IDENTIFICAÇÃO

Nome do Orientador: José Carlos Alves de Souza
Nome do Aluno: Bruna Alves Wanderley de Siqueira
Título do Projeto: Grafos no Ensino Básico

RESUMO DO TRABALHO

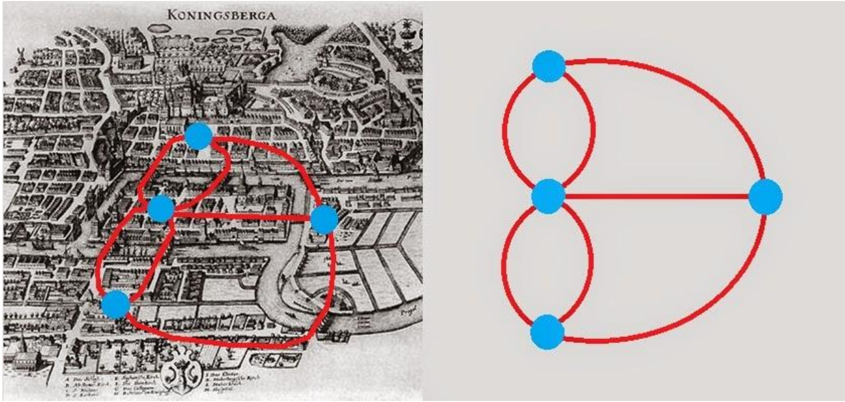
O objetivo primeiro deste trabalho foi desenvolvermos atitudes, habilidades e valores necessários à educação científica. Também, estudarmos noções elementares da Teoria dos Grafos; e, identificarmos, em livros didáticos de matemática voltados para as séries finais do Ensino Fundamental, situações passíveis de serem abordadas por meio de grafos. A metodologia que usamos foi leitura de textos relativos ao tema e análise de livros. Podemos considerar que a leitura nos proporcionou uma compreensão mais ampliada sobre a teoria dos grafos, e da análise que fizemos nos livros didáticos percebemos que são poucas as coleções que abordam situações que favorecem a aproximação de estudantes à noções relativas aos grafos, quase sempre são problemas de contagem, de possibilidade. E, apenas a nível de representação por meio de árvore de possibilidades. Como também são poucos os contextos das atividades que possibilitam o uso de grafos como estratégia de abordagem para a compreensão ou solução de problemas.

Palavras-chave: Grafos; Matemática; Ensino Básico; Livro Didático.

INTRODUÇÃO

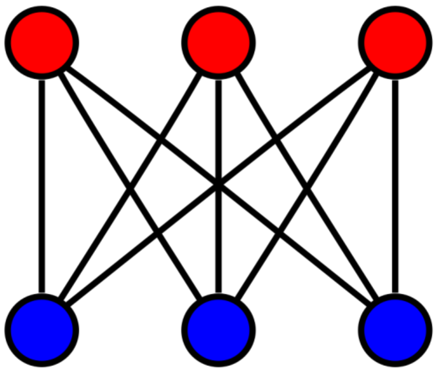
Chegado o momento de elaborar o relatório, tomaremos como referência o que nos motivou assumir tal responsabilidade, aprendermos sobre grafos, e que apresentamos como um de nossos objetivos específicos: Estudar noções elementares relativas à Teoria dos Grafos por meio de situações problemas ou de jogos matemáticos. Bom, nesse sentido fizemos alguns estudos de textos abordando o tema. Inicialmente, lemos o artigo do Professor João Bosco Pitombeira, “O problema das ligações de água, luz e telefone, uma aplicação da fórmula de Euler” contido na Revista do Professor de Matemática. Segundo esse documento, os grafos tiveram sua origem a partir do problema das pontes de Konigsberg, cidade cortada pelo rio Pregel, que separa duas ilhas e duas margens da região, por isso, foram construídas 7 pontes, que pudessem facilitar o transporte entre as porções de terra. Depois de certo tempo, alguns moradores começaram a questionar se seria possível sair de suas casas em uma das ilhas e passar pelas 7 pontes apenas uma vez e voltar pra casa. Foi nesse instante que Euler começou a desenvolver um diagrama que pudesse demonstrar a situação, que posteriormente foi chamado de grafo. Para solucionar o problema, o matemático percebe que para ir e voltar de uma ilha, é necessário passar por duas pontes, logo, sempre que houvesse um número par de pontes, saindo de um mesmo ponto seria possível concluir o trajeto dentro das exigências. No caso dessa cidade, há uma ilha com três pontes, ou seja, um vértice com três arestas, tornando-se impossível de percorrer atravessando as pontes uma única vez. Nesse artigo uma das definições de grafos é

