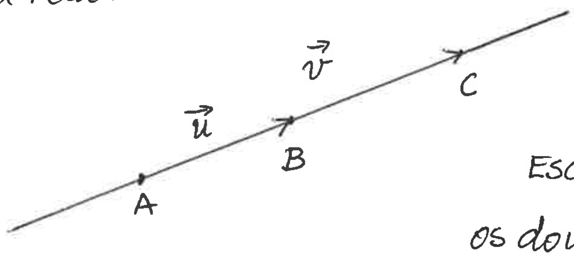
Dependência Linear

1. Caso de dois vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tem a mesma direção. Portanto, eles podem ser representados por pares de pontos de uma mesma reta:



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Escolhamos a mesma origem para os dois vetores.

Observe que o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor:
$\vec{u} = \overrightarrow{AA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$; os pontos A, A, C pertence a uma reta.

Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$.

Temos $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ou $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ou seja

$$\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v} = 0.$$

Portanto, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, existem escalares α, β, não ambos nulos, tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}} \quad (1)$$

Esta caracterização inclui o caso onde um (ou ambos) dos vetores é nulo.

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ para alguns escalares com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

Suponha (sem perda de generalidade) que $\alpha \neq 0$. Então

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v},$$

ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Portanto,

<u>Proposição</u>: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Observe que usando a proposição acima, dois vetores não são paralelos se e somente se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0$.

A equação (1) nos disse que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ <u>dependem</u> um de outro, por isso que dizemos que dois vetores paralelos são (<u>linearmente</u>) <u>dependentes</u>. Caso contrário, eles são (<u>linearmente</u>) <u>independentes</u>.

Vamos obter conceitos análogos para três vetores.

2. Caso de três vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

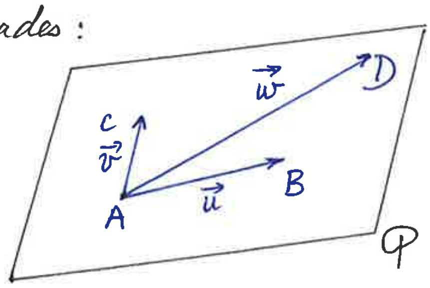
Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

Então A, B, C determinam um plano único $\mathcal{P}$ (Axioma I4).

Agora, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D do espaço.

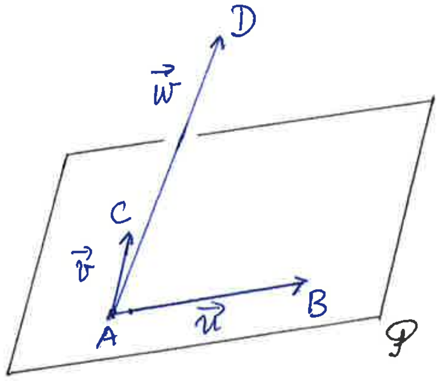
Temos duas possibilidades:

<u>Caso (i)</u>: $D \in \mathcal{P}$



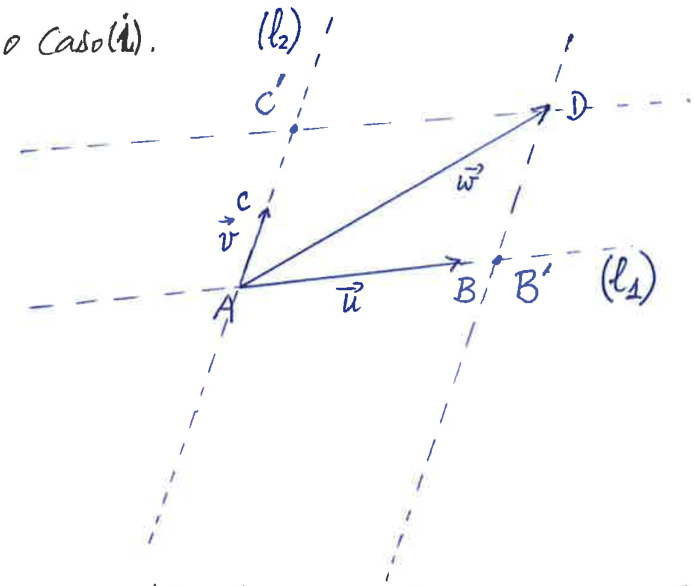
Neste caso, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ <u>são paralelos ao mesmo plano</u>.

<u>Caso (ii)</u> $D \notin \mathcal{P}$



Queremos um critério algébrico para caracterizar os dois casos.

Considere o caso (1).



Seja l_1 a reta (única) que contem os pontos A e B e seja l_2 a reta (única) que contem os pontos A e C.

