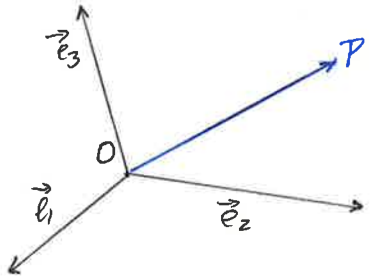
§2. Retas e Planos

Sistema de Coordenadas

Denotamos por $\mathbb{E}^3$ o espaço Euclideano (de dimensão 3).

Seja O um ponto de $\mathbb{E}^3$ e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

O par ordenado $\Sigma = (O, E)$ é chamado <u>sistema de coordenadas</u> em $\mathbb{E}^3$, de origem O e base E.



Dado um ponto P em $\mathbb{E}^3$, as coordenadas do vetor $\vec{OP}$ na base E são chamadas <u>coordenadas de P no sistema de coordenadas</u> Σ.

Se $\vec{OP} = (x, y, z)_E$, escrevemos $P = (x, y, z)_\Sigma$ ou $P = (x, y, z)$

As retas que contem O e que são paralelas ao vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas <u>eixos coordenados</u>.

Cada plano determinado por dois eixos coordenados chama-se <u>plano coordenado</u>

O sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ é dito <u>ortogonal</u> se a base E é ortonormal.

Soma de ponto com vetor

<u>Definição</u>

Sejam P um ponto em $\mathbb{E}^3$ e $\vec{u}$ um vetor em V^3.

O ponto Q tal que $\vec{PQ} = \vec{u}$ é chamado de soma de P com $\vec{u}$:

$$P + \vec{u} = Q \iff \vec{PQ} = \vec{u}$$

Proposição Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.
Se $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$, $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ e $\vec{u} = (a, b, c)_E$, então

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E$$
$$A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Temos
$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= -\vec{OA} + \vec{OB} \\ &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E\end{aligned}$$

Por definição $A + \lambda\vec{u} = Q \iff \vec{AQ} = \lambda\vec{u}$

Sejam $(x, y, z)_\Sigma$ as coordenadas do pt Q no sistema Σ.

Como $\vec{AQ} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)_E$, temos

$$\vec{AQ} = \lambda\vec{u} \iff \begin{cases} x - x_1 = \lambda a \\ y - y_1 = \lambda b \\ z - z_1 = \lambda c \end{cases} \iff (x, y, z)_\Sigma = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma.$$

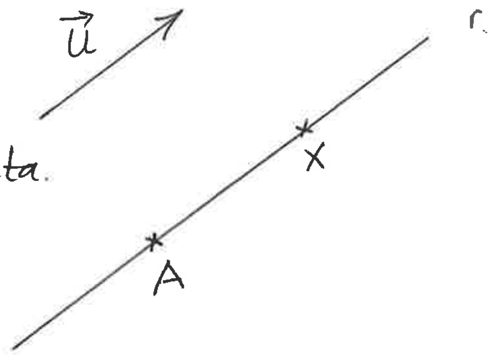
▨

Definição A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é o número real $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

Seja Σ um sistema ortogonal de coordenadas, e $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$. Então

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Retas



Um vetor não nulo paralelo a uma reta chama-se vetor diretor da reta.

Seja $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r.

Um ponto X pertence a r se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$ é paralelo a $\vec{u}$, ou seja, se e somente se, $X = A + \lambda\vec{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Variando λ em $\mathbb{R}$, obtemos todos os pontos da reta r. Então

$$\boxed{X \in r \iff X = A + \lambda\vec{u}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

A equação $r:\ X = A + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}$ é chamada equação da reta r na forma vetorial. O escalar λ é chamado parâmetro.

Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas e suponha que

$X = (x, y, z)_\Sigma$, $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$, $\vec{u} = (a, b, c)_E$. Então, escrevendo a equação da reta r na forma vetorial em coordenadas, obtemos

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = y_0 + \lambda c \end{cases}}$$

Este sistema é chamado sistema de equações da reta r na forma paramétrica.

Suponha que $a \neq 0$, $b \neq$ e $c \neq 0$. Então

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

: Sistema de equações da reta r na forma simétrica

Exemplo Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas, e seja r a reta determinada pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (3,-2,3)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{u} = \vec{AB} = (2,-2,2)_E = 2(1,-1,1)_E$

Logo $\vec{v} = (1,-1,1)_E$ também é um vetor diretor da reta r.

As equações de r nas formas:

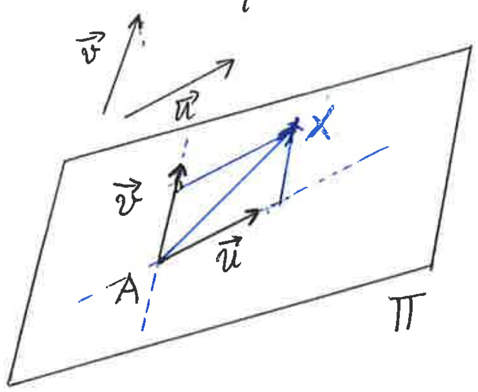
- vetorial : $(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,1)$

- paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

- simétrica : $x - 1 = -y = z - 1$.

Planos

Definição : Dois vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos a um plano π são chamados vetores diretores do plano π.



Sejam A um ponto do plano π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores diretores de π.

Um ponto X do espaço pertence ao plano π se, e somente se,

$\vec{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ para alguns escalares λ, μ,

Ou seja,

$$\boxed{X \in \pi \iff X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

A equação acima chama-se equação vetorial do plano π

Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e suponha que

$X = (x, y, z)_\Sigma$, $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$, $\vec{u} = (r, s, t)_E$, $\vec{v} = (m, n, p)_E$.

Então, temos o seguinte <u>sistema de equações paramétricas</u> do plano Π:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda r + \mu m \\ y = y_0 + \lambda s + \mu n \\ z = z_0 + \lambda t + \mu p \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

variando λ e μ em $\mathbb{R}$ obtemos as coordenadas de todos os pontos em Π.

<u>Exemplo</u> Seja Π o plano que contem os pontos $A = (1, 0, 1)_\Sigma$, $B = (2, 1, -1)_\Sigma$ e $C = (1, -1, 0)_\Sigma$.

