Cônicas

Até agora estudamos lugares geométricos de pontos no espaço. $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, em relação a um sistema de coordenadas, satisfazem equações de primeiro grau (exemplo, equação de um plano, equações da reta na forma planar). Vamos estudar agora lugares geometricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de grau dois. Começamos com lugares geometricos em um plano (cônicas) e em seguida no espaço (quádricas).

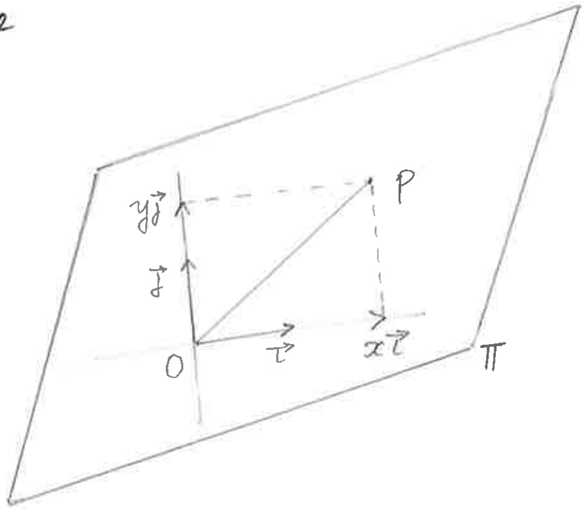
Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$, e sejam $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ dois vetores diretores de π com $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1$ e $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0$.

Seja O um ponto do plano π.

Um ponto P do espaço pertence ao plano π se, e somente se, existem escalares x, y tal que

$\vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

Chamamos $\Sigma = (O, B)$ de Sistema de coordenadas em π de origem O e base B.



As coordenadas de um ponto P em π são as coordenadas do vetor $\vec{OP}$ na base B, ou seja $P=(x,y)_\Sigma$.

Observe que a base B não precisa ser ortonormal, mas sabemos que é bom escolher uma base ortonormal para poder calcular o produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos etc.

Observe também que podemos escolher $(O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}))$ como um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$, e em relação a este sistema, π tem uma equação geral $z=0$ e seus pontos tem coordenadas da forma $(x,y,0)$.

Elipse, hipérbole, parábola

Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$.

Ⓐ Elipse

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano π, $2c$ sua distância e a um número real tal que $a > c$.

O lugar geométrico dos pontos X do plano π tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

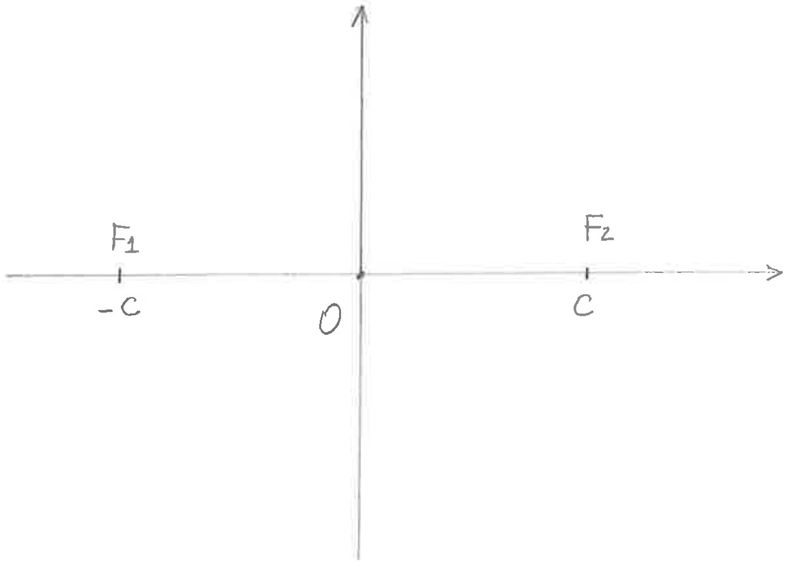
chama-se <u>elipse</u>.

Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado <u>foco</u> da elipse, o segmento F_1F_2 é chamado <u>segmento focal</u>, seu ponto médio, <u>centro</u> da elipse, e $2c$, <u>distância focal</u>.

A reta F_1F_2 chama-se <u>reta focal</u>.

[Mostrar o desenho feito no Maple- ver arquivo no Tidia]

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema ortogonal de coordenadas em π tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$



Temos, em relação ao sistema Σ,

$$X=(x,y) \in \text{Elipse} \iff d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Precisamos tomar cuidado aqui: $A=B \Rightarrow A^2=B^2$, mas $A^2=B^2 \Rightarrow A=B$ ou $A=-B$, então $A=B$ não é equivalente a $A^2=B^2$.

Logo

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^4-cx$$

$$\Rightarrow a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\Rightarrow a^2(x^2-2\cancel{c}x+c^2+y^2)=a^4-2a^2\cancel{c}x+c^2x^2$$

$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Como $a>c$, segue que $a^2-c^2>0$. Então existe um número real positivo b tal que $a^2-c^2=b^2$.

Logo $$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2, obtemos

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vamos mostrar que a recíproca vale, ou seja, se

$$X=(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow X\in \text{Elipse}.$$

Temos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$ (*)

Precisamos mostrar que $d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a$.

Temos
$$\begin{aligned}(d(X,F_1))^2 &= (x+c)^2+y^2\\ &= x^2+2cx+c^2+y^2\\ &= x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{(usando (*))}\\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+b^2\\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2 \quad (\text{usando } a^2-c^2=b^2)\\ &= \left(\frac{c}{a}x+a\right)^2\end{aligned}$$

Podemos mostrar, da mesma maneira, que

$$(d(X,F_2))^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2.$$

Portanto $d(X,F_1)=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$ e $d(X,F_2)=\left|\frac{c}{a}x-a\right|$.

Como $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, segue que $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, o que implica que $\left|\frac{x}{a}\right|\leqslant 1$.

Como $a>0$ então $\frac{|x|}{a}\leqslant 1$.

Agora $c>0$, então $c\frac{|x|}{a}\leqslant c<a$. Logo $\frac{c}{a}|x|<a \Rightarrow -a<\frac{c}{a}x<a$

Portanto $\frac{c}{a}x+a>0$ e $\frac{c}{a}x-a<0$.

Daí, $\left.\begin{aligned}d(X,F_1)&=\frac{c}{a}x+a\\ d(X,F_2)&=-\frac{c}{a}x+a\end{aligned}\right\} \Rightarrow d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a.$

Acabamos de mostrar que

$$\boxed{X=(x,y)\in \text{Elipse} \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad a^2+b^2=c^2,\ a>b>0 \quad a>c>0$$

A equação acima chama-se equação reduzida da elipse.

Um resultado que segue das contas anteriores é o seguinte.

Proposição

Um ponto $X=(x,y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se, e somente se, as distâncias aos focos F_1 e F_2 são

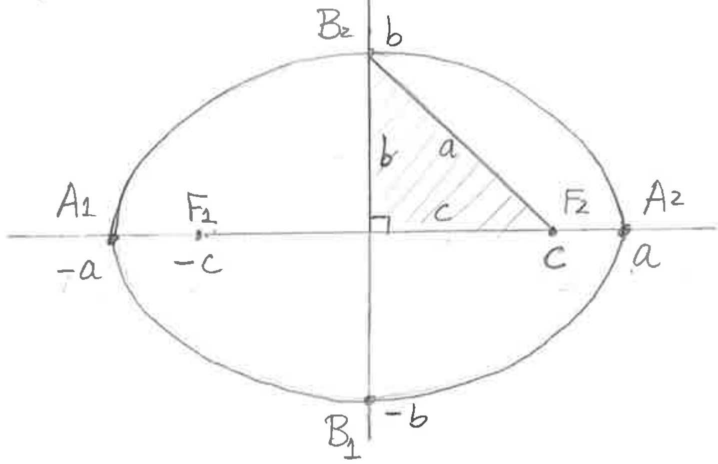
$$d(X,F_1)=a+\frac{c}{a}x \quad e \quad d(X,F_2)=a-\frac{c}{a}x. \qquad \blacksquare$$

Observe que os pontos

$A_1=(a,0)$, $A_2=(-a,0)$, $B_1=(0,-b)$, $B_2=(0,b)$ pertencem a elipse de equação reduzida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Estes pontos são os vértices da elipse.

