Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo
SME0121 Processos Estocasticos 27/05/2021

Desenvolva e justifique suas respostas. Expressões sem justificativa poderão ser desconsideradas na correção.

1. (2.0) Considere um jogo no qual você ganha ou perde uma unidade com probabilidades p e q respectivamente ($p + q = 1$). Se tiver zero unidade não ganha nada com probabilidade q. O jogo termina quando você atinge 3 unidades.

   (a) Estabeleça um modelo para este jogo, especificando o espaço de estados e a matriz de transição.

   (b) Calcule o tempo médio para o jogo terminar dado que você começou com zero unidade.

2. (3.0) Considere uma cadeia de Markov $\{X_t, t = 0, 1, \dots\}$ com espaço de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ cuja matriz de probabilidades de transição é dada por,

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.10 & 0.50 & 0.20 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.60 & 0.10 \\ 0.20 & 0.20 & 0.30 & 0.30 \end{bmatrix}$$

   Iniciando no estado $X_0 = 1$, determine

   (a) a probabilidade de que a cadeia nunca visite o estado 2;

   (b) a probabilidade de que a cadeia eventualmente entre no estado 0;

3. (2.0) A classe social de gerações sucessivas de uma mesma familia segue uma cadeia de Markov com as seguintes probabilidades de transição a 1 passo.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{baixa} & \text{media} & \text{alta} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{baixa} \\ \text{media} \\ \text{alta} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

   (a) Verifique a recorrência e periodicidade dos estados. Verifique se a cadeia é ergódica.

   (b) Que fração das familias pertencerá à classe alta no longo prazo?

4. (3.0) Uma partícula se move sobre um círculo e em cada tempo pode estar em uma das posições $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. A cada passo ela se move para a esquerda com probabilidade p ou para a direita com probabilidade $1 - p$. Se a partícula atingir as posições 0 ou 5, no passo seguinte ela salta para as posições 1 ou 4 respectivamente.

   (a) Verifique se este processo é uma cadeia de Markov e obtenha sua matriz de transição a 1 passo.

   (b) Especifique as classes e verifique se os estados são recorrentes, recorrentes positivos ou transientes.

   (c) Verifique se a cadeia é ergódica e calcule as probabilidades limites (ou de longo prazo caso não seja ergódica).

Formulário

- $E(X) = E[E(X|Y = y)]$.
- $Var(X) = E[Var(X|Y = y)] + Var[E(X|Y = y)]$.
- Transição em mais de um passo: $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n$.
- O estado i é recorrente se somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$.
- O estado i é transiente se somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$.

  Para um estado i transiente, $N \sim$ Geometrica $(1 - f_i)$.
  N: número retornos ao estado i até que nunca mais retorne ao estado i.
- Periodo de um estado i,
$$d(i) = mdc\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}.$$
- O estado i é recorrente positivo se for recorrente e $E(T) < \infty$,
$$T = \min\{n \geq 0; X_n = i|X_0 = i\}.$$
- Distribuição limite: $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\ P$, sujeito a $\sum_j \pi_j = 1$.
- Probabilidades de transição em processos de ramificação:
$$P(X_n = j|X_{n-1} = k) = P\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i = j\right),$$
  Z_i o número de descendentes do i-ésimo individuo da $(n-1)$-ésima geração.
- Reversibilidade: $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ para todos os estados i e j.
- $X \sim$ Gama(α, β),
$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x),\ x > 0, \alpha > 0,\ \beta > 0.$$
- $X \sim$ Poisson(ϕ)
$$P(X = x) = \frac{\phi^x}{x!}\ e^{-\phi}.$$
- $P(X \in A) = E[g(X)]$ sendo $g(x) = I_A(x)$.