Axiomas da Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria: [Wikipédia] - Como usar Wikipédia.

Nascido ~ 330 a.C. em Síria? Grécia?

Foi para Alexandria (Egito).

É reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da geometria plana.

Escreveu os "Elementos" [cópia no Tidia-ae.usp.br]

Euclides assumiu 5 postulados (o que se considera como ponto de partida, sem necessidade de demonstração). Acontece que os postulados de Euclides não são completos.

David Hilbert (1862 - 1943, Alemanha)

Apresentou um novo conjunto de axiomas para geometria [cópia no Tidia]

Definir o ponto

A geometria é baseada no seguinte esquema:

Conceitos primitivos ou termos indefinidos → Axiomas/Postulados → Termos definidos Afirmações com demonstrações

Conceitos primitivos ou termos indefinidos ⇓

- Ponto
- Reta
- Plano
- Pertence a
- Entre
- Congruente

Axiomas/Postulados ⇓

Um conjunto simples, completo e independente de postulados

Termos definidos / Afirmações com demonstrações ⇓

- Definição
- Lema
- Proposição
- Teorema
- Corolário

Hilbert organizou os axiomas em cinco grupos

I: Axiomas de incidência (1-7)
II: Axiomas de ordem (1-5)
III Axioma das paralelas (axioma de Euclides)
IV Axiomas de congruência (1-6)
V Axioma de Continuidade (axioma de Archimedes)

Vamos ver alguns desses axiomas.

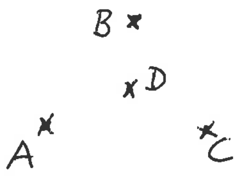
> <u>Axioma I1</u>. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

<u>Proposição</u> : Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.

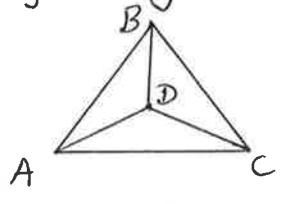
<u>Demonstração</u>:
Suponha que elas se intersectam em dois pontos P_1 e P_2.
Então existem pelo menos duas retas distintas por P_1 e P_2, o que contradiz o Axioma I1. ▨

<u>Exemplos</u> Normalmente pensamos em pontos e retas como objetos da geometria planal. Mas podemos construir outros modelos.

1. Seja $\mathcal{P}=\{A,B,C,D\}$ "o nosso plano" com quatro pontos, e
$\mathcal{L}=\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ o conjunto das "retas" em $\mathcal{P}$.



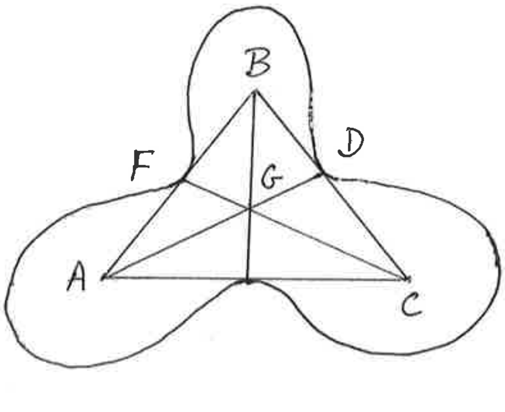
$\mathcal{P}$



$\mathcal{L}$

O conjunto $\mathcal{P}$, com as retas $\mathcal{L}$, satisfaz Axioma I1.

2. $\mathcal{P}=\{A,B,C,D,E,F,G\}$, $\mathcal{L}=\{AFB, BDE, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$.



<u>Definição</u>: Dizemos que um conjunto de pontos é <u>colinear</u> (ou que seus pontos são colineares) se existe uma reta que contém o conjunto.

<u>Axioma I4</u> Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.

<u>Axioma I5</u> Se dois pontos distintos pertencem a um plano $\mathcal{P}$ então a única reta que os contém pertence a $\mathcal{P}$.

<u>Axioma I7</u> Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço

<u>Proposição</u> Seja l uma reta e P um ponto que não pertence a l, $P \notin l$. Então existe um plano único que contém P e l.

<u>Demonstração</u>: Pelo Axioma I7, existem pelo menos dois pontos distintos Q e R em l. Os pontos P, Q, R não são colineares, pois $P \notin l$. Logo, pelo Axioma I4, existe um plano único que contém P, Q, R. Este plano contém a reta l pelo Axioma I5. ▨

<u>Definição</u> Duas retas são <u>coplanares</u> se existe um plano que as contém. Elas são <u>paralelas</u> se elas são coplanares e não se intersectam.

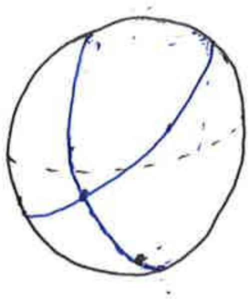
O famoso controverso Postulado 5 de Euclides:

<u>Axioma das paralelas</u>: Seja l uma reta, P um ponto com $P \notin l$ e $\mathcal{P}$ o único plano que os contém. Existe uma única reta em $\mathcal{P}$ que contém P e que é paralela a reta l.

Matemáticos tentaram por muito tempo mostrar que o Axioma das paralelas pode ser descartado e deduzido a partir dos outros axiomas. Bolyai e Lobachevsky mostram que, ao remover o Axioma das paralelas, construímos outras geometrias (não Euclideana):

Geometria esférica

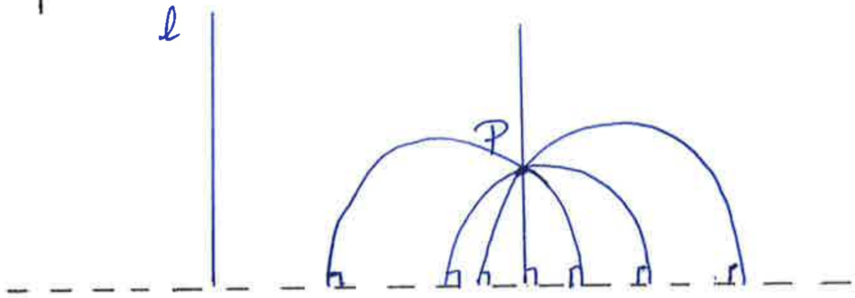
No plano Euclideano, o segmento da reta AB é o caminho mais curto que liga os pontos A e B.



Na esfera, um segmento "da reta" é um segmento das circunferências de maior raio.

Quaisquer duas circunferências de maior raio se intersectam em dois pontos: Não existem "retas" paralelas na esfera.

Geometria hiperbólica



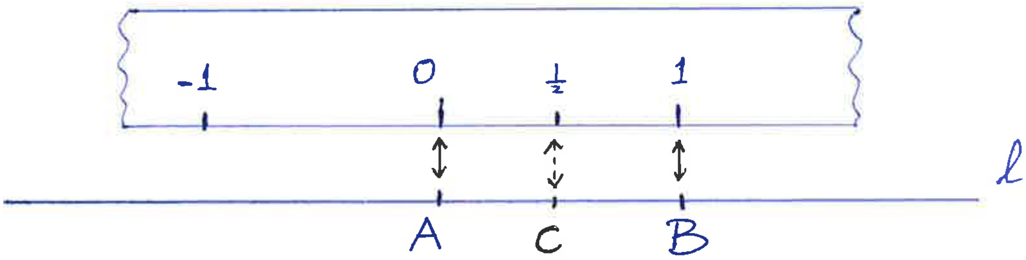
Consider um semi plano onde as "retas" são as semi-retas verticais e os semi-círculos com centros na fronteira do semi-plano. Existe um número infinito de retas passando por $P \notin l$ que são paralelas a l.

Proposição Sejam l_1, l_2, l_3 três retas coplanares. Se l_1 é paralela a l_2 e l_2 é paralela a l_3, então l_1 é paralela a l_3.