> Um grafo consiste em um certo número de pontos no espaço, A, B, C,..., F, chamados vértices e em arcos, chamados arestas, de forma que: 1°) as extremidades de cada aresta são vértices (um ou dois) do grafo; 2°) duas arestas distintas ou são disjuntas ou possuem em comum somente extremidades, uma ou duas. (PITOMBEIRA, 1987, p. 9)



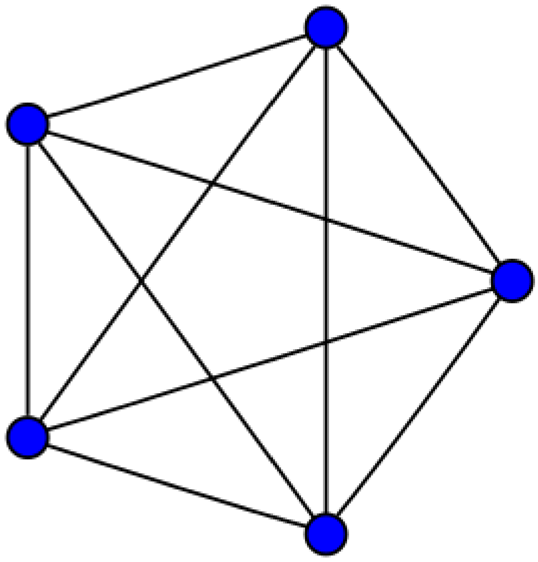
Fonte: http://matematicacomge.blogspot.com/2015/01/as-sete-pontes-de-konigsberg.html

Vimos que há grafos equivalentes, ou seja, representações distintas podem estar associadas a uma mesma situação. Que um grafo pode ser conexo, isto é, dados dois vértices quaisquer existe um caminho (sequência de arestas) ligando esses dois vértices, e também pode ser plano, se seus vértices e suas arestas estiverem todos em um mesmo plano e planar se for equivalente a um grafo plano. O artigo ainda apresenta o Teorema de Euler, V – A + F = 2 (em que V = vértices, A = arestas e F = faces ou regiões), sempre válido em grafos planares - em que suas arestas não se intersectam - propriamente representados, que é usado para resolver o problema da ligação de água, luz e telefone para três casas sem que as ligações de cortem. A conclusão é que tal solução não existe. Abaixo, a ilustração do problema; um grafo conexo mas que não atende aos critérios de grafo planar propriamente representado.



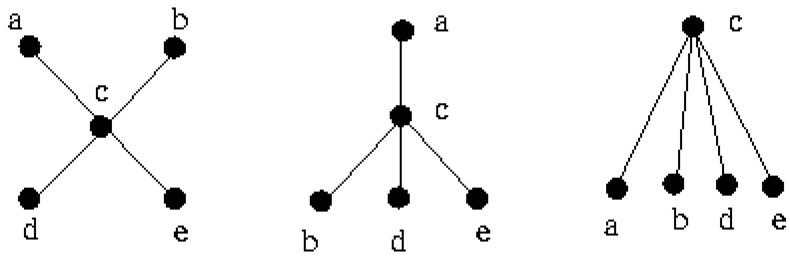
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_das_tr%C3%AAs_casas#/media/Ficheiro:Biclique_K_3_3.svg

