Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 13 - Semana 16/11 – 20/11

Exercício 1. *Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função, verifique que sua extensão par (resp. ímpar) é uma **função par** (resp **função ímpar**) no intervalo $[-L, L]$*

Solução. A extensão par da função f é dada por:

$$g_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L; \\ f(-x) & -L \leq x < 0. \end{cases}$$

observe que $g_1(0) = g_1(-0)$. Tome $x \in (0, L]$ logo $-x \in [-L, 0)$ e então temos que $g_1(-x) = f(-(-x)) = f(x) = g_1(x)$. Por outro lado, se $x \in [-L, 0)$ então $-x \in (0, L]$ e então $g_1(x) = f(-x) = g_1(-x)$. Logo g_1 é par no intervalo $[-L, L]$.

Por outro lado a extensão ímpar de f é dada por:

$$g_2(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq L; \\ -f(-x) & -L \leq x < 0. \end{cases}$$

Primeiro observe que $g_2(0) = g_2(-0)$. Considere $x \in (0, L]$ logo $-x \in [-L, 0)$ e então temos que $g_2(-x) = -f(-(-x)) = -f(x) = -g_2(x)$. Por outro lado suponha que $x \in [-L, 0)$, então $-x \in (0, L]$ e então $-g_2(-x) = -f(-x) = g_2(x)$. Concluímos que g_2 é impar. □

Exercício 2. *Considere $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$. Encontre a sua extensão par.*

Solução. A extensão par $g(x)$ da função pode ser encontrada fazendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq 2; \\ f(-x) & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Temos então que, para $-2 \leq x < 0$, $g(x) = f(-x) = (-x) - (-x)^2 = -x - x^2$. Ou seja, a extensão par de $f(x)$ é

$$g(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 2; \\ -x - x^2 & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

□

Exercício 3. *Considere $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Sua extensão ímpar é a função*

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1, & -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

Solução. Se $x \in [0, 3]$, então $-x \in [-3, 0)$. Assim, $h(-0) = 0 - 1 = -1 = -h(0)$. Vale também que: $-h(x) = -(x+1) = -x-1 = h(-x)$. Para $x\ in[-3, 0)$, temos que $-x \in [0, 3]$, então, $-h(x) = -(x - 1) = -x + 1 = h(-x)$.
Assim, $h(-x) = -h(x)$ para todo $x \in [-3, 3]$. □

Exercício 4. *Considere a função $f(x) = x - x^2, x \in [0, 2]$. Encontre*

1. *Uma série de f que só tenha cossenos;*
2. *Uma série de f que só tenha senos.*

Solução. 1. Uma série de f composta apenas por cossenos é obtida a partir de sua extensão par, que, pelo exercício 2, é:

$$g(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 2; \\ -x - x^2 & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Sabemos que os termos b_n serão nulos pela natureza de g. Vamos então calcular os demais termos, começando por a_0.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} g(x)dx$$

$$a_0 = \int_0^2 x - x^2 dx = \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

Agora a_n fica:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{2}{2}\int_0^2 g(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$a_n = \int_0^2 (x - x^2)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \int_0^2 x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx - \int_0^2 x^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

Resolvendo o primeiro termo por partes:

$$\int_0^2 x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = x\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$\int_0^2 x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = 0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$\int_0^2 x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

Resolvendo o segundo termo, também por partes:

$$\int_0^2 x^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = x^2\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 2x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$\int_0^2 x^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 2x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$\int_0^2 x^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{4}{n\pi}\left(\frac{-2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})dx\right)$$

$$\int_0^2 x^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + 0\right) = \frac{16}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

Logo,

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1) - \frac{16}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{12}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1} - 1$$

.

Portanto, a série fica:

$$s_f(x) = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{12}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1} - 1\Big)\cos(\frac{n\pi x}{2})$$

2. Para adquirir uma séria que usa apenas senos, podemos tomar a extensão ímpar da função.

$$h(x) = \begin{cases} x - x^2, & \text{se } x \in [0,2] \\ x + x^2, & \text{se } x \in [-2,0) \end{cases}$$

Temos que $a_n = 0, n \geq 0$ da função h ser ímpar. Para os coeficientes b_n temos:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} h(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

O produto de duas funções ímpares é uma função par, de onde temos:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(2\int_{0}^{2} h(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx\right) = \int_{0}^{2}(x - x^2)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$b_n = \int_{0}^{2} x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx - \int_{0}^{2} x^2\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

