Evaluation de performances

Chaîne de Markov à temps continu

Phuc Do

TELECOM Nancy – Université de Lorraine

Introduction

Chaîne de Markov à temps continu

- Rappel de la loi exponentielle
- Chaîne de Markov à temps continu (CMTC)
- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson
- Estimation de la matrice génératrice
- Simulation d’une CMTC

Rappel de la loi exponentielle

Rappel de la loi exponentielle

- La loi exponentielle de paramètre λ est une v.a. T dont:
  - Sa fonction de densité: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa fonction de réparation: $F(t) = P[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geq 0$
  - Sa moyenne: $$E[T] = \frac{1}{\lambda}$$
- **Propriété:** La loi exponentielle est sans mémoire

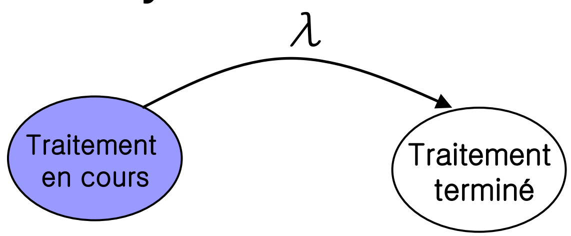
$$P[T \leq t + t_0 | T > t_0] = \frac{P[t_0 < T \leq t + t_0]}{P[T > t_0]} = \frac{P[T \leq t + t_0] - P[T \leq t_0]}{P[T > t_0]}$$

$$= \frac{F(t + t_0) - F(t_0)}{F(t_0)} = 1 - e^{-\lambda t} = P[T \leq t]$$

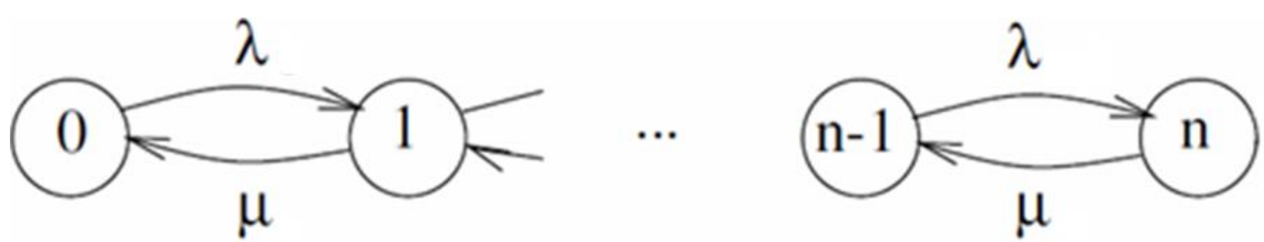
☞ $$\boxed{P[T \leq t + t_0 | T > t_0] = P[T \leq t]}$$

Exemples

- Temps de traitement d’une requête est distribué selon la loi exponentielle. La durée moyenne de traitement d’une requête est de 25 ms



- Un système client-serveur reçoit en moyenne 1000 requêtes par seconde, le temps entre deux arrivants consécutifs est distribué selon la loi exponentielle. Le système dispose d'un unique serveur pouvant traiter en moyenne 2000 requêtes par seconde. On suppose que le temps de service d'une requête est distribué selon la loi exponentielle



Rappel de la loi exponentielle (suite)

Soit un événement aléatoire E dont l'instant de réalisation est une variable aléatoire *T* qui suit une loi exponentielle de paramètre *λ*

- Probabilité de non réalisation de l'événement pendant l'intervalle

]t, t + Δt], sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant t:

$$P[T > t + \Delta t | T > t] = P[T > \Delta t] = e^{-\lambda \Delta t}$$

$$= 1 - \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

- Probabilité de réalisation de l'événement pendant l'intervalle *]t, t+Δt],* sachant qu'il ne s'est pas encore réalisé à l'instant *t:*

$$P[T \leq t + \Delta t | T > t] = P[T \leq \Delta t] = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

