S T Q Q S S D

Trabalho 1

① Exercício 5b) "m é par se e só se $m > 10$"

Seja a: "m é par" e b: "$m > 10$"

$$a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

$$= (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)$$

$$= \neg((\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a))$$

$$= \overline{(\bar{a} \vee b)} \vee \overline{(\bar{b} \vee a)} \quad \langle \text{Por D'Morgan} \rangle$$

$$= (\bar{\bar{a}} \wedge \bar{b}) \vee (\bar{\bar{b}} \wedge \bar{a})$$

$$= (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a}) = a \oplus b$$

Portanto "m é par e $m \leq 10$ ou m é ímpar e $m > 10$".

② Exercício 9g) $P(n): n^3 + 2n$ é divisível por 3

Pelo Princípio de Indução (fraca):

Portanto "m é par e $m \leq 10$ ou m é impar e $m > 10$".

(2) Exercício 9g) $P(n): n^3 + 2n$ é divisível por 3

Pelo Princípio de Indução (fraca):

- Caso base: $P(1) = 1^3 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3$ é divisível por 3.
- Passo de indução

Suponha que $P(k): k^3 + 2n$ é divisível por 3

Analisando $P(k+1) = (k+1)^3 + 2(k+1)$

$$= (k+1)(k^2 + 2k + 1) + 2(k+1)$$

$$= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 + 2k + 2$$

$$= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3$$

$$= \underbrace{k^3 + 2k}_{P(k)} + \underbrace{3(k^2 + k + 1)}$$

Por hipótese é divisível   todo múltiplo de 3 é divisível por 3

__/__/__

③ p é verdade; s é verdade; q é falsa; r é falsa.

b1) $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$

Como p é V e q é F, temos: $\bar{V} \vee F = F \vee F = F$ //

b2) $(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{s} = (\bar{s} \vee p) \wedge (\bar{q} \vee \bar{s})$

Como s é V, p é V e q é F, temos: $(\bar{V} \vee V) \wedge (\bar{F} \vee \bar{V}) = (F \vee V) \wedge (V \vee F) = V \wedge V = V$ //

b3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow s = \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee s = (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee s = (p \wedge \bar{q}) \vee s$

Como p é V, q é F e s é V, temos: $(V \wedge \bar{F}) \vee V = (V \wedge V) \vee V = V$ //

b4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow s) = \bar{p} \vee (\bar{q} \vee s)$

Como p é V, q é F e s é V, temos: $\bar{V} \vee (\bar{F} \vee V) = F \vee (V \vee V) = F \vee V = V$ //

④ Sabemos que

[illegible] $\wedge (b \vee c) = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ (I)

(II)

b3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow s = \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee s = (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \vee s = (p \wedge \bar{q}) \vee s$

Como p é V, q é F e s é V, temos: $(V \wedge \bar{F}) \vee V = (V \wedge V) \vee V = V$

b4) $p \Rightarrow (q \Rightarrow s) = \bar{p} \vee (\bar{q} \vee s)$

Como p é V, q é F e s é V, temos: $\bar{V} \vee (\bar{F} \vee V) = F \vee (V \vee V) = F \vee V = V$

4) Sabemos que,

$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ I

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ II

Supondo o contra exemplo $a = F$ e $c = V$

I = II

$(F \vee V) \wedge (b \vee V) = (F \wedge b) \vee (F \wedge V)$

$V \wedge V = F \vee F$

$V = F$ Como é um absurdo, a afirmação que I = II não é válida

S T Q Q S S D   ___/___/___

(5) $(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow c) = (\bar{a} \vee b) \vee (\bar{b} \vee c)$

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$	$\bar{b}$	$\bar{b} \vee c$	$(\bar{a} \vee b) \vee (\bar{b} \vee c)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Note que $(\bar{a} \vee b)$ e $(\bar{b} \vee c)$ nunca são falsas simultaneamente, portanto a afirmação é sempre verdadeira.

