3^a Lista de Exercícios de Geometria Analítica (SMA300)

1^o Semestre de 2018

Recomendo que vocês façam os demais exercícios e discutem suas duvidas e soluções nas monitorias online no Tidia-ae.usp.br.

Cônicas

Para os Exercícios de 1 à 14, fixamos um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, B)$ no plano.

1. Encontre a equação reduzida das seguintes elipses, dados:
   (a) os focos ocorrem nos pontos $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e os vértices ocorrem nos pontos $(-13, 0)$ e $(13, 0)$.
   (b) os vértices ocorrem nos pontos $(-5, 0)$ e $(5, 0)$, a excentricidade é igual a $\frac{3}{5}$ e os focos pertencem ao eixo Ox.
   (c) os focos ocorrem nos pontos $(0, -6)$ e $(0, 6)$ e o semi-eixo menor mede 17.
   (d) os focos ocorrem nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e o semi-eixo maior mede $\sqrt{2}$.

2. Encontre os vértices, os focos e a excentricidade da elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$.

3. Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação reduzida das seguintes hipérboles, em relação ao sistema de coordenadas Γ no plano, onde
   (a) os focos ocorrem nos pontos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ e os vértices o ocorrem nos pontos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.
   (b) os vértices ocorrem nos pontos $(-15, 0)$ e $(15, 0)$ e as assíntotas ocorrem nas retas $5y - 4x = 0$ e $5y + 4x = 0$.
   (c) os focos ocorrem nos pontos $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e as assíntotas nas retas $2y - x = 0$ e $2y + x = 0$.
   (d) $b = 4$ e as assíntotas são as retas $2y - 3x = 0$ e $2y + 3x = 0$ e os focos pertencem ao eixo Oy.

4. Encontre os vértices, os focos, a excentricidade e as assíntotas da hipérbole $16x^2 - 25y^2 = 400$.

5. Encontre o vértice, o foco e a diretriz da parábola $y^2 = 28x$.

6. Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação reduzida das parábolas, em relação ao sistema de coordenadas Γ no plano, com vértice na origem, onde:
   (a) o foco ocorre no ponto $(8\,, 0)$.
   (b) a diretriz é a reta $y - 2 = 0$.
   (c) eixo de simetria é o eixo Ox e um ponto da parábola é o ponto $(5\,, 10)$.
   (d) dois pontos da parábola são $(6\,, 18)$ e $(-6\,, 18)$.

7. Em cada um dos itens abaixo:
   (i) Reduza as equações das cônicas abaixo a uma forma mais simples, através de translações e/ou rotações.
   (ii) No caso de usar uma rotação, dê o ângulo em radianos.
   (iii) Descreva geometricamente, em relação ao novo sistema de coordenadas obtido, a canônica dada.

   (a) $32\,x^2 + 52\,xy - 7\,y^2 + 180 = 0\,.$ (b) $7\,x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13\,y^2 - 16 = 0\,.$
   (c) $4\,x^2 - 5\,xy - 11\,y^2 - x + 37\,y + 52 = 0\,.$ (d) $4\,x^2 - 4\,xy + y^2 - 8\sqrt{5}\,x - 16\sqrt{5}\,y = 0\,.$
   (e) $x^2 + y^2 - 2\,xy - 8\sqrt{2}\,x - 8\sqrt{2}\,y = 0\,.$ (f) $17\,x^2 - 12\,xy + 8\,y^2 = 0\,.$

8. Mostre que qualquer reta r que contém o centro da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é secante a ela, e determine os pontos de interseção em função das coordenadas do vetor diretor $\vec{r} = (m, n)$ da reta r.

9. Obtenha equações da reta tangente a elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ em $P = (1, -1)$ e da reta normal em $Q = (1, 1)$.

10. Calcule a media angular entre as retas tangentes à hipérbole de equação $x^2 - 2y^2 = 2$ nos pontos $P = (2, -1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 0)$.

11. A reta $t : y = 2$ tangencia a uma parábola de foco $F = (1, 1)$ e eixo $s : y = x$. Obtenha uma equação da diretriz, o parâmetro, o vértice e o ponto de tangência.

12. Seja $T = (h, k)$ um ponto da elipse $E : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, e sejam F_1 e F_2 os focos de E. Mostre que a reta s, normal a E em T, contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$.

