SME 0121 Processos Estocásticos
ICMC-USP, Ricardo Ehlers
Lista 5

1. Considere uma cadeia de Markov com 2 estados cuja matriz de transição é,

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.125 & 0.875 \end{pmatrix}.$$

   Descreva os passos para simular os estados 1 e 2 desta cadeia por um certo número de iterações. Após descartar as iterações iniciais (aquecimento) estime as probabilidades da distribuição invariante usando a proporção de iterações que a cadeia visita o estado 1. Comente os resultados.

2. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ independentes tais que,

$$\begin{aligned} Y_i|X = x &\sim \text{Poisson}(x) \\ X &\sim \text{Poisson}(\lambda), \text{truncada em } \{1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

   Implemente um algoritmo Metropolis-Hastings para simular valores de $X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$.

3. Proponha um amostrador de Gibbs para gerar uma amostra da distribuição normal bivariada com coeficiente de correlação ρ.

4. Suponha que um vetor aleatório $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ tem função de densidade,

$$f(y_1, y_2, y_3) \propto \exp\{-(y_1 + y_2 + y_3 + \theta_{12}y_1y_2 + \theta_{23}y_2y_3 + \theta_{31}y_3y_1)\}$$

   sendo $\theta_{ij} > 0$ conhecidos. Obtenha as distribuições condicionais completas.

5. Suponha que X tem um distribuição normal truncada cuja densidade é,

$$f(x) \propto \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\ I(x > \mu_0)$$

   sendo $I(\cdot)$ a função indicadora. Seja a variável auxiliar Z tal que

$$Z|X = x \sim \text{Uniforme}\left(0, \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right).$$

A densidade conjunta de X e Z será então,

$$g(x,z) \propto I(x > \mu_0)\ I\left(0 < z < \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\right)$$

e

$$f(x) = \int g(x,z)dz.$$

(a) Proponha um amostrador de Gibbs para simular valores de X obtendo as distribuições condicionais completas de X e Z.

(b) Que restrição deve ser usada para o valor inicial de Z no seu amostrador?

6. Seja uma variável aleatória $X \sim t(\mu, \sigma^2, \nu)$ com μ, σ^2 e ν conhecidos. Pode-se mostrar que a densidade de X pode ser escrita como uma mistura de densidades normais usando densidades Gama Inversa,

$$f(x) = \int_0^\infty f_N(x|\mu, \lambda\sigma^2) f_{IG}(\lambda|\nu/2, \nu/2) d\lambda.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} X|\lambda &\sim N(\mu, \lambda\sigma^2) \\ \lambda &\sim \text{Gama-Inversa}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right). \end{aligned}$$

Proponha um amostrador de Gibbs para simular valores de X.