2^a Lista de Exercícios de Geometria Analítica (SMA300)

1^o Semestre de 2018

Recomendo que vocês façam os demais exercícios e discutem suas duvidas e soluções nas monitorias online no Tidia-ae.usp.br.

Nos exercícios 1-23, fixamos um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, E)$ do espaço $\mathbb{E}^3$, com B base positiva. As coordenadas de pontos e as equações de retas e planos são dadas em relação ao sistema Σ.

Equações de retas e planos, e suas posições relativas

1. (a) Sejam $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$. Escreva equações nas formas vetorial, paramétrica e simétrica para reta BC. Verifique se $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta.

   (b) Dados $A = (1, 2, 3)$ e $\vec{u} = (3, 2, 1)$, escreva equações da reta que contém o ponto A e é paralela a $\vec{u}$, nas formas vetorial, paramétrica e simétrica. Obtenha dois vetores unitários dessa reta.

2. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

   (a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.

   (b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

3. Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (2\,, 0\,, -3)$ e:

   (a) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1\,, 0\,, 4)$ e $C = (2\,, 1\,, 3)$.
   (b) é paralela a $s : \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$.
   (c) é paralela à reta $s : \begin{cases} x = 1 - 2\,\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (a) Faça um esboço dos gráficos dos planos cujas equações gerais são dadas por:
   (i) $x = 2$, (ii) $y + 1 = 0$, (iii) $z + 4 = 0$, (iv) $x - z = 0$.

   (b) Obtenha equações paramétricas dos planos coordenados.

   (c) Obtenha equações gerais dos planos coordenados.

5. Encontre uma equação geral, vetorial e paramétricas do plano que contém as retas r e s cujas equações na forma simétrica são dadas por $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ e $s : x - 1 = y = z$.

6. O plano π_1 contém $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, o plano π_2 contém $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo a $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$, e o plano π_3 tem equação $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (a) Obtenha equações gerais dos três planos.

   (b) Mostre que a interseção dos três planos se reduz a um único ponto e determine-o.

7. Dadas as retas, cujas equações são dadas por:

   $$r : \begin{cases} x = m\,y - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \qquad s : x = \frac{y}{m} = z \quad \text{e} \quad t : -x + z = y = -z - 1,$$

   encontrar os valores de $m \in \mathbb{R}$, de modo que:
   (a) as retas r e s sejam paralelas e não coincidentes;

(b) as retas r e s e t sejam paralelas a um mesmo plano;
(c) as retas r e t sejam concorrentes;
(d) as retas r e s sejam reversas.

8. Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém o ponto $P = (1\,,1\,,0)$, é paralela ou está contida no plano dado por $\pi\ :\ 2\,x + y - z - 3 = 0$ e é concorrente a reta dada por $r\ :\ (x\,,y\,,z) = (1\,,0\,,0) + \lambda(-1\,,0\,,1)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. Encontre a projeção do ponto $P = (1\,,4\,,0)$ sobre o plano dado por $\pi\ :\ x + y - 2\,z + 1 = 0$, paralelamente à reta dada por $r\ :\ (x\,,y\,,z) = (0\,,0\,,0) + \lambda(1\,,4\,,1)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Obtenha as equações do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos que tem extremidades nos planos dados por $\pi_1\ :\ 2\,x - 3\,y + 3\,z - 4 = 0$ e $\pi_2\ :\ x = y - z + 2 = 0$.

11. O plano π contém a reta $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ e é transversal aos eixo coordenados Oy e Oz, interceptando-os, respetivamente, nos pontos A e B. Obtenha a equação geral de π, sabendo que O, A e B são vértices de um triângulo isósceles.

12. Dados os planos $\pi_1\ :\ x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2\ :\ x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2\,z - 2 = 0$, encontre uma equação geral do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular ao plano π_3.

13. Obtenha um vetor normal ao plano π em cada caso:
(a) π contem $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$.
(b) $\pi := X = (1, 2, 0) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(c) $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Medida angular

14. Obtenha equações da reta r que contém o ponto $P = (1, 1, 1)$ e é concorrente com $s : x = 2y = 2z$ sabendo que o co-seno da medida angular entre r e s é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. Obtenha a medida angular em radianos entre a reta $r\ :\ X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 2)$ e o plano $\pi : x + y - z - 1 = 0$.

16. Obtenha uma equação geral do plano que contem $r\ :\ x = z + 1 = y + 2$ e forma um ângulo $\theta = \pi/3$ com o plano $\pi : x + 2y - 3z + 2 = 0$.

17. Encontre as coordenadas do ponto simétrico do ponto $P = (1\,,4\,,2)$ em relação ao plano $\pi\ :\ x - y + z - 2 = 0$.

Distâncias

18. Dados o ponto $A = (0\,,2\,,1)$ e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1\,, 2)$, ache os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Porque?

19. Determine os pontos da reta $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$ que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 2z = 1$.

20. Mostre que o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos distintos A e B é o plano que contém o ponto médio do segmento AB e é perpendicular a reta AB.

21. (a) Prove que o lugar geométrico dos ponto do espaço que são equidistantes de $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 2, 1)$ é uma reta e obtenha uma equação vetorial para ela.
(b) Mostre que a reta no item (a) é perpendicular ao plano ABC.

22. Obtenha as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes das retas r, s e t dadas por $r : \begin{cases} x = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$, $s : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, $t : x - y = x + z = 1 + z$.

23. Encontre uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1\,,1\,,1)$ e $B = (0\,,2\,,1)$ e é equidistante dos pontos $C = (2\,,3\,,0)$ e $D = (0\,,1\,,2)$.

Mudança de sistema de coordenadas

24. Sejam $\Sigma_1 = (O, E) = (O\,, \vec{e_1}\,, \vec{e_2}\,, \vec{e_3})$ e $\Sigma_2 = (O, F) = \left(O'\,, \vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$ dois sistemas de coordenadas do espaço, tais que $\vec{f_1} = \vec{e_1}$, $\vec{f_2} = -\vec{e_3}$, $\vec{f_3} = \vec{e_2}$ e $O' = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}$. Obtenha as equações paramétricas da reta $r : (x\,, y\,, z)_{\Sigma_1} = (0\,, 0\,, 0)_{\Sigma_1} + \lambda(0\,, 1\,, 1)_E$ em relação ao sistema Σ_2.

25. Idem, sendo $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2}$, $\vec{f_3} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$ e $O' = (1\,, 1\,, 1)_{\Sigma_1}$ e $r : (x\,, y\,, z)_{\Sigma_1} = (0\,, 0\,, 0)_{\Sigma_1} + \lambda(0\,, 1\,, 1)_E$.

26. Seja $\pi : [2\,x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$. Obtenha uma equação geral do plano π, em relação aos sistemas de coordenadas dos Exercícios 24 e 25.