No livro Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, capítulo 5, a noção de grafos vem associada a problemas diversos, são apresentados os elementos de um grafo, vértices ou nós e arestas; grafos isomorfos – o que, em Pitombeira, são chamados de equivalentes; a classificação de acordo com o número de arestas que partem deste vértice, sendo esse o grau do vértice. A partir desta definição, é possível chegar ao número de arestas de um grafo, pois ao somar o grau de todos os vértices, tem-se o dobro do número de arestas, já que o grau representa as arestas que passam naquele ponto e ao fazer o somatório destes, cada arestas será contada duas vezes por estar presente em dois vértices. A noção de grau é importante, pois, pode ser usado para provar a existência de uma aresta em um grafo ou para provar que é impossível obter um grafo satisfazendo certas condições. Vejamos isso. Segundo o texto, um vértice é de grau impar se parte dele um número ímpar de arestas e um vértice é de grau par se parte dele um número par de arestas. A partir dessas definições, é apresentado o seguinte Teorema: O número de vértices ímpares de um grafo arbitrário tem que ser par. Isso ocorre para que, ao dividir por 2 o somatório dos graus, resulte no número de arestas. Pode-se ter como exemplo a contagem do número de jogos em um campeonato, na qual existe um número n de times que precisam jogar entre si de modo que todos os times joguem com todos os oponentes uma vez, nesse caso, cada vértice representa um time e os graus dos vértices vão ser n-1, o número de arestas será o número de partidas. Como são n vértices (times), e, cada um de grau n – 1 (arestas); a contagem pode ser feita da seguinte maneira: n.(n – 1); e para cada relação entre vértices ser contada uma única vez, é preciso dividir o produto obtido, por 2, determinando o número de jogos do campeonato. Por exemplo, o grafo abaixo poderia ser utilizado para representar a situação de um campeonato com 5 times:



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2d/4-simplex_graph.svg/280px-4-simplex_graph.svg.png

Estudamos também os ciclos que são grafos que apresentam apenas um caminho no qual os vértices inicial e final coincidem, também pode ser definido como um grafo conexo regular de grau 2. Estudamos também sobre os Grafos de Euler, grafos que podem ser percorridos sem levantar o lápis do papel, traçando cada arestas exatamente uma vez. Para que isso seja possível foi mostrado que eles não podem ter mais do que dois vértices ímpares. Tais grafos são bastante comuns em problemas de lógica. No capítulo 13, Grafos-2, do livro em tela, destacamos a noção de Árvores que são grafos conexos sem ciclos nos quais dois vértices quaisquer estão conectados por um e somente um caminho simples (caminho que não inclui qualquer de suas arestas mais de uma vez). Com base na definição de árvores, tem-se o Lema da Folha: Em qualquer árvore contendo pelo menos uma aresta, existe um vértice que é extremidade de exatamente uma aresta. Levando esse lema em conta, pode-se construir o seguinte teorema “Em qualquer árvore, o número de vértices é igual ao número de arestas mais 1.”. Há ainda grafos orientados, que não nos aprofundamos na noção.



http://www.inf.ufpr.br/andre/Disciplinas/BSc/CI065/michel/Arvores/arvore_enraiz.gif

Ainda podemos citar a leitura da apostila de Grafos da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), que reforçou os conceitos já abordados anteriormente nas leituras.

OBJETIVOS

Objetivo geral

- Favorecer o desenvolvimento de atitudes, habilidades e valores necessários à educação científica.

Objetivos específicos

- Estudar noções elementares da Teoria dos Grafos por meio de situações problemas ou de jogos matemáticos;

- Identificar em livros didáticos problemas que tradicionalmente são resolvidos por meio de aritmética ou álgebra e propor soluções por meio de grafos.

