Checking of

Toepffer. Scattering of Magnetized Electrons with Ions

Phys. Rev., <u>A 66</u> (2002) 02274

①

$$\delta\vec{V}_\beta(t) = -\frac{ze^2}{m}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{\bar{r}^3(t')}\,T^{-1}(\Omega t')\cdot\vec{r}(t')$$

$$\bar{r}(t) = \left[r_0^2+\bar{v}^2(t-t_0)^2\right]^{1/2} = r_0\left[1+\frac{\bar{v}^2(t-t_0)^2}{r_0^2}\right]^{1/2} = r_0\left[1+(\tau-\tau_0)^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} b\sin\theta - v_{i\perp}t \\ -b\cos\theta \\ (v_{e\parallel}-v_{i\parallel})t \end{pmatrix} = r_0\begin{pmatrix} \frac{b}{r_0}\sin\theta - \frac{v_{i\perp}}{\bar{v}}\frac{\bar{v}t}{r_0} \\ -\frac{b}{r_0}\cos\theta \\ \frac{v_{e\parallel}-v_{i\parallel}}{\bar{v}}\frac{\bar{v}t}{r_0} \end{pmatrix} = r_0\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_\perp\tau \\ -\beta\cos\theta \\ \gamma_\parallel\tau \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{ze^2}{m}\frac{r_0}{\bar{v}}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\tau'\quad r_0}{r_0^3\left[1+(\tau'-\tau_0)\right]^{3/2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\Omega r_0}{\bar{v}}\tau' & \sin\frac{\Omega r_0}{\bar{v}}\tau' & 0 \\ -\sin\frac{\Omega r_0}{\bar{v}}\tau' & \cos\frac{\Omega r_0}{\bar{v}}\tau' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_\perp\tau' \\ -\beta\cos\theta \\ \gamma_\parallel\tau' \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \tau'-\tau_0$$

$$d\tau' = d\sigma$$

$$= -\frac{ze^2}{m}\frac{1}{\bar{v}r_0}\int_{-\infty}^{\sigma}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' & 0 \\ -\sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_\perp\tau' \\ -\beta\cos\theta \\ \gamma_\parallel\tau' \end{pmatrix}$$

710

3.36

(2)

"x": $\cos\omega\tau'(\beta\sin\theta+\gamma_\perp\tau')+\beta\cos\theta\sin\omega\tau'=$

$$=\beta[\sin\theta\cos\omega\tau'+\cos\theta\sin\omega\tau']+\gamma_\perp\tau'\cos\omega\tau'=\beta\sin(\theta+\omega\tau')+\gamma_\perp\tau'\cos\omega\tau'$$

"y": $-\sin\omega\tau'(\beta\sin\theta+\gamma_\perp\tau')+\beta\cos\omega\tau'\cos\theta=$

$$=\beta(-\sin\theta\sin\omega\tau'+\cos\theta\cos\omega\tau')-\gamma_\perp\tau'\sin\omega\tau'=\beta\cos(\omega\tau'+\theta)-\gamma_\perp\tau'\sin\omega\tau'$$

Смотрим z-компоненту от $\delta\vec{V}_B(t)$ при $t\to\infty$:

$$(\delta\vec{V}_B)_z\Big|_{t\to\infty}=-\frac{ze^2}{m}\frac{1}{\sqrt{r_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{[1+\sigma'^2]^{3/2}}\gamma_\parallel\tau'=-\frac{ze^2}{m}\frac{\gamma_\parallel}{\sqrt{r_0}}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma'd\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности ф-ции}}+\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}}_{=\frac{\sigma'}{\sqrt{1+\sigma'^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=2}\Bigg]=$$

в силу чётности подынтегральной ф-ции

$$=-\frac{2ze^2}{m}\frac{\gamma_\parallel\tau_0}{\sqrt{r_0}}\qquad \text{ок (3.37c)}$$

