Exercícios - Cálculo IV - Aula 13 - Semana 16/11 - 20/11 Séries de Fourier: revisão e aprofundamento

1 Coeficientes de Fourier- Caso geral

De forma geral, podemos estudar **séries de Fourier** para funções definidas num intervalo simétrico qualquer $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, para algum $L > 0$.

Análogo ao caso anterior, podemos provar que **os coeficientes de Fourier** são dados por

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \text{ para todo } n \geq 0,}$$

e

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \text{ para todo } n \geq 1.}$$

Neste caso a **série de Fourier associada à f** fica

$$\boxed{s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}).}$$

Observe que **no caso especial em que $L = \pi$ reobtemos os coeficientes e a série de Fourier estudados anteriormente.**

2 Extensões par e ímpar de funções

Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função, para algum $L > 0$.

Definição. Definimos a **extensão par de f no intervalo** $[-L, L]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), 0 \leq x \leq L \\ f(-x), -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Definição. Definimos a **extensão ímpar de f no intervalo** $[-L, L]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), -L \leq x < 0 \end{cases}$$

Exercício. Dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função, verifique que sua extensão par (resp. ímpar) é uma **função par (resp. função ímpar)** no intervalo $[-L, L]$.

Exercício. Considere $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ cujo gráfico segue abaixo.

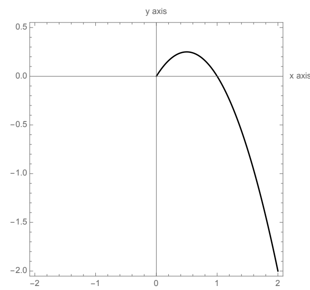

Figure 1: gráfico de f em $[0, 2]$

Sua extensão par é a função $g(x) = \begin{cases} x - x^2, 0 \leq x \leq 2 \\ -x - x^2, -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Por cálculo direto é fácil verificar que de fato $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in [-2, 2]$. A parte na cor vermelha no gráfico abaixo representa a parte da extensão par de f no intervalo $[-L, 0]$. Todo o gráfico (cores preta e vermelha) representa a extensão par de f no intervalo simétrico $[-L, L]$.

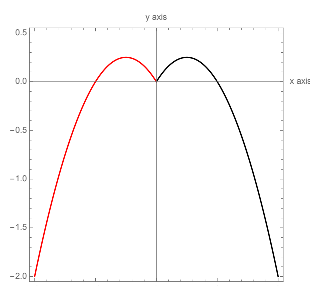

Figure 2: gráfico de g em $[-2, 2]$

Exercício. Considere $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

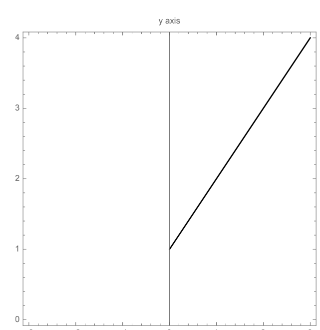

Figure 3: gráfico de f em $[0, 3]$

Sua extensão ímpar é a função $h(x) = \begin{cases} x + 1, 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1, -3 \leq x < 0 \end{cases}$. É fácil verificar que de fato $h(-x) = -h(x)$, para todo $x \in [-2, 2]$. Veja gráfico da extensão ímpar de f abaixo.

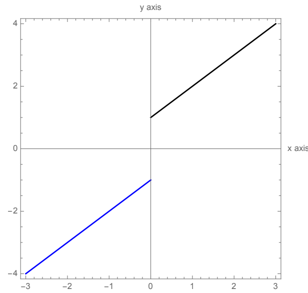

Figure 4: gráfico da extensão ímpar h em $[-3, 3]$

Exemplo. Considere a função $f(x) = x + 1$, $x \in [0, 2]$. Encontre:

1) Uma série de f que só tenha cossenos;

2) Uma série de f que só tenha senos.

Resp. Para resolver esses problemas vamos lembrar que a série de Fourier de uma função, digamos h, num intervalo simétrico pela origem $[-L, L]$ é dada por $s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\dfrac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\dfrac{n\pi x}{L})$. Além disso, se a função h for par no intervalo $[-L, L]$ a série de Fourier é constituida só de cossenos pois os $b_n = 0$, para todo $n \geq 1$, e se a função h for ímpar segue que a série é constituida só de senos pois $a_n = 0, n \geq 0$.

Em vista da observação acima, para resolver o problema 1) vamos considerar a **extensão par** de f no intervalo $[-2, 2]$, veja gráfico abaixo, que é dada por $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x + 1, 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 1, -2 \leq x < 0 \end{cases}$.