Integrando o primeiro termo por partes temos:

$$\int_{0}^{2} x\sin(\frac{n\pi x}{2}) = -\frac{2x}{\pi n}\cos(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + C\Big|_0^2 = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi n}$$

Integrando o segundo termo também por partes temos:

$$\int_{0}^{2} x^2\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{8x}{\pi^2 n^2}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{16 - 2\pi^2 n^2 x^2}{\pi^3 n^3}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_0^2$$

$$\int_{0}^{2} x^2\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = (-1)^n\frac{8(2 - \pi^2 n^2)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi^3 n^3}$$

Substituindo para b_n:

$$b_n = (-1)^n\left(\frac{8(2 - \pi^2 n^2)}{\pi^3 n^3} - \frac{4}{\pi n}\right) - \frac{16}{\pi^3 n^3}$$

Que é o resultado desejado.

□

Exercício 5. *Considere a função $f(x) = x\pi - x^2$, $x \in [0, \pi]$. Encontre*

1) Uma série de f que só tenha cossenos.

2) Uma série de f que só tenha senos.

Solução. 1). Considere a extensão par de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ para assim obter uma serie de Fourier só de cossenos.

Defina

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \pi x - x^2 & 0 \le x \le \pi; \\ x^2 - \pi x & -L \le x < 0. \end{cases}$$

Como a função $\overline{f}$ é ímpar, $b_0 = 0$ para todo $n \ge 1$. Calculemos o coeficiente a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}(x)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi x - x^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{2}x^2\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Agora considere $n \ge 1$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx}_{\text{(I)}} - \underbrace{\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx}_{\text{(II)}}\right)
\end{aligned}
$$

Primeiro resolvamos a integral (I) por partes, considerando

$$
\begin{aligned}
u = x &\to du = dx \\
dv = \cos(nx)dx &\to v = \frac{\sin(nx)}{n}
\end{aligned}
$$

Obtendo assim

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx &= \frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx \\
&= -\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= -\left(\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ou seja temos que

$$
\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par;} \\ \frac{-2}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar .} \end{cases}
$$

Por outro lado resolvemos (II) usando integração por partes tomando

$$
\begin{aligned}
u = x^2 &\to du = 2xdx \\
dv = \cos(nx)dx &\to v = \frac{\sin(nx)}{n}
\end{aligned}
$$

Assim obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx &= \frac{x^2\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\underbrace{\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx}_{\text{(III)}} \\
&= -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx
\end{aligned}
$$

Para resolver a integral (III) usamos integração por partes com:

$$
\begin{aligned}
u = x &\to du = dx \\
dv = \sin(nx)dx &\to v = -\frac{\cos(nx)}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx &= -\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx \\
&= -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}
\end{aligned}
$$

Logo obtemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\pi\int_0^\pi x\cos(nx)dx - \int_0^\pi x^2\cos(nx)dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\left(\frac{\cos(n\pi)-\cos(0)}{n^2}\right) + 2(-1)^n\frac{\pi}{n^2}\right) \\ &= (-1)^n\frac{4}{n^2} - 2\frac{\cos(n\pi)-\cos(0)}{n^2} \end{aligned}$$

Assim concluímos que

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2} & \text{se } n \text{ é par;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

e a série procurada é dada por

$$s(x) = \frac{\pi}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

2) Para obter uma série de Fourier apenas com senos, consideremos a extensão ímpar g de f. Tal extensão é dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \pi x - x^2 & 0 \le x \le \pi; \\ -x^2 - \pi x & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Neste caso, devemos ter $a_n = 0$ para $n \ge 0$ e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin nx dx$$

Como o produto de duas funções ímpares é uma função par, temos que:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx dx = 2\int_0^\pi x\sin nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx dx$$

Como

$$\int_0^\pi x\sin nx dx = -\frac{\pi}{n}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

E,

$$\int_0^\pi x^2\sin nx dx = \frac{-\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{n}\left(-\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{n}\left(-\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^{n+1}+1] \\ &= (-1)^{n+1}\left[\frac{2\pi}{n} - \frac{2}{n} - \frac{4}{\pi n^3}\right] - \frac{4}{\pi n^3} \\ &= 2(-1)^{n+1}\frac{[n^2\pi(\pi-1)-4]}{\pi n^3} \end{aligned}$$

