1^a Lista de Exercícios de Geometria Analítica (SMA300)

1^o Semestre de 2018

Recomendamos que vocês façam todos os exercícios da lista e discutem suas duvidas e soluções nas monitorias online no Tidia-ae.usp.br.

1. Sejam M, N e P os pontos médios dos segmentos de reta AB, BC, CA respectivamente, onde os pontos A, B e C são os vértices um triângulo qualquer ABC. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

2. Seja ABC um triângulo qualquer, com medianas dadas pelos segmentos de retas AD, BE e CF. Prove que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

3. Resolva o sistema nas incógnitas vetoriais $\vec{x}$ e $\vec{y}$: $\begin{cases} \vec{x} + 3\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 4\vec{u} - 2\vec{v} \end{cases}$

4. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O. Mostre que
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$

5. São dados um triângulo ABC e os pontos X, Y e Z, tais que tenhamos as seguinte identidades $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$, onde m, $n \in \mathbb{R}$. Exprima os vetores $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ e m, n, p.

6. Sejam ABC um triângulo e X um ponto do segmento AB. Mostre que
$$\overrightarrow{CX} = \frac{||\overrightarrow{BX}||}{||\overrightarrow{AB}||}\overrightarrow{CA} + \frac{||\overrightarrow{AX}||}{||\overrightarrow{AB}||}\overrightarrow{CB}.$$

7. Dado um triângulo ABC, seja $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. Seja X um ponto do segmento de reta AB tal que o vetor $\overrightarrow{CX}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$.
(a) Exprima $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
(b) Calcule $\frac{||\overrightarrow{AX}||}{||\overrightarrow{XB}||}$ e a razão em que X divide o segmento de reta AB (ver Exercício 8).

8. A razão em que um ponto P divide um segmento orientado não nulo AB é o número real r tal que $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{PB}$.

   (a) Seja r a razão em que um ponto P divide um segmento orientado não nulo AB. Prove que $r \neq -1$ e que $\overrightarrow{AP} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB}$.

   (b) No triângulo ABC na Figura 1(a), M divide AB e N divide CB na mesma razão r. Prove que $MN \parallel AC$ e calcule $\frac{||\overrightarrow{MN}||}{||\overrightarrow{AC}||}$.

   (c) No quadrilátero ABCD na Figura 1(b), M divide AB, N divide CB, P divide CD e Q divide AD, todos na mesma razão r. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

   (d) Suponha que o quadrilátero $ABCD$ do item anterior seja um paralelogramo. Mostre que as quatro diagonais, duas de $ABCD$ e duas de $MNPQ$, tem um ponto em comum.

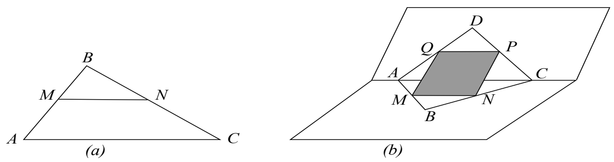

Figura 1:

9. Se os vetores não nulos $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ são L.D. no espaço, então o vetor $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

10. Seja $\mathbf{E} = (\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w})$ uma base de V^3. Dado um vector $\vec{t}$, sabemos que existem números reais $\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Mostre que o conjunto $\{\vec{u}+\vec{t}\,,\vec{v}+\vec{t}\,,\vec{w}+\vec{t}\}$ é formado por vetores não coplanares se, e somente se, $\alpha+\beta+\gamma+1 \neq 0$.

11. Seja $\mathbf{E}$ uma base de V^3. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que o vetor $\vec{u} = (1\,,2\,,2)_{\mathbf{E}}$ seja combinação linear dos vetores $\vec{v} = (m-1\,,1\,,m-2)_{\mathbf{E}}$ e $\vec{w} = (m+1\,,m-1\,,2)_{\mathbf{E}}$. Determine também $m \in \mathbb{R}$, para que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sejam L.D.

12. Seja $\mathbf{E}$ uma base de V^3. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que a sequência de vetores abaixo sejam L.D.
(a) $(m\,,1\,,m)_{\mathbf{E}}\,,(1\,,m\,,1)_{\mathbf{E}}$ (b) $\left(1-m^2\,,1-m\,,0\right)_{\mathbf{E}}\,,(m\,,m\,,m)_{\mathbf{E}}$

13. Sejam $\mathbf{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$ uma base de V^3, $\vec{u} = (1,2,-1)_{\mathbf{E}}$, $\vec{f_1} = \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{f_2} = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f_3} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
(a) Para que valores de $m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,,\vec{f_2}\,,\vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3?
(b) Nas condições do item (a), calcule $m \in \mathbb{R}$, para que $\vec{u} = (0\,,1\,,0)_{\mathbf{F}}$.

