Modelos de regressão para dados de contagem: além do modelo Poisson.

Prof. PhD. Wagner Hugo Bonat
Prof. Dr. Walmes M. Zeviani
Eduardo E. Ribeiro Jr

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

24 de março de 2017

<wbonat@ufpr.br> | <walmes@ufpr.br> | <jreduardo@usp.br>

Disponibilização

Livro (web, pdf e ebook) e slides (pdf)
<http://cursos.leg.ufpr.br/rmcd/>

Códigos fonte (Scripts R)
<https://github.com/leg-ufpr/rmcd>

Conteúdo

1

Introdução

Dados de contagens

Alguns exemplos de problemas envolvendo contagens:

- Número de acidentes em uma rodovia por semana;
- Número de automóveis vendidos por dia;
- Número de gols marcados por times de futebol por partida;
- Número de falhas por metro de fio de cobre produzido;
- Número de colônias de bactérias por $0,01mm^2$ de uma dada cultura ...

Modelos probabilísticos para dados de contagens

- Modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas, com suporte no conjunto dos números inteiros não-negativos, são potenciais candidatos para a análise de dados de contagens.

- Algumas alternativas: Distribuição binomial, Poisson e generalizações; distribuições geradas por misturas, como a beta-binomial, binomial negativa; distribuições fundamentadas na modelagem do tempo entre eventos, na razão de probabilidades sucessivas ...

Regressão para dados de contagens

- Modelos de regressão são utilizados para modelar a distribuição de uma variável aleatória Y condicional aos valores de um conjunto de variáveis explicativas $x_1, x_2, ..., x_p$.
- Métodos para inferência e modelos de regressão para dados de contagem estão aquém, em quantidade e diversidade, em relação ao verificado para dados contínuos.
- A aplicação de modelos de regressão com erros normais na análise de contagens, embora frequente, em geral é desaconselhável.

Regressão com erros normais na análise de dados de contagens

- O modelo linear com erros normais não considera a natureza discreta dos dados;
- Associa probabilidade nula a qualquer possível contagem;
- Admite probabilidades não nulas a valores negativos da variável;

Regressão com erros normais na análise de dados de contagens

- O uso de transformações dificulta a interpretação dos resultados;
- O uso da transformação logarítmica apresenta problemas para contagens iguais a zero;
- Não se contempla a relação não constante entre média e variância, característica de dados de contagens.

Distribuição de Poisson

- A distribuição de Poisson é a principal referência para a análise de dados de contagens.
- Função de probabilidades:

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \mu > 0.$$

- Se os eventos sob contagem ocorrem independentemente e sujeitos a uma taxa constante $\mu > 0$, sob o modelo Poisson, para um intervalo de exposição de tamanho t tem-se:

$$P(Y_t = k) = \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Propriedades da distribuição de Poisson

Dentre as principais propriedades da distribuição de Poisson, tem-se:

- Média: $\mathrm{E}(Y) = \mu$;
- Variância: $\mathrm{var}(Y) = \mu$ (equidispersão);
- Razão de probabilidades sucessivas: $\frac{P(Y=k)}{P(Y=k-1)} = \frac{\lambda}{k}$, gerando a relação de recorrência:
$$P(Y = k)k = P(Y = k - 1)\lambda;$$
- Se $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ são va's independentes com $Y_i \sim Poisson(\mu_i)$, e $\sum \mu_i < \infty$, então $\sum Y_i \sim Poisson(\sum \mu_i)$.

Motivações para a distribuição de Poisson

- Se o tempo decorrido entre sucessivos eventos é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média $\lambda = 1/\mu$, então o número de eventos ocorridos em um intervalo t de tempo tem distribuição de Poisson com média μt.
  - A dualidade entre as distribuições Poisson e exponencial implica que a taxa de ocorrência do evento, definida por:

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left\{\text{evento ocorrer em } (t, t + \Delta t)\right\}}{\Delta t},$$

dado que o evento não ocorreu até o tempo t, **é constante** para todo $t > 0$.