METODOLOGIA

Realizado esses estudos, feitos em horários convenientes, além das tardes das quartas quando nos encontrávamos para discussão com a orientação, enveredamos para a consecução do segundo objetivo que apresentamos no nosso projeto: Identificar problemas que tradicionalmente são resolvidos por meio de aritmética ou álgebra e propor soluções por meio de grafos. Após algumas hesitações, decidimos que faríamos a busca desses problemas em livros das séries finais do Ensino Fundamental, por entendermos que é nesse momento que noções matemáticas começam a ser sistematizadas ou abordadas mais sistematicamente; e aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2017; optamos ainda que a análise seria em coleções sem uso de material digital. Assim, observamos seis coleções: Descobrindo e aplicando a Matemática, de Alceu Mazzieiro, Matemática – Ideias e desafios, de Dulce & Iracema, Convergências – Matemática, de Eduardo Chavante, Matemática Bianchini, de Edward Bianchini, Matemática – Compreensão e prática, de Ênio Silveira e Projeto Araribá – Matemática, de Mara Gay. Encontramos situações que podem ser exploradas com o auxílio de grafos ou favorecer a construção da noção em três; das quais citaremos exemplos a seguir:

Da coleção Descobrindo e aplicando a Matemática, 6º ano, página 121.

Observe a tabela contendo algarismos:

Na primeira linha, você vê dois algarismos: 1 e 2.

Na segunda linha, você vê dois conjuntos de três algarismos que, combinados com os algarismos acima deles, formam números. Por exemplo, 17 é um deles. Usando os algarismos da primeira linha para indicar as dezenas e os da segunda linha para indicar as unidades, responda:

	1				2	
3	4	5		6	7	8

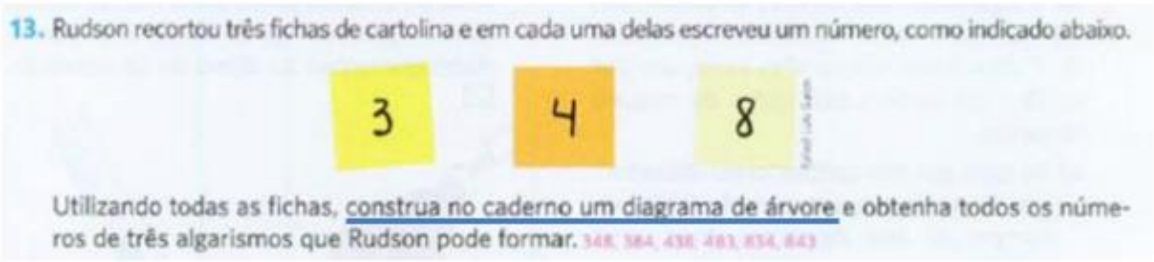
* Quais são todos os números de dois algarismos que podemos formar, combinando os algarismos dados e usando a regra estabelecida?
* Como calcular o total de números, sem contar ou somar?

Fonte: Mazzieiro & Machado, Descobrindo e aplicando matemática, 2015.