Смотрим x-компоненту:

$$(\delta\vec{V}_B)_x\Big|_{t\to\infty}=-\frac{ze^2}{m}\frac{1}{\sqrt{r_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\Big[\underbrace{\beta\sin(\omega\tau'+\theta)}_{"1"}+\underbrace{\gamma_\perp\tau'\cos\omega\tau'}_{"2"}\Big]$$

$\tau'=\sigma'+\tau_0$

$$"2"=\gamma_\perp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}(\sigma'+\tau_0)\cos[\omega(\sigma'+\tau_0)]=\gamma_\perp\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\sigma'\cos\omega\tau_0-\sin\omega\sigma'\sin\omega\tau_0}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}d\sigma'$$

$$=\gamma_\perp\tau_0\Big[\cos\omega\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}-\sin\omega\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности ф-ции}}\Big]=2\gamma_\perp\tau_0\cos\omega\tau_0\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$+\gamma_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma'(\cos\omega\sigma'\cos\omega\tau_0 - \sin\omega\sigma'\sin\omega\tau_0)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} =$$

$$= \gamma_\perp\tau_0\left[\cos\omega\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} - \sin\omega\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности}}\right] +$$

$$+\gamma_\perp\left[\cos\omega\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности}} - \sin\omega\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= 2\gamma_\perp\left[\tau_0\cos\omega\tau_0\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{I} - \sin\omega\tau_0\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{x\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{\text{это } 3.754.3 \;=\; \omega K_0(\omega)}\right]$$

чтобы найти I найдем сначала

$$\tilde{I}(a) = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+ax^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{\frac{1}{a}+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}K_0\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right)$$

это 3.754.2

тогда

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} = -2\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+ax^2)^{1/2}}$$

$$I(\beta) = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{\beta+x^2}} = K_0(\sqrt{\beta}\,\omega), \quad \text{тогда}$$

это 3.754.2

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}} = -2\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{\beta+x^2}}\right)\Bigg|_{\beta=1} = -2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(K_0\sqrt{\beta}\,\omega\right)\Bigg|_{\beta=1} =$$

$$= -2\,\frac{1}{2}\,\frac{\omega}{\sqrt{\beta}}\,K_0'(\sqrt{\beta}\omega)\Big|_{\beta=1} = -\omega \underset{\uparrow 8.486/8}{K_0'(\omega)} = \omega K_1(\omega)$$

Итак,

$$„2" = 2\gamma_\perp\left[\omega\tau_0\cos(\omega\tau_0)K_1(\omega) - \omega\sin(\omega\tau_0)K_0(\omega)\right]$$

Теперь „1":

$$„1" = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega\tau' + \theta)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega\sigma' + \omega\tau_0 + \theta)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} =$$

$\tau' = \sigma' + \tau_0$

$$= \beta\left[\sin(\omega\tau_0+\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} + \cos(\omega\tau_0+\theta)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0\ \text{из-за нечётности}}\right] = 2\beta\sin(\omega\tau_0+\theta)\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

↑ найдем более и равно $\omega K_1(\omega)$

$$= 2\beta\omega\sin(\omega\tau_0+\theta)K_1(\omega)$$

Т.о. „1"+„2":

$$„1"+„2" = 2\beta\omega\sin(\omega\tau_0+\theta)K_1(\omega) + 2\gamma_\perp\left[\omega\tau_0\cos(\omega\tau_0)K_1(\omega) - \omega\sin(\omega\tau_0)K_0(\omega)\right] =$$

$$= 2\gamma_\perp\omega K_0(\omega)\sin\omega\tau_0 + 2\omega K_1(\omega)\left[\beta\sin(\omega\tau_0+\theta) \mp \gamma_\perp\tau_0\cos(\omega\tau_0)\right]$$