Diferentes comportamentos para $\mu(t)$

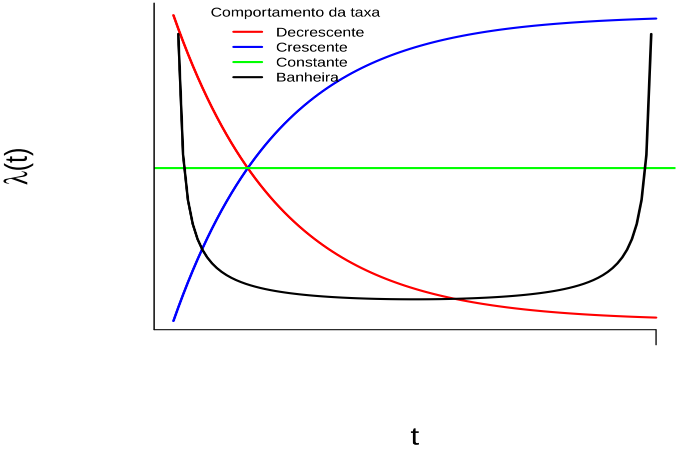


Figura: Diferentes comportamentos para $\mu(t)$

Processo de Poisson

O Processo de Poisson configura um processo de contagem em que $Y(t), t \geqslant 0$, representa o número de eventos que ocorrem até t, satisfazendo:

1. $Y(t)$ é inteiro e não negativo;
2. Para $s < t$, $Y(s) \leq Y(t)$;
3. $Y(t) - Y(s)$ é o número de eventos que ocorrem no intervalo $(s, t]$;
4. O processo é estacionário:

$$Y(t_2 + s) - Y(t_1 + s) \overset{i.d.}{\sim} Y(t_2) - Y(t_1), \forall s > 0$$

5. O processo tem incrementos independentes, ou seja, os números de eventos verificados em intervalos disjuntos são independentes.

Diferentes padrões em processos de contagens

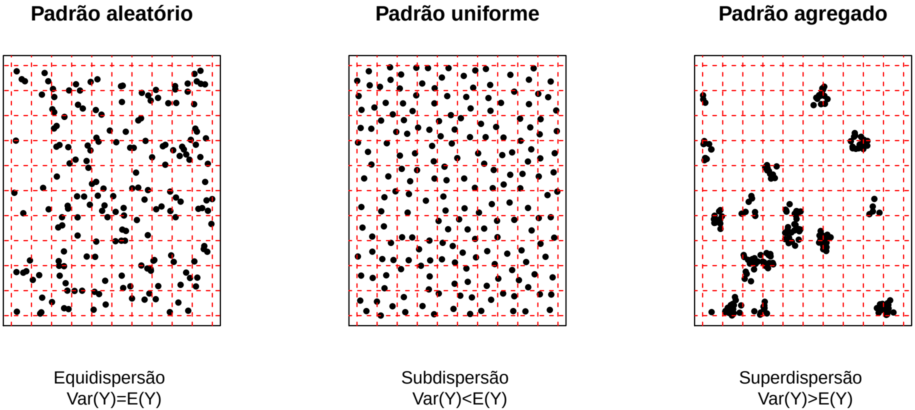


Figura: Ilustração de diferentes tipos de processos de contagens.

O desafio de dados de contagem

- Poisson implica equidispersão, ou seja, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{var}(Y) = \mu$.
- Na prática podemos ter
  - Subdispersão $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{var}(Y)$;
  - Superdispersão $\mathrm{E}(Y) < \mathrm{var}(Y)$.
- Desvios da equidispersão implicam:
  - Mais ou menos zeros e
  - Caudas mais leves ou mais pesadas que o modelo Poisson.

Causas da não equidispersão

- Desvios do processo Poisson;
- Heterogeneidade entre unidades amostrais.

- O que acontece caso o modelo Poisson seja usada para dados não equidispersos?
  1. Superdispersão: erros padrões associados aos coeficientes de regressão serão subestimados.
  2. Subdispersão: erros padrões associados aos coeficientes de regressão serão superestimados.

- Ambos os casos o modelo Poisson resulta em erros padrões não-confiáveis o que implica em inferências incorretas.

Como lidar com a não equidispersão

- Mudar a distribuição dos tempos entre eventos: Ex Gamma-Count.
- Incluir efeitos aleatórios ao nível das observações. Ex Poisson-Tweedie.
- Modificar a distribuição de Poisson incluindo um parâmetro extra de dispersão. Ex COM-Poisson.

2

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

2.1

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

- Função de probabilidade

$$
\begin{aligned}
f(y;\mu) &= \frac{\mu^y}{y!}\exp\{-\mu\} \\
&= \frac{1}{y!}\exp\{\phi y - \exp\{\phi\}\}, \quad y \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

onde $\phi = \log\{\mu\} \in \mathbb{R}$ e $\kappa(\phi) = \exp\{\phi\}$ denota a função cumulante.

