

# Informe MNII. Modelització d'un allau en tres dimensions.

Alba Aguilera Montserrat, 1529958  
Sofia Almirante Castillo, 1527718  
Sergi Picó Cabiró, 1531767  
Laia Serradesanferm Córdoba, 1528084

Gener 2021

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció Teòrica</b>	<b>2</b>
1.1	Condicions inicials i de frontera . . . . .	2
1.2	Equació normalitzada . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Resultats i anàlisis de la simulació</b>	<b>2</b>
2.1	Discretització per Lax-Wendrof . . . . .	2
2.2	Comparació amb la muntanya Tuc de la Llança . . . . .	3
2.2.1	El Tuc de la Llança . . . . .	3
2.2.2	Velocitats . . . . .	4
2.2.3	Terme font . . . . .	5
2.2.4	Densitat de neu . . . . .	6
2.3	Millores en el model . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Conclusions</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Annex</b>	<b>8</b>
4.1	Adimensionalització de les equacions . . . . .	8
4.2	Referències . . . . .	8

# 1 Introducció Teòrica

En aquesta pràctica modelitzarem una avalanxa de neu en 3 dimensions, el comportament de la qual està regit per l'equació de transport. Simularem el cas d'una muntanya variant-ne els pendents i n'observarem la seva evolució. Finalment, es simularà l'allau que es va produir al Tuc de la Llança (situat entre el Pallars Sobirà i la Vall d'Aran) el 6 de febrer de 2019 on tres esquiadors van resultar ferits, estudiant-ne les similituds i el comportament de l'allau en un terreny irregular.

## 1.1 Condicions inicials i de frontera

Com a condicions frontera comencem imposant que la densitat de neu sigui en tots els casos nul·la i així evitar discontinuïtats i problemes a l'hora de programar.

També amb aquest objectiu, comencem amb densitat de neu que segueixi una distribució gaussiana centrada al mig de la muntanya, a dalt de tot,  $(x_0, y_0)$  com a condició inicial:

$$u(x, y, t = 0) = u_0 e^{\frac{-(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (1)$$

on  $2 \cdot \sigma^2$  serà l'amplada de la distribució que es pot fixar arbitràriament i  $u_0$  l'altura màxima que assoleix. S'escull aquesta distribució perquè es poden manipular fàcilment els seus paràmetres de manera que la distribució s'assimili a l'acumulació de neu que, entre d'altres factors, desencadenen un allau.

## 1.2 Equació normalitzada

L'equació a resoldre és l'equació de transport amb un terme de font  $H$  que correspon a la neu que es va arrossegant a mesura que l'avalanxa avança:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}(u, \mathbf{r}, t)}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y} + H(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

on  $u(\mathbf{r}, t)$  és la densitat de neu a la muntanya i  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  és el flux de transport i s'expressa com  $\mathbf{J}(u, \mathbf{r}, t) = u \cdot \mathbf{v}$  on  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{\partial u}$  és la velocitat de la neu i  $H(\mathbf{r}, t)$  és el terme font, el qual suposarem proporcional a la densitat de neu al punt en qüestió  $H(\mathbf{r}, t) = \alpha u(\mathbf{r}, t)$ .

Un cop normalitzada l'equació de transport resultant és la següent (veure annex per tot el procediment):

$$\boxed{\frac{\partial \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{J}}(\hat{u}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\mathbf{J}}(\hat{u}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{t})}{\partial \hat{y}} + \hat{\alpha} \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})} \quad (3)$$

# 2 Resultats i anàlisi de la simulació

## 2.1 Discretització per Lax-Wendrof

Discretitzant l'equació normalitzada a través del mètode de Lax-Wendrof per casos no lineals en dues dimensions i tenint en compte que la velocitat no ens depèn de la densitat de neu, sinó simplement de la posició, acabem obtenint:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n \\ -\frac{r_x}{2} (v_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n) &+ \frac{r_x^2}{2} \left[ \frac{v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{2} (v_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n - v_{i,j}^n u_{i,j}^n) - \frac{v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{2} (v_{i,j}^n u_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n) \right] - \\ -\frac{r_y}{2} (v_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n) &+ \frac{r_y^2}{2} \left[ \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{2} (v_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n u_{i,j}^n) - \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{2} (v_{i,j}^n u_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n) \right] + \\ &+ \hat{\alpha} \cdot u_{i,j}^n \end{aligned}$$