Por D passa uma reta única paralela a l_2. Esta reta intersecta a reta l_1 em um ponto B'. Da mesma maneira, a unica reta por D paralela a l_1 intersecta l_2 em um ponto C'. O polígono $AB'DC'$ é um paralelogramo, portanto $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$.

Mas $\overrightarrow{AB'} \parallel \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC'} \parallel \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Logo,

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta.$$

Equivalentemente,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \qquad (\text{com } \gamma = -1 \text{ em nosso caso}).$$

Começamos com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas podemos ter começado com $\vec{u}$ e $\vec{w}$ ou $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escrever $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}$) em função de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (resp. $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Colocando todos estes caso juntos, mostramos que se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano, então existem escalares α, β, γ <u>não</u> <u>todos</u> <u>nulos</u> tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.} \qquad (2)$$

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ com α,β,γ não todos nulos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma\neq 0$.

Logo $\vec{w}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{v}$

Isto implica que os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ podem ser representados por pares de pontos de um mesmo plano.

Acabamos de provar a seguinte proposição.

Proposição: Três vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano se, e somente se, existem escalares α,β,γ não todos nulos, tal que

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}.$$

Observações

1. Segue da proposição que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ não são paralelos ao mesmo plano (caso(ii), p14) se, e somente se,

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \implies \alpha=\beta=\gamma=0.$$

2. A proposição acima inclui o caso onde dois (ou todos) dos $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são paralelos. (Exercício.)

Vamos definir os conceitos que acabamos de usar.

Definição: Se $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$, dizemos que $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, ou $\vec{x}$ é gerado por $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Os escalares α,β,γ são chamados dos coeficientes da combinação linear.

Três vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são linearmente dependentes (LD) se

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \text{ para alguns escalares } \alpha,\beta,\gamma \text{ não todos nulos.}$$

Se $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \implies \alpha=\beta=\gamma=0$, dizemos que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são linearmente independentes (LI).

Observações

1. Os conceitos de LI e LD valem para qualquer número de vetores.
2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ é o vetor nulo $\vec{0}$, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são LD.
3. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos

   Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos a um mesmo plano

   $\Leftrightarrow$ um deles é combinação linear dos outro dois.

Exemplo Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, com

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$$
$$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$
$$\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

são LD.

Solução Precisamos procurar escalares α, β, γ, não todos nulos, do modo que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Temos $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha + 2\beta)\vec{u} + (2\alpha - 3\beta + 7\gamma)\vec{v} + (-\alpha + \beta - 3\gamma)\vec{w}$

Então, basta procurar α, β, γ satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha - 3\beta + 7\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

Temos um sistema linear de 3 equações com 3 incógnitas α, β, γ.

Equação (1) implica $\alpha = -2\beta$. Substituindo em (2) e (3) obtemos

$$\begin{cases} -7\beta + 7\gamma = 0 \\ +3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = -2\gamma$$

Logo, $-2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Esta equação é equivalente a $\gamma(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow -2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Achamos uma combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que da o vetor $\vec{0}$,

com coeficientes não nulos. Portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são LD.
(Podemos também usar o método de escalonamento de sistemas Lineares para resolver o sistema de equações (1)–(3).) ▨

<u>Proposição</u>: Se três vetores são LI, então qualquer dois deles são LI.

<u>Demonstração</u> Suponha, por absurdo, que dois deles $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, e denote por $\vec{w}$ o terceiro vetor. Então existem α, β, não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Portanto,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}, \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma = 0, \text{ não todo nulos.}$$

Ou seja $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD, o que contradiz a hipótese da proposição ▨

<u>Observação</u>

A recíproca da proposição anterior não vale. (Exercício)

<u>Exemplo</u> Prove que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LI $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

<u>Solução</u> Temos $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) + \beta(\vec{u}+\vec{w}) + \gamma(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\vec{u} + (\alpha+\gamma)\vec{v} + (\beta+\gamma)\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

