Exercícios - Cálculo IV - Aula 7 - Semana 5/10 - 9/10
Revisão: de Sequências Numéricas a Séries de Potências

A soma s de uma série convergente $\sum a_n$ é o limite da soma parcial $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ quando $n \to \infty$. No cálculo da soma de uma série alternada que satisfaz as condições do critério de Leibniz é possível estimar o erro quando aproximamos a soma s pela soma parcial s_n.

Teorema 1 *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ *para* $n > 0$, *uma série alternada satisfazendo as condições do critério de Leibniz. Então*

a) Existe $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = s$.

b) $|s_n - s| \leq a_{n+1}$, *onde* $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$.

Exemplo 1 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. *A série alternada satisfaz as condições do critério de Leibniz:* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ *e* $a_n = 1/n$ *é uma sequência decrescente. Procuremos um valor aproximado para sua soma* s, *com erro menor que* $0,2$. *Para isso basta buscar um índice* n_0 *tal que* $a_{n_0+1} < 0,2$ *e o valor procurado será* s_{n_0}. *Mas* $a_6 = \frac{1}{6} < 0,2$ *logo* $|s_5 - s| \leq a_6 < 0,2$ *Portanto*

$s \approx -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = -\frac{47}{60}.$

Exercício 1 *Determine um valor aproximado para a soma das séries alternadas abaixo com erro inferior à* $0,01$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1} - 1}$