- $\mathrm{E}(Y) = \kappa'(\phi) = \exp\{\phi\} = \mu$.
- $\mathrm{var}(Y) = \kappa''(\phi) = \exp\{\phi\} = \mu$.
- Em `R` temos `dpois()`.

Regressão Poisson

- Considere (y_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$, onde y_i's são iid realizações de Y_i de acordo com a distribuição Poisson.

- Modelo de regressão Poisson

$$Y_i \sim P(\mu_i), \quad \text{sendo} \quad \mu_i = g^{-1}(\boldsymbol{x_i}^\top \boldsymbol{\beta}),$$

onde $\boldsymbol{x_i}$ and $\boldsymbol{\beta}$ são vetores $(p \times 1)$ de covariáveis conhecidas e parâmetros de regressão.

- Em `R` temos `glm(..., family = poisson)`.

- g função de ligação (log link).

2.2

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

Distribuição Gamma-Count

© 1995 American Statistical Association — Journal of Business & Economic Statistics, October 1995, Vol. 13, No. 4

Duration Dependence and Dispersion in Count-Data Models

Rainer WINKELMANN
Department of Economics, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand

This article explores the relation between nonexponential waiting times between events and the distribution of the number of events in a fixed time interval. It is shown that within this framework the frequently observed phenomenon of overdispersion—that is, a variance that exceeds the mean—is caused by a decreasing hazard function of the waiting times, whereas an increasing hazard function leads to underdispersion. Using the assumption of iid gamma-distributed waiting times, a new count-data model is derived. Its use is illustrated in two applications, the number of births and the number of doctor consultations.

KEY WORDS: Gamma distribution; Negative binomial distribution; Overdispersion; Poisson process; Renewal theory.

WINKELMANN, R. Duration Dependence and Dispersion in Count-Data Models. **Journal of Business & Economic Statistics**, v.13, n.4, p.467–474, 1995.

Duração dependência

- Considere um processo estocástico definido pela sequência da va τ_k, intervalo de tempo entre eventos.
- Se $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ são independentes e identicamente distribuídos, todos com densidade $f(\tau)$, esse processo é chamado de *renewal process*.
- Defina a variável de contagem Y_T como o número de eventos no intervalo $[0, T)$.
- Defina $\vartheta_y = \sum_{k=1}^{y} \tau_k$ o tempo até o y-ésimo evento.
- A distribuição de ϑ_y determina a distribuição de Y_T, mas é baseada em convolução.
- São distribuições fechadas para convolução: normal, Poisson, binomial e gama.
- Destas, apenas a gama é contínua e positiva.

Relação entre número de eventos e intervalo entre eventos

- Intervalos entre tempo $\tau_k \sim \text{G}(\alpha, \gamma)$, (omitindo k) temos

$$f(\tau, \alpha, \gamma) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \tau^{\alpha-1} \cdot \exp\{-\gamma\tau\},$$

$$\text{E}(\tau) = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \text{var}(\tau) = \frac{\alpha}{\gamma^2}.$$

- Tempo até o y-ésimo evento

$$\vartheta_y = \tau_1 + \cdots + \tau_y \ \sim \text{G}(y\alpha, \gamma),$$

$$f_y(\vartheta, \alpha, \gamma) = \frac{\gamma^{y\alpha}}{\Gamma(y\alpha)} \cdot \vartheta^{y\alpha-1} \cdot \exp\{-\gamma\vartheta\},$$

$$\text{E}(\vartheta) = \frac{y\alpha}{\gamma}, \quad \text{var}(\vartheta) = \frac{y\alpha}{\gamma^2}.$$

Relação entre número de eventos e intervalo entre eventos

- A distribuição acumulada do tempo até ϑ_y é

$$F_y(T) = \Pr(\vartheta_y \leq T) = \int_0^T \frac{\gamma^{y\alpha}}{\Gamma(y\alpha)} \cdot t^{y\alpha - 1} \cdot \exp\{-\gamma t\} \, \mathrm{d}t.$$

- Seja $[0, T)$ um intervalo e Y_T a va número de eventos neste intervalo.
- Segue que $Y_T < y$ se e somente se $\vartheta_y \geq T$. Assim

$$\Pr(Y_T < y) = \Pr(\vartheta_y \geq T) = 1 - F_y(T);$$

- Já que $\Pr(Y_T = y) = \Pr(Y_T < y + 1) - \Pr(Y_T < y)$, então

$$\Pr(Y_T = y) = F_y(T) - F_{y+1}(T).$$

Relação entre número de eventos e intervalo entre eventos

- Portanto, distribuição de Y_T é resultado da diferença de acumuladas da distribuição Gama,

$$F_y(T) = G(y\alpha, \gamma T) = \int_0^T \frac{\gamma^{y\alpha}}{\Gamma(y\alpha)} t^{y\alpha-1} \cdot \exp\{-\gamma t\} \, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

