

Cadeias de Markov

Ricardo Ehlers
`ehlers@icmc.usp.br`

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Universidade de São Paulo

Cadeias de Markov em tempo discreto

Seja $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ um processo estocástico em tempo discreto com espaço de estados discreto (finito ou infinito enumerável).

Propriedade de Markov

A probabilidade de que a cadeia assuma um certo valor futuro, quando o seu estado atual é conhecido, não se altera se conhecemos os seu comportamento passado.

$X_t = i$ indica que o processo está no estado i no tempo t .

Se o processo está no estado i existe uma probabilidade fixa $P_{ij}^{t,t+1}$ de que o próximo estado seja j .

Em termos probabilísticos, aplicando a propriedade Markoviana temos que,

$$\begin{aligned} & P(X_{t+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i) \\ = & P(X_{t+1} = j | X_t = i) \\ = & P_{ij}^{t,t+1}. \end{aligned}$$

para todos os possíveis valores de $t, i, j, i_0, i_1, \dots, i_{t-1}$.

$P_{i,j}^{t,t+1}$ são chamadas *probabilidades de transição a 1 passo*.

Cadeias Estacionárias ou Homogêneas

Quando as probabilidades de transição não dependem do tempo t , ou seja

$$P_{i,j}^{t,t+1} = P_{i,j},$$

temos uma cadeia de Markov *estacionária* (com probabilidades de transição estacionárias).

A propriedade de Markov pode valer para uma sequência de tempos, por exemplo se,

distribuição de X_{t+1}, \dots, X_{t+k} só depende de X_t

Para um número finito n de variáveis aleatórias, X_0, X_1, \dots, X_n , deseja-se obter a probabilidade conjunta de uma particular trajetória da cadeia,

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \times \dots \times P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\ &= P(X_0 = i_0) \prod_{t=1}^n P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}). \end{aligned}$$

Precisamos então das distribuições condicionais de $X_t | X_{t-1}$, $t = 1, \dots, n$ e da distribuição de X_0 .

Matriz de transição

As probabilidades de transição a 1 passo podem ser arranjadas em uma *matriz de probabilidades de transição*,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

As probabilidades P_{ij} satisfazem às seguintes condições,

$$0 \leq P_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots$$

- ▶ As linhas da matriz \mathbf{P} definem distribuições de probabilidades condicionais de $X_{t+1}|X_t$, $t = 1, 2, \dots$.
- ▶ A matriz será finita se a cadeia tem um número finito de estados.
- ▶ Uma cadeia de Markov fica completamente definida especificando-se sua matriz de transição e o estado inicial X_0 .

Exemplo. Seja o processo estocástico $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ tal que

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{se chove no tempo } t \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com

$$P(X_t = 0 | X_{t-1} = 0) = \alpha \quad \text{e} \quad P(X_t = 0 | X_{t-1} = 1) = \beta$$

Matriz de probabilidades de transição,

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Exemplo. Suponha que o processo anterior tenha as seguintes probabilidades de transição,

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0, X_{t-1} = 0) = 0.7$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0, X_{t-1} = 1) = 0.5$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1, X_{t-1} = 0) = 0.4$$

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 1, X_{t-1} = 1) = 0.2$$

Como transformar este processo em uma cadeia de Markov?

Defina o processo $\{Y_t, t = 0, 1, \dots\}$ tal que,

$$Y_t = \begin{cases} 0, & \text{se } X_t = 0, X_{t-1} = 0 \\ 1, & \text{se } X_t = 0, X_{t-1} = 1 \\ 2, & \text{se } X_t = 1, X_{t-1} = 0 \\ 3, & \text{se } X_t = 1, X_{t-1} = 1 \end{cases}$$

- ▶ Verifique que Y_t é uma cadeia de Markov estacionária com espaço de estados $\{0, 1, 2, 3\}$.
- ▶ Obtenha a matriz de transição (Veja o Exemplo 4.4).

Por exemplo,

$$\begin{aligned}P(Y_t = 0 | Y_{t-1} = 0) &= P(X_t = 0, X_{t-1} = 0 | X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0) \\&= \frac{P(X_t = 0, X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0)}{P(X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0)} \\&= \frac{P(X_t = 0 | X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0)P(X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0)}{P(X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0)} \\&= P(X_t = 0 | X_{t-1} = 0, X_{t-2} = 0) = 0.7\end{aligned}$$

Exemplo. Um processo estocástico $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ que assume valores nos inteiros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ tal que,

$$P(X_t = i + 1 | X_{t-1} = i) = p$$

$$P(X_t = i - 1 | X_{t-1} = i) = 1 - p$$

com $0 < p < 1$ é chamado de *passeio aleatório*.

Ou seja, em 1 passo a cadeia pode saltar somente para estados vizinhos.

O passeio aleatório pode ser reescrito como,

$$X_t = X_{t-1} + Z_t$$

sendo Z_t um processo estocástico com espaço de estados $\{-1, 1\}$ tal que,

$$\begin{aligned}P(Z_t = 1) &= p, \\P(Z_t = -1) &= 1 - p.\end{aligned}$$

e Z_1, Z_2, \dots são independentes.

Portanto,

$$\begin{aligned}E(Z_t) &= p - (1 - p) = 2p - 1, \\E(Z_t^2) &= p + (1 - p) = 1, \\Var(Z_t) &= 1 - (2p - 1)^2.\end{aligned}$$

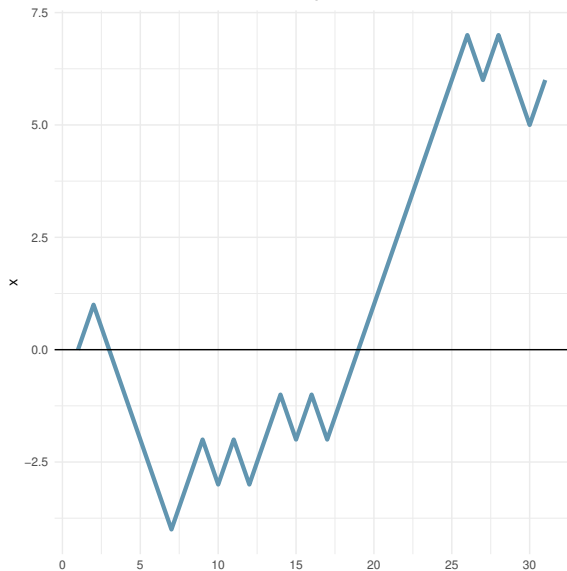
Denotando-se $\mu = E(Z_t)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(Z_t)$ e fazendo-se substituições sucessivas obtém-se que,

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t \\ &= X_{t-3} + Z_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t \\ &\vdots \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^t Z_j \end{aligned}$$

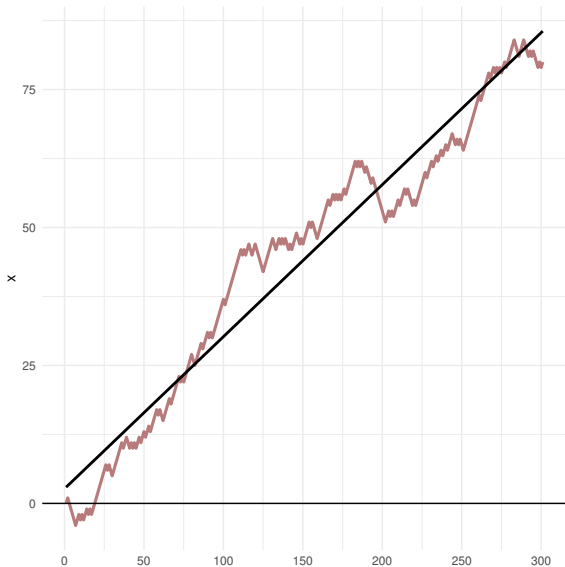
Iniciando o processo em $X_0 = 0$,

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \sum_{j=1}^t E(Z_j) = t\mu \\ \text{Var}(X_t) &= \sum_{j=1}^t \text{Var}(Z_j) = t\sigma^2. \end{aligned}$$