Demonstração: Suponha que l_1 não é paralela a l_3. Como elas são coplanares elas se intersectam em um ponto P. Então por P passam duas retas paralelas a l_2 (as retas l_1 e l_3) o que contradiz o Axioma das paralelas ∎

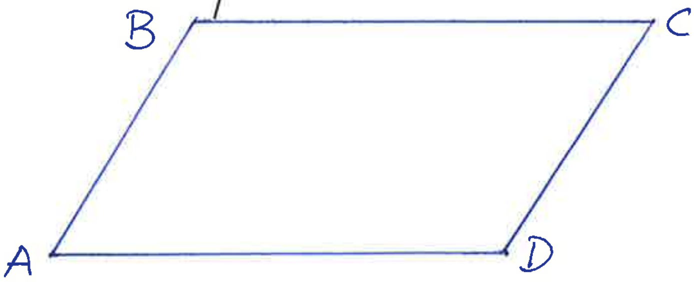
Hilbert mostrou que podemos construir a geometria Euclideana sem fazer uso dos números reais (Axioma de Continuidade). Mas pode ser mostrado que usando os números reais obtemos a mesma geometria.

> **Axioma (de Continuidade)** Sejam A e B dois pontos distintos e l a única reta que os contém. Então existe uma régua sobre l tal que A corresponde ao número 0 e B ao número 1.



Isto significa que podemos identificar a reta (infinita) com os números reais. Assim, podemos definir o ponto médio de AB como o ponto C que corresponde ao número $\frac{1}{2}$.

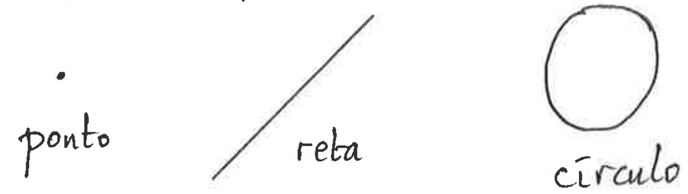
Definição Dizemos que quatro pontos A, B, C, D formam um paralelogramo se as retas AB e DC são paralelas e também as retas BC e AD são paralelas.



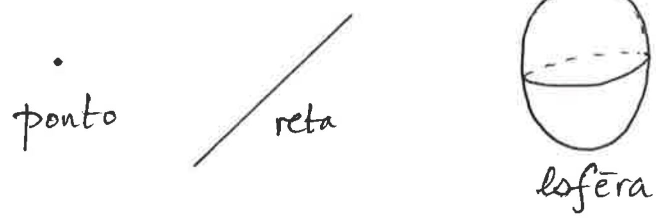
Geometria Analítica

Vamos considerar objetos simples

No plano:

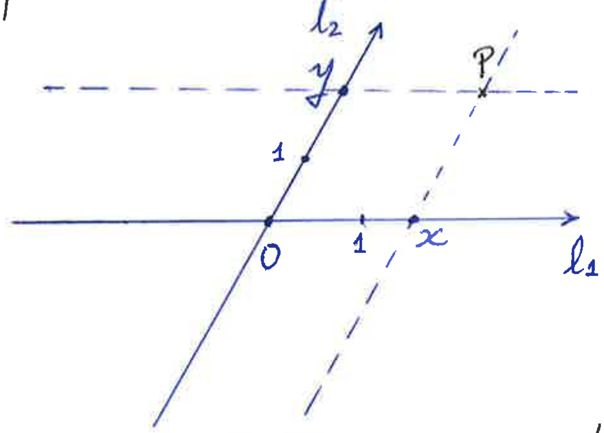


No espaço



Vimos que podemos identificar os pontos de uma reta com o conjunto dos número reais.

Consider um plano (Euclideano) $\mathcal{P}$ e duas retas ℓ_1 e ℓ_2 não paralelas em $\mathcal{P}$.



As retas ℓ_1 e ℓ_2 se intersectam em um ponto único O.

Seja P um ponto do plano. Por P passa uma reta única paralela a ℓ_1. Esta reta não é paralela a ℓ_2 (última Proposição), então ela intersecta ℓ_2 em um único ponto que corresponde a um único número real y.
Da mesma maneira, existe uma única reta por P paralela a ℓ_2 que intersecta ℓ_1 em um único ponto correspondente a um número real x.
O ponto P é completamente identificado pelo par (x,y).
Logo, o plano $\mathcal{P}$ pode ser identificado com o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos aproveitar as operações algébricas dos números reais para fazer contas sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta pode ser representada por uma equação algébrica: é o conjunto dos pontos $P=(x,y)$ com x,y satisfazendo uma relação linear do tipo

$$y=ax+b \quad , \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

A geometria analítica é o estudo de objetos geométricos no plano ou espaço Euclideano usando álgebra.

Nos vamos estudar

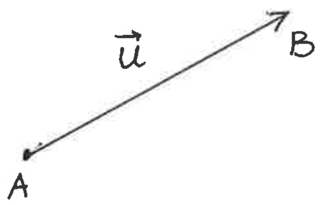
- Vetores
- Retas e planos
- cônicas
- Superfícies quádricas.

Ver Tidia para ementa detalhada.

Vetores

Representação da força do vento

Um *vetor* no espaço é um segmento orientado da reta: é uma *direção* com *intensidade* (módulo) e *sentido* (orientação).



Um segmento da reta é representado por dois pontos A e B do espaço:

A é a *origem*,

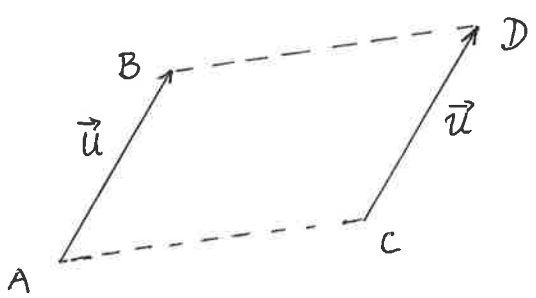
B é a *extremidade*.

Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor com sentido indo de A para B e com módulo o comprimento do segmento AB.

Observe que $\overrightarrow{BA}$ possui sentido contrário de $\overrightarrow{AB}$, portanto representa um vetor distinto de $\overrightarrow{AB}$. O vetor $\overrightarrow{BA}$ é o *oposto* de $\overrightarrow{AB}$.

Como vimos na representação da força do vento, um vetor é *livre* e pode ser representado por varios pares de pontos no espaço.

Definição: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor se ABDC é um paralelogramo.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Observação: um vetor é *livre*; isto é, não depende da escolha dos pontos A e B que o representam.

Definição: A norma ou o módulo de um vetor $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer de um de seus representantes.

Notação: $\|\vec{u}\|$

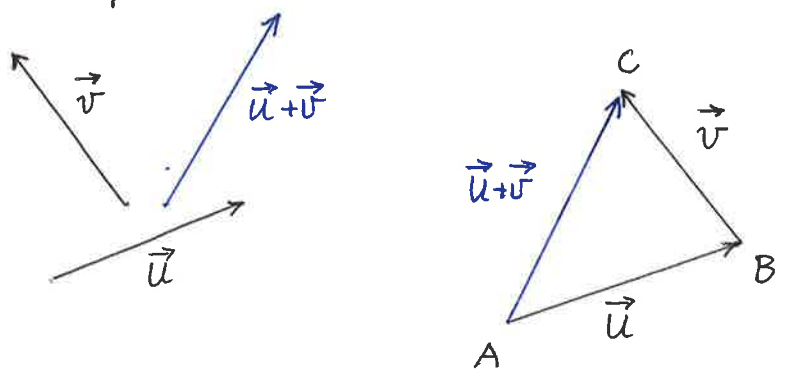
O vetor nulo é o vetor representado por $\overrightarrow{AA}$ para qualquer ponto A do espaço. Notação: $\vec{0}$.

Denotamos o conjunto de todos os vetores no espaço por V^3, e o conjunto de todos os vetores em um plano por V^2.

Vamos definir algumas operações em V^3 (valem também em V^2).

Adição de dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, com $\vec{u}$ representado por $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ representado por $\overrightarrow{BC}$.



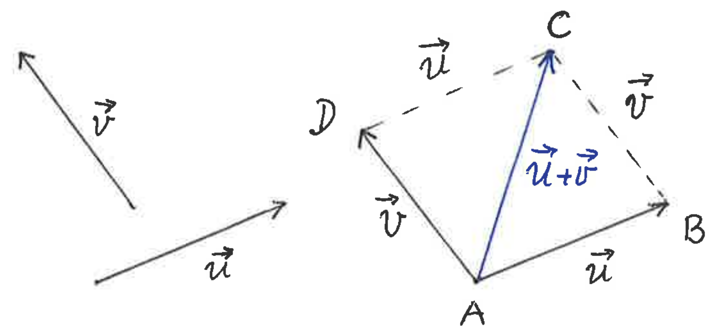
"fechar o triângulo"

O vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Observe que na escolha da representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a extremidade de $\vec{u}$ é a origem de $\vec{v}$.