- Assim

$$\begin{aligned} \Pr(Y_T = y) &= G(y\alpha, \gamma T) - G((y+1)\alpha, \gamma T) \\ &= \left[\int_0^T \frac{\gamma^{y\alpha}}{\Gamma(y\alpha)} t^{y\alpha-1} \cdot \exp\{-\gamma t\} \, \mathrm{d}t\right] \\ &\quad - \left[\int_0^T \frac{\gamma^{(y+1)\alpha}}{\Gamma((y+1)\alpha)} t^{(y+1)\alpha-1} \cdot \exp\{-\gamma t\} \, \mathrm{d}t\right]. \end{aligned}$$

Função de probabilidade

- Em R temos

```
dgc <- function(y, gamma, alpha, log = FALSE) {
    p <- pgamma(q = 1, shape = y * alpha, rate = alpha * gamma) - pgamma(q = 1,
        shape = (y + 1) * alpha, rate = alpha * gamma)
    if (log == TRUE) {
        p <- log(p)
    }
    return(p)
}
```

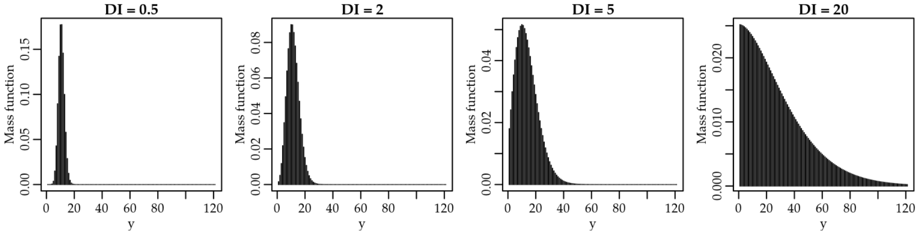


Figura: Função de probabilidade de acordo com valores do índice de dispersão - Gamma-Count.

- Índice de dispersão - $\text{DI} = \text{E}(Y)/\text{var}(Y)$

Parametrização para modelo de regressão

- A média da variável aleatória Y_T é resultado de

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_T) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr(i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} G(i\alpha, \gamma T).
\end{aligned}$$

- Para um T cada vez maior, tem-se que

$$Y(T) \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha^2}\right).$$

Parametrização para modelo de regressão

- Considere que
$$\frac{\gamma}{\alpha} = \exp\{\boldsymbol{x}^\top \beta\} \Rightarrow \gamma = \alpha \exp\{\boldsymbol{x}^\top \beta\}.$$
Essa parametrização produz um modelo de regressão para a média do tempo entre eventos definida por
$$\mathrm{E}(\tau|\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha}{\gamma} = \exp\{-\boldsymbol{x}^\top \beta\}.$$
- O modelo de regressão é para o tempo entre eventos (τ) e não diretamente para contagem porque, a menos que $\alpha = 1$, não é certo que $\mathrm{E}(Y_i|x_i) = [\mathrm{E}(\tau_i|x_i)]^{-1}$.
- α é um parâmetro de dispersão, assim $\alpha > 1$ indica subdispersão, $\alpha = 1$ equidispersão e $\alpha < 1$ superdispersão.
- Em `R` temos `MRDCr::gcnt(formula, data)`.

2.3

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

Distribuição Poisson-Tweedie

Distribuição Tweedie

- Distribuição Tweedie (Jørgensen, 1997)

$$f(z;\mu,\phi,p) = a(z,\phi,p)\exp\{(z\psi - k(\psi))/\phi\},$$

onde $\mu = \mathrm{E}(Z) = k'(\psi)$ é a média.

- $\phi > 0$ e ψ são os parâmetros de dispersão e canônico.
- $k(\psi)$ é a função cumulante e $a(z,\phi,p)$ é a constante normalizadora.
- $\mathrm{var}(Z) = \phi\mu^p$ onde $p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ é um index determinando a distribuição.
- Casos especiais: Normal ($p = 0$), Poisson ($p = 1$), não-central gamma ($p = 1.5$), gamma ($p = 2$), normal inversa ($p = 3$) and distribuições estáveis ($p > 2$).
- Notação $Z \sim Tw_p(\mu, \phi)$.

