Avaliação 1

Cálculo Numérico (SME0104)
Professora Cynthia Lage Ferreira

01 de junho de 2021

Orientações Gerais

- Esta avaliação é **individual** e deverá ser desenvolvida na plataforma Colab (https://colab.research.google.com/).
- Cada aluno deverá produzir um **arquivo .ipynb** contendo tanto a parte escrita (teórica) quanto a parte prática (códigos em Python) de cada um dos exercícios.
- Os arquivos deverão estar identificados da seguinte forma: **NOMEDOALUNO-NoUSP-TURMA.ipynb** a fim de facilitar a organização das atividades pela professora.
- Os arquivos deverão ser **enviados até às 8h do dia 02/06** através da plataforma e-disciplinas da USP (https://edisciplinas.usp.br/) respeitando o prazo. **Os arquivos recebidos por e-mail não serão corrigidos.**
- Apenas os alunos que estiverem com a **situação regularizada no Sistema Jupiter** terão suas avaliações corrigidas.
- Todos os exercícios deverão conter justificativas teóricas e todos os códigos utilizados para resolver os problemas deverão ser apresentados e minimamente comentados. **Questões com respostas sem justificativas não serão consideradas.**

1 Sistemas Lineares - métodos diretos

a) Descreva o método da eliminação de Gauss em sua forma matricial e mostre que ele é equivalente a fatoração LU.

b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes M_1, M_2 e M_3 tais que $M_3M_2M_1A = U$ e $M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1} = L$ de modo que U e L são as matrizes da decomposição LU de A, isto é, $A = LU$.

c) Implemente uma função em Python que calcule a inversa de uma dada matriz A com o protótipo $B = inversa(A)$ e use esta função para obter a matriz inversa da matriz do exercicio b).

2 Sistems Lineares - métodos iterativos

Dada a matriz esparsa

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

considere o sistema $Ax = b$, em que $\mathbf{b} = [-1, -2, 1, 1, -2, -1]^T$.

a) Um método iterativo pode ser escrito na forma

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g,\ k \geq 0.$$

Escreva as matrizes de iteração C_J e C_{GS} e os vetores g_J e g_{GS} dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, respectivamente.

b) Verifique se os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel obtidos no item anterior convergem.

c) Resolva numericamente o sistema $Ax = b$ em questão usando os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel utilizando erro absoluto inferior a $1e^{-8}$ e chute inicial $x0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Discuta os resultados obtidos. Faça um gráfico erro X iterações.

3 Problemas de autovalor

a) Faça um resumo teórico dos métodos de Francis; da potência e da potência inversa.

b) Use os métodos citados no item a) na matriz abaixo. Discuta os resultados obtidos e compare-os com o resultado obtido utilizando a biblioteca do Python $linalg.eig(A)$ para o cálculo de autovalores e autovetores de uma matriz quadrada qualquer.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 15 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 12 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 17 \end{bmatrix}.$$

4 Problemas de autovalor - SVD/Pagerank do Google

Implemente e faça um resumo teórico:

a) do método SVD e faça uma aplicação em compressão de imagens.

E/OU

b) do método Pagerank do Google.