Observe também que usamos o mesmo símbolo "+" da soma de números para representar a soma de dois vetores.



Podemos representar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

Usando a regra do paralelogramo, temos que

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Proposição (Propriedades da adição de vetores)

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores quaisquer em V^3. Então,

A1: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (Associativa)

A2: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (comutativa)

A3: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ (Elemento neutro)

A4: Para cada vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que (Elemento oposto)

$$\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$$

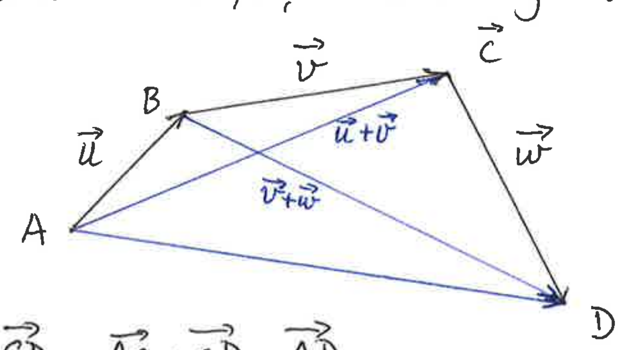
Demonstração

A1). Escolhamos representantes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como seguinte:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.



Então,

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Portanto $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Exercício: completar a demonstração da proposição. $\boxtimes$

Observação: A adição de vetores tem as mesmas propriedades da adição de números reais. É por isso que usamos o símbolo "+" para representar esta operação.

[Na álgebra, V^3 munido da adição "+", ou seja $(V^3, +)$, vira um grupo abeliano ou um grupo comutativo.]

Exercícios 1. Prove que $\overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC}$.

2. Prove que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \implies \vec{x} = \vec{y}$.

Multiplicação por escalar

Definição: Sejam α um número real (um escalar) e $\vec{u}$ um vetor.

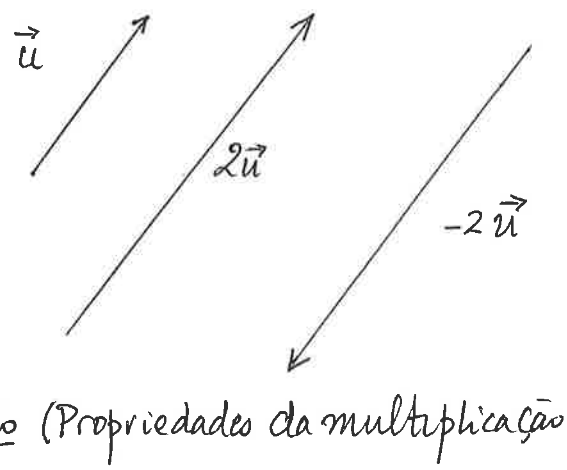
(1). Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$

(2). Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ carateriza-se por

(a) $\alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$

(b) $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido se $\alpha > 0$ e de sentido contrário se $\alpha < 0$.

(c) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\|$



Proposição (Propriedades da multiplicação por escalar)

Quaisquer que sejam os números reais α e β, e quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, valem as seguintes igualdades:

M1: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (Distributividade)

M2: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ (Distributividade)

M3: $1\vec{u} = \vec{u}$ (Elt neutro)

M4: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$ (Associatividade)

<u>Observação</u> $(V^3, +, \cdot)$ é um exemplo de um espaço vetorial real, um conceito que vocês vão encontrar na disciplina Álgebra Linear.

<u>Exercícios</u>

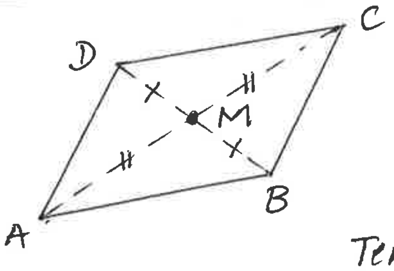
1. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w}$.
2. Resolva o seguinte sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Aplicações geométricas

1. <u>Proposição</u>: As diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

<u>Demonstração</u>:



Seja M o ponto médio da diagonal AC, ou seja, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$.

Precisamos mostrar que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$.

Temos:

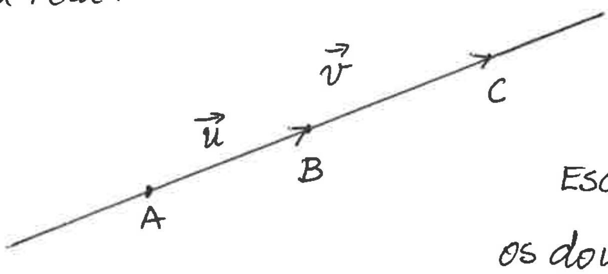
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\
&= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} && \text{(pois M é pt médio de AC)} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} && \text{(adição é comutativa)} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} && \text{(ABCD é um paralelogramo)} \\
&= \overrightarrow{MD} && \blacksquare
\end{aligned}$$

2. Veja Exercício 8 da Lista 1.

Dependência Linear

1. Caso de dois vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tem a mesma direção. Portanto, eles podem ser representados por pares de pontos de uma mesma reta:



$\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$

Escolhamos a mesma origem para os dois vetores.

Observe que o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor:
$\vec{u} = \vec{AA}$, $\vec{v} = \vec{AC}$; os pontos A, A, C pertence a uma reta.

Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$.

Temos $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ou $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ou seja
$$\|\vec{v}\|\,\vec{u} - \|\vec{u}\|\,\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{v}\|\,\vec{u} + \|\vec{u}\|\,\vec{v} = 0 .$$

Portanto, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, existem escalares α, β, não ambos nulos, tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}} \quad (1)$$

Esta Caracterização inclui o caso onde um (ou ambos) dos vetores é nulo.

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ para alguns escalares com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

Suponha (sem perda de generalidade) que $\alpha \neq 0$. Então

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v},$$

ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Portanto,

<u>Proposição</u>: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Observe que usando a proposição acima, dois vetores não são paralelos se e somente se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$.

A equação (1) nos disse que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ <u>dependem</u> um de outro, por isso que dizemos que dois vetores paralelos são (<u>linearmente</u>) <u>dependentes</u>. Caso contrário, eles são (<u>linearmente</u>) <u>independentes</u>.

Vamos obter conceitos análogos para três vetores.

2. Caso de três vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad e \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

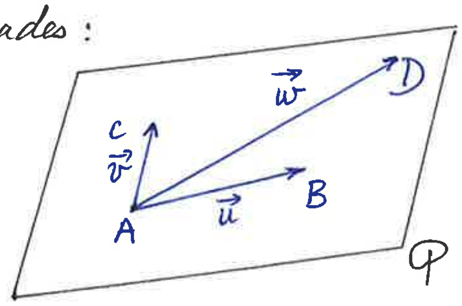
Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

Então A, B, C determinam um plano único $\mathcal{P}$ (Axioma I4).

Agora, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D do espaço.