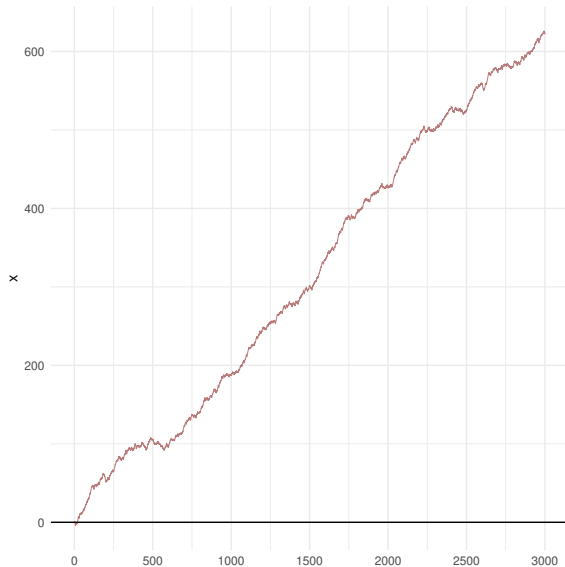
30 valores simulados de um passeio aleatório com $X_0 = 0$ e $p = 0.6$.



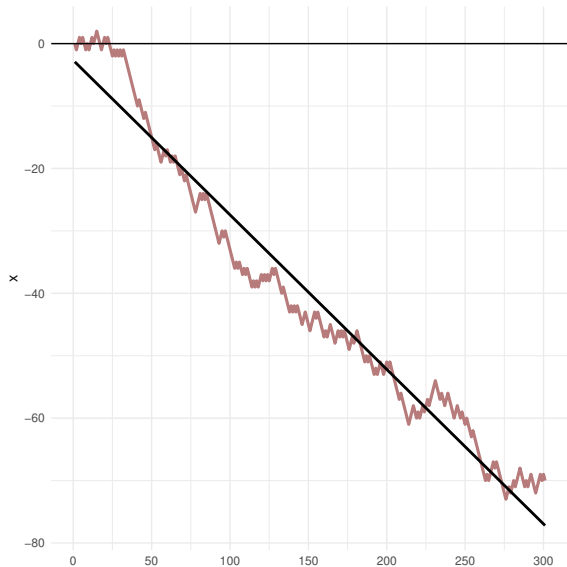
300 valores simulados de um passeio aleatório com $X_0 = 0$, $p = 0.6$ e $E(X_t) = 0.2t$.



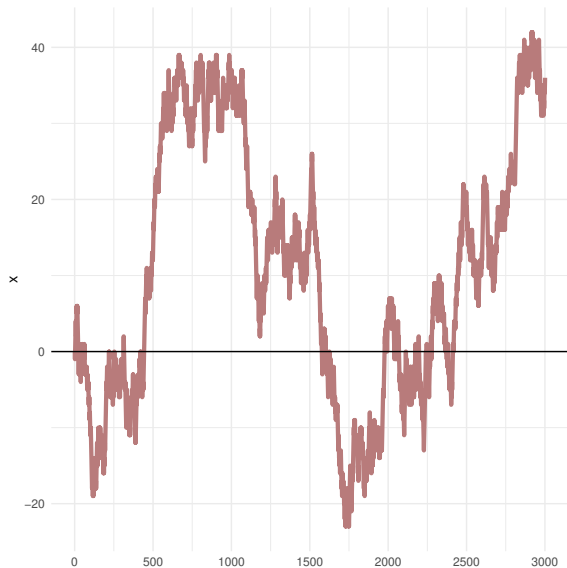
3000 valores simulados de um passeio aleatório com $X_0 = 0$ e $p = 0.6$.



300 valores simulados de um passeio aleatório com $X_0 = 0$, $p = 0.4$ e $E(X_t) = -0.2t$.



3000 valores simulados de um passeio aleatório com $X_0 = 0$, $p = 0.5$ e $E(X_t) = 0$.



Exemplo. Nos exemplos anteriores calcule,

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$$

sendo $P(X_0 = 0) = q$.

$$P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2) =$$

$$P(X_2 = 2|X_1 = 1, X_0 = 0) P(X_1 = 1, X_0 = 0) =$$

$$P(X_2 = 2|X_1 = 1) P(X_1 = 1|X_0 = 0) P(X_0 = 0) = p^2 q.$$

Exemplo. Em um jogo, o jogador só pode ganhar ou perder 1 unidade monetária a cada jogada com probabilidades p e $1 - p$. Ele é obrigado a abandonar o jogo se perder tudo ou ganhar a fortuna N .

O processo estocástico $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ sendo X_t a fortuna do jogador no tempo t é um passeio aleatório com,

$$P(X_t = i + 1 | X_{t-1} = i) = p, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$P(X_t = i - 1 | X_{t-1} = i) = 1 - p, \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$P(X_t = 0 | X_{t-1} = 0) = 1$$

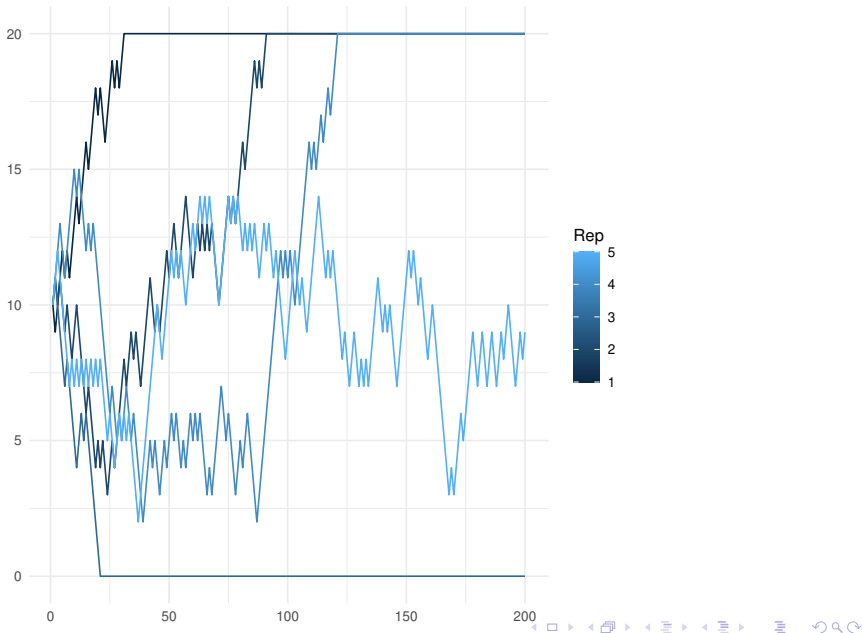
$$P(X_t = N | X_{t-1} = N) = 1$$

Os estados 0 e N são chamados *estados absorventes*.