As cordas A_1A_2 e B_1B_2 são, respectivamente, o eixo maior e o eixo menor da elipse.

A amplitude focal é o comprimento de uma corda que contem um foco e é perpendicular ao segmento focal.



Ver arquivo "Caustica-elipse.pdf" no Tidia para alguns aspectos da geometria da elipse.

[Mostrar desenhos feitos no Maple.]

Observação

Podemos escolher um sistema ortogonal de coordenadas com $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$. Neste caso haverá uma inversão de papeis entre x e y e chegaremos a seguinte equação reduzida da elipse
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Proposição

Uma equação da forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$

descreve uma elipse em relação a um sistema ortogonal de coordenadas Σ se, e somente se, os números p e q são positivos e distintos.

Exemplos

1. Seja $4x^2 + 169y^2 = 676$ uma equação de uma elipse (em relação a um sistema ortogonal de coordenadas).
   Calcule a distância focal, a medida do eixo maior e a medida do eixo menor da elipse.
2. Prove que os focos e o centro da elipse não pertencem a elipse.
3. Prove que se PQ é uma corda qualquer da elipse, então
   $d(P, Q) \leq 2a$.

(B) Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de um plano Π, $2c$, sua distância, e a um número real tal que $0<a<c$. O lugar geométrico dos pontos X do plano Π tais que

$$|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a$$

chama-se hipérbole. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado foco da hipérbole, e o segmento F_1F_2 é chamado segmento focal, seu ponto médio, centro da hipérbole, e $2c$, distância focal.
A reta F_1F_2 chama-se reta focal.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

Então $X=(x,y)\in$ hipérbole $\Leftrightarrow d(X,F_1)-d(X,F_2)=\pm 2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Podemos provar, fazendo contas similares ao caso da elipse, que

$$\boxed{X=(x,y)\in \text{hipébole} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad a^2+b^2=c^2$$
$$c>b>0$$
$$c>a>0$$

A equação acima chama-se equação reduzida da hipébole

Os pontos $A_1=(-a,0)$ e $A_2=(a,0)$ pertencem a hipébole e são chamados vértices (são os pontos em que a reta focal intercepta a hipérbole).

Vamos fazer um esboço da hipérbole.

Observe que $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \iff y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$

$$\iff y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Portanto a hipérbole é união dos gráficos das funções

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad e \quad y=-\sqrt{x^2-a^2}.$$

Vamos Consider a função $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (o gráfico de $y=-\sqrt{x^2-a^2}$ é simétrico ao gráfico de $y=b/a\sqrt{x^2-a^2}$ com respeito ao eixo x).

O domínio de definição de $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ é

$$\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-a^2\geqslant 0\}=]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$$

Temos $y'=\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, portanto a função é crescente em $]a,+\infty[$ e é decrescente em $]-\infty,-a[$; não tem derivada nos pontos $x=-a$ e $x=a$.

Para analizar o comportamento da função em $\pm\infty$, observe que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\frac{b}{a}x}=1 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{-\frac{b}{a}x}=1,$$

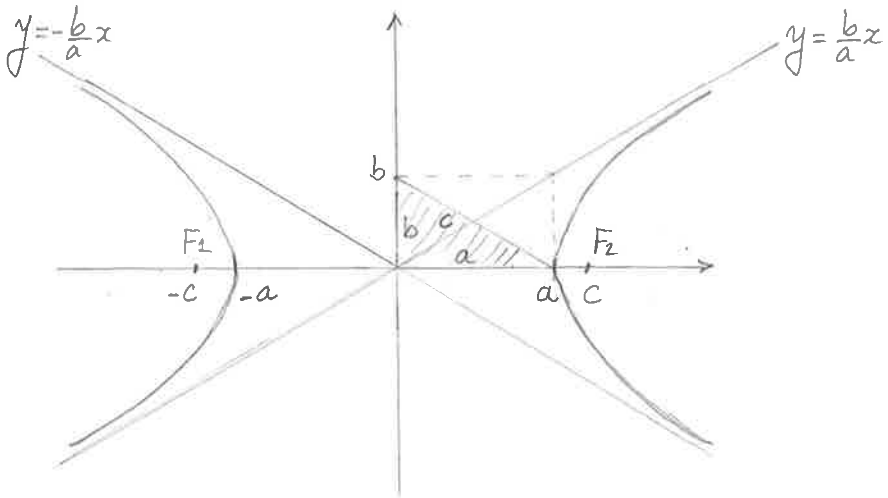
Ou seja, as retas $y=\dfrac{b}{a}x$ e $y=-\dfrac{b}{a}x$ são retas assíntotas da hipérbole (por simetria, elas são assíntotas de $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$).

Observe que

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}x \quad se\ x>0$$

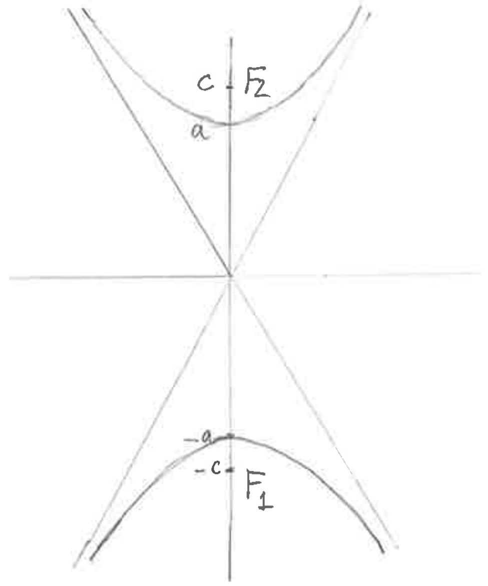
$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<-\frac{b}{a}x \quad se\ x<0$$

Podemos juntar as informações acima para obter o seguinte esboço da hipérbole



Podemos ter escolhido um sistema de coordenada em relação ao qual $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$. Neste caso a equação reduzida da hipérbole é $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

As assíntotas são dadas por $y=\frac{a}{b}x$ e $y=-\frac{a}{b}x$



Proposição

Uma equação da forma $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$ descreve uma hipérbole em relação a um sistema ortogonal de coordenadas Σ se, e somente se, os números p e q são de sinal contrário.

Exemplo

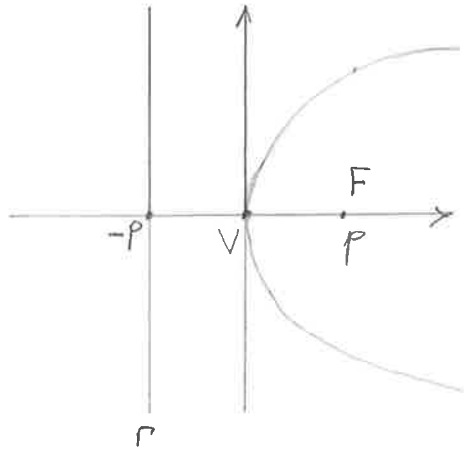
1. Escreva as coordenadas dos vértices e dos focos da hipérbole
$$25x^2 - 144y^2 = 9.$$
Obtenha as equações das assíntotas e faça um esboço da hipérbole.

