SME 0121 Processos Estocásticos
ICMC-USP, Ricardo Ehlers
Lista 4

1. Uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ tem matriz de probabilidades de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

   Determine a distribuição limite.

2. Uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ tem matriz de probabilidades de transição,

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

   Qual a fração de tempo, no longo prazo, que o processo gasta no estado 1?

3. Quais dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ são transientes e quais são recorrentes na cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por,

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Determine as classes de comunicação e período para cada um dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ da cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

5. Uma matriz de transição P é dita ser duplamente estocástica se $\sum_i P_{ij} = 1, \ \forall j$. Seja uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica com estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ duplamente estocástica. Mostre que as probabilidades limite são dadas por,
$$\pi_j = \frac{1}{N+1}, \ j = 0, 1, \ldots, N$$

6. Uma partícula se move sobre um círculo em pontos marcados como 0, 1, 2, 3 e 4 (em sentido horário). A cada passo ela se move para a direita com probabilidade p ou para a esquerda com probabilidade $1-p$. Seja X_n a localização da partícula no círculo no passo n. Então $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov. Obtenha,
   (a) a matriz de transição da cadeia,
   (b) as probabilidades limite.

7. Uma empresa tem um número muito grande de empregados. Cada empregado tem um dentre 3 possíveis cargos e pode mudar de cargo de acordo com uma cadeia de Markov com as seguintes probabilidades de transição,
$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$
   Calcule a proporção de empregados da empresa em cada cargo.

8. Seja uma cadeia de Markov com estados $0, 1, 2, 3, 4$ com probabilidades de transição tais que: $P_{04} = 1$ e
$$P_{ij} = \frac{1}{i}, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \ \text{ e } j = 0, \ldots, i-1.$$
   Obtenha as probabilidades limite.

9. Prove que o passeio aleatório com espaço de estados $\mathbb{Z}$ não tem distribuição estacionária.

10. Exercícios do Cap. 4 de Sheldon Ross:
    17,18,19,20,22,23,24,25,28,29,30,31,33,34,35,38.