



Hochschule für Technik,  
Wirtschaft und Kultur Leipzig



Abschlussarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science (B.Sc.)

im Studiengang Informatik  
der Fakultät Informatik und Medien

# **Erfüllbarkeit und Optimierung von Pressenplanungsproblemen mit Constraint-Systemen**

Julian Bruder  
Leipzig, den 3. Oktober 2024

Erstgutachter: Prof. Dr. Johannes Waldmann  
Zweitgutachter: Dr. Sebastian Möbius

Die Pressenplanung von Holzbalken aus Bauteilen erfordert eine fein abgestimmte Konfiguration, um die Pressen optimal auszulasten und den Verschnitt der Balken zu minimieren. Dafür hat die Germanedge Solutions GmbH<sup>1</sup>, Industriepartner dieser Arbeit, bereits eine unternehmensinterne Heuristik, welche aufgrund ihrer Natur allerdings möglicherweise (optimale) Lösungen nicht berücksichtigt. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine prototypische Lösung mithilfe der Methoden der Constraint-Programmierung, speziell jener der Satisfiability Modulo Theories (SMT), erarbeitet, welche optimale Lösungen finden soll. Dazu werden die Constraints der Domäne zunächst mithilfe der Prädikatenlogik modelliert und anschließend in einer konkreten Repräsentation des Modells implementiert.

Dabei wird ein Programm entwickelt, welches aus den textuellen Eingaben der Pressen- und Bauteilspezifikationen ein Constraint-System erzeugt, das anschließend von einem externen Constraint-Solver gelöst wird. Das Programm wandelt die Lösung des Solvers in eine, zu den bereits existenten Schnittstellen passende, textuelle Ausgabe um. Weiter ist das Programm so strukturiert, dass verschiedene Logiken aus SMT zur Erzeugung des Constraint-Systems genutzt werden können, um die performanteste Kodierung des Problems in jenen Logiken einfach zu ermitteln. Dies wird durch Wahl der Programmiersprache Haskell und deren ausdrucksstarkes Typsystem ermöglicht. Als Grundlage zur Kodierung des Pressenplanungsproblems und Interaktion mit externen Solvern wird die Haskell-Bibliothek `Hasmtlib` [Bru24a] verwendet und an geeigneten Stellen erweitert.

Das Ziel für die prototypische Lösung des Problems der Pressenplanung ist die korrekte, optimale und bestenfalls schnelle (Wunsch Germanedge: unter zehn Minuten) Lösung bekannter Testfälle. Da es sich hier um eine prototypische Lösung handelt, werden einige Sonderfälle des Pressenplanungsproblems in dieser Arbeit nicht betrachtet. Am Ende wird die Performance der prototypischen Lösung mit jener der aktuell existenten heuristischen verglichen.

---

<sup>1</sup><https://www.germanedge.com/>, abgerufen am 21.08.2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Problemdomäne Pressenplanung</b>	<b>5</b>
2.1. Anforderungen . . . . .	5
2.2. Modellierung . . . . .	7
2.3. Optimierung . . . . .	10
<b>3. Satisfiability Modulo Theories</b>	<b>12</b>
3.1. Einführung in das Erfüllbarkeitsproblem SMT . . . . .	12
3.2. SMT-Kodierung von Anzahl-Constraints . . . . .	13
3.3. Optimierung von SMT-Problemen . . . . .	15
<b>4. Haskell und Hasmtlib</b>	<b>16</b>
4.1. Funktionale Programmierung mit Haskell . . . . .	16
4.2. Hasmtlib - Haskell-Bibliothek für SMTLib . . . . .	16
4.2.1. Ergänzung um Anzahl-Constraints . . . . .	19
4.2.2. Ergänzung um Incremental Refinement . . . . .	19
<b>5. Implementierung</b>	<b>20</b>
5.1. Datentypen und Unbekannte . . . . .	20
5.2. Vorverarbeitung . . . . .	23
5.3. Sorten-Polymorphie . . . . .	24
5.4. Kodierung der Constraints . . . . .	25
5.5. Parallelisierung und Optimierung . . . . .	26
5.6. Benutzerschnittstelle . . . . .	28
<b>6. Auswertung und Laufzeitmessung</b>	<b>30</b>
6.1. Vorbetrachtung . . . . .	30
6.2. Vergleich verschiedener Programm-Konfigurationen . . . . .	31
6.3. Vergleich mit Germanedge's Heuristik . . . . .	33
6.4. Diskussion . . . . .	33
<b>7. Zusammenfassung</b>	<b>34</b>
<b>Literatur</b>	<b>35</b>
<b>Appendix</b>	<b>40</b>
A. Erweiterungen von Hasmtlib . . . . .	40
B. Laufzeitmessungen . . . . .	41

# 1. Einleitung

Die Germanedge Solutions GmbH spezialisiert sich in der Digitalisierung der Produktion und unterstützt Unternehmen mit individuellen Softwarelösungen für die Industrie 4.0 [VAB18]. Darunter auch ein nicht genannter Kunde, welcher Germanedge mit der Optimierung der Planung von Holzpressen beauftragt hat. Dabei werden Holzbauteile zu Holzbalken verleimt und anschließend in Pressen gepresst. Die Art und Weise der Anordnung der Bauteile in den Pressen wird als Pressenplan bezeichnet. Abbildung 1.1 visualisiert einen solchen Pressenplan. Die Presse (grau) presst in Richtung der Pfeile nach unten. Die Balken (gelb) liegen horizontal und bestehen aus Bauteilen, welche durch die vertikalen (schwarzen) Linien getrennt sind. Der Rest jedes Balkens ist rot hervorgehoben.



Abbildung 1.1.: Darstellung eines Pressenplans

An einen Pressenplan werden verschiedene Anforderungen wie beispielsweise die Gleichheit der Längen aller Balken in einer Presse gestellt. Neben diesen Anforderungen sind auch einige Optimierungsziele für den Pressenplan von Bedeutung. Darunter zum Beispiel die Minimierung des Rests, der Balken auf die gleiche Länge auffüllt und somit zusätzliche Materialkosten bedeutet.

Germanedge konnte für dieses Problem bereits eine Lösung finden, diese ist allerdings unter Firmenverschluss. Es ist lediglich bekannt, dass jene einen heuristischen Ansatz wählt. Das ermöglicht zwar einerseits das schnelle Ermitteln von Lösungen nahe am Optimum, andererseits gehen dabei aber auch (optimale) Lösungen verloren.

Daher wird in dieser Arbeit ein neuer, vollständiger Ansatz zur Lösung des Problems gewählt. Dieser besteht in der Kodierung der Anforderungen an den Pressenplan als Constraints in einem Constraint-System. Ein Constraint ist hier eine prädikatenlogische Formel, welche unter einer erfüllenden Belegung den Wahrheitswert **Wahr** haben muss. Ein Constraint-System besteht aus der Konjunktion mehrerer Constraints.

In dieser Arbeit wird das Constraint-System für die Satisfiability Module Theories (kurz SMT) mithilfe des Sprachstandards SMTLib Version 2.6 [BFT17] kodiert. Zu typischen Anwendungsbereichen von SMT gehören neben der Programmverifikation [BT18] auch Ressourcenzuordnungsprobleme [Ans+11; LLC21]. Das Pressenplanungsproblem kann als Ressourcenzuordnungsproblem betrachtet werden, sodass sich die Frage stellt, wie es als SMT-Problem in SMTLib kodiert werden kann. Eine Beispieleingabe von Bauteilen könnte folgende sein:

Länge in mm	Höhe in mm	Anzahl
7000	400	1
13000	400	2
3000	400	3
6000	400	1
9000	400	1
7500	400	1
5000	400	1
5500	400	1
3500	400	1

Tabelle 1.1.: Beispieleingabe von Bauteilen, jede Zeile entpricht einer Bauteilspezifikation

Da das Formulieren der Constraints für einen Pressenplan mit gegebenen Bauteilen händisch in der Constraint-Sprache SMTLib sehr schwer- und fehleranfällig ist (siehe Listing 2), erzeugt ein Programm in einer Gastsprache das Constraint-System für die Constraint-Sprache. Für diese Arbeit wird als jene Gastsprache Haskell [Hud+07] gewählt. Mit der Haskell-Bibliothek `Hasmtlib` [Bru24a] lässt sich beispielhaft das bereits erwähnte Constraint gleicher Länge aller Balken in einer Presse folgend formulieren:

```

1 barLength :: [Bar (Expr RealSort)] -> Expr BoolSort
2 barLength = all
3     (\(b1,b2) -> (b1^.press === b2^.press) ==>
4     (b1^.length === b2^.length)
5     ) . binom

```

Listing 1: Haskell-Code für das Constraint:  $\forall \{b_1, b_2\} \in \binom{\text{Balken}}{2} : \text{presse}(b_1) = \text{presse}(b_2) \rightarrow \text{länge}(b_1) = \text{länge}(b_2)$

Die Bibliothek erzeugt dann das Constraint-System in der Constraint-Sprache SMTLib. Folgend ein Ausschnitt der erzeugten SMTLib-Kodierung für das Constraint aus Listing 1:

```

1 ...
2 (declare-fun var_69 () Real)
3 (declare-fun var_70 () Bool)
4 (declare-fun var_71 () Real)
5 ...
6 (assert (and (or var_70 (and (>= var_69 1.44) (<= var_69 2.3))) ...))
7 (assert (and (or var_70 (and (>= var_68 6.0) (<= var_68 24.15))) ...))
8 (assert (and (and (and (and (and (and (and (= var_28 (+ (+ ...))))))))))
9 ...

```

Listing 2: Ausschnitt der Kodierung eines Pressenplanungsproblems

Die Kodierung wird an einen SMT-Solver gegeben, welcher die Erfüllbarkeit des Problems bestimmt und für den Fall Erfüllbar eine erfüllende Belegung für die Variablen des Problems ermittelt. Zum Beispiel:

```

1 sat
2 (
3   ...
4   (define-fun var_69 () Real    (/ 287 125))
5   (define-fun var_70 () Bool    false)
6   (define-fun var_71 () Real    (/ 483 20))
7   ...
8 )

```

Listing 3: Ausschnitt des Solver-Outputs der Lösung eines Pressenplanungsproblems

Jene Belegung transformiert das Programm dann in das gewünschte Ausgabeformat:

Presse	Schicht	Position	Länge in mm	Höhe in mm
1	1	1	14000	400
1	1	2	7500	400
1	2	1	3000	400
1	2	2	6500	400
1	2	3	3000	400
...	...	...	...	...

Tabelle 1.2.: Beispielausgabe des Pressenplans, Visualisierung in Abbildung 1.1

Die Struktur dieser Arbeit ist folgende:

in Kapitel 2 wird das Problem der Pressenplanung erklärt, modelliert und nach für das Problem relevanten Zielfunktionen optimiert.

Folgend wird in Kapitel 3 gezeigt, wie Erfüllbarkeitsprobleme der Satisfiability Modulo Theories im Sprachstandard SMTLib Version 2.6 kodiert werden können.

In Kapitel 4 wird auf einige notwendige Grundlagen von Haskell und die Haskell-Bibliothek `Hasmtlib` eingegangen. Zusätzlich werden dort einige Erweiterungen von `Hasmtlib` diskutiert.

Danach wird die Kodierung des in Abschnitt 2.2 erstellten Modells des Pressenplanungsproblems mithilfe von `Hasmtlib` in Kapitel 5 erläutert.

Weiter wird die Performance der Kodierung in Kapitel 6 mithilfe von Laufzeitmessungen ausgewertet und mit der bereits existenten Heuristik verglichen.

Abschließend wird das Ergebnis dieser Arbeit in Kapitel 7 zusammengefasst.

## 2. Problemdomäne Pressenplanung

In diesem Kapitel wird das Problem der Pressenplanung zunächst erläutert, bevor die prädikatenlogische Modellierung des Problems in einem Modell erfolgt. Abschließend wird das Modell um Optimierungsziele erweitert.

### 2.1. Anforderungen

Im Pressenplanungsproblem sind drei Entitäten und deren Eigenschaften von elementarer Bedeutung: Pressen, Balken und Bauteile. Diese haben jeweils die Eigenschaften Höhe, Breite und Länge. Zusätzlich gibt es Holzlamellen, welche durch Zersägen eines sogenannten *Endlosbretts* entstehen. Dieses kann von einer Maschine *scheinbar* endlos ausgegeben werden. Höhe und Breite der Lamelle sind fest. Lamellen werden vertikal zu Bauteilen verleimt, sodass Bauteile immer die Form eines Quaders haben. Diese Verleimung ist der eigentliche Grund für die Notwendigkeit des Pressens. Folgend eine Abbildung verleimter Lamellen:



Abbildung 2.1.: Vertikale Verleimung von Lamellen

Bauteile wiederum formen Balken - ebenfalls Quader. Bauteile erhält man durch vertikales Zersägen eines Balkens. Folgend eine Abbildung eines Balkens aus drei Bauteilen mit Rest:



Abbildung 2.2.: Balken aus drei Bauteilen mit Rest, Sägelinien schwarz gepunktet

Balken werden vertikal in Pressen gestapelt und anschließend gepresst. Eine mit Balken befüllte Presse, bei der festgelegt ist, wie die Balken zu Bauteilen nach der Pressung zersägt werden müssen, nennt man auch Pressenplan. In einem Pressenplan ist jedem Bauteil höchstens eine Position in einer Schicht (von unten gezählter Balken) einer Presse zugeordnet. Folgend die Visualisierung eines Pressenplans für eine Presse:





Abbildung 2.3.: Pressenplan für eine Presse mit vier Balken, 13 Bauteilen und zwei Reststücken

Da Pressen im Allgemeinfall in einer Pressung nur Bauteile gleicher Breite pressen können, werden die Bauteile nach Breite vorsortiert. Damit reduziert man die Dimension des Problems vom 3-Dimensionalen auf das 2-Dimensionale, da nur noch Länge und Höhe aller Entitäten berücksichtigt werden muss.