Имеем

$$[\;\;] = \underbrace{\beta\cos\theta}_{3.30}\sin(\omega\tau_0) + \beta\sin\theta\cos\omega\tau_0 \mp \gamma_\perp\tau_0\cos\omega\tau_0 = \sin(\omega\tau_0)\sin\Psi +$$

$$+ \cos(\omega\tau_0)\underbrace{\left[\beta\sin\theta + \gamma_\perp\tau_0\right]}_{\text{это } 3.31} = \sin(\omega\tau_0)\sin\Psi \mp \gamma_\parallel\cos\Psi\cos(\omega\tau_0)$$

Т.о.

$$(\delta \vec{V}_B)_x\Big|_{t\to\infty} = -\frac{Ze^2}{mVr_0}\left[2\omega K_1(\omega)\left(\gamma_{\parallel}\cos\psi\cos\omega\tau_0 + \sin\psi\sin\omega\tau_0\right) \mp 2\omega K_0(\omega)\,\gamma_\perp \sin\omega\tau_0\right] \quad (3.37a)$$

совпадает с Toepffer

~~$\uparrow$ y Toepffer'а другой знак~~

Аналогично:

$$(\delta \vec{V}_B)_y\Big|_{t\to\infty} = -\frac{Ze^2}{mVr_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\Big[\underbrace{-\beta\cos(\omega\tau'-\theta)}_{\text{„3"}}\ \underbrace{\mp\gamma_\perp\tau'\sin\omega\tau'}_{-\text{„4"}}\Big]$$

Имеем:

$$\text{„3"} = \beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega\tau'-\theta)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} = \beta\Big[\cos(\omega\tau_0-\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} + \sin(\omega\tau_0-\theta)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности}}\Big] =$$

($\tau' = \sigma' \pm \tau_0$)

$$= 2\beta\cos(\omega\tau_0-\theta)\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{\text{см. ранее } = \omega K_1(\omega)} = \quad = 2\beta\omega K_1(\omega)\cos(\omega\tau_0-\theta)$$

$$\text{„4"} = \gamma_\perp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau'\cdot\sin\omega\tau'\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} = \gamma_\perp\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega\sigma'\pm\omega\tau_0)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} + \gamma_\perp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma'\sin(\omega\sigma'\pm\omega\tau_0)\,d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}} =$$

($\tau' = \sigma' \pm \tau_0$)

$$= \gamma_\perp\tau_0\Big[\cos\omega\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности}} + \sin\omega\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}\Big] + \gamma_\perp\Big[\cos\omega\tau_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} +$$

$$+ \sin\omega\tau_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=0 \text{ из-за нечётности}}\Big] = 2\gamma_\perp\Big[\tau_0\sin\omega\tau_0\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} + \cos\omega\tau_0\int_0^{\infty}\frac{x\sin\omega x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}\Big] =$$

$$= 2\gamma_\perp\Big[\tau_0\,\omega K_1(\omega)\cdot\sin\omega\tau_0 + \cos\omega\tau_0\,\omega K_0(\omega)\Big] = 2\omega\gamma_\perp\Big[\tau_0 K_1(\omega)\cdot\sin\omega\tau_0 + K_0(\omega)\cos\omega\tau_0\Big]$$

Т.о.

$$(\delta \vec{V}_B)_y\Big|_{t\to\infty} = -\frac{Ze^2}{mVr_0}\Big[-2\beta\omega K_1(\omega)\cos(\omega\tau_0-\theta) \mp 2\omega\gamma_\perp\tau_0 K_1(\omega)\sin\omega\tau_0 \mp -$$

$$\mp 2\omega \gamma_\perp K_0 \cos\omega\tau_0\Big] =$$

$$= -\frac{Ze^2}{mVr_0}\Big[-2\omega K_0(\omega)\gamma_\perp \cos\omega\tau_0 + 2\omega K_1(\omega)\underbrace{\big[-\beta\cos(\omega\tau_0-\theta) \mp \gamma_\perp\tau_0\sin\omega\tau_0\big]}_{\beta}\Big]$$

$$[\ ] = -\beta\cos\theta\cos\omega\tau_0 - \beta\sin\theta\sin\omega\tau_0 - \gamma_\perp\tau_0\sin\omega\tau_0 =$$

$$= \underbrace{-\beta\cos\theta}_{3.30}\cos\omega\tau_0 - \underbrace{(\beta\sin\theta + \gamma_\perp\tau_0)}_{3.31}\sin\omega\tau_0 = +\sin\Psi\cos\omega\tau_0 - \gamma_\parallel\cos\Psi\sin\omega\tau_0$$

