Lista 6 Bruna Morgana da Cruz, 18218813

(1)

a) Seja $\dim U = \dim \ker(T) + \dim Im(T) = 4$, as combinações são os pares $\{(1,3), (3,1), (2,2), (4,0)\}$

b) Seja $T(a,b,c,d) = (a+b+c+d) + (a+b+c)x + (a+b)x^2$, então

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a+b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b,\ c = 0,\ d = 0$$

Portanto,

$\ker(T) = \{(a, -a, 0, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$Im(T) = \{(0, 0, m, n) : m, n \in \mathbb{R}\}$

(2)

a) $\ker(T) = 0 \Rightarrow \dim \ker(T) = 0$

b) A imagem é um subconjunto do contradomínio V, portanto, $\dim V \geq \dim Im(T)$

c)

Se T injetora $\Rightarrow \dim \ker(T) = 0$.

Logo $\dim U = \dim \ker(T) + \dim Im(T) = 0 + \dim Im(T) \Rightarrow \dim U = \dim Im(T)$.

Como imagem é um subconjunto do domínio e $\dim Im(T) <= \dim V$, então $\dim U <= \dim V$.

d)

Se T sobrejetora $\Rightarrow \dim Im(T) = \dim V$.

Logo, $\dim U = \dim \ker(T) + \dim Im(T) \Rightarrow \dim U = \dim \ker(T) + \dim V$.

Portanto.

- Caso $\dim \ker(T) = 0$, então $\dim U = \dim Im(T)$
- Caso $\dim \ker(T) \neq 0$, então $\dim U > \dim V$.

e)

Se T bijetora $\Rightarrow T$ sobrejetora (d) e injetora (c).

Como injetora: $\dim U <= \dim V$ e sobrejetora: $\dim U >= \dim V$, então a intersecção para T ser bijetora é $\dim U = \dim V$.