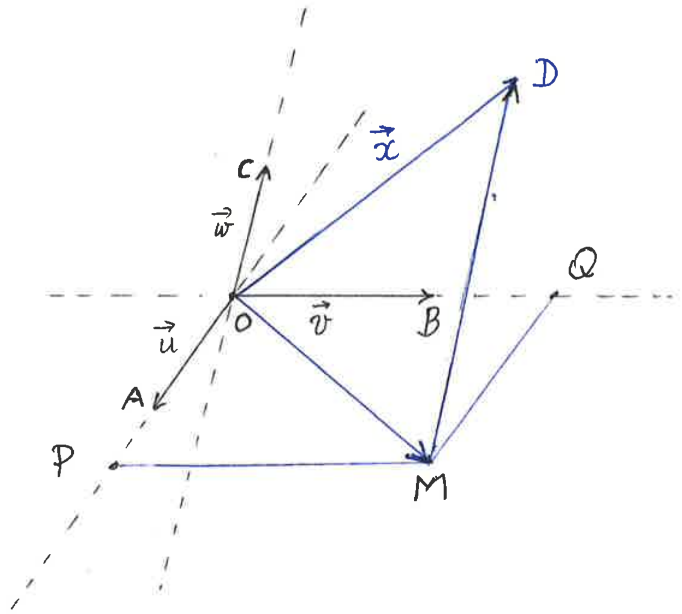
Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, $(*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

Portanto, $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

<u>Proposição</u> Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI em V^3, então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

<u>Demonstração</u> Representamos os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ como seguinte

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD}$$



Sejam:

M: o ponto de interseção da reta por D e paralela a $\vec{w}$ com o plano $\mathbb{P}$ que contem os pontos O, A, B.

Q: o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{u}$ com a reta que contem O e B

P: o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{v}$ com a reta que contem O e A

Temos: $\vec{x} = \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}$

$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MD}$

$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ para alguns escalares α, β, γ.

Portanto $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Suponha que

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$

Então $(\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} + (\gamma - \gamma')\vec{w} = \vec{0}$.

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, temos $\begin{cases} \alpha' - \alpha = 0 \\ \beta' - \beta = 0 \\ \gamma' - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{matrix}$,

ou seja, a combinação linear é única. ▨

Observação

Como a combinação linear na proposição anterior é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, w) de números reais.

Base

Definição Uma tripla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores LI chama-se de base de V^3.

Vimos que qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ou seja

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

e os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$. Chamamos $(x_1, x_2, x_3)_E \in \mathbb{R}^3$ das coordenadas do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Vamos interpretar os conceitos que vimos até agora sobre vetores usando suas coordenadas.

Propriedades

(a) $(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E$

(As coordenadas da soma de vetores são as somas das coordenadas dos vetores.)

(b) $\alpha(x_1, x_2, x_3)_E = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E$

(As coordenadas de um vetor multiplicado por um escalar são a multiplicação das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar.)

Demonstração

(a) $$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 \\ &= (x_1+y_1)\vec{e}_1 + (x_2+y_2)\vec{e}_2 + (x_3+y_3)\vec{e}_3 \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \alpha(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \\ &= \alpha x_1\vec{e}_1 + \alpha x_2\vec{e}_2 + \alpha x_3\vec{e}_3 \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E\end{aligned}$$ ∎

Dependência linear de dois vetores usando coordenadas:

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$
$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existem x, y não ambos nulos tal que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$.

Usando a proposição anterior

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \iff (xa_1 + ya_2, xb_1 + yb_2, xc_1 + yc_2)_E = (0,0,0)_E$$

$$\iff \begin{cases} xa_1 + ya_2 = 0 \\ xb_1 + yb_2 = 0 \\ xc_1 + yc_2 = 0 \end{cases} \quad \text{com } x, y \text{ não ambos nulos}$$

Considerando duas equações de cada vez, obtemos o seguinte resultado.

<u>Proposição</u> Dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso contrário, eles são LI.

<u>Exemplos</u> 1. Verifique se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0,1,0)_E$, $\vec{v} = (1,0,1)_E$

(b) $\vec{u} = (1,-3,14)_E$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)_E$

2. Determine m e n de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LD, sendo

$\vec{u} = (1, m, n+1)_E$

$\vec{v} = (m, n, 10)_E$

Dependência linear de três vetores usando coordenadas

Proposição

Os vetores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)_E$, $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)_E$, $\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{array}{c} \vec{u}\rightarrow \\ \vec{v}\rightarrow \\ \vec{w}\rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

Caso contrário, eles são LI.

Demonstração

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, existem x,y,z não todos nulos tal que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$.

Temos $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=(xa_1+ya_2+za_3,\ xb_1+yb_2+zb_3,\ xc_1+yc_2+zc_3)_E$

$$=(0,0,0)_E$$

Então $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} xa_1+ya_2+za_3=0 \\ xb_1+yb_2+zb_3=0 \\ xc_1+yc_2+zc_3=0 \end{cases}$$

possui uma solução $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \blacksquare$$

Exemplos

1. Verifique se $\vec{u} = (1,-1,2)_E$, $\vec{v} = (-3,4,1)_E$, $\vec{w} = (1,0,9)_E$ são LI ou LD.

2. Calcule m para que os vetores
$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$$
$$\vec{v} = (1, 2, m)_E$$
$$\vec{w} = (1,1,1)_E$$
sejam LD.