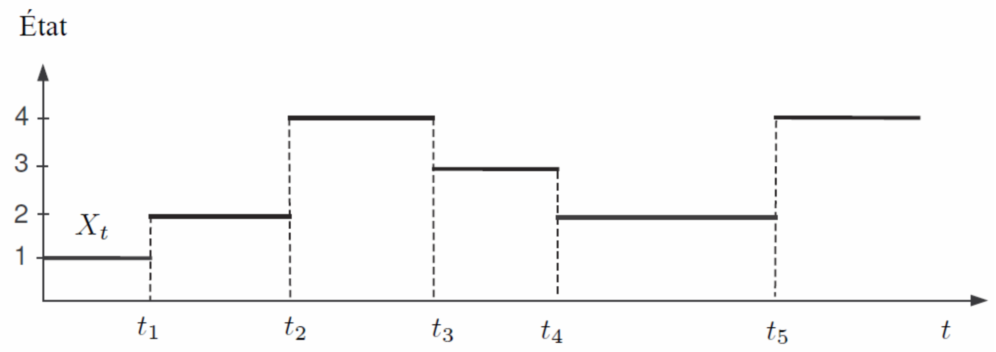
$$= \lambda \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t) \text{ avec } \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$$

Chaîne de Markov à temps continu

Chaîne de Markov à temps continu

- Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus stochastique à espace d'état discret et à temps continu. $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) ssi:

$$P(X(t) = j | X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots X(t_0) = i_0)$$
$$= P(X(t) = j | X(t_n) = i) \quad \forall\, t_0 < t_1 < \ldots . t_n < t$$



Trajectoire d'un processus de Markov

Chaîne de Markov à temps continu

- CMTC **homogène** est telle que les probabilités $P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\}$ ne dépendent pas de *s*.

- Probabilité de transition:

$$p_{ij}(t) = P[X(t+s) = j | X(s) = i] \quad \forall\ s \geq 0$$

  - *Condition à vérifier:*
    - $p_{ij}(t) \geq 0$
    - $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$

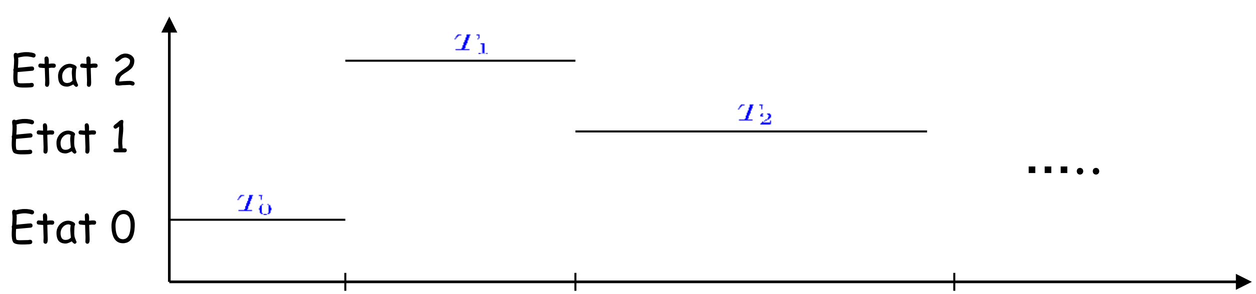
Temps de séjour

- Le temps passé dans un état d'une CMTC est une v.a. qui suit une loi exponentielle
- Soit T_i le temps passé dans l'état *i*. T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ_i:

$$p_{ii}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = i | X(t) = i]$$

$$p_{ii}(\Delta t) = P[T_i > \Delta t] = 1 - \lambda_i \Delta t + \Delta t \varepsilon(\Delta t)$$

- On a $$\lambda_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}$$



Chaîne de Markov à temps continu

- Autre définition d'une CMTC: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est une CMTC ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution est **exponentielle**
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont **probabilistes**

- Processus semi markovien: Un processus stochastique à espace d'états discret et à temps continu est un processus semi markovien ssi :
  - le temps passé dans chaque état est une variable aléatoire dont la distribution n'est pas exponentielle
  - les transitions de chacun des états vers les autres états sont probabilistes

Chaîne de Markov à temps continu

Matrice des taux de transition

- Probabilité de transition de l'état *i* vers *j*:

$$p_{ij}(\Delta t) = P[X(t+\Delta t) = j | X(t) = i]$$

☞ $$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\,\Delta t + \Delta t\varepsilon(\Delta t)$$

- Taux de transition: $$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (i \neq j)$$

- Remarque: $$\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$$

- Matrice des taux de transition (ou matrice génératrice): À une CMTC est associée une matrice *M* matrice génératrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

