Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 5 - Semana 21/9 – 25/9

Exercício 1. *Determine se cada uma das séries converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.*

a . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+3}$

b . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

c . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$

d . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2(\frac{1}{n})$

e . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(\frac{1}{n})$

f . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-\cos(\frac{1}{n}))$

g . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$

h . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

Solução. Passemos por cada item:

a Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1.$$

Consequentemente o limite de $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+3}$ quando $n\to\infty$ não existe. Logo pelo Critério da divergência a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+3}$ **diverge**.

b A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ **converge condicionalmente**. De fato, observe que os termos a sequência (a_n) é decrescente: $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{(n+1)+3}}<\frac{1}{\sqrt{n+3}}=a_n$ para todo $n\geq 1$ e além disso $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}=0$. Assim, pelo critério do Leibniz a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ converge.

Por outro lado, considere a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, onde $b_n=\frac{1}{n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+3}}=\infty,$$

e a série harmônica diverge, segue do critério da comparação no limite que a série $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}|$ diverge. Concluímos que a série converge condicionalmente.

c Vale a desigualdade $\frac{1}{n}<\frac{\sqrt{n+3}}{n}$ para todo $n\geq 1$. Do critério da comparação concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$ não converge absolutamente.

Vamos aplicar o critério de Leibniz para mostrar que a série converge. Seja $a_n = \frac{\sqrt{n+3}}{n}$. Vamos mostrar que a_n é decrescente.

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+4}}{n+1} < \frac{\sqrt{n+3}}{n} = a_n \iff \\ n^2(n+4) < (n+1)^2(n+3) \iff \\ 0 < n^2 + 7n + 3. \end{aligned}$$

Como a última desigualdade é válida para todo n natural, segue que a_n é decrescente.

Um outro modo de verificar que a sequência a_n é decrescente seria considerar a função $f(x) \doteq \frac{\sqrt{x+3}}{x}$, para $x \in [1, \infty)$, e observar que

$$f'(x) = \frac{-x-6}{2x^2\sqrt{x+3}} < 0 \quad \forall x \geq 1.$$

Logo, f é decrescente em $[1, \infty)$. Assim, $a_n = f(n)$ é decrescente.

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{n}} = 0.$$

Portanto, do critério de Liebniz concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$ converge. Temos então que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$ é **condicionalmente convergente**.

d Vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin^2(\frac{1}{n})\right|$ converge.

Lembre que $0 < \sin(x) < x$ para $x \in (0, \pi)$, logo temos a desigualdade $0 < \sin^2(\frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, concluímos do critério da comparação que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2(\frac{1}{n})$ converge. Assim $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2(\frac{1}{n})$ converge absolutamente.

e Sendo $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$, resulta que $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ não existe. Pelo critério da divergência, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

f Vamos verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))$ é condicionalmente convergente.

De fato, vamos primeiro analisar a série em valor absoluto.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))\right| = \sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos(1/n)).$$

Usando o limite fundamental

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-\cos(1/n))}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos(1/n))}{(1/n)^2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Como este limite é positivo e a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, segue do critério da comparação no limite que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))\right|$ diverge, ou seja, a série em questão não converge absolutamente. Sendo assim, a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))$ diverge ou é condicionalmente convergente.

Note que $n(1-\cos(1/n)) > 0$ para todo $n \geq 1$ e

$$\lim_{n\to\infty}n(1-\cos(1/n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos(1/n)}{(1/n)^2}\frac{1}{n} = (1/2)\cdot 0 = 0.$$

Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a sequência $n(1-\cos(1/n))$, $n \geq n_0$, é decrescente. Para ver isso, considere a função $f(x) = x(1-\cos(1/x))$ para $x \in [1, \infty)$. A função f é derivável e

$$f'(x) = 1-\cos(1/x) - \frac{1}{x}\sin(1/x) = 1-\cos(1/x) - \frac{1}{x^2}\frac{\sin(1/x)}{1/x}.$$

Assim,
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty.$$

Portanto, existe $x_0 > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$. Assim, f é uma função decrescente no intervalo (x_0, ∞). Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > x_0$. Logo, a sequência $n(1-\cos(1/n))$, $n \geq n_0$, é decrescente.

Portanto, pelo critério de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))$ é convergente. A conclusão é que essa série é condicionalmente convergente.

g Vamos verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é condicionalmente convergente

De fato, vamos primeiro analisar a série em valor absoluto.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right).$$

Usando que a função $\arctan x$ é contínua em $[n, n+1]$ e derivável em $(n, n+1)$, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (n, n+1)$ tal que

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \frac{1}{1+c^2}(n+1-n) = \frac{1}{1+c^2}.$$

Usando está igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n(\arctan(n+1)-\arctan(n))}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} n^2(\arctan(n+1)-\arctan(n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+c^2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi utilizado o teorema do confronto e o fato que

$$\frac{n^2}{1+(n+1)^2} < \frac{n^2}{1+c^2} < \frac{n^2}{1+n^2}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, segue do critério da comparação no limite que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ diverge, ou seja, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$$

não converge absolutamente.