- Vetores diretores de Π: $\vec{u} = \vec{AB} = (1, 1, -2)_E$
  $\vec{v} = \vec{AC} = (0, -1 -1)_E$

- Equação vetorial de Π: $X = (x, y, z)_\Sigma \in \Pi \Leftrightarrow X = B + \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

  ou seja
  $$(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(0, -1, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Equações paramétricas de Π:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = -1 - 2\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Seja π um plano, $A=(x_0,y_0,z_0)_\Sigma$ um ponto de π e $\vec{u}=(r,s,t)_E$ e $\vec{v}=(m,n,p)_E$ dois vetores diretores de π.

Temos $X=(x,y,z)_\Sigma \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ são LD.

De fato $X\in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ para alguns escalares λ,μ $\Rightarrow \overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}$ são LD.

Reciprocamente, suponha que $\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}$ são LD. Então existem escalares α,β,γ não todos nulos tal que

$$\alpha\overrightarrow{AX}+\beta\vec{u}+\gamma\vec{v}=\vec{0}.$$

O escalar α não pode ser nulo, caso contrário $\beta\vec{u}+\gamma\vec{v}=\vec{0}$ com $\beta\neq 0$ ou $\gamma\neq 0$, ou seja $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, que não pode acontecer pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π.

Portanto $\overrightarrow{AX}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\vec{u}+\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\vec{v} \Rightarrow X\in\pi.$

Daí obtemos,

$$X=(x,y,z)_\Sigma \in \pi \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (sp-tn)x+(mt-rp)y+(rn-sm)z - x_0(sp-tn)-y_0(mt-rp)-z_0(rn-sm)=0$$

Denotando $\begin{cases} a=sp-tn \\ b=mt-rp \\ c=rn-sm \\ d=-(x_0a+y_0b+z_0c) \end{cases}$

obtemos uma <u>equação geral</u> do plano π na forma:

$$\boxed{X=(x,y,z)_\Sigma\in\pi \Longleftrightarrow ax+by+cz+d=0}$$

Exemplo

Consider o exemplo anterior com π passando por $A=(1,0,1)_\Sigma$, $B=(2,1,-1)_\Sigma$ e $C=(1,-1,0)_\Sigma$. Já obtemos dois vetores diretores $\vec{u}=(1,1,-2)_E$ e $\vec{v}=(0,-1,-1)_E$ de π.

Então uma equação geral do plano é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{-3x+y-z+4=0}$$

(Verifique que as coordenadas de A, B, C satisfazem a equação geral de π.)

Exemplos

1. Obtenha equações gerais dos planos coordenados.
2. Obtenha uma equação geral do plano que contem os pontos $(1,0,0)_\Sigma$, $(0,1,0)_\Sigma$ e $(0,0,1)_\Sigma$.

Proposição

Fixando um sistema de coordenadas, toda equação de primeiro grau a três incógnitas como

$$ax+by+cz+d=0 \quad , \ a,b,c \text{ não todos nulos,}$$

é equação geral de um plano.

Demonstração

Suponha, sem perda de generalidade, $a \neq 0$.

Vamos achar três pontos no espaço satisfazendo a equação

$$ax+by+cz+d=0:$$

- $y=0$, $z=0$, então $x=-\frac{d}{a}$ $\rightarrow A=(-\frac{d}{a},0,0)_\Sigma$
- $y=1$, $z=0$, então $x=\frac{-d-b}{a}$ $\rightarrow B=(-\frac{d+b}{a},1,0)_\Sigma$
- $y=0$, $z=1$, então $x=\frac{-d-c}{a}$ $\rightarrow C=(-\frac{d+c}{a},0,1)_\Sigma$

Seja π o plano que contém os pontos A, B, C.

Sejam $\vec{u} = \vec{AB} = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)_E$

$\vec{v} = \vec{AC} = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)_E$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, portanto são vetores diretores do plano π. Logo, uma equação geral do plano π é

$$\begin{vmatrix} x + \frac{d}{a} & y & z \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = 0$$

$$\iff ax + by + cz + d = 0$$

Ou seja a nossa equação de primeiro grau é uma equação geral do plano π. $\blacksquare$

<u>Exemplo</u>

Obtenha as equações paramétricas do plano π que contem o ponto $A = (1,1,2)_\Sigma$ e é paralelo ao plano $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Obtenha uma equação geral do plano π.

Posição relativa e interseção de retas e planos

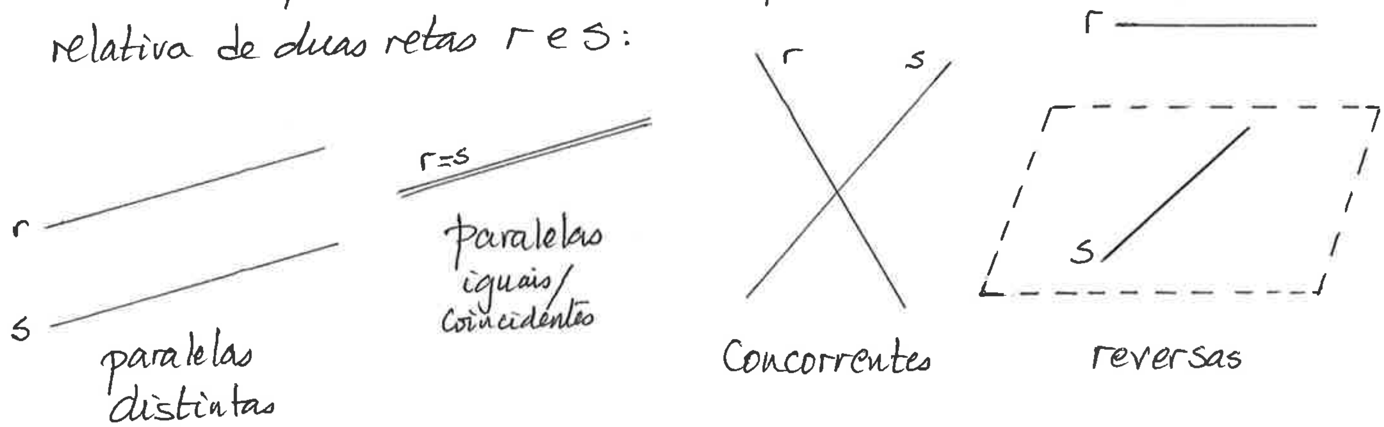
Dizemos que duas retas r e s são paralelas se elas possuem vetores diretores paralelos.

