S T Q Q S S D ___/___/___

Eu, Bruna Magrini da Cruz, número USP 11218813, declaro que fiz esta prova individualmente sem consulta e não divulguei minhas respostas até o final do prazo de entrega.

① Seja $\lambda = 3$

Y_i: número de pessoas por ônibus

$N(t)$: número de pessoas no tempo t, $\lambda = 3$

$Z(t)$: número de pessoas que chegam, $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $t \geq 0$

$$E(Y_i) = \sum p_i Y_i = 10 \cdot \frac{1}{10} + 20 \cdot \frac{1}{5} + 30 \cdot \frac{3}{10} + 40 \cdot \frac{2}{5} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$E(Y_i^2) = \sum p_i Y_i^2 = 10^2 \cdot \frac{1}{10} + 20^2 \cdot \frac{1}{5} + 30^2 \cdot \frac{3}{10} + 40^2 \cdot \frac{2}{5} = 10 + 80 + 270 + 640 = 1000$$

$$Var(Y_i) = E(Y_i^2) - (E(Y_i))^2 = 1000 - 30^2 = 1000 - 900 = 100$$

Para $t = 4$, temos:

$$E[Z(4)] = \lambda \mu t = 3 \cdot 30 \cdot t = 90t = 90 \cdot 4 = \boxed{360}$$

$$Var[Z(4)] = (\mu^2 + \sigma^2)\lambda t = \lambda t(30^2 + 100) = (900 + 100)\lambda t = 1000 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{12000}$$

↳ variância $= \sigma^2$

②

a) Para simular valores de X uniforme nos inteiros $\{1, 2, \ldots, 10\}$:

I. Simula-se valores uniformemente distribuídos no intervalo $(0,1)$

II transforma para o intervalo $(1, 10)$

(I) Dado um valor inicial X_0 denominado semente e valores inteiros positivos a, c e m, é feito calculos recursivos de

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \text{ módulo } m \quad n \geq 0$$

Assim, cada X_n é igual a $0, 1, \ldots, m-1$ e se supõe que a grandeza X_n/m seja uma aproximação para variável aleatória U no intervalo $(0,1)$.

(II) Observe que kU é uniforme em $(0, k)$.

___/___/___

S T Q Q S S D

Portanto,

$$P\{i-1 < kU < i\} = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \dots, n$$

Assim, com o valor $kU + 1$ onde $[x]$ é a parte inteira de x e $x \cdot L0$, teremos a distribuição desejada.

b) A função distribuição acumulada da exponencial é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Através da Transformada Inversa, queremos a inversa de F_X

$$y = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$1 - y = e^{-\lambda x}$$

$$\ln(1-y) = -\lambda x$$

$$\boxed{x = \frac{-\ln(1-u)}{\lambda}}, \quad 0 < u < 1$$

c) Seja a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{6}\right)\right\}$$

Temos que,

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{6}\right)\right\}$$

$$F^{-1}(u) = \boxed{\mu - 6\ln(-\ln u)}$$

d) Para os intervalos $I_1 = (0, p]$ e $I_2 = (p, 1]$

I. Simular valores $u_1, \dots, u_n \sim (0,1)$

II. Para $i = 1, \dots, n$,

Se $u_i \in (0, p]$, o valor simulado é $x_i = 1$

Caso contrário, $x_i = 0$

III. $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$

spiral

S T Q Q S S D ___/___/___

(3) Temos que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 6t+2, & 0 \leq t < 2 \\ 2t, & t \geq 2 \end{cases}$$

Queremos $P(N(2+1) - N(2) = 3)$

$$m(t) = \int_2^3 2t \, dt = 2\int_2^3 t \, dt = t^2 \Big|_2^3 = 5$$

Logo,

$$P(N(t) = 3) = \frac{5^3 e^{-5}}{3!} \approx \boxed{0{,}1403}$$

(4)

a) Como $S_4 \sim \text{gama}(n, \lambda)$

Temos que $E(S_4) = \frac{n}{\lambda} = \boxed{\frac{4}{\lambda}}$

b) $E(N(4) - N(2) \mid N(1) = 3) = E(N(4) - N(2)) = E(N(2)) = \boxed{2\lambda}$