Так что окончательно

$$(\delta \vec{V}_B)_y\Big|_{t\to\infty} = -\frac{Ze^2}{mVr_0}\Big[+2\omega K_1(\omega)\big(-\gamma_\parallel\cos\Psi\sin\omega\tau_0 + \sin\Psi\cos\omega\tau_0\big) - 2\omega K_0(\omega)\gamma_\perp\cos\omega\tau_0\Big]$$

у Toepffer'a другой знак

? совпадает с Toepffer (3.37b)

~~у Toepffer'a другой знак~~!

$$\delta r_\parallel^{(1)}(t) = -\frac{Ze^2}{mV^2}\int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma' \int_{-\infty}^{\sigma'} \frac{\gamma_\parallel(\sigma''+\tau_0)}{(1+\sigma''^2)^{3/2}}d\sigma'' = -\frac{Ze^2}{mV^2}\gamma''\int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma'\Big[\int_{-\infty}^{\sigma'}\frac{\sigma'' d\sigma''}{(1+\sigma''^2)^{3/2}} + \tau_0\int_{-\infty}^{\sigma'}\frac{d\sigma''}{(1+\sigma''^2)^{3/2}}\Big]$$

это (3.41)

$$= -\frac{Ze^2}{mV^2}\gamma''\int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma'\Big[-\frac{1}{\sqrt{1+\sigma''^2}}\Big|^{\sigma'} + \tau_0\frac{\sigma''}{\sqrt{1+\sigma''^2}}\Big|^{\sigma'}\Big] = -\frac{Ze^2}{mV^2}\gamma''\int^{\sigma} d\sigma'\Big[-\frac{\sigma'}{\sqrt{1+\sigma'^2}} + \tau_0\Big(\frac{\sigma'}{\sqrt{1+\sigma'^2}} +$$

Для будущего:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{2(2cx+b)}{\Delta\sqrt{}} \quad (\Delta = 4ac-b^2) \longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{}^3} = -\frac{2(2a+bx)}{\Delta\sqrt{}} \longrightarrow \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}^3} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\omega x\,dx}{\sqrt{1+x^2}^3} = \omega K_0(\omega) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{\beta+x^2}} = K_0(\sqrt{\beta}\omega) \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\cos\omega x\,dx}{\sqrt{\beta+x^2}^3} = -\frac{\omega}{\sqrt{\beta}}K_0'(\sqrt{\beta}\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\beta}}K_1(\sqrt{\beta}\omega)$$

3.754.3 3.754.2

$$\delta\vec{r}_\perp^{(1)}(t) = -\frac{Ze^2}{mv^2}\int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma' \begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & -\sin\omega\tau' \\ \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\sigma'} \frac{d\sigma''}{(1+\sigma''^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos\omega\tau'' & \sin\omega\tau'' \\ -\sin\omega\tau'' & \cos\omega\tau'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\sin\theta - \gamma_\perp\tau'' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix}$$

это лишнее

$$\tau = \sigma + \tau_0$$

Тогда

$$\cos\omega\tau' = \cos\omega(\sigma'+\tau_0) = \cos\omega\tau_0\cos\omega\sigma' - \sin\omega\tau_0\sin\omega\sigma'$$ и аналогично для σ

$$\sin\omega\tau' = \sin(\sigma'+\tau_0) = \cos\omega\tau_0\sin\omega\sigma' + \cancel{\cos}\,\omega\tau_0\cos\omega\tau'$$

