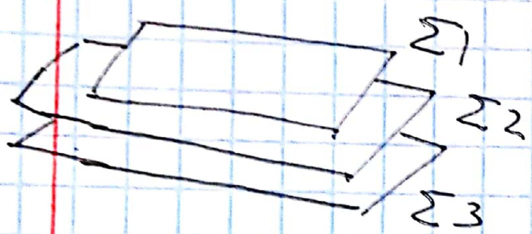
Sobre Posições relativas de 3 planos:

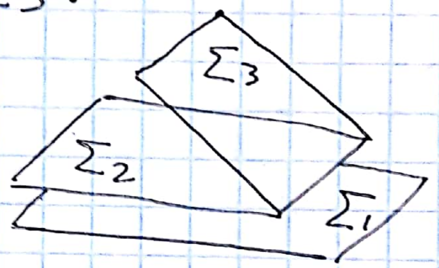
Sejam $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ três planos no $\mathbb{R}^3$ com seguintes equações

$$\Sigma_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\Sigma_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$\Sigma_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

Vamos analisar as possíveis interseções de Σ_1, Σ_2 e Σ_3 i.e $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$. Suponhamos que os planos são distintos. $\Sigma_1 \neq \Sigma_2 \neq \Sigma_3$.

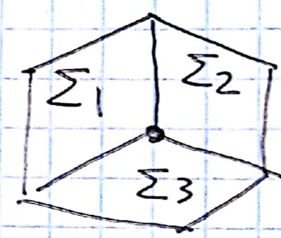


(i) Paraleles os três

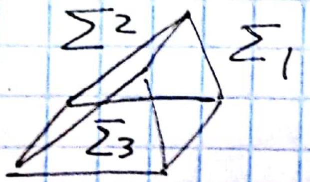


(ii) $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ & $\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \emptyset$

portanto $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset$.

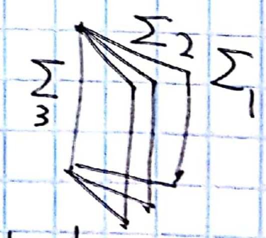


(iii) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ é Um Ponto.



(iv) Dois a dois eles interceptam numa reta, mas $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \emptyset$.

Neste caso $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ é paralela a Σ_3.



(v)

Livro aberto: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ é Uma reta.

Agora Vamos estudar as equivalencias algébricas das situações acima.

Sistema linear de equações

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases} \quad (*)$$

observe que se $d_1=d_2=d_3=0$ o sistema $(*)$ é chamado de sistema homogenêo e tem pelo menos uma solução (chamada trivial) $\boxed{x=y=z=0}$

A) Caso homogenêo: Apenas (iii) e (V) podem ocorrer:

(iii) Quando o sistema tem apenas solução trivial.
Veja que neste caso podemos observar que $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são linearmente independentes, onde

$\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_2)$
$\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$
$\vec{n}_3=(a_3,b_3,c_3)$

servem como vetores normais as Σ_1, Σ_2 e Σ_3

<u>Exercício:</u> Tentem argumentar geometricamente que no caso (iii) os vetores $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ realmente são L. I.

conclusão algebrica:

o sistema homogenêo tem solução trivial $\Longleftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$

(V) Neste caso o sistema possui infinitas soluções (geometricamente: todos os pontos na reta $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$)

Podemos observar que $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são L.D. (os três são paralelos a qualquer plano ortogonal a $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$)

Portanto:

O sistema homogeneo tem ∞ soluções $\Leftrightarrow$ $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 0.$

B Caso não homogenêo:

Neste caso em princípio todas as configurações geometricas (i), (ii), (iii), (iv) e (V) podem ocorrer.

<u>Observação:</u> Somente no caso (iii), os três vetores normais $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são L.I. (Este é um exercício, porem vamos dar uma dica no caso iv)

Sejam
$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \ell_{1,2}$$
$$\Sigma_1 \cap \Sigma_3 = \ell_{1,3}$$
$$\Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \ell_{2,3}$$

$\ell_{i,j}$ as retas de interseção de $\Sigma_i \cap \Sigma_j$.