Duas retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes.

Se elas são paralelas distintas, então elas não são concorrentes.

Podemos ter em $\mathbb{E}^3$ retas não paralelas e não concorrentes. chamamos tais retas de retas reversas(*).

Então, no espaço $\mathbb{E}^3$, temos quatro possibilidades para posição relativa de duas retas r e s:



Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores de r e s respeitivamente, e sejam A um ponto da reta r e B um ponto da reta s.

(1) Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, então

r e s são reversas $\iff$ $\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}$ são LI

r e s são Concorrentes $\iff$ $\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}$ são LD.

(2) se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD, então

r e s são distintas $\iff$ $A \in r \Rightarrow A \notin s$

r e s são identicas $\iff$ $A \in r \Rightarrow A \in s$

(*) Reversas significa que existe um plano π que contém a reta s e que é paralelo a reta r, com $r \notin \pi$.

Exemplo

Vamos verificar se as retas, dadas na forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 9-4\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \ \lambda \in \mathbb{R}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas.

Temos $\vec{r} = (1,-1,1)$ e $\vec{s} = (-4,1,-2)$, Como eles são L.I. as retas r e s são reversas ou concorrentes.

Seja $A = (4,1,1) \in r$ e $B = (9,2,2)$, daí $\vec{AB} = (5,1,1)$

Temos
$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \vec{s} & \vec{AB} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
portanto r e s são concorrentes.

Para considerar a interseção de r e s é necessário indicar os parâmetros nas suas equações com letras diferentes:

$$r: \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 9-4\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 2-2\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

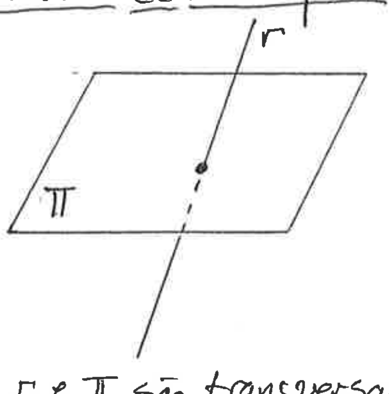
$$X = (x,y,z) \in r \cap s \iff \begin{cases} 4+\lambda = 9-4\mu \\ 1-\lambda = 2+\mu \\ 1+\lambda = 2-2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 4\mu = 5 & (1) \\ \lambda + \mu = -1 & (2) \\ \lambda + 2\mu = 1 & (3) \end{cases}$$

[observe que $3(3)-2(2): \lambda + 4\lambda = 5$]

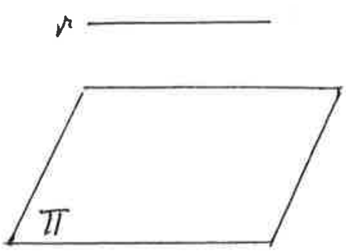
Temos $(1)-(2)$: $3\mu = 6 \Rightarrow \mu = 2$. Substituindo em (2) dá $\lambda = -3$.

Portanto as retas r e s se intersetam no ponto $(1,4,-2)$.

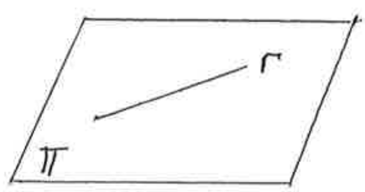
Posição relativa de reta e plano



r e π são transversais.



r é paralela a π



r está contida em π.

Exemplo

Seja r uma reta dada por $r: X = (1,0,1) + \lambda(2,1,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e Π um plano com equação geral $x+y+z=20$.

Um ponto $X \in r \cap \Pi$ se, e somente se, as coordenadas $X = (x,y,z) = (1+2\lambda, \lambda, 1+3\lambda)$ de X satisfazem a equação geral do plano Π, ou seja, se, e somente se,

$$(1+2\lambda) + \lambda + (1+3\lambda) = 20 \iff 6\lambda = 18 \iff \lambda = 3.$$

Logo r e Π são transversais e se intersectam no ponto $(7,3,10)$.

Proposição

Seja $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano Π e $\vec{u} = (m,n,p)$. Então $\vec{u}$ é paralelo a Π se, e somente se,

$$am+bn+cp=0.$$

Demonstração

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de Π, então

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

O vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano Π se, e somente se, o ponto $B = A + \vec{u}$ pertence a Π. Como $B = (x_0+m, y_0+n, z_0+p)$,

$$\begin{aligned} \vec{u} \parallel \Pi &\iff a(x_0+m) + b(y_0+n) + c(z_0+p) + d = 0 \\ &\iff \underbrace{ax_0+by_0+cz_0+d}_{=0} + am+bn+cp = 0 \\ &\iff am+bn+cp=0. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Corolário

Seja $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano Π, A um ponto de uma reta r e $\vec{r} = (m,n,p)$ um vetor diretor de r. Então

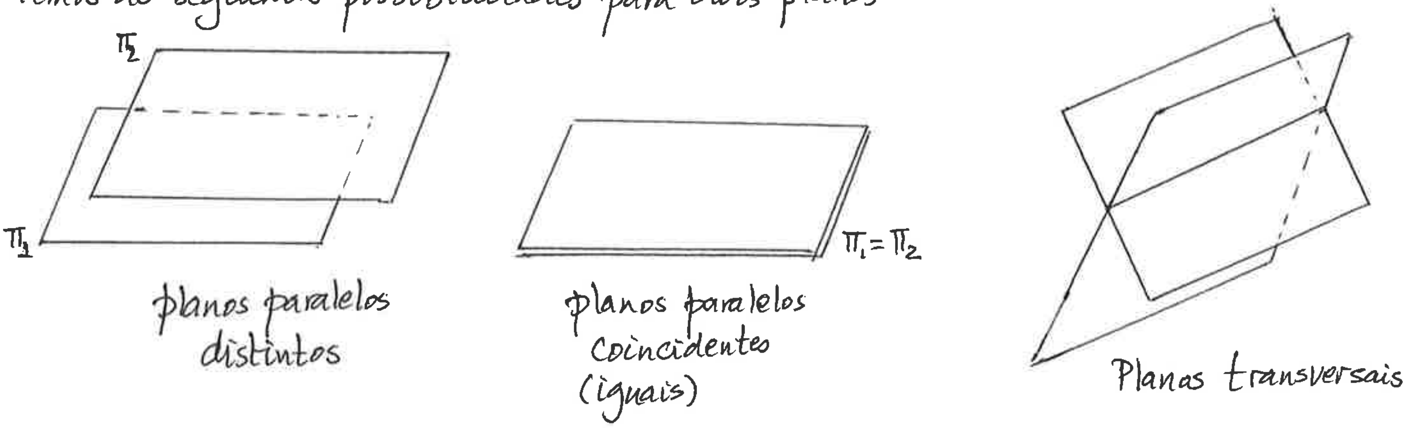
r e Π são transversais $\iff am+bn+cp \neq 0$.