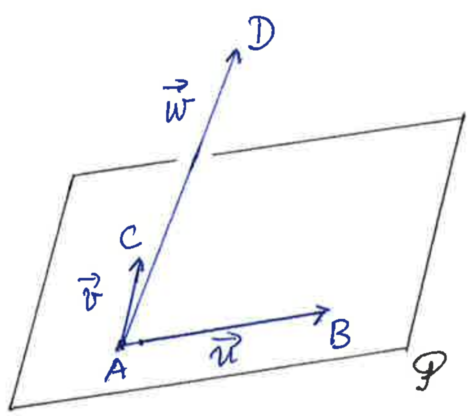
Temos duas possibilidades:

<u>Caso (i)</u>: $D \in \mathcal{P}$



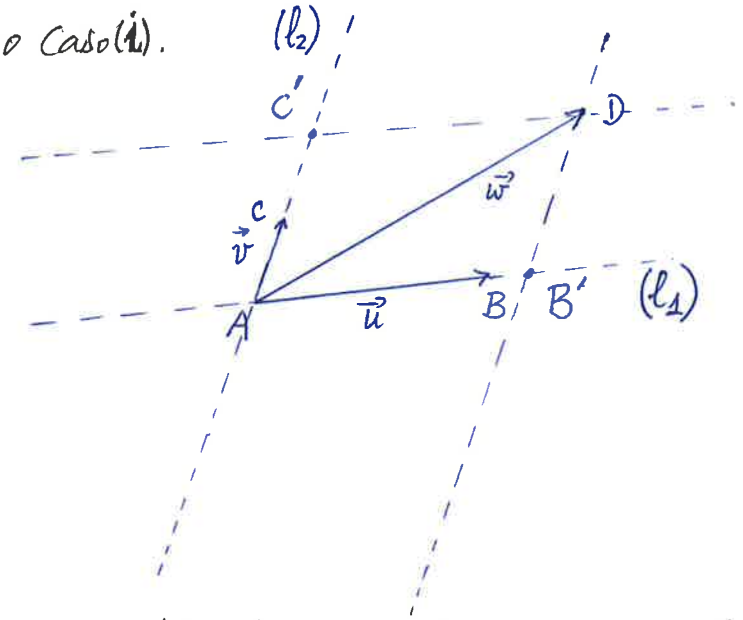
Neste caso, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ <u>são paralelos ao mesmo plano</u>.

<u>Caso (ii)</u> $D \notin \mathcal{P}$



Queremos um critério algébrico para caracterizar os dois casos.

Considere o Caso (1).



Seja l_1 a reta (única) que contem os pontos A e B e Seja l_2 a reta (única) que contem os pontos A e C.

Por D passa uma reta única paralela a l_2. Esta reta intersecta a reta l_1 em um ponto B'. Da mesma maneira, a unica reta por D paralela a l_1 intersecta l_2 em um ponto C'. O polígono $AB'DC'$ é um paralelogramo, portanto $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$.

Mas $\overrightarrow{AB'} \parallel \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC'} \parallel \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Logo,

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta.$$

Equivalentemente,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \qquad (\text{com } \gamma = -1 \text{ em nosso caso}).$$

Começamos com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas podemos ter começado com $\vec{u}$ e $\vec{w}$ ou $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escrever $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}$) em função de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (resp. $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Colocando todos estes caso juntos, mostramos que se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano, então existem escalares α, β, γ <u>não todos nulos</u> tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.} \qquad (2)$$

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ com α, β, γ não todos nulos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma\neq 0$.

Logo $\vec{w}=-\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{u}-\dfrac{\beta}{\gamma}\vec{v}$

Isto implica que os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ podem ser representados por pares de pontos de um mesmo plano.

Acabamos de provar a seguinte proposição.

<u>Proposição</u> Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano se, e somente se, existem escalares α, β, γ não todos nulos, tal que

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}.$$

<u>Observações</u>

1. Segue da proposição que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ não são paralelos ao mesmo plano (caso(ii), p14) se, e somente se,
$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \implies \alpha=\beta=\gamma=0.$$
2. A proposição acima inclui o caso onde dois (ou todo) dos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos. (Exercício.)

Vamos definir os conceitos que acabamos de usar.

<u>Definição</u>: Se $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$, dizemos que $\vec{x}$ é <u>combinação linear</u> de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, ou $\vec{x}$ é <u>gerado</u> por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Os escalares α, β, γ são chamados dos <u>coeficientes</u> da combinação linear.

Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são <u>linearmente dependentes</u> (LD) se
$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \text{ para alguns escalares } \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos.}$$

Se $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \implies \alpha=\beta=\gamma=0$, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são <u>linearmente independentes</u> (LI).

Observações

1. Os conceitos de LI e LD valem para qualquer número de vetores.
2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ é o vetor nulo $\vec{0}$, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são LD.
3. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos

   Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos a um mesmo plano

   $\Leftrightarrow$ um deles é combinação linear dos outro dois.

Exemplo Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, com

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$$
$$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$
$$\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

são LD.

Solução Precisamos procurar escalares α, β, γ, não todos nulos, do modo que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Temos $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha + 2\beta)\vec{u} + (2\alpha - 3\beta + 7\gamma)\vec{v} + (-\alpha + \beta - 3\gamma)\vec{w}$

Então, basta procurar α, β, γ satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha - 3\beta + 7\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

Temos um sistema linear de 3 equações com 3 incógnitas α, β, γ.

Equação (1) implica $\alpha = -2\beta$. Substituindo em (2) e (3) obtemos

$$\begin{cases} -7\beta + 7\gamma = 0 \\ +3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = -2\gamma$$

Logo, $-2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Esta equação é equivalente a $\gamma(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow -2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Achamos uma combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que da o vetor $\vec{0}$,

com coeficientes não nulos. Portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são LD.
(Podemos também usar o método de escalonamento de sistemas Lineares para resolver o sistema de equações (1)–(3).) ▨

Proposição: Se três vetores são LI, então qualquer dois deles são LI.

Demonstração Suponha, por absurdo, que dois deles $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, e denote por $\vec{w}$ o terceiro vetor. Então existem α, β, não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Portanto,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma = 0, \text{ não todo nulos.}$$

Ou seja $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD, o que contradiz a hipótese da proposição ▨

Observação

A recíproca da proposição anterior não vale. (Exercício)

Exemplo Prove que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LI $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

Solução Temos $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) + \beta(\vec{u}+\vec{w}) + \gamma(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$

$$\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\vec{u} + (\alpha+\gamma)\vec{v} + (\beta+\gamma)\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

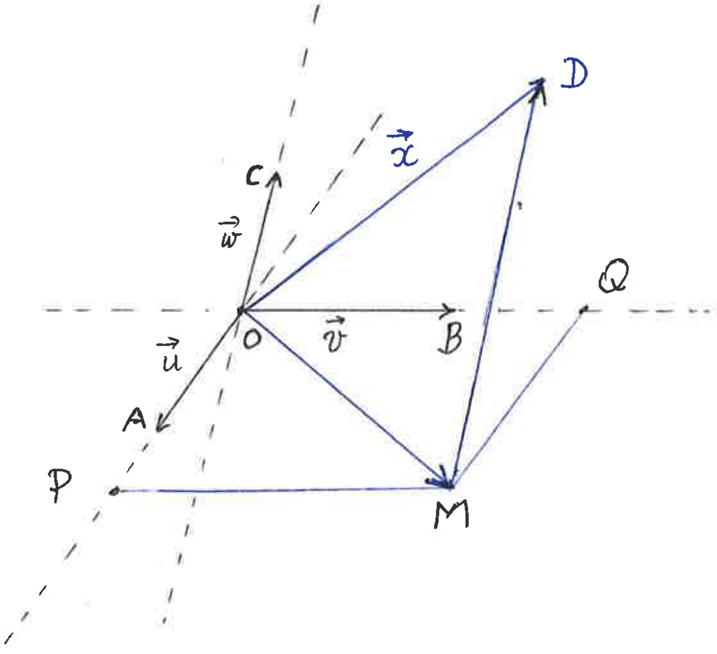
Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, $(*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

Portanto, $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

Proposição Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI em V^3, então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração Representamos os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ como seguinte

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD}$$



Sejam:

M: o ponto de interseção da reta por D e paralela a $\vec{w}$ com o plano $\mathcal{P}$ que contem os pontos O, A, B.

Q: o ponto da interseção da reta por M e paralela a $\vec{u}$ com a reta que contem O e B

P: o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{v}$ com a reta que contem O e A

Temos: $\vec{x} = \overrightarrow{OD}$
$= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}$
$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MD}$
$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ para alguns escalares α, β, γ.

Portanto $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Suponha que

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$

Então $(\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} + (\gamma - \gamma')\vec{w} = \vec{0}$.

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, temos $\begin{cases} \alpha' - \alpha = 0 \\ \beta' - \beta = 0 \\ \gamma' - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{matrix}$,

ou seja, a combinação linear é única. ▨

<u>Observação</u>

Como a combinação linear na proposição anterior é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, w) de números reais.

Base

Definição Uma tripla ordenada $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de vetores LI chama-se de base de V^3.