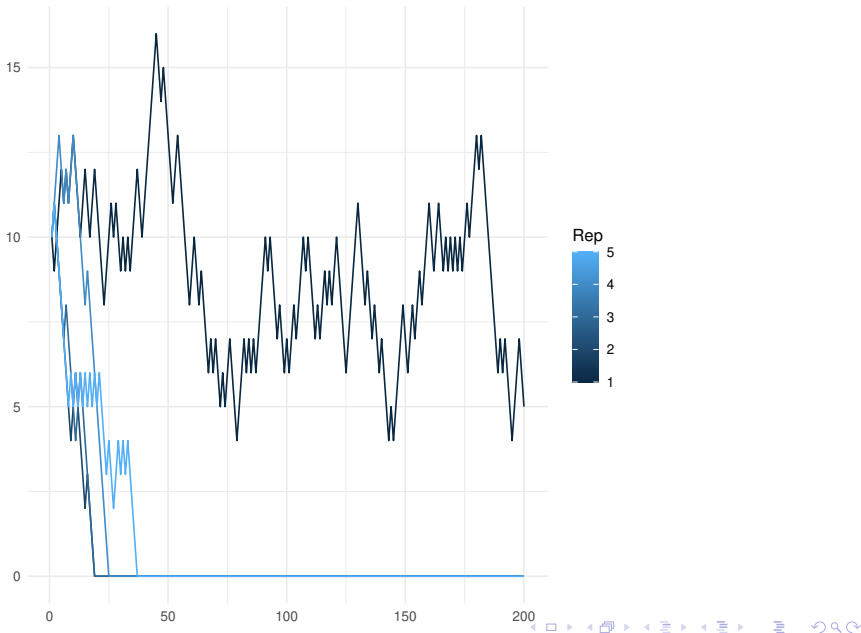
Questões de interesse:

- ▶ Qual a probabilidade do jogador eventualmente perder tudo?
- ▶ Qual o tempo esperado para o jogador eventualmente ganhar tudo?
- ▶ Qual o número esperado de jogadas para que o jogador saia do jogo?

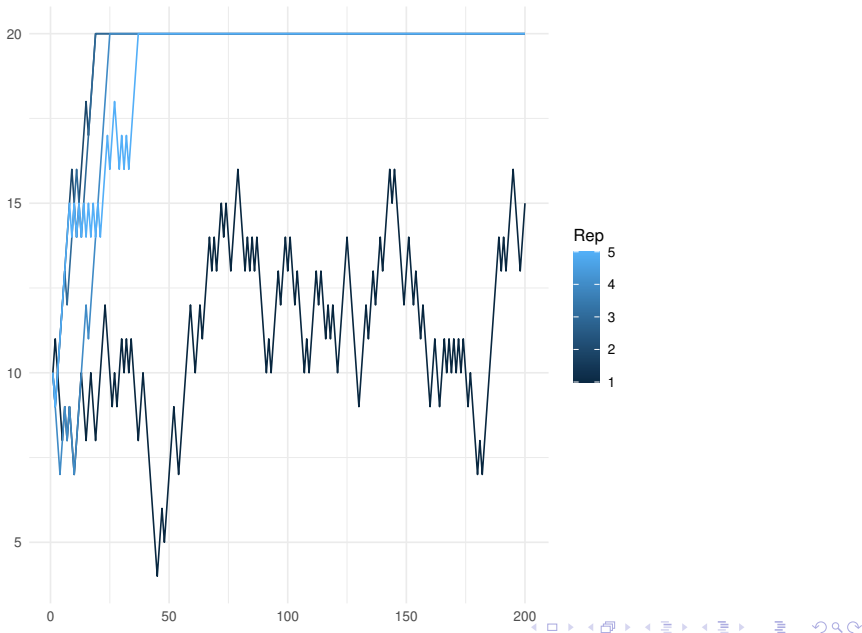
5 possíveis trajetórias do passeio aleatório com $X_0 = 10$, $p = 0.5$ e estados absorventes 0 e 20.



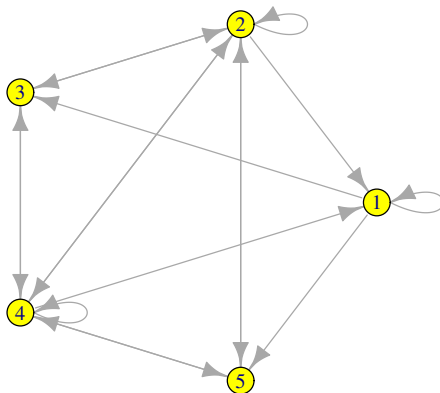
5 possíveis trajetórias do processo com $X_0 = 10$, $p = 0.45$ e estados absorventes 0 e 20.



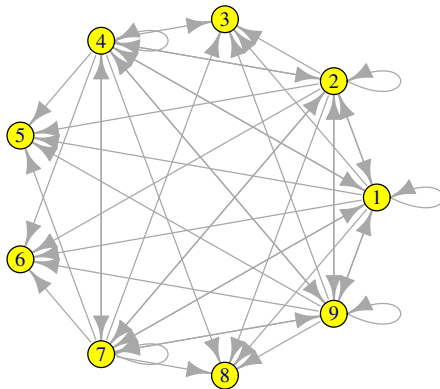
5 possíveis trajetórias do processo com $X_0 = 10$, $p = 0.55$ e estados absorventes 0 e 20.



Grafo representando a matriz de transição de uma cadeia de Markov com 5 estados.



Grafo representando a matriz de transição de uma cadeia de Markov com 9 estados.



Transição em mais de um passo

Qual a probabilidade de uma cadeia de Markov estacionária ir do estado i para o estado j em n passos ?

$$\underbrace{P(X_{n+m} = j | X_m = i)}_{P_{ij}^{(n)}} = ?$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

$$\begin{aligned}P_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) \\&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) \\&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) \\&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \\&\Rightarrow \mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}, \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$$

Por indução,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1+1)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^n$$

Conclusão:

$$\boxed{\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n}$$

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição,

$$\begin{bmatrix} 0.10 & 0.20 & 0.70 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.60 & 0.10 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Calcule $P(X_3 = 1 | X_1 = 0)$ e $P(X_3 = 1 | X_0 = 0)$.

Exemplo. A probabilidade de chover em um dia depende de ter chovido ou não nos 2 dias anteriores. Dado que choveu segunda-feira e terça-feira qual a probabilidade de chover na quinta-feira?

Estude outros exemplos da Seção 4.2.

Classificação dos Estados

- ▶ j é acessível a partir de i se $P_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$.
- ▶ i e j se comunicam ($i \leftrightarrow j$) se são acessíveis um a partir do outro.
- ▶ Se i e j não se comunicam então,

$$P_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0 \quad \text{ou} \quad P_{ji}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0 \quad \text{ou ambos}$$

- ▶ $i \leftrightarrow i$, para todo estado i .
- ▶ Se $i \leftrightarrow j$ então $j \leftrightarrow i$.
- ▶ Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$.

Classe de estados

Estados que se comunicam formam uma *classe de estados*.

Irredutibilidade

Uma cadeia é *irredutível* se tiver somente uma classe (todos os estados se comunicam).

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a seguinte matriz de transição,

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Há 2 classes de estados que se comunicam: classe $C_1 = \{1, 2\}$ e classe $C_2 = \{3, 4, 5\}$.

