7ª Lista de Exercícios
Autovalores e Autovetores

Exercício 1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encontre o polinômio característico de A e seus autovalores.

b) Calcule os autovetores LI de A associados a cada autovetor.

c) Mostre que os autovetores de A formam uma base B de $\mathbb{R}^3$.

d) Seja a transformação linear $Tx = Ax$, isto é, a matriz de T na base canônica C é $[T]_C = A$. Encontre a matriz da transformação T na base B, isto é, $[T]_B$.

e) Considere a matriz P cujas colunas são os autovetores. Calcule P^{-1} usando matrizes aumentadas[1] e calcule $B = PAP^{-1}$.

Observação: os últimos itens desse exercício são para ilustrar que se uma matriz $n \times n$ tem uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores, essa matriz é *diagonalizável*, isto é, semelhante[2] a uma matriz diagonal. O último item ilustra que a matriz P cujas colunas são os autovetores de A diagonaliza A, ou seja, PAP^{-1} é matriz diagnonal.

Exercício 2 (Opcional: autovetores dominantes, como no *Pagerank*).

No exercício anterior, sejam os autovalores ordenados por ordem decrescente de módulo ($|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$), ou seja, λ_1 é *dominante*. Vimos que os autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, então

$$Av = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 + \alpha_3 A v_3 = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \lambda_3 \alpha_3 v_3$$

e portanto

$$\frac{1}{\lambda_1} Av = \alpha_1 v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \alpha_2 v_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \alpha_3 v_3$$

Se iterarmos diversas vezes $v \leftarrow \frac{1}{\lambda_1} Av$ teremos na n-ésima iterada

$$v = \alpha_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \alpha_2 v_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n \alpha_3 v_3$$

e as últimas duas parcelas tendem a zero quando $n \to \infty$, e portanto $v \to \alpha_1 v_1$, ou seja, calculamos uma aproximação para o autovetor dominante v_1.

Como um exercício de fixação opcional, faça um programa que

a) calcule um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ com entradas aleatórias (use funções `random`);

b) faça um loop que a cada iterada calcule $v \leftarrow \frac{1}{\lambda} Av$ e repita-o, digamos, 20 vezes.

c) Verifique que $v/\|v\|$ é boa aproximação de $v_1/\|v_1\|$ (a menos do sinal).

---

[1] $[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}]$.

[2] Duas matrizes A e B são semehantes se existe P invertível tal que $B = PAP^{-1}$.