Die Eingabe für das Pressenplanungsproblem ist eine Liste von Bauteilen mit Länge und Höhe sowie deren Anzahl. Diese Eingabe wird auch Auftrag genannt. Folgend ein beispielhafter Auftrag:

Länge in mm	Höhe in mm	Anzahl
7000	400	1
13000	400	2
3000	400	3
6000	400	1
9000	400	1
7500	400	1
5000	400	1
5500	400	1
3500	400	1

Tabelle 2.1.: Beispielauftrag, jede Zeile entspricht einer Bauteilspezifikation

Die Lösung des Pressenplanungsproblems (Ausgabe) ist ein Pressenplan. Für den Auftrag in Tabelle 2.1 könnte beispielsweise folgende Ausgabe den Pressenplan beschreiben:

Presse	Schicht	Position	Länge in mm	Höhe in mm
1	1	1	14000	400
1	1	2	7500	400
1	2	1	3000	400
1	2	2	6500	400
1	2	3	3000	400
...	...	...	...	...

Tabelle 2.2.: Beispielausgabe des Pressenplans zu Auftrag in Tabelle 2.1, Visualisierung in Abbildung 2.3

An einen Pressenplan bestehen folgende Anforderungen:

1. Pressen haben eine Minimal- und Maximalhöhe. Die Summe der Höhe aller Balken einer Presse muss in diesem Intervall liegen.
2. Pressen haben eine Minimal- und Maximallänge. Die Länge aller Balken einer Presse muss in diesem Intervall liegen.
3. Alle Balken einer Presse haben die gleiche Länge. Dazu kann der Balken so aus Bauteilen zusammengesetzt sein, dass ein Rest übrig bleibt.
4. Alle Bauteile, die einen Balken formen, haben die gleiche Höhe.
5. Jedes Bauteil eines Auftrages ist höchstens einem Balken zugeordnet.
6. Jeder Balken ist genau einer Presse zugeordnet.

## 2.2. Modellierung

In diesem Abschnitt wird das Modell zur Modellierung des Pressenplanungsproblems erläutert. Alle Namen von Funktionen in jenem Modell werden englisch formuliert, um die Nähe zur später in Abschnitt 5.4 gezeigten Implementierung zu wahren. Pressen heißen also *Press*, Balken (Schichten) werden *Layer* genannt und Bauteile erhalten den Namen *Component*. Die Menge aller Pressen wird mit  $P$ , die Menge aller Schichten mit  $L$  und die Menge aller Bauteile mit  $C$  abgekürzt.

Betrachten wir für das Modell die Signatur  $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$  und die Unbekannten  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_B, \mathbb{X}_{N_0})$ . Jede Presse hat sowohl Minimal- und Maximallänge als auch Minimal- und Maximalhöhe. Weiter wird jeder Presse eine Menge an Schichten zugeordnet. Tatsächliche Länge und Höhe der Presse sind unbekannt:

$$\Sigma_F^P = \left\{ \begin{array}{ll} \text{minLength} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{maxLength} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{minHeight} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{maxHeight} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{layers} : & P \rightarrow 2^L \end{array} \right\} \quad \mathbb{X}_{N_0}^P = \left\{ \begin{array}{ll} \text{length} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{height} : & P \rightarrow \mathbb{N}_0 \end{array} \right\} \quad \mathbb{X}_B^P = \emptyset$$

Für die Zuordnung der Schichten zu den Pressen wird eine disjunkte Aufteilung aller Schichten gefordert:

$$L = \dot{\bigcup}_{p \in P} \text{layers}(p) \quad (2.1)$$

Schichten haben unbekannte Länge, Höhe, einen unbekannten Rest und eine boole-sche Unbekannte, welche kennzeichnet, ob eine Schicht leer ist:

$$\Sigma_F^L = \emptyset \quad \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^L = \left\{ \begin{array}{l} \text{length} : L \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{height} : L \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{waste} : L \rightarrow \mathbb{N}_0 \end{array} \right\} \quad \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^L = \{\text{isEmpty} : L \rightarrow \mathbb{B}\}$$

Komponenten werden konkrete Längen und Höhen zugeordnet:

$$\Sigma_F^C = \left\{ \begin{array}{l} \text{length} : C \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \text{height} : C \rightarrow \mathbb{N}_0 \end{array} \right\} \quad \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^C = \emptyset \quad \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^C = \emptyset$$

Zudem soll eine Relation die Zuordnung von Komponenten zu Schichten beschreiben:

$$\Sigma_R = \{\text{InLayer} \subseteq C \times L\}$$

Da diese allerdings unbekannt ist, wird die Relation durch eine unbekannte Funktion repräsentiert:

$$\mathbb{X}_{\mathbb{B}}^{\text{InLayer}} = \{\text{InLayer} : C \times L \rightarrow \mathbb{B}\}$$

Weiter wird eine Funktion benötigt, welche bestimmt, ob in einer Multimenge von Wahrheitswerten  $b \in \mathbb{B}$  höchstens  $n \in \mathbb{N}_0$  wahr sind (mehr in Abschnitt 3.2):

$$\text{atMost} : \mathbb{N}_0 \times \dot{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{B}$$

Insgesamt ergibt das also folgende Signatur:

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\Sigma_F, \Sigma_R) \text{ mit} \\ \Sigma_F &= \Sigma_F^P \cup \Sigma_F^L \cup \Sigma_F^C \cup \left\{ \text{atMost} : \mathbb{N} \times \dot{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{B} \right\} \\ \Sigma_R &= \emptyset \\ \mathbb{X} &= (\mathbb{X}_{\mathbb{B}}, \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}) \text{ mit} \\ \mathbb{X}_{\mathbb{B}} &= \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^P \cup \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^L \cup \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^C \cup \mathbb{X}_{\mathbb{B}}^{\text{InLayer}} \\ \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0} &= \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^P \cup \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^L \cup \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^C \end{aligned}$$

Die Anforderungen an einen Presseplan werden mit obiger Signatur sowie grund-

legenden arithmetischen und booleschen Operationen folgend realisiert:

$$\forall p \in P : \text{minHeight}(p) \leq \text{height}(p) \leq \text{maxHeight}(p) \quad (2.2)$$

$$\forall p \in P : \text{minLength}(p) \leq \text{length}(p) \leq \text{maxLength}(p) \quad (2.3)$$

$$\forall p \in P, \forall l \in \text{layers}(P) : \neg \text{isEmpty}(l) \rightarrow \text{length}(p) = \text{length}(l) \quad (2.4)$$

$$\forall c \in C, \forall l \in L : \text{InLayer}(c, l) \rightarrow \text{height}(c) = \text{height}(l) \quad (2.5)$$

$$\forall c \in C : \text{atMost} \left( 1, \biguplus_{l \in L} \{ \text{InLayer}(c, l) \} \right) \quad (2.6)$$

$$\forall l \in L : \text{isEmpty}(l) \leftrightarrow \neg \bigvee_{c \in C} \text{InLayer}(c, l) \quad (2.7)$$

$$\forall l \in L : \text{isEmpty}(l) \leftrightarrow (\text{length}(l) = 0 \wedge \text{height}(l) = 0) \quad (2.8)$$

$$\forall p \in P : \text{height}(p) = \sum_{l \in \text{layers}(p)} \text{height}(l) \quad (2.9)$$

$$\forall l \in L : \text{length}(l) = \text{waste}(l) + \sum_{c \in C} \begin{cases} \text{length}(c) & , \text{InLayer}(c, l) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.10)$$

Constraint 2.2 erfüllt Anforderung 1 aus Abschnitt 2.1, während Constraint 2.3 Anforderung 2 erfüllt. Anforderung 3 wird durch Constraint 2.4 und Anforderung 4 durch Constraint 2.5 abgedeckt. Constraint 2.6 repräsentiert Anforderung 5. Anforderung 6 ist in diesem Modell Konstruktionsvorschrift mit 2.1. Die Constraints 2.7 und 2.8 definieren, wann eine Presse leer ist. Constraints 2.9 und 2.10 liefern die Definition für Pressenhöhe und Schichtlänge.

Das Modell beschreibt unbekannte Funktionen und nutzt damit Prädikatenlogik höherer Ordnung. Da die Mengen  $P$ ,  $L$  und  $C$  endlich sind, ist auch der Definitionsbereich aller unbekannten Funktionen des Modells endlich. Daher kann das Modell auf Prädikatenlogik erster Ordnung reduziert werden, indem die unbekannten Funktionen durch unbekannte Werte realisiert werden. Folgend beispielhaft für Pressen:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}^P &= \bigcup_{p \in P} \{ \text{length}_p, \text{height}_p \} \\ \text{length}(p) &= \text{length}_p \\ \text{height}(p) &= \text{height}_p \\ \Sigma_F^P &= \Sigma_F^P \cup \{ \text{length}, \text{height} \} \end{aligned}$$

Wird anstelle der Quantifizierung im Modell außerdem grundinstanziiert, dann beträgt die Anzahl numerischer Unbekannter  $|\mathbb{X}_{\mathbb{N}_0}| = 2|P| + 3|L|$  und die Anzahl boolescher Unbekannter  $|\mathbb{X}_{\mathbb{B}}| = |L| + |C| \cdot |L|$ . Die Anzahl Unbekannter steigt also linear in Abhängigkeit zur Eingabe. Das gilt offensichtlich auch für Anzahl und Größe der Constraints.

Im Folgenden der Arbeit werden Aufträge als Constraint-Systeme betrachtet. Dabei ist ein Auftrag  $a \in A$  die Konjunktion aller Constraints für eine Eingabe:  $a = 2.2 \wedge 2.3 \wedge \dots \wedge 2.10$ . Die Menge aller Modelle (hier erfüllende Belegung) für ein solches  $a$  wird dabei folgend notiert:

$$\text{Mod}(a) = \left\{ (\mathcal{S}, (\beta_{\mathbb{N}_0}, \beta_{\mathbb{B}})) \left| \begin{array}{l} \mathcal{S} = ((\mathbb{N}_0, \mathbb{B}), \llbracket \cdot \rrbracket_{(\mathbb{N}_0, \mathbb{B})}) \text{ ist } \Sigma\text{-Struktur,} \\ \beta_{\mathbb{N}_0} : \mathbb{X}_{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ \beta_{\mathbb{B}} : \mathbb{X}_{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{B}, \\ \llbracket a \rrbracket_{(\mathcal{S}, (\beta_{\mathbb{N}_0}, \beta_{\mathbb{B}}))} = \text{True} \end{array} \right. \right\}$$

Zur Vereinfachung der Notation können die Interpretationsfunktionen  $\beta_{\mathbb{N}_0}$  und  $\beta_{\mathbb{B}}$  zusätzlich mit einem Modell indiziert werden.

$$\forall a \in A, \forall s \in \text{Mod}(a), s = (\mathcal{S}, (\beta_{\mathbb{N}_0}, \beta_{\mathbb{B}})) : \beta_{\mathbb{N}_0}^s = \beta_{\mathbb{N}_0} \wedge \beta_{\mathbb{B}}^s = \beta_{\mathbb{B}}$$

Weiter wird die Menge aller erfüllbaren Aufträge aus Notationsgründen definiert:

$$A_{\text{sat}} = \{a \in A \mid \text{Mod}(a) \neq \emptyset\}$$

Außerdem werden folgende Funktionen zu Aufträgen definiert:

$\text{presses} : A \rightarrow 2^P$ ,  $\text{presses}(a) = P_a$ , wobei  $P_a$  ist Menge aller Pressen in  $a$

$\text{layers} : A \rightarrow 2^L$ ,  $\text{layers}(a) = L_a$ , wobei  $L_a$  ist Menge aller Schichten in  $a$

$\text{components} : A \rightarrow 2^C$ ,  $\text{components}(a) = C_a$ , wobei  $C_a$  ist Menge aller Komponenten in  $a$

## 2.3. Optimierung

Das obige Modell beschreibt beliebige Lösungen für das Problem der Pressenplanung. Um den Kostenaufwand beim Pressen zu reduzieren, sind Pressenpläne zusätzlich nach folgenden Kriterien lexikografisch zu optimieren (Vorgabe Germanedge):

1.  $\min \left( \left| \left\{ c \in C \mid \neg \bigvee_{l \in L} \text{InLayer}(c, l) \right\} \right| \right)$
2.  $\min(|P|)$
3.  $\min \left( \sum_{l \in L} \text{waste}(l) \right)$

Ziel 1 ist die Minimierung der Anzahl unverplanter Komponenten. Dort ist das Optimum bestenfalls null, sodass alle Komponenten verplant sind. Existiert so eine Lösung immer? Also:

$$\forall a \in A_{\text{sat}}, \exists s \in \text{Mod}(a) : 0 = \left| \left\{ c \in \text{components}(a) \mid \neg \bigvee_{l \in \text{layers}(a)} \beta_{\mathbb{B}}^s(\text{InLayer}(c, l)) \right\} \right|$$

Nein, denn es lässt sich ein einfaches Gegenbeispiel konstruieren:

Seien  $P = \{p_1, p_2\}$  und  $C = \{c_1, c_2\}$  mit

$$\text{height}(c_2) < \min\text{Height}(p_1) \leq \min\text{Height}(p_2) < \max\text{Height}(p_2) < \text{height}(c_1) = \max\text{Height}(p_1)$$

Dann muss  $c_1$  in  $p_1$  und damit  $c_2$  in  $p_2$  verplant werden.

