Trabalho 2 Bruno Magno da Cruz, 11218813

(1) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

Como $\binom{2n}{2} = C_2^{2n} = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}$

Temos que

$$2\binom{n}{2} + n^2 = 2\left(\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right) + n^2 = 2\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2!\,(n-2)!}\right) + n^2$$

$$= \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{2!} + n^2 = \frac{2(n^2-n)}{2!} + n^2 = \frac{2n^2-2n}{2} + n^2 = \frac{2n^2-2n+2n^2}{2}$$

$$= \frac{(2n^2+2n^2-2n)}{(2)}\cdot\frac{(2n-2)!}{(2n-2)!} = \frac{(2n^2+2n^2-2n)\cdot[2(n-1)]!}{2!\,(2n-2)!}$$

$$= \frac{[2(2n^2-n)]\cdot(2n-2)!}{2!\,(2n-2)!} \quad \langle \text{Como } (2n)! = 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)! \rangle$$

$$= \frac{[2\cdot(n\cdot(2n-1))]\cdot(2n-2)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \binom{2n}{2}$$

Portanto,

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

$$2!\,(2n-2)! \qquad 2!\,(2n-2)! \qquad 2!\,(2n-2)! \qquad (2)$$

Portanto,

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Além disso analiticamente ao fixar n tomar um conjunto C de 2n elementos se dividirmos o conjunto de 2n elementos em dois conjuntos A e B de n elementos cada, a escolha de 2 elementos entre C é igual a escolha de 2 elementos em A somada a escolha de 2 elementos em B e por fim, somada a possibilidade de cada elemento de A fazer par com um elemento de B, logo

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

↳ produto cartesiano de $A \times B \Rightarrow |A| \cdot |B| = n\,n = n^2$

↳ escolha de 2 elementos em A + escolha de 2 elementos em B

Analogamente, $\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$ pode ser interpretado como a divisão de um conjunto D de 3n elementos em 3 outros conjuntos A, B, C com n objetos cada. Portanto, a escolha de 3 objetos em D é

S T Q Q S S D

igual a soma da:

- escolha de 3 objetos exclusivamente em A, B ou C dado por $3\binom{n}{3}$

- escolha de 3 objetos com cada elemento em um conjunto diferente, ou seja, $A \times B \times C = \#A \cdot \#B \cdot \#C = n \cdot n \cdot n = n^3$

- escolha de 2 objetos em um conjunto qualquer dado por $\binom{n}{2}$, com a escolha do último objeto em outro conjunto dado por n. Como há 3 conjuntos, podemos permutar a forma de escolha, logo $3! = 6$ e então $6\left[n \cdot \binom{n}{2}\right]$ //

Temos então que $\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$ //

(2)

a) $11218813 \pmod{11}$ Analisando $[11218813]_{11}$

$= [1 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3] \bmod 11$

Em $\mathbb{Z}_{11}$ $= ([10^7] + [10^6] + [2][10^5] + [10^4] + [8][10^3] + [8][10^2] + [10] + [3]) \bmod 11$

$= \langle$ Note que $[10]_{11} = [10] = [-1]$, $[10^2]_{11} = [10][10] = [-1][-1] = [(-1)(-1)] = [1] \rangle$

$= [-1] + [1] + [2][-1] + [1] + [8][-1] + [8][1] + [-1] + [3]$

$= [-1] + [1] + [2(-1)] + [1] + [8(-1)] + [8 \cdot 1] + [-1] + [3]$

$= [-1 + 1 - 2 + 1 - \cancel{8} + \cancel{8} - 1 + 3] = [1]_{11}$

Logo, como $[11218813]_{11} = [1]_{11}$, temos que $r = 1$ e $\therefore 11218813 \pmod{11} = 1$