on els superíndexs indiquen discretització en el temps, els subíndexs  $i$  la discretització en l'espai de les  $x$  i els subíndexs  $j$  la discretització en l'espai de les  $y$ ,  $r_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ,  $r_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ . Finalment s'afegeix el terme de font  $\hat{\alpha} \cdot u_{i,j}^n$  que simula l'arrossegament de part de la densitat de neu existent a mesura que evoluciona l'allau. En general es realitzaran 100 iteracions temporals, doncs és temps suficient com per veure l'evolució sencera de l'allau.

Escollim la discretització temporal de manera que el seu producte amb la velocitat sigui menor que  $\Delta x$ ,  $v\Delta t < \Delta x$ , així assegurem que en un únic instant de temps la densitat de neu no recorri més d'una cel·la espacial.

El Lax Wendrof és un mètode conservatiu, de manera que el fet que obtinguem valors negatius ens indica que hi ha zones de la muntanya que tenen més neu de la que tocaria (es crea densitat de neu negativa per tal de compensar-ho i que la densitat de neu total es conservi). Així doncs, com que s'obtenen pocs valors negatius i com a màxim el seu valor no supera el 8% de la densitat màxima de neu podem afirmar que l'error numèric és relativament baix i no provoca desviacions massa grans respecte el que hauríem d'obtenir analíticament.

## 2.2 Comparació amb la muntanya Tuc de la Llança

### 2.2.1 El Tuc de la Llança

Es recullen les dades del tuc de la Llança [1] (2655 m d'alçada) i de l'allau concret que es vol simular.

- Longitud: 380 m.
- Amplada: 120 m.
- Desnivell: 265 m.
- Gruix de neu acumulada: 1 m.
- Dipòsit de neu: 5000 tones.
- Pendent al llarg de la baixada: Es comença amb angles superiors als  $45^\circ$  i es produeixen varis desnivells. Per tal de simplificar una geometria tan complexa i evitar discontinuïtats es parteix de la figura 1 i, qualitativament, s'estructura la muntanya en franges horitzontals de manera que el pendent vagi variant de manera discontinua però intentant seguir al màxim el pendent real del tuc de la llança, tal i com s'observa a la figura 2.

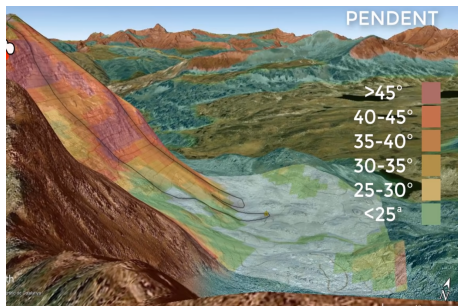


Figura 1: Imatge qualitativa dels pendents reals del Tuc de la Llança.

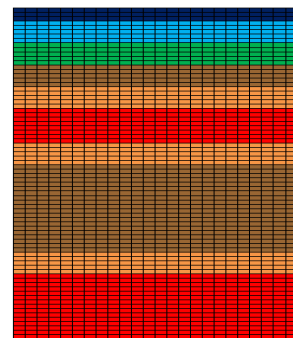


Figura 2: Modelització dels pendents del Tuc de la Llança (l'altura de la muntanya decreix de baix a dalt) en franges horitzontals.

A la figura 2 en vermell s'han aproximat els angles a  $45^\circ$ , en taronja els angles creixen o decreixen paulatinament entre  $40^\circ$  i  $45^\circ$ , en marró entre  $35^\circ$  i  $40^\circ$ , en verd entre  $30^\circ$  i  $35^\circ$ , en blau cel entre  $25^\circ$

i 30° i en blau fosc s'ha aproximat el pendent a 25°. També s'ha creat una matriu 24x76 per tal de mantenir la proporció real 120m x 380m de la muntanya i una densitat de neu màxima en t=0s de  $u_0 = \frac{5000000}{380 \cdot 120 \cdot 1} \text{ kg/m}^3 = 109.65 \text{ kg/m}^3$ .

