Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 6 - Semana 28/9 – 02/10

Exercício 1. *Determine o intervalo de convergência de cada uma das seguintes séries de potências:*

a $\sum \frac{n!}{100^n} x^n$.

b $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$

c $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

d $\sum \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

e $\sum \frac{x^{2n+1}}{(-3)^n}$

f $\sum \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$

g $\sum \frac{3^n}{n 4^n} x^n$

h $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} (x-3)^n$

i $\sum \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

j $\sum \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$

k $\sum \frac{n}{4^n} x^{2n}$

l $\sum \frac{x^n}{n^3+1}$

m $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n} 2^n} x^n$

n $\sum n^2 x^n$

o $\sum \frac{n^2}{2^{3n}} (x+2)^n$

Esboço. Passemos por cada item:

a Consideremos a sequência $a_n(x) = \frac{n!}{100^n} x^n$.

- Seja $x \neq 0$ então:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{100^{n+1}} . \frac{100^n}{n! x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)|x|}{100} = \infty$$

  Do critério da razão temos então que $\sum a_n(x)$ não converge para $x \neq 0$.

- Se $x = 0$ a série é trivialmente convergente.

Temos então convergência de $\sum a_n(x)$ apenas em $x = 0$.

b Consideremos a sequência $c_n = \frac{2^n}{n^2}$. Façamos este exercício calculando $R = \lim \frac{c_n}{c_{n+1}}$ o raio de convergência:

$$R = \lim_n \left| \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} \right| = \frac{1}{2}$$

Ou seja, temos convergência absoluta em $x =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, os casos fronteiriços são:

- Se $x = 1/2$, temos que $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2}$ que é a série harmônica, a qual converge.
- Se $x = -1/2$, temos a série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ que também é convergente. Como para $L > 1$ a série diverge, concluímos que o intervalo de convergência da série é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

c Consideremos a sequência $a_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$. Pelo teste da razão, temos:

$$\lim_n \left| \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} . \frac{\sqrt{n}}{(-1)^{n+1}x^n} \right| = \lim_n \left| (-1)x\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right| = |x|$$

Assim, temos que a série $\sum a_n(x)$ converge para $|x| < 1$.

- Para $x = 1$, temos a série convergente $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, pelo critério de Leibniz.
- Para $x = -1$, temos que $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{-1}{\sqrt{n}}$ que diverge[1].

Portanto, $\sum a_n(x)$ converge para $x \in]-1, 1]$.

d Consideremos a sequência $a_n(x) = \frac{(3n)!}{(2n)!}x^n$. Aplicando o critério da razão ao caso $|x| > 0$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n+3)!x^{n+1}}{(2n+2)!} . \frac{(2n)!}{(3n)!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)}|x| = \infty$$

então $\sum a_n(x)$ converge apenas para $x = 0$.

e Apliquemos o critério da razão mais uma vez:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(-3)^{n+1}} \frac{(-3)^n}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{-3} \right| = \frac{|x|^2}{3}$$

Com isso temos que a série converge se $\frac{x^2}{3} < 1$, ou seja, $|x| < \sqrt{3}$ e diverge se $|x| > \sqrt{3}$.

- Se $|x| = \sqrt{3}$ a expressão do termo geral $a_n(x)$ fica como:

$$\frac{\sqrt{3}^{2n+1}}{(-3)^n} = \frac{3^{n+1/2}}{(-1)^n 3^n} = \frac{3^{1/2}}{(-1)^n}$$

  Uma série alternada divergente.
- Se $x = -\sqrt{3}$, temos:

$$\frac{-\sqrt{3}^{2n+1}}{(-3)^n} = \frac{(-1)^{2n+1}3^{n+1/2}}{(-1)^n 3^n} = (-1)^{n+1}3^{1/2}$$

  Também divergente.

Com isso temos que o intervalo de convergência é $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

f Pelo critério da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \frac{n^2 2^n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-3}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

Daí a série converge se $|\frac{x-3}{2}| < 1$, ou seja $1 < x < 5$, e diverge $1 > x$ ou $x < 5$. Ainda resta determinar o que acontece quando $x = 1$ e $x = 5$

- Se $x = 1$ o termo geral fica como

$$\frac{(1-3)^n}{(n^2 2^n)} = \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \frac{(-1)^n 2^n}{n^2 2^n} = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

  Essa série é absolutamente convergente e portanto convergente.

[1] comparação com a harmônica ou simplesmente observando que esta é uma harmônica generalizada de parâmetro $\frac{1}{2} < 1$

- Por outro lado, se $x = 5$ temos

$$\frac{(5-3)^n}{(n^2 2^n)} = \frac{2^n}{(n^2 2^n)} = \frac{1}{n^2}$$

uma série harmônica generalizada $\frac{1}{n^p}$ com $p = 2$, portanto convergente.