Logo, a soma só com senos de f no intervalo $[-\pi, \pi]$ é dada por

$$s(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{[n^2\pi(\pi-1)-4]}{\pi n^3}\sin nx$$

□

Exercício 6. *Mostre que num espaço vetorial V com produto interno vale a* ***Desigualdade de Schwarz :*** *Para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$: $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}||^2$. Segue que*

$$0 < \langle x, x \rangle - 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle$$

Considere $t = \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle^{-1}$ logo temos que

$$0 < \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, y \rangle^{-1}.$$

logo

$$|\langle x, y \rangle| < ||x|| \cdot ||y||$$

Solução. Observe que se $y = 0$ a desigualdade segue. assim tomemos $y \neq 0$. Observe que $||\overrightarrow{u} - t\overrightarrow{v}|| > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

□

Exercício 7. *Mostre que num espaço vetorial V com produto interno vale a desigualdade triangular: para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ temos que $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.*

Solução. Aplicando a definição de $|| \cdot ||$, vale :

$$\begin{aligned}
||\vec{u} + \vec{v}||^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\
&\overset{1}{=} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
&\overset{\textbf{Exercício 6}}{\leq} ||\vec{u}||^2 + 2||\vec{u}||||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2 \\
&= (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2
\end{aligned}$$

Aplicando a função monótona crescente $\sqrt{\cdot}$ nos dois lados da inequação, temos o que queríamos. □

Exercício 8. *Mostre que $\langle f, g \rangle := \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ é um produto interno em $\mathcal{F}_{int}(I)$*

Solução. Note que:

- Se $f, g \in \mathcal{F}_{int}(I)$, então

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = \int_{-L}^{L} g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$

- Se f, g e $h \in \mathcal{F}_{int}(I)$, então:

$$\begin{aligned}
\langle f + g, h \rangle &= \int_{-L}^{L} [f(x) + g(x)]h(x)dx = \int_{-L}^{L} [f(x)h(x) + g(x)h(x)]dx \\
&= \int_{-L}^{L} f(x)h(x)dx + \int_{-L}^{L} g(x)h(x)dx \\
&= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

- Se $f, g \in \mathcal{F}_{int}(I)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-L}^{L} \alpha f(x)g(x)dx = \alpha \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = \alpha \langle f, g \rangle$$

- Se $f \in \mathcal{F}_{int}(I)$, então:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-L}^{L} f^2(x)dx \geq 0$$

  E, $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Portanto, $\langle -, - \rangle$ define um produto interno. □

Exercício 9. *Mostre que para todo $n, m \in N*$ temos que:*

1. $\langle 1, \cos(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0,$
2. $\langle 1, \sin(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0,$
3. *Se $n \neq m$ então* $\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0,$
4. *Se $n \neq m$ então* $\langle \sin(nx), \sin(mx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = 0,$
5. *Se $n \neq m$ então* $\langle \cos(nx), \sin(mx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0.$

Solução. 1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)}{n} = \frac{0-0}{n} = 0$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)}{n} = \frac{-(-1)^n + (-1)^n}{n} = 0$$

3. Transformando o produto de cossenos em uma soma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]}{2}dx$$

Podemos definir $n+m = a$ e $n-m = b$, sendo que de $n \neq m$ temos $b \neq 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(ax)}{a} + \frac{\sin(bx)}{b}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a\pi) - \sin(-a\pi)}{a} + \frac{\sin(b\pi) - \sin(-b\pi)}{b}\right)$$

Sendo a e b inteiros

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{0-0}{a} + \frac{0-0}{b}\right) = 0$$

4. Transformando o produto de senos em uma soma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos[(n-m)x] - \cos[(n+m)x]}{2}dx$$

Podemos definir $n-m = a$ e $n+m = b$, caso equivalente ao da alternativa anterior

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(ax)}{a} + \frac{\sin(bx)}{b}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

5. Transformando o produto em uma soma

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(n+m)x] - \sin[(n-m)x]}{2}dx$$

Podemos definir $n+m = a$ e $n-m = b$, daí

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(ax)}{a} - \frac{-\cos(bx)}{b}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(a\pi) + \cos(-a\pi)}{a} - \frac{-\cos(b\pi) + \cos(-b\pi)}{b}\right)$$

Sendo a e b inteiros

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-(-1)^a + (-1)^a}{a} + \frac{-(-1)^b + (-1)^b}{b}\right) = 0$$

□

Exercício 10. *Considere $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x$ (note que f é função ímpar). Encontre:*

1 A série de Fourier de f.

2 Aplique a identidade de Parseval para encontrar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Solução. Vamos então obter os termos e, em seguida, aplicar a identidade de Parsival para avaliar a soma do item b.