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_n = i \mid X_0 = j) = 0,$$

se $j \in C_2$ e $i \in C_1$, $\forall n \geq 1$.

Exemplo. Seja um passeio aleatório com estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a seguinte matriz de transição,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos identificar 3 classes: $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1, 2, 3\}$ e $C_3 = \{4\}$.

Estados recorrentes e transientes

Em uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ qual a probabilidade de que a cadeia eventualmente retorne ao um certo estado i ?

Ou seja,

$$f_i = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i) = P_{ii}^{(n)}, \text{ para algum } n \geq 1.$$

Seja N o número de retornos ao estado i . Então,

- ▶ Se $f_i = 1$, o estado i é *recorrente*, e $N = \infty$.
- ▶ Se $f_i < 1$, o estado i é *transiente*.

Para um estado i transiente, existe uma probabilidade não nula da cadeia nunca retornar ao estado i ,

$$P(\text{nunca retornar a } i) = 1 - f_i > 0.$$

Então,

- ▶ N é o número retornos ao estado i até que a cadeia nunca mais retorne ao estado i , e

$$N \sim \text{Geometrica}(1 - f_i)$$

- ▶ $P(N = n | X_0 = i) = f_i^{n-1}(1 - f_i), \quad n = 1, 2, \dots$

- ▶ $E(N | X_0 = i) = \frac{1}{1 - f_i}.$

Proposição

O estado i é recorrente se e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

Equivalentemente, o estado i é transiente se e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty.$$

Propriedades dos Estados

Consequentemente, temos que,

- ▶ Se o espaço de estados for finito, pelo menos um dos estados é recorrente.
- ▶ Se $i \leftrightarrow j$ e i é recorrente então j também é recorrente.
- ▶ Recorrência e transiência são propriedades de classe.

Portanto,

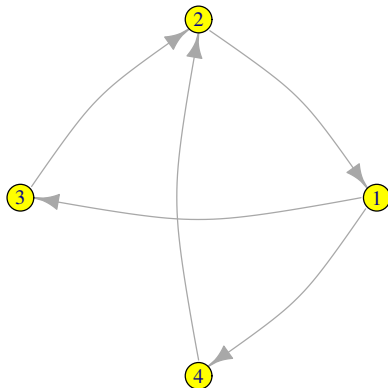
- ▶ Se a cadeia for irredutível e finita, todos os estados são recorrentes.

Exemplo. Verifique quais estados são transientes ou recorrentes nesta cadeia de Markov com estados $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que a cadeia é irredutível pois todos os estados se comunicam. Portanto todos os estados são recorrentes.

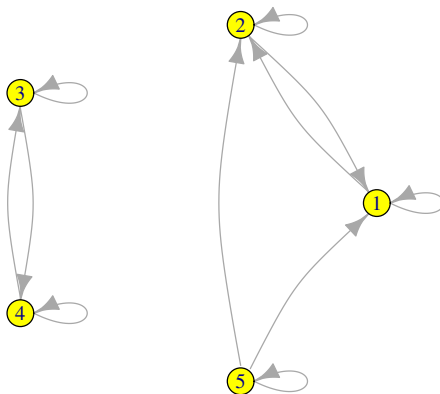
Grafo representando a matriz de transição da cadeia de Markov do exemplo anterior.



Exemplo. Verifique quais estados são transientes ou recorrentes nesta cadeia de Markov com estados $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Grafo representando a matriz de transição de uma cadeia de Markov com 5 estados.



Note que

$$P_{5,5}^{(n)} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{5,5}^{(n)} < \infty.$$

Portanto o estado 5 é transiente. As classes são $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ e $\{5\}$ portanto os outros estados são recorrentes.

Exemplo. Encontre os estados transientes e recorrentes.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo. Encontre as classes, os periodos e classifique os estados em transientes e recorrentes.

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Periodicidade

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que,

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

A cadeia oscila entre os estados e não vai convergir para uma distribuição limite. Dizemos que ela é *periódica*.

Definição

O *período* de um estado i , $d(i)$, é o maior divisor comum no conjunto $\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$. Se $P_{ii}^{(n)} = 0, \forall n \geq 1$ define-se $d(i) = 0$.

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição,

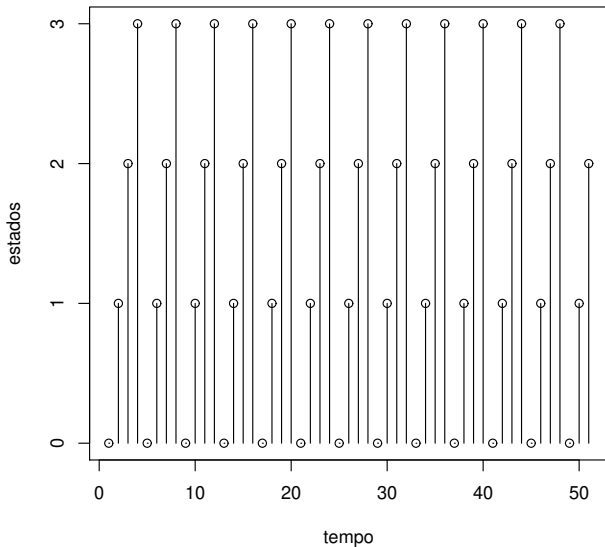
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Todos os estados têm período 4. Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{00}^{(1)} &= P_{00}^{(2)} = P_{00}^{(3)} = 0, & P_{00}^{(4)} &= 1 \\ P_{00}^{(5)} &= P_{00}^{(6)} = P_{00}^{(7)} = 0, & P_{00}^{(8)} &= 1 \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Então $d(0) = \text{mdc}\{4, 8, 12, \dots\} = 4$.

Realizações de uma cadeia de Markov com estados 0,1,2,3 de período igual a 4.



Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

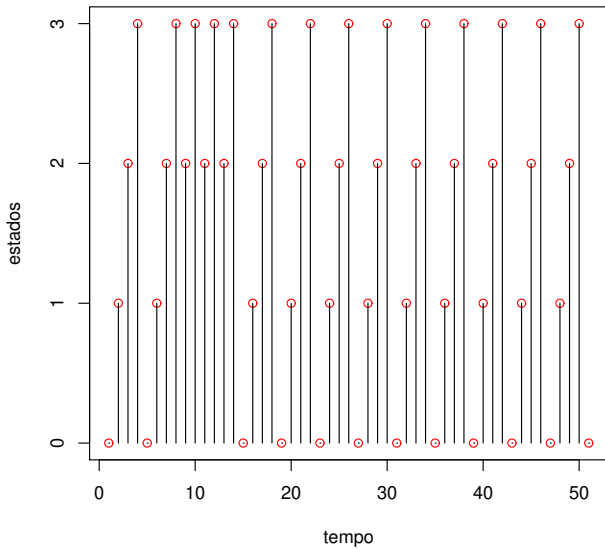
Podemos calcular,

$$P_{00}^{(1)} = 0, P_{00}^{(2)} = 0, P_{00}^{(3)} = 0, P_{00}^{(4)} = 0.5$$

$$P_{00}^{(5)} = 0, P_{00}^{(6)} = 0.25, P_{00}^{(7)} = 0, P_{00}^{(8)} = 1/8, \dots$$

Portanto, $d(0) = \text{mdc}\{4, 6, 8, \dots\} = 2$.

Realizações de uma cadeia de Markov do exemplo.