Com isso temos que o intervalo de convergência é $[1, 5]$.

g Consideremos a sequência $a_n(x) = \frac{3^n}{n.4^n} x^n$. Pelo critério inverso da razão, temos:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n}{n4^n} . \frac{(n+1)4^{n+1}}{3^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{3n} = \frac{4}{3}$$

Assim, temos que $x \in]-4/3, 4/3[$.

- Se $x = \frac{4}{3}$ ficamos com a série $\sum \frac{1}{n} \frac{3^n 4^n}{4^n 3^n} = \sum \frac{1}{n}$ divergente.
- Se $x = -\frac{4}{3}$ ficamos coma versão alternada da série acima, convergente pelo critério de Leibniz.

Temos então intervalo de convergência $I = [-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}[$.

h Pelo critério inverso da razão, temos:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} . \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(-1)^{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} . \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$$

Portanto, o raio de convergência é $R = 1$, garantindo convergência absoluta em $]2, 4[$. Os casos na fronteira ficam como segue:

- Se $x = 2$ temos $\sum a_n(x-3)^n = \sum \frac{(-1)^{2n+1}}{n \ln n}$, não convergente pelo teste da integral.
- Se $x = 4$ ficamos com $\sum a_n(x-3)^n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$, convergente pelo critério de Leibniz.

Ficamos então com intervalo de convergência de $I =]2, 4]$.

i Apliquemos o critério inverso da razão:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{e^n}}{\frac{\ln(n+1)}{e^{n+1}}} = e$$

Logo o raio de convergência é $R = e$. Vamos conferir para os extremos dados pelo raio de convergência:

- Se $x = 0$ obtemos a série

$$\sum (-1)^n \ln(n)$$

que diverge pelo critério da divergência.

- Se $x = 2e$ ficamos com

$$\sum \ln(n)$$

que também diverge.

Consequentemente temos que o intervalo de convergência é $]0, 2e[$.

j Usando o critério inverso da razão

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^n}{(2n)!}}{\frac{10^{n+1}}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{10} = \infty$$

Assim a série de potências converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

k Considere a série $\sum \frac{n}{4^n} x^{2n}$. Aplicando o critério da razão temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{2n+2}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{nx^{2n}} \right| = \frac{x^2}{4}$$

A convergência absoluta da série ocorre quando $\dfrac{x^2}{4} < 1$ ou seja em $]-2, 2[$. Vamos para os casos na fronteira:

- Se $x = 2$ a série se torna $\sum n$, claramente divergente.
- Se $x = -2$ a série se torna $\sum n$ também divergente.

Concluímos que o intervalo de convergência é $I =]-2, 2[$.

l Se a série convergir em módulo, então a série original será convergente. Assim, analisaremos a série $\sum \frac{|x|^n}{n^3+1}$. Então:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^3+1} . \frac{n^3+1}{|x|^n} = |x|$$

Para $|x| < 1$ temos que a série em módulo converge e, consequentemente, a série converge para $x \in]-1, 1[$.

- Para $x = 1$ temos a série $\sum \frac{1}{n^3+1}$ que converge pelo critério de comparação com a série $\sum \frac{1}{n^3}$.
- Para $x = -1$ temos a série $\sum \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ convergente pois é absolutamente convergente.

Portanto, $\sum \frac{x^n}{n^3+1}$ converge para $x \in [-1, 1]$.

m Pelo critério inverso da razão, temos:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}.2^n} . \frac{\sqrt[3]{n+1}.2^{n+1}}{(-1)^{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2 \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} = 2$$

Temos convergência então em $x \in]-2, 2[$. Para os casos na fronteira:

- Para $x = 2$ temos a série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$ convergente pelo critério de Leibniz.
- Para $x = -2$ temos a série

  $$\sum \frac{(-1)^{\overbrace{2n+1}^{\text{ímpar}}}}{\sqrt[3]{n}} = \sum \frac{-1}{\sqrt[3]{n}}$$

  O negativo de uma harmônica generalizada divergente.

n Aplicando o critério inverso da razão à série de potências do enunciado, temos que:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$$

Ou seja, o raio de convergência é $R = 1$.

- Em $x = 1$ temos $\sum n^2 x^n = \sum n^2$, que é divergente pois o limite do termo geral quando n vai para o infinito não é zero.
- Para $x = -1$ temos $\sum n^2 x^n = \sum (-1)^n n^2$, que também é divergente pelo mesmo critério.

Portanto, o intervalo de convergência é $I =]-1, 1[$.

- Tomando $y = \frac{x+2}{8}$, note que ficamos com $\sum \frac{n^2}{(2^3)^n}(x+2)^n = \sum n^2 y^n$, exatamente o exemplo anterior, só que na variável y. A mesma sequência de argumentos conclui que o raio de convergência, na variável y, é 1 e que não temos convergência nas extremidades. Nesse caso temos convergência (absoluta) em

$$-1 < y = \frac{x+2}{8} < 1 \iff -10 < x < 6$$

$\square$