Exercícios - Cálculo IV - Aula 10 - Semana 26/10 - 30/10
Revisão de Séries de Taylor

1 Série Binomial

Seja $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Queremos obter a série de Maclaurin de f, que é chamada de série binomial. A série é dada por $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Temos que

- $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.
- $f''(x) = (\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-2}$.
- $f'''(x) = (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-3}$.
- $f^{(n)}(x) = (\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\ldots(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-n}$.

Logo

$$s(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\ldots(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha}{n!} x^n$$

Usando a notação (que é o número binomial quando α é natural):

$$\frac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\ldots(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha}{n!} = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array}\right)$$

temos

$$s(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array}\right) x^n$$

Veja na apostila da Prof. Janete que:

- O intervalo de convergência desta série é $]-1,1[$.

- A série converge para f neste intervalo.

Exemplo 1 *A série de Maclaurin de* $f(x)=\sqrt{1+x}$ *é*

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n\, n!}x^n+\cdots$$

para $|x|<1$. *Vamos usar esta série para calcular um valor aproximado de* $\sqrt{1,3}$ *com erro inferior a* 10^{-3}. *Substituindo* $x=0,3$ *na série acima temos uma série alternada satisfazendo as condições do Critério de Leibniz. Segundo vimos na lista de exercícios da aula 7,* $|s_n-s|<a_{n+1}$ *onde* s *é a soma da série e* s_n *é a soma parcial da série. Procuramos* n *de modo que* $a_{n+1}<10^{-3}$. *Observe que* $a_4=\dfrac{5.(0,3)^4}{128}=0,000316<10^{-3}$, *logo* $\sqrt{1,3}\approx 1+\dfrac{0.3}{2}-\dfrac{(0,3)^2}{8}+\dfrac{(0,3)^3}{16}=1,1404375.$

Exercício 1 *Obtenha o desenvolvimento em série de potências de* $f(x)$ *em torno de* 0 *e indique o raio de convergência:*
a) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$.
b) $f(x)=(1+x)^{-3}$.
c) $f(x)=1/\sqrt[3]{1-x^2}$.

2 Aproximações e Erro

Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ convergente, seja $s=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ a soma da série. Considere a soma parcial $s_k=\sum_{n=0}^{k}a_n$. O erro (em módulo) cometido quando aproximamos s por s_k é simplesmente $|s-s_k|$. Não é elementar estimar este erro. Vimos duas fórmulas: quando a série é uma série alternada satisfazendo as condições do Critério de Leibniz e, no caso de série de potências, temos a fórmula de Lagrange.

Exemplo 2 *Queremos encontrar um valor aproximado para* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ *com erro inferior a* 10^{-3}. *Sabemos que* $e^{-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$, *logo*

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

tomando $x = 1$ *temos:*

$$s = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}.$$

Esta é uma série alternada satisfazendo as condições do Critério de Leibniz, logo $|s - s_k| < \frac{1}{(k+1)!(2k+3)} < 10^{-3}$. *Observe que para* $k = 4$, $\frac{1}{5!(2.4+3)} = \frac{1}{1320} < 10^{-3}$. *Portanto*

$$s = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747...$$

Exemplo 3 *Calcule* $sen\,0,7$ *com erro inferior a* $0,002$. *Temos que* $f(x) = sen\,x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. *Seja* $P_{k,0}(x)$ *o polinômio de Taylor de* f *de ordem* k *em* 0 *e* $R_{k,0}(x) = f(x) - P_{k,0}(x)$ *o resto de Taylor. Segue da fórmula de Lagrange que* $|R_{k,0}(x)| = \left|\dfrac{f^{(k+1)}(\bar{x})x^{k+1}}{(k+1)!}\right|$, *onde* $\bar{x}$ *está entre* 0 *e* x. *Agora tome* $x = 0,7$:

$$|sen\,0,7 - P_{k,0}(0,7)| = |R_{k,0}(0,7)| = \left|f^{(k+1)}(\bar{x})\frac{(0,7)^{k+1}}{(k+1)!}\right|$$

Para $k = 4$, $|f^{(5)}(\bar{x})| \leq 1$ *e* $(0,7)^5/5! = 0,0014 < 0,002$. *Portanto* $sen\,0,7 \approx 0,7 - \frac{(0,7)^3}{6} = 0,64283$. *Lembre-se que o polinômio de ordem 4 de* f *é* $x - x^3/3!$.

Exercício 2 *Utilize uma série infinita para aproximar o número dado com precisão de quatro decimais:*

a) $\int_0^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ *b)* $\int_0^{0.5}\cos x^2 dx$ *c)* $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ *d)* $\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx$

3 Funções Analíticas

Seja I um intervalo aberto contendo ponto x_0 e seja $f : I \to \mathbb{R}$ infinitamente derivável (de classe C^∞). Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

para $x \in I$, dizemos que f é analítica em x_0. Dizemos que f é analítica em I se for analítica para todo $x_0 \in I$.

Exemplo 4 *Vimos nas videoaulas do Prof. Possani que* e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{arctg} x$ *e* $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *são funções analíticas em* $x_0 = 0$. *Você pode facilmente provar (imitando o caso já feito) que* e^x, $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *são funções analíticas em todo* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Escreva a série de Taylor em torno de* x_0 *e calcule o erro de Taylor usando a fórmula de Lagrange.*