Exercícios - Cálculo IV - Aula 12 - Semana 09/11 - 13/11
Séries de Fourier

1 Introdução às Séries de Fourier

Uma **série de Fourier** é uma série do tipo

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

em que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências numéricas reais. As sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são chamadas de **coeficientes de Fourier da série**.

De forma geral, vamos inicialmente estudar os seguintes problemas e suas consequências:

1) Qual tipo de função pode ser escrita como uma série de Fourier?

2) Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ como encontrar seus coeficientes de Fourier?

3) Quais propriedades (contínua, derivável, integrável, etc) tem uma série de Fourier?

Para iniciar esse estudo vamos lembrar alguns resultados do cálculo e da álgebra linear.

Deste ponto em diante vamos estar considerando que as funções estarão definidas em **intervalos simétricos pela origem** do tipo $I = [-L, L]$ ou $(-L, L)$ ou $\mathbb{R}$, para algum $L > 0$. Em outras palavras, isso significa que I tem a propriedade de simetria:

$$x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

Por exemplo, os conjuntos $[-1, 1]$, $(-\pi, \pi)$, ou $\mathbb{R}$ têm essa propriedade. Para verificar isso no intervalo $[-1, 1]$ lembre que $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$. Logo, por definição, $x \in [-1,1]$ se e somente se $|x| \leq 1$. Portanto, se $x \in [-1,1]$ temos que $|-x| = |x| \leq 1$ e segue que $-x \in [-1,1]$.

Definição. Seja I um intervalo simétrico pela origem e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que:

(i) f é par se, para todo $x \in I$ temos que $f(-x) = f(x)$;

(i) f é ímpar se, para todo $x \in I$ temos que $f(-x) = -f(x)$. Em particular, $f(0) = 0$.

Exercício. Para cada função abaixo considere que seu domínio seja algum intervalo simétrico pela origem I. Mostre que:

i) as funções $g_0(x) = c$-constante, $g_1(x) = |x|, g_2 = x^2$ e $g(x) = \cos(x)$ são funções pares.

ii) as funções $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^3$, $h_3(x) = \sin(x)$ são funções ímpares.

iii) se f e g forem funções pares, então $f.g$ e $f+g$ são também funções pares.

iv) se f e g forem funções ímpares, então $f.g$ é uma função par e $f+g$ é uma função ímpar.

v) se f for par e g for ímpar, então $f.g$ é função ímpar.

Observação. Considerado o sistema de coordenadas retangulares xOy no plano cartesiano, obtemos geometricamente que o gráfico de uma função par é simétrico com respeito ao eixo Oy, e da função ímpar é simétrico com relação a origem $(0,0)$.

Exercício. Dada $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

a) Se f for par, então $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$;

b) Se f for ímpar, então $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$.

Vamos lembrar também as seguintes fórmulas trigonométricas que vão ser importantes:

Exercício. Mostre que:

c) $2\cos(\alpha).\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$. Em particular, $2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)$;

d) $2\sin(\alpha).\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$. Em particular, $2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$;

Utilize essas fórmulas trigonométricas para resolver o seguinte exercício.

Exercício. Nos problemas abaixo considere que p e q são inteiros positivos:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(px)dx = 0,$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)dx = 0,$

c) $$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p \neq q \\ \pi, & \text{se} \quad p = q \end{cases}$$

d) $$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p \neq q \\ \pi, & \text{se} \quad p = q \end{cases}$$

****** Lembrete da Álgebra Linear ******

Considere o intervalo $J = [-L, L]$, para algum $0 < L \leq \infty$. Vamos lembrar da álgebra linear que o espaço vetorial de todas as funções $\mathcal{F}(J) = \{f : J \to \mathbb{R}\}$ pode ser decomposto como **soma direta de dois subespaços vetoriais** $\mathcal{F}(J) = \mathcal{F}_P(J) \oplus \mathcal{F}_I(J)$ em que $\mathcal{F}_P(J) = \{g : J \to \mathbb{R}, \text{g é função par}\}$ e $\mathcal{F}_I(J) = \{h : J \to \mathbb{R}, \text{h é função ímpar}\}$. Consequentemente, dada qualquer função $f \in \mathcal{F}(J)$ **existem únicas funções** $g \in \mathcal{F}_P(J)$ e $h \in \mathcal{F}_I(J)$ tal que para cada $x \in J$ segue que $f(x) = g(x) + h(x)$. **Ou seja, a função pode ser escrita de forma única como soma de uma função par e uma função ímpar.**

****

Suponha que uma série de Fourier $s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ seja convergente em todo ponto de um intervalo simétrico pela origem I, logo podemos definir a função $s : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto s(x)$. Além disso, vamos assumir que no mesmo intervalo I as séries $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ também sejam convergentes.

