SME 0121 Processos Estocásticos
ICMC-USP, Ricardo Ehlers
Lista 1

1. Seja (X,Y) com densidade conjunta $f(x,y) = 21x^2y^3$, $0 < x < y < 1$, $f(x,y) = 0$ caso contrário. Obtenha $f(y|x)$.

2. Seja (X,Y) com densidade conjunta $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$, $x > 0$ e $y > 0$. Obtenha $f(y|x)$.

3. Seja (X,Y) com distribuição normal bivariada com médias zero, variâncias 1 e coeficiente de correlação ρ. Obtenha $f(y|x)$.

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias continuas. A esperança condicional de uma função $g(Y)$ é,

$$E[g(Y)|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y|x)dy.$$

   $f(x,y) = ye^{-xy}/2$, $x > 0$ e $0 < y < 2$, obtenha $E(e^{X/2}|Y = y)$.

5. Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial com parâmetros p e n, onde n tem uma distribuição de Poisson com média λ. Determine a distribuição marginal de X.

6. Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial com parâmetros p e n, onde p tem distribuição uniforme no intervalo (0,1). Determine a distribuição marginal de X.

7. No item anterior suponha agora que p tem distribuição Beta com parâmetros a e b, cuja função de densidade é,

$$f(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1},\ a > 0,\ b > 0.$$

   Qual a probabilidade de se obter k sucessos independente do valor de p?

8. Suponha que a função de densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

   Calcule a esperança condicional de X dado que $Y = y$, onde $0 < y < 1$.

9. O número de itens defeituosos nos containers X_1 e X_2 tem distribuição binomial sendo que os totais de itens em cada container são diferentes. Assume-se que todos os itens tem a mesma probabilidade de defeito e estes ocorrem de forma independente. Obtenha a distribuição do número de defeituosos no container X_1 sabendo que o número total de defeituosos é conhecido.

10. O número anual de acidentes que ocorrem nas rodovias X e Y tem distribuição de Poisson com parâmetros distintos. Assume-se que os acidentes ocorrem de forma independente nas duas rodovias. Calcule o número médio de acidentes em cada rodovia sabendo que o número total de acidentes é conhecido.

11. Em um lote de peças sabe-se que o número de itens defeituosos segue uma distribuição binomial. No entanto o tamanho do lote também é desconhecido e considerado uma variável aleatória com distribuição de Poisson. Obtenha o número esperado (incondicional) de itens defeituosos.

12. Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ. O valor de λ é desconhecido e tem distribuição exponencial com média 1. Obtenha a distribuição incondicional de X.

13. Suponha que uma variável aleatória Y tem distribuição Gama com parâmetros α e β, ou seja a f.d.p. de Y é

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp(-\beta y) \\ &\propto y^{\alpha-1} \exp(-\beta y), \quad y > 0. \end{aligned}$$

Assume-se que a distribuição condicional da variável aleatória X dado que $Y = y$ é Poisson com média y. Mostre que a distribuição condicional de Y dado que $X = k$ também é Gama com parâmetros $\alpha + k$ e $\beta + 1$.

14. Uma seguradora assume que o número de acidentes de cada segurado em 1 ano segue distribuição de Poisson cujo parâmetro depende do segurado. Assume-se que um segurado selecionado ao acaso tem número médio de acidentes λ com distribuição Gama cuja função de densidade é,

$$f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}, \ \lambda > 0.$$

Qual a probabilidade de que um segurado selecionado ao acaso tenha exatamente n acidentes no ano?

15. Sejam as variáveis aleatórias X e Y com a seguinte função de probabilidade conjunta,

$$P(X = i, Y = j) = \frac{(bi)^j}{j!} \frac{a^i}{i!} \exp\{-(a + bi)\}, \ i = 0, 1, \ldots, \ j = 0, 1, \ldots$$

(a) Obtenha a distribuição condicional de Y dado que $X = i$.

(b) Obtenha a $Cov(X, Y)$.

16. Exercícios do Cap.3 de Sheldon Ross:

    1,3,4,5,7,8,14,15,16,17,21,26,27,28,37,38,44,53,56,57,58,86.