Exercícios - Cálculo IV - Aula 9 - Semana 19/10 - 23/10
Séries de Taylor

Vimos que se uma série de potências converge e tem raio de convergência $R \neq 0$ então ela descreve uma função infinitamente derivável. Mas e a recíproca, isto é, dada uma função, é possível escrevê-la como uma série de potências?

Primeiramente, se a função é dada por uma série de potências, seus coeficientes são da seguinte forma:

Teorema 1 *Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ *com raio de convergência* $R \neq 0$. *Então*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Seja I um intervalo aberto da reta e $x_0 \in I$. Se $f : I \to R$ é uma função infinitamente derivável em I (de classe C^∞) definimos a série de Taylor de f em torno de x_0 por:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Em particular, se $x_0 = 0$, a série

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

é denominada (por alguns autores) série de Maclaurin de f.

Assim **se** uma função é dada por uma série de potências (em x_0), esta série é a série de Taylor da função (em x_0). Além disso, toda função de classe C^∞ tem série de Taylor, mas nem toda tal função **coincide** com sua série de Taylor. A questão é que dada uma função de classe C^∞ só existe uma série de Taylor em torno de x_0 mas duas funções diferentes podem ter a mesma série de Taylor em torno de x_0.

Exemplo 1 *As seguintes séries de Taylor (Maclaurin) convergem para todo $x \in \mathbb{R}$ e coincidem com as funções (exemplos importantes):*

(a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(b) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. *($\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar e só aparecem expoentes ímpares na sua série de Maclaurin.)*

(c) Derivando a série de Taylor (Maclaurin) de $\operatorname{sen} x$ *obtemos:* $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. *($\cos x$ é uma função par e só aparecem expoentes pares na sua série de Maclaurin.)*

Exemplo 2 *Na aula do Prof. Cláudio Possani, ele mostrou o seguinte exemplo de uma função cuja série de Maclaurin não coincide com ela:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tente calcular as derivadas de f na origem (você terá que fazer pela definição de derivada). As derivadas de f de todas as ordens, na origem, são zero. Logo $s(x) = 0$, mas a função não é nula.

Sejam I um intervalo aberto da reta e $f : I \to R$ uma função infinitamente derivável em I. Denominamos o polinômio de Taylor de f de ordem k em $x_0 \in I$, como sendo

$$P_{k,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

O resto de Taylor, ou erro, é dado por $R_{k,x_0}(x) = f(x) - P_{k,x_0}(x)$.

Teorema 2 *(Fórmula de Lagrange para o resto de Taylor) Considere I um intervalo aberto da reta e $f : I \to R$ uma função infinitamente derivável em I. Seja $x_0 \in I$. Então para cada k e $x \in I$ existe $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que*

$$R_{k,x_0}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

.

Exemplo 3 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $x_0 \in I$. Se existir um número real positivo M tal que $|f^{(k)}(x)| < M$ para todo k e todo $x \in I$, então $s(x) = f(x)$, ou seja, $f(x)$ é a soma da série de Taylor de f em torno de x_0. De fato:*

$$|f(x) - P_{k,x_0}(x)| = |R_{k,x_0}(x)| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}\right| < M\frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$$

quando $k \to \infty$, lembrando que $P_{k,x_0}(x)$ é a soma parcial da série de Taylor.

Decorre deste fato que $f(x) = sen\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pois $|f^{(k)}(x)| \leq 1$.

Exercício 1 *Determine a expansão em série de Maclaurin de cada uma das seguintes funções (sugestão: toda série de potências que converge a uma função num intervalo centrado em $x = 0$ deve ser a série de Taylor dessa função):*

$$a)\cos\sqrt{x} \qquad b)\, sen\, x^2 \qquad c)\, x^2e^x$$

Exercício 2 *Em cada caso estabeleça a série de Taylor no ponto x_0 indicado:*
a) $f(x) = sen\, x,\ x_0 = \pi/4$.
b) $f(x) = 1/x,\ x_0 = 2$.
c) $f(x) = e^x,\ x_0 = -3$.

Exercício 3 *Determine uma série para $\ln x$ em potências de $x - 1$.*

Exercício 4 *Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $f(x) = \sqrt{1+x}$ em torno de 0 e indique o raio de convergência.*