© Parábola

Seja r um reta de um plano Π e F um ponto no plano Π não pertencente a reta r. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e r chama-se parábola. F é o foco, r é a diretriz.
O número positivo p tal que $d(F,r) = 2p$ chama-se parâmetro da parábola. A reta que contem o foco F e é perpendicular a diretriz r chama-se eixo da parábola.
O vértice da parábola é o ponto da sua interseção com o eixo.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas com origem o vértice da parábola e tal que o foco F pertença ao semi-eixo positivo x. Em relação a este sistema, $F = (p,0)$ e $r: x = -p$.

Temos
$$X = (x,y) \in \text{Parábola} \Leftrightarrow d(X,r) = d(X,F)$$
$$\Leftrightarrow |x+p| = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow (x+p)^2 = (x-p)^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2xp+\cancel{p^2} = \cancel{x^2}-2xp+\cancel{p^2}+y^2$$



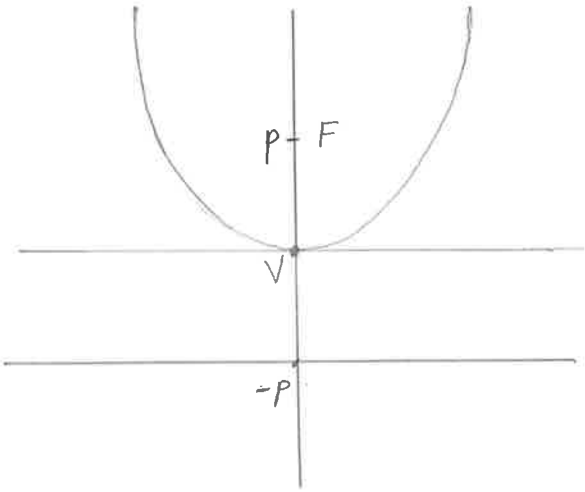
$$\boxed{X=(x,y) \in \text{Parábola} \Leftrightarrow \quad y^2 = 4px}$$

A equação acima chama-se equação reduzida da parábola.

Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que o foco F pertença ao semi-eixo positivo y. Neste caso $F=(0,p)$ e r: $y=-p$.

A equação reduzida da parábola torna-se

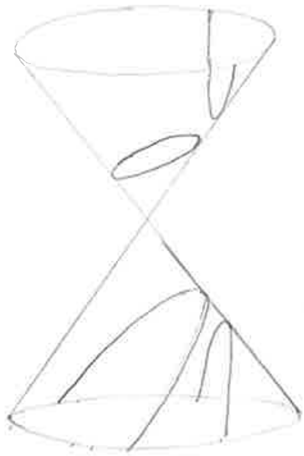
$$x^2 = 4py$$



<u>Proposição</u> As equações da forma $y^2=qx$ e $x^2=qy$ descrevem parábola em relação a um sistema ortogonal de coordenadas se, e somente se, $q \neq 0$.

<u>Observação</u> (seções cônicas)

A elipse, hipérbole e parábola podem ser realizadas como seções de um cône, ou seja como o lugar geométrico da interseção de um cône com um plano.



Excentricidade

(A) Elipse

A razão $\frac{b}{a}$ de uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ indica a "forma" da elipse. Se $\frac{b}{a}$ é próximo de 1, então a elipse parece um círculo. Podemos usar também a razão $\frac{c}{a}$.

Observe que

$$c^2+b^2=a^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=1,$$

então as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ são complementares:

$$\frac{b}{a} \text{ é próximo de } 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} \text{ é próximo de } 1$$

$$\frac{b}{a} \text{ é próximo de } 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} \text{ é próximo de } 0$$

A razão $e=\frac{c}{a}$ chama-se excentricidade da elipse

A razão $\frac{b}{a}$ chama-se centralidade da elipse.

Observações

(1) $0<e<1$

(2) $e(\text{círculo})=0$

Dizemos que duas elipse são semelhantes se suas excentricidades são iguais.

(B) Hipérbole

A posição da hipérbole em relação as suas assíntotas determina a "forma" da hipérbole. A inclinação das assíntotas é determinada por $\frac{b}{a}$.

Aqui temos $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$

A excentricidade da hipérbole é a razão $e=\frac{c}{a}$.

Observe que $e>1$.

(C) Parábola

Todas as parábolas tem a mesma excentricidade $e=1$.

(Para ver isto, precisa redefinir a elipse/hipérbole usando distância a uma reta e um foco. Ver Camargo & Boulos Capítulo 22, §6.)

Cônicas

Vimos que as equações reduzidas da elipse, hipérbole e parábola são equações de grau dois em x e y.
Tais equações são casos particulares de equações de grau dois geral.

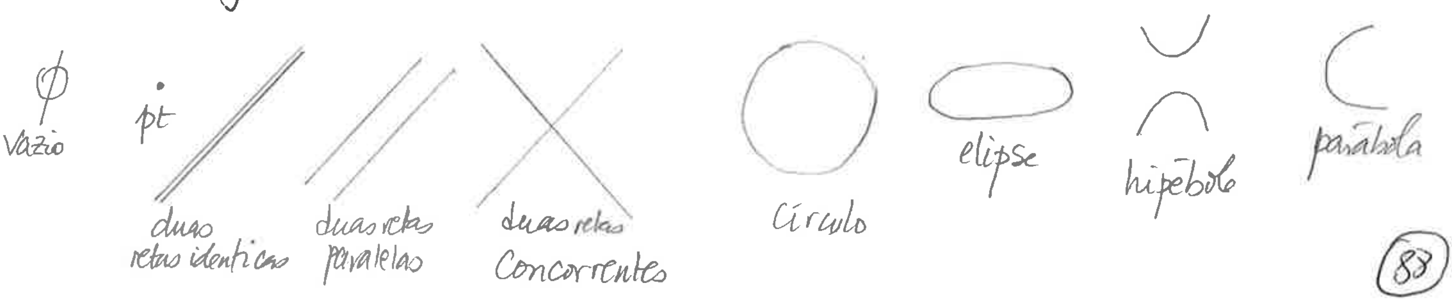
Definição:
Seja $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas em um plano Π.
Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ no plano Π que satisfazem uma equação de segundo grau $g(x,y) = 0$, com

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad , \quad a \neq 0, b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0.$$

Os termos ax^2, bxy e cy^2 são os termos quadráticos.
O termo bxy chama-se termo quadrático misto.
Os termos dx e ey são os termos lineares e f é o termo independente.

Exemplos de cônicas

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$: conjunto vazio
- $x^2 + y^2 = 0$: ponto
- $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, i.e., $(x+y)^2 = 0$: duas retas identicas
- $(x+y)(x+y+1) = 0$: duas retas paralelas
- $(x+y)(x-y) = 0$: duas retas concorrentes
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$: círculo
- $2x^2 + y^2 - 1 = 0$: elipse
- $x^2 - y^2 - 1 = 0$: hipérbole
- $x - y^2 = 0$: parábola



Observação

Podemos mostrar que a lista dos exemplos anteriores esgota as possibilidades das cônicas (ver Camargo & Boulos por uma demonstração).

O nosso objetivo é identificar e fazer o esboço de uma cônica com uma equação dada. Para isso, vamos fazer mudanças do sistema de coordenadas que não mudam a geometria da cônica para reduzir a equação da cônica a uma forma mais simples.

As mudanças que podemos fazer são: translações, rotações e reflexões.

Associamos ao polinômio $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ a seguinte matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$ chamada de matriz de g.

Exercício

Mostre que $g(x,y) = X^T M X$, onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Translação e eliminação dos termos lineares

Seja $O' = (h,k)_\Sigma$ um ponto do plano π. Seja $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ o sistema de coordenadas obtido pela translação de $\Sigma = \Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ para O'. Se $P = (x,y)_{\Sigma_1} = (u,v)_{\Sigma_2}$, então

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

Vamos estudar os efeitos da translação no polinômio $g(x,y)$.

