Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 3 - Semana 8/9 – 11/9

Exercício Determine se as séries são convergentes ou divergentes :

Item a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Solução. Tome $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0,$$

do critério de comparação no limite e do fato de que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, concluímos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

□

Item b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$

Solução. Tome $a_n = \frac{2+\sin n}{n^2}$ e $b_n = \frac{3}{n^2}$ para todo $n \geq 1$. Observe que

$$0 < \frac{2+\sin(n)}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

A serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma 2-série, logo convergente. Assim do critério de comparação temos que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$ converge. □

Item c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Solução. Podemos reescrever o termo geral a_n da série enunciada da seguinte maneira:

$$\frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Note que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0.$$

Seja $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, temos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (verificar o primeiro exemplo da lista).

Finalmente, calculando o limite de $\frac{a_n}{b_n}$ para $n \to \infty$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0.$$

Portanto, pelo critério da comparação no limite, ambas as séries convergem.

□

Item d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Solução. Considerando $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ para $x \in [2, \infty)$. A função f é contínua, positiva e decrescente em $[2, \infty)$ (verifique). Além disso,

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_2^k \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln k} \frac{1}{u} du = \lim_{k\to\infty} \ln u \Big|_{\ln 2}^{k} = \infty.$$

Portanto, pelo critério da integral a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. □

Item e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

Solução. Seja $b_n = \frac{2^n}{3^n}$, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por se tratar de uma série geométrica com razão inferior a 1. Dito isso, note que, para $n \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+2^n}{1+3^n}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+2^n}{2^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = 1.$$

Logo, a série enunciada é convergente devido ao critério da comparação no limite. □

Item f. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\frac{1}{n}\right]$

Solução. Primeiro modo. Note que

$$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)=\left[\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)+\cos^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]-\left[\cos^2\left(\frac{1}{2n}\right)-\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]=2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Pelo exemplo 2, podemos afirmar que

$$0<2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)=2\cdot\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\leq 2\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n^2}=b_n.$$

Perceba que a série de termo geral b_n é convergente (exemplo 1). Logo, como

$$0\leq 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\leq b_n,$$

a série enunciada converge devido ao critério da comparação. $\square$

Solução. Segundo modo. Em Cálculo 1, estudamos o limite fundamental

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}>0.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, segue do critério da comparação no limite que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\frac{1}{n}\right]$ também converge. $\square$