5ª Lista de Exercícios
Transformações lineares

Exercício 1. Seja $T : V \to W$ uma função, em que V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com escalares reais.
Classifique as afirmações em (V) verdaderias ou (F) falsas.

( ) Se T é linear, então T preserva somas e produtos por escalar.

( ) Se $T(x+y) = T(x) + T(y)$ então T é linear.

( ) T é injetora se e somente se $\ker T = \{0\}$.

( ) Se T linear, então $T(0) = 0$.

( ) Se $T : V \to W$ é linear então $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim W$

( ) Se T é linear, então T leva conjuntos L.I. em conjuntos L.I.

( ) $T, U : V \to W$ são ambas lineares e coincidem em uma base de V, então $T = U$

( ) Dados $x_1, x_2 \in V$, $x_1 \neq x_2$ e $y_1, y_2 \in W$, existe T linear tal que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$

Exercício 2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,0,0) = (1,2), \qquad T(0,1,1) = (-1,-2). \qquad T(0,1,-1) = (5,-4)$$

a) Encontre a expressão de $T(x,y,z)$.

b) Encontre a matriz de T

Exercício 3. Considere a base canônica $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e considere a transformação $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ que opera a transposta, isto é,

$$T(A) = A^t$$

a) Mostre que T é transformação linear

b) Encontre a matriz de T correspondente à base canônica B.