Seja $\bar{g}(u,v) = g(u+h, v+k)$ obtida substituído x por $u+h$ e y por $v+k$.

Temos

$$\begin{aligned}\bar{g}(u,v) &= a(u+h)^2 + b(v+k)(u+h) + c(v+k)^2 + d(u+h) + e(v+k) + f \\ &= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + \\ &\quad ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f \\ &= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h,k).\end{aligned}$$

Queremos eliminar os termos lineares em $\bar{g}$, para isso vamos procurar h e k tais que

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

Temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas h e k.

Se $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ o sistema tem uma solução única

Se $ac - \frac{b^2}{4} = 0$ o sistema pode ter infinitas soluções ou ser incompatível.

Suponha que $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ e seja (h,k) a solução do sistema. Então

$$\begin{aligned}g(h,k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f \\ &= h\cancel{\left(ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2}\right)}^{0} + k\cancel{\left(\frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2}\right)}^{0} + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f \\ &= \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f.\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\bar{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f.}$$

Resumindo

Passo 1:

Escrevemos a matriz de g

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \hline \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}\right)$$

Passo 2 Calculamos $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}$

Passo 3

Se $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ existe uma única translação para o ponto $O' = (h,k)$ que elimina os termos lineares em $\bar{g}$. Os escalares h e k são soluções do sistema linear obtido a partir das primeiras duas linhas da matriz M:

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

Passo 4 A equação $\bar{g}(u,v) = 0$ no novo sistema de coordenadas tem as seguintes propriedades:

(a) os termos lineares são nulos

(b) os coeficientes dos termos quadráticos são os mesmos em $\bar{g}(u,v)$ e $g(x,y)$

(c) O termo independente em $\bar{g}(u,v)$ é obtido a partir da última linha da matriz M e é dado por

$$g(h,k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$$

onde (h,k) é a solução única do sistema no passo 3.

Exemplo

Usando uma translação, procure transformar $g(x,y)=x^2+y^2-6x-5y+14$ de modo que os coeficientes dos termos lineares passem a ser nulos.

Definição

Um ponto C é centro de uma cônica não vazia se, para todo ponto P que pertence à cônica, o simétrico de P em relação a C também pertence.

Seja $g(x,y)=0$ a equação de uma cônica. Se g não contém termos lineares, então $g(-x,-y)=a(-x)^2+b(-x)(-y)+c(-y)^2+f=g(x,y)$, ou seja $C=O=(0,0)$ é centro da cônica.

Suponha que a cônica tem centro $C=(h,k)$. Fazendo uma translação para C obtemos um novo polinômio $\bar{g}$ com $\bar{g}(u,-v)=g(u,v)$. Isto implica que os termos lineares de $\bar{g}$ são nulos. Portanto (h,k) é solução do sistema

$$(*)\quad \begin{cases} ah+\frac{b}{2}k+\frac{d}{2}=0 \\ \frac{b}{2}h+ck+\frac{e}{2}=0 \end{cases}$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição

$C=(h,k)$ é centro de uma cônica não vazia de equação $g(x,y)=0$ se, e somente se, (h,k) é solução do sistema $(*)$

Analizando as figuras na página 88, obtemos o seguinte grupamento:

Cônicas com centro único	$ac-\frac{b^2}{4}\neq 0$	ponto, circulo, elipse, hiperbole união de duas retas concorrentes
Cônicas com infinitos centros	$ac-\frac{b^2}{4}=0$	duas retas paralelas ou identicas ($(*)$ é indeterminado)
Cônicas que não possuem centro	$ac-\frac{b^2}{4}=0$	parábola ($(*)$ é incompatível)

2. Rotação e eliminação do termo quadrático misto

Seja Σ_2 um sistema de coordenadas obtido de Σ_1 (sistema ortonormal inicial de um plano Π) por rotação θ em sentido anti-horário.

Se P é um ponto do plano Π com $P=(x,y)_{\Sigma_1}$ e $P=(u,v)_{\Sigma_2}$, então

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ou seja
$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

Vamos ver como esta rotação afeta um polinômio $g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

Denotamos por $\bar{g}(u,v)=g(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta,\ u\operatorname{sen}\theta+v\cos\theta)$. Temos,

$$\begin{aligned}\bar{g}(u,v) &= a(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)^2 \\ &\quad + d(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + e(u\operatorname{sen}\theta - v\cos\theta) + f \\ &= a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f'\end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\operatorname{sen}^2\theta \\ b' &= -2a\cos\theta\operatorname{sen}\theta + b(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2c\operatorname{sen}\theta\cos\theta = (c-a)\operatorname{sen}2\theta + b\cos 2\theta \\ c' &= a\operatorname{sen}^2\theta - b\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ d' &= d\cos\theta + e\operatorname{sen}\theta \\ e' &= -d\operatorname{sen}\theta + e\cos\theta \\ f' &= f \end{aligned}$$

Observações

1. Se $d=e=0$, então $d'=e'=0$, ou seja as rotações não criam novos termos lineares
2. $f'=f$, ou seja as rotações não alteram o termo independente
3. Observe que $\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ onde $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz da rotação.

Queremos eliminar o termo quadratico misto, por isso vamos procurar θ de modo que $b'=0$

Se $b=0$, y não possui termo quadratico misto, então não precisamos fazer uma rotação do sistema de coordenadas.

Suponha que $b\neq 0$. Então

$$b'=0 \iff (c-a)\operatorname{sen}\theta + b\cos 2\theta = 0$$

$$\iff \operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$$

A equação $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$ em θ sempre tem soluções. Logo, é sempre possível, por uma rotação conveniente, eliminar o termo quadrático misto.

Escolhamos uma solução de $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$ com $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

É possível simplificar o cálculo de a' e c' para tal rotação

Observamos que

$$a'+c' = a+c$$

$$a'-c' = a(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2b\cos\theta\operatorname{sen}\theta + c(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$= (a-c)\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta$$

Como $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{a-c}{b}$, $a-c = b\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$, Logo

$$a'-c' = b\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta = \frac{b(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta)}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen} 2\theta}$$

Pela nossa escolha de $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}{\operatorname{sen}^2 2\theta}} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2}$$

Portanto, a' e c' são soluções do sistema

$$\begin{cases} a'+c' = a+c \\ a'-c' = b\sqrt{1+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2} \end{cases}$$

Resumindo

Se $b \neq 0$, é sempre possível transformar, por meio de uma rotação de ângulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, o polinômio de grau dois $g(x,y)$ em

$$\bar{g}(u,v) = a'u^2 + b'v^2 + d'u + e'v + f'$$

Com

- $$\cot g\, 2\theta = \frac{a-c}{b}$$
- $$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = b\sqrt{1 + \left(\dfrac{a-c}{b}\right)^2} \end{cases}$$
- $$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$
- $f' = f$.

Observação

A idéia é eliminar o termo quadrático misto utilizando uma rotação e tentar eliminar os termos lineares por uma translação. Como as rotações não criam novos termos lineares é melhor começar pela translação.

Exemplo

Identifique e esboce a cônica de equação

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

Solução

Seguindo as dicas na página 91, começamos escrevendo a matriz do polinômio da cônica. Temos

$$M = \left(\begin{array}{cc:c} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 7 & 3 \\ \hdashline 6 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Temos $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 4 = 24 \neq 0$,

portanto existe uma única translação para o ponto $C = (h, k)$ que elimina os termos lineares, e (h, k) é solução do sistema

$$\begin{cases} 4h - 2k + 6 = 0 \\ -2h + 7k + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $h = -2$ e $k = -1$.