Tenint en compte els tipus d'allaus que existeixen, que es caracteritzen pel tipus de neu que els desencadenen, es conclou que l'allau que es va produir al Tuc de la Llança correspon a un allau de neu fresca (recent). [2]

Els allaus de neu fresca parteixen d'un punt concret on s'ha dipositat una acumulació de neu elevada després d'una forta nevada i n'arrosseguen cada cop més. Aquesta es barreja amb l'aire creant un fluid lleuger i un flux que assoleix unes velocitats de 100 a 300 km/h. La densitat de neu és, en la majoria de casos, propera als 200 kg/m<sup>3</sup>.

### 2.2.2 Velocitats

Seguidament, s'analitza el comportament que segueixen les velocitat en x i y, fent ús de la seva representació en un mapa de calor.

Tal i com es pot veure, s'ha modelitzat un "túnel" en el centre de la muntanya de manera que les velocitats en x al centre siguin majors que en les vores i que, a la vegada, les corresponents velocitats en y disminueixin fins arribar a ser zero just al centre. Aquestes últimes són simètriques i de direccions oposades (apunten sempre cap al centre de la muntanya).

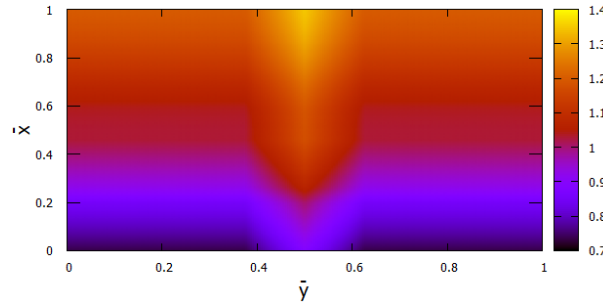


Figura 3: Component de velocitat normalitzada en x respecte els valors  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  normalitzats en un mapa de calor.

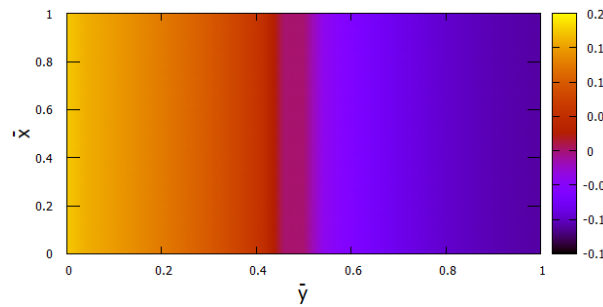


Figura 4: Component de velocitat normalitzada en y respecte els valors  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  normalitzats en un mapa de calor.

En la Figura 3 referent a  $V_x$ <sup>1</sup> es comprova que la velocitat augmenta progressivament fins a prendre el seu valor màxim al final de la muntanya, just en el centre, on s'ha creat aquest túnel. Així mateix, es pot observar com la velocitat en l'eix x va augmentant a mesura que es baixa per la muntanya i que aquest augment també és major com més gran és el pendent en aquell punt. Per altra banda, a la figura

<sup>1</sup>En tots els gràfics s'agafa l'origen de coordenades en l'extrem esquerra i més elevat de la muntanya. És a dir, l'eix x creix a mesura que l'altura de la muntanya baixa.

3 s'observa que entorn  $\hat{x} = 0.4$ , que és quan el pendent comença a augmentar en sentit contrari (es tracta d'una petita pujada de la muntanya), la velocitat disminueix lleugerament i torna a augmentar a  $\hat{x} = 0.6$ , coincidint amb el fet que el pendent de la muntanya torna a esdevenir de baixada.

En la figura 4 referent a  $V_y$  es comprova que la velocitat pren valors negatius en el tram del pla inclinat que recorre cap a l'esquerra fins anul·lar-se just al centre, i posteriorment augmenta quan el pendent és màxim a la dreta, de manera simètrica.

### 2.2.3 Terme font

Per escollir un terme font fidel a la modelització que preteníem dur a terme, s'observa l'efecte de l'addició d'aquesta "neu arrossegada" en l'animació global de l'avalanxa al escollir diferents constants de  $\hat{\alpha}$ . Òbviament serà major en els dos casos al centre del final de la muntanya, quan tenim més densitat de neu acumulada i notarem abans el seu efecte emprant un valor d'alfa elevat.