r é paralela a Π $\iff am+bn+cp=0$ e $A \notin \Pi$.

r está contida em Π $\iff am+bn+cp=0$ e $A \in \Pi$.

Posição relativa de planos

Temos as seguintes possibilidades para dois planos



Proposição Sejam $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ equações gerais de planos Π_1 e Π_2 respectivamente.

(a) Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 são proporcionais. Se d_1 e d_2 são na mesma proporção, então $\Pi_1 = \Pi_2$. Se não Π_1 e Π_2 são paralelos distintos.

(b) Π_1 e Π_2 são transversais se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais.

Demonstração: Exercício.

Exemplo Sejam dois planos $\Pi_1: x+2y+3z-1=0$ $\quad a_1=1, b_1=2, c_1=3$

$\Pi_2 \quad x-y+2z=0$ $\quad a_2=1, b_2=-1, c_2=2$

Como a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais, os planos Π_1 e Π_2 são transversais. Vamos achar o conjunto $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Um ponto $X=(x,y,z) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \iff \begin{cases} x+2y+3z-1=0 & (1) \\ x-y+2z=0 & (2) \end{cases}$

Temos um sistema com duas equações e três incógnitas (i.e., um sistema indeterminado), Existem infinitas soluções.

Podemos pensar em y "como parâmetro" e resolver em x e z.

então

$$\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1-2y \\ x+2z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ z=1-3y \end{cases}, y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ y=y \\ z=1-3y \end{cases}, \; y\in\mathbb{R}$$

Portanto $\pi_1 \cap \pi_2$ é a reta dada na forma paramétrica por

$$r: \begin{cases} x=-2+7\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-3y \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$ (trocando de letra para indicar o parâmetro)

O sistema

$$r: \begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$ chama-se <u>sistema</u> <u>de</u> <u>equações</u> <u>da</u> <u>reta</u> <u>r</u> <u>na</u> <u>forma</u> <u>planar</u>.

De modo geral, se a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais o sistema

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$ descreve uma reta (pois é intersecção de dois planos transversais) e é chamado sistema de equações de r na forma planar

<u>Proposição</u> Um vetor $\vec{u}=(m,n,p)$ é paralelo a $r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

se, e somente se, $\begin{cases} a_1m+b_1n+c_1p=0 \\ a_2m+b_2n+c_2p=0 \end{cases}$

<u>Demonstração</u>: aplique a proposição na página 57.

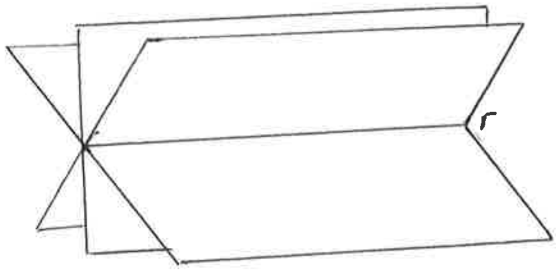
<u>Feixe de planos</u> Um feixe de planos é uma família de planos.

Vamos ver dois exemplos de feixes de planos.

ⓐ <u>Feixe de planos paralelos a um plano π</u>

Se π é dado por $ax+by+cz+d=0$, então a equação $ax+by+cz+\alpha=0$, descreve, quando α percorre $\mathbb{R}$, o feixe de planos paralelos a π. (Exercício)

(b) Feixes de planos que contêm uma reta r



Proposição Seja r a reta de equações planares

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

O feixe de planos que contêm r pode ser descrito pela equação

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

com α, β percorrendo o conjunto $\mathbb{R}$, sob a condição $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

(Podemos supor $\alpha^2+\beta^2=1$.)

Exemplo Obtenha uma equação do plano que contém o ponto $(2,0,0)$ e a reta de interseção dos planos $\Pi_1: 3x-2y-z-3=0$ e $\Pi_2: 2x+y+4z-2=0$

Solução: O plano em questão é um elemento do feixe de planos que contêm a reta $r: \begin{cases} 3x-2y-z-3=0 \\ 2x+y+4z-2=0 \end{cases}$. Portanto tem equação

$$\Pi: \alpha(3x-2y-z-3)+\beta(2x+y+4z-2)=0$$ para alguns escalares α, β com $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Como $(2,0,0)$ pertence a Π, temos

$$3\alpha+2\beta=0 \iff \beta=-\frac{3}{2}\alpha, \quad \text{com } \alpha\neq 0.$$

Logo uma equação de Π é

$$\alpha\left[(3x-2y-z-3)-\frac{3}{2}(2x+y+4z-2)\right]=0$$

$$\iff 2\alpha\left[2(3x-2y-z-3)-3(2x+y+4z-2)\right]=0$$

$$\overset{\alpha\neq 0}{\iff} -7y-14z=0 \iff y+2z=0.$$

Vetor normal a um plano

Qualquer vetor não nulo ortogonal a um plano π chama-se vetor normal a π.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores diretores de π. Um vetor $\vec{n}$ é um vetor normal a π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, segue que

$$\vec{n} = \alpha\, \vec{u} \wedge \vec{v}, \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Proposição Se o sistema de coordenadas é ortogonal, então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a um plano π se, e somente se, π tem equação geral da forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Demonstração

Suponha que π tem equação geral $ax+by+cz+d=0$.

