Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

SME0121 Processos Estocasticos 27/07/2021

Desenvolva e justifique suas respostas. Expressões sem justificativa poderão ser desconsideradas na correção.

1. (2.0) Em uma rodoviária os ônibus chegam segundo um processo de Poisson à taxa de 3 ônibus por dia. Cada ônibus pode ter 10, 20, 30 ou 40 passageiros com probabilidades 1/10,1/5,3/10,2/5. Obtenha o valor esperado e a variância do número de pessoas que chegam à rodoviária num período de 4 dias.

2. (5.0) Descreva como se pode simular valores de uma variável aleatória X com as seguintes distribuições,
   (a) Uniforme nos inteiros $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
   (b) Exponencial com parâmetro λ.
   (c) Gumbel com função de distribuição acumulada, $F(x) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}$.
   (d) Binomial como parâmetros n e p.
   (e) com função de densidade $f(x) = 60\ x^2(1-x)^3,\ \ 0 < x < 1$.

3. (1.0) Suponha que clientes chegam a uma loja segundo um processo de Poisson não homogêneo com taxa $\lambda(t) = 6t + 2$, $0 \leq t < 2$ e $\lambda(t) = 2t$, $t \geq 2$. Calcule a probabilidade de que 3 clientes cheguem entre 2 e 3 horas após a loja abrir.

4. (2.0) Sejam $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa λ e S_n o tempo para o n-ésimo evento. Calcule
   (a) $E(S_4)$.
   (b) $E(N(4) - N(2)|N(1) = 3)$.

Formulário

- $E(X) = E[E(X|Y = y)]$.

- $Var(X) = E[Var(X|Y = y)] + Var[E(X|Y = y)]$.

- $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$,

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x),\ x > 0, \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

- $X \sim \text{Beta}(a, b)$,

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\ x^{a-1}(1-x)^{b-1},\ a > 0,\ b > 0,\ x \in (0,1),$$

- $X \sim \text{Poisson}(\phi)$

$$P(X = x) = \frac{\phi^x}{x!}\ e^{-\phi}.$$

- $P(X \in A) = E[g(X)]$ sendo $g(x) = I_A(x)$.

- Processo de Poisson com tempos de chegada $S_1, \ldots, S_n$,

$$\begin{aligned} f(s_1, \ldots, s_n | N(t) = n) &= \frac{n!}{t^n},\ 0 < s_1 < \cdots < s_n < t \\ m(t) &= \int_0^t \lambda(u) du \\ N(t+s) - N(s) &\sim Poisson(m(t+s) - m(s)) \end{aligned}$$

- Distribuições condicionais completas,

$$P(X_i = x_i | X_j = x_j, j \neq i) = \frac{p(\boldsymbol{x})}{P(X_j = x_j, j \neq i)}.$$