Exercícios - Cálculo IV - Aula 5 - Semana 21/9-25/9
Convergências Absoluta e Condicional

Antes de introduzir as convergências absoluta e condicional, vamos analisar dois exemplos.

Considere uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e a série relacionada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Aqui, discutimos as possibilidades de relação entre a convergência dessas duas séries. Por exemplo, considere a série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. A série cujos termos são o valor absoluto desses termos é a série harmônica, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Como a série harmônica alternada converge, mas a série harmônica diverge, dizemos que a série harmônica alternada exibe convergência condicional.

Considere agora a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. A série cujos termos são os valores absolutos dos termos desta série é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Como ambas as séries convergem, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ exibe convergência absoluta.

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente conververgente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente conververgente se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Conforme mostrado pela série harmônica alternada, uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode convergir, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pode divergir. O teorema a seguir, entretanto, nos diz que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Teorema. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Observação 1. Os critérios de convergência para séries de termos não-negativos (comparação, comparação no limite, da integral, razão e raiz) são critérios de convergência absoluta.

Exemplo 1. Para cada uma das seguintes séries, determine se a série converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

Solução.

a) Vemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ diverge usando o teste de comparação no limite com a série harmônica. De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(3n+1)}{1/n} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ não converge absolutamente. No entanto, como

$$\frac{1}{3(n+1)+1} < \frac{1}{3n+1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3n+1} \to 0,$$

pelo Critério de Leibniz, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ converge. Podemos concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ é condicionalmente convergente.

b) Observando que

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},\ n \geq 1, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge,}$$

segue do critério da comparação que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ converge. Portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Exercício 1. Determine se cada uma das seguintes séries converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+3}}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2(1/n)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1/n)$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(1-\cos(1/n))$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,(\arctan(n+1)-\arctan n)$ (sugestão: use o teorema do valor médio.)

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

Exemplo 2. Determine x para que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ seja convergente.

Solução. Vamos estudar primeiro a série de termos não negativos, isto é, vamos estudar primeiro a convergência absoluta. Vamos aplicar o critério da raiz para a série com o termo geral em valor absoluto. Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$\sqrt[n]{|nx^n|} = \sqrt[n]{n}|x|.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}|x| = |x|,$$

a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$, ou seja, para $-1 < x < 1$.

Agora, para $|x| \geq 1$, ou seja, para $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, o termo geral $\sqrt[n]{n}x^n \not\to 0$, portanto pelo critério da Divergência, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ é divergente para $|x| \geq 1$.

A conclusão é que a série $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| \geq 1$.

Observação 2. Embora não tenha sido comentado na aula do Prof. Possani, os critérios da raiz e da razão possuem versões para séries de termos quaisquer (sem sinal definido) e serão enunciados a seguir.

Teorema (Critério da raiz para séries de termos quaisquer). Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, temos:

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $L = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

O critério não é conclusivo se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Demonstração.

1. Suponhamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$. Logo, existem $r \in (L, 1)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que
$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < r^n.$$
Como $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge, segue do critério da comparação que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

2. Suponhamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $L = \infty$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$
Assim, $|a_n| > 1$ se $n \geq n_0$, implicando $a_n \not\to 0$ e, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Para mostrar a última parte, consideremos, por exemplo, as séries $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ (divergente) e $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ (convergente). Para ambas, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1/n^2|} = 1$.

Exemplo 3. Vamos refazer o Exemplo 2 usando o critério da raiz para séries de termos quaisquer:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nx^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}|x| = |x|.$$

Pelo critério da raiz para séries de termos quaisquer, a série $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ é absoulutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$.

Para $|x| = 1$ a série é divergente. De fato, se $x = 1$ a série é diverge, pois $n|x|^n = n \not\to 0$. Se $x = -1$ a série também diverge, pois $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$ não existe.

De modo análogo, podemos provar o critério da razão para séries de termos quaisquer:

Teorema (Critério da razão para séries de termos quaisquer). Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ para algum $N \in \mathbb{N}$, temos:

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L > 1$ ou $L = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

O critério não é conclusivo se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$.

Exemplo 4. Determine x para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ seja convergente.

Solução. Para $x = 0$ a série é convergente. Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão para séries de termos quaisquer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \frac{n}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Segue, do critério da razão, que a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$.

Para $x = 1$, temos a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que já sabemos que diverge. Para $x = -1$, temos a série harmôncia alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ que é convergente.

A conclusão é que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ é convergente para $-1 \leq x < 1$.

Podemos concluir mais: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$, divergente se $x < -1$ ou $x \geq 1$ e condicionalmente convergente para $x = -1$.

Exemplo 5. Determine x para que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seja convergente.

Solução. Para $x = 0$ a série é convergente. Para $x \neq 0$, vamos aplicar o critério da razão para séries de termos quaisquer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Assim, a série é absoultamente convergente para qualquer $x \neq 0$. Juntando os dois casos, concluímos que a série é absolutamente convergente para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6. Determine x para que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ seja convergente.

Solução. Usando o critério da raiz para séries de termos quaisquer, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n|x|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \infty & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Assim, a série diverge para todo $x \neq 0$ e converge somente para $x = 0$.