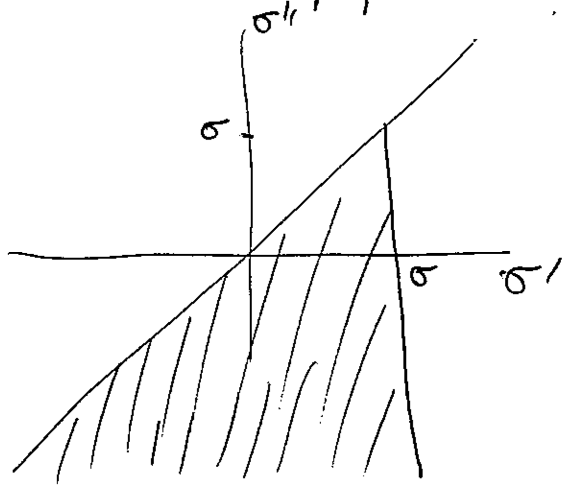
$\cancel{\delta\vec{r}_\perp^{(1)}(t)}$

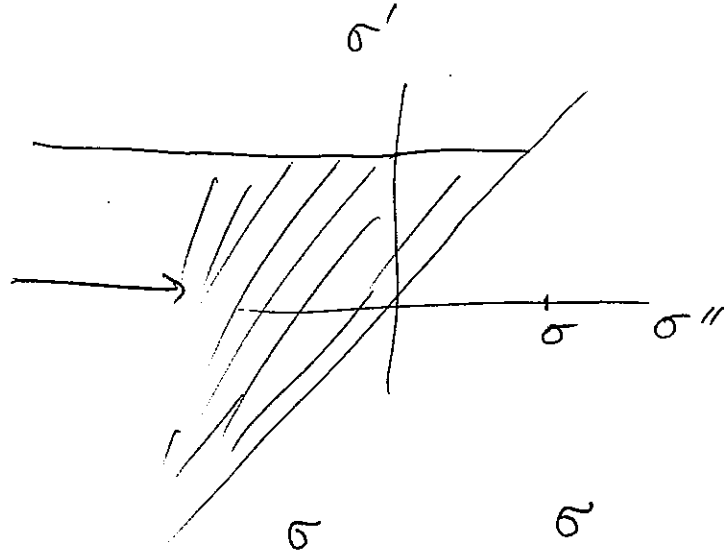
$$\delta\vec{r}_\perp^{(1)}(t) = -\frac{Ze^2}{mv^2}\int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma' \int_{-\infty}^{\sigma'} \frac{d\sigma''}{(1+\sigma''^2)^{3/2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & -\sin\omega\tau' \\ \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega\tau'' & \sin\omega\tau'' \\ -\sin\omega\tau'' & \cos\omega\tau'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\sin\theta - \gamma_\perp\tau'' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix}}_{M} =$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\omega(\tau'-\tau'') & \sin\omega(\tau''-\tau') \\ \sin\omega(\tau'-\tau'') & \cos\omega(\tau'-\tau'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\sin\theta - \gamma_\perp\tau'' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega(\sigma'-\sigma'')(\beta\sin\theta - \gamma_\perp\tau'') + \sin\omega(\sigma'-\sigma'')\beta\cos\theta \\ \sin\omega(\sigma'-\sigma'')(\beta\sin\theta - \gamma_\perp\tau'') - \cos\omega(\sigma'-\sigma'')\beta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta\sin[\omega(\sigma'-\sigma'')+\theta] - \gamma_\perp(\sigma''+\tau_0)\cos\omega(\sigma'-\sigma'') \\ -\beta\cos[\omega(\sigma'-\sigma'')+\theta] - \gamma_\perp(\sigma''+\tau_0)\sin\omega(\sigma'-\sigma'') \end{pmatrix}$$