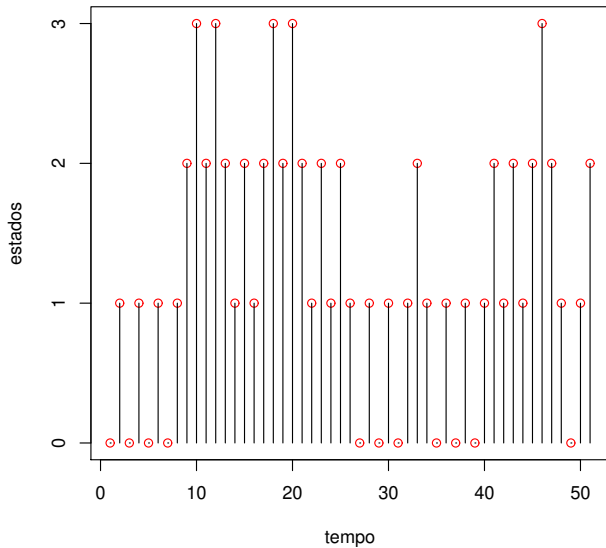


Exemplo. Seja um passeio aleatório com estados $\{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição,

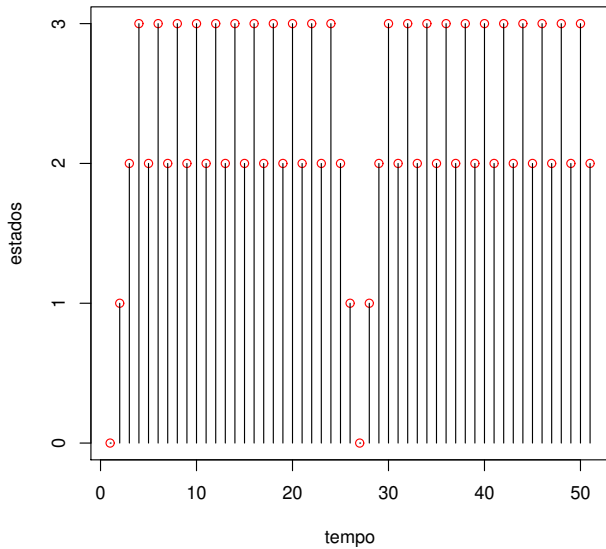
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Todos os estados tem periodo 2?

Realizações de um passeio aleatório com $p = q = 1/2$.



Realizações de um passeio aleatório com $p = 0.85$.



Propriedades,

Periodicidade é uma propriedade de classe. Se $i \leftrightarrow j$ então $d(i) = d(j)$.

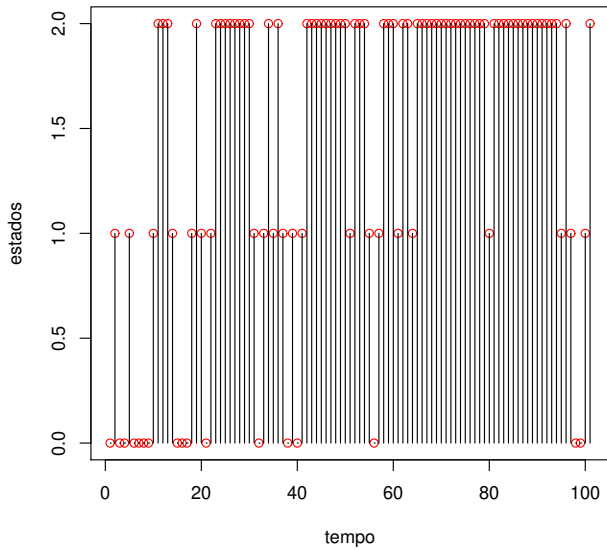
- ▶ $P_{ii}^{(nd(i))} > 0$, para n grande.
- ▶ Se $P_{ii}^{(m)} > 0$ então $P_{ii}^{(m+nd(i))} > 0$, para n grande.

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

A cadeia é irreduzível, recorrente e aperiódica.

Realizações da cadeia de Markov do exemplo.



Definição

Uma cadeia de Markov com estados $0, 1, \dots, N$ tal que $d(i) = 1$, $i = 0, 1, \dots, N$ é chamada *aperiódica*.

Neste caso, os retornos aos estados ocorrem em tempos irregulares.

Cadeias com distribuição limite

Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1\}$ e as seguintes matrizes de transições a 1 a 9 passos, i.e. P, P^2, \dots ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.3300 & 0.6700 \\ 0.7500 & 0.2500 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.6114 & 0.3886 \\ 0.4350 & 0.5650 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.4932 & 0.5068 \\ 0.5673 & 0.4327 \end{bmatrix}$$

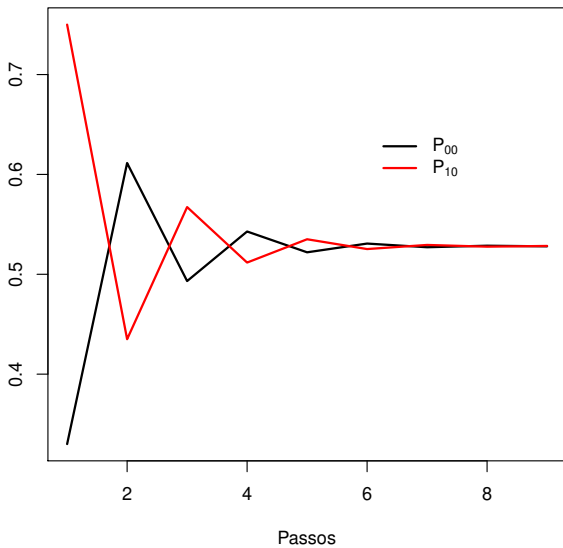
$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.5429 & 0.4571 \\ 0.5117 & 0.4883 \end{bmatrix} \quad P^5 = \begin{bmatrix} 0.5220 & 0.4780 \\ 0.5351 & 0.4649 \end{bmatrix}$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} 0.5308 & 0.4692 \\ 0.5253 & 0.4747 \end{bmatrix}$$

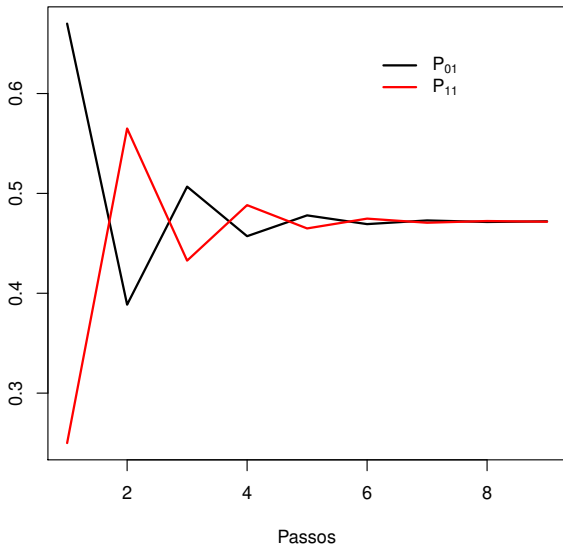
$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.5271 & 0.4729 \\ 0.5294 & 0.4706 \end{bmatrix} \quad P^8 = \begin{bmatrix} 0.5286 & 0.4714 \\ 0.5277 & 0.4723 \end{bmatrix}$$

$$P^9 = \begin{bmatrix} 0.5280 & 0.4720 \\ 0.5284 & 0.4716 \end{bmatrix}$$

Probabilidades de transição para o estado 0.



