

8) Soluções do problema de fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson

$$S_k = \hat{V}_k \cdot \hat{I}_k^* \Rightarrow \hat{I}_k = \frac{P_k - jQ_k}{\hat{V}_k^*}$$

- A partir da equação vista anteriormente no desenvolvimento do método de Gauss-Seidel

$$P_k - jQ_k = \hat{V}_k^* \sum_{n=1}^N Y_{kn} \hat{V}_n$$

e fazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_k = |\hat{V}_k| \angle \theta_k \\ \hat{V}_n = |\hat{V}_n| \angle \theta_n \\ Y_{kn} = G_{kn} + jB_{kn} \end{array} \right.$$

(aparece nas notas de aula do método de Gauss-Seidel na pág. 32, embora com uma formulação um pouco diferente.)

- Temos:

$$P_k - jQ_k = \sum_{n=1}^N |\hat{V}_k \cdot \hat{V}_n| (G_{kn} + jB_{kn}) [\theta_n - \theta_k]$$

$$P_k - jQ_k = \sum_{n=1}^N |\hat{V}_k \cdot \hat{V}_n| [G_{kn} + jB_{kn}] [\cos(\theta_n - \theta_k) + j \sin(\theta_n - \theta_k)]$$

- Separando as partes real e imaginária:

$$P_k = \sum_{n=1}^N |\hat{V}_k \cdot \hat{V}_n| [G_{kn} \cos(\theta_n - \theta_k) - B_{kn} \sin(\theta_n - \theta_k)]$$

$$Q_k = - \sum_{n=1}^N |\hat{V}_k \cdot \hat{V}_n| [B_{kn} \cos(\theta_n - \theta_k) + G_{kn} \sin(\theta_n - \theta_k)]$$

$$P_K = |V_K|^2 \cdot G_{KK} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |V_K \cdot V_n| [G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) - B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)]$$

$$Q_K = -|V_K|^2 \cdot B_{KK} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |V_K \cdot V_n| [B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) + G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)]$$

- Desconsiderando, por enquanto, os termos com termos controlados, temos que:

- Os valores de P_K e Q_K em cada barra de concreto correspondem às constantes "k" da equação do método de Newton-Raphson genérico visto anteriormente;
- Os valores estimados das magnitudes e ângulo dos tensões correspondem aos valores estimados inicialmente para " x_1 " e " x_2 ";
- As funções P_K e Q_K dadas pelas exp. acima correspondem às funções " f_1 " e " f_2 " na eq. genérica;
- Usamos os valores estimados das tensões em magnitude e ângulo para calcular os valores de P_K e Q_K das exp. acima.
- Finalmente, definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta P_k = P_{k,\text{especificado}} - P_{k,\text{calculado}} \\ \Delta Q_k = Q_{k,\text{especificado}} - Q_{k,\text{calculado}} \end{array} \right.$$

ΔP_k e ΔQ_k correspondem a Δp_2 e Δq_2 da eq. genérica

- Em uma rede elétrica com 3 barras, por exemplo, sendo a barra de nº 1 adotada como a barra de referência e as outras 2 barras definidas como barras de carga, temos:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \dots \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \dots \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix}$$

- genericamente:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} H \xrightarrow{\Delta P} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ M \xrightarrow{\Delta Q} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \end{array} \quad \begin{array}{l} N \xrightarrow{\Delta P} \frac{\partial P}{\partial V} \\ L \xrightarrow{\Delta Q} \frac{\partial Q}{\partial V} \end{array}$$

- O jacobiano $[J]$ é dado por: $[J] = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}$

- Algumas referências efetuam o particionamento do Jacobiano da seguinte forma:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_1 & | & J_2 \\ \hline J_3 & | & J_4 \end{bmatrix}, \text{ onde: } [J_1] = [H] \quad [J_2] = [N] \\ [J_3] = [M] \quad [J_4] = [L]$$

- Na prática, é comum escrever as equações do método de Newton-Raphson na forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & | & \sqrt{|V|} \frac{\partial P}{\partial V} \\ \hline \frac{\partial Q}{\partial \theta} & | & \sqrt{|V|} \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial V} \\ \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial V} \end{bmatrix}$$

$$H \rightarrow \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad N \rightarrow \sqrt{|V|} \frac{\partial P}{\partial V}$$

$$M \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad L \rightarrow \sqrt{|V|} \frac{\partial Q}{\partial V}$$

- Para o caso já citado (forma 1 → referência, forma de 3 → carga), teríamos então