Das geht aber nicht, weil:  $\text{height}(c_2) < \min\text{Height}(p_2)$

Wie Erfahrungsberichte und alle Testfälle in Kapitel 6 zeigen, existiert mit hoher Wahrscheinlichkeit aber eine Lösung, in welcher alle Bauteile verplant sind. Daher wird Constraint 2.6 durch folgendes Constraint ersetzt:

$$\forall c \in C, \exists ! l \in L : \text{InLayer}(c, l) \quad (2.11)$$

Damit sind alle erfüllenden Belegungen des Modells bezüglich Optimierungsziel 1 optimal. In den wenigen Fällen, in welchen die minimale Anzahl unverplanter Bauteile größer als null ist, existiert in diesem Modell keine Lösung. Aufgrund des mit der sonst zusätzlich nach Ziel 1 notwendigen Optimierung einhergehenden signifikanten Performance-Verlusts bei der Lösung durch den SMT-Solver sowie der Seltenheit solcher Fälle, wird in diesem Modell das Nicht-Finden dieser Lösungen hingenommen. Aufträge  $a \in A$  werden damit offensichtlich neu definiert:

$$a = 2.2 \wedge 2.3 \wedge 2.4 \wedge 2.5 \wedge 2.7 \wedge 2.8 \wedge 2.9 \wedge 2.10 \wedge 2.11$$

Wird im Weiteren der Arbeit auf das Modell oder Constraint-System verwiesen, dann ist diese Definition eines Auftrages gemeint.

### 3. Satisfiability Modulo Theories

In diesem Kapitel wird zuerst das Erfüllbarkeitsproblem der Satisfiability Modulo Theories - kurz SMT - vorgestellt. Dabei wird auch kurz die Kernelemente des Sprachstandards SMTLib Version 2.6 [BFT17] eingegangen. Dieser ermöglicht die Kodierung von SMT-Problemen für SMT-Solver [BT18]. Ein SMT-Solver - kurz Solver - ist ein Programm, welches für ein kodiertes Problem die Erfüllbarkeit dieses und für den Fall *erfüllbar* (englisch *satisfiable* - kurz *sat*) ein Modell für jenes bestimmen kann. Einige bekannte Solver sind zum Beispiel Z3 [DB08], CVC5 [Bar+22], Yices [Dut14] und OpenSMT [Bru+10]. Diese und viele andere nehmen jährlich an dem internationalen Wettbewerb SMT-COMP [BMS05] für SMT-Solver teil, wo sie sich in verschiedenen Disziplinen miteinander messen. Nach dem Überblick über SMTLib werden Anzahl-Constraints in SMT betrachtet, bevor am Ende dieses Kapitels beleuchtet wird, wie SMT-Probleme nach Zielfunktionen optimiert werden können.

#### 3.1. Einführung in das Erfüllbarkeitsproblem SMT

Satisfiability Modulo Theories beschreibt das Erfüllbarkeitsproblem prädikatenlogischer Formeln unter spezifischen Theorien [BT18]. Damit ermöglicht es im Gegensatz zum Erfüllbarkeitsproblem SAT, bei welchem ausschließlich boolesche Unbekannte aussagenlogisch verknüpft werden können, die realitätsnahe Kodierung von Problemen wie beispielsweise Ressourcenzuordnungsproblemen [Ans+11]. Jene sind nachweislich stark NP-schwere kombinatorische Probleme, sodass sie nicht in polynomieller Zeit lösbar sind [DKG13]. Im Allgemeinen ist die Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Formeln unentscheidbar [BT18]. Die Eingrenzung von Syntax und Semantik (Interpretation von Funktionssymbolen) der Prädikatenlogik in Modellen von SMT-Problemen ermöglicht die Entscheidbarkeit und erlaubt spezifische Lösungsverfahren unter bestimmten Hintergrund-Theorien (englisch *background-theory*). Diese Theorien werden zu SMT-Logiken wie beispielsweise QF LRA kombiniert. Bei der Logik der quantorenfreien (QF) linearen (L) Real(R)-Arithmetik(A) sind das die Theorien der reellen Zahlen, linearen Arithmetik und Gleichheit/Ungleichheit. Der diesjährige Sieger in jener Logik der SMT-COMP 2024 `OpenSMT` [BBJ24] implementiert als Lösungsverfahren eine Kombination aus CDCL(T) und modifiziertem Simplex [Bru+10]. CDCL(T) ist ein vollständiges Lösungsverfahren für prädikatenlogische Probleme unter einer Theorie  $T$  und ersetzt alle Atome einer Formel mit booleschen Unbekannten [BT18]. Dieses - nun SAT - Problem wird an einen SAT-Solver gegeben, welcher die Erfüllbarkeit prüft und für den Fall Erfüllbar eine erfüllende Belegung ermittelt. Für jene Belegung überprüft ein (möglicherweise auch mehrere) Theorie-Solver dann deren Konsistenz in der Theorie  $T$ . Wenn diese Belegung  $T$ -konsistent ist, so ist sie auch Modell für das prädikatenlogische Problem unter der Theorie  $T$ . Im Fall der  $T$ -Inkonsistenz wird der SAT-Solver erneut aufgerufen. Erwähnenswert sind hier zahlreiche integrierte Verfahren zur Effizienzsteigerung wie zum Beispiel das Lernen abgeleiteter Lemmas.

Für das Pressenplanungsproblem sind neben `QF_LRA` auch `QF_LIA` und `QF_BV` relevante Logiken. In der SMT-COMP 2024 siegte `OpenSMT` in den Logiken `QF_LRA` und `QF_LIA`, während `Bitwuzla` in der Logik `QF_BV` den ersten Platz belegte [BBJ24].

Die Kodierung der SMT-Probleme und damit Eingabe für die Solver ist im Standard SMTLib Version 2.6 festgehalten [BFT17]. Folgend die Darstellung relevanter Kernelemente des Sprachstandards anhand des Beispiels  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 5 = x + y$ :

```

1 (set-option :produce-models True)
2 (set-logic QF_LRA)
3
4 (declare-fun x () Real)
5 (declare-fun y () Real)
6
7 (assert (= 5 (+ x y)))
8
9 (check-sat)
10 (get-model)
11 (exit)

```

Listing 4: Kodierung von  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 5 = x + y$  in SMTLib-Syntax

In Zeile 1 wird der Solver angewiesen, im Fall der Erfüllbarkeit eine erfüllende Belegung zu erstellen. Zeile zwei setzt die Logik für die darauffolgende Problemdeklaration. In den Zeilen 4 und 5 werden Unbekannte der Sorte `Real` mit den Bezeichnern `x` und `y` angelegt. Zeile 7 zeigt die Assertion eines Constraints auf den Unbekannten `x` und `y` und der Konstanten 5. Zeile 9 weist den Solver an, das deklarierte Problem auf Erfüllbarkeit zu überprüfen, während Zeile 10 für den Fall Erfüllbar ein Modell für das Problem ausgibt. In Zeile 11 wird die Interaktion mit dem Solver beendet.

## 3.2. SMT-Kodierung von Anzahl-Constraints

Oftmals werden zur Kodierung von SMT-Problemen auch Anzahl-Constraints benötigt [KGK19]. Auf einer Multimenge gegebener boolescher Variablen  $B \in \mathbb{B}$  soll dabei die Anzahl wahr belegter Variablen nach  $k$  restriktiert werden. Dabei existieren die folgenden drei Restriktionen:

- Mindestens  $k$ :  $\text{atLeast} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$
- Genau  $k$ :  $\text{exactly} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$
- Höchstens  $k$ :  $\text{atMost} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

Anzahl-Constraints sind nicht Teil des SMTLib-Standards Version 2.6 [BFT17], sodass nur wenige Solver wie `Z3` solche Kodierungen direkt unterstützen [Bjø+19]. Daher wird zur manuellen Kodierung oft die ITE-Kodierung verwendet [KGK19]. Dabei werden die einzelnen booleschen Unbekannten mithilfe eines If-Then-Else-Ausdrucks (kurz ITE) in numerische Ausdrücke umgewandelt, anschließend summiert und verglichen. Mit der Hilfsfunktion  $\text{count} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{N}_0$  lassen sich die Anzahl-Constraints einfach kodieren:



$$\text{count}(B) = \sum_{b \in B} \left( \begin{cases} 1 & , b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \right)$$

$$\text{atLeast}(k, B) = k \leq \text{count}(B)$$

$$\text{exactly}(k, B) = k = \text{count}(B)$$

$$\text{atMost}(k, B) = k \geq \text{count}(B)$$

Je nach gewählter Logik erfolgt die Summierung in der entsprechenden Sorte. Ist für das SMT-Problem beispielsweise die Logik `QF_LRA` gewählt, dann summiert `count(B)` Terme der Sorte `Real`. Dabei entstehen für jedes Anzahl-Constraint offensichtlich  $n = |B|$  ITE-Ausdrücke,  $n - 1$  binäre Additionen und ein Vergleich.

Für bestimmte  $k$  wie beispielsweise  $k = 0$  oder  $k = 1$  können Anzahl-Constraints allerdings von spezialisierten Kodierungen profitieren. Einige davon sind folgende:

- $\text{atLeast}(0, B) = \text{True}$
- $\text{atLeast}(1, B) = \bigvee_{b \in B} b$
- $\text{atMost}(0, B) = \neg \bigwedge_{b \in B} b$
- $\text{atMost}(1, B) = \text{productEncoding}(B)$
- $\text{exactly}(0, B) = \neg \bigwedge_{b \in B} b$
- $\text{exactly}(1, B) = \text{atLeast}(1, B) \wedge \text{atMost}(1, B)$

Die Produkt-Kodierung (englisch *product-encoding*) ist eine aus SAT bekannte Kodierung für  $\text{atMost}(1, B)$  [Che10]. Dabei werden die  $n = |B|$  Unbekannten in eine Matrix  $M^{q \times p}$  mit  $p = \lceil \sqrt{n} \rceil$  und  $q = \lceil n/p \rceil$  gelegt. Wenn  $n < pq$  gilt, dann werden die übrigen Matrixeinträge mit `False` belegt. Zusätzlich wird für jeden Zeilenindex  $j \in \{0, \dots, q-1\}$  eine Hilfsvariable  $v_j$  und jeden Spaltenindex  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  eine Hilfsvariable  $u_i$  angelegt, welche repräsentiert, ob in der jeweiligen Zeile  $j$  oder Spalte  $i$  mindestens ein  $b \in B$  wahr ist. Fasst man die Hilfsvariablen zu  $U = \{u_0, \dots, u_{p-1}\}$  und  $V = \{v_0, \dots, v_{q-1}\}$  zusammen, beschreibt folgende Gleichung, dass höchstens eine der  $n$  Unbekannten wahr ist:

$$\text{productEncoding}(B) =$$

$$\text{atMost}(1, U) \wedge \text{atMost}(1, V) \wedge \bigwedge_{0 \leq x \leq n-1, x=(i-1)(q-1)+j} ((\neg b_x \vee u_i) \wedge (\neg b_x \vee v_j))$$

Daraus folgen  $2\sqrt{n} + \mathcal{O}(\sqrt[4]{n})$  existentiell quantifizierte Hilfsvariablen und  $2n + 4\sqrt{n} + \mathcal{O}(\sqrt[4]{n})$  Klauseln (konjugierte Disjunktionen). Das ist die nachweisbar minimal notwendige Anzahl an Klauseln für das At-Most-One-Constraint [Che10; KSV19].

Aus softwaretechnischer Sicht und wie später in Abschnitt 4.2.1 demonstriert, wäre eine Kodierung ohne Hilfsvariablen von Vorteil. Die Produkt-Kodierung kann

dazu einfach angepasst werden, indem alle Hilfsvariablen  $u_i \in U$  und  $v_j \in V$  folgend ersetzt werden:

$$u_i \mapsto \bigvee_{m_{j,i} \in M^{q \times p}, 0 \leq j \leq q-1} m_{j,i} \quad \text{und} \quad v_j \mapsto \bigvee_{m_{j,i} \in M^{q \times p}, 0 \leq i \leq p-1} m_{j,i}$$

Das eliminiert die Hilfsvariablen und behält die Klauselanzahl bei. Allerdings sind die entstehenden Klauseln um  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  größer.

### 3.3. Optimierung von SMT-Problemen

Häufig sind bei SMT-Problemen zusätzlich auch spezifische Zielfunktionen von Interesse. Diese haben besonders in der Industrie 4.0 eine große Relevanz [TBT24], so auch beim Pressenplanungsproblem. Die Anzahl unverplanter Bauteile, eingesetzter Pressen und notwendigen Rests soll minimiert werden, siehe Abschnitt 2.3.

SMT-Probleme, bei denen zusätzlich nach bestimmten Zielfunktionen optimiert wird, fallen in eine neue Problemklasse, jene der Optimization Module Theories (kurz OMT) [TBT24]. Genau wie die lineare Optimierung unterstützt auch OMT die Optimierung nach linearen Zielfunktionen. Im Gegensatz zu ersterer, erlaubt OMT zusätzlich auch beliebige boolesche Kombinationen aus Atomen, wodurch die Modellierung komplexer Probleme vereinfacht wird.