Vimos que $\vec{u} = (m, n, p)$ é paralelo a π se, e somente se,

$$am + bn + cp = 0.$$

Isto é equivalente a $(a,b,c)\cdot(m,n,p) = 0 \iff \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$.

logo $\vec{n} = (a,b,c)$ é normal a π.

Agora seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π e $\vec{n} = (a,b,c)$ um vetor normal a π.

$$\begin{aligned} X=(x,y,z) \in \pi &\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AX} = 0 \\ &\iff (a,b,c)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0 \\ &\iff ax+by+cz \underbrace{-ax_0-by_0-cz_0}_{d} = 0 \\ &\iff ax+by+cz+d=0, \end{aligned}$$

ou seja, uma equação geral de π é da forma $ax+by+cz+d=0$.

Observação A proposição acima não vale se o sistema de coordenadas não é ortonormal.

Exemplo Seja $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal e $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$

Uma outra base com $\vec{e_1}=\vec{i}$, $\vec{e_2}=\vec{j}$, $\vec{e_3}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Seja $\Sigma=(O,E)$ um sistema de coordenadas. Obtenha um vetor normal ao plano $\pi[z=0]_\Sigma$.

Solução

os vetores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são vetores diretores do plano π:

$(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ são paralelos a π pela proposição na pagina 57.

Logo $\vec{k}$ é um vetor normal a π.

Temos $\vec{k}=\vec{e_3}-\vec{i}-\vec{j}=\vec{e_3}-\vec{e_1}-\vec{e_2}=-\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}$

Ou seja um vetor normal a π tem coordenadas $\vec{n}=(-1,-1,1)_E$.

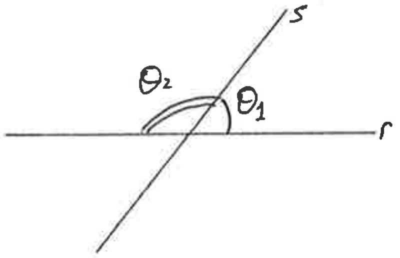
Exemplo Seja $\Sigma=(O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A=(1,1,2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x-y+2z+1=0$.

Medida angular

1. Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas concorrentes



Para evitar ambiguidade, definimos o angulo entre r e s como sendo o menor dos angulos θ_1 e θ_2. Este é um número do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Denotamos por $\text{ang}(r,s)$ o ângulo entre as retas r e s. Temos

$$0 \leq \text{ang}(r,s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r e $\vec{s}$ um vetor diretor da reta s.
Seja $\theta = \text{ang}(\vec{r}, \vec{s})$ e $\varphi = \text{ang}(r,s)$

Temos $\text{ang}(r,s) = \begin{cases} \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{ang}(-\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } \text{ang}(\vec{r}, \vec{s}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Temos $\cos(\text{ang}(\vec{r}, \vec{s})) = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}$ e $\cos(\text{ang}(-\vec{r}, \vec{s})) = -\dfrac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = -\cos(\text{ang}(\vec{r}, \vec{s}))$

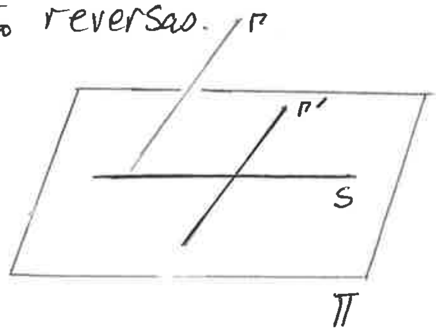
Portanto $\cos\varphi = \begin{cases} \cos\theta & \text{se } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos\theta & \text{se } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Ou seja $\cos\varphi = |\cos\theta|$, isto é

$$\boxed{\cos(\text{ang}(r,s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}}$$

Se as retas r e s são paralelas, então $ang(r,s)=0$.

Suponha que r e s são reversas.



Seja π o plano que contem a reta s e é paralelo a reta r.
Seja r' uma reta paralela a r e contida no plano π.
Definimos $ang(r,s) = ang(r',s)$.

Como um vetor diretor $\vec{r}$ de r também é vetor diretor da reta r', temos

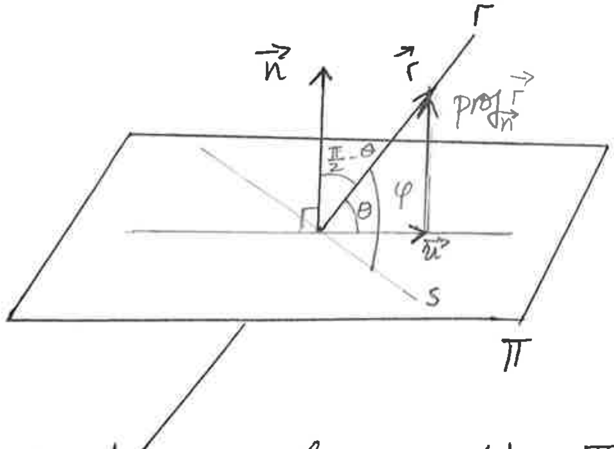
$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}.$$

[A construição acima é para tornar intuitivo a construção do ângulo entre duas retas reversas.]

<u>Exemplo</u>. Seja $\Sigma = (O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas

Obtenha equação da reta r que contém o ponto $P=(1,1,1)$ e é concorrente com $s: x=2y=2z$, Sabendo que o cos-seno da medida angular entre r e s é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Medida angular entre reta e plano



Seja r uma reta transversal a um plano π. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal de π.

Definimos o ângulo entre r e π como

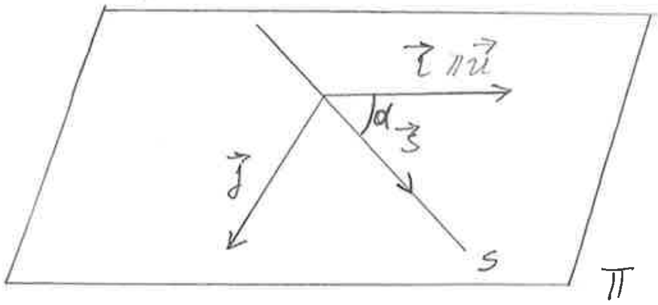
$ang(r,\pi) :=$ menor dos ângulos $ang(r,s)$ com s uma reta em π.

Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{r}$ ao plano π.

Temos $proj_{\vec{n}}\vec{r} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{r}\|\|\vec{n}\|}\vec{n}$ e $\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{u}$.

Portanto $\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{r}\|\|\vec{n}\|}\vec{n}$

Seja $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\vec{j} = \vec{i} \wedge \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. Os vetores $\vec{i},\vec{j}$ são vetores diretores do plano π, são unitários e ortogonais.



Seja s uma reta em π e $\vec{s}$ um vetor diretor de s. Escolhamos $\vec{s}$ unitário

Temos $\vec{s} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \vec{j}$ onde $\alpha = ang(\vec{s},\vec{i})$

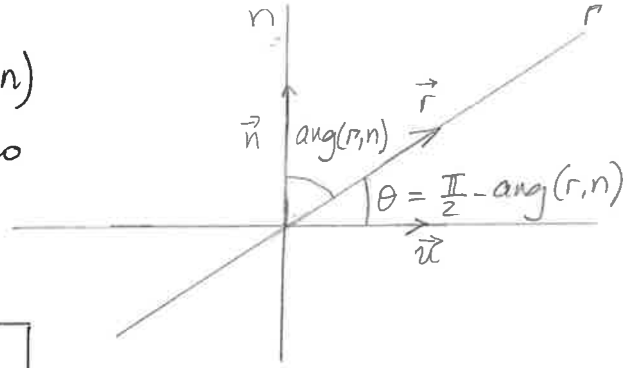
e $\vec{r}\cdot\vec{s} = \cos\alpha\, \vec{r}\cdot\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \vec{r}\cdot\vec{j}$

Como $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{n}$, e $\vec{r}$ e combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{n}$, segue que $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{r}$. Portanto $\vec{r}\cdot\vec{j} = 0$,

e $\vec{r}\cdot\vec{s} = \cos\alpha\, \vec{r}\cdot\vec{i}$

Temos $\cos(\text{ang}(r,s)) = \dfrac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|} = \dfrac{|\cos\alpha|\cancel{\|\vec{r}\|}\,\|\vec{u}\|}{\cancel{\|\vec{r}\|}\,\|\vec{s}\|} = |\cos\alpha|$ ($\vec{r}, \vec{s}$ são unitários).

Portanto o ang(r,s) é mínimo se, e somente se, $\alpha = 0$ se, e somente se, s é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano Π.

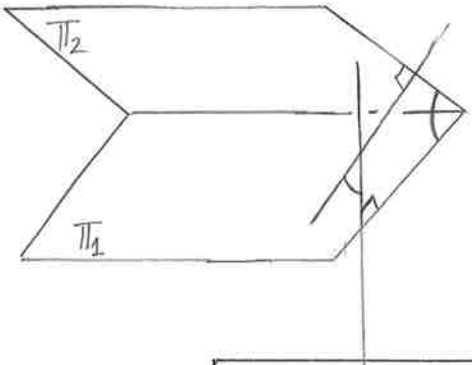


Então $\text{ang}(r,\Pi) = \dfrac{\Pi}{2} - \text{ang}(r,n)$

onde n é uma reta ortonal ao plano Π.

Daí $\boxed{\text{sen}(\text{ang}(r,\Pi)) = \dfrac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{n}\|}}$

3. Medida angular entre dois planos



A medida angular entre dois planos Π_1 e Π_2 é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a Π_1 e Π_2 respectivamente.

Temos $\boxed{\cos(\text{ang}(\Pi_1,\Pi_2)) = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}}$

Com $\vec{n_1}$ vetor normal a Π_1 e
$\vec{n_2}$ vetor normal a Π_2.

Exemplo Seja $\Sigma = (0, E)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Sejam $\Pi_1 : x - y + z = 20$
$\Pi_2 : X = (1,1,-2) + \lambda(0,-1,1) + \mu(1,-3,2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Calcule ang(Π_1, Π_2).

Distância

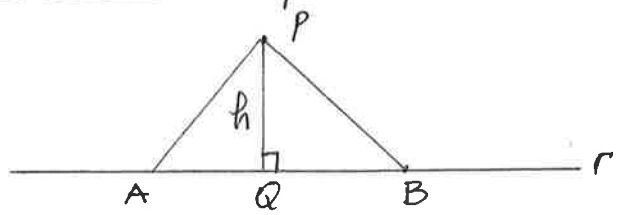
Fixamos um Sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, B)$, com B base positiva.

1. Distância entre dois pontos

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos,

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

2. Distância entre um ponto e uma reta



Denotamos por $d(P,r)$ a distância entre P e r

Definimos $d(P,r) =$ menor das distâncias entre P e os pontos de r

$= d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P a r.

Vamos calcular $d(P,r)$. Escolhamos dois pontos distintos da reta r.

Temos área do triângulo $ABP = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} h \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$

onde $h = d(P,Q) = d(P,r)$. Logo

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

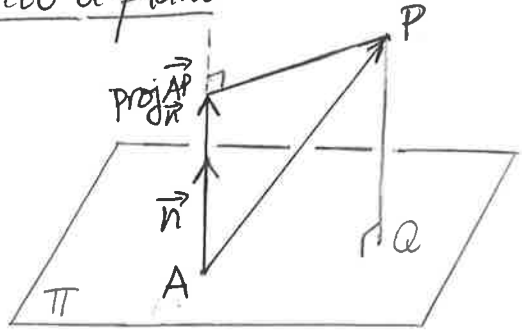
Podemos substituir $\overrightarrow{AB}$ por um vetor diretor $\vec{r}$ da reta r, e obtemos

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}}$$

Exemplo Calcule a distância entre $P = (1,-1,4)$ e

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$

3. Distância de ponto a plano



Seja π um plano e $\vec{n}$ um vetor normal a π.

Denotamos por $d(P,\pi)$ a distância de P a π.

Definimos $d(P,\pi)$ = o menor das distâncias entre P e os pontos de P
$= d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P a π.