Область интегрирования





Тогда $\int_{-\infty}^{\sigma} f_1(\sigma')d\sigma' \int_{-\infty}^{\sigma'} f_2(\sigma'')d\sigma'' = \int_{-\infty}^{\sigma} d\sigma'' f_2(\sigma'') \int_{\sigma''}^{\sigma} f_1(\sigma')d\sigma' \underset{\text{переобозначение}}{=} \int_{-\infty}^{\sigma} f_2(\sigma')d\sigma' \int_{\sigma'}^{\sigma} f_1(\sigma'')d\sigma''$

В частности, если $f_1(\sigma) = \frac{dg(\sigma)}{d\sigma}$

то $\int_{-\infty}^{\sigma} \frac{dg(\sigma')}{d\sigma'}d\sigma' \int_{-\infty}^{\sigma'} f_2(\sigma'')\, d\sigma'' = \int_{-\infty}^{\sigma} f_2(\sigma')d\sigma' \int_{\sigma'}^{\sigma} \frac{dg_1(\sigma'')}{d\sigma''}d\sigma'' =$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma} f_2(\sigma')d\sigma' \; g(\sigma'')\Big|_{\sigma'}^{\sigma} = g(\sigma)\int_{-\infty}^{\sigma} f_2(\sigma')d\sigma' - \int_{-\infty}^{\sigma} g(\sigma')f_2(\sigma')d\sigma'$$

| Это из Appendix

но

$$\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & -\sin\omega\tau' \\ \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\tau'}\begin{pmatrix} \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \\ -\cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \end{pmatrix}$$

Тогда в соответствии с р-том игра со стр (8) при перестановке порядка интегрирования имеем

$$\delta\vec{r}_{\perp}^{\,(1)}(t) = -\frac{Ze^2}{mV^2}\int_{-\infty}^{\sigma}\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\sigma'}\begin{pmatrix} \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \\ -\cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\sigma'}\frac{d\sigma''}{(1+\sigma''^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau'' & \sin\omega\tau'' \\ -\sin\omega\tau'' & \cos\omega\tau'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau'' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\omega V}\frac{Ze^2}{mV}\begin{pmatrix} \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \\ -\cos\omega\tau & \sin\omega\tau \end{pmatrix}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}T(\omega\tau')\begin{pmatrix} \beta\sin\theta-\gamma_{\perp}\tau' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix}}_{=r_0\delta\vec{V}_{B\perp}(t)} - \frac{1}{\omega}\left(-\frac{Ze^2}{mV^2}\right)\times$$

$$\times\cancel{\int_{-\infty}^{\sigma}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \\ -\sin\omega\tau' & \cos\omega \end{pmatrix}} \times \int_{-\infty}^{\sigma}\begin{pmatrix} \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \\ -\cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \end{pmatrix}d\sigma'\frac{1}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \\ -\sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix}$$

↓ ~~перемножение матриц!~~

$$\begin{pmatrix} \sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \\ -\cos\omega\tau' & \sin\omega\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau' & \sin\omega\tau' \\ -\sin\omega\tau' & \cos\omega\tau' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau' \\ -\beta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\cos\theta \\ -(\beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau') \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} \beta\cos\theta \\ \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r_0}{\omega V}\overset{\begin{pmatrix} \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \\ -\cos\omega\tau & \sin\omega\tau \end{pmatrix}}{}\delta\vec{V}_{B\perp}(t) - \frac{1}{\omega}\left(-\frac{Ze^2}{mV^2}\right)\int_{-\infty}^{\sigma}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} \beta\cos\theta \\ \beta\sin\theta-\gamma_{\perp}\tau' \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{r_0}{\omega V}}_{\begin{pmatrix} \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \\ -\cos\omega\tau & \sin\omega\tau \end{pmatrix}}\delta\vec{V}_{B\perp}(t) - \frac{Ze^2}{mV^2}\int_{-\infty}^{\sigma}\frac{d\sigma'}{(1+\sigma'^2)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix} \beta\cos\theta \\ \beta\sin\theta+\gamma_{\perp}\tau' \end{pmatrix}$$

это (3.42)