Wenige SMT-Solver wie beispielsweise **Z3** unterstützen die direkte Kodierung von OMT-Zielfunktionen in SMTLib-Syntax [BPF15]. Folgend die Maximierung des Terms  $x + y$  unter der Formel  $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x < 10 \wedge y < 5 \wedge (y < 7 \rightarrow x = 1)$ :

```

1 (set-logic QF_LIA)
2 (declare-fun x () Int)
3 (declare-fun y () Int)
4 (assert (and (< x 10) (and (< y 5) (=> (< y 7) (= x 1)))))
5 (maximize (+ x y))

```

Listing 5: Maximierung von  $x + y$  unter  $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x < 10 \wedge y < 5 \wedge (y < 7 \rightarrow x = 1)$

Mithilfe von Verfahren der linearen Optimierung ermittelt der Solver (hier **Z3**) korrekt die optimale Lösung  $x := 1, y := 4$ .

## 4. Haskell und Hasmtlib

In diesem Kapitel werden einige notwendige Grundlagen der funktionalen Programmiersprache Haskell erklärt. Danach wird der Kern der Funktionsweise der Haskell-Bibliothek `Hasmtlib` [Bru24a] beschrieben. Ferner werden einige geeignete Erweiterungen dieser diskutiert.

### 4.1. Funktionale Programmierung mit Haskell

Was ist ein ADT? Polymorphismus. Pattern-Matching. Was ist ein GADT und was kann er besser als ein ADT? Typ- und Kind-System anreißen - Phasentrennung. Typklassen. Typeoperators. Was ist eine pure Funktion? Wie kann man Nebenwirkungen dennoch modellieren - was ist eine Monade? Was ist Lazy?

### 4.2. Hasmtlib - Haskell-Bibliothek für SMTLib

Die Haskell-Bibliothek `Hasmtlib` [Bru24a] ist eine eingebettete domänenspezifische Sprache (englisch *embedded domain-specific language* - kurz *eDSL*) für den SMTLib-Standard Version 2.6 [BFT17] in Haskell. Eine eDSL ist eine, in einer Gastsprache eingebettete, anwendungsspezifische Sprache, welche auf Grundkonstrukten der Gastsprache aufbaut und somit den Implementierungsaufwand einer eDSL erheblich reduziert [SCK04].

Haskell wird aufgrund seines starken Typsystems oft als Gastsprache für solche eingebetteten Sprachen verwendet [Gil14]. Listing 6 zeigt beispielsweise, wie `Hasmtlib` SMTLib-Ausdrücke als abstrakten Syntaxbaum mit einem GADT repräsentiert.

```

1 data SMTSort = BoolSort | IntSort | RealSort | ...
2
3 data Expr (t :: SMTSort) where
4   Var      :: SMTVar t -> Expr t
5   Constant :: Value  t -> Expr t
6   Plus     :: Num (HaskellType t) => Expr t -> Expr t -> Expr t
7   ...
8   IDiv     :: Expr IntSort -> Expr IntSort -> Expr IntSort
9   Div      :: Expr RealSort -> Expr RealSort -> Expr RealSort
10  LTH      :: (Ord (HaskellType t), KnownSMTSort t) =>
11             Expr t -> Expr t -> Expr BoolSort
12  ...
13  Not      :: Boolean (HaskellType t) => Expr t -> Expr t
14  And      :: Boolean (HaskellType t) => Expr t -> Expr t -> Expr t
15  ...
16  Sqrt     :: Expr RealSort -> Expr RealSort

```

Listing 6: Repräsentation von SMTLib-Ausdrücken mithilfe eines GADTs in Hasmtlib [Bru24b]

Dabei ist der GADT `Expr t` polymorph in der `SMTSort`, sodass dessen Kind `Expr t :: SMTSort -> Type` ist. Da Werte des Datentyps `SMTSort` hier als Typen verwendet werden, nennt man `SMTSort` auch *Data-Kind* oder *Promoted-Type* [EW12]. Besonders relevant dafür ist das in 4.1 erklärte *Type-Refinement*. So weist beispielsweise ein Pattern-Match auf den Konstruktor `Sqrt` bereits zur Übersetzungszeit nach, dass `t ~ RealSort` gilt. Bei anderen Konstruktoren wie `And` kann die Belegung des `t` in `Expr t` mithilfe von Singletons ermittelt werden. Ein *Singleton* ist ein Laufzeit-Zeuge (Wert) für genau einen Übersetzungszeit-Typen [EW12]. Diese Abhängigkeit ist aufgrund Haskell's strenger Phasentrennung notwendig und ermöglicht eine *dependent*-ähnliche Kodierung wie in den Dependently-Typed Programmiersprachen Idris [BRA13] und Agda [Nor09].

Jeder Typ vom Kind `SMTSort` erhält also einen Singleton (Wert). Wie in Listing 7 zu sehen, stellt Hasmtlib den Singleton-Typen `SSMTSort` ebenfalls als GADT dar.

```

1 data SSMTSort (t :: SMTSort) where
2   SIntSort  :: SSMTSort IntSort
3   SRealSort :: SSMTSort RealSort
4   SBoolSort :: SSMTSort BoolSort
5   ...

```

Listing 7: Repräsentation des Singleton-Typs `SSMTSort` in Hasmtlib [Bru24c]

Die Verbindung zwischen Typ und Wert wird mit der in Listing 8 dargestellten Typklasse `KnownSMTSort` erreicht.

```

1 class KnownSMTSort (t :: SMTSort) where sortSing :: SSMTSort t
2 instance KnownSMTSort IntSort      where sortSing = SIntSort
3 instance KnownSMTSort RealSort     where sortSing = SRealSort
4 instance KnownSMTSort BoolSort     where sortSing = SBoolSort
5 ...

```

Listing 8: Typklasse zur Verbindung von Typ SMTSort zu Wert SSMTSort in Hasmtlib [Bru24c]

Mit den genannten Mechanismen garantiert **Hasmtlib** die ausschließliche Erzeugung von sauber typisierten (englisch *well-typed*) Ausdrücken [Pey+06]. Diese werden anschließend von der Bibliothek in SMTLib-Syntax übersetzt und an einen SMT-Solver gegeben. Dessen Antwort parst und übersetzt **Hasmtlib** dann zurück in die entsprechenden Haskell-Typen. Folgend ein kleines Programm zur Erläuterung:

```

1 module Example.Foo where
2
3 import Language.Hasmtlib
4 import Control.Monad (replicateM)
5
6 data Bar a = Bar
7   { length :: a
8   , height :: a }
9   deriving (Generic)
10 instance Variable a => Variable (Bar a)
11
12 barLength :: [Bar (Expr RealSort)] -> Expr BoolSort
13 barLength = all (\(b1,b2) -> ...) . binom
14   where
15     binom = ...
16
17 main :: IO ()
18 main = do
19   result <- solveWith @SMT (solver cvc5) $ do
20     setLogic "QF_LRA"
21     -- create variables
22     bars <- replicateM 10 variable
23     -- constrain variables
24     assert $ barLength bars
25     -- find model for variables
26     return foo
27   ...

```

Listing 9: Beispielhafte Verwendung von Hasmtlib

Das Beispiel in Listing 9 demonstriert mit der Funktion `barLength` außerdem die pure Formelkonstruktion in **Hasmtlib**. Lediglich Variablenerzeugung (Zeile 22)

und Formel-Assertion (Zeile 24) sind monadisch. Dadurch lassen sich viele Funktionalitäten der Gastsprache wiederverwenden, zum Beispiel die Funktion `sum` aus `Data.Foldable`: `sum :: (Foldable t, Num a) => t a -> a`.

#### 4.2.1. Ergänzung um Anzahl-Constraints

`Hasmtlib` unterstützte bis zum Zeitpunkt dieser Arbeit keine Anzahl-Constraints. Daher werden diese im Rahmen dieser Arbeit der Bibliothek hinzugefügt. Die Implementierung erfolgt analog zu den in 3.2 präsentierten Kodierungen und ist in Anhang A unter Listing 20 zu finden.

#### 4.2.2. Ergänzung um Incremental Refinement

`Hasmtlib` kann aufbauend auf SMT-Problemen auch OMT-Probleme kodieren. Da dies allerdings nur wenige SMT-Solver wie `Z3` direkt unterstützen, verwendet man häufig sogenannte Optimierungsschleifen [BPF15]. Dabei werden iterativ bessere Lösungen gesucht, indem obere Schranken für Maxima oder untere Schranken für Minima verfeinert werden. SMT-Solver haben einen Incremental-Stack, welcher die Wiederverwendung von bereits definierten Problemen und auch erlernten Lemmas ermöglicht, sodass *Incremental Refinement* wesentlich effizienter als das Starten eines neuen Solver-Prozesses für jede Verfeinerung ist [Liu+14].

Im Rahmen dieser Arbeit wird `Hasmtlib` daher um eine solche Optimierungsschleife erweitert. Deren Implementierung ist im Anhang A in Listing 20 zu finden. Wie dort zu erkennen ist, wurde außerdem eine Schrittweite für das Anpassen der verfeinerten Schranken hinzugefügt. Um nicht über die optimale Lösung zu schreiten, ruft Zeile 37 die Optimierungsschleife nochmals - aber ohne Schrittweite - auf. Die letzte bekannte optimale Schranke liegt dabei noch auf dem Incremental-Stack, sodass der rekursive Aufruf mit dieser als neue Schranke startet. Das garantiert das Finden der optimalen Lösung.

## 5. Implementierung

In diesem Kapitel wird ein Haskell-Programm zur Lösung des Pressenplanungsproblems entwickelt. In diesem Kapitel wird ein Haskell-Programm zur Lösung des Pressenplanungsproblems entwickelt. Das Programm erzeugt aus den textuellen Eingaben der Pressen- und Bauteilspezifikationen ein Constraint-System, welches anschließend von einem externen Constraint-Solver gelöst wird. Danach wandelt das Programm die Lösung des Solvers in das von Germanedge spezifizierte Ausgabeformat CSV um.

Dazu werden zunächst die notwendigen Datentypen und die Sorten-Polymorphie der Kodierung erklärt, bevor einige konkrete Repräsentationen der Constraints aus Abschnitt 2.2 mithilfe von Quellcode-Ausschnitten dargestellt werden. Anschließend werden Optimierung und Parallelisierung des Problems diskutiert. Am Ende des Kapitels wird die Benutzerschnittstelle des Programms betrachtet.

### 5.1. Datentypen und Unbekannte

Analog zur Problemdomäne aus Kapitel 2 sind hier Bauteile (Components), Schichten (Layers) und Pressen (Presses) die Entitäten von Bedeutung. Deren Repräsentation erfolgt jeweils durch Record-Datenstrukturen. Bei Pressen wird zusätzlich in statische und symbolische Pressen unterschieden. Statische Pressen (**StaticPress**) beschreiben die konstanten Eigenschaften von Pressen wie beispielsweise deren maximale Höhe. Symbolische Pressen (**Press**) haben die Konstanten einer statischen Presse und beschreiben weiter symbolische Eigenschaften wie die geplante Länge in einem Pressenplan. Diese Unterscheidung ist für die Trennung von Eingabe (Einlesen der Pressenspezifikationen) und Verarbeitung der Pressen im Constraint-System sinnvoll. Folgend deren Haskell-Repräsentation:

```

1  data Component a = Component
2    { _cId          :: Integer
3      , _compLength :: a
4      , _compHeight :: a
5    } deriving stock (Show, Eq, Ord, Functor, Foldable, Traversable, Generic)
6      deriving anyclass (Codec)
7  $(makeLenses ''Component)
8
9  data Layer a b = Layer
10   { _lId          :: Integer
11     , _layerLength :: a
12     , _layerHeight :: a
13     , _layerEmpty  :: b
14     , _waste       :: a
15   } deriving stock (Show, Eq, Ord, Generic)
16     deriving anyclass (Codec)
17   $(makeLenses ''Layer)
18
19  data StaticPress a = StaticPress
20   { _pId          :: Integer
21     , _pressName   :: String
22     , _pressMinLength :: a
23     , _pressMaxLength :: a
24     , _pressMinHeight :: a
25     , _pressMaxHeight :: a
26   } deriving stock (Show, Eq, Ord, Functor, Foldable, Traversable, Generic)
27     deriving anyclass (Codec)
28   $(makeLenses ''StaticPress)
29
30  data Press a b = Press
31   { _press        :: StaticPress a
32     , _pressLength :: a
33     , _pressHeight :: a
34     , _pressLayers :: [Layer a b]
35   } deriving stock (Show, Eq, Ord, Generic)
36     deriving anyclass (Codec)
37   $(makeLenses ''Press)

```

Listing 10: Haskell-Datentypen der Domäne Pressenplanung

Der Ausdruck `$(makeLenses ''DATATYPE)` taucht dabei mehrmals auf. Dieser erzeugt *Lenses* für die Datentypen. Da im Weiteren Lenses häufig in der Implementierung verwendet werden, wird dem Leser empfohlen, folgende Quelle bei Fragen zu Lenses zu konsultieren: [Kme24].

Ferner ist auffällig, dass alle Typen polymorph sind, sodass `Layer a b` beispielsweise zwei Typen `a` und `b` nimmt. Das `a` repräsentiert einen Zahlentypen und das `b` einen Bool-Typen. Das vereinfacht später die Kodierung und Dekodierung der symbolischen Werte. So könnte die symbolische Schicht mit `type SLayer t = Layer`



(Expr t) (Expr BoolSort) und die konkrete Schicht mit `type CLayer t = Layer (HaskellType t) Bool` dargestellt werden.