Probabilidades de transição para o estado 1.



Seja uma cadeia de Markov com as seguintes transições a 1, 2, 4, 8 e 16 passos, i.e. P , P^2 , P^4 , P^8 , P^{16} .

$$P = \begin{bmatrix} 0.4000 & 0.5000 & 0.1000 \\ 0.0500 & 0.7000 & 0.2500 \\ 0.0500 & 0.5000 & 0.4500 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.1900 & 0.6000 & 0.2100 \\ 0.0675 & 0.6400 & 0.2925 \\ 0.0675 & 0.6000 & 0.3325 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.0908 & 0.6240 & 0.2852 \\ 0.0758 & 0.6256 & 0.2986 \\ 0.0758 & 0.6240 & 0.3002 \end{bmatrix}$$

$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.0771 & 0.6250 & 0.2979 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \end{bmatrix}$$

$$P^{16} = \begin{bmatrix} 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \\ 0.0769 & 0.6250 & 0.2981 \end{bmatrix}$$

Nos exemplos anteriores, as probabilidades dos estados parecem estar estabilizando.

- ▶ Será que existe uma distribuição limite?
- ▶ No caso geral será possível obter esta distribuição limite, i.e. as probabilidades dos estados $0, 1, \dots, N$?

Recorrência positiva

Definição

Sejam $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ uma cadeia de Markov com estados $0, 1, \dots, N$ e

$$T_j = \min\{t \geq 0; X_t = j | X_0 = j\}$$

o número de transições até retornar ao estado j dado que começou em j .

Definição

O estado j é *recorrente positivo* se for recorrente e $m_j = E(T_j) < \infty$. Caso contrário o estado j é *recorrente nulo*.

Proposição

Se uma cadeia de Markov for irredutível e recorrente, a frequência de longo prazo que a cadeia atinge o estado j , independente do estado inicial, é

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}.$$

Consequentemente, o estado j é recorrente positivo se e somente se, $\pi_j > 0$.

- ▶ Recorrência positiva é uma propriedade de classe.
- ▶ Recorrência nula é uma propriedade de classe.
- ▶ Se a cadeia for finita, recorrência \Rightarrow recorrência positiva.
- ▶ Um estado i recorrente positivo e aperiódico é chamado de *ergódico*.

Portanto, se uma cadeia de Markov for finita e irredutível ela será recorrente positiva.

Teorema

Se uma cadeia de Markov for irredutível e recorrente positiva as frequências de longo prazo são a solução única das equações,

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{i0}$$

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{i1}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\pi_N = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{iN}$$

$$\sum_{j=0}^N \pi_j = 1$$

- ▶ Equivalentemente podemos escrever em notação matricial,

$$\pi = \pi P \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^N \pi_j = 1$$

sendo π o vetor de frequências de longo prazo.

- ▶ Se as equações não tem solução então a cadeia é transiente ou recorrente nula e neste caso $\pi_j = 0, \forall j$.

Exemplo. Um modelo matemático assume que as transições entre classes de emprego em gerações sucessivas de uma família seguem uma cadeia de Markov. Considere uma cadeia com estados $\{0, 1, 2\}$ representando as classes e probabilidades de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{bmatrix}.$$

As frequências de longo prazo satisfazem às equações,

$$\pi_0 = 0.45\pi_0 + 0.05\pi_1 + 0.01\pi_2$$

$$\pi_1 = 0.48\pi_0 + 0.70\pi_1 + 0.50\pi_2$$

$$\pi_2 = 0.07\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.49\pi_2$$

$$\sum_{j=0}^2 \pi_j = 1$$

Teorema

Se uma cadeia de Markov for irreduzível e ergódica (recorrente positiva e aperiódica), existe uma distribuição de probabilidades limite,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N), \quad \pi_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \pi_j &= 1.\end{aligned}$$

que não depende do estado inicial, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j$$

Teorema

A distribuição limite é a solução das equações,

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{i0}$$

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{i1}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\pi_N = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{iN}$$

$$\sum_{j=0}^N \pi_j = 1$$

Equivalentemente,

$$\pi = \pi P$$

sendo π a *distribuição estacionária*.

Note portanto que nem sempre as frequências de longo prazo podem ser interpretadas como probabilidades limite.

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com 2 estados e matriz de transição,

$$\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \quad 0 < a, b < 1.$$

Verifique que as probabilidades limite são,

$$\pi_0 = \frac{b}{a+b} \quad \text{e} \quad \pi_1 = \frac{a}{a+b}$$

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com matriz de transição,

$$\begin{bmatrix} 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.05 & 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}.$$

Devemos resolver o sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.05 & 0.05 \\ 0.5 & -0.30 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$[0.0769 \quad 0.6250 \quad 0.2981]$$

Cadeias Duplamente Estocásticas

Definição

Uma matriz de transição com N estados $0, 1, \dots, N - 1$ é duplamente estocástica se,

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} P_{ij} = 1, \quad \sum_{j=0}^{N-1} P_{ij} = 1.$$

Se $P_{ij}^{(n)} > 0$, $i = 0, N - 1$ e $j = 0, N - 1$ para algum n a cadeia é dita *regular* e sua distribuição limite é uniforme,

$$\pi_j = \frac{1}{N}, \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que se move para a esquerda ou direita do estado atual com probabilidade $1/2$. Se a cadeia está nos estados 0 ou 4 ela permanece com probabilidade $1/2$.

A matriz de transição é,

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

que é duplamente estocástica e portanto, $\pi_j = 1/5$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Exemplo. Seja uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1\}$ e matriz de transição,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A cadeia é duplamente estocástica e $\pi = (1/2, 1/2)$ satisfaz às equações de equilíbrio, $\pi = \pi P$. Porém a cadeia é periódica e não converge para π .

Cadeias com estados absorventes

Seja X_0, X_1, \dots um cadeia de Markov tal que i_1, \dots, i_k são estados absorventes, ou seja

$$P(X_t = i_1 | X_{t-1} = i_1) = \dots = P(X_t = i_k | X_{t-1} = i_k) = 1.$$

O tempo para a cadeia entrar num estado absorvente é,

$$T = \min\{t \geq 0; X_t = i_1 \text{ ou } X_t = i_2 \text{ ou } \dots X_t = i_k\}.$$

- ▶ Qual a probabilidade da cadeia eventualmente entrar num estado absorvente?

$$P(X_T = j | X_0 = m), \quad j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \quad m \notin \{i_1, \dots, i_k\}.$$

- ▶ Qual o tempo médio para a cadeia entrar em um dos estados absorvente?

$$E(T | X_0 = m), \quad m \notin \{i_1, \dots, i_k\}.$$

Exemplo. Seja uma cadeia com estados 0,1,2 e matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P(X_T = 0 | X_0 = 1) &= \sum_{i=0,1,2} P(X_T = 0, X_1 = i | X_0 = 1) \\ &= \sum_{i=0,1,2} P(X_T = 0 | X_1 = i) P(X_1 = i | X_0 = 1) \\ &= P(X_T = 0 | X_1 = 0) P_{10} + \\ &\quad P(X_T = 0 | X_1 = 1) P_{11} + \\ &\quad P(X_T = 0 | X_1 = 2) P_{12} \end{aligned}$$

Como $P(X_T = 0|X_1 = 0) = 1$ e $P(X_T = 0|X_1 = 2) = 0$ segue que,

$$P(X_T = 0|X_0 = 1) = P_{10} + P(X_T = 0|X_1 = 1)P_{11}$$

Definindo

$$u = P(\text{atingir o estado 0 a partir do estado 1}),$$

então

$$u = \alpha + u\beta \Rightarrow u = \frac{\alpha}{1 - \beta}.$$

O tempo médio até atingir um estado absorvente a partir do estado 1 é,

$$\begin{aligned} E(T|X_0 = 1) &= 1 + E(T|X_1 = 1) \\ &= 1 + \sum_{i=0,1,2} E(T|X_2 = i, X_1 = 1)P(X_2 = i|X_1 = 1) \\ &= 1 + E(T|X_2 = 0, X_1 = 1)P_{10} \\ &\quad + E(T|X_2 = 1, X_1 = 1)P_{11} \\ &\quad + E(T|X_2 = 2, X_1 = 1)P_{12} \end{aligned}$$

O tempo de absorção é no mínimo 1 (se $X_1 = 0$ ou $X_1 = 2$).