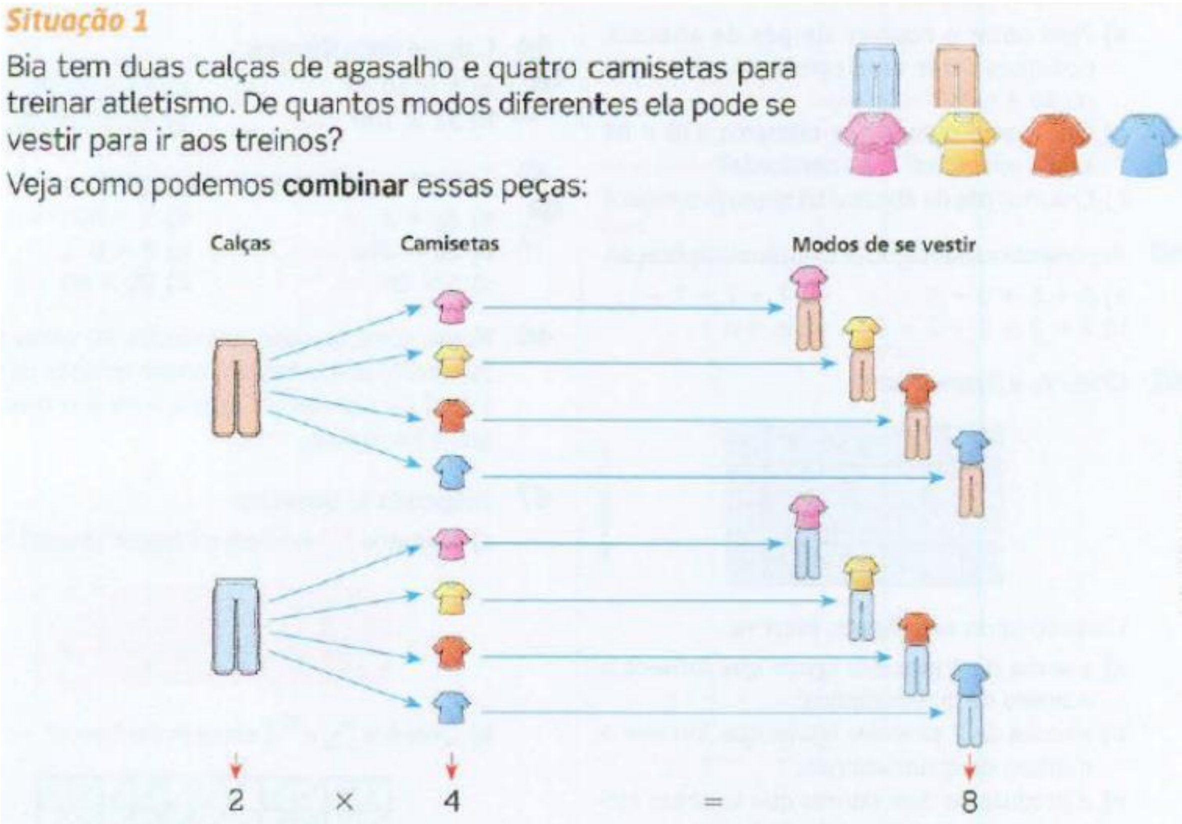
Essa é a situação inicial proposta, na unidade “As possibilidades e a potenciação”, na seção “Explorando o que você já sabe”. No livro do aluno não há representação por meio do diagrama de árvore. Na orientação ao professor é que tal estratégia é sugerida ser explorada. Nos exercícios propostos aos alunos tal sugestão é indicada ao professor.

Ainda nessa coleção, no volume 7, capítulo 7, na unidade “Calculando possibilidades e interpretando gráficos” (MAZZIEIRO; MACHADO, 2017, p.255- 256), algumas situações de contagem são propostas no sentido formalizar o principio multiplicativo, associado ao tipo de problema trabalhado, mas, sem alusão a representar a situação por meio de árvore de possibilidade.

Da coleção Matemática Bianchini, no volume 7, capítulo 10, na unidade “Possibilidade e Probabilidade” páginas 200-204; na atividade inicial, apresenta duas opções de camisetas e quatro de bermudas perguntando quantos uniformes podem ser compostos por essas peças. Para visualizar a situação, faz uso de duas estratégias; a primeira sendo o diagrama de árvores. Tal representação é solicitada, explicitamente, na questão 13, da página 203.



Na coleção Convergências – Matemática, volume 6, capítulo 2, na unidade 4, na atividade inicial, página 50, a representação por meio de um grafo de árvore de uma situação de contagem, é usada na abordagem de uma das ideias associadas à multiplicação..



Fonte: Chavante – Convergências matemática, 2015.

Os exemplos destacados são para evidenciar que há situações em que um tipo de grafo – árvore - pode estar naturalmente inserido em atividades do Ensino Fundamental. Todavia, fazer uso de tal representação, bem como estimular o uso de outros tipos sem haver reflexão sobre suas características, pode não aproximar o estudante de noções relativas ao estudo de grafos. Essa aproximação fica ainda prejudicada quando se observa o limite de contextos e de situações que favorecem o uso de grafos como estratégia ou recurso para sua solução.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os estudos realizados no primeiro momento possibilitaram que a nossa compreensão da Teoria dos Grafos se expandisse, facilitando a procura, em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental, de problemas nos quais pelo menos um dos aspectos do grafo pudesse ser trabalhado. Assim, temos as seguintes conclusões: um grafo é uma ferramenta cuja representação evidencia a relação de dois elementos (pontos) por meio de um segmento de reta que os conecta, esse segmento de reta, por sua vez, está imbuído de um determinado significado que atribui sentido a tal relação, podendo ser geométrica (o lado ou diagonal de um polígono), algébrica (a relação entre dois elementos de conjuntos diferentes que caracteriza uma função) ou lógica (quando se atribuem pessoas aos pontos e estas estão ligadas por se conhecerem). A partir disso, a busca se tornou focada em problemas envolvendo a noção de possibilidades, raciocínio lógico ou combinação, sempre tentando incluir a representação gráfica na resolução visando ressaltar sua importância para a compreensão da situação ou construção do raciocínio.