Conforme observado na Aula 5 do Prof. Possani, as séries do tipo dos exemplos 2, 4, 5 e 6 são exemplos de Séries de Potências definidas por:

Definição. Dada a sequência de números reais a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

denomina-se *série de potências, com coeficientes a_n, centrada em x_0*. Se $x_0 = 0$, temos a série de potências centrada em zero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Para tornar esta definição precisa, convencionamos aqui que $0^0 = 1$.

Sobre a convergência de uma série de potências, uma vez que os termos em uma série de potências envolvem uma variável x, a série pode convergir para certos valores de x e divergir para outros valores de x. Para uma série de potências centrada em $x = x_0$, o valor da série em $x = x_0$ é dado por a_0. Portanto, uma série de potências sempre converge em seu centro. Algumas séries de potências convergem apenas naquele valor de x. A maioria das séries de potências, entretanto, converge para mais de um valor de x. Nesse caso, a série de potências converge para todos os números reais x ou converge para todos os x em um intervalo limitado. Por exemplo, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para todos os x no intervalo $(-1, 1)$, mas diverge para todos os x fora desse intervalo. Agora resumimos essas três possibilidades para uma série de potências geral.

Teorema (Convergência de uma série de potências). Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. A série satisfaz apenas uma das seguintes propriedades:

1. A série converge em $x = x_0$ e diverge para todo $x \neq x_0$.
2. A série converge absolutamente para todo x real.
3. Existe um número real $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$. Nos valores x onde $|x - x_0| = R$, a série pode convergir ou divergir.

Definição. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. O conjunto de números reais x onde a série converge é chamado o *intervalo de convergência*. Se existe um número real $R > 0$ tal que a série converge para $|x - x_0| < R$ e diverge para $|x - x_0| > R$, então R é chamado o raio de convergência da série. Se a série converge apenas em $x = x_0$, dizemos que o raio de convergência é $R = 0$. Se a série converge para todo x real, dizemos que o raio de convergência é $R = \infty$.

Exemplo 7. Seguindo a resolução dos exemplos 2, 4, 5 e 6, temos:

a) O intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ é $(-1, 1)$ e o raio de convergência é $R = 1$.

b) O intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ é $[-1, 1)$ e o raio de convergência é $R = 1$.

c) O intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é $(-\infty, \infty)$ e o raio de convergência é $R = \infty$.

d) O intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ é $\{0\}$ e o raio de convergência é $R = 0$.

Exercício 2. Para cada uma das seguintes séries, encontre o intervalo e o raio de convergência.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{10^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x-1)^n}{n!}$

Apêndice. As convergências absoluta e condicional permitem entender que a soma de uma série não resulta de uma operação algébrica, mas de um processo limite. Assim, não se podem simplesmente transferir as propriedades da adiação para as séries convergentes. Vamos considerar a questão da comutatividade (a ordem das parcelas não altera o resultado da adição). Para isto, é preciso entender o significado de alterar a ordem dos termos de uma série, que é o conteúdo da definição a seguir.

Definição. Seja a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e seja $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função bijetora. A série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, onde $b_k = a_{\phi(k)}$, denomina-se uma reordenação da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Observe que sendo $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ uma reordenação de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, então $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tem os mesmos termos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, só que numa outra ordem.

A seguinte propriedade estabelece a propriedade comutativa para as séries absolutamente convergentes.

Teorema. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é uma série absolutamente convergente, então toda reordenação de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, e todas convergem para a mesma soma.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada na seção 4.3 do livro do Guidorizzi.

A proposição abaixo estabelece que, entre as séries convergentes, a comutatividade é característica somente das séries absolutamente convergentes.

Proposição. Seja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série condicionalmente convergente. Então, dado qualquer $s \in \mathbb{R}$ ou $s = \pm\infty$, existe uma reordenação $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$.

Exemplo. Use o fato de que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2$$

para reordenar os termos na série harmônica alternada de forma que a soma da série reorganizada seja $\frac{3\ln 2}{2}$.

Solução. Seja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

Uma vez que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ln 2$, pelas propriedades algébricas da série convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\ln 2}{2}.$$

Agora considere a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tal que para todo $k \geq 1$, $b_{2k-1} = 0$ e $b_{2k} = a_k/2$. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Então, usando as propriedades de limite algébrico da série convergente, uma vez que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergem, a série $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{3\ln 2}{2}.$$

Agora, adicionando os termos correspondentes, a_k e b_k, vemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \\
&\quad = (1+0) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + 0) + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + 0) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} + 0) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}) + \dots \\
&\quad = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots .
\end{aligned}$$

Notamos que a série do lado direito do sinal de igual é uma reordenação da série harmônica alternada. Como $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (3\ln 2)/2$, concluímos que

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3\ln 2}{2}.$$

Note que os termos série reordenada obtida são os mesmos números da série harmônica alternada sendo somados, com os mesmos sinais, mas agora somamos os dois primeiros números positivos seguidos do primeiro número negativo, depois os dois próximos números positivos seguidos do segundo número negativo, e assim por diante. Portanto, encontramos uma reordenação da série harmônica alternada com a propriedade desejada.