O novo termo independente é igual a $6(-2) + 3(-1) - 9 = -24$.

Como a translação não altera os coeficientes do termo quadrático, a nova equação da cônica é

$$4u^2 - 4uv + 7v^2 - 24 = 0.$$

Vamos fazer uma rotação de ângulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ para eliminar o termo quadrático misto $-4uv$, com

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{4-7}{-4} = \frac{3}{4}$$

O sistema na página 95 fica

$$\begin{cases} a' + c' = 4 + 7 = 11 \\ a' - c' = (-4)\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -5 \end{cases}$$

Portanto $a' = 3$ e $c' = 8$. A equação da cônica, em relação ao terceiro sistema de coordenadas, é

$$3t^2 + 8w^2 - 24 = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

Portanto, a cônica é uma elipse.

Temos $\cot g\, 2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow tg\, 2\theta = \frac{4}{3}$.

Usando $tg\, 2\theta = \dfrac{2\, tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \dfrac{4}{3}$ obtemos $2tg^2\theta + 3tg\theta - 2 = 0$,

ou seja $tg\theta = -2$ ou $tg\theta = \frac{1}{2}$. Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $tg\theta = \frac{1}{2}$.

Podemos agora fazer o esboço da elipse:

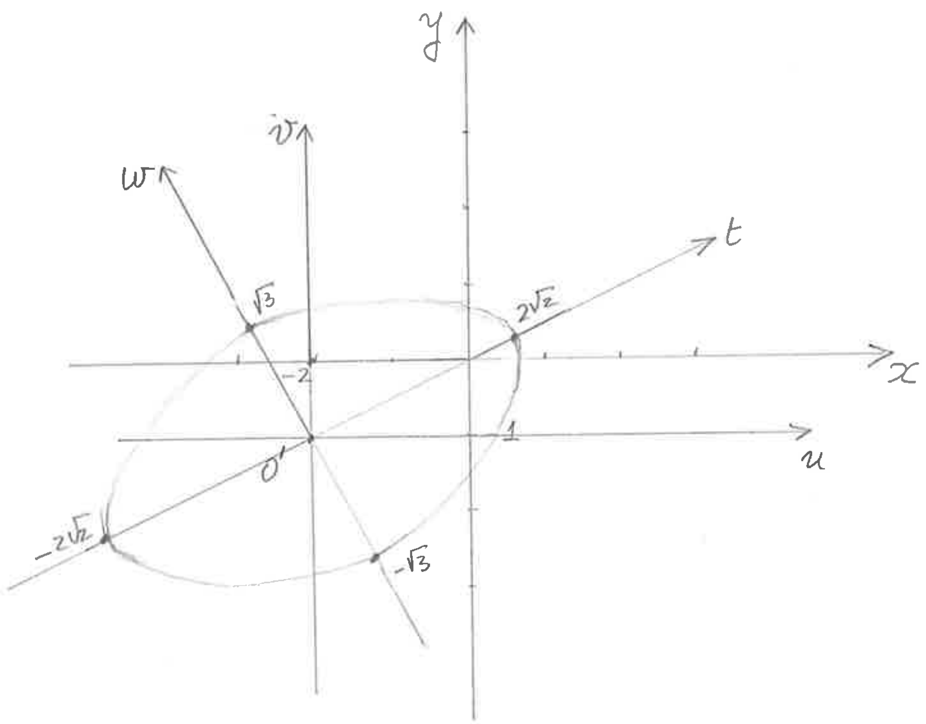
O sistema de coordenadas inicial é $\Sigma_1 = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ com $P = (x, y)$

A translação é para o ponto $O' = (-2, -1)_{\Sigma_1}$ e o nova sistema é

$\Sigma_2 = (O', (\vec{i}, \vec{j}))$. Denotamos $P = (u, v)_{\Sigma_2}$.

O novíssimo sistema de coordenadas $\Sigma_3 = (O', (\vec{e_1}, \vec{e_2}))$ é obtido pela rotação de angulo $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, com $tg\theta = \frac{1}{2}$. Denotamos $P = (t, w)_{\Sigma_2}$

(Observe que o eixo t contem a origem O do sistema Σ_1, pois $tg\theta = \frac{1}{2}$.)



Podemos fazer o esboço da elipse observando que os vértices tem coordenadas $(\pm 2\sqrt{2}, 0)_{\Sigma_3}$ e $(0, \pm\sqrt{3})_{\Sigma_3}$

Exemplo Seja $g(x,y) = 7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$
Identifique a cônica $g(x,y)=0$ e determine seus elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, assíntotas, diretriz em relação ao sistema de coordenadas inicial.

Vamos considerar um exemplo onde os termos lineares não podem ser eliminados por uma translação.

Seja $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$
a equação de uma cônica. Temos

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 16 & -12 & -\frac{85}{2} \\ -12 & 9 & -15 \\ \hline -\frac{85}{2} & -15 & 175 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{vmatrix} = 16 \cdot 9 - 12^2 = 144 - 144 = 0$$

O sistema linear $\begin{cases} 16h - 12k - \frac{85}{2} = 0 \\ -12h + 9k - 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h - \frac{3}{4}k - \frac{85}{32} = 0 \\ h - \frac{3}{4}k + \frac{15}{12} = 0 \end{cases}$

é incompatível. Portanto não existe uma translação que pode eliminar os termos lineares.

Sempre existe uma rotação que elimina o termo quadrático misto: Temos

$$\cot 2\theta = \frac{16-9}{-24} = -\frac{7}{24} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta} = \sqrt{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}.$$

logo $\begin{cases} a' + c' = 25 \\ a' - c' = -24 \cdot \frac{25}{24} = -25 \end{cases} \Rightarrow a' = 0 \text{ e } c' = 25$

Os novos termos lineares tem coeficientes d' e e' com

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -85 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Precisamos calcular $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ (não precisamos conhecer o θ)

Temos $\cot g 2\theta = -\frac{7}{24}$ e $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{24}{25}$

Portanto $\cos 2\theta = \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cot g 2\theta = -\frac{7}{25}$, ou seja $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{7}{25}$.

Obtemos um sistema de equações em $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$:

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{7}{25} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{16}{25} \text{ e } \cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

Como escolhamos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5} \text{ e } \cos\theta = \frac{3}{5}.$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -85 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ 50 \end{pmatrix}$$