Na configuração (iV) $\ell_{1,2} \parallel \ell_{1,3} \parallel \ell_{2,3}$ (são paralelas)

Pela definição dos vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais a reta $\ell_{1,2}$ que por sua vez é paralela ao plano Σ_3.

Portanto $\vec{n}_3$ e $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos ao mesmo plano!

$\Longrightarrow$ são L.D.

Agora Podemos Concluir análise sobre Sistemas não homogeneos:

(i) Não tem solução e $\det[n_1\ n_2\ n_3] = 0$
(ii) Não tem Solução e $\det[n_1, n_2\ n_3] = 0$
(iii) Tem Única solução e $\det[n_1, n_2, n_3] \neq 0$ *
(iv) Não tem solução e $\det[n_1, n_2, n_3] = 0$
(v) Tem infinitas soluções e $\det[n_1, n_2, n_3] = 0$ *

Observem que em dois casos (iii) e (V) o Sistema tem Solução, porém Uma Vez determinante nulo e outra Vez não nulo.

Conclusão: Se o determinante é não-nulo Com Certeza existe Única Solução. Porém se determinante for zero, pode não existir solução ou ∞-soluções!!

Este Último caso, (específico de Sist. não homogenêos) mostra importância de d_1, d_2, d_3 na estudo!

O Papel de d_1, d_2 e d_3.

↓

Scanned by CamScanner

Vamos analisar o papel de d_1, d_2 e d_3 na análise de soluções do sistema ñ/ homogeneo.

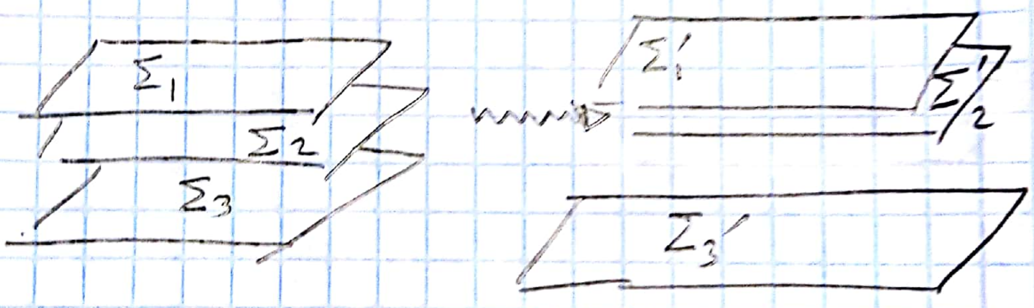
Como sabemos pelas aulas dois planos

$$ax+by+cz+d=0$$ e

$$ax+by+cz+d'=0$$

São paralelos. número mudando constante $\underline{d}$ na equação apenas transladamos um plano. Vamos usar este fato para concluir mais coisas sobre sistema ñ/ homog.

Caso (i)



Se alteramos d_1 e d_2 e d_3 no sistema os planos permanecem paralelos. (Tem possibilidade de coincidirem após translação, mas disconsideramos caso em que os planos fiquem iguais)

Portanto a sistuação sobre não existencia da solução continua, mudando d_1, d_2 e d_3. exceto caso em que todos coincidam e aí temos ∞-soluções.

(ii) Exceto caso de coincidência de dois planos, após mudar d_1, d_2 e d_3 não temos solução.

(iii) Independente dos valores de d_1, d_2 e d_3 temos única solução.

(iv) Independente dos d_i's não temos solução.
$\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são L.D porém nenhum dos dois deles são L.D.

Veja que se transladamos qualquer um dos planos Σ_1, Σ_2 ou Σ_3. Podemos chegar ao caso (V).

O caso (V) é um caso particular de $\det[\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3] = 0$ onde os números d_1, d_2, d_3 são de tal forma que os três planos tem uma reta de interseção e portanto o sistema tem ∞ soluções. (Na verdade pode ser reduzido a um sistema de duas equações, 3 incógnitas)

Quer divertir mais?
Estude Álgebra Linear!