Lista 3 de Exercícios

① a) $\pi = \{ v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot n = 0 \}$

Seja $v = (0, 0, 0) \in \pi$ o elemento neutro

$\begin{cases} u \cdot v = 0 \\ u = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 \in \mathbb{R}^3$ e está em π

$\begin{cases} u + v = u \\ u = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow (x+0, y+0, z+0) = (x, y, z) = u + v$

Com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u = \alpha (x, y, z)$

$= (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$= (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) \Rightarrow \alpha v \in \pi$ Portanto subespaços.

b) $U = \{ A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A = A^t \}$

$u = (x, y, z)$

Com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u = \alpha(x, y, z)$

$= (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$= (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) \Rightarrow \alpha v \in U$ Portanto subespaços.

b) $U = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$

Seja $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \in U$.

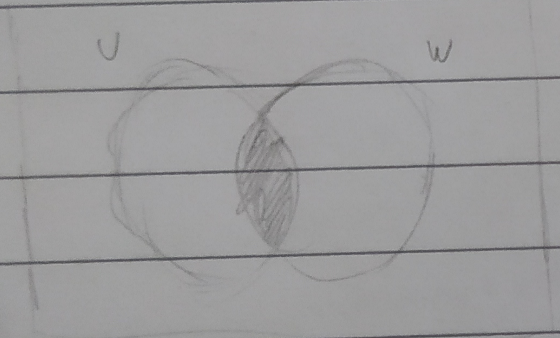
Seja $A_{3\times3}$ e $B_{3\times3}$ onde $A^t = A$ e $B^t = B$.

$A + B = A^t$ e $B^t = (A+B)^t \Rightarrow A + B \in U$

Seja $A \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$, $\alpha A \in U$

Portanto subespaços.

② a)



Se $W \cap U \neq \{\emptyset\}$, então:

$V = (U \cap W^c) \cup (W \cap U^c) \cup (U \cap W) \cup (W \cup U)^c$

Z

Logo $Z \subset V \Rightarrow$ subespaço

b) Seja $V = \mathbb{R}^2$, $W = \alpha(1,0)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $U = \beta(0,1)\ \forall\ \beta \in \mathbb{R}$

$W \cup U$ não possui valores (α, β) e portanto a propriedade de soma do subespaços

não vale pois $(0, \beta) + (\alpha, 0) = (\alpha, \beta)$.