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \dots \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial Q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial Q_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial Q_2} & \frac{\partial P_3}{\partial Q_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial P_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial P_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial P_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial P_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \dots \\ \Delta \hat{V}_2 \\ \Delta \hat{V}_3 \end{bmatrix}$$

- Lembrando que:

$$P_K = |\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) - B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (1)$$

$$Q_K = -|\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) + G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (2)$$

- Os elementos das submatrizes ficam:

$$H_{Kn} = \frac{\partial P_K}{\partial \theta_n} = -|\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K) + B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K)] \quad (3)$$

$$H_{KK} = \frac{\partial P_K}{\partial \theta_K} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K) + B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K)] \quad (4)$$

$$N_{Kn} = \frac{|\hat{V}_n| \frac{\partial P_K}{\partial V_n}}{|\hat{V}_K|} = |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) - B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (5)$$

$$N_{KK} = \frac{|\hat{V}_K| \frac{\partial P_K}{\partial V_K}}{|\hat{V}_K|} = 2|\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) - B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (6)$$

$$M_{Kn} = \frac{\partial Q_K}{\partial \theta_n} = |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K) - G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K)] \quad (7)$$

$$M_{KK} = \frac{\partial Q_K}{\partial \theta_K} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [B_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K) - G_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K)] \quad (8)$$

$$L_{Kn} = |\hat{V}_n| \frac{\partial Q_K}{\partial |\hat{V}_n|} = - |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) + G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (9)$$

$$L_{KK} = |\hat{V}_K| \frac{\partial Q_K}{\partial |\hat{V}_K|} = - |\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq K}}^N |\hat{V}_K \cdot \hat{V}_n| [B_{Kn} \cos(\theta_n - \theta_K) + G_{Kn} \sin(\theta_n - \theta_K)] \quad (10)$$

- Substituindo (1) e (2) em (4), (5), (8) e (10) temos

$$Q_K = - |\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} - H_{KK} \Rightarrow H_{KK} = - Q_K - |\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} \quad (11)$$

$$P_K = - |\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} + N_{KK} \Rightarrow N_{KK} = P_K + |\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} \quad (12)$$

$$P_K = |\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} + M_{KK} \Rightarrow M_{KK} = P_K - |\hat{V}_K|^2 \cdot G_{KK} \quad (13)$$

$$Q_K = |\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} + L_{KK} \Rightarrow L_{KK} = Q_K - |\hat{V}_K|^2 \cdot B_{KK} \quad (14)$$

- Na prática, os exp. variáveis para o cálculo do Jacobiano não são exp. (3), (5), (7), (9), (11), (12), (13) e (14)

- Após a determinação de $\Delta \theta$ e $\Delta \hat{V}/|\hat{V}|$, os valores de θ e $|\hat{V}|$ são atualizados da seguinte forma:

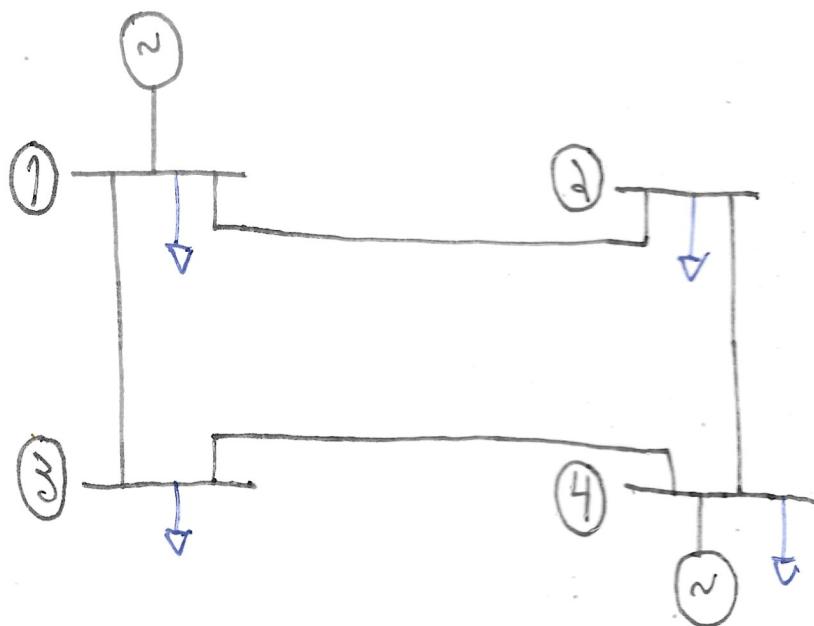
$$\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)}$$

$$|\hat{V}|^{(i)} = |\hat{V}|^{(i-1)} + \Delta|\hat{V}|^{(i)} = |\hat{V}|^{(i-1)} - \left[? + \left(\frac{\Delta|\hat{V}|}{|\hat{V}|} \right)^{(i)} \right]$$

