Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 4 - Semana 14/9 – 18/9

Exercício 1. *Determine se as séries são convergentes ou divergentes.*

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Solução. Como $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, segue, do critério de Leibniz, que a série converge. $\square$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3n}$.

Solução. Assim como no item **b** do Exemplo **5**, note que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3n}$ não existe. Assim, pelo critério da divergência, a série diverge. $\square$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$.

Solução. Considere a sequência $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$, para $x \in [0, \infty)$. Sendo

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}(2x+1)^2} < 0 \text{ para } x > \frac{1}{2},$$

a função f é decrescente no intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$, portanto, a sequência $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, é decrescente. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0.$$

Portanto, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. $\square$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Solução. Denote $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Como $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$, podemos considerar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2^n}{2^{n+1}}}_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Usando o critério da razão, concluímos que a série converge. $\square$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n$.

Solução. Sendo $\sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n \geq 0$ para todo $n \geq 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^{1/n}}\frac{2n-1}{n+13} = 2 > 1,$$

pelo critério da raiz, a série é divergente. □

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi}$.

Solução. Sendo $\frac{\pi^n}{n^\pi} \geq 0$ para todo $n \geq 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{n^{\pi/n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{(n^{1/n})^\pi} = \frac{\pi}{1} = \pi > 1.$$

pelo critério da raiz, a série diverge. □

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Solução. Sendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

segue do critério da razão que série é convergente. □

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(2n)!}$.

Solução. Vamos aplicar o critério da razão. Para isto, façamos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(n+1)}{(2(n+1))!}}{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(2n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot(2n+2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sendo o limite menor do que 1, a série é convergente. □

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$.

Solução. Vamos tentar aplicar o **critério da raiz a esta série**:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$$

Considere agora a sequência $b_n \doteq \dfrac{3^n}{2^{n^2}}$. Apliquemos o **teste da raiz para sequências**, da **lista 2**. Como $\lim \sqrt[n]{|b_n|} = \lim \frac{3}{2^n} = 0 < 1$, pelo teste da rais para sequência, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}} \overset{\substack{\text{Teste da raiz}\\ \text{para sequências}}}{=} 0 < 1.$$

Agora o critério da raiz para séries nos diz que esta série converge. $\square$

Exercício 2. Para quais valores a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n n!}{n^n}$ é convergente?

Solução. Considere $a_n = \frac{|x|^n n!}{n^n}$ e note que $a_n = 0$ se $x = 0$ e para todo natural n, e $a_n \neq 0$ para todo $x \neq 0$ e para todo natural n.
Para $x = 0$, a série é convergente.
Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão. Para tanto, façamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{|x|^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} |x|(n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|x|}{e}.$$

O critério da razão nos diz que a série converge se $\frac{|x|}{e} < 1$, isto é, $|x| < e$, ou ainda, quando $x \in (-e, e)$, e a série diverge se $|x| > e$.
Para $|x| = e$, o limite é 1 e o critério não é conclusivo. Para estudar a convergência, repetindo o argumento acima para $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}.$$

Observando que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ é crescente e converge para e, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} > 1.$$

Sendo assim, $a_{n+1} > a_n$ para todo natural n, ou seja, a sequência a_n é crescente, portanto, $a_n \not\to 0$, pois $a_n > a_1 = e$ para todo natural n. Portanto, pelo critério da divergência, a série é divergente se $|x| = e$.
A conclusão é que a série é convergente somente para qualquer $x \in (-e, e)$.

$\square$