14. Sejam $\mathbf{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3, $\vec{f_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f_2} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f_3} = 3\vec{e}_3$.
(a) Mostre que $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,,\vec{f_2}\,,\vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3.
(b) Calcule $m \in \mathbb{R}$, para que os vetores $\vec{u} = (0\,,m\,,1)_{\mathbf{E}}$ e $\vec{v} = (0\,,1\,,-1)_{\mathbf{F}}$ sejam L.D.

15. Consideremos à base $\mathbf{E} = (\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3})$ de V^3, e as relações: $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$ $\vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$.
a) Verificar que $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,,\vec{f_2}\,,\vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3.
b) Achar a matriz de mudança de base, da base $\mathbf{E} = (\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3})$ para a base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,,\vec{f_2}\,,\vec{f_3}\right)$.
c) Sendo $\vec{u} = 3\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$, achar a expressão do vetor $\vec{v}$ em relação à base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,,\vec{f_2}\,,\vec{f_3}\right)$.

16. Sejam $\mathbf{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$ base de V^3 e $\mathbf{F} = \{(1\,,1\,,1)_{\mathbf{E}}\,,(1\,,2\,,0)_{\mathbf{E}}\,,(1\,,1\,,0)_{\mathbf{E}}\}$ e $\mathbf{G} = \{(2\,,1\,,-1)_{\mathbf{E}}\,,(3\,,0\,,1)_{\mathbf{E}}\,,(2\,,0\,,1)_{\mathbf{E}}\}$.
a) Mostre que $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são bases de V^3.
b) Determine a matriz de mudança de base, da base $\mathbf{E}$ para a base $\mathbf{F}$, isto é, $M_{\mathbf{EF}}$.
c) Se $\vec{u} = (m\,,2\,,1)_{\mathbf{E}}$, $\vec{v} = (1\,,1\,,1)_{\mathbf{F}}$ e $\vec{w} = (2\,,-1\,,1)_{\mathbf{F}}$, determinar $m \in \mathbb{R}$, de modo que os vetores $\{\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\}$ não formem uma base de V^3.

Nos exercício abaixo $\mathbf{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal positiva de V^3.

17. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $||\vec{u}|| = 3/2$, $||\vec{v}|| = 1/2$, $||\vec{w}|| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

18. Demonstrar que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados; em outras palavras, provar que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2$.

19. (a) Prove que $||\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$, quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

    (b) Dados os vetores não nulos $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, sejam $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$, $\gamma = \text{ang}(\vec{v}, \vec{w})$. Prove que $-3/2 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3$.

    (c) Supondo, no item anterior, que $\alpha = \beta = \gamma$, verifique se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base.

20. Decomponha o vetor $\vec{v} = (-1, -3, 2)_{\mathbf{B}}$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u} = (0, 1, 3)_{\mathbf{B}}$.

21. Sejam
$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})_{\mathbf{B}},\ \vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})_{\mathbf{B}},\ \vec{w} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{\mathbf{B}}.$$

    (i) Prove que $\mathbf{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal positiva.

    (ii) Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

    (iii) Determine a projeção ortogonal do vetor $3\vec{u} + 5\vec{v}$ sobre o vetor $2\vec{u}$.

22. Sejam os vetores $\vec{u} = (3\,, 1\,, -1)_{\mathbf{B}}$ e $\vec{v} = (a\,, 0\,, 2)_{\mathbf{B}}$. Calcule o valor de $a \in \mathbb{R}$, para que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

23. Dados os vetores $\vec{u} = (0\,, 1\,, -1)_{\mathbf{B}}$, $\vec{v} = (2\,, -2\,, -2)_{\mathbf{B}}$ e $\vec{w} = (1\,, -1\,, 2)_{\mathbf{B}}$, determinar as coordenadas do vetor $\vec{x}$, em relação à base $\mathbf{B}$, que seja paralelo ao vetor $\vec{w}$ e que satisfaça $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

24. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
    a) Calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$
    b) Calcular o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

25. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vetores de V^3, tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 3\,\|\vec{c}\| = 6$ e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{O}$. Calcular $\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$.

26. Suponhamos que os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ de V^3 verificam as relações $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d}$ e $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d}$. Prove que os vetroes $\left(\vec{a} - \vec{d}\right)$, $\left(\vec{b} - \vec{c}\right)$ são L.D.

27. Se os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I. em V^3 e o vetor $\vec{w}$ satisfaz $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{O}$, mostrar que $\vec{w} = \vec{0}$.

28. Resolva o seguinte sistema na incógnita $\vec{x}$
$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) & = & 9 \\ \vec{x} \wedge (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) & = & -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$$

29. Prove que, qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, $||\vec{v} \wedge \vec{i}||^2 + ||\vec{v} \wedge \vec{j}||^2 + ||\vec{v} \wedge \vec{k}||^2 = 2||\vec{v}||^2$.