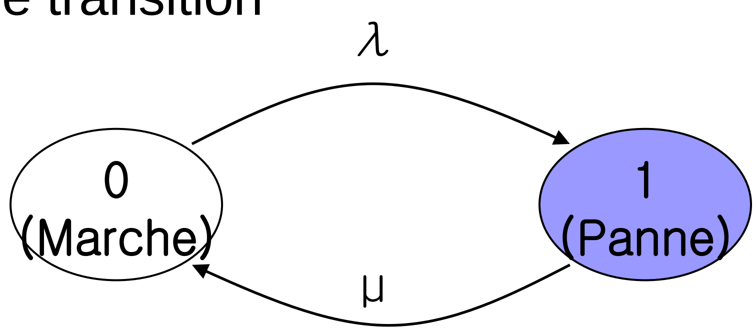
Exemple 3

- Considérons un composant de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ constants et dont toutes les durées de fonctionnement et de réparation sont indépendantes entre elles.

- Le comportement de ce composant est décrit par une CMTC X_t à valeur dans E = {1, 0} de matrice génératrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

☞ Son graphe de transition



Exemple 4

Un système client-serveur reçoit en moyenne λ requêtes par seconde, arrivant selon la loi exponentielle. Il dispose d'un unique serveur pouvant traiter (une s eule requête à la fois) en moyenne μ requêtes par seconde. Modéliser l’évolution du nombre de requêtes dans le système pour les cas suivants:

- Le système comportant une file d’attente de 1 place ?
- Le système comportant une file d’attente de 2 places ?

Calcul d'indicateurs de performance

Si l'état *i* signifie qu'il y a *i* clients (requêtes) dans le système

- **Nombre moyen de clients dans le système**:

$$L = \sum_{i=0}^{n_{max}} i.\pi_i$$

- **Débit du système**: $$X = \sum_{1}^{i=n_{max}} \pi_i \sum_{j=0}^{j=i-1} (i-j).\lambda_{ij}$$

- **Temps moyen de réponse:** $$R = \frac{L}{X}$$

- **Taux d'occupation:** $$u = 1 - \pi_0$$

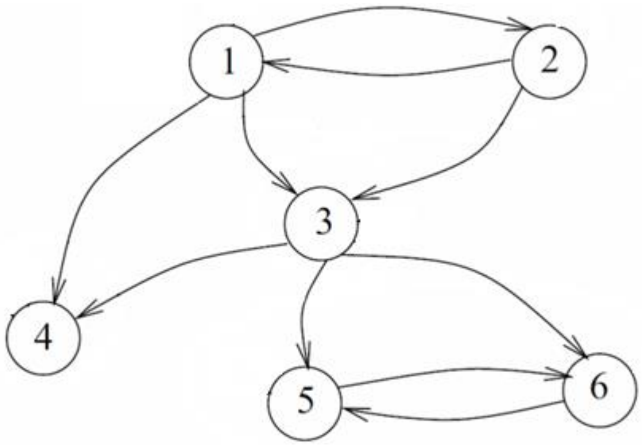
Chaîne de Markov à temps continu

Décomposition d'une chaîne en classes

- Deux états i, j sont communicants si l'on peut passer de i à j et de j à i avec des probabilités non nulles
- Répartition de E en classes disjointes ($E = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_r$) telle que:
  - tous les états d'une classe soient communicants entre eux
  - et que deux états de classes différentes ne soient pas communicants

<u>Exemple:</u> Cette CMTC est irréductible ?

Quelles sont ses classes ?



Classification d'une CMTC

- Etat transitoire / récurrent
  - un état transitoire: il n'y a pas certitude de repasser par l'état après l'avoir quitté
  - un état récurrent: il y a certitude de repasser par l'état après l'avoir quitté; cet état soit
    - ✓ récurrent non nul, si le temps moyen de retour est fini
    - ✓ récurrent nul, si le temps de moyen de retour est infini (cela peut exister que dans une chaîne infinite)

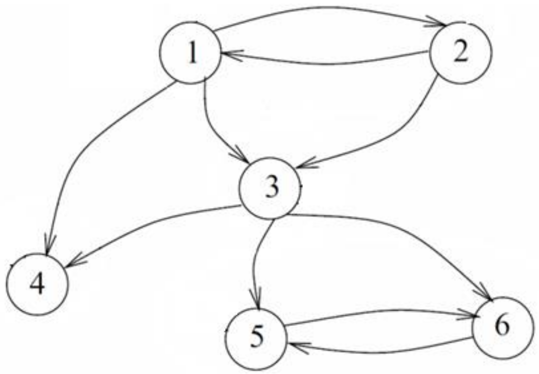
Classification d'une CMTC

❑ Classe transitoire / récurrente

- une classe transitoire: il est impossible de retourner dans la classe après en sorti
- une classe récurrente (ou dit aussi finale): il est impossible de sortir de la classe

☞ ***Tous les états d'une même classe sont de même nature, ils ont les même propriétés que la classe***

Exemple: Quelles sont les classes transitoires/récurrentes pour cette CMTC ?