Mit diesen Grundtypen kann nun der Typ `Pressenplan` definiert werden:

```

1 data PressPlan t = PressPlan
2   { _components :: [Component (Expr t)]
3   , _layers      :: [Layer (Expr t) (Expr BoolSort)]
4   , _presses     :: [Press (Expr t) (Expr BoolSort)]
5   , _inLayer     :: Relation Integer Integer
6   } deriving stock (Generic)
7 $(makeLenses 'PressPlan)

```

Listing 11: Haskell-Datentyp des Pressenplans

Dieser enthält alle symbolischen Komponenten, Schichten, Pressen und auch die Relation *InLayer* aus Abschnitt 2.2. Als Index für diese wird das Tupel (cId, lId) aus Komponenten-ID und Schicht-ID verwendet.

Die Erzeugung eines symbolischen Pressenplans ist monadisch (`setupPressPlan :: MonadSMT s m => ... -> m (PressPlan t)`), da dort alle notwendigen Variablen angelegt werden. Identisch zur Variablenmenge  $\mathbb{X}$  in Abschnitt 2.2 sind das:

- `_pressLength` und `_pressHeight` für jede Presse,
- `_layerLength`, `_layerHeight`, `_waste` und `_layerEmpty` für jede Schicht und
- ein symbolischer Wahrheitswert für jedes mögliche Element der Relation *InLayer*

Bei weiterer Betrachtung des Typs `PressPlan` fällt auf, dass Komponenten, Schichten und Pressen im Typ Liste vorliegen. Der Listentyp ist der von Haskell, also konkret in Haskell und nicht symbolisch im SMT-Problem. Das erklärt die Nutzung der Liste für die Komponenten, da diese eine Eingabe sind, welche konkret darstellbar ist. Aber wie ist der Listentyp für Schichten und Pressen zu erklären?

Das Modell in Abschnitt 2.2 all-quantifiziert Schichten und Pressen. Das wäre analog auch in SMT möglich. Im Allgemeinen werden solche Probleme aber grundinstanziiert, um die Verwendung ineffizient (oder gar nicht) entscheidbarer Quantoren-Logiken zu vermeiden [GBT07; GM09]. Für jede Presse wird dabei im Voraus die höchstmögliche Anzahl an Schichten basierend auf der Eingabe an Komponenten ermittelt, genauer in 5.2. Da Schichten leer sein können haben sie das Attribut `_layerEmpty :: b` (Listing 10, Zeile 13). Identisch könnten Pressenpläne leere Pressen enthalten. Weiter könnte eine obere Schranke für die Anzahl an Pressen basierend auf der Eingabe an Komponenten ermittelt werden. Allerdings bedeutet jede weitere Presse weitere Unbekannte und weitere Constraints, sodass die Komplexität des Problems erhöht wird, was letztendlich zu einer ineffizienteren Lösung des Solvers führt. Daher wird jeder Auftrag mehrmals kodiert - mit jeweils unterschiedlich fester Anzahl an Pressen. Diese werden dann als separate Probleminstanzen auf verschiedene Prozessor-Kerne aufgeteilt, mehr dazu in Abschnitt 5.5.

## 5.2. Vorverarbeitung

Bei der Kodierung des Pressenplanungsproblems wird jeder Presse eine feste Anzahl an Schichten zugewiesen. Da die Anzahl tatsächlich geplanter Schichten bei der Zuweisung unbekannt ist, wird jeder Presse die höchstmögliche Anzahl an Schichten zugewiesen. Unter diesen können einige leer sein, in jenen sind also keine Komponenten (Constraints 2.7 und 2.8). Betrachten wir die Funktion  $\text{maxLayers} : P \times A \rightarrow \mathbb{N}$  zur Berechnung der maximalen Schichtanzahl. Das triviale Maximum der Schichtanzahl pro Presse berechnet sich aus der kleinsten Komponente eines Auftrages und der Maximalhöhe der Presse:

$$\text{maxLayers}(p, a) = \left\lfloor \frac{\text{maxHeight}(p)}{\min \{\text{height}(c) \mid c \in \text{components}(a)\}} \right\rfloor$$

Diese Schranke ist korrekt, bezieht aber mögliche weitere Informationen des Auftrages nicht mit ein. Daher werden vermutlich meist mehr Schichten und damit auch Unbekannte und Formeln erzeugt, als für die Lösung des Problems überhaupt notwendig. Wenn die Schranke also niedriger gewählt werden kann, kann die Komplexität des Problems verringert und somit auch die Laufzeit des Solvers reduziert werden. Das ist möglich, indem zusätzlich die Anzahl der kleinsten Komponenten betrachtet wird:

Seien  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_{|\text{components}(a)|}$  die sortierten Höhen aller Komponenten und

$$S_k = \sum_{i=1}^k h_i \text{ die kumulierte Summe dieser sortierten Höhen.}$$

Dann gilt:  $\text{maxLayers}(p, a) = \max \{k \mid S_k \leq \text{maxHeight}(p)\}$

Mithilfe von *Discrimination* [Hen08; Kme22] können die Höhen in  $\mathcal{O}(|\text{components}(a)|)$  sortiert werden, sodass die Funktion `maxLayers` lineare Laufzeitkomplexität aufweist:

```

1 import ...
2 import Data.Discrimination (Sorting(..), sort)
3
4 maxLayers :: (Num a, Sorting a) => StaticPress a -> [Component a] -> Integer
5 maxLayers p =
6     genericLength
7     . takeWhile (<= p^.pressMaxHeight)
8     . drop 1
9     . scanl (+) 0
10    . sort
11    . fmap (view compHeight)

```

Listing 12: Funktion zur Berechnung der maximalen Schichten pro Presse in  $\mathcal{O}(|\text{components}(a)|)$

Betrachten wir die durch diese Funktion ermittelten Schranken für Aufträge  $a$  aus Kapitel 6, bei denen ein optimaler Pressenplan  $s \models_{\text{opt}} a$  mit fester Presse  $p$  bekannt ist:

Auftrags-Nr.	maxLayers( $p, a$ )	$ \{l \in L \mid \beta_{\mathbb{B}}^{s_{opt}}(\neg \text{isEmpty}(l))\} $
1	3	3
2	11	10
3	11	11
5	11	7
6	11	7
14	4	4
15	4	4
16	4	4
18	4	4
20	4	4

Tabelle 5.1.: Vergleich der ermittelten Maximalanzahl an Schichten mit der tatsächlichen Anzahl in einer optimalen Lösung

Die ermittelte Schranke ist für einige der Testfälle perfekt, bei anderen wie 5 und 6 allerdings weit entfernt. Existiert eine bessere korrekte Schranke? Also:

$$\begin{aligned}
& \exists f : P \times A \rightarrow \mathbb{N}, \forall p \in P, \forall a \in A_{sat}, \exists s \in \text{Mod}(a) : \\
& s \models_{opt} a \rightarrow (|\{l \in \text{layers}(p) \mid \neg \beta_{\mathbb{B}}^s(\text{isEmpty}(l))\}| \leq f(p, a) \leq \text{maxLayers}(p, a) \\
& \quad \wedge \exists p' \in P, \exists a' \in A_{sat} : f(p', a') < \text{maxLayers}(p', a'))
\end{aligned}$$

Da in dieser Arbeit lediglich ein Prototyp für die optimale Lösung des Pressenplanungsproblems entwickelt werden soll, genügt die Schranke der kumulierten Summen.

### 5.3. Sorten-Polymorphie

Wie in Kapitel 3 gezeigt bietet SMTLib verschiedene Logiken zur Kodierung von SMT-Problemen an. Nicht immer ist dabei vorher klar, in welcher Logik ein Problem am effizientesten für Solver kodiert werden kann. Das gilt auch für das Pressenplanungsproblem mit den Kandidaten `QF_LIA`, `QF_LRA` und `QF_BV`. `Hasmtlibs` Ausdrucks-Typ `Expr t` kann dafür genutzt werden, um das Problem polymorph in der Sorte zu implementieren. Betrachten wir folgende Funktion, die für einen Pressenplan und dessen Konfiguration alle Constraints für jenen erstellt:

```

1 problem :: (Orderable (Expr t), Num (Expr t))
2   => PressPlan t
3   -> Config (Expr t)
4   -> [Expr BoolSort]
5 problem pp cfg = ...

```

Listing 13: Sorten-Polymorphie bei der Problemdeklaration

Der Aufrufer wählt die Sorte der Kodierung dann per Typ-Applikation und setzt die Logik mithilfe der Singletons:

```

1  runProblem = forall t. (KnownSMTSort t, Orderable (Expr t)
2    , Num (Expr t), MonadSMT s m)
3    => ... -> m ()
4  runProblem ... = do
5    ...
6    setLogic $ case sortSing @t of
7      SIntSort      -> "QF_LIA"
8      SRealSort     -> "QF_LRA"
9      SBvSort _ _   -> "QF_BV"
10     _             -> "ALL"
11    ...
12    forM_ (problem @t _ _) assert
13    ...

```

Listing 14: Auswahl der Logik nach Sorte

Das ermöglicht die Wahl der Kodierung für den Aufrufer der Schnittstelle und verhindert somit Redundanz in der Implementierung. Insbesondere begünstigt das die einfache Testung verschiedener Kombinationen von Solvern und Kodierungen in verschiedenen Logiken wie später bei der Auswertung in Kapitel 6.

Für die Sorte `Real` werden alle Längenangaben in der Einheit Meter kodiert, sodass dabei offensichtlich keine Lösungen aufgrund von unzureichender Genauigkeit verloren gehen kann. Bei den Sorten `Int` und `BitVec` wird hingegen die Einheit Millimeter verwendet. Da alle Eingaben durch natürliche Zahlen in Millimetern dargestellt werden und im Constraint-System keine Division erfolgt, geht auch hier keine Lösung aufgrund von Ungenauigkeit verloren. Für `BitVec` reichen 15 Bit bei vorzeichenloser Interpretation aus, da die größten Werte bei der Pressenlänge vorkommen und dort gilt:  $\forall p \in P : \text{maxLength}(p) < 2^{15}$ . Wie in [NPZ24] beschrieben, skalieren Bitvektor-Kodierungen allerdings schlecht in Bezug auf die Bitbreite. Bei deren Reduktion auf äquivalente SAT-Kodierungen entstehen dabei besonders für arithmetische Operationen große Formeln. Obwohl für den Anwendungsfall Pressenplanung hier nur Bitvektoren der Länge 15 verwendet werden, führt die Verwendung zahlreicher arithmetischer Operationen vermutlich zu ineffizienten Kodierungen. Diese Vermutung konnte durch - in dieser Arbeit nicht dokumentierte - Testfälle bestätigt werden. Daher werden im folgenden der Arbeit Bitvektoren nicht weiter für die Kodierung in Betracht gezogen.

## 5.4. Kodierung der Constraints

Die Constraints aus Abschnitt 2.2 lassen sich dank `Hasmtlib` analog in Haskell formulieren. Betrachten wir die Kodierung weniger Constraints wie 2.2 und 2.3 aus Abschnitt 2.2:

```

1 pressBounds :: Orderable (Expr t) => PressPlan t -> Expr BoolSort
2 pressBounds = all
3   (\p -> p^.pressHeight >=? p^.press.pressMinHeight
4         && p^.pressHeight <=? p^.press.pressMaxHeight
5         && p^.pressLength >=? p^.press.pressMinLength
6         && p^.pressLength <=? p^.press.pressMaxLength
7   ) . toListOf (presses.folded)

```

Listing 15: Haskell-Kodierung der Constraints 2.2 und 2.3 aus Abschnitt 2.2

Hier ist darauf hinzuweisen, dass die Funktion `all` in Zeile 2 nicht all-quantifiziert, sondern über allen Pressen des Problems grundinstanziiert. Dabei entsteht also aus der Konjunktion der Anforderungen an jede einzelne Presse eine Formel, welche die Anforderung für alle Pressen kodiert. Das bestätigt auch der Rückgabetypp `Expr BoolSort` der Funktion `pressBounds`.

Betrachten wir weiter das Constraint 2.11:

```

1 noSpareComponents :: forall t. (Orderable (Expr t), Num (Expr t))
2   => PressPlan t -> Expr BoolSort
3 noSpareComponents pp = all (exactly @t 1 . image rel) (domain rel)
4   where
5     rel = pp^.inLayer

```

Listing 16: Haskell-Kodierung des Constraints 2.11

Es beschreibt, dass jede Komponente genau einer Schicht zugeordnet wird. Die Funktion `exactly` in Zeile 3 ist dabei die in Abschnitt 3.2 erklärte und in Abschnitt 4.2.1 implementierte Exactly-One-Kodierung.

Zusätzlich zu den Constraints des Modells in Abschnitt 2.2 muss folgendes Constraint hinzugefügt werden.

```

1 nonNegativeWaste :: (Orderable (Expr t), Num (Expr t))
2   => PressPlan t -> Expr BoolSort
3 nonNegativeWaste = all (>=? 0) . toListOf (layers.folded.waste)

```

Listing 17: Haskell-Kodierung des extra Constraints:  $\forall l \in L : \text{waste}(l) \geq 0$

Im Modell sind die Unbekannten Elemente der Menge  $\mathbb{N}_0$ . In SMTLib repräsentieren die Sorten `Int` und `Real` jedoch die Mengen  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}$ . Daher muss sichergestellt werden, dass alle Unbekannten nicht-negativ sind. Sowohl für Pressenlänge und Pressenhöhe als auch Schichtlänge und Schichthöhe ergibt sich das bereits aus den Constraints in Abschnitt 2.2. Wie aus Listing 17 zu schließen allerdings nicht für den Schichtrest, sodass obiges Constraint hinzugefügt werden muss.