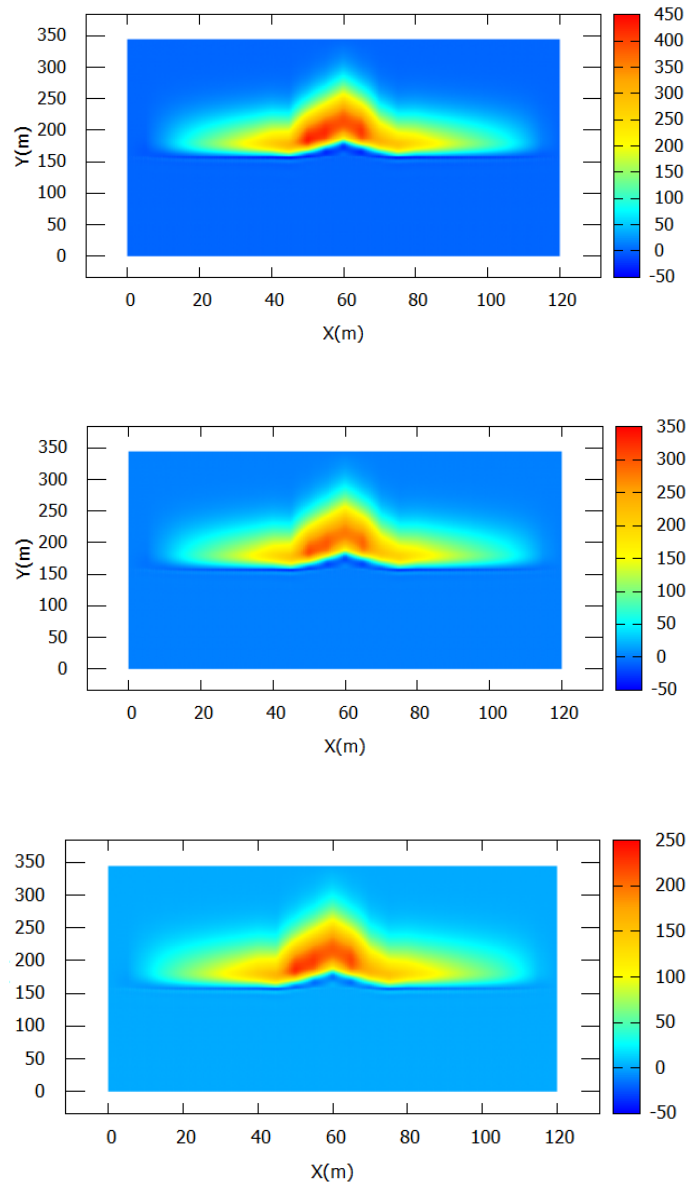


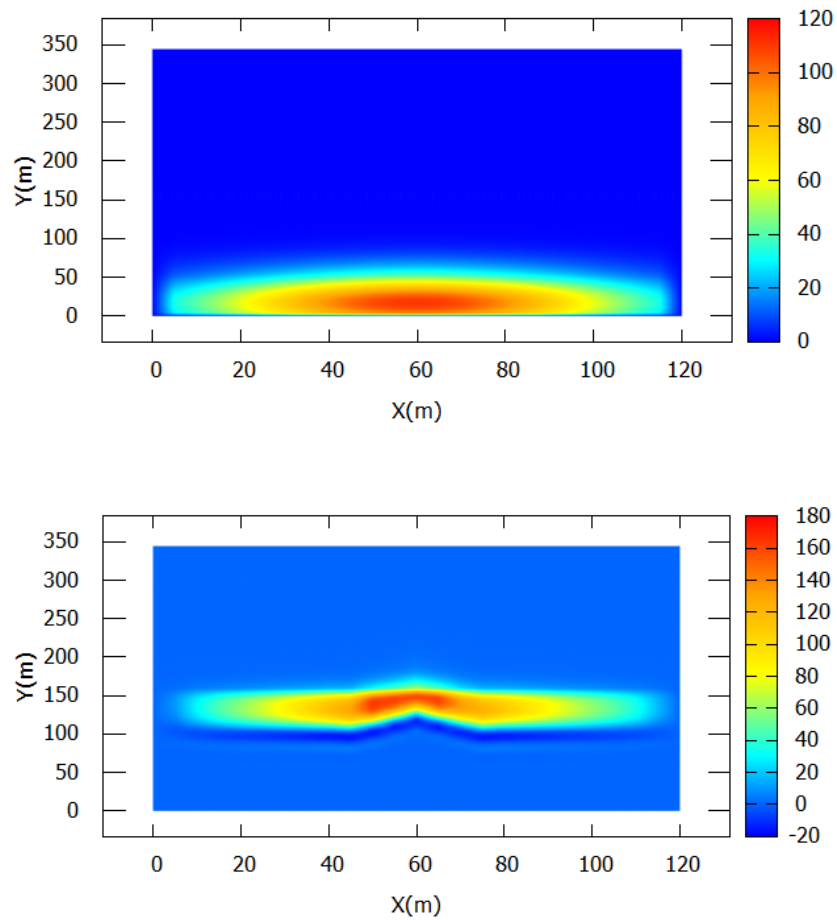
Figura 5: Densitat de neu en  $\text{kg/m}^3$  en l'espai (eix x i y en metres) en la iteració temporal 70 per una constant  $\hat{\alpha} = 0.01$  a dalt,  $\hat{\alpha} = 0.005$  al mig i  $\hat{\alpha} = 0.001$  a sota.