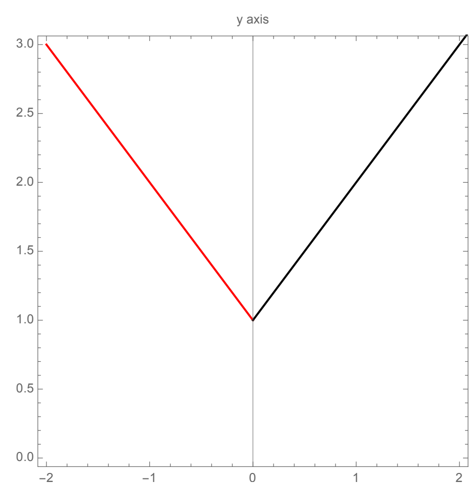

Figure 5: extensão par de $f(x) = x + 1$ em $[-2, 2]$.

Sendo g uma função par no intervalo simétrico $[-2, 2]$ sua série de Fourier será dada só por cossenos. Além disso, como $g(x) = f(x)$ no intervalo $[0, 2]$, para finalizar o problema basta considerar a série de g no intervalo $[0, 2]$.

Em vista da discussão acima, considere agora $s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\dfrac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\dfrac{n\pi x}{L})$ a série de Fourier de g **(extensão par de f)** em $[-2, 2]$.

Como $L = 2$ segue que

$s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\dfrac{n\pi x}{2}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\dfrac{n\pi x}{2})$.

Sendo g uma função par segue que $b_n = 0, n \geq 1$.

Vamos encontrar agora os coeficientes de Fourier $a_n, n \geq 0$.

O coeficiente $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)dx = \underbrace{\dfrac{2}{2}\int_{0}^{2} g(x)dx}_{\text{pois g é par}} = \int_{0}^{2}(x+1)dx = 4.$

Agora para $n \geq 1$ temos que

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \int_{0}^{2} g(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \int_{0}^{2}(x+1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx.$$

Contudo, $\displaystyle\int_{0}^{2}(x+1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\int_{0}^{2} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{0}^{2}\cos(\frac{n\pi x}{2})dx}_{\text{(II)}}.$

A integral (II) **é zero**! (verifique os detalhes). Para resolver a integral (I) podemos fazer intergração por partes e a primitiva é:

$$\int x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2}) + C.$$

Logo,

$$\int_{0}^{2} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{4}{\pi^2 n^2}[\cos(n\pi) - 1]\Big|_{0}^{2} = \begin{cases} 0, \text{ n par} \\ -\dfrac{8}{\pi^2 n^2}, \text{ n ímpar.} \end{cases}.$$

De volta aos coeficientes a_n obtemos que para todo $n \geq 1$,

$$a_n = \int_{0}^{2}(x+1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \begin{cases} 0, \text{ n par} \\ -\dfrac{8}{\pi^2 n^2}, \text{ n ímpar} \end{cases}.$$

Portanto, a série de Fourier de f só de cossenos no intervalo $[0, 2]$ fica

$$s(x) = 2 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2})}{(2n-1)^2}.$$

Isso resolve a parte 1) do problema.

Para resolver a parte 2) vamos considerar $h : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ **a extensão ímpar de f no intervalo** $[-2, 2]$ que é dada por

$$h(x) = \begin{cases} x+1, \ 0 \leq x \leq 2 \\ x-1, -2 \leq x < 0 \end{cases}.$$

Neste caso os coeficientes de Fourier $a_n = 0, n \geq 0$, e os coeficientes $b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} h(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \int_{0}^{2} h(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$, em que na última integral foi usado o fato que o produto $h(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})$ é uma função par no intervalo $[-2, 2]$.

Utilizando propriedade da soma de integrais temos,
$b_n = \int_0^2 (x+1)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\int_0^2 x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{\text{(III)}} + \underbrace{\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{\text{(IV)}}.$

Fazendo novamente integração por partes segue que
$\int x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{2x}{\pi n}\cos(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + C.$

Logo, a parte (III) fica
$\int_0^2 x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$. A parte (IV) fica
$\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{2(-1)^{n+1}+2}{n\pi}$, e o coeficiente $b_n = \frac{6(-1)^{n+1}+2}{n\pi}$.

Portanto, analogamente ao caso anterior, a série só de senos de f no intervalo $[0, 2]$ fica

$$s(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(6(-1)^{n+1}+2)}{n}\sin(\frac{n\pi x}{2}).$$

Exercício. Considere a função $f(x) = x - x^2$, $x \in [0, 2]$. Encontre:

1) Uma série de f que só tenha cossenos;

2) Uma série de f que só tenha senos.

Exercício. Considere a função $f(x) = x\pi - x^2$, $x \in [0, \pi]$. Encontre:

1) Uma série de f que só tenha cossenos; (Dica: veja video aula)

2) Uma série de f que só tenha senos (Dica: veja video aula)

3 Espaço vetorial com produto interno

Seja V um espaço vetorial real.

Definição. Um produto interno em V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, que associa a cada par de vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$, um número real denotado por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$ (propriedade distributiva na soma);

2) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$ (propriedade comutativa);

3) $\langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

4) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$, e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ se e somente se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Dado um espaço vetorial com produto interno definimos a **norma ou comprimento** de um vetor $\overrightarrow{u}$, e denotamos, por $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$.