Temos
$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= d(P,Q) \\ &= \|\vec{PQ}\| \\ &= \|\text{proj}_{\vec{n}}\vec{AP}\| \\ &= \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \end{aligned}$$
onde A é um ponto qualquer do plano π.

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Suponha que π é dado por uma equação geral
$$ax+by+cz+d=0$$
e $P=(x_0,y_0,z_0)$, $A=(x_1,y_1,z_1)$. Então $\vec{AP}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$
$\vec{n}=(a,b,c)$.

Temos
$$\begin{aligned} \vec{AP}\cdot\vec{n} &= a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1) \\ &= ax_0+by_0+cz_0 \underbrace{-ax_1-by_1-cz_1}_{=d} \\ &= ax_0+by_0+cz_0+d. \end{aligned}$$

Logo
$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Exemplo

Calcule a distância de $P = (9,2,-2)$ a $\pi: X = (6,-5,0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1,0,0)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Distância entre retas

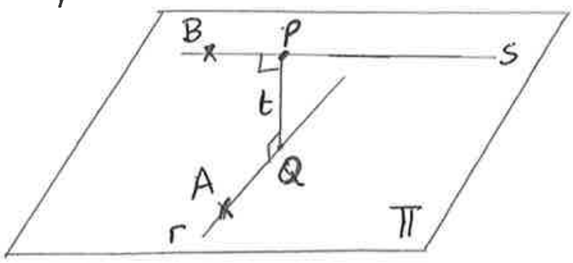
Sejam r e s duas retas. Denote por $d(r,s)$ a distância entre r e s.

Definimos $d(r,s)$ = o menor das distâncias entre pontos A de r e pontos B de s.

Então $d(r,s) = 0$ se r e s são concorrentes ou são paralelas identicas

$d(r,s) = d(A,s) = d(B,r)$ se r e s são paralelas distintas.

Suponha agora que r e s são reversas.



Seja π o plano que contém a reta r e é paralelo a reta s.

Seja t uma reta perpendicular a r e s. Então

$$d(r,s) = d(P,Q)$$

Sejam A um ponto qualquer de r e B um ponto qualquer de s.

Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{s}$ um vetor diretor de s.

O vetor $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é um vetor normal de π. Temos

$$d(r,s) = d(P,Q) = d(B,\pi) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}}$$

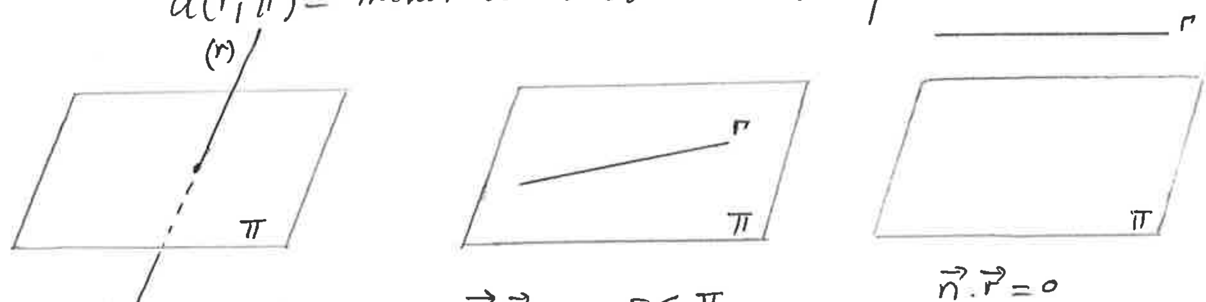
Exemplo Calcule a distância entre

$r: X = (2,1,0) + \lambda(1,-1,1)$ e $s: x+y+z = 2x-y-1 = 0$.

5. Distância entre reta e plano

Definimos a distância $d(r,\pi)$ entre a reta r e o plano π como

$d(r,\pi) =$ menor das distâncias entre ponto A de r e B de π



$\vec{n}\cdot\vec{r} \neq 0$ r é transversal a π

$d(r,\pi) = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 0$, $r \subset \pi$

$d(r,\pi) = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 0$

$\vec{r}$ é paralela a π, $r \not\subset \pi$

$d(r,\pi) = d(P,\pi)$, $P \in r$.

6. Distância entre planos

Definimos, de uma maneira análoga ao item 5 acima, a distância entre dois planos π_1 e π_2. Temos

$d(\pi_1,\pi_2) = 0$ se π_1, π_2 são transversais ou identicos

$d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = d(Q,\pi_1)$, $\forall P \in \pi_1$ e $\forall Q \in Q_2$ se π_1 e π_2 são paralelo distintos.

Exemplo $\Sigma = (0, B)$ sistema ort. coord, B base positiva.

Seja $A = (0,2,1)$ e $r: (x,y,z) = (0,2,-2) + \lambda(1,-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obtenha os ponto da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. A distância de A a r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Porque?

Um ponto P da reta r tem coordenadas (x,y,z) com $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$

Portanto $d(A,P)^2 = \lambda^2 + (2-2+\lambda)^2 + (1+2-2\lambda)^2$

$= 6\lambda^2 - 12\lambda + 9$

Temos $d(A,P) = \sqrt{3} \Leftrightarrow d(A,P)^2 = 3 \Leftrightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 3 \Leftrightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$

O único ponto de r que dista $\sqrt{3}$ de A é o ponto $P = (1,1,0)$.

Como o ponto é unico, $d(A,r) = \sqrt{3}$ (Detalhe este argumento!)

Exemplos $\Sigma = (0, B)$ sistema ortogonal de coordenadas com B base positiva

1. Obtenha os pontos da reta $r: x - y = 2y = z$ que equidistam de $A = (1,1,0)$ e $B = (0,1,1)$.

2. Obtenha os pontos da reta $r: X = (0,1,1) + \lambda(1,1,2), \lambda \in \mathbb{R}$ que equidistam dos planos $\pi_1: x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2: x - y + 2z = 1$.

3. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,2,1)$ e equidista dos pontos $C = (2,3,0)$ e $D = (0,1,2)$.

Mudança de Sistema de Coordenadas

A nossa escolha de um sistema de coordenadas é arbitrária.
Como passar das coordenadas de um ponto X em $\mathbb{E}^3$ em um sitema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas?