Tot això es confirma comparant la densitat de neu amb diferents constants  $\hat{\alpha}$  per a un mateix temps arbitrari (escollim la iteració temporal número 70 ja que així el gruix de neu es trobarà cap al final del recorregut, que és on el terme de font té més influència). Tal i com s'observa a les figures 5 la densitat de neu augmenta a mesura que augmenta  $\hat{\alpha}$ , fins i tot divergint per  $\hat{\alpha}$  majors a les dels gràfics presentats.

Una constant de proporcionalitat massa gran s'emporta massa neu ja des d'un principi i no resulta veraç, de manera que s'escull un paràmetre de l'ordre de  $10^{-3}$ , que és el que s'ajusta millor a les allaus reals de neu fresca (com la que es va produir al Tuc de la Llança), les quals tenen una densitat de neu entorn els  $200 \text{ kg/m}^3$  en la majoria de casos.

#### 2.2.4 Densitat de neu

S'analitza de manera similar la densitat de neu en diferents instants de l'allau.



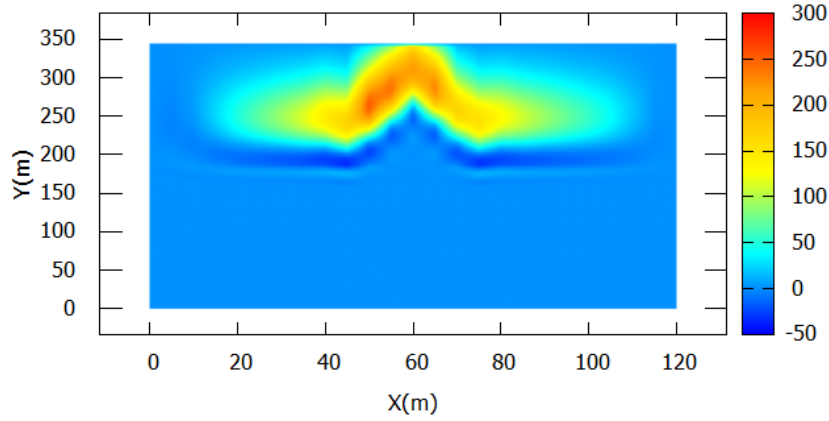


Figura 6: Densitat de neu en  $\text{kg/m}^3$  en l'espai (eix x i y en metres) per una constant  $\hat{\alpha} = 0.001$  en la iteració temporal 0 a dalt, la iteració 40 al mig i 90 a sota.

Es pot veure, efectivament, la densitat de neu inicial es desplaça des del punt inicial fins al final de la muntanya i es va creant un "front de neu" més allargat en la direcció de baixada al centre però més prim al llarg de l'amplada del tuc degut al "túnel de velocitats" ja discutit. Per aquest motiu, al estar arribant a la falda de la muntanya sembla que el front de neu ja no està tan concentrat, doncs la zona davantera es mou amb una velocitat major que la zona posterior, de manera que s'acaba apreciant un eixamplament en l'eix de les x.