## 5.5. Parallelisierung und Optimierung

In Abschnitt 2.3 wurden drei Optimierungsziele genannt. Optimierungsziel 1, die Minimierung unverplanter Komponenten ist wie dort bereits beschrieben fast immer

durch einen Pressenplan mit genau null übrigen Komponenten erfüllbar. Optimierungsziel 2 ist die Minimierung der Anzahl geplanter Pressen. Dabei gilt  $1 \leq |P| \leq k$  mit erfahrungsgemäß  $k \leq 11$  für die größten Aufträge. Wird ein Auftrag also  $k$  mal mit jeweils unterschiedlicher Pressen-Anzahl kodiert, dann existiert für genau eine jener Kodierungen mindestens eine optimale Belegung:

$$\forall a \in A_{sat}, \exists ! i \in \{n \in \mathbb{N}^+ \mid n \leq k\}, \exists s \in \text{Mod}(a_{|P|=i}) : s \models_{opt} a$$

Optimal ist jene Belegung in entsprechender Kodierung genau dann, wenn der Gesamtrest unter der Belegung  $\beta_{\mathbb{N}_0}$  minimal ist (Optimierungsziel 3):

Sei  $i$  die optimale Pressenanzahl für einen erfüllbaren Auftrag  $a$ , dann gilt:

$$\forall a \in A_{sat}, \exists s \in \text{Mod}(a_{|P|=i}), \forall s' \in \text{Mod}(a_{|P|=i}) :$$

$$s \models_{opt} a \leftrightarrow \sum_{l \in \text{layers}(a)} \beta_{\mathbb{N}_0}^s(\text{waste}(l)) \leq \sum_{l \in \text{layers}(a)} \beta_{\mathbb{N}_0}^{s'}(\text{waste}(l))$$

Das kleinste Optimum des Gesamtrests liegt bestenfalls bei null. Durch das Hinzufügen des Constraints  $0 = \sum_{l \in L} \text{waste}(l)$  zur Kodierung mit der minimalen Pressen-Anzahl kann dieses bestmögliche Optimum forciert werden. Ist das Problem nach Hinzufügen des Constraints noch immer erfüllbar, dann ist jede erfüllende Belegung des Problems optimal.

$$\forall a \in A_{sat}, a' = a \wedge 0 = \sum_{l \in \text{layers}(a)} \text{waste}(l), \forall s \in \text{Mod}(a') : s \models_{opt} a'$$

Ein solches zusätzliches Constraint schränkt den Lösungsraum des Problems erheblich ein, sodass die Lösung des Problems durch den Solver wesentlich effizienter wird.

Allerdings kann nicht garantiert werden, dass es eine Lösung ohne Rest gibt. Daher wird ein Auftrag  $2k$  Mal kodiert: Auf  $k$  verschiedene Pressen-Anzahlen in jeweils zwei Variationen: Mit dem extra Constraint, welches den Gesamtrest auf null fixiert und ohne dieses. Diese  $2k$  verschiedenen Kodierungen eines Auftrages werden bestenfalls auf  $2k$  verschiedene Kerne einer CPU (oder mehrere) verteilt. Die Maschine des Kunden, welcher Germanedge mit dem Pressenplanungsproblem beauftragt hat, verfügt über eine CPU mit acht Kernen. Daher wird ein Auftrag mit vier verschiedenen Pressen-Anzahlen kodiert, sodass insgesamt acht Kodierungen des Auftrags entstehen. Ein Eingabeparameter  $p \in \mathbb{N}^+$  des Programms beschreibt dabei die Mindestanzahl an Pressen. Für ein bestimmtes  $p$  wird ein Auftrag dann für  $p$ ,  $p+1$ ,  $p+2$  und  $p+3$  kodiert. Dabei könnte offensichtlich die optimale Lösung mit Pressen-Anzahl  $p'$  verloren gehen, falls  $p' < p \oplus p' > p+3$  gilt. Ähnlich wie bei der Ermittlung der maximalen Schichtanzahl pro Presse in Abschnitt 5.2 könnte auch hier ein (vermutlich linearer) Algorithmus entwickelt werden, der die Mindestanzahl an Pressen ermittelt. Da in dieser Arbeit allerdings lediglich ein Prototyp und kein vollständiges Produkt zur optimalen Lösung des Pressenplanungsproblems erarbeitet werden soll, wird für den Eingabeparameter  $p$  ein niedriger Wert durch Germanedge's interne Heuristik ermittelt.

Symbolisch wird also nur der Gesamtrest optimiert (Optimierungsziel 3). Das geschieht entweder durch inkrementelles Verfeinern (SMT) mit der Implementierung aus Abschnitt 4.2.2 oder durch die linearen Optimierungsverfahren von Z3 (OMT).

Um bei ersterer signifikante Verbesserungen der Lösung zu gewährleisten, wird als Schrittweite ein Millimeter der Kodierung verwendet. Also 0.001 Einheiten (Meter) bei Kodierung in der Sorte `Real` und 1 Einheit (Millimeter) bei der Kodierung in der Sorte `Int`. Der Aufruf der Optimierungsfunktion aus Abschnitt 4.2.2 sieht somit folgenderweise aus:

```

1 totalWaste :: Num (Expr t) => PressPlan t -> Expr t
2 totalWaste = sumOf (layers.folded.waste)
3
4 step :: (KnownSMTSort t, Num (Expr t)) => Expr t -> Expr t
5 step x = case sortSing @t of
6   SIntSort  -> x - 1
7   SRealSort -> x - 0.001
8   _         -> x
9
10 main :: IO ()
11 main = do
12   disperseOnPresses $ do
13     ...
14     (res, sol) <- solveMinimized (totalWaste pressPlan) (Just step) Nothing
15     ...

```

Listing 18: Aufruf der Optimierungsfunktion `solveMinimized` für den Gesamtrest

## 5.6. Benutzerschnittstelle

Germanedge’s bisherige heuristische Lösung spezifiziert Ein- und Ausgabeformat als CSV. Diese Spezifikation wird hier ebenfalls implementiert. Dazu wird die Haskell-Bibliothek `cassava` [Tib24] verwendet.

Der Aufruf des Programms erfolgt über die Kommandozeile mit einigen Konfigurationsparametern. Konfiguriert werden können:

- Art der Kodierung: SMT mit inkrementellem Verfeinern oder OMT mit linearer Optimierung
- Sorte der Kodierung: `Int` mit `QF_LIA`, `Real` mit `QF_LRA` oder `BitVec 15 (Unsigned)` mit `QF_BV`
- Solver zum Lösen: `Z3`, `OpenSMT`, ...
- Timeout: Maximale Laufzeit des Programms
- Pressen-Spezifikation: Dimensionen der Presse
- Pressen-Anzahl  $p$ : Kodiert wird dann mit  $p$ ,  $p + 1$ ,  $p + 2$  und  $p + 3$
- Constraints: Maximaler Gesamtrest, maximaler Rest pro Schicht. Hier könnten optimale Lösungen verloren gehen. Der Kunde wünscht sich diese Parameter dennoch.

- Ausgabe-Verzeichnis: Verzeichnis, in welches die Lösungen der verschiedenen Pressen ausgegeben werden

Wenige Kombinationen wie beispielsweise Solver `OpenSMT` mit Art der Kodierung OMT sind ungültig und führen zu unmittelbaren Laufzeitfehlern, da nicht alle Solver alle Funktionalitäten unterstützen. Obwohl diese Fehler mit etwas Aufwand im Quell-Code verhindert werden könnten, kann der Anwender in der Schnittstelle hier keinen Fehler machen, weil die Evaluation in Kapitel 6 zu einer vermeintlich besten allgemeinen Konfiguration führt.



## 6. Auswertung und Laufzeitmessung

In diesem Kapitel wird die Performance des Programms zur Lösung des Pressenplanungsproblems ausgewertet. Dazu werden zunächst folgende Konfigurationen des Programms miteinander verglichen:

- SMT mit Incremental Refinement, QF\_LRA, OpenSMT
- SMT mit Incremental Refinement, QF\_LIA, OpenSMT
- SMT mit Incremental Refinement, QF\_LIA, Z3
- OMT mit linearer Optimierung, QF\_LIA, Z3

Die Wahl der Logiken QF\_LIA und QF\_LRA wurde bereits in Abschnitt 5.3 diskutiert. Für beide Logiken wird der jeweilige Gewinner jener Kategorien der SMT-COMP 2024 OpenSMT (Version 2.7.0) verwendet [BBJ24]. Zusätzlich wird auch Z3 (Version 4.13.0) mit Incremental Refinement und Logik QF\_LIA getestet. Trotz schwachem Ergebnis in der SMT-COMP 2024 erwies sich diese Kombination in einigen Testfällen als hoch-performant. Aufgrund dieser Erkenntnis wurde auch die Performance weiterer Solver untersucht. Diese Untersuchung ergab allerdings keine nennenswerten Ergebnisse, sodass diese im Folgenden ausgelassen werden. Weiter wird auch eine Programmkonfiguration mit Z3 und OMT in Logik QF\_LIA getestet.

Danach wird die Performance der insgesamt besten Programmkonfiguration mit jener von Germanedge's Heuristik verglichen und ausgewertet. Am Ende werden mögliche Verbesserungen diskutiert.

### 6.1. Vorbetrachtung



Die Laufzeitmessungen der Konfigurationen des in dieser Arbeit entwickelten Programms erfolgt auf einer Maschine mit acht CPU-Kernen mit Takt von jeweils 2,4 GHz und 16 GB Arbeitsspeicher. Aufgrund einiger Firmenregularien kann die Laufzeitmessung der Heuristik nicht auf der gleichen Maschine wie jener des hier entwickelten Programms erfolgen. Die firmeninterne Maschine weist allerdings sehr ähnliche Hardware-Spezifikationen auf, sodass ein Vergleich dennoch aussagekräftig ist. Die Laufzeitmessungen erfolgen unter ähnlichen Bedingungen mit minimaler Auslastung durch andere Prozesse.

Insgesamt wird die Lösung von 26 verschiedenen Probleminstanzen verglichen. Darunter befinden sich sowohl reale als auch konstruierte Testfälle. Zu Zwecken der Anonymisierung werden diese allerdings nicht als solche gekennzeichnet.

Ausgewertet wird die Güte der Lösungen nach den Optimierungszielen in Abschnitt 2.3. Zusätzlich kommt als viertes lexikografisches Optimierungsziel die Laufzeit des Programms beziehungsweise der Heuristik hinzu. Sind alle vier Metriken bei einer Probleminstanz gleich, dann wird die Lösung als gleich gut bewertet.

Die Laufzeitmessungen werden in den folgenden Abschnitten mit verschiedenen oberen Laufzeitgrenzen (Timeouts) versehen. Gemessen wird die Zeit, welche Programm oder Heuristik für eine endgültige Lösung benötigen. Ermittelt das Programm also beispielsweise eine Lösung nach 30s, rechnet aber bis zum Timeout weiter und verbessert diese Lösung nicht, dann wird die Messung der Laufzeit mit *TO* (kurz für Timeout) versehen. Die gemessene Laufzeit schließt zwar alle Schritte von Eingabeverarbeitung über Kodierung der Constraints bis hin zur Lösung durch den Solver ein, umfasst letztendlich aber fast ausschließlich die Laufzeit des Solvers. Für die größten Problem instanzen beträgt die Laufzeit des Programms (Haskell) höchstens drei Sekunden.

Folgend die Erklärung aller Elemente der Vergleiche zur Lösung einer Problem instanzen:

- Nr: Identifizierende Nummer der Problem instanzen
- Name: Name der Problem instanzen
- $|C|$ : Anzahl der Komponenten
- $|C_{Spec}|$ : Anzahl verschiedener Komponenten-Spezifikationen
- Typ: SMT (inkr. Verfeinern) oder OMT (lineare Optimierung)
- Logik: QF\_LIA oder QF\_LRA
- Solver: Externer SMT-Solver
- $p$ : Minimale Pressen-Anzahl (erklärt in Abschnitt 5.5)
- Größe: Summe der Anzahl der Knoten aller Constraints im AST
- $\#\mathbb{B}$ : Anzahl boolescher Unbekannter im Constraint-System
- $\#\mathbb{Z}$ : Anzahl numerischer Unbekannter im Constraint-System
- Zeit in s: Laufzeit in Sekunden (aufgerundet), *TO* ist Timeout
- $|C_{Not}|$ : Anzahl unverplanter Komponenten
- $|P|$ : Anzahl geplanter Pressen
- Rest in mm: Gesamtrest in Millimetern
- Zert.:  falls Lösung zertifiziert optimal ist,  sonst

## 6.2. Vergleich verschiedener Programm-Konfigurationen

In diesem Abschnitt wird die Performance verschiedener Konfigurationen des in dieser Arbeit entwickelten Programms verglichen. Der Timeout für alle Problem instanzen beträgt zehn Minuten, die maximal tolerierte Laufzeit aus Sicht des Kunden. Die tabellarische Auswertung der Laufzeitmessungen ist in Anhang B, Tabelle 1 zu finden.

Diese Ergebnisse zeigen, dass alle Programmkonfigurationen korrekte Lösungen für bestimmte Eingaben finden. Die Kodierung des Constraint-Systems in Logik `QF_LIA` liefert im Vergleich zu Logik `QF_LRA` meist die besseren Lösungen. Das ist wenig verwunderlich, da die kleinste Einheit in der Problemdefinition Millimeter ist, sodass die arithmetischen Unbekannten ganzzahlig dargestellt werden können. Dies wiederum vereinfacht die Lösung für den Solver, da die Sorte `Int` die Menge  $\mathbb{Z}$  (abzählbar unendlich) und die Sorte `Real` die Menge  $\mathbb{R}$  (überabzählbar unendlich) repräsentiert, der Lösungsraum für Sorte `Int` also kleiner ist.