e a nova equação da Cônica fica

$$25v^2 - 75u + 50v + 175 = 0$$ que pode ser

simplificada para obter

$$v^2 - 3u + 2v + 7 = 0.$$

Temos

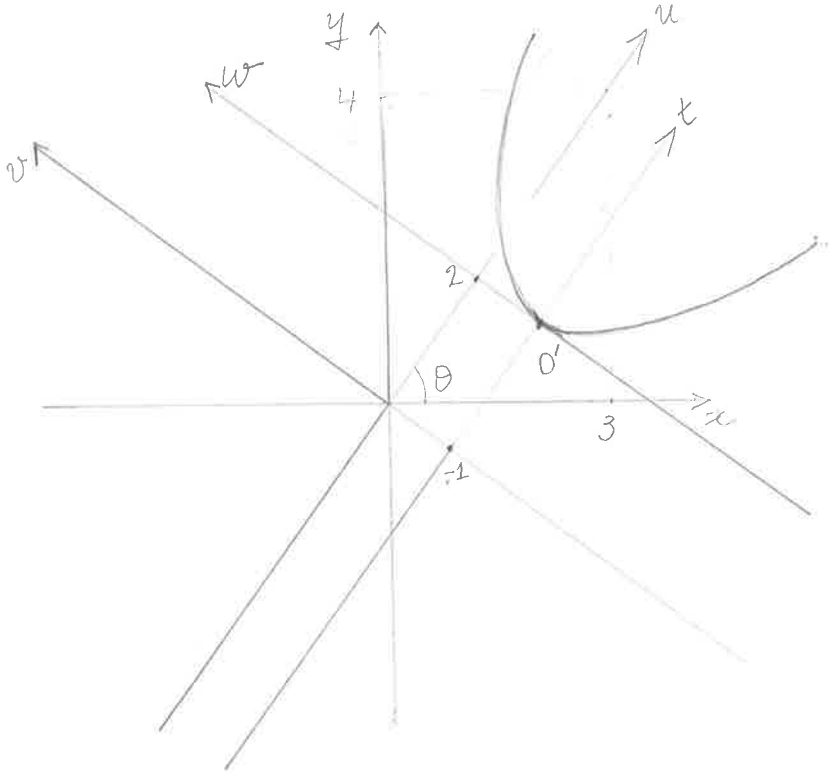
$$\begin{aligned} v^2 - 3u + 2v + 7 &= v^2 + 2v - 3u + 7 \\ &= (v+1)^2 - 1 - 3u + 7 \\ &= (v+1)^2 - 3(u-2) \end{aligned}$$

Fazendo a translação

$$\begin{cases} u = t + 2 \\ v = w - 1 \end{cases}$$ para o ponto $O' = (2, -1)$

Obtemos a equação reduzida da Cônica

$w^2 = 3t$, que é uma parábola.



$tg\theta = \frac{4}{3}$

Retas secantes, tangentes e normais

Vamos estudar a posição relativa de uma reta r e de uma cônica C em um plano π, com um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$.

Seja $r: X = (h,k) + \lambda(m,n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma equação vetorial da reta r e $g(x,y) = 0$ a equação da cônica C.

Se C é união de duas retas o estudo é o mesmo da posição de duas retas. Portanto, vamos supor que C é uma elipse, hipérbole ou parábola.

Os pontos de interseção de r e C são obtidos resolvendo a equação

$$r \cap C: \quad g(h + \lambda m, k + \lambda n) = 0 \quad \text{em } \lambda.$$

Esta equação tem grau ≤ 2, portanto, $r \cap C$ tem no máximo dois pontos.

<u>Observação</u> A equação $\lambda = 0$ tem uma solução única.
A equação $\lambda^2 = 0$ tem duas soluções iguais
(dizemos que $\lambda^n = 0$ tem uma solução de multiplicidade n.
Quando $n = 1$, dizemos que a solução é simples.)

<u>Definição</u> Seja C uma elipse, hipérbole ou parábola.

(a) Uma reta r é <u>secante</u> a C se $r \cap C$ contem dois pontos distintos

(b) Uma reta r é uma <u>reta tangente</u> a C se $r \cap C$ contem dois pontos identicos (ou seja, a equação de $r \cap C$ tem uma solução dupla). O ponto T em $r \cap C$ é chamado de <u>ponto de tangencia</u> e qualquer vetor diretor $\vec{r}$ de r é chamado <u>vetor tangente</u> a C no ponto T. A reta perpendicular a r em T é chamada <u>reta normal</u> a C em T.

1. Elipse

Escolhamos Σ de modo que C seja dada na forma reduzida

$$g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Então

$$r \cap C : \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)\lambda + \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 = 0$$

Como $m \neq 0$ ou $n \neq 0$, o coeficiente $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$ de λ^2 é diferente de zero, ou seja a equação de $r \cap C$ sempre é de grau 2.

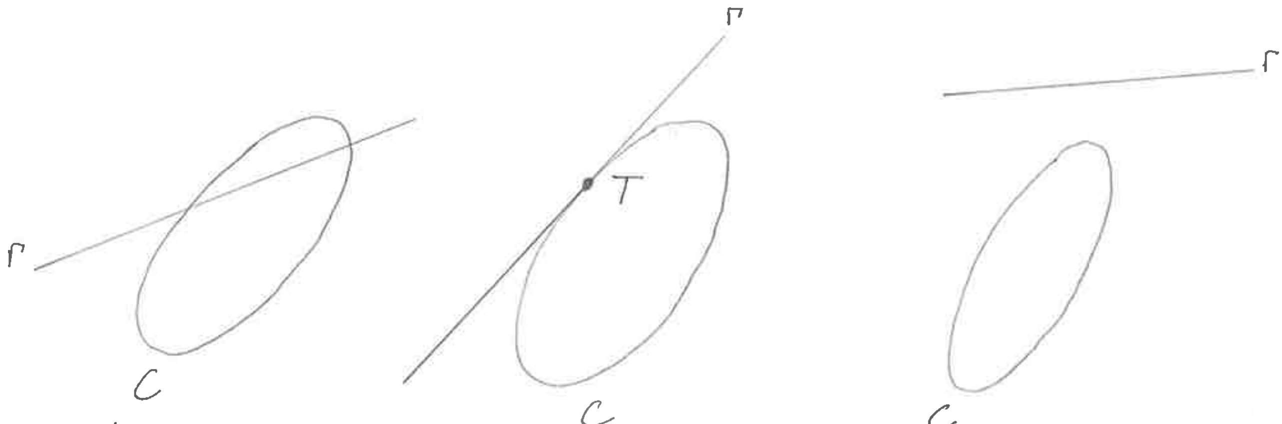
Temos
$$\Delta = 4\left[\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)^2 - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

Se

$\Delta > 0$: a equação de $r \cap C$ tem duas soluções distintas. A reta r é uma reta secante

$\Delta = 0$: a equação de $r \cap C$ tem uma raiz dupla λ_0. A reta r é uma reta tangente a C no ponto $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$

$\Delta < 0$: $r \cap C = \phi$



reta secante — reta tangente — $r \cap C = \phi$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse

Equação da reta tangente

Seja $T=(h,k)$ o ponto de tangencia da reta r e da elipse.

Temos $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1=0$, portanto

$$\Delta = 4\left(\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k\right)^2.$$

Como r é uma reta tangente a C no ponto T, $\Delta=0$, ou seja

$\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k=0$. Equivalentemente, $(m,n)\cdot\left(\frac{h}{a^2},\frac{k}{b^2}\right)=0$.

Daí $\vec{r}=(m,n)$ é ortogonal a $\left(\frac{h}{a^2},\frac{k}{b^2}\right)$, portanto é paralelo

a $\left(-\frac{k}{b^2},\frac{h}{a^2}\right)$. Podemos então usar o vetor

$\vec{u}=-a^2b^2\left(-\frac{k}{b^2},\frac{h}{a^2}\right)=(ka^2,-hb^2)$ como vetor diretor da reta r.

Com este vetor, uma equação vetorial de r é

$$r:\ X=(x,y)=(h,k)+\lambda(ka^2,-hb^2)$$

ou seja $\begin{cases} x=h+\lambda ka^2 \\ y=k-\lambda hb^2 \end{cases}$

Daí $\frac{x-h}{ka^2}=\frac{y-k}{-hb^2} \iff hb^2x+ka^2y=h^2a^2+k^2a^2$

$\overset{\text{dividindo por } a^2b^2}{\iff} \frac{h}{a^2}x+\frac{k}{b^2}y=1.$

Proposição

Seja $C:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uma equação reduzida da elipse e $T=(h,k)$ um ponto da elipse. A equação da reta tangente a C em T é dada por

$$\boxed{\frac{h}{a^2}x+\frac{k}{b^2}y=1}$$

Exemplo

Consider a elipse $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$ e as retas $r: X=(x,y)=(0,k)+\lambda(m,0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Temos $r:\begin{cases} x=\lambda m \\ y=k \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (retas horizontais).

