}^2 - 2l_1 \cos(\varphi_1)\dot{x}\dot{\varphi}_1 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die kinetische Energie des Systems mit der Gleichung 1.3 zu

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(m_0v_0^2 + m_1v_1^2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + m_2v_2^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2 + m_3v_3^2) \\
&= \dots = \frac{1}{2}\left((m_0 + m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3\right)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \right. \\
&\quad \left. - (m_1 + 2m_2 + 2m_3)l_1\dot{x} \cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + m_2\left(\frac{1}{4}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 - l_2\dot{x} \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2\right) \right. \\
&\quad \left. + l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + J_1^S\dot{\varphi}_1^2 + J_2^S\dot{\varphi}_2^2\right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Mithilfe der Gleichungen 1.6 und 1.5 werden die Lagrange-Gleichungen 2. Art aufgestellt. In dem vorliegenden Fall werden drei generalisierte Koordinaten  $x$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  verwendet.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_a - F_r \tag{1.7}$$

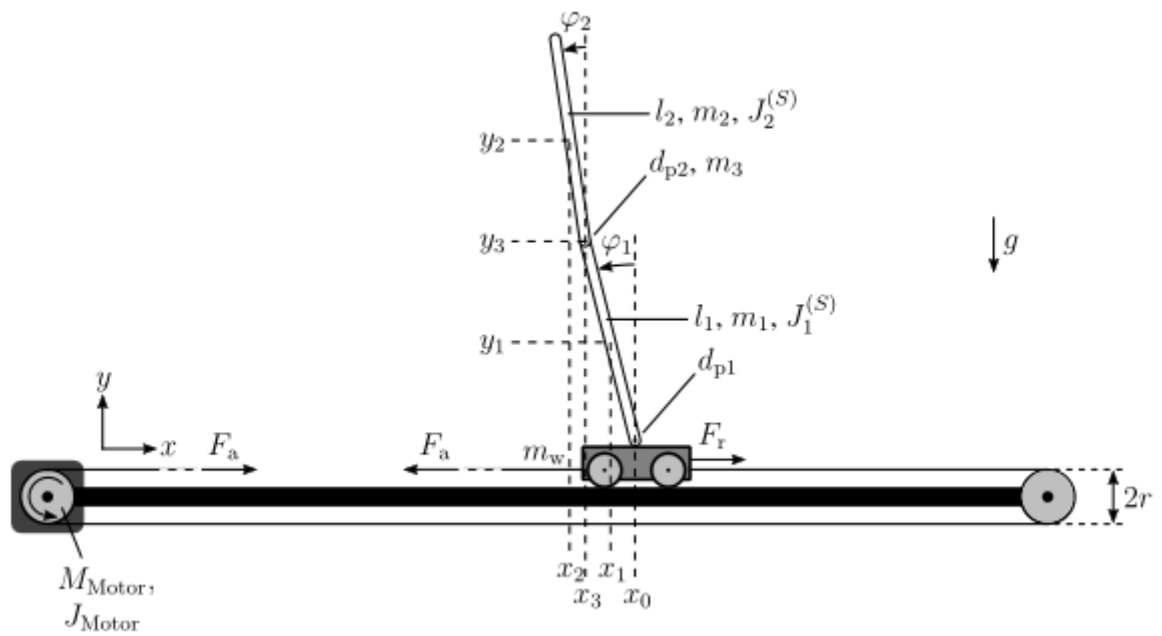
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \tag{1.9}$$

In [?] werden zwei Möglichkeiten Regelung und Steuerung des mechatronischen Systems aufgezeigt. Zum einen kann der Wagen momentengesteuert bewegt werden. Hierbei wird ein Wunschmodent  $M_{\text{soll}}$  an den Motor übertragen. Bei der Umsetzung des Moments hat die Reibung der Linearführung jedoch einen großen Einfluss auf die letztendliche Bewegung des Wagens. Zum anderen ist es möglich, eine Sollgeschwindigkeit  $v_{\text{soll}}$  vorzugeben. Dies hat den Vorteil, dass die Reibung des Systems vernachlässigt werden kann. Außerdem wird in [?] aufgezeigt, dass bei der Regelung des inversen Einfachpendels mit Drehzahlvorgabe bessere Regelungsergebnisse erzielt werden. Aus diesen Gründen wird im folgenden die Wagenbeschleunigung  $\ddot{x}$  als Eingangsgröße des Systems gewählt. Dadurch ist die Lösung von Gleichung 1.7 nicht mehr notwendig. Nach bilden der Ableitungen und Umformen von Gleichungen 1.8 und 1.9 lassen sich die Bewegungsgleichungen der beiden Pendelstäbe aufstellen:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{J_1^S + (\frac{1}{4}m_1 + m_2 + m_3)l_1^2} \left( d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - d_1\dot{\varphi}_1 + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)l_1 \cos(\varphi_1)\ddot{x} + (\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3)l_1 g \sin(\varphi_1) - \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2) \right) \quad (1.10)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{J_2^S + \frac{1}{4}m_2 l_2^2} \left( -d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2}m_2 l_2 \cos(\varphi_2)\ddot{x} + \frac{1}{2}m_2 l_2 g \sin(\varphi_2) + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 (\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1) \right) \quad (1.11)$$



**Bild 1.1:** Aufbau des inversen Doppelpendels EIGENE SKIZZE NOCH ZU ERSTELLEN