Vimos que qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, ou seja

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$$

e os escalares x_1,x_2,x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.

Chamamos $(x_1,x_2,x_3)_E\in\mathbb{R}^3$ das coordenadas do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)_E$.

Vamos interpretar os conceitos que vimos até agora sobre vetores usando suas coordenadas.

Propriedades

(a) $(x_1,x_2,x_3)_E+(y_1,y_2,y_3)_E=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)_E$

(As coordenadas da soma de vetores são as somas das coordenadas dos vetores.)

(b) $\alpha(x_1,x_2,x_3)_E=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)_E$

(As coordenadas de um vetor multiplicado por um escalar são a multiplicação das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar.)

Demonstração

(a) $$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)_E+(y_1,y_2,y_3)_E&=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3+y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3\\&=(x_1+y_1)\vec{e}_1+(x_2+y_2)\vec{e}_2+(x_3+y_3)\vec{e}_3\\&=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)_E\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\alpha(x_1,x_2,x_3)&=\alpha(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)\\&=\alpha x_1\vec{e}_1+\alpha x_2\vec{e}_2+\alpha x_3\vec{e}_3\\&=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)_E\end{aligned}$$ ▨

Dependência linear de dois vetores usando coordenadas:

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$

$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existem x, y não ambos nulos tal que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$.

Usando a proposição anterior

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (xa_1 + ya_2, xb_1 + yb_2, xc_1 + yc_2)_E = (0,0,0)_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa_1 + ya_2 = 0 \\ xb_1 + yb_2 = 0 \\ xc_1 + yc_2 = 0 \end{cases} \quad \text{com } x, y \text{ não ambos nulos}$$

Considerando duas equações de cada vez, obtemos o seguinte resultado.

Proposição Dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso contrário, eles são LI.

Exemplos 1. Verifique se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0,1,0)_E$, $\vec{v} = (1,0,1)_E$

(b) $\vec{u} = (1,-3,14)_E$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)_E$

2. Determine m e n de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LD, sendo

$\vec{u} = (1, m, n+1)_E$

$\vec{v} = (m, n, 10)_E$

Dependência linear de três vetores usando coordenadas

Proposição

Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{array}{c} \vec{u} \to \\ \vec{v} \to \\ \vec{w} \to \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Caso contrário, eles são LI.

Demonstração

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD se, e somente se, existem x, y, z não todos nulos tal que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Temos $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = (xa_1 + ya_2 + za_3,\ xb_1 + yb_2 + zb_3,\ xc_1 + yc_2 + zc_3)_E$
$= (0, 0, 0)_E$

Então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} xa_1 + ya_2 + za_3 = 0 \\ xb_1 + yb_2 + zb_3 = 0 \\ xc_1 + yc_2 + zc_3 = 0 \end{cases}$$

possui uma solução $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\blacksquare$

Exemplos

1. Verifique se $\vec{u} = (1,-1,2)_E$, $\vec{v} = (-3,4,1)_E$, $\vec{w} = (1,0,9)_E$ são LI ou LD.

2. Calcule m para que os vetores
$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$$
$$\vec{v} = (1, 2, m)_E$$
$$\vec{w} = (1,1,1)_E$$
sejam LD.

3. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base de V^3 e que
$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$
(a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3.
(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)_E$ na base F.

Alguns pontos importantes

* Em V^3, uma base é formada por 3 vetores LI. (As bases não são únicas!)
* A importancia de ter uma base é que qualquer vetor em V^3 pode ser representado de uma maneira única com uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.
* Todas as propriedades sobre vetores podem ser enunciadas usando coordenadas.
* As operações sobre vetores podem ser feitas usando coordenadas que é mais fácil e mais prático (especialmente se queremos usar um computador).

Mudança de base

Sabemos que V^3 não possui uma única base.

Dadas duas bases $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ e $F=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ de V^3, um vetor $\vec{v}$ de V^3 têm coordenadas $(x_1,x_2,x_3)_E$ na base E e coordenadas $(y_1,y_2,y_3)_F$ na base F.

Qual é a relação entre as duas coordenadas?

Responder a esta pergunta é objetivo da aula de hoje.

Como E é uma base e $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são vetores de V^3, eles tem coordenadas na base E, ou sejam existem escalares a_{ij} tal que

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

a_{ij}

O coeficiente de $\vec{e}_i$

índice de $\vec{f}_j$

Logo $\vec{v} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3$

$$= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3$$

$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Pela unicidade das coordenadas, temos

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

Escrevendo as equações na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F .$$

A matriz

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

chama-se de matriz de mudança de base E para base F.

A primeira coluna da matriz M_{EF} é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{f_1}$ na base E, a segunda coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_2}$ na base E e a terceira coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_3}$ na base E.

Escrevemos

$$(\quad)_E = M_{EF} (\quad)_F$$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (F é uma base), sabemos que o determinante da matriz M_{EF} não é nulo. Portanto M_{EF} possui uma matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$:

$$M_{EF} \cdot (M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1} \cdot M_{EF} = I_d$$

onde

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade

Exemplos 1. Mostre que $M_{EE} = I_d$.

2. Determine a, b, c sabendo que $(1,1,2)_E = (2,1,0)_F$ e $M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$

3. Escreva a matriz de mudança da base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ para base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ sabendo que

$\vec{f_1} = (-3,1,1)_E$, $\vec{f_2} = (1,-2,1)_E$, $\vec{f_3} = (1,2,0)_E$.

Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4,1,-1)_F$ na base E?

Proposição Sejam E, F, G três bases de V^3. Então
$$M_{EF} \cdot M_{FG} = M_{EG}.$$
Demonstração Exercício.

Corolário: $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$

Demonstração: Temos
$$M_{FE} \cdot M_{EF} = M_{FF} = Id$$
$$M_{EF} \cdot M_{FE} = M_{EE} = Id$$
Portanto M_{FE} é a matriz inversa de M_{EF}. ▨

Exercício Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v}-\vec{u}, \vec{u}-\vec{w}, \vec{u})$.

1. Mostre que F é uma base de V^3.
2. Calcule as coordenadas de $\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ na base F.

Solução: 1) Sejam $\vec{f_1} = \vec{v}-\vec{u}$, $\vec{f_2} = \vec{u}-\vec{w}$, $\vec{f_3} = \vec{u}$. Temos
$$\vec{f_1} = (-1, 1, 0)_E,$$
$$\vec{f_2} = (1, 0, -1)_E,$$
$$\vec{f_3} = (1, 0, 0)_E.$$
Como
$$\begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$
os vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (Proposição na página 22).

Portanto $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.

2). O vetor $\vec{x} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ tem coordenadas $(1,2,3)_E$. Sejam $(x,y,z)_F$ suas coordenadas na base F.

Temos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = M_{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E$. Precisamos achar a matriz de mudança da base F para base E. Para isso, precisamos das coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ da base E na base F.

Temos

$$\vec{f}_1 = \vec{v} - \vec{u} \quad (1)$$
$$\vec{f}_2 = \vec{u} - \vec{w} \quad (2)$$
$$\vec{f}_3 = \vec{u} \quad (3)$$

$(3) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{f}_3$. Substituindo em (1) e (2) obtemos

$$\vec{v} = \vec{f}_1 + \vec{f}_3,$$
$$\vec{w} = -\vec{f}_2 + \vec{f}_3.$$

Portanto, $\vec{u} = (0,0,1)_F$, $\vec{v} = (1,0,1)_F$, $\vec{w} = (0,-1,1)_F$ e

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

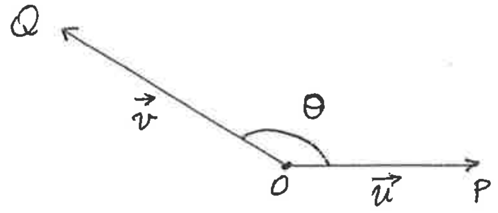
Daí, obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}_F .$$

Produto escalar

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos representados pelos pares de pontos O, P e O, Q respectivamente; isto é,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad e \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$, com O a mesma origem das duas representações.