13. Seja $T = (h, k)$ um ponto da hipérbole $H : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, e sejam F_1 e F_2 os focos de H. Mostre que a reta t, tangente a H em T, contém a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$.

14. Sejam $E : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ uma elipse e $H : x^2/m^2 - y^2/n^2 = 1$ uma hipérbole confocais, isto é, de mesmos focos. Prove que
(a) $E \cap H$ contém exatamente quatro pontos;
(b) em cada ponto T da interseção $E \cap H$, as duas curvas se interceptam ortogonalmente, isto é, as restas tangentes a elas em T são perpendiculares.

Quádricas

Para os Exercícios de 15 à 28, fixamos um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ no espaço.

15. Determine uma equação da superfície obtida da rotação da reta $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$ em torno do eixo Oz.

16. Encontre uma equação do lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes da reta $r : X = (0, 0, -\frac{1}{4}) + \lambda(0, 1, 0)$.

17. Encontre uma equação do lugar geométrico dos pontos P do espaço de modo que $\frac{d(P,F)}{d(P,\pi)} = 2$, onde $F = (1\,, 0\,, 0)$ e $\pi\,:\,x = -1$.

18. A parábola $y = x^2$ do plano $x = 0$ é rotacionada em torno do eixo Oz. Encontre a equação do lugar geométrico do espaço descrito pela superfície de revolução obtida.

19. Mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância ao ponto $A = (2\,, -1\,, 3)$ é dobro da sua distância ao ponto $B = (-4\,, 2\,, 1)$ é uma superfície esférica. Ache seu centro e seu raio.

20. Por uma translação conveniente de eixos (isto é, uma mudança do sistema de coordenadas Σ, do tipo translação) reduza cada uma das quádricas abaixo à sua forma reduzida. Identifique e faça uma representação geométrica do gráfico das mesmas.

$$(a)\ x^2 + 2\,y^2 + 4\,z^2 - 2\,x - 8\,y + 16\,z + 9 = 0\,. \qquad (b)\ x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,y + 4\,z - 2 = 0\,.$$

21. Mostre que a superfície que tem equação $z = xy$ é um parabolóide hiperbólico, fazendo uma rotação conveniente dos eixos Ox e Oy (isto é, uma mudança do sistema de coordenadas Σ, do tipo rotação em cada um dos eixos Ox e Oy).

22. Determine uma equação da superfície gerada por uma reta que contém o ponto $P = (3, 0, 0)$, que se apoia na circunferência $\mathcal{C}$ de equações dadas por $\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.
Dê uma representação geométrica para o gráfico da mesma.

Coordenadas polares, esféricas e cilíndricas

23. Identifique as curvas, dê as correspondentes equações em coordenadas cartesianas e faça um esboço dos gráficos das funções abaixo, dadas em coordenadas polares. Em cada caso, determine o período.
(a) $r = a\cos\theta, a \neq 0$
(b) $r = a\sin\theta, a \neq 0$
(c) $r = a\cos\theta + b\sin\theta, ab \neq 0$
(d) $r = 3 + 2\cos\theta$.

24. Considere a equação geral de uma reta no plano nas coordenadas cartesianas. Passe-a para coordenadas polares.

25. Determine as coordenadas cilíndricas e esféricas dos pontos dados em coordenadas cartesianas por: $(0,0,0), (2,0,0), (-2,0,0), (0,5,0), (0,-4,0), (0,0,3), (0,0,-3), (0,1,2), (1,1,1)$. Em cada caso, discuta sobre a unicidade da representação do ponto nestes dois sistemas de coordenadas.

26. Determine as coordenadas cartesianas e cilíndricas do ponto com coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi) = (4, \pi, \pi)$.

27. Faça um esboço da superfície dada em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) pelas equações abaixo:
(a) $z = r^2$ (b) $z = r$ (c) $z^2 = r\cos(2\theta)$ (d) $r = 4\sin\theta$ (e)$z = \theta$

28. Determine as equações em coordenas cilíndricas e coordenadas esféricas das superfícies que em coordenadas cartesianas (x, y, z) são dadas pelas equações abaixo:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a \neq 0$.
(b) $x^2 + y^2 = a, a \neq 0$.
(c) $x = y$.