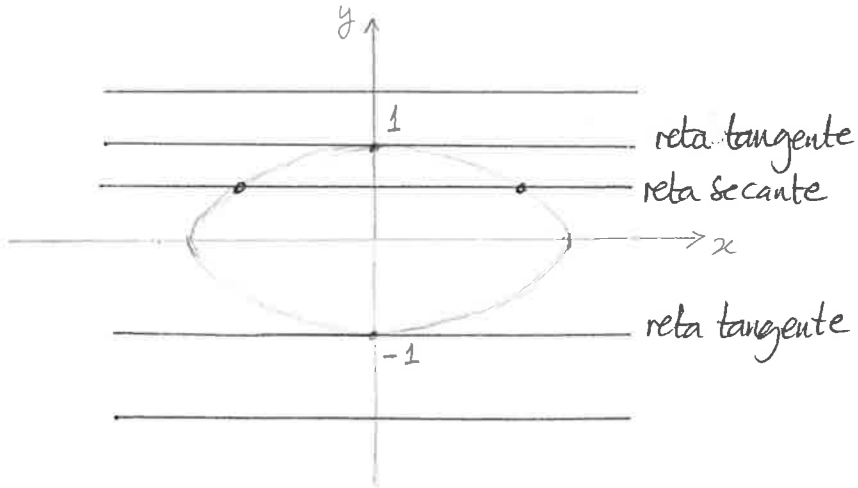
Logo $r\cap C:\ \frac{(\lambda m)^2}{4}+k^2-1=0 \iff \lambda^2=\frac{4}{m^2}(1-k^2)$

- $1-k^2<0 \iff k<-1$ ou $k>1$, $r \cap C = \emptyset$
- $1-k^2=0 \iff k=\pm 1 \Rightarrow \lambda^2=0$, $\lambda=0$ solução dupla

  $k=1$; $r: X=(\lambda m, 1), \lambda \in \mathbb{R}$, reta tangente no ponto $(0,1)$

  $k=-1$, $r: X=(\lambda m, -1), \lambda \in \mathbb{R}$, reta tangente no ponto $(0,-1)$
- $1-k^2>0 \iff -1<k<1$, $\lambda = \pm \frac{2}{m}\sqrt{1-k^2}$, temos duas soluções distintas,

  r é uma reta secante.



2. Hipérbole

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas de modo que os focos da hipérbole estejam no eixo x.

Então $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ e

$$r \cap C: \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\iff \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{mh}{a^2} - \frac{nk}{b^2}\right)\lambda + \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 = 0$$

A equação de $r \cap C$ é de segundo grau se, e somente se, $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \neq 0$.

Temos $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) \neq 0 \iff \frac{m}{a} - \frac{n}{b} \neq 0$ e $\frac{m}{a} - \frac{n}{b} \neq 0$

$\iff \vec{r} = (m, n)$ não é paralelo (a, b) ou $(a, -b)$

$\iff r$ não é paralela a uma das assíntotas.

Se a equação de $r \cap C$ é de segundo grau, calculamos Δ:

$\Delta > 0$: r é uma reta secante

$\Delta = 0$: r é uma reta tangente. Se λ_0 é a solução dupla da equação de $r \cap C$, então $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ é o ponto de tangencia

$\Delta < 0$: $r \cap C = \phi$

Suponha que r é paralela a uma das assíntotas. Vamos analizar o caso $\vec{r} = (a, b)$ (ou caso $\vec{r} = (a, -b)$ é similar).

Temos $r \cap C$: $2\left(\frac{h}{a} - \frac{k}{b}\right)\lambda + \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 = 0$

$\frac{h}{a} - \frac{k}{b} = 0 \iff k = \frac{b}{a}h \iff A = (h, k) \in r$ pertence a reta assíntota

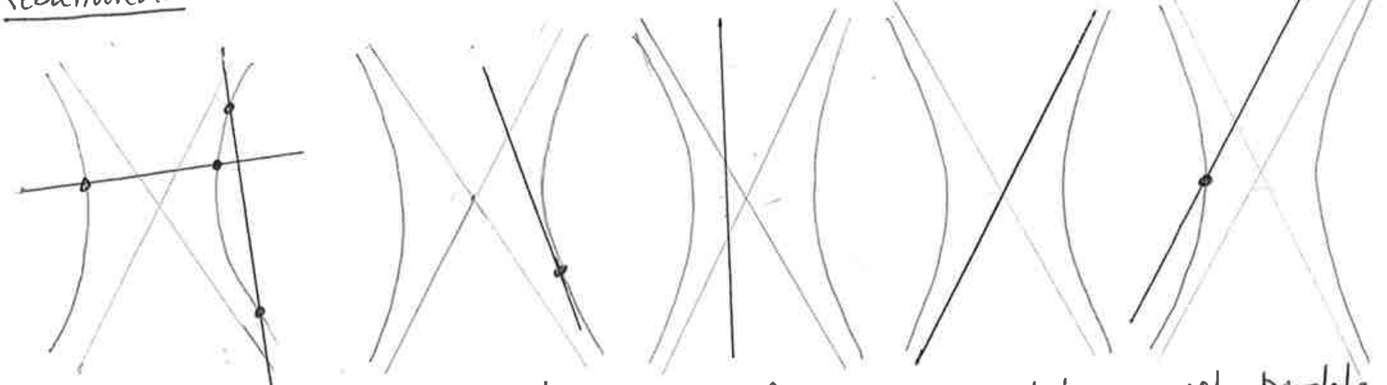
$\iff r$ é uma das assíntotas

Como $\frac{h}{a} = \frac{k}{b}$, $\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 = -1 \neq 0$, logo $r \cap C = \phi$

Se $\frac{h}{a} - \frac{k}{b} \neq 0$, r é paralela a uma das assíntotas mas é distinta da assíntota.

Neste case a equação de $r \cap C$ tem uma solução única.

Resumindo



retas secantes ($\Delta > 0$) — reta tangente ($\Delta = 0$) — $r \cap C = \phi$ ($\Delta < 0$) — assíntota — reta paralela a uma das assíntotas

3. Parábola

Escolhamos um sistema de coordenadas de modo que a equação de C seja na forma reduzida $y^2 = 4px$. Então

$r \cap C: \quad (k+n\lambda)^2 = 4p(h+\lambda m) \iff n^2\lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + k^2 - 4ph = 0$

A equação de $r \cap C$ é de segundo grau se, e somente se, $n \neq 0$, equivalentemente $\vec{r} = (m, n)$ não é parelelo ao eixo da parábola.

Se $n \neq 0$, $\Delta > 0$: r é uma reta secante

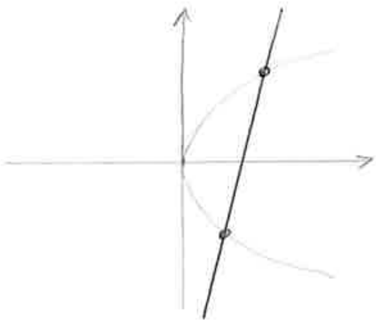
$\Delta = 0$: r é uma reta tangente no ponto $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 m)$

onde λ_0 é a solução dupla da equação de $r \cap C$

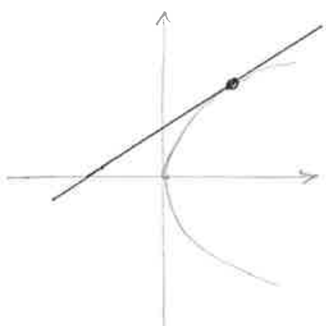
$\Delta < 0$: $r \cap C = \phi$

Se $n = 0$, $r \cap C$: $-4pm\lambda + k^2 - ph = 0$

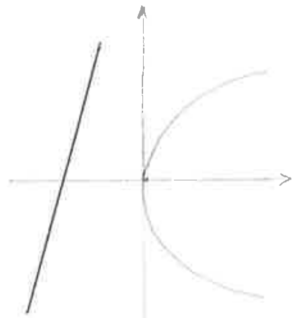
Como $p \neq 0$ e $m \neq 0$ $r \cap C$ é um ponto único.