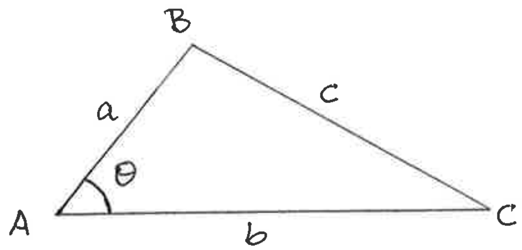


Definição: A <u>medida angular</u> entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $\widehat{POQ}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}).$$

<u>Observação</u> Temos duas escolhas para definir $\text{ang}(\vec{u},\vec{v})$: escolhamos $\theta = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$ de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$.

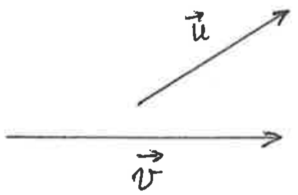
Lei do cosseno

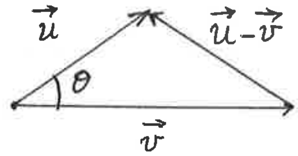


Seja ABC um triângulo como na figura acima, a o comprimento do segmento AB, b o comprimento do segmento AC, c o comprimento do segmento BC e θ o angulo formado pelos segmentos AB e AC.

Temos $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$ (Lei do cosseno)

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$





Pela Lei do cosseno, temos

$$\boxed{\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta}\ , \quad \theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$$

A Lei do Cosseno permite calcular $\cos\theta$ sabendo $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Definição O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é o número real tal que

(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta}.$$

Observações/propriedades

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Portanto, por (1) e (2), se temos um produto escalar bem definido podemos obter o ângulo θ e o módulo de vetores.

3. $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ ($\vec{u}\perp\vec{v}$) se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

4. Desigualdade de Schwarz: para $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquers, vale $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (Exercício)

Base ortonormal

Seja $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ uma base de V^3. Dizemos que E é uma base ortonormal se

(1) $\|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=\|\vec{e_3}\|=1$ (i.e., os vetores $\vec{e_i}$, $i=1,2,3$, são unitários).

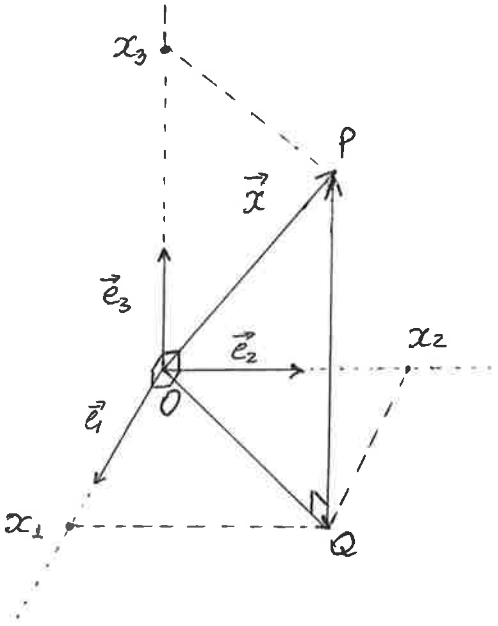
(2) $\text{ang}(\vec{e_1},\vec{e_2})=\text{ang}(\vec{e_1},\vec{e_3})=\text{ang}(\vec{e_2},\vec{e_3})=\frac{\pi}{2}$ (i.e., os vetores são dois a dois ortogonais).

Proposição

Seja $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3, $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)_E$ e $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)_E$. Então

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}$$

Demonstração



Seja $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)_E$.

Representamos $\vec{x}$ como na figura pelo vetor $\vec{OP}$.

Pelo Teorema de Pitagoras

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2&=\|\vec{OP}\|^2\\&=\|\vec{OQ}\|^2+\|\vec{QP}\|^2\\&=\|\vec{OQ}\|^2+\|x_3\vec{e_3}\|^2\\&=\|x_1\vec{e_1}\|^2+\|x_2\vec{e_2}\|^2+\|x_3\vec{e_3}\|^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2.\end{aligned}$$

Portanto $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Temos, por definição, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Pela Lei do cosseno,

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta.$$

Temos

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2$$
$$= a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2 - 2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$$
$$= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 - 2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2).$$

Portanto $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}$. ▨

Observacões

1. A formula na proposição anterior é válida somente quando a base E é uma base ortonormal.
2. A formula é válida em qualquer base ortonormal.

Exemplos/Exercícios

1. Seja $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3.
   e sejam $\vec{f_1}=\vec{e_1}$, $\vec{f_2}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $\vec{f_3}=\vec{e_3}$.
   (a) Mostre que $F=(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ é uma base de V^3.
   F é ortonormal?
   (b) Seja $\vec{u}=(1,0,0)_F$ e $\vec{v}=(0,1,0)_F$. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Seja E uma base ortonormal de V^3. Calcule $ang(\vec{u},\vec{v})$
   Sendo (i) $\vec{u}=(1,0,1)_E$, $\vec{v}=(-2,10,2)_E$.
   (ii) $\vec{u}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)_E$, $\vec{v}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})_E$.

3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u}=(2,3,-1)_E$ e a $\vec{v}=(2,-4,6)_E$, sendo E uma base ortonormal de V^3.

Proposição (Propriedades do produto escalar)

Qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ, valem as seguintes propriedades:

(a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(b) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(d) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Demonstração Usamos coordenadas dos vetores em relação a uma base ortonormal. (Vamos mostrar que tais bases existem.) $\square$

Exercício

Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. Prove que

(a) $\vec{w}$ não pertence a T.

(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T.

(c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores LI de T, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

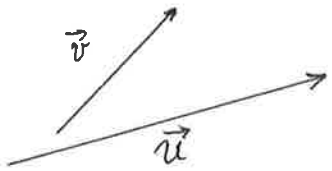
(d) Três vetores quaisquers de T são LD.

(e) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI de T, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

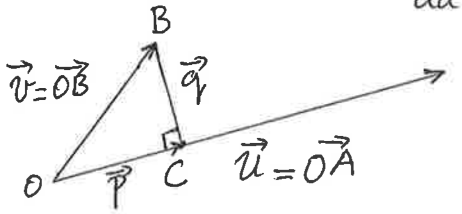
T é chamado plano ortogonal a $\vec{w}$.

Projeção ortogonal

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Vamos decompor o vetor $\vec{v}$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, com $\vec{p}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$ e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$.



Tal decomposição existe: Seja C o pé da perpendicular por B a reta OA



Então $\vec{p}=\vec{OC}$ e $\vec{q}=\vec{CB}$ satisfazem

$$\vec{p}+\vec{q}=\vec{v}, \quad \vec{p}\,/\!/\,\vec{u} \text{ e } \vec{q}\perp\vec{u}.$$

O vetor $\vec{p}$ é chamado <u>projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$</u> e é denotado por $\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

Vamos achar as expressões de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Existe um escalar α tal que $\vec{p}=\alpha\vec{u}$.

Temos $\vec{v}=\vec{p}+\vec{q}=\alpha\vec{u}+\vec{q}$

Logo $\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u}+\underbrace{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{q}}}_{=0}=\alpha\|\vec{u}\|^2.$

Daí $\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2},$

$$\boxed{\vec{p}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{q}=\vec{v}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$

<u>Proposição</u>: Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dada por

$$\vec{p}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \quad \text{e seu módulo é} \quad \|\vec{p}\|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo Seja E uma base ortonormal.

(1) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sendo
$\vec{v} = (1,-1,2)_E$, $\vec{u} = (3,-1,1)_E$.

(2) Decomponha $\vec{v} = (-1,-3,2)_E$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0,1,3)_E$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt

Vimos que é fácil calcular o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (e portanto de $\|\vec{u}\|$, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, $\text{ang}(\vec{u},\vec{v})$) quando as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são em relação a uma base ortonormal.

Suponha que $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ é uma base mas não é ortonormal. Como construir uma outra base ortonormal $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ a partir de E?

Observe que uma vez que temos B, podemos fazer uma mudança de base de E para B e trabalhar na base B.