6)

3) Considerando que não haverá reposição, temos 52 opções para a primeira carta
51 para segunda portanto $52 \cdot 51 = 2652$

F	F	F	V	V	V	V	V

(6)

(3) Considerando que não haja reposição, temos 52 opções para a primeira carta e 51 para segunda, portanto: $52 \cdot 51 = 2652$

(4) Queremos 2 elementos de um conjunto de 52 elementos onde a ordem não importa, portanto $C_{(52,2)} = \frac{52!}{50!\,2!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{\cancel{50!}\,2!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = \frac{2652}{2} = 1326$

(7) Considerando $A = \{1,2,3,4\}$ e a relação $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

Seja $x, y \in A$, uma relação é dita

- Reflexiva, se $\forall x \in A$ vale xRx: Como é falso as afirmativas $3R3$ e $4R4$, a relação NÃO é reflexiva.
- Simétrica, se $xRy \Rightarrow yRx$: $1R3$ mas não $3R1$, portanto NÃO é simétrica.
- Antissimétrica, como $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ e não há casos em R tal que $(xRy \wedge yRx)$, temos que $F \Rightarrow x = y$ e portanto, é antissimétrica.
- Transitiva, se $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$: Verdade pois se $x = 1$ e $y = 2$, temos

(4) Queremos 2 elementos de um conjunto de 52 elementos onde a ordem não importa, portanto $C_{(52,2)} = \frac{52!}{50!\,2!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{\cancel{50!}\,2!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = \frac{2652}{2} = 1326$

(7) Considerando $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

Seja $x, y \in A$, uma relação é dita

- Reflexiva, se $\forall x \in A$ vale xRx: Como é falso as afirmativas $3R3$ e $4R4$, a relação NÃO é reflexiva.
- Simétrica, se $xRy \Rightarrow yRx$: $1R3$ mas não $3R1$, portanto NÃO é simétrica.
- Antissimétrica, como $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ e não há casos em R tal que $(xRy \wedge yRx)$, temos que $F \Rightarrow x = y$ e portanto, é antissimétrica.
- Transitiva, se $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$: Verdade, pois se $x = 1$ e $y = 2$, temos que $(1R2) \wedge (2R3) \Rightarrow 1R3$ e todos estão em A

⑧ O conjunto $\mathbb{Z}$ são todos os números inteiros (positivo ou negativo). Para um elemento $a \in \mathbb{Z}$ estar em relação com um elemento b, $b = a$ ou $b = -a$. Portanto,

$$\boxed{C_a = \{a, -a\} = C_{-a}}$$

⑨

a) How many ways can the coach choose the five players?

Dado um conjunto de 12 jogadores, apenas 5 onde a ordem não importa, portanto

$$C_{(12,5)} = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\,5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120} = 792$$

b) How many ways can the coach choose two guards, two forwards and one center?

Choose of two guards

$$C_{(5,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = 10$$

Choose of two forwards

$$C_{(4,2)} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = 6$$

Choose of one center

$$C_{(3,1)} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

So there are $10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ ways to choose.

(9)

a) How many ways can the coach choose the five players?

Dado um conjunto de 12 jogadores, queremos 5 onde a ordem não importa, portanto $C_{(12,5)} = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\,5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120} = 792$

b) How many ways can the coach choose two guards, two forwards and one center?

Choose of two guards

$C_{(5,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = 10$

Choose of two forwards

$C_{(4,2)} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!} = 6$

Choose of one center

$C_{(3,1)} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$

So, there are $10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ ways to choose.

c) What if one of the centers is equally skilled at playing forward?

A resolução do livro é $\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{2}{1}$.

I II

A resposta do livro está incorreta pois, caso o jogador habilidoso não tenha sido escolhido para frente, ele ainda pode ser uma opção para o centro. Então em (II) se dentre as $\binom{5}{2}$ combinações ele não for

$C_{(5,2)} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} = 10 \qquad C_{(4,2)} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!\,2!} = 6 \qquad C_{(3,1)} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3!}{2!}$

So, there are $10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ ways to choose.

c) What if one of the centers is equally skilled at playing forward?

A resolução do livro é $\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{2}{1}$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ I $\qquad\qquad\qquad\qquad$ II

A resposta do livro está incorreta pois, caso o jogador habilidoso não tenha sido escolhido para fiete, ele ainda pode ser uma opção para o centro. Então, em (II), se dentre as $\binom{5}{2}$ combinações ele não for escolhido, ele ainda pode ser escolhido como centro, logo, a combinação $\binom{2}{1}$ não cobre este caso.

Resolução

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{g} \cdot \underbrace{1}_{\text{jogador habilidoso}} \cdot \binom{4}{1}\underbrace{\binom{2}{1}}_{2^\circ \text{ fiete}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{g}\binom{4}{2} \cdot \underbrace{1}_{\text{jogador habilidoso}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{g}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = 80 + 60 + 120 = 260$$

↳ sem o jogador habilidoso