Erstaunlich ist die dominante Performance von `Z3` mit Kodierung in `QF_LIA` und Optimierung mit inkrementellem Verfeinern. In fast allen Testfällen liefert diese Konfiguration die beste Lösung. Besonders bemerkenswert sind dabei die Testfälle 2, 18 und 20. Die Konfiguration liefert dort als einzige die zertifiziert optimalen Lösungen. Diese Ergebnisse stehen in Konflikt zu jenen der SMT-COMP 2024, in welcher `Z3` klar hinter `OpenSMT` einzuordnen ist [BBJ24]. Möglicherweise liegt das am niedrigen Verhältnis arithmetischer Unbekannter zu booleschen Unbekannten in der Modellierung des Pressenplanungsproblems. In den meisten Benchmarks der SMT-COMP 2024 für `QF_LIA` sind die Unbekannten fast ausschließlich von der Sorte `Int`.

Die Konfiguration mit der Optimierung nach linearen Verfahren in `OMT`, `Z3` und `QF_LIA` liefert für einfache Testfälle wie 1,2,3 oder 5 ebenfalls optimale Ergebnisse, für größere Testfälle allerdings gar keine. Das ist durch interne Beschränkungen von `Z3`'s Optimierungsmethodik und das Fehlen der Ausgabe von Zwischenergebnissen zu erklären.

Betrachten wir nun die beste Konfiguration mit inkrementellem Verfeinern, Kodierung in `QF_LIA` und Solver `Z3` etwas genauer. Das Finden und Zertifizieren der optimalen Lösung scheint für Probleminstanzen, bei welchen eine Lösung ohne Rest existiert am einfachsten. Testfall 20 zeigt, dass das sogar für größere Eingaben innerhalb von zehn Minuten möglich ist. Hingegen deuten die Testfälle 4, 13 und 17 darauf hin, dass der Nachweis von Optimalität selbst für kleine Testfälle, bei denen keine Lösung mit Rest null existiert, sehr schwer ist. Das ist so, weil der Solver erst nachweisen muss, dass keine andere Lösung existiert, die besser ist. Für den Fall mit Rest null entsteht ein einfacher Widerspruch zu Constraint 17 in Abschnitt 5.4. Bei allen anderen Fällen mit Rest  $w > 0$  müssen alle möglichen  $w$  besseren Lösungen als unerfüllbar nachgewiesen werden.

Die Lösung der größten Probleminstanzen 11, 12, 25 und 26 ist mit Betrachtung des Rests vermutlich weit vom Optimum entfernt. Unter allen Testfällen bleibt ein Testfall (12) innerhalb von zehn Minuten sogar gänzlich ungelöst. Testfälle wie dieser mit über 250 Bauteilen und mehr als acht Pressen stellen die größtmöglichen und damit schwierigsten Eingaben aus der Realität dar. Auch, wenn sowohl Anzahl Unbekannter und Formeln, als auch Größe letzterer linear zur Eingabe steigen (Abschnitt 2.2), scheint die Schwere des Problems mit erhöhter Komplexität des Constraint-Systems weitaus stärker zu wachsen. Große Probleme vergrößern nicht nur den Lösungsraum, sondern erhöhen auch die Anforderungen des Solvers an die Hardware. Laufzeitmessungen auf einer Maschine mit 128 GB Arbeitsspeicher mit Timeout nach zehn Stunden (Anhang B, Tabelle 2) zeigen für Probleme 11, 12, 25 und 26 Arbeitsspeichernutzung von bis zu 40 GB pro Problem. Je länger der Solver-Prozess läuft, desto mehr Speicher benötigt er, weil er Lemmas lernt (DPLL(T), Abschnitt 3.1).

Während auch größere Probleme wie Testfall 24 ohne Rest innerhalb von zehn Stunden optimal gelöst werden können, kann selbst der kleine Testfall 4 nach zehn Stunden noch immer nicht optimal vom Solver gelöst werden. Testfälle 11 und 12 demonstrieren, dass die Solver mit mehr Laufzeit auch für die größten Probleme signifikant bessere Lösungen finden.

### **6.3. Vergleich mit Germanedge's Heuristik**

### **6.4. Diskussion**

## **7. Zusammenfassung**

## Literatur

- [Ans+11] Carlos Ansótegui u. a. „Satisfiability Modulo Theories: An Efficient Approach for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem“. In: Jan. 2011, S. 2–9. ISBN: 9781577355434.
- [Bar+22] Haniel Barbosa u. a. „cvc5: A Versatile and Industrial-Strength SMT Solver“. In: *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems*. Hrsg. von Dana Fisman und Grigore Rosu. Cham: Springer International Publishing, 2022, S. 415–442. ISBN: 978-3-030-99524-9.
- [BBJ24] Martin Bromberger, François Bobot und Martin Jonáš. *SMT-COMP 2024 Results*. Abgerufen am: 18.09.2024. 2024. URL: <https://smt-comp.github.io/2024/results/>.
- [BFT17] Clark Barrett, Parcal Fontaine und Cesare Tinelli. *The SMT-LIB Standard Version 2.6*. Techn. Ber. Abgerufen am: 21.08.2024. Department of Computer Science, The University of Iowa, 2017. URL: <https://smt-lib.org/papers/smt-lib-reference-v2.6-r2017-07-18.pdf>.
- [Bjø+19] Nikolaj Bjørner u. a. „Programming Z3“. In: Springer Nature, Apr. 2019, S. 148–201.
- [BMS05] Clark Barrett, Leonardo de Moura und Aaron Stump. „SMT-COMP: Satisfiability Modulo Theories Competition“. In: *Computer Aided Verification*. Hrsg. von Kousha Etessami und Sriram K. Rajamani. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 20–23. ISBN: 978-3-540-31686-2.
- [BPF15] Nikolaj S. Bjørner, Anh-Dung Phan und Lars Fleckenstein. „νZ - An Optimizing SMT Solver“. In: *International Conference on Tools and Algorithms for Construction and Analysis of Systems*. 2015. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17542710>.
- [BRA13] EDWIN BRADY. „Idris, a general-purpose dependently typed programming language: Design and implementation“. In: *Journal of Functional Programming* 23 (Sep. 2013). DOI: 10.1017/S095679681300018X.
- [Bru+10] Roberto Bruttomesso u. a. „The OpenSMT Solver“. In: *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems*. Hrsg. von Javier Esparza und Rupak Majumdar. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, S. 150–153. ISBN: 978-3-642-12002-2.
- [Bru24a] Julian Bruder. *hasmtlib: A monad for interfacing with external SMT solvers*. Version 2.3.2. Abgerufen am: 20.08.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib>.
- [Bru24b] Julian Bruder. *hasmtlib: A monad for interfacing with external SMT solvers*. Version 2.4.0. Abgerufen am: 25.08.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib-2.4.0/docs/src/Language.Hasmtlib.Type.Expr.html#Expr>.

- [Bru24c] Julian Bruder. *hasmtlib: A monad for interfacing with external SMT solvers*. Version 2.4.0. Abgerufen am: 25.08.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib-2.4.0/docs/src/Language.Hasmtlib.Type.SMTSort.html#SSMTSort>.
- [Bru24d] Julian Bruder. *hasmtlib: A monad for interfacing with external SMT solvers*. Version 2.5.0. Abgerufen am: 26.08.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/hasmtlib-2.5.0/docs/src/Language.Hasmtlib.Counting.html#count%27>.
- [BT18] Clark Barrett und Cesare Tinelli. „Satisfiability Modulo Theories“. In: *Handbook of Model Checking*. Hrsg. von Edmund M. Clarke u. a. Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 305–343. ISBN: 978-3-319-10575-8. DOI: 10.1007/978-3-319-10575-8\_11. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10575-8\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10575-8_11).
- [Che10] Jingchao Chen. „A New SAT Encoding of the At-Most-One Constraint“. In: 2010. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15322159>.
- [DB08] Leonardo De Moura und Nikolaj Bjørner. „Z3: an efficient SMT solver“. In: *Proceedings of the Theory and Practice of Software, 14th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. TACAS’08/ETAPS’08*. Budapest, Hungary: Springer-Verlag, 2008, S. 337–340. ISBN: 3540787992.
- [DKG13] Olfa Dridi, Saoussen Krichen und Adel Guitouni. „Solving resource-constrained project scheduling problem by a genetic local search approach“. In: *2013 5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*. 2013, S. 1–5. DOI: 10.1109/ICMSAO.2013.6552544.
- [Dut14] Bruno Dutertre. „Yices 2.2“. In: *Computer Aided Verification*. Hrsg. von Armin Biere und Roderick Bloem. Cham: Springer International Publishing, 2014, S. 737–744. ISBN: 978-3-319-08867-9.
- [EW12] Richard A. Eisenberg und Stephanie Weirich. „Dependently typed programming with singletons“. In: *Proceedings of the 2012 Haskell Symposium*. Haskell ’12. Copenhagen, Denmark: Association for Computing Machinery, 2012, S. 117–130. ISBN: 9781450315746. DOI: 10.1145/2364506.2364522. URL: <https://doi.org/10.1145/2364506.2364522>.
- [GBT07] Yeting Ge, Clark Barrett und Cesare Tinelli. „Solving Quantified Verification Conditions Using Satisfiability Modulo Theories“. In: Apr. 2007, S. 167–182. ISBN: 978-3-540-73594-6. DOI: 10.1007/978-3-540-73595-3\_12.
- [Gil14] Andy Gill. „Domain-specific Languages and Code Synthesis Using Haskell: Looking at embedded DSLs“. In: *Queue* 12.4 (Apr. 2014), S. 30–43. ISSN: 1542-7730. DOI: 10.1145/2611429.2617811. URL: <https://doi.org/10.1145/2611429.2617811>.

- [GM09] Yeting Ge und Leonardo de Moura. „Complete Instantiation for Quantified Formulas in Satisfiability Modulo Theories“. In: *Computer Aided Verification*. Hrsg. von Ahmed Bouajjani und Oded Maler. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, S. 306–320. ISBN: 978-3-642-02658-4.
- [Hen08] Fritz Henglein. „Generic discrimination: sorting and partitioning unshared data in linear time“. In: *SIGPLAN Not.* 43.9 (Sep. 2008), S. 91–102. ISSN: 0362-1340. DOI: 10.1145/1411203.1411220. URL: <https://doi.org/10.1145/1411203.1411220>.
- [Hud+07] Paul Hudak u. a. „A history of Haskell: Being lazy with class“. In: Juni 2007, S. 1–55. DOI: 10.1145/1238844.1238856.
- [KGK19] Gergely Kovásznai, Krisztián Gajdár und Laura Kovács. „Portfolio SAT and SMT Solving of Cardinality Constraints in Sensor Network Optimization“. In: *2019 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*. 2019, S. 85–91. DOI: 10.1109/SYNASC49474.2019.00021.
- [Kme22] Edward A. Kmett. *discrimination: Fast generic linear-time sorting, joins and container construction*. Version 0.5. Abgerufen am: 27.09.2024. 2022. URL: <https://hackage.haskell.org/package/discrimination>.
- [Kme24] Edward A. Kmett. *lens: Lenses, Folds and Traversals*. Version 5.3.2. Abgerufen am: 16.09.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/lens>.
- [KSV19] Petr Kučera, Petr Savický und Vojtěch Vorel. „A lower bound on CNF encodings of the at-most-one constraint“. In: *Theoretical Computer Science* 762 (2019), S. 51–73. ISSN: 0304-3975. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.09.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397518305681>.
- [Liu+14] Tianhai Liu u. a. „A Comparative Study of Incremental Constraint Solving Approaches in Symbolic Execution“. In: *Hardware and Software: Verification and Testing*. Hrsg. von Eran Yahav. Cham: Springer International Publishing, 2014, S. 284–299. ISBN: 978-3-319-13338-6.
- [LLC21] Daeyeal Lee, Bill Lin und Chung-Kuan Cheng. „SMT-Based Contention-Free Task Mapping and Scheduling on 2D/3D SMART NoC with Mixed Dimension-Order Routing“. In: *ACM Trans. Archit. Code Optim.* 19.1 (Dez. 2021). ISSN: 1544-3566. DOI: 10.1145/3487018. URL: <https://doi.org/10.1145/3487018>.
- [Nor09] Ulf Norell. „Dependently Typed Programming in Agda“. In: Jan. 2009, S. 1–2. ISBN: 978-3-642-04651-3. DOI: 10.1007/978-3-642-04652-0\_5.
- [NPZ24] Aina Niemetz, Mathias Preiner und Yoni Zohar. „Scalable Bit-Blasting with Abstractions“. In: *Computer Aided Verification*. Hrsg. von Arie Gurfinkel und Vijay Ganesh. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024, S. 178–200. ISBN: 978-3-031-65627-9.
- [Pey+06] Simon Peyton Jones u. a. „Simple Unification-based Type Inference for GADTs“. In: *International Conference on Functional Programming (ICFP)*. ACM, 2006. DOI: 10.1145/1159803.1159811.