Esse é o valor obtido
da solução através
do Jacobiano

- Caso existam barras PV (geração ou tensão controlada), a magnitude da tensão nestas barras é constante e portanto a correção $\Delta|\hat{V}|/|\hat{V}|$ é sempre zero e não é necessário calculá-la
- Por outro lado, o problema continua bem definido pois não há necessidade de calcular a correção $\Delta|\hat{V}|/|\hat{V}|$ mas, também não há como escrever a equação para $\Delta\theta$ nas barras PV visto que a potência restante nessa barra não é especificada. Neste formato, a linha referente aos termos em " ∂Q " é excluída da matriz, assim como a coluna que multiplica a correção " $\Delta|\hat{V}|/|\hat{V}|$ " na barra PV
- A potência restante nas barras PV será calculada após a finalização do processo iterativo para obtenção das tensões nas barras.

- Exemplo de relaxação de fluxo de potência através do método de Newton-Raphson 6d



- Dados das linhas de transmissão:

linha	impedância série (pu)	admitância shunt (pu)
1-2	$0,01008 + j0,05040$	$j0,1025$
1-3	$0,00744 + j0,03720$	$j0,0775$
2-4	$0,00744 + j0,03720$	$j0,0775$
3-4	$0,01272 + j0,06360$	$j0,1275$

- Os valores de impedância e admittância não dadas em relaxações a uma mesma base

- Dados das barras

barra	geração		carga		\hat{V} (p.u)	tipo de barra
	P(MW)	Q(MVAR)	P(MW)	Q(MVAR)		
1	?	?	50	30,99	1,010°	V0
2	0	0	170	105,35	?	PQ
3	0	0	200	123,94	?	PQ
4	318	?	80	49,58	1,021?	PV

- As potências reais nas cargas foram calculadas a partir dos valores correspondentes de potência ativa assumindo um fator de potência de 0,85 indutivo
- Montamos então a matriz $[Y_{barra}]$

$$[Y_{barra}] = \begin{bmatrix} 8,99 - j44,84 & -3,82 + j19,08 & -5,17 + j25,85 & 0 \\ -3,82 + j19,08 & 8,99 - j44,84 & 0 & -5,17 + j25,85 \\ -5,17 + j25,85 & 0 & 8,19 - j40,86 & -3,02 + j15,12 \\ 0 & -5,17 + j25,85 & -3,02 + j15,12 & 8,19 - j40,86 \end{bmatrix}$$

- Vamos considerar a situação de "flat-start" para as magnitudes de tensões e ângulos desconhecidos

$$\begin{cases} \underline{V_2}^{(0)} \quad \underline{\theta_2}^{(0)} = 1,010^\circ \\ \underline{V_3}^{(0)} \quad \underline{\theta_3}^{(0)} = 1,010^\circ \\ \underline{\theta_4}^{(0)} = 0^\circ \end{cases}$$

- Vamos adotar $S_{base} = 100 \text{ MVA}$

- Podemos escrever a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \hline \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & H_{24} & | & N_{22} & N_{23} \\ H_{32} & H_{33} & H_{34} & | & N_{32} & N_{33} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} & | & N_{42} & N_{43} \\ \hline M_{22} & M_{23} & M_{24} & | & L_{22} & L_{23} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} & | & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \hline \Delta |V_2| / |V_2| \\ \Delta |V_3| / |V_3| \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_2 = P_{2,\text{esp}} - P_{2,\text{calc}}$$

$$\Delta Q_2 = Q_{2,\text{esp}} - Q_{2,\text{calc}}$$

$$\Delta P_3 = P_{3,\text{esp}} - P_{3,\text{calc}}$$

$$\Delta Q_3 = Q_{3,\text{esp}} - Q_{3,\text{calc}}$$

$$\Delta P_4 = P_{4,\text{esp}} - P_{4,\text{calc}}$$

- Vamos calcular ΔP_2 (em pA)

$$P_{2,\text{calc}} = |\hat{V}_2|^2 \cdot G_{22} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^4 |\hat{V}_2 \cdot \hat{V}_n| [G_{2n} \cos(\theta_n - \theta_2) - B_{2n} \sin(\theta_n - \theta_2)]$$

$$P_{2,\text{calc}} = |1,01|^2 \cdot 8,99 + |1,0 \times 1,0| \times (-3,82) + |1,0 \times 1,0| \times 0 + |1,0 \times 1,02| \times (-5,17)$$

$$P_{2,\text{calc}} = -0,1034$$

$$\Delta p_2 = p_{2,\text{exp}} - p_{2,\text{calc}} = \frac{-170}{100} + 0,1034 = -1,7 + 0,1034 = -1,597 //$$

