SME 0121 Processos Estocásticos
ICMC-USP, Ricardo Ehlers
Lista 3

1. Uma urna contém uma bola vermelha e uma bola verde. Uma bola é removida aleatoriamente e trocada por uma bola de cor oposta. Este processo é repetido de tal modo que exatamente duas bolas ficam na urna. Seja X_n o número de bolas vermelhas na urna na $n-$ésima retirada, com $X_0 = 1$. Determine a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}$.

2. Encontre o tempo médio para o processo alcançar o estado 3 dado que o processo se iniciou no estado 0 para uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por,

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

3. Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ cuja matriz de probabilidades de transição é:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Iniciando no estado 1, determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0.

   (b) Determine o tempo médio de absorção.

4. Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam. Obtenha o número médio de lançamentos necessários.

5. Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ cuja matriz de probabilidades de transição é dada por,

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

   Iniciando no estado 1, determine o tempo médio em que o processo gasta no estado 1 e 2 antes da absorção. Verifique que a soma de ambos é igual ao tempo médio de absorção.

6. Qual dos experimentos necessita de menos lançamentos? (a) sucessivos lançamentos até que o padrão cara-cara-coroa apareça, ou (b) sucessivos lançamentos até que o padrão cara-coroa-cara apareça? Justifique sua resposta.

7. Você tem cinco moedas. Você lança todas elas e aleatoriamente elas saem como cara ou coroa. Então, você seleciona as que sairam como coroa as lança novamente. Depois do lançamento, você seleciona as que sairam coroa e repete o processo até que todas saiam como cara. Seja X_n o número de moedas no último lançamento. Calcule $P\{X_n = 1\}$.

8. Determine a probabilidade de ruína do jogador A quando ambos os jogadores começam com R$ 50,00 e apostam R$ 1,00 a cada jogo. Calcule para os casos em que a probabilidade de A ganhar é: (a) $p = 0.4929$ e (b) $p = 0.5029$. Qual a probabilidade de ruína quando cada jogador inicia com R$ 500,00?

9. Suponha que itens produzidos por um certo processo são classificados como defeituosos ou perfeitos. Se um item é defeituoso ou não, depende da qualidade dos itens previamente produzidos. Mais especificamente, suponha que um item defeituoso é seguido por outro item defeituoso com probabilidade 0.80, enquanto que um item perfeito é seguido de outro perfeito com probabilidade 0.95. Suponha que no instante zero, um item perfeito é produzido. Determine a probabilidade de que o oitavo item é perfeito. Calcule (a) usando a equação P^n para cadeias de Markov com dois estados e (b) a oitava potência da matriz de probabilidades de transição.

10. Cinco bolas são distribuídas entre duas urnas A e B. A cada período, uma urna é selecionada aleatoriamente e, se não está vazia, uma bola dessa urna é selecionada e colocada na outra urna. No longo prazo, qual a fração de tempo que A fica vazia?

11. Considere o passeio aleatório com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e o passeio aleatório no círculo com 5 vértices. Qual destas cadeias é irredutível? Note que a resposta pode depender do valor do parâmetro p.

12. Considere uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ e probabilidades de transição,

$$P_{i,i+1} = p \quad \text{e} \quad P_{i,0} = 1 - p,$$

para $i = 0, 1, \dots$ e $0 < p < 1$.

    (a) Prove que esta cadeia é irredutível.
    (b) Prove que esta cadeia é recorrente positiva.