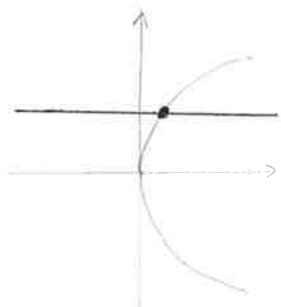
$n \neq 0$, $\Delta > 0$
reta secante



$n \neq 0$, $\Delta = 0$
reta tangente



$n \neq 0$, $\Delta < 0$
$r \cap \Delta = \phi$



$n = 0$

Coordenadas polares (no plano)

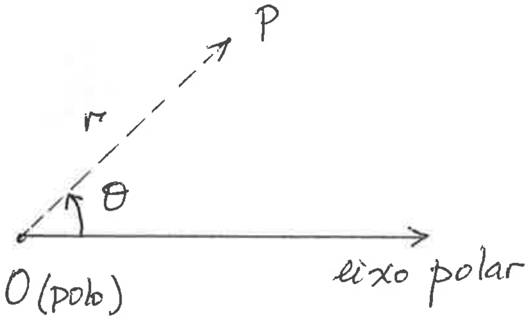
Um sistema de coordenadas nos ajuda a localizar as posições de pontos no plano (ou no espaço).

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema ortogonal de coordenadas de um plano. Tal sistema é chamado sistema de coordenadas cartesiano.

Podemos localizar a posição de um ponto no plano usando um outro tipo de sistema de coordenadas.

Coordenadas polares

Fixamos um ponto O no plano e uma semi-reta orientado.



Chamamos O polo e a semi-reta eixo-polar.

Dado um ponto P do plano denotamos por θ o ângulo entre o semi-eixo polar e $\overrightarrow{OP}$ medido no sentido anti-horario, e por r o modulo de $\overrightarrow{OP}$, i.e., $r = \|\overrightarrow{OP}\|$.

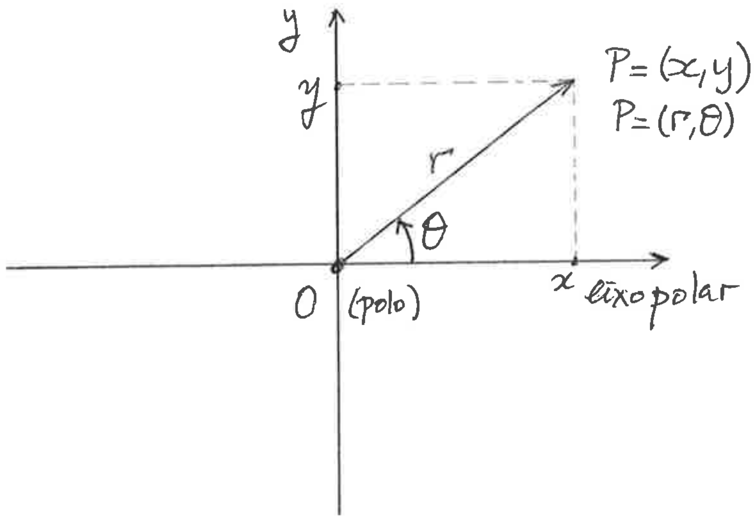
O par (r, θ) é denominado coordenadas polares do ponto P, θ é o argumento e r o raio.

Observações

1. Variando $\theta \in [0, 2\pi)$, $r > 0$ fica associado a cada ponto do plano um único par (r, θ), exceto o polo que tem coordenadas $(0, \theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
2. Podemos supor que $\theta \in \mathbb{R}$, mas temos que tomar cuidado porque (r, θ) e $(r, \theta + 2\pi)$ representam o mesmo ponto no plano.

Relação entre coordenadas polares e cartesianas

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema de coordenadas cartesiano.
Escolhamos O com o polo e semi-eixo x, $\overrightarrow{Ox}$, como o eixo polar



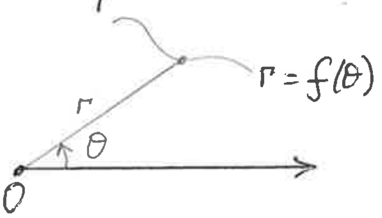
Seja P um ponto do plano distinto da origem (polo).
Temos $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ e $\dfrac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$, portanto,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \quad \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Funções em coordenadas polares



Expressões da forma $r = f(\theta)$ são chamadas funções em coordenadas polares.

Exemplos

1. $r = 1$

Como $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$

O gráfico da função $r = 1$ é o círculo de centro O e raio 1.

2. $r = -3\,\text{sen}\,\theta$

Multiplicando por r, obtemos $r^2 + 3r\,\text{sen}\,\theta = 0$. Em coordenadas cartesianas, a equação fica

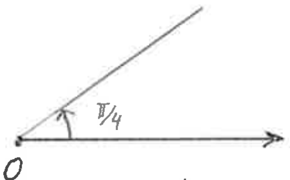
$$x^2+y^2+3y=0 \iff x^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

que é a equação do círculo de centro $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ e raio $\frac{3}{2}$.

3. $r\cos\theta = 3$

A equação, em coordenadas cartesianas, é $x = 3$, que é a equação da reta vertical passando por $(3,0)$

4. $\theta = \frac{\pi}{4}$



é a equação da semi-reta que forma um ângulo $\frac{\pi}{4}$ com o eixo polar.

5. Lemniscata : é o lugar geométrico do pontos P de um plano cujo produto das distâncias a dois ponto fixos F_1 e F_2 do plano é constante e igual a $\left(\frac{d(F_1,F_2)}{2}\right)^2$

Vamos achar a equação da lemniscata em coordenadas cartesianas e polares.

Escolhamos um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ tal que

$F_1 = (-a, 0)$ e $F_2 = (0, a)$.

Então $X = (x,y) \in$ lemniscata $\iff d(X,F_1) \cdot d(X,F_2) = a^2$

$X=(x,y)\in$ lemniscata $\iff \sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$

$$\iff \left((x+a)^2+y^2\right)\left((x-a)^2+y^2\right)=a^4$$

$$\iff (x+a)^2(x-a)^2+y^2\left((x+a)^2+(x-a)^2\right)+y^4=a^4$$

$$\iff x^4-2a^2x^2+\cancel{a^4}+2x^2y^2+2a^2y^2+y^4=\cancel{a^4}$$

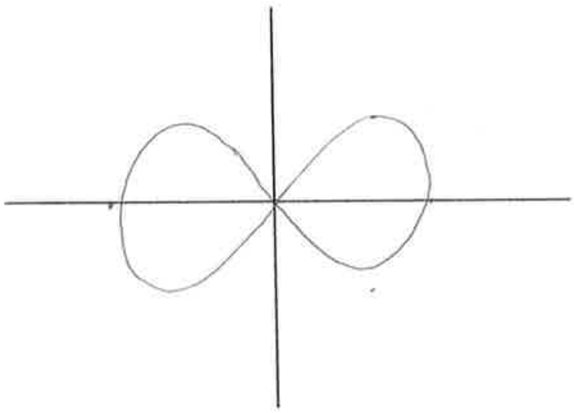
$$\iff \boxed{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0}$$

que é uma equação de grau 4 em x,y.

Em coordenadas polares, esta equação vira,

$$(r^2)^2-2a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta)=0$$

$$\iff \boxed{r^2-2a^2\cos 2\theta=0}$$



Exercício

Achar equações da elipse/hiperbole/parábola nas coordenadas polares.