Exercícios - Cálculo IV - Aula 3 - Semana 8/9-11/9

Critérios de Convergência de Séries de Termos Não-Negativos

Critérios	Conclusões	Comentários
Critério da Comparação Para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ com termos não negativos, compare com uma série conhecida $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$	Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$, para algum $N \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.	Normalmente usado para uma série semelhante a uma série geométrica ou p-série. Às vezes, pode ser difícil encontrar uma série apropriada para comparar.
	Se $a_n \geq b_n \geq 0$ para todo $n \geq N$, para algum $N \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.	
Critério da Comparação no Limite Para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ com termos positivos, compare com uma série conhecida $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ avaliando $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.	Se $L \in \mathbb{R}$ e $L > 0$, então ou ambas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem ou ambas divergem.	Normalmente usado para uma série semelhante a uma série geométrica ou p-série. Frequentemente mais fácil de aplicar do que o teste de comparação.
	Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.	
	Se $L = \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.	
Critério da Integral Se existe uma função positiva, contínua e decrescente f tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq N$, avalie a integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x)dx$.	Se $\int_N^{\infty} f(x)dx$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge.	Limitado às séries para as quais a função f correspondente pode ser facilmente integrada ou que sua integral imprópria $\int_N^{\infty} f(x)dx$ possa ser estudada quanto à convergência ou divergência.
	Se $\int_N^{\infty} f(x)dx$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ diverge.	

As demonstrações desses critérios são baseadas no seguinte resultado:

Proposição. Se $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a sequência (s_n) das somas parciais é limitada.

Observe que se os termos de uma série são não-negativos, a sequência de suas somas parciais é crescente. Assim, a proposição acima é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona estudado na Lista da Aula 1.

Exemplo 1. Para qualquer número real p, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

é chamada uma p-série ou uma série harmônica de ordem p. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Solução. Se $p \leq 0$, então $\frac{1}{n^p} \not\to 0$, com $n \to \infty$. Pelo Critério da Divergência, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Se $p > 0$, a função $f(x) = 1/x^p$ é positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Para verificar que f é decrescente, basta ver que $f'(x) = -p/x^{p+1} < 0$ para todo $x \in [1, \infty)$.

Para $p = 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty.$$

Se $p > 0$, $p \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{1-p} t^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p < 1. \end{cases}$$

Juntando esta informação com o estudo da caso $p = 1$, temos que a integral diverge se $0 < p \leq 1$ e converge se $p > 1$. Assim, pelo Critério da Integral, a série diverge se $0 < p \leq 1$. Assim, concluímos que a p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ é convergente ou divergente?

Solução. Sendo $0 < \sin x < x$ para todo $x \in (0, \pi)$, segue que

$$0 \leq \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois trata-se de uma 2-série, segue do critério da comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ é convergente.

Exemplo 3. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ é convergente ou divergente?

Solução. Seja $a_n = (2n^2+3n)/\sqrt{5+n^5}$. Para n grande, a_n se comporta como $2n^2/n^{5/2} = 2/n^{1/2}$, pois o termos principais dominam para n grande, assim tomamos $b_n = 2/n^{1/2}$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}} \quad \text{diverge}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{2\sqrt{5+n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5}+1}} = 1 > 0,$$

segue do Critério da Comparação no Limite que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ também diverge.

Exemplo 4. A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ é convergente ou divergente?

Solução. Vamos tomar como série de comparação a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Temos,

$$a_n = \frac{1}{\ln n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty.$$

Pelo Critério da Comparação no Limite, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ é divergente.

Exemplo 5. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ é convergente ou divergente?

Solução. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{n/2}}$ é convergente, pois se trata da série geométrica de razão $\frac{1}{\sqrt{e}} < 1$. Temos,

$$a_n = \frac{n}{e^n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{e^{n/2}}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n/2}} = 0.$$

Pelo Critério da Comparação no Limite, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ é convergente.

Exercício. Determine se as séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [1-\cos(1/n)]$