Vecteur de probabilité des états

1. Régime transitoire

- Equations différentielles

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathrm{M},$$

Où $\boldsymbol{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), ...)$: vecteur de probabilité d'occupation des états.

- Résolution ?
  - Résoudre le système d'équations différentielles: *pas facile !!!*
  - Calcul numérique

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0).e^{\mathrm{M}.t}$$

Où:

- $\boldsymbol{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), ...)$: vecteur de probabilité d'occupation des états à l'instant initial
- e^M est fonction exponentielle d'une matrice

$$e^M = I + M + M^2/(2!) + \cdots = \sum_{n=0}^{1} M^n/(n!)$$

2. Régime permanent

- Lorsque *t* tend vers l'infini, la limite du vecteur des probabilités *P*(t) ?
- Propriété:
  - Il existe un régime permanent ssi la chaîne comprend une seule ***classe récurrente*** (il peut y avoir plusieurs classes, mais une seule récurrente) dont ***tous les états sont récurrents non nuls***
- Soit $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ vecteur de probabilité d'occupation des états en régime permanent. On a

$$\begin{cases} \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_{ij} = 0 \ \forall\, j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle: ☞

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}.M = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

2. Régime permanent

- Résolution
  - Analytique: résoudre le système d'équations linéaires
  - Calcul numérique

- Soit I une matrice carrée dont leur éléments sont égales à 1
- Soit $\mathrm{V} = [1{,}1, \ldots]'$ => on a: $\boldsymbol{\pi}.Q = V$
- Donc $\boldsymbol{\pi}.(M + I) = V$ => $\pi = V.(M + I)^{-1}$ car (*M*+*I*) est inversible (à savoir: *M* n'est pas inversible !!!)

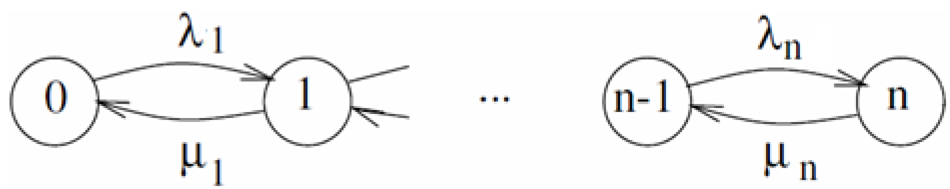
Cas particuliers de CMTC

- Processus de naissance et de mort
- Processus de Poisson

Processus de naissance et de mort

- **Définition:** Les processus de naissance et de mort sont des processus tels que à partir d'un état donné *i*, les seules transitions possibles sont vers l'un ou l'autre des **états voisins** $i + 1$ et $i - 1$ (pour $i \geq 1$).

- Graphe de transition:



- Matrice de taux de transition

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots\dots.. & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots.. & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. & & & \\ 0\ 0 & \dots 0 & \mu_{n-1} & -(\mu_{n-1}+\lambda_n) & \lambda_n & \\ 0\ 0 & \dots..\dots\dots\dots..\dots\dots & & \dots 0 & \mu_n & -\mu_n \end{bmatrix}$$

Processus de naissance et de mort

- Régime permanent: il existe toujours un régime permanent

- Probabilité d'occupation des états en régime permanent:

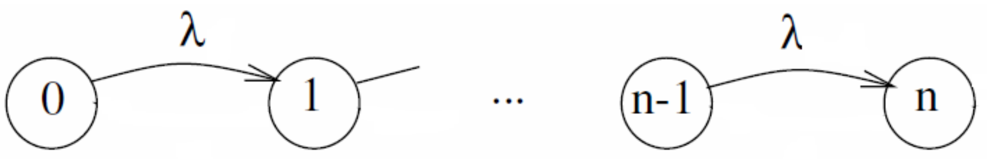
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}$$

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\mu_j}} \qquad \text{pour } i = 1 \dots n$$