Então, a série $s(x)$ pode ser decomposta como soma de duas séries: uma série de funções pares $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$, e uma série de funções ímpares $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$.

Essa observação vai nos ajudar nos cálculos dos coeficientes de Fourier a seguir.

2 Coeficientes de Fourier da série

Dada uma função $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$. Como podemos encontrar os coeficientes de Fourier a_n e b_n?

Exercício. Considere que a série de Fourier $f(x)$ acima possa ser integrada termo a termo. Mostre que $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ para todo $n \geq 0$, e $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, $n \geq 1$. (Dica: se tiver dúvidas assista a vídeo aula 3/5 da semana).

Exemplo. Encontre a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Vamos lembrar que f é uma função impar, logo $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Então, basta calcular os coeficientes $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$, para todo $n \geq 1$. Usando **integração por partes** conclua que $b_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$ e, consequentemente, a série de Fourier de $f(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi]$ é dada por $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$.

Exemplo. Encontre a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Lembre que sendo f agora uma função par, então $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Resta encontrar os coeficientes $a_n, n \geq 0$. Por cálculo direto obtemos que $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$ e $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}, n \geq 1$, portanto a série de Fourier de f é dado por $s(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

3 Convergência da série de Fourier

Definição. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é $\mathcal{C}^1$ por partes, se existir uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, tal que para cada subintervalo (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$ as funções $f, f^{'} : (x_{i-1}, x_i) \to \mathbb{R}$ são contínuas.

O resultado abaixo mostra condições suficientes para a convergência da série de Fourier para uma certa classe de função.

Teorema de convergência pontual de uma série de Fourier. Sejam $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função e $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi\}$ uma partição do intervalo $[-\pi, \pi]$, no qual f é $\mathcal{C}^1$ por partes e limitada. Suponha que nos pontos $x_i \in P$ os limites laterais de f sejam finitos. Então, a série de Fourier $s(x)$ de f satisfaz:

1) $f(x) = s(x)$ para cada $x \in]x_{i-1}, x_i[$,

2) para cada $x_i \in P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi\}$ temos que $s(x_i) = \dfrac{\lim_{x\to x_i^+} f(x) + \lim_{x\to x_i^-} f(x)}{2}$,

3) A série de Fourier $s(x)$ é 2π-períodica em $\mathbb{R}$; ou seja, existe um $p > 0$ tal que $s(x+p) = s(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.[1]

Vamos esclarecer abaixo alguns pontos do Teorema de convergência a partir de alguns exemplos.

Exemplo. As funções $f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ são 2π-periódicas, e a função $h(x) = \cos(2\pi x)$ é 1-periódica.

Exemplo. A função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ é claramente $\mathcal{C}^1$ por partes, visto que nos subintervalos $]-\pi, 0[$ a função é dada por $f(x) = -x$, e em $]0, \pi[$ a função é $f(x) = x$. Além disso, a função é limitada em $[-\pi, \pi]$ pois $|f(x)| \leq \pi$. Faça o gráfico para comprovar essas afirmações.

Vamos encontrar a série de Fourier de f e para isso vamos calcular os coeficientes de Fourier. Sendo f uma função par segue que $b_n = 0$, para todo $n \geq 1$. Por outro lado, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \dfrac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi$. Além disso, para todo $n \geq 1$ segue que $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$, e fazendo integração por partes obtemos a seguinte primitiva $\displaystyle\int x\cos(nx)dx = \frac{1}{n}\{x\sin(nx) + \frac{1}{n}\cos(nx)\} + C$, para C-constante. Concluímos que

[1] **O menor** p positivo no qual a função é períodica é chamado o **período**.

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\{x\sin(nx)+\frac{1}{n}\cos(nx)\}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\{\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n}\} = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ é

$$s(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Aplicando o Teorema da convergência pontual temos que

$$s(0) = \frac{\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)}{2} = 0.$$

Da série de Fourier temos que $0 = s(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, e concluímos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercício. Encontre a série de Fourier das funções abaixo no intervalo $[-\pi, \pi]$.

i) $g(x) = x^2$.

ii) $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi; \\ 0, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$.

Exercício. Determine a soma das séries:

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.