3. Sendo $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base de V^3 e que
$$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}, \quad \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}, \quad \vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$
(a) Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base de V^3.
(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)_E$ na base F.

Alguns pontos importantes

* Em V^3, uma base é formada por 3 vetores LI. (As bases não são únicas!)
* A importancia de ter uma base é que qualquer vetor em V^3 pode ser representado de uma maneira única com uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.
* Todas as propriedades sobre vetores podem ser enunciadas usando coordenadas.
* As operações sobre vetores podem ser feitas usando coordenadas que é mais fácil e mais prático (especialmente se queremos usar um computador).

Mudança de base

Sabemos que V^3 não possui uma única base.

Dadas duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de V^3, um vetor $\vec{v}$ de V^3 têm coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ na base E e coordenadas $(y_1, y_2, y_3)_F$ na base F.

Qual é a relação entre as duas coordenadas?

Responder a esta pergunta é objetivo da aula de hoje.

Como E é uma base e $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são vetores de V^3, eles tem coordenadas na base E, ou sejam existem escalares a_{ij} tal que

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

a_{ij}

O coeficiente de $\vec{e}_i$

índice de $\vec{f}_j$

Logo $\vec{v} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3$

$$
\begin{aligned}
&= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) \\
&= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3 \\
&= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

Pela unicidade das coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\
x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3
\end{aligned}
$$

Escrevendo as equações na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F .$$

A matriz

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ chama-se de matriz de mudança de base E para base F.

A primeira coluna da matriz M_{EF} é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{f_1}$ na base E, a segunda coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_2}$ na base E e a terceira coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_3}$ na base E.

Escrevemos
$$(\ )_E = M_{EF} (\ )_F$$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (F é uma base), sabemos que o determinante da matriz M_{EF} não é nulo. Portanto M_{EF} possui uma matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$:

$$M_{EF} \cdot (M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1} \cdot M_{EF} = I_d$$

onde

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ é a matriz identidade

<u>Exemplos</u> 1. Mostre que $M_{EE} = I_d$.

2. Determine a, b, c sabendo que $(1,1,2)_E = (2,1,0)_F$ e $M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$

3. Escreva a matriz de mudança da base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ para base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ sabendo que
$\vec{f_1} = (-3,1,1)_E$, $\vec{f_2} = (1,-2,1)_E$, $\vec{f_3} = (1,2,0)_E$.
Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4,1,-1)_F$ na base E?

Proposição Sejam E, F, G três bases de V^3. Então

$$M_{EF} \cdot M_{FG} = M_{EG}.$$

Demonstração Exercício.

Corolário: $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$

Demonstração: Temos $M_{FE} \cdot M_{EF} = M_{FF} = Id$

$$M_{EF} \cdot M_{FE} = M_{EE} = Id$$

Portanto M_{FE} é a matriz inversa de M_{EF}. ▨

Exercício Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v}-\vec{u}, \vec{u}-\vec{w}, \vec{u})$.

1. Mostre que F é uma base de V^3.
2. Calcule as coordenadas de $\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ na base F.

Solução: 1) Sejam $\vec{f_1} = \vec{v}-\vec{u}$, $\vec{f_2} = \vec{u}-\vec{w}$, $\vec{f_3} = \vec{u}$. Temos

$$\vec{f_1} = (-1, 1, 0)_E,$$
$$\vec{f_2} = (1, 0, -1)_E,$$
$$\vec{f_3} = (1, 0, 0)_E.$$

Como
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \neq 0,$$ os vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (Proposição na página 22).

Portanto $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.

2). O vetor $\vec{x} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ tem coordenadas $(1,2,3)_E$. Sejam $(x,y,z)_F$ suas coordenadas na base F.

Temos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = M_{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E$, Precisamos achar a matriz de mudança da base F para base E. Para isso, precisamos das coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ da base E na base F.

Temos

$$\vec{f_1} = \vec{v} - \vec{u} \quad (1)$$
$$\vec{f_2} = \vec{u} - \vec{w} \quad (2)$$
$$\vec{f_3} = \vec{u} \quad (3)$$

$(3) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{f_3}$. Substituindo em (1) e (2) obtemos

$$\vec{v} = \vec{f_1} + \vec{f_3},$$
$$\vec{w} = -\vec{f_2} + \vec{f_3}.$$

Portanto, $\vec{u} = (0,0,1)_F$, $\vec{v} = (1,0,1)_F$, $\vec{w} = (0,-1,1)_F$ e

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}_F.$$