Note que $E(T|X_2 = 0, X_1 = 1) = E(T|X_2 = 2, X_1 = 1) = 0$.

Portanto,

$$E(T|X_0 = 1) = 1 + E(T|X_2 = 1, X_1 = 1)\beta$$

Denotando este tempo médio por v então,

$$v = 1 + v\beta \Rightarrow v = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Caso Geral

Seja X_1, X_2, \dots uma cadeia de Markov com estados $\{0, 1, \dots, N\}$.
Para qualquer estado absorvente k e qualquer estado transiente i ,

$$\begin{aligned} P(X_T = k | X_0 = i) &= \sum_{j=0}^N P(X_T = k, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j=0}^N P(X_T = k | X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j=0}^N P(X_T = k | X_1 = j) P_{ij} \end{aligned}$$

Mas,

$$P(X_T = k | X_1 = j) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, j \text{ absorvente} \\ 1, & \text{se } j = k \\ u_j, & \text{se } j \neq k, j \text{ transiente} \end{cases}$$

Portanto,

$$P(X_T = k | X_0 = i) = P_{ik} + \sum_j u_j P_{ij}$$

sendo a soma para j transiente.

Exemplo. Seja um passeio aleatório com 5 estados e probabilidades de transição,

$$P(X_{t+1} = i + 1 | X_t = i) = p_i$$

$$P(X_{t+1} = i - 1 | X_t = i) = q_i$$

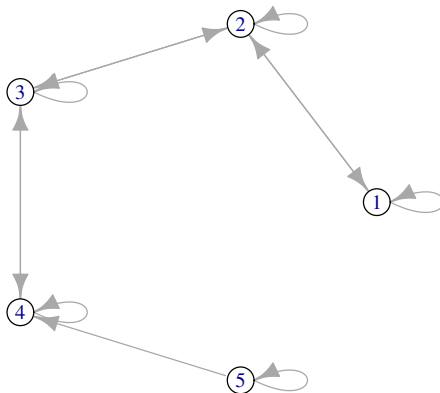
$$P(X_{t+1} = i | X_t = i) = r_i$$

tais que,

$$r_0 > 0, p_0 > 0, r_0 + p_0 = 1$$

$$r_i > 0, p_i > 0, q_i > 0, r_i + p_i + q_i = 1, i = 1, 2, \dots$$

Grafo de Passeio Aleatório com 5 estados.



Problema do jogador

Jogador A possui uma fortuna de i unidades e joga contra o jogador B . Em cada jogada, o jogador A

- ▶ ganha 1 unidade com probabilidade p_i ,
- ▶ perde 1 unidade com probabilidade q_i , ou
- ▶ permanece com i unidades com probabilidade r_i .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso particular, jogadas idênticas e sem empate.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual a probabilidade de ruína do jogador A ?

Seja $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ uma cadeia de Markov com estados $0, 1, \dots, N$ que representa a fortuna do jogador A . Então,

$$P(\text{ruína do jogador } A) = P(X_T = 0 | X_0 = i) = u_i.$$

Note que,

$$\begin{aligned} u_0 &= P(X_T = 0 | X_0 = 0) = 1 \\ u_N &= P(X_T = 0 | X_0 = N) = 0. \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, N - 1$,

$$P(X_T = 0 | X_0 = i) = \sum_k P(X_T = 0, X_1 = k | X_0 = i), \quad k \in \{i - 1, i + 1\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_k P(X_T = 0 | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) \\ &= P(X_T = 0 | X_1 = i - 1) P(X_1 = i - 1 | X_0 = i) \\ &\quad + P(X_T = 0 | X_1 = i + 1) P(X_1 = i + 1 | X_0 = i) \\ &= u_{i+1}p + u_{i-1}q \end{aligned}$$

Por exemplo $u_1 = u_2p + q$ e $u_{N-1} = u_{N-2}q$.

Passeio aleatório simétrico

$$P = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & & & & \\ \dots & p & r & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & p & r & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & p & r & p & \dots \\ & \vdots & \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

com $2p + r = 1$.

Processos de Ramificação

Suponha que uma população de indivíduos pode produzir descendentes.

- ▶ Ao fim da vida, cada indivíduo terá produzido j descendentes com probabilidade P_j , $j = 0, 1, \dots$
- ▶ Os indivíduos produzem descendentes de forma independente.
- ▶ Assume-se que $P_j < 1$, $j = 0, 1, \dots$

Seja X_t o tamanho da t -ésima geração. Então $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, \dots\}$

- ▶ O estado 0 é recorrente pois

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = 0) = P_{00} = 1.$$

- ▶ Se $P_0 > 0$ todos os outros estados são transientes pois

$$P(X_{t+1} = 0 | X_t = i) = P_{i0} = P_0^i.$$

Portanto, se $P_0 > 0$ os estados transientes $\{1, 2, \dots\}$ serão visitados um número finito de vezes e então a população vai eventualmente ser extinta ou crescer a infinito.

Qual o número esperado de descendentes de um indivíduo?

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} j P_j.$$

Suponha que $X_0 = 1$ e vamos definir Z_i como o número de descendentes do i -ésimo indivíduo da $(t - 1)$ -ésima geração. Então podemos escrever,

$$X_t = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} Z_i,$$

Ou seja, os indivíduos $1, 2, \dots, X_{t-1}$ produzem $Z_1, Z_2, \dots, Z_{X_{t-1}}$ descendentes na geração t .

Note que pela definição de Z_i ,

$$E(Z_i) = \mu, \quad \forall i.$$

Pode-se verificar então que,

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E[E(X_t|X_{t-1})] \\ &= E \left[E \left(\sum_{i=1}^{X_{t-1}} Z_i \middle| X_{t-1} \right) \right] \\ &= E[\mu X_{t-1}] \\ &= \mu E(X_{t-1}). \end{aligned}$$

Como $E(X_0 = 1)$ obtemos por substituições sucessivas que,

$$E(X_t) = \mu E(X_{t-1}) = \mu^t.$$

Portanto,

- ▶ $E(X_t) \rightarrow 0$, se $\mu < 1$.
- ▶ $E(X_t) = 1$, se $\mu = 1$.
- ▶ $E(X_t) \rightarrow \infty$, se $\mu > 1$.

