Cálculo Numérico

Primeiro Exercício Programa

Objetivos:

- Analisar as regiões de convergência de sistemas de equações não lineares.

Prazo: até às 23:55h do dia 12/10/25.

A atividade pode ser feita em dupla.

Arquivos a serem entregues: Submeta os programas associados aos três sistemas não lineares e um breve relatório contendo as imagens dos mapas de convergência gerados por meio de cada método

---

Método de Newton e Fractais.

Uma das características mais atraentes do método de Newton é que sob certas condições envolvendo a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, a função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ e a matriz Jacobiana $J(\mathbf{x})$, a sequência de aproximações gerada $\mathbf{x}^{(k)}$ converge para a solução $\mathbf{x}^*$, com taxa quadrática. Mas é importante observar que os resultados de convergência são locais, ou seja, a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ deve estar suficientemente próxima de $\mathbf{x}^*$.

Para os problemas em duas dimensões, ao redor de cada solução existe uma região que "atrai" a sequência gerada pelo método iterativo, se a solução inicial pertence a esta região.

No início do século XX, Gaston Julia e Pierre Fatou publicaram estudos sobre as propriedades iterativas do método de Newton, analisando as regiões de convergência. Eles observaram que as fronteiras entre as regiões de convergência eram curvas extremamente complexas [1]. Na década de 1960, Benoit Mandebrolt identificou padrões em formas geométricas irregulares. Assim definiu-se a noção de conjunto fractal, um conjunto que possui a propriedade de auto-similaridade, ou seja, um número finito de translações de qualquer subconjunto, não importa o quão pequeno, recria o conjunto inteiro. Mandelbrot, retomou os estudos de Fatou e Julia, para observar a estrutura fractal daquelas regiões. Um pouco mais sobre a relação entre o método de Newton e fractais podem ser encontradas em [1], [2], [3], `https://www.3blue1brown.com/lessons/newtons-fractal` e `https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal`.

Cada sistema linear descrito a seguir é obtido a partir da decomposição de um polinômio complexo em parte real e imaginária. Por exemplo, o polinômio $p(z) = z^2 - 1$ resulta no sistema de equações (1) descrito no plano complexo por, $x^2 - y^2 - 1 = 0$ e $2xy = 0$.

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F}(x, y) = 0$ o sistema não linear a ser analisado. Para cada solução (x_r^*, y_r^*), $r = 1, 2, \ldots, L$, desse sistema, associamos uma cor diferente C_r e uma outra cor distinta C_0. Seja k_{max} o número máximo de iterações permitidas pelo método de Newton e $\epsilon > 0$ uma precisão.

[1] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Julia`

Considere uma região do plano discretizada, $T = \{(x_i, y_j) | i, j = 0, 1, \ldots, N\}$. Para cada $(x_i, y_j) \in T$ vamos aplicar o método de Newton, a partir dessa aproximação inicial. Vamos definir uma função $C(x_i, y_j)$ que representará o mapa de como a sequência, a partir de uma aproximação inicial, convergiu. A função C apresentará o mapa de convergência da região T. A função $C(x_i, y_j)$ recebe o número de iterações realizado partindo da aproximação inicial (x_i, y_j). Assim, $C(x_i, x_j) = k$, com $k = 1, 2, \ldots, k_{max}$.

Utilizando $\epsilon = 10^{-6}$ e $k_{max} = 20$, construa os mapas descritos, usando o **método de Newton** e o **método de Newton discreto**, para os seguintes sistemas:

1. $$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$
   Soluções: $(x^*, y^*) = (\pm 1, 0)$.
   $T = \left\{ \left(-1 + \dfrac{2i}{N}, -1 + \dfrac{2j}{N} \right) \right\}$, com $N \geq 100$ e $0 \leq i, j \leq N$.

2. $$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$
   Soluções: $(x^*, y^*) = (1, 0), (x^*, y^*) = \left(-\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
   $T = \left\{ \left(-1.5 + \dfrac{3i}{N}, -1.5 + \dfrac{3j}{N} \right) \right\}$, com $N \geq 100$ e $0 \leq i, j \leq N$.

3. $$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$
   Soluções: $(x^*, y^*) = (\pm 1, 0), (x^*, y^*) = (\pm 1.58, \pm 1.22)$
   $T = \left\{ \left(-2 + \dfrac{4i}{N}, -2 + \dfrac{4j}{N} \right) \right\}$, com $N \geq 100$ e $0 \leq i, j \leq N$.

Referências:

[1] Ruggiero e Lopes. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2°Edição, 1997.

[2] Cunha, M.C.C. Métodos Numéricos. 1°Edição, 1993.

[3] Santos, L. T. Sistemas não lineares e fractais. Revista Matemática Universitária n.15, 110-116, 1993. https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n15_Artigo08.pdf.