Após leituras bibliográficas e análises de livros didáticos, foi possível observar que a noção de grafos ainda é pouco explorada no ensino básico, em particular nos livros didáticos aprovados no PNLD 2017, mesmo diante de sua grande contribuição em diversas áreas da matemática. Percebe-se isso pela restrição do número de problemas de possibilidades encontrados nos livros, fazendo uso, geralmente, da representação de árvores, mas não vão além disso, isto é, não fazem de tal representação objeto de estudo. É importante frisar também que apenas nos livros do 6° e 7° ano encontramos o uso de árvores ou a indicação para o professor de fazer uso dessa representação. O que, para nós, existiria a possibilidade de explorar noções relativas a grafos de maneira mais sistemática nos anos seguintes do ensino fundamental, principalmente após um contato inicial nos anos supracitados.

Ademais, a aplicabilidade de noções relativas a grafos na solução de problemas relacionada à temática de combinatória ou geometria, como exemplo do problema das 7 pontes de Konigsberg e os desafios de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel, em ambos, depende de noções de lógica e demanda um raciocínio com o auxílio de ferramentas visuais. Raramente se encontra nos livros didáticos exercícios que proponham a resolução de problemas de contagem com tais recursos ou que estimulem o desenvolvimento de uma resolução fazendo uso de estratégias diversas. Finalizamos com o sentimento de que seria interessante um trabalho semelhante ao nosso realizado em coleções do Ensino Fundamental que tem a indicação do material digital e em coleções do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAKAKI, Julio. **Grafos**.< http://www.pucsp.br/~jarakaki/grafos/Aula4.pdf> Acesso em: 30/05/2018.

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p.

CHAVANTE, Eduardo. Convergências – Matemática. SM, 2015.

DULCE&IRACEMA. Matemática – Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva Educação, 2015.

FORMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. Círculos Matemáticos – A experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GAY, Mara Regina Garcia. Projeto Araribá – Matemática. São Paulo: Moderna, 2014

HOLANDA, Bruno. **Teoria dos grafos**. 2011 <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel1_grafos_bruno.pdf> Acesso em: 30/05/2018.

JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos – Uma Introdução**. 2009 <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf> Acesso em: 04/09/2019.

MAZZIEIRO, Alceu dos Santos & MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. Descobrindo e aplicando a matemática. Belo Horizonte: Dimensão, 2015.

OLIVEIRA, J.B.P. et al. Grafos: do lúdico a questões atuais. In: IX ENEM – Encontro Nacional de educação Matemática. Anais. Belo Horizonte, 2007. Disponível em : < http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html > Acesso em 07/06/2018.

PITOMBEIRA, J. B. O problema das ligações de água, luz e telefone. Uma aplicação da fórmula de Euler. In: **Revista do Professor de Matemática**. Nº 11. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, pp. 9-16, ANO. Disponível em < http://rpm.org.br/cdrpm/11/3.htm > Acesso em 30/05/2018.
https://www.ensinoeinformacao.com/teoria-dos-grafos

SILVEIRA, Ênio. Matemática – Compreensão e prática. São Paulo: Moderna, 2015.

DIFICULDADES ENCONTRADAS

ATIVIDADES PARALELAS DESENVOLVIDAS PELO ALUNO

Monitoria na disciplina de Química para o 9° ano orientada pela professora Ana Maria Alves no Colégio de Aplicação da UFPE no período de agosto a dezembro de 2018

____

Data e assinatura do orientador

____

Data e assinatura do aluno