Seja $\Sigma_1 = (O_1, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e seja
$\Sigma_2 = (O_2, F)$ um novo sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Suponha que $O_2 = (h, k, \ell)_{\Sigma_1}$ e denote por M_{EF} a matriz de mudança da base E para F.

Um ponto $X \in \mathbb{E}^3$ tem coordenadas $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$ e coordenadas $X = (u, v, w)_{\Sigma_2}$.

Por definição,

$$X = (x, y, z)_{\Sigma_1} \iff \overrightarrow{O_1X} = (x, y, z)_E$$
$$X = (u, v, w)_{\Sigma_2} \iff \overrightarrow{O_2X} = (u, v, w)_F$$
$$O_2 = (h, k, \ell)_{\Sigma_1} \iff \overrightarrow{O_1O_2} = (h, k, \ell)_E$$

Decorre

$$\overrightarrow{O_2X} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1X} = \overrightarrow{O_1X} - \overrightarrow{O_1O_2} = (x-h, y-k, z-\ell)_E$$

Aplicando a formula de mudança de base a $\overrightarrow{O_2X}$ obtemos

$$\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-\ell \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F$$

Portanto, $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Escrevendo

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

obtemos as chamadas equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2:

$$\begin{cases} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = \ell + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

Observação

Temos $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-\ell \end{pmatrix}_E = M_{FE} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-\ell \end{pmatrix}$ e isso nos permite obter as equações de mudança de coordenadas de Σ_2 para Σ_1.

Exemplo

Sejam $\Sigma_1 = (O_1, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O_2, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ dois sistemas de coordenadas com $O_2 = (1,0,0)_{\Sigma_1}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$

Obtenha, em relação a Σ_2,

(a) uma equação vetorial da reta $r: [X = (0,0,0) + \lambda(0,1,-1)]_{\Sigma_1}$

(b) uma equação geral do plano $\pi: [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$

Solução

Temos $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, portanto as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 são

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = w \\ z = -v \end{cases}$$

(a) As equações paramétricas no sistema Σ_1 da reta r são $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Equivalentemente $r: \begin{cases} 1 + u = 0 \\ w = \lambda \\ -v = -\lambda \end{cases}$

Ou seja as equações paramétricas da reta r no sistema Σ_2 são

$$r: \begin{cases} u = -1 \\ v = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ w = \lambda \end{cases}$$

Uma equação vetorial de r no sistema Σ_2 é

$$r: [X = (-1,0,0) + \lambda(0,1,1)]_{\Sigma_2}$$

(b) Substituindo x, y, z pelas suas expressões em termo de u, v, w, obtemos

$$2(1+u)-(w)+(-v)=0 \iff 2u-v-w+2=0$$

Então $\Pi: [2u-v-w+2=0]_{\Sigma_2}$.

Translação

Se as bases dos sistemas $\Sigma_1=(O_1, E)$ e $\Sigma_2=(O_2, E)$ são iguais, diremos que Σ_2 é obtido pela translação de Σ_1 para o ponto O_2.

Como $M_{EE} = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 ficam

$$\begin{cases} x = h+u \\ y = k+v \\ z = l+w \end{cases}$$

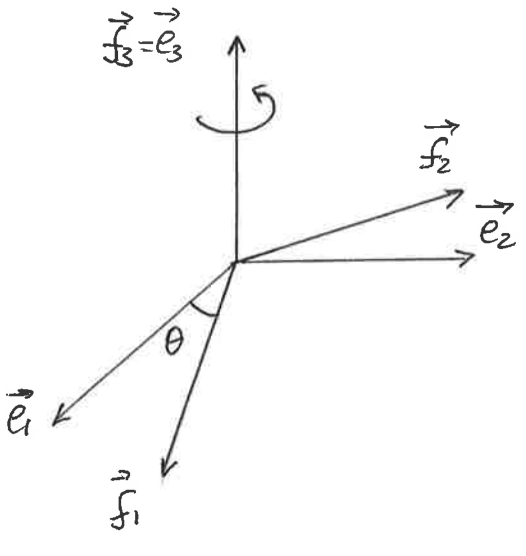
onde $O_2=(h, k, l)_{\Sigma_1}$.

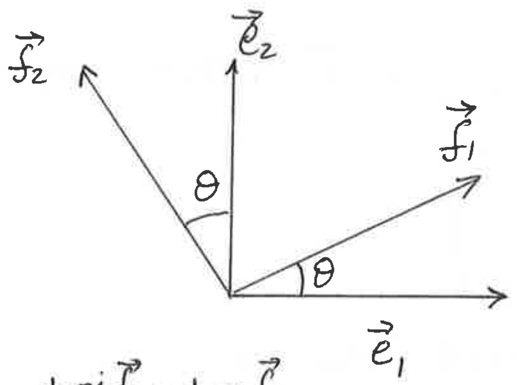
Rotação

Vamos tratar do caso onde as base são ortonormais.

Suponha que $\Sigma_1=(O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2=(O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ são dois sistemas de coordenadas com a mesma origem O.

Vamos fixar $\vec{f}_3=\vec{e}_3$ e supor que $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_2$ são obtidos "girando" a base E em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ.





Temos
$$\vec{f_1} = \text{proj}_{\vec{e_1}}\vec{f_1} + \text{proj}_{\vec{e_2}}\vec{f_1}$$
$$= \frac{\vec{f_1}\cdot\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|^2}\vec{e_1} + \frac{\vec{f_1}\cdot\vec{e_2}}{\|\vec{e_2}\|^2}\vec{e_2}$$
$$= (\vec{f_1}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{f_1}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}$$
$$= \cos\theta\,\vec{e_1} + \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)\vec{e_2}$$
$$= \cos\theta\,\vec{e_1} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e_2}$$

Similarmente,
$$\vec{f_2} = (\vec{f_2}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{f_2}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2} = \cos(\tfrac{\pi}{2}+\theta)\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$$

Portanto
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as equações de mudança de coordenadas são
$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \\ z = w \end{cases}$$

Observações

1. Mantendo $\vec{e_1}$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

e mantendo $\vec{e_2}$ fixo
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. No plano, as equações de mudança de coordenadas por translação são $\begin{cases} x = h+u \\ y = k+v \end{cases}$ e por rotação $\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{cases}$