1 Como a função é ímpar, temos que $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Para obter b_n precisamos calcular a integral

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - 2\int_{-2}^{2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Aplicando integração por partes, obtemos que $b_n = (-1)^n \frac{3 \cdot 2^5}{\pi^3 n^3}$, o que nos dá a série de Fourier de f :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 2^5}{\pi^3 n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Como esta função é $\mathcal{C}^1$ em $(-2, 2)$, a série converge para f em $(-2, 2)$. Como $f(2) = f(-2) = 0$, teremos que S será a extensão contínua 4-periódica de f.

2 Vamos calcular $||f||^2$ diretamente e com a identidade de Parseval. Igualando os valores, conseguimos o valor pedido.

- Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [f(x)]^2 dx &\overset{\text{funç. par}}{=} \int_{0}^{2} [x^6 - 8x^4 + 16x^2] dx \\
&= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{8x^5}{5} + \frac{16x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \left[\frac{2^7}{7} - \frac{2 \cdot 2^7}{5} + \frac{2^7}{3}\right] \\
&= \frac{2^{10}}{7 \cdot 5 \cdot 3}
\end{aligned}$$

- Por outro lado, pela igualdade de Parseval, temos que $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, o que dá que

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} [f(x)]^2 dx = \frac{9 \cdot 2^{10}}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

A soma fica então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{9 \cdot 2^{10}} \frac{2^{10}}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{\pi^6}{945}$$

□

Exercício 11. *Para $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$ encontre:*

1. *Os polinômios de Fourier de ordem 3 e 4*
2. *Utilize algum software para fazer o gráfico desses polinômios e compare com o gráfico da própria função em $[-\pi, \pi]$.*

Solução. 1. Da paridade de x^2, temos que a série de Fourrier não envolve senos, portanto $b_n = 0$ para todo n.

Calculando os coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

Integrando por partes essa integral temos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(n^2x^2 - 2)\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3} + C\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{0 - 0 + 2n\pi(-1)^n - 2n(-\pi)(-1)^n}{n^3}\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

O polinômio de Taylor de ordem k é dado por

$$F_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

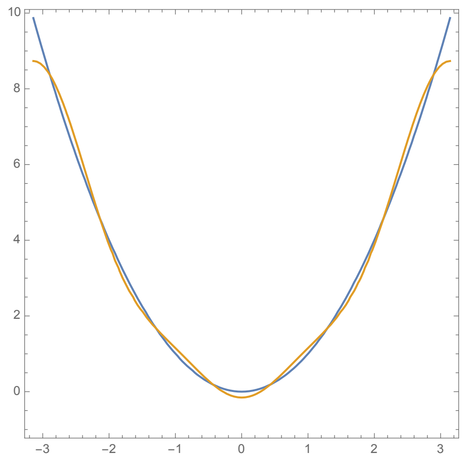
Para N=3

$$F_3(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x)$$

Para N=4

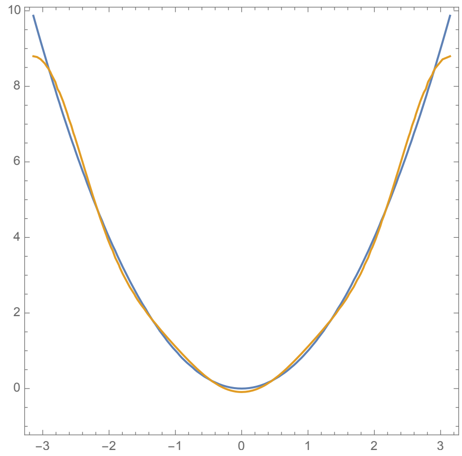
$$F_4(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x) + \frac{1}{16}\cos(4x)$$

2. O primeiro grafico de $F_3(x)$ é



onde o grafico amarelo é o correspondente a $F_3(x)$ e o azul a $f(x)$.

Agora agora vejamos $F_4(x)$ e f



$\square$