Exercícios - Cálculo IV - Aula 4 - Semana 14/9-18/9

Critérios de Convergência para Séries de Termos Não Negativos (continuação)

Critérios	Conclusões	Comentários
Critério da Raiz Para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ com $a_n \geq 0$ para todo $n \geq N$, onde N é um natural fixo, seja $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.	Se $L < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.	Frequentemente usado para séries com termo geral a_n envolvendo potências n-ésimas.
	Se $L > 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.	
	Se $L = 1$, o critério inconclusivo.	
Critério da Razão Para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ com $a_n > 0$ para todo $n \geq N$, onde N é um natural fixo, seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.	Se $L < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.	Frequentemente usado para séries que envolvem fatoriais ou exponenciais.
	Se $L > 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.	
	Se $L = 1$, o critério inconclusivo.	

Critério de Convergência para Séries Alternadas

Critério	Conclusão	Comentário
Critério de Liebniz Para para séries alternadas $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$, onde $a_n > 0$ para todo natural n.	Se (a_n) é decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.	Aplica-se apenas a séries alternadas.

Exemplo 1. A série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left|\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right|}{n!}$$
é convergente. De fato,
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\left|\cos\frac{(2n+3)\pi}{4}\right|}{(n+1)!}}{\frac{n\left|\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right|}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{(n+1)!n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
Logo, pelo critério da razão, a série é convergente.

Exemplo 2. Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ é convergente?

Solução. Seja $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$.
Para $x = 0$, $a_n = 0$ para todo natural n; logo a série é convergente.
Para $x \neq 0$, $a_n > 0$ para todo natural n. Assim,
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$
para qualquer $x \neq 0$. Logo, pelo critério da razão, a série é convergente para qualquer $x \neq 0$. Juntando os dois casos, concluímos que a série é convergente para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3n)^n}{(4n^2+5)^n}$ é convergente ou divergente?

Solução. Seja $a_n = \frac{(n^2+3n)^n}{(4n^2+5)^n}$. Para qualquer natural n, $a_n > 0$ e
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+3n)^n}{(4n^2+5)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{4n^2+5} = \frac{1}{4}.$$
Como $L < 1$, pelo critério da raiz, a série converge.

Exemplo 4. Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ é convergente?

Solução. Seja $a_n = \frac{|x|^n}{n}$.
Para $x = 0$, $a_n = 0$ para todo natural n; logo a série é convergente.
Para $x \neq 0$, $a_n > 0$ para todo natural n. Assim,
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x|}{1} = |x|.$$
Pelo critério da raiz, a série convergente se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.
Se $|x| = 1$, a série é $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ é divergente.
Portanto, a série é convergente para qualquer que seja $x \in (-1, 1)$.

Exemplo 5. Para cada uma das seguintes séries alternadas, determine se a série converge ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

Solução.
a) Como $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^2} \to 0$ com $n \to \infty$, a série é convergente pelo critério de Leibniz.

b) Como $\frac{n}{n+1} \not\to 0$ com $n \to \infty$, não podemos aplicar o critério de Leibniz. Em vez disso, usamos o crtitério da divergência. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ não existe, a série diverge. Este exemplo mostra que o fato de uma série ser alternada não garante que ela seja convergente.

Exercício 1. Determine se as séries são convergentes ou divergentes.

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3n}$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$

$d)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{n+13}\right)^n$

$f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi}$

$g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(2n)!}$

$i)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$

Exercício 2. Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n n!}{n^n}$ é convergente?