Construição de B

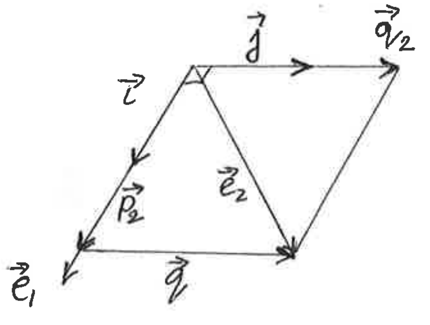
(1) Escolhamos $\vec{i}$ como o versor de $\vec{e_1}$:

$$\vec{i} = \frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}.$$

(2) Decompomos $\vec{e_2}$ em dois vetores $\vec{p_2}$ e $\vec{q_2}$, sendo $\vec{p_2} \parallel \vec{i}$ e $\vec{q_2} \perp \vec{i}$.

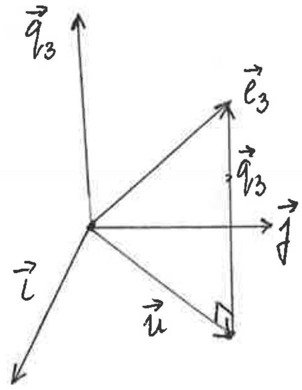
Sabemos que $\vec{p_2} = \dfrac{\vec{i}\cdot\vec{e_2}}{\|\vec{i}\|^2}\vec{i} = (\vec{i}\cdot\vec{e_2})\vec{i}$ pois $\|\vec{i}\| = 1$, e

$$\vec{q_2} = \vec{e_2} - (\vec{i}\cdot\vec{e_2})\vec{i}.$$



Observe que $\vec{q_2} \neq \vec{0}$ pois $\vec{e_2}$ e $\vec{i}$ são LI.

Escolhamos $\vec{j} = \dfrac{\vec{q_2}}{\|\vec{q_2}\|}$



Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{e}_3$ ao plano gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (também gerado por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$).

Temos

$$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \vec{u}$$ sendo $\vec{q}_3$ ortogonal a $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e $\vec{u}$ gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Temos $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$. Como $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$,

$$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \vec{e}_3 \cdot \vec{i} \\ \beta = \vec{e}_3 \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Portanto, $\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{e}_3 \cdot \vec{i})\vec{i} - (\vec{e}_3 \cdot \vec{j})\vec{j}$

Observe que $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois $\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}$ são LI.

Escolhamos $\vec{k} = \dfrac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}$.

A base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é ortonormal.

Observe que a matriz de mudança da base E para B tem a forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

, isto é, é uma matriz triangular superior.

Exemplos/Exercícios

1. Sejam, em relação a uma base ortonormal, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$ e $\vec{a} = (3,-2,-1)$.

Prove que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal e calcule as coordenadas de $\vec{a}$ nessa base.

Solução Temos $\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$, $\vec{v}\cdot\vec{v} = 1$, $\vec{w}\cdot\vec{w} = 1$,

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Logo $F=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal.

Para achar as coordenadas de $\vec{a}$ na base F, podemos usar a formula de mudança de base. Podemos também prosseguir da seguinte forma:

Temos $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Como $F=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é ortonormal

$\vec{a}\cdot\vec{u} = x$, $\vec{a}\cdot\vec{v} = y$, $\vec{a}\cdot\vec{w} = z$.

Portanto, $x = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$y = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$z = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Daí, $\vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}}\right)_F$

2. Descreva o conjunto solução da equação $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0$, sabendo que $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ é uma base ortonormal.

Solução Escrevemos $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Então

$$\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0 \iff (a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0$$

$$\iff (a,b,c)\cdot(1,1,-1) = 0$$

$$\underset{\text{(base ortonormal)}}{\iff} a+b-c = 0 \iff c = a+b.$$

Logo, $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + (a+b)\vec{k} = a(\vec{i}+\vec{k}) + b(\vec{j}+\vec{k})$, ou seja $\vec{x}$ é gerado por $\vec{i}+\vec{k}$ e $\vec{j}+\vec{k}$ e pertence ao plano ortogonal a $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Orientação de V^3

Sejam E e F duas bases de V^3. Dizemos que E é equivalente a F, e escrevemos $E \sim F$, se $\det(M_{EF}) > 0$.

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bases de V^3. A relação "$\sim$" entre os elementos de $\mathcal{B}$ é uma relação de equivalência, ou seja

(1) $\sim$ é reflexiva: $\forall E \in \mathcal{B}$, $E \sim E$.

(2) $\sim$ é simétrica: se $E \sim F$, então $F \sim E$.

(3) $\sim$ é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$.

Para provar (1)-(3) usamos o fato que $M_{EE} = Id$, $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$, e $M_{EG} = M_{EF} \cdot M_{FG}$.

A classe de equivalência de uma base E de V^3, denotada por $\overline{E}$, é o conjunto de todas as bases equivalentes a E, ou seja,

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \{F \in \mathcal{B} \text{ tal que } F \sim E\} \\ &= \{F \in \mathcal{B} \text{ tal que } \det(M_{EF}) > 0\}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ tem somente duas classes de equivalência.

Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e F a base de V^3 dada por $F = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.

Como
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{EF}) = -1, \text{ portanto } F \notin \overline{E}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}$. De fato, seja G uma base de V^3.

Se $\det(M_{EG}) > 0$, então $E \sim G$, ou seja $G \in \overline{E}$.

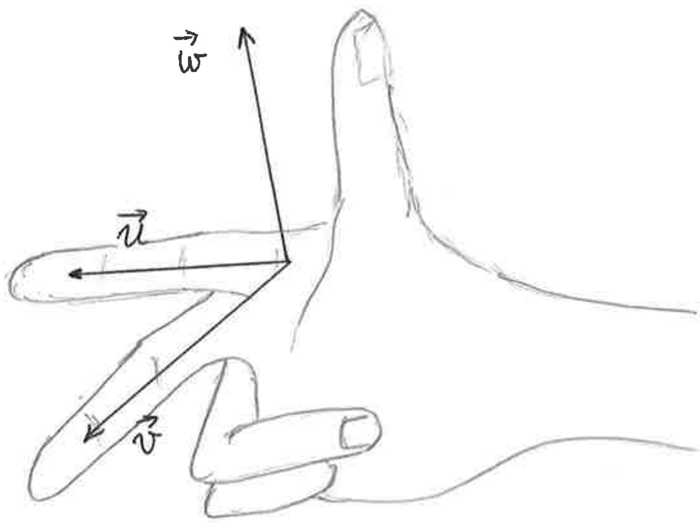
Se não, $\det(M_{EG}) < 0$. Temos $M_{FG} = M_{FE} \cdot M_{EG}$, portanto
$$\det M_{FG} = \underbrace{\det(M_{FE})}_{<0} \cdot \underbrace{\det(M_{EG})}_{<0} > 0,$$
e daí concluímos que $F \sim G$, ou seja $G \in \overline{F}$.

Isso mostra que $\mathcal{B} \subset \overline{E} \cup \overline{F}$. Como $\overline{E} \cup \overline{F} \subset \mathcal{B}$, temos $\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

Observe que $\overline{E} \cap \overline{F} = \phi$, pois $F \notin \overline{E}$.

Definição Cada classe de equivalência de $\mathcal{B}$ chama-se orientação de V^3. Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está orientado, e neste caso cada base da orientação escolhida é chamada base positiva, e cada base da outra orientação é chamada base negativa.

Convenção Uma base $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como na seguinte figura

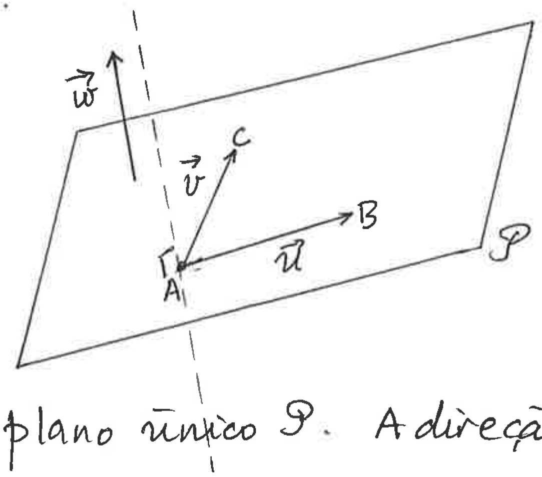


Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

Produto vetorial

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI. Existe um vetor não nulo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Se representamos
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
os pts A, B, C



pertencem a um plano único $\mathcal{P}$. A direção do vetor $\vec{w}$ é dada por uma reta perpendicular ao plano $\mathcal{P}$, portanto é única. Mas o sentido de $\vec{w}$ não é único. O módulo de $\vec{w}$ também não é único.