És important mencionar que les últimes iteracions del nostre model resulten les menys fidedignes, doncs la densitat de neu s'acumula excessivament. En un cas real aquesta densitat es distribuiria en espais contigus amb menys neu. A més a més, les últimes iteracions són les que arrossegueu més error numèric.

En el nostre cas, obtenim velocitats desnormalitzades entre 231 km/h i 351 km/h i densitat de neu final màxima de  $266.43 \text{ kg/m}^3$ , la qual cosa s'ajusta força al tipus d'allau (neu fresca) que es volia simular.

## 2.3 Millores en el model

La neu roman en equilibri en un pendent inclinat degut al fregament. Si es té neu humida o transformada, l'angle màxim en el que aguanta sense derruir-se no arriba als  $30^\circ$ , mentre que amb neu fresca i recent pot arribar a subjectar-se en pendents de fins i tot  $80^\circ$ .

Per a modelitzar fidelment l'allau, s'hauria d'haver incorporat un terme fricció que simulés aquesta resistència de la neu. A més a més, s'haurien d'haver tingut en compte altres paràmetres físics d'un fluid viscosos impossibles d'afegir en el nostre codi de convecció. Per exemple, la viscositat dinàmica, que ens indica la capacitat de fluència pendent avall, major a baixes temperatures; o la plasticitat, que ens indica la rigidesa i facilitat de ruptura dels mantells de neu així com la capacitat d'adherir-se.

## 3 Conclusions

El principal objectiu de la simulació era analitzar el comportament d'un allau de neu, simulant un cas real. Prenent com a referència l'allau del Tuc de la Llança s'assoleix un allau que visualment, s'assimila prou a un de vertader, amb unes velocitats i densitats de neu que s'ajusten prou a un allau de neu fresca, tot i no comptar amb un terme fricció.



## 4 Annex

### 4.1 Adimensionalització de les equacions

Partim de l'equació de transport amb una font:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y} + \alpha \cdot u \quad (4)$$

Per anàlisi dimensional, veiem que cal que la constant de proporcionalitat  $\alpha$  tingui unitats de  $1/T$  (on  $T$  és el temps).

Definim les variables adimensionals a través del temps propi del sistema ( $t_0$ ), la llargada  $x_t$  i l'amplada  $y_t$  de la muntanya com:

$$\hat{t} = \frac{t}{t_0} \quad ; \quad \hat{x} = \frac{x}{x_t} \quad ; \quad \hat{y} = \frac{y}{y_t} \quad (5)$$

Substituïnt obtenim:

$$\frac{1}{t_0} \frac{\partial u}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{x_t} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \hat{x}} - \frac{1}{y_t} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \hat{y}} + \alpha u \quad (6)$$

A continuació ho dividim tot per  $\frac{u_0}{t_0}$  on  $[u_0]=\text{kg}/\text{m}^3$ , és a dir, una densitat de neu pròpia (que nosaltres agafarem com la densitat de neu mitjana de tota la muntanya) i definim les magnituds normalitzades com:

$$\hat{u} = \frac{u}{u_0} \quad ; \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{J}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{J}_y \hat{\mathbf{j}} = \hat{u} \hat{v}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{u} \hat{v}_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{u}{u_0} \frac{t_0}{x_t} v_x \hat{\mathbf{i}} + \frac{u}{u_0} \frac{t_0}{y_t} v_y \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{v}} \hat{u} \quad ; \quad \hat{\alpha} = \alpha t_0 \quad (7)$$

on  $\hat{\mathbf{v}} = \frac{t_0}{x_t} v_x \hat{\mathbf{i}} + \frac{t_0}{y_t} v_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{v_x}{v_{0,x}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y}{v_{0,y}} \hat{\mathbf{j}}$  és la velocitat normalitzada.

Així finalment obtenim l'equació de transport normalitzada:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{J}}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\mathbf{J}}}{\partial \hat{y}} + \hat{\alpha} \hat{u}} \quad (8)$$

### 4.2 Referències

[1] <https://www.lugaresdenieve.com/?q=es/noticia/video-analiza-avalancha-tuc-llansa-val-aran-3-esquiadores-heridos>

[2] <http://www.todovertical.com/articulo/9/apuntes-de-nivologia>

<http://recmountain.com/el-manto-nivoso/>

<https://polipapers.upv.es/index.php/IA/article/view/12302/12315>