___/___/___ S T Q Q S S D

(2) b) $MCD(1520, 333+1) = MCD(1520, 334) = \langle 1520 \pmod{334} = 184 \rangle = MCD(334, 184)$
$= \langle 334 \pmod{184} = 150 \rangle = MCD(184, 150) = \langle 184 \pmod{150} = 34 \rangle = MCD(150, 34)$
$= \langle 150 \pmod{34} = 14 \rangle = MCD(34, 14) = \langle 34 \pmod{14} = 6 \rangle = MCD(14, 6)$
$= \langle 14 \pmod{6} = 2 \rangle = MCD(6, 2) = \langle 6 \pmod{2} = 0 \rangle$. Portanto $MCD(1520, 334) = 2$ //

(3)

a) Temos que

$C^{30}_{10} \cdot C^{20}_{10} \cdot C^{10}_{10}{}^{-1} = C^{30}_{10} \cdot C^{20}_{10}$ ou seja, é escolhido 10 alunos dentre os 30 e dos restantes, são escolhidos outros 10

b) Como são 30 alunos diferentes distribuídos entre 3 seções onde a seção importa mas não a ordem dentro da seção, temos

alunos → seções : 3^{30}

30 3

Ou seja, para o 1° aluno são 3 opções, para o 2° aluno são 3 opções, ..., para o 30° aluno, são 3 opções e portanto: $3_1 \cdot 3_2 \cdot \ldots \cdot 3_{30} = 3^{30}$

c) Como cada seção deve ter pelo menos 9 alunos, temos $C^{30}_{9} \cdot C^{21}_{9} \cdot C^{12}_{9}$
Além disso, os 3 alunos restantes podem se distribuir entre as 3 seções ou seja 1° aluno possui 3 opções de grupo, análogo para o 2° e 3° aluno, logo $3 \cdot 3 \cdot 3$ opções. Portanto

$$\binom{30}{9}\binom{21}{9}\binom{12}{9} \cdot 3^3$$

importa, já que serão ordenados

(4)

a) $(2x^{-1} - y)^9$

Temos que $T_{p+1} = {}^nC_p\, a^{n-p}\, b^p$: $T_{p+1} = {}^9C_p \left(\frac{2}{x}\right)^{9-p} (-y)^p = {}^9C_p \cdot 2^{9-p}\, x^{p-9}\, (-y)^p$

$\Rightarrow p - 9 = 4 \Rightarrow p = 5$. Logo, $C^9_5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\, 4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$

Portanto, o coeficiente de $x^{-4} y^5$ é 126.

$\boxed{126 \cdot x^{-4} y^5}$ //

b) $(2x^{-1} - y + 3)^9$

Temos que $(x+y+z)^n = \sum_{k_x, k_y, k_z \in C} \binom{n}{k_x, k_y, k_z} x^{k_x} y^{k_y} z^{k_z} \to C = \{a, b, c \geq 0 \in \mathbb{Z}$
e $a+b+c = n\}$

Então, $z = 3 \Rightarrow (2x^{-1} - y + z)^9 \Rightarrow (-3, 4, 0)$, $\frac{9!}{3!\,4!} = 2520$ //

⑤ Seja $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ e $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $\#\mathbb{Z}_k = k$ e $\#\mathbb{Z}_n = n$

a) No total, o numero de funções $f: \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_n$ é n^k, pois para $f(0)$ há n possibilidades para $f(1)$ há n possibilidades, ..., para $f(k-1)$ há n possibilidades e portanto, como $\#\mathbb{Z}_k = k$ e $\#\mathbb{Z}_n = n \Rightarrow n^k$ //

b) A função f seu injetora se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_k$, $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$, ou seja, elementos distintos de $\mathbb{Z}_k$ possuem imagens distintas em $\mathbb{Z}_n$. Logo, para $f(0)$ há n possibilidades, para $f(1)$ há $(n-1)$ possibilidades, ..., para $f(k-1)$ há $(n-k+1)$ possibilidades e portanto $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ //

c) Seja $k \leq n$, o numero de f estritamente crescente é igual a $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, pois após escolher k elementos entre n, basta ordená-los, formando uma imagem estritamente crescente. Note que utilizamos combinação pois a ordem na qual os k elementos são escolhidos não importa, já que serão ordenados