- Repete-se o procedimento para a determinação de $\Delta p_3, \Delta p_4, \Delta q_2 \text{ e } \Delta q_3$

$$p_{3,\text{exp}} = -\frac{200}{100} = -2,0 \mu\text{N}$$

$$q_{2,\text{exp}} = -\frac{105,35}{100} = -1,0535 \mu\text{N}$$

$$p_{4,\text{exp}} = \frac{238}{100} = 2,38 \mu\text{N}$$

$$q_{3,\text{exp}} = -\frac{123,94}{100} = -1,2394 \mu\text{N}$$

- Os valores de Δp e Δq para a 1º iteração são:

$$\Delta p_2^{(1)} = -1,597 \mu\text{N}$$

$$\Delta q_2^{(1)} = -0,447 \mu\text{N}$$

$$\Delta p_3^{(1)} = -1,94 \mu\text{N}$$

$$\Delta q_3^{(1)} = -0,835 \mu\text{N}$$

$$\Delta p_4^{(1)} = 2,213 \mu\text{N}$$

- É necessário agora calcular os termos do jacobiano para a 1º iteração

$$H_{22} = -q_{2,\text{calc}} - |\hat{v}_2|^2 \cdot B_{22}$$

$$q_{2,\text{calc}} = -0,6065$$

$$H_{22} = 0,6065 - 1,0^2 \times (-44,84) = 45,443 //$$

$$H_{23} = -|\hat{v}_2 \cdot \hat{v}_3| \left[\cancel{r_{23} \cdot \sin(\theta_3 - \theta_2)} + \cancel{r_{23} \cdot \cos(\theta_3 - \theta_2)} \right] = 0 //$$

$$H_{34} = -|\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4| [G_{34} \cdot \cancel{\sin(\theta_4 - \theta_3)}^0 + B_{34} \cos(\theta_4 - \theta_3)]$$

$$H_{34} = -|1,0 \times 1,02| \times 15,12 = -15,421 //$$

- É assim sucessivamente.

$$\left[J^{(11)} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 45,443 & 0 & -26,365 & 8,882 & 0 \\ 0 & 47,269 & -15,421 & 0 & 8,733 \\ \hline -26,365 & -15,421 & 41,785 & -5,273 & -3,084 \\ \hline -9,089 & 0 & 5,273 & 44,229 & 0 \\ 0 & -8,254 & 3,084 & 0 & 40,459 \end{array} \right]$$

OBS: As seguintes relações são sempre válidas:

$$\begin{cases} H_{ij} = L_{ij} ; \text{ se } i \neq j \\ M_{ij} = -N_{ij} ; \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

- As variáveis nos ângulos e nas magnitudes dos termos podem ser obtidas após a 1º iteração

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta\theta_4^{(1)} \\ - \\ \Delta|\vec{V}_2|^{(1)} \\ \Delta|\vec{V}_3|^{(1)} \end{bmatrix} = \left[J^{(1)} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1,897 \\ -1,94 \\ -2,213 \\ \dots \\ -0,447 \\ -0,835 \end{bmatrix}$$

- Após o término da 1ª iteração, os valores atualizados das magnitudes e ângulos dos tensões não dados por:

$$\theta_2^{(1)} = -0,93^\circ$$

$$|\vec{V}_2|^{(1)} = 0,983 \text{ p.u}$$

$$\theta_3^{(1)} = -1,79^\circ$$

$$|\vec{V}_3|^{(1)} = 0,971 \text{ p.u}$$

$$\theta_4^{(1)} = 1,54^\circ$$

- Com esses valores atualizados, o processo retorna para a 2ª iteração. Serão re-calculados os "p,calc" e "q,calc" e posteriormente os "Δp" e "Δq". Em seguida, os elementos do jacobiano são recalculados e os tensões em magnitude e fase para a 2ª iteração são determinados.
- O processo iterativo continua até que os Δp e Δq (chamados de "resíduos") sejam menores do que uma tolerância especificada, normalmente 0,1 MVA ou $1,0 \times 10^{-3}$ p.u.

- Os fatores de potência nas lindas assim como os perdas, podem ser obtidos após a conclusão do processo iterativo da mesma forma como visto no método de Gauss-Seidel, pois tais valores são obtidos diretamente a partir dos valores das tensões nas barras.