Vamos mostrar agora que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é convergente.

Primeiro note que $n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right) > 0$ porque a função arco-tangente é crescente.

Usando novamente o teorema do valor médio,

$$n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right) = \frac{n}{1+c^2}$$

para algum $c \in (n, n+1)$. Observando que

$$\frac{n}{1+(n+1)^2} < \frac{n}{1+c^2} < \frac{n}{1+n^2},$$

segue do teorema do confronto que $\frac{n}{1+c^2} \to 0$ com $n \to \infty$. Portanto,

$$n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right) = \frac{n}{1+c^2} \to 0.$$

Para mostrar que a sequência $n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é decrescente, consideremos a função $f(x)=x\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right)$ para $x\in[1,\infty)$. A função f é derivável e

$$f'(x)=\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right)+\frac{x(x^2-(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}.$$

Usando o teorema do valor médio na primeira parcela do lado direito, existe $c\in(n,n+1)$ tal que

$$f'(x)=\frac{1}{1+c^2}+\frac{x(x^2-(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}.$$

Como

$$\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+n^2},$$

temos,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+c^2}+\frac{x(x^2-(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}\\&<\frac{1}{1+n^2}+\frac{x(x^2-(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}\\&=\frac{2-x^2+x}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)}\\&<0\end{aligned}$$

para todo $x>2$. Assim, f é decrescente no intervalo $(2,\infty)$, o que implica que a sequência $n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é decrescente para $n\geq 3$.

Portanto, pelo critério de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é convergente.

Concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\arctan(n+1)-\arctan(n)\right)$ é condicionalmente convergente.

h O termo a_n da série em módulo é $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\geq 0$ e a soma parcial S_n toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\to 1\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$. A série é então absolutamente convergente.

□

Exercício 2. *Para cada uma das séries, encontre o intervalo e o raio de convergência.*

a . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

b . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$

c . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

d . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{10^n}$

e . $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x-1)^n}{n!}$

Solução. a Para $x = 0$ a série é convergente. Para $n \neq 0$, do critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{|x|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x|.$$

E assim concluímos que

Se $|x| < 1$ a série converge.

Se $|x| > 1$ a série diverge.

Para $x = 1$ temos que obtemos a série $\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ que é convergente pelo critério da integral. Para $x = -1$, a série $\sum_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ também converge pelo critério de Leibniz. Assim a série tem intervalo de convergência $[-1, 1]$ e raio de convergência $R = 1$.

b Para $x = 0$ a série é convergente. Para $n \neq 0$, do critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = 1 \cdot 1 \cdot |x| = |x|.$$

Do qual temos convergência para $|x| < 1$, divergência para $|x| > 1$.

Para x = 1, tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, a qual tem termo geral sempre superior a série harmônica e portanto diverge.

Para x = -1, tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(-1)^n$, a qual é alternada. Denote $a_n = \frac{\ln n}{n}$. É imediato ver $a_n > 0$ para todo $n > 1$ e $a_n \to 0$ com $n \to \infty$. Além disso, usando que

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad \forall x > e,$$

segue que a_n é decrescente para $n \geq 3$.

Portanto a série é convergente pelo Critério de Leibniz para $x = -1$.

Com isso temos que o intervalo de convergência é $[-1, 1[$ e seu raio de convergência é $R = 1$.

c Para $x = 2$ a série é convergente. Para $x \neq 0$, do critério da razão temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x-2|^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{|x-2|^n}{(n+1)3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{3} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{|x-2|}{3}.$$

Se $\frac{|x-2|}{3} < 1$ então a série converge, logo a série converge para $x \in (-1, 5)$.

Se $\frac{|x-2|}{3} > 1$ então a série diverge, logo a série diverge para $x < -1$ e para $x > 5$.

Para $x = -1$ obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ que é convergente.

Para $x = 5$ obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$ que é divergente.

Logo a série tem intervalo de convergência $[-1, 5[$ e raio de convergência $R = 3$.

d Denote $y = \frac{x}{10}$. Vamos estudar para que valores de y a série $\sum n!y^n$ converge. Para $y = 0$ a série converge. Para $y \neq 0$, pelo critério da razão.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!y^{n+1}|}{|n!y^n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|y| = \infty.$$

Logo a convergência acontece apenas em $y = 0$, ou seja, para $x = 0$. Assim, o intervalo de convergência é $\{0\}$ e o raio de convergência é $R = 0$.

e Para $x = 1/2$ a série converge. Para $x \neq 1/2$, do critério da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(2x-1)}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|}{n+1} = 0 < 1.$$

Assim, concluímos que o intervalo de convergência da série é $(-\infty, \infty)$ e o raio de convergência é $R = \infty$.

$\square$