As probabilidades de transição ficam,

$$P(X_t = j | X_{t-1} = k) = P\left(\sum_{i=1}^k Z_i = j\right).$$

Analogamente, podemos obter a variância do tamanho da t -ésima população por condicionamento, ou seja,

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}[E(X_t|X_{t-1})] + E[\text{Var}(X_t|X_{t-1})]$$

sendo,

$$E(X_t|X_{t-1}) = \mu X_{t-1} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X_t|X_{t-1}) = \sigma^2 X_{t-1}.$$

Exemplo. Suponha que $Z_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. Então,

$$(X_t | X_{t-1} = k) \sim \text{Poisson}(\theta), \quad \theta = \sum_{i=1}^k \lambda_i,$$

$$P(X_t = j | X_{t-1} = k) = \frac{\theta^j}{j!} e^{-\theta}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Exemplo. (Extinção de sobrenomes, Galton 1889). Seja,

$$\pi_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = 0 | X_0 = 1).$$

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} j P(X_t = j) = \sum_{j=1}^{\infty} j P(X_t = j) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} 1 P(X_t = j) = P(X_t \geq 1). \end{aligned}$$

Se $\mu < 1$,

$$\mu^t \rightarrow 0, \quad P(X_t \geq 1) \rightarrow 0, \quad P(X_t = 0) \rightarrow 1.$$

Cadeias de Markov Reversíveis

Seja $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ uma cadeia de Markov estacionária e ergódica (recorrente positiva e aperiódica), com

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i) = P_{ij} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = i | X_0 = k) = \pi_i.$$

O processo em tempo reverso,

$$\dots, X_{m+1}, X_m, X_{m-1}, X_{m-2}, \dots$$

também é uma cadeia de Markov, i.e.

$$P(X_m = j | X_{m+1} = i, X_{m+2}, X_{m+3}, \dots) = P(X_m = j | X_{m+1} = i).$$

Probabilidades de transição do processo reverso,

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= P(X_m = j | X_{m+1} = i) \\ &= \frac{P(X_m = j, X_{m+1} = i)}{P(X_{m+1} = i)} \\ &= \frac{P(X_{m+1} = i | X_m = j)P(X_m = j)}{P(X_{m+1} = i)} \\ &= \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}. \end{aligned}$$

Se $Q_{ij} = P_{ij}$, $\forall i, j$, ou equivalentemente,

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji},$$

a cadeia original é dita *reversível no tempo*.

Definição

Uma cadeia de Markov com distribuição limite π é *reversível* se satisfaz às *equações de equilíbrio*,

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

para todos os estados i e j .

A taxa em que o processo vai de i para j ($\pi_i P_{ij}$) é igual à taxa em que o processo vai de j para i ($\pi_j P_{ji}$).

Exemplo. Considere um passeio aleatório com estados $\{0, 1, \dots, N\}$ e probabilidades de transição,

$$P_{i,i+1} = \alpha_i = 1 - P_{i,i-1}, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$P_{0,1} = \alpha_0 = 1 - P_{0,0},$$

$$P_{N,N} = \alpha_N = 1 - P_{N,N-1}$$

Argumente que esta cadeia é reversível.

Obtenha as probabilidades limite como solução de,

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

ou seja,

$$\pi_i \alpha_i = \pi_{i+1} (1 - \alpha_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Veja o Exemplo 4.35 em Sheldon Ross.

Exemplo. Em um grafo conectado cada arco (i, j) tem um número w_{ij} associado. Uma partícula se move do nó i para o nó j com probabilidade,

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}},$$

sendo $w_{ij} = w_{ji}$ e $w_{ij} = 0$ se (i, j) não for um arco.

Equações de reversibilidade temporal,

$$\begin{aligned}\pi_i P_{ij} &= \pi_j P_{ji} \\ \pi_i \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}} &= \pi_j \frac{w_{ji}}{\sum_i w_{ji}} \\ \frac{\pi_i}{\sum_j w_{ij}} &= \frac{\pi_j}{\sum_i w_{ji}} = c \text{ (para } j \text{ fixo)} \\ \pi_i &= \frac{\sum_j w_{ij}}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \text{ (pois } \sum_i \pi_i = 1).\end{aligned}$$

Exemplo. Seja um passeio aleatório com estados $\{1, 2, 3, 4\}$ e probabilidades de transição,

$$P_{i,i+1} = 0.75, \quad i = 1, 2, 3$$

$$P_{i,i-1} = 0.25, \quad i = 2, 3, 4$$

$$P_{1,4} = 0.25$$

$$P_{4,1} = 0.75$$

Verifique que a distribuição estacionária é $\pi_i = 0.25$, $i = 1, 2, 3, 4$ mas a cadeia não é reversível.

Processos de Decisão Markoviana

Seja uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{1, 2, \dots, M\}$.

- ▶ Após observar o estado do processo uma **ação** deve ser tomada.
- ▶ Seja A (finito) o espaço de possíveis ações.

Deseja-se obter as seguintes probabilidades,

$$P(X_{t+1} = j | X_0, a_0, X_1, a_1, \dots, X_t = i, a_t = a), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

que, pela propriedade Markoviana ficam,

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i, a_t = a) = P_{ij}(a), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Como decidir qual a "melhor" ação a ser tomada?

Precisamos de uma *regra ou politica de decisão* bem definida.

Definição

Uma politica de decisão aleatória é um conjunto de probabilidades,

$$\beta = \{\beta_i(a), a \in A, i \in \{1, \dots, M\}\}.$$

sendo,

$$\beta_i(a) = P(\text{escolher a ação } a \in A | X_t = i).$$

Consequentemente,

$$0 \leq \beta_i(a) \leq 1, \forall i, a$$

$$\sum_a \beta_i(a) = 1, \forall i.$$

Sob uma politica β , $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição,

$$\begin{aligned} P_{ij}(\beta) &= P_{\beta}(X_{t+1} = j | X_t = i) \\ &= \sum_a P(X_{t+1} = j, a_t = a | X_t = i) \\ &= \sum_a P(X_{t+1} = j | X_t = i, a_t = a) P(\text{escolher a ação } a | X_t = i) \\ &= \sum_a P_{ij}(a) \beta_i(a) \end{aligned}$$

Vamos assumir que $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ é uma cadeia de Markov ergódica qualquer que seja a regra de decisão β .

As probabilidades limite são,

$$\pi_{ia} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\beta}(X_t = i, a_t = a),$$

e as seguintes condições são satisfeitas,

$$\pi_{ia} \geq 0, \quad \sum_i \sum_a \pi_{ia} = 1,$$

$$\sum_a \pi_{ja} = \sum_i \sum_a \pi_{ia} P_{ij}(a), \quad \forall j.$$

π_{ia} são as probabilidades limite da cadeia estar no estado i e a ação a ser selecionada.

Se as condições anteriores são satisfeitas pode-se mostrar que,

$$\begin{aligned}\beta_i(a) &= P(\text{escolher a ação } a \in A | X_t = i) \\ &= \frac{P(X_t = i, a_t = a)}{P(X_t = i)} \\ &= \frac{\pi_{ia}}{\sum_a \pi_{ia}}.\end{aligned}$$

Qual a regra de decisão “ótima” ?

Defina uma função de ganho $R(i, a)$ quando o ação a é escolhida e o processo está no estado i .

Seja $R(X_i, a_i)$ o ganho obtido no tempo i

Defina a politica que maximiza uma função dos ganhos sujeito as condições anteriores.

No limite, temos que o ganho esperado é dado por,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R(X_t, a_t)] = \sum_i \sum_a R(i, a) \pi_{ia}.$$