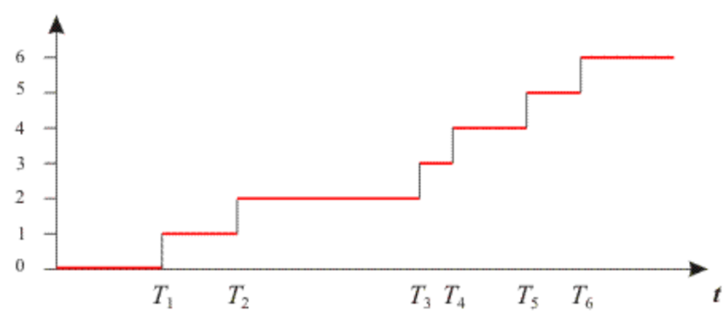
Processus de Poisson

- Le processus de Poisson un cas particulier de processus de naissance et de mort. C'est un processus de naissance pur dont les seules transitions possibles sont **de *i* à *i* + 1**.

- Graphe de transition:

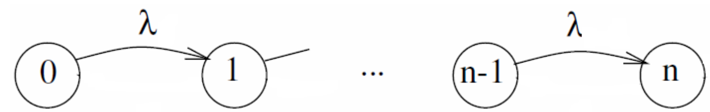


- Un processus de Poisson est un processus de comptage qui compte le nombre d’événements (client, tâches, requêtes, ..) réalisés dans l’intervalle [0,t]



Processus de Poisson

- Matrice de taux de transition



$$M = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \; 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0 \; 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 \; 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Propriété:** tous les états sont transitoires donc pas de régime permanent !

- Probabilité d'occupation des états en régime transitoire:
  - Equations de Chapman-Kolmogorov $\dfrac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt} = \boldsymbol{P}(t)\mathbf{M},$
  - On a: $\dfrac{P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\frac{P_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) \Rightarrow \frac{P_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t) P_0(t) \Rightarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

…… ……

☞ $$\boxed{P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pour } \forall\, k = 0,1,\ldots}$$

Estimation de la matrice des taux de transition

Estimation de la matrice des taux de transition

- Soit un échantillon $\{X_t\} = \{X_0, X_{t_1}, \dots X_T\}$
  - $\{X_t\}$ est une CMTC
  - *T* est suffisamment grand

- Estimation de la matrice génératrice

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{m}_{ij}(T)]_{i,j \in E}$$

avec

$$\hat{m}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{T_i(T)}$$

  - $N_{ij}(T)$ est le nombre de transitions de l'état *i* à l'état *j* sur l'intervalle de temps [0, *T*]
  - $T_i(T)$ est le temps passé dans l'état *i* durant l'intervalle de temps [0, *T*]

Simulation d’une CMTC

Simulation d'une CMTC

- Soit une CMTC ayant la matrice de taux de transition

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

- Son état initial: soit connu soit distribué selon une loi empirique

Comment simuler la chaîne ?

- Idée principale: à chaque état *i*, on simule
  - Le temps de séjour de l'état qui suit la loi exponentiel de paramètre λ_i
  - L'état suivant

Simulation d'une CMTC

- Déterminer la loi empirique pour le passage de l'un vers l'autre état

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} & \frac{\lambda_{13}}{\lambda_1} & \dots\dots\dots & \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_{23}}{\lambda_2} & \dots\dots\dots & \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda_{n1}}{\lambda_n} & \frac{\lambda_{n2}}{\lambda_n} & \dots\dots & \frac{\lambda_{n(n-1)}}{\lambda_n} & 0 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots n}$$

  - *L'état suivant d'un état donné X_i est une V.A discrète* qui suit une loi empirique avec la distribution empirique *$Q(X_i,:)$*

Simulation d'une CMTC

Algo.

1. Simuler l'état initial (s'il n'est pas connu) et son temps de séjour: X_1 et $t(1)$
2. Simuler la trajectoire pour l'intervalle [0 T]:

   i=1;

   Tant que t(i) ≤ T faire

   Générer l'état suivant X_{i+1} par simulation d'une V.A. qui suit une loi empirique avec la distribution empirique $Q(X_i,:)$

   Générer S_{i+1} le temps de séjour du l'état X_{i+1} *:*

   u ~U(0,1); $S_{i+1} = -\frac{\ln(u)}{-M(X_{i+1},X_{i+1})}$

   t(i+1)=t(i)+S_{i+1}

   i=i+1

   FinTQ

Evaluation de performances

Théorie des files d'attente

à suivre…