(6)

d) $4^{1004} \pmod 9$

Analisando as potências de 4

$4^1 = 4 \Rightarrow 4 \pmod 9 = 4$

$4^2 = 4 \cdot 4 \Rightarrow 16 \pmod 9 = \{16 = 9q + r\} = 7$

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow 16 \cdot 4 \pmod 9 = [16 M9 \cdot 4 M9] M9 = [7 \cdot 4] M9 = [28] M9 = 1$

logo a partir do expoente 4, os restos se repetem

Como

$1004 = 9q + r$

$4^{1004} = 4^{(9q+r)}$

$4^{1004} = (4^9)^q \cdot 4^r$

Em $\mathbb{Z}/9$: $4^{1004} = 1 \cdot 4^r \Rightarrow 4^{1004} = 4^r$ então precisamos achar r

$$
\begin{array}{r|l}
1004 & 9 \\
\hline
-9 & 111 \\
\hline
10 & \\
-9 & \\
\hline
14 & \\
-9 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

$4^{1004} Md = 4^r Md = 4^5 Md = 7$

⑦ Para calcular a divisão, é necessário que o inverso esteja definido. Como $[5]^{-1}_6 = [5]_6$ pois $[5]_6[5]_6 = [25]_6 = [1]_6$, é possível calcular a equação (b) e (c).

$[5][x] = [4]$

$[5][5][x] = [4][5]$

$[25][x] = [20]$

$[1][x] = [2]$

$[x] = [2]$

$[5][x] = [3]$

$[5][5][x] = [3][5]$

$[25][x] = [15]$

$[x] = [3]$

No caso da equação (a) e (d), não existe $[3]^{-1}_6$, pois não há $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $[3][x] = [1]$, logo a divisão não está definida e portanto é necessário utilizar outros meios matemáticos para resolver.

Seja $i, j, k \in \mathbb{Z}$, com $i = 2k$ (par) e $j = 2k+1$ (ímpar), então

• $(3i) \bmod 6 \Rightarrow (3i) = q6 + r \Rightarrow r = 3i - 6q \Rightarrow r = 3(2k) - 6q \Rightarrow r = 6k - 6q \Rightarrow r = 6(k-q)$

Como r é múltiplo de 6, $r \bmod 6 = 0 \Rightarrow 3i \bmod 6 = 0$.

• $(3j) \bmod 6 \Rightarrow 3j = q6 + r \Rightarrow r = 3(2k+1) - 6q \Rightarrow r = 6k + 3 - 6q \Rightarrow r = 6(k-q) + 3$

Como r é formado por uma parte múltipla de 6 somado a 3, temos que $r \bmod 6 = 3 \Rightarrow 3j \bmod 6 = 3$

$[25][x] = [20]$ $[25][x] = [15]$

$[1][x] = [2]$ $[x] = [3]$

$[x] = [2]$

No caso da equação (a) e (d) não existe $[3]_6^{-1}$ pois não há $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $[3][x] = [1]$, logo a divisão não está definida e portanto é necessário utilizar outros meios matemáticos para resolver.

Seja $i, j, k \in \mathbb{Z}$, com $i = 2k$ (par) e $j = 2k+1$ (ímpar), então

• $(3i) \bmod 6 \Rightarrow (3i) = q6 + r \Rightarrow r = 3i - 6q \Rightarrow r = 3(2k) - 6q \Rightarrow r = 6k - 6q \Rightarrow r = 6(k-q)$

Como r é múltiplo de 6, $r \bmod 6 = 0 \Rightarrow 3i \bmod 6 = 0$.

• $(3j) \bmod 6 \Rightarrow 3j = q6 + r \Rightarrow r = 3(2k+1) - 6q \Rightarrow r = 6k + 3 - 6q \Rightarrow r = 6(k-q) + 3$

Como r é formado por uma parte múltipla de 6 somado a 3, temos que $r \bmod 6 = 3 \Rightarrow 3j \bmod 6 = 3$

Portanto, no caso da (a) $[3][x] = [4]$ não existe x que satisfaça essa equação. No caso da (d) $[3][x] = [3]$, todos os ímpares contidos em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ satisfazem essa operação, logo $[1]$, $[3]$ e $[5]$