# SME 0121 Processos Estocásticos
# ICMC-USP, Ricardo Ehlers
# Lista 2

1. Uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$, tem matriz de probabilidade de transição dada por,

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

   Determine,

   (a) $P\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0\}$

   (b) $P\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1 | X_0 = 1\}$.

2. Uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$, tem matriz de probabilidade de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

   A distribuição inicial é tal que $P(X_0 = i) = p_i$ com $p_0 = 0.5$ e $p_1 = 0.5$. Calcule,

   (a) $P\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$

   (b) $P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}$

3. Considere a cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ cuja matriz de probabilidades de transição é,

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

   Suponha que a distribuição inicial é $p_i = 1/4$, $i = 0, 1, 2, 3$. Mostre que $P\{X_n = k\} = 1/4$, $k = 0, 1, 2, 3$, para todo $n$. Você pode deduzir esse resultado geral desse exemplo?

4. Uma partícula move-se pelos estados 0, 1 e 2 de acordo com um processo de Markov com matriz de probabilidades de transição dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $X_n$ a posição da partícula no $n$-ésimo movimento. Calcule $P\{X_n = 0|X_0 = 0\}$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

5. Uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$, tem matriz de probabilidades de transição dada por,

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

e probabilidades iniciais $p_0 = 0.5$ e $p_1 = 0.5$. Calcule $P\{X_2 = 0\}$ e $P\{X_3 = 0\}$.

6. Suponha que a probabilidade de chuver amanhã depende somente do fato de estar chovendo ou não hoje. Suponha também que, se hoje está chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.2; se hoje não estiver chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.7. Se a probabilidade de chover hoje é 0.5, calcule a probabilidade de que chova daqui a três dias.

7. Exercícios do Cap. 4 de Sheldon Ross:

   2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,14.