Queremos escolher de uma maneira única um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (quando eles são LI).

<u>Definição</u> O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tal que

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$, então

(b1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

(b2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva;

(b3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$.

<u>Observações</u>

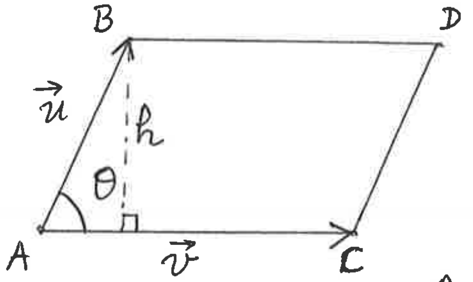
1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

2) (b1), (b2), (b3) determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$

3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| =$ area do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$\vec{u} = \vec{AB}$

$\vec{v} = \vec{AC}$



Area ABDC $= h \cdot \|\vec{v}\|$

Temos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{\|\vec{u}\|}$, portanto

$h = \|\vec{u}\| \operatorname{sen}\theta$ e

Area ABDC $= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

$= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

4) O produto vetorial de dois vetores é um vetor.
O produto escalar de dois vetores é um escalar.

Proposição Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva.
Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é o vetor dado pelo seguinte determinante (formal)

$$\begin{array}{rl} \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{vetores da base } B \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{v} \end{array} \end{array}$$

Demonstração

Vamos verificar que, de fato, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é dado pelo determinante acima.

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então o determinante é o vetor nulo.

(b) Temos $\vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

(b1) $\vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - b_1(a_1c_2 - a_2c_1) + c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$

$= 0$

Similarmente, $\vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Logo (b1) é satisfeita.

(b2) Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$.

$$\det M_{BE} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ b_1 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ c_1 & c_2 & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$$

pois estamos supondo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI.

Portanto E é uma base positiva

(b3) Vamos mostrar que

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\theta).$$

Temos

$$\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\left(1 - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}\right)$$

$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

$$= (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2) - (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$$

$$= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$$

$$- (a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_2c_1c_2 + 2b_1b_2c_1c_2)$$

$$= (b_1c_2-b_2c_1)^2 + (a_1c_2-a_2c_1)^2 + (a_1b_2-b_1a_2)^2$$

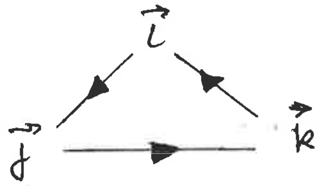
$$= \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2. \qquad \square$$

Exemplos Seja $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal positiva

1. Sejam $\vec{u}=(1,2,3)_B$, $\vec{v}=(-1,1,2)_B$.
   Calcule $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

2. Calcule $(2\vec{k}-\vec{i}+5\vec{j})\wedge(3\vec{i}-2\vec{k}+\vec{j})$.

3. Mostre que $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$,
   $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$.



Propriedades do produto vetorial

Proposição: Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ,

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Demonstração As afirmações decorrem das propriedades do determinante. ∎

Proposição Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

(a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}$.

Demonstração

(a) A igualdade é satisfeita se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI. Escolhamos uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j}$ é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então $\vec{u} = (a_1, 0, 0)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, 0)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$.

Temos $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_1 b_2)_B$, portanto,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B.$$

Do outro lado,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{w} = a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = a_1 a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = -(a_2 a_3 + b_2 b_3)(a_1, 0, 0)_B + a_1 a_3 (a_2, b_2, 0)_B$$

$$= (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B$$

$$= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}.$$

Para (b), temos

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = -(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}$$

$$\overset{\text{usando (a)}}{=} -\left(-(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}\right)$$

$$= (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}. \qquad \boxtimes$$

Corolário (Identidade de Jacobi)

$$\boxed{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} + (\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{0}}$$

qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração Aplique a proposição anterior.

Observação Em geral $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) \neq (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$, então é importante colocar parenteses para calcular o produto vetorial envolvendo três vetores.

Exemplo Seja B uma base ortonormal positiva,

$$\vec{u} = \left(1, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6, -2, 4)_B, \quad \vec{w} = \left(\tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}\right)_B.$$

Calcule $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ e $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

Proposição Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores L.I. Então

(a) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qualquer que seja o vetor $\vec{w}$.

(b) $F = (\vec{u}, (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ é uma base positiva de V^3.

Demonstração

(a) Pela proposição na página 42, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = -(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$, portanto, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, $\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ é ortogonal a $\vec{u}$. Logo $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e $\vec{u}$ são LI. Daí $G = (\vec{u}\wedge\vec{v}, \vec{u}, (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u})$ é uma base positiva de V^3. A matriz de mudança da base F para G é dada por

$$M_{FG} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(M_{FG}) = 1 > 0$, $F \sim G$, portanto F é positiva. ▨

<u>Corolário</u>

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI. Então $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ com

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \frac{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}}{\|(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

é uma base ortonormal positiva de V^3.

<u>Exemplos/exercícios</u>

Seja B uma base ortonormal positiva de V^3.

1. Calcule a area do paralelogramo ABCD sendo $\vec{AB} = (1,1,-1)_B$ e $\vec{AD} = (2,1,4)_B$.

2. Calcule a area do triângulo ABC sendo $\vec{AB} = (-1,1,0)_B$ e $\vec{AC} = (0,1,3)$.

3. Sejam $\vec{u} = (1,1,1)_B$ e $\vec{v} = (0,1,2)_B$. Obtenha uma base ortonormal positiva $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que
   (i) $\vec{a}$ e $\vec{u}$ sejam da mesma direção e sentido
   (ii) $\vec{b}$ seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

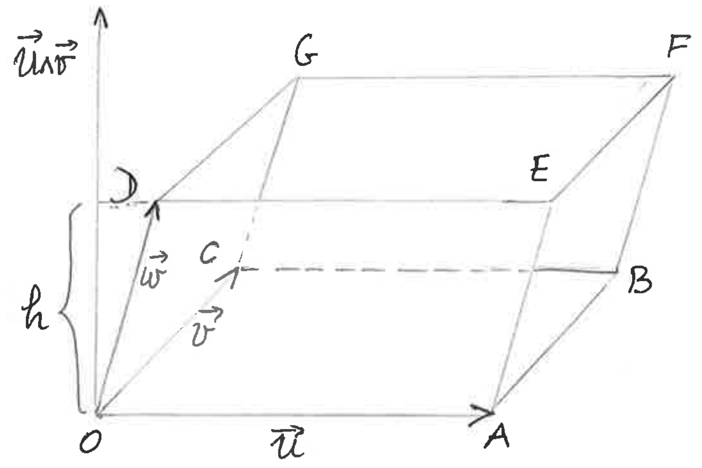
Produto misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores LI em V^3, representados por

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OC}$

$\vec{w} = \overrightarrow{OD}$



Considere o paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Denote por V o volume do paralelepípedo. Temos

$$V = \text{area } OABC \cdot h$$

Sabemos que area $OABC = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w}\| = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{u}\wedge\vec{v}|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

Portanto, $V = |\vec{w} \cdot \vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}\wedge\vec{v} \cdot \vec{w}|$

Definição O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nessa ordem, é o número real $\vec{u}\wedge\vec{v} \cdot \vec{w}$ indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\wedge\vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Proposição Seja B uma base ortonormal positiva. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$. Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração Para $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)_B$

Logo $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)\cdot (a_3, b_3, c_3)$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Corolário

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ São LD se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Proposição (Propriedades do produto misto)

(a) O produto misto é trilinear: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u_i}, \vec{v_i}, \vec{w_i} \in V^3$, $i = 1, 2$,

$$[\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}],$$
$$[\vec{u}, \alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}],$$
$$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w_1} + \beta\vec{w_2}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_1}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_2}].$$

(b) O produto misto é alternado: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$$
$$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$$

Demonstração Decorre das propriedades do determinante. $\blacksquare$

Exemplo Sendo $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$, Calcule $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.