- [SCK04] Sean Seefried, Manuel Chakravarty und Gabriele Keller. „Optimising Embedded DSLs Using Template Haskell“. In: *Generative Programming and Component Engineering*. Hrsg. von Gabor Karsai und Eelco Visser. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 186–205. ISBN: 978-3-540-30175-2.
- [TBT24] Nestan Tsiskaridze, Clark Barrett und Cesare Tinelli. „Generalized Optimization Modulo Theories“. In: *Automated Reasoning*. Hrsg. von Christoph Benzmüller, Marijn J.H. Heule und Renate A. Schmidt. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024, S. 458–479. ISBN: 978-3-031-63498-7.
- [Tib24] Johan Tibell. *cassava: A CSV parsing and encoding library*. Version 0.5.3.2. Abgerufen am: 16.09.2024. 2024. URL: <https://hackage.haskell.org/package/cassava>.
- [VAB18] Saurabh Vaidya, Prashant Ambad und Santosh Bhosle. „Industry 4.0 – A Glimpse“. In: *Procedia Manufacturing* 20 (2018). 2nd International Conference on Materials, Manufacturing and Design Engineering (iCMMD2017), 11-12 December 2017, MIT Aurangabad, Maharashtra, INDIA, S. 233–238. ISSN: 2351-9789. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.02.034>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2351978918300672>.



# Appendix

## A. Erweiterungen von Hasmtlib

```
1 count :: forall t f. (Functor f, Foldable f, Num (Expr t))
2   => f (Expr BoolSort) -> Expr t
3 count = sum . fmap (\b -> ite b 1 0)
4
5 exactly :: forall t f. (Functor f, Foldable f, KnownSMTSort t
6   , Num (HaskellType t), Ord (HaskellType t))
7   => Expr t -> f (Expr BoolSort) -> Expr BoolSort
8 exactly 0 xs = nand xs
9 exactly 1 xs = atMost @t 1 xs && atLeast @t 1 xs
10 exactly k xs = count xs === k
11
12 atLeast :: forall t f. (Functor f, Foldable f, KnownSMTSort t
13   , Num (HaskellType t), Ord (HaskellType t))
14   => Expr t -> f (Expr BoolSort) -> Expr BoolSort
15 atLeast 0 = true
16 atLeast 1 = or
17 atLeast k = (>=? k) . count
18
19 atMost :: forall t f. (Functor f, Foldable f, KnownSMTSort t
20   , Num (HaskellType t), Ord (HaskellType t))
21   => Expr t -> f (Expr BoolSort) -> Expr BoolSort
22 atMost 0 = nand
23 atMost 1 = productEncoding
24 atMost k = (<=? k) . count
25
26 productEncoding :: (Foldable f, Boolean b) => f b -> b
27 productEncoding xs
28   | length xs < 10 = amoQuad $ toList xs -- pair-wise encoding
29   | otherwise =
30     let n = toInteger $ length xs
31         p = ceiling $ sqrt $ fromInteger n
32         rows = splitEvery (fromInteger p) $ toList xs
33         columns = transpose rows
34         vs = or <$> rows
35         us = or <$> columns
36     in productEncoding vs && productEncoding us &&
37       and (imap (\j r -> and $
38         imap (\i x -> (x ==> us !! i) && (x ==> vs !! j)) r)
39         rows)
40 where
41   splitEvery n = takeWhile (not . null) . map (take n) . iterate (drop n)
```

Listing 19: Anzahl-Constraints in Hasmtlib [Bru24d]

```

1 solveMinimized = solveOptimized (<?)
2 solveMaximized = solveOptimized (>?)
3
4 solveOptimized :: (MonadIncrSMT Pipe m, MonadIO m, KnownSMTSort t)
5   => (Expr t -> Expr t -> Expr BoolSort) -- optimization comparison
6   -> Expr t                               -- term to optimize
7   -> Maybe (Expr t -> Expr t)             -- step-size-adjustment
8   -> Maybe (Solution -> IO ())           -- access to intermediate results
9   -> m (Result, Solution)
10 solveOptimized op goal mStep mDebug = refine Unsat mempty goal 0
11   where
12     refine oldRes oldSol target n_pushes = do
13       res <- checkSat
14       case res of
15         Sat    -> do
16           sol <- getModel
17           case decode sol target of
18             Nothing      -> return (Sat, mempty)
19             Just targetSol -> do
20               case mDebug of
21                 Nothing   -> pure ()
22                 Just debug -> liftIO $ debug sol
23               push
24               let step = fromMaybe id mStep
25               assert $ target `op` step (encode targetSol)
26               refine res sol target (n_pushes + 1)
27         r -> do
28           if n_pushes < 1
29           then return (r, mempty)
30           else case mStep of
31             Nothing -> do
32               replicateM_ n_pushes pop
33               return (oldRes, oldSol)
34             Just _ -> do
35               pop
36               -- make sure the very last step did not skip the optimal result
37               opt <- solveOptimized op goal Nothing mDebug
38               replicateM_ (n_pushes - 1) pop
39               return opt

```

Listing 20: Incremental Refinement in Hasmtlib [Bru24d]

## B. Laufzeitmessungen

Eingabe				Problem							Lösung				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Typ	Logik	Solver	$p$	Größe	$\#\mathbb{B}$	$\#\mathbb{Z}$	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
1	Trivial	15	1	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	1	0	1	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					1		1	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
2	Simple	20	2	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	18	0	1	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					10		1	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
3	Simple2	40	2	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	49	0	1	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					50		1	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					3		1	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					8		1	0	✓
4	Small	27	6	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	TO	0	3	298	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		3	298	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		3	298	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
5	Optimal	41	6	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	2	0	1	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					1		1	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
6	Optimal2	82	6	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	TO	0	2	58034	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		2	6000	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					351		2	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
7	Optimal3	123	6	SMT	QF_LRA	OpenSMT	2	0	??	??	TO	0	3	87150	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		3	87150	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		3	60006	✗

Eingabe				Problem							Lösung				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Typ	Logik	Solver	$p$	Größe	$\#\mathbb{B}$	$\#\mathbb{Z}$	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
8	2082510	39	8	SMT	QF_LRA	OpenSMT	2	??	??	??	TO	0	4	16114	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		4	5359	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		4	5359	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
9	2082539	82	6	SMT	QF_LRA	OpenSMT	2	??	??	??	TO	0	2	13600	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		2	14996	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		2	11807	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
10	2082518	103	10	SMT	QF_LRA	OpenSMT	7	??	??	??	TO	0	8	83362	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		8	83363	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		8	17228	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
11	Large	193	2	SMT	QF_LRA	OpenSMT	5	??	??	??	TO	0	7	215950	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		7	215950	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		6	110703	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
12	Big	264	17	SMT	QF_LRA	OpenSMT	7	??	??	??	TO	-	-	-	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		-	-	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	✗
13	Diverse	25	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	TO	0	1	500	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		1	500	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		1	500	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		2	0	✗
14	DiverseOpt	26	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	1	0	1	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					1		1	0	✓

Eingabe				Problem							Lösung				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Typ	Logik	Solver	$p$	Größe	$\#\mathbb{B}$	$\#\mathbb{Z}$	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
				SMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					1		1	0	✓
15	Diverse2	50	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	9	0	2	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					10		2	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					31		2	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					5		2	0	✓
16	Diverse2Opt	52	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT	1	??	??	??	8	0	2	0	✓
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					8		2	0	✓
				SMT	QF_LIA	Z3					4		2	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					2		2	0	✓
17	Diverse3	75	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT	2	??	??	??	TO	0	3	3300	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		3	3300	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		3	500	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					50		4	0	✗
18	Diverse3Opt	78	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT	2	??	??	??	TO	0	4	51300	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		4	51300	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					47		3	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		4	0	✗
19	Diverse4	100	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT	3	??	??	??	TO	0	5	23800	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		5	28200	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		4	3208	✗
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		5	0	✗
20	Diverse4Opt	104	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT	3	??	??	??	TO	0	5	32950	✗
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		5	51400	✗
				SMT	QF_LIA	Z3					575		4	0	✓
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		5	0	✗
				SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		5	4900	✗
21	Diverse5	125	25				4	??	??	??		0			

Eingabe				Problem							Lösung				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Typ	Logik	Solver	$p$	Größe	$\#\mathbb{B}$	$\#\mathbb{Z}$	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
				SMT	QF_LIA	OpenSMT					TO		5	4900	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		5	2516	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		6	0	<b>X</b>
22	Diverse5Opt	130	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		6	40800	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	OpenSMT	4	??	??	??	TO	0	6	40800	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		6	23458	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		6	0	<b>X</b>
23	Diverse7	175	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		8	56000	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	OpenSMT	6	??	??	??	TO	0	8	56000	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		7	7700	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	<b>X</b>
24	Diverse7Opt	182	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		8	48950	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	OpenSMT	6	??	??	??	TO	0	8	48950	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		8	47300	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	<b>X</b>
25	Diverse10	250	25	SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		-	-	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	OpenSMT	9	??	??	??	TO	0	-	-	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		11	52858	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	<b>X</b>
26	Diverse10Opt	260	26	SMT	QF_LRA	OpenSMT					TO		11	55800	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	OpenSMT	9	??	??	??	TO	0	11	55800	<b>X</b>
				SMT	QF_LIA	Z3					TO		11	75211	<b>X</b>
				OMT	QF_LIA	Z3					TO		-	-	<b>X</b>

Tabelle 1.: Vergleich der Programm-Konfigurationen mit Timeout nach zehn Minuten












Eingabe				Problem							Lösung				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Typ	Logik	Solver	$p$	Größe	$\#\mathbb{B}$	$\#\mathbb{Z}$	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
4	Small	27	6	SMT OMT	QF_LIA	Z3	1	0	??	??	TO TO	0	3 -	298 -	 
7	Optimal3	123	6	SMT OMT	QF_LIA	Z3	2	0	??	??	20571 14994	0	3 3	0 0	 
11	Large	193	2	SMT OMT	QF_LIA	Z3	6	0	??	??	TO ??	0	6 ??	63883 ??	 ??
12	Big	264	17	SMT OMT	QF_LIA	Z3	8	0	??	??	TO ??	0	9 ??	205437 ??	 ??
22	Diverse5Opt	130	26	SMT OMT	QF_LIA	Z3	4	0	??	??	632 9788	0	5 5	0 0	 
24	Diverse7Opt	182	26	SMT OMT	QF_LIA	Z3	6	0	??	??	35806 ??	0	7 ??	0 ??	 ??

Tabelle 2.: Vergleich der Programm-Konfigurationen mit Timeout nach zehn Stunden

Eingabe				Heuristik				Constraint-System				
Nr.	Name	$ C $	$ C_{Spec} $	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zeit in s	$ C_{Not} $	$ P $	Rest in mm	Zert.
1	Trivial	15	1	1	0	1	0	1	0	1	0	✓
2	Simple	20	2	1	0	1	0	1	0	1	0	✓
3	Simple2	40	2	1	0	1	0	3	0	1	0	✓
4	Small	27	6	23	1	3	378	TO	0	3	298	✗
5	Optimal	41	6	1	0	1	0	1	0	1	0	✓
6	Optimal2	82	6	143	1	3	0	351	0	2	0	✓
7	Optimal3	123	6	233	0	5	0	TO	0	3	60006	✗
8	2082510	39	8	28	3	4	1016	TO	0	4	5359	✗
9	2082539	82	6	TO	2	2	0	TO	0	2	11807	✗
10	2082518	103	10	TO	1	9	2434	TO	0	8	17228	✗
11	Large	193	2	TO	1	7	2000	TO	0	6	110703	✗
12	Big	264	17	7	0	9	11331	TO	-	-	-	✗
13	Diverse	25	25	45	0	1	500	TO	0	1	500	✗
14	DiverseOpt	26	26	12	0	1	0	1	0	1	0	✓
15	Diverse2	50	25	78	0	3	0	31	0	2	0	✓
16	Diverse2Opt	52	26	214	0	3	750	4	0	2	0	✓
17	Diverse3	75	25	45	0	3	500	TO	0	3	500	✗
18	Diverse3Opt	78	26	36	0	4	0	47	0	3	0	✓
19	Diverse4	100	25	55	0	5	500	TO	0	4	3208	✗
20	Diverse4Opt	104	26	108	0	5	0	575	0	4	0	✓
21	Diverse5	125	25	98	0	5	500	TO	0	5	2516	✗
22	Diverse5Opt	130	26	48	0	6	0	TO	0	6	23458	✗
23	Diverse7	175	25	TO	1	7	0	TO	0	7	7700	✗
24	Diverse7Opt	182	26	140	0	8	750	TO	0	8	47300	✗
25	Diverse10	250	25	296	0	12	750	TO	0	11	52858	✗
26	Diverse10Opt	260	26	TO	1	11	0	TO	0	11	75211	✗

Tabelle 3.: Vergleich der Programm-Konfiguration (SMT, Z3, QF LIA) mit Germanedge's Heuristik

## **Danksagung**

Zuallererst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Waldmann für das im Wintersemester 2023/2024, in der Vorlesung Constraint-Programmierung geweckte Interesse an jener bedanken. Vielen Dank auch für Ihre zahlreichen Hinweise und Vorschläge während dieser Bachelorarbeit. Weiter möchte ich meinen Dank der Germanedge Solutions GmbH und dort besonders Dr. Christoph Schumacher aussprechen, die diese Bachelorarbeit ermöglicht haben. Abschließend auch ein großes Dankeschön an Dr. Sebastian Möbius, welcher mir als Firmenbetreuer jederzeit alle Fragen bestens beantwortet hat.

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Die den verwendeten Quellen und Hilfsmitteln wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Mir sind die strafrechtlichen Konsequenzen einer falschen eidesstattlichen Erklärung bekannt.

Leipzig, den 3. Oktober 2024