Diremos também que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de V são **ortogonais** se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$. Neste caso denotaremos por $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Exercício. Mostre que num espaço vetorial V com produto interno vale a **desigualdade de Schwarz**: para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V : |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|$. (Dica: veja que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $\|\overrightarrow{u} - t\overrightarrow{v}\|^2 \geq 0$.)

Exercício. Mostre que num espaço vetorial V com produto interno vale a **desigualdade triangular**: para todo $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V : \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

Considere o intervalo $I = [-L, L]$, para algum $L > 0$ e o espaço vetorial das funções integráveis em I, $\mathcal{F}_{int}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}, f \text{ é integrável}\}$.

Dados $f, g \in \mathcal{F}_{int}(I)$, defina $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$.

Exercício. Mostre que $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ **é um produto interno em $\mathcal{F}_{int}(I)$**.

Considere $I = [-\pi, \pi]$ e $\mathcal{A} = \{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx), \ldots\}, n \in \mathbb{N}^*$. Vamos verificar que em $\mathcal{A}$ os vetores são dois a dois ortogonais. Para isso resolva o seguinte exercício:

Exercício. Mostre que para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ temos que:

a) $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0$, b) $\langle 1, \sin(mx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)dx = 0$,

c) se $n \neq m$ então $\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$,

d) se $n \neq m$ então $\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = 0$,

e) para todo $n, m : \langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$.

Além disso, para todo $n \geq 1$,

segue que $\|\cos(nx)\|^2 = \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi$, e

$\|\sin(nx)\|^2 = \langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi$.

Logo, $\|\cos(nx)\| = \|\sin(nx)\| = \sqrt{\pi}$.

Portanto, se denotarmos as funções trigonométricas da família $\mathcal{A}$ por

$f_n(x) = \cos(nx), n \geq 0$, e $g_m(x) = \sin(mx), m \geq 1$, o exercício acima mostra que $f_n(x) \perp g_m(x)$, para todo $n \geq 0$ e $m \geq 1$. Além disso, $\|\cos(nx)\| = \|\sin(mx)\| = \sqrt{\pi}, n, m \geq 1$.

4 Convergência de séries numéricas

Uma aplicação interessante desses resultados é a famosa identidade abaixo, que em particular nos ajuda a encontrar valores de convergência de algumas séries numéricas.

Identidade de Parseval. Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ com **série de Fourier** $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$. Então,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Para uma aplicação deste resultado vamos lembrar que na lista de exercícios da **Aula 12** mostramos que a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ é $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$. Logo, os coeficientes de Fourier são $a_0 = \dfrac{2}{3}\pi^2$, $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$ e $b_n = 0$, para $n \geq 1$.

Exemplo. Encontre o valor de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Resp. Aplicando a **identidade de Parseval** para a função acima, obtemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Segue disto que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^5$, $a_0^2 = \dfrac{4}{9}\pi^4$, $a_n^2 = \dfrac{16}{n^4}$, $n \geq 1$.

Juntando obtemos que $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^4 = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Disso segue que $\displaystyle 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4 = 2\pi^4(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}) = \frac{8}{45}\pi^4$.

Portanto,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

Observação. A identidade de Parseval pode ser provada no contexto mais geral de série de Fourier de funções $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. Neste caso o resultado é:

Identidade de Parseval (Caso geral). Seja $L > 0$ e $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ com **série de Fourier** $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$. Então,

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).}$$

Exercício. Considere $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$ (note que f é função ímpar). Encontre:

1) a série de Fourier de $f(x)$.

2) Aplique a identidade de Parseval para encontrar $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$

5 Polinômio de Fourier da função

Neste ponto vamos considerar novamente as funções do tipo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Definimos o **polinômio de Fourier de ordem k de** f por

$$F_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

em que $a_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, n \geq 0$, e $b_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, n \geq 1$ são os coeficientes de Fourier de f.

Análogo ao caso de séries de potências, podemos mostrar que o polinômio de Fourier de ordem k é a melhor aproximação de f, no seguinte sentido: dado outro polinômio trigonométrico digamos $P_k(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}[c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)]$, em que agora $\{c_n\}_{n=0}^{k}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{k}$ são sequências reais quaisquer, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_k(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_k(x)|^2 dx.$$

Exemplo. Mostramos também na **Aula 12** que para $f(x) = x$ em $[-\pi, \pi]$ a série de Fourier é dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$. Disso segue que os polinômios de Fourier de ordem 2 e 3 de f são dados por $F_2(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$ e $F_3(x) = 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x)$.

Exercício. Para $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$ encontre:

1) os polinômios de Fourier de ordem 3 e 4.

2) utilize algum software para fazer o gráfico desses polinômios e compare com o gráfico da própria função em $[-\pi, \pi]$.