Distribuição Poisson-Tweedie

- Especificação hierárquica:

$$\begin{aligned} Y|Z &\sim P(Z) \\ Z &\sim Tw_p(\mu, \phi). \end{aligned}$$

- Função de probabilidade $(p > 1)$

$$f(y; \mu, \phi, p) = \int_0^\infty \frac{z^y \exp^{-z}}{y!} a(z, \phi, p) \exp\{(z\psi - k(\psi))/\phi\} dz.$$

- Forma fechada está disponível apenas no caso especial - binomial negativa $(p = 2)$.
- Pode ser aproximada por integração Monte Carlo e/ou integração Gauss-Laguerre.

Função de probabilidade

- Em R temos

```
require(tweedie)
# Integrand Poisson X Tweedie distributions
integrand <- function(x, y, mu, phi, power) {
    int = dpois(y, lambda = x) * dtweedie(x, mu = mu, phi = phi, power = power)
    return(int)
}

# Computing the pmf using Monte Carlo
dptw <- function(y, mu, phi, power, control_sample) {
    pts <- control_sample$pts
    norma <- control_sample$norma
    integral <- mean(integrand(pts, y = y, mu = mu, phi = phi, power = power)/norma)
    return(integral)
}
dptw <- Vectorize(dptw, vectorize.args = "y")
```

Função de probabilidade

- Exemplo

```
set.seed(123)
pts <- rtweedie(n = 1000, mu = 10, phi = 1, power = 2)
norma <- dtweedie(pts, mu = 10, phi = 1, power = 2)
control_sample <- list(pts = pts, norma = norma)
dptw(y = c(0, 5, 10, 15), mu = 10, phi = 1, power = 2, control_sample = control_sample)

## [1] 0.09374152 0.05902132 0.03539478 0.02171625

dnbinom(x = c(0, 5, 10, 15), mu = 10, size = 1)

## [1] 0.09090909 0.05644739 0.03504939 0.02176291
```

Momentos e casos especiais

- Média e variância marginal são facilmente obtidos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mu \\
\mathrm{var}(Y) &= \mu + \phi\mu^p.
\end{aligned}
$$

- Casos especiais: Hermite ($p = 0$), Neyman-Type A ($p = 1$), Pólya-Aeppli ($p = 1.5$), binomial negativa ($p = 2$) e Poisson inversa-Normal ($p = 3$).
- Cuidado! - Hermite é um caso limite.
- p é um índice que distingue entre importantes distribuições.
- Espaço paramétrico de p é não trivial $p \in 0 \cup [1, \infty)$.
- Estimação de p funciona como uma seleção automática de distribuições.
- Notação $Y \sim PTw_p(\mu, \phi)$.

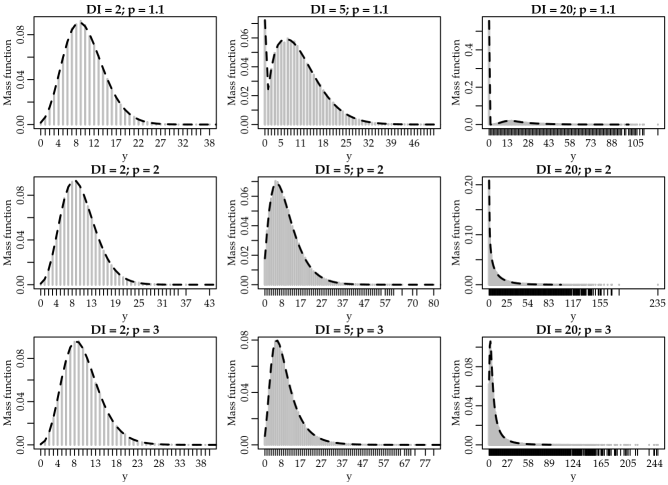


Figura: Distribuição de probabilidade empírica (cinza) e função de probabilidade aproximada (preta) por valores do índice de dispersão e valores do parâmetro de potência: Poisson-Tweedie.

Regressão Poisson-Tweedie

- Considere $(y_i, x_i), i = 1, \ldots, n$, onde y_i's são iid realizações de Y_i de acordo com a distribuição Poisson-Tweedie.

- Modelo de regressão Poisson-Tweedie

$$Y_i \sim PTw_p(\mu_i, \phi), \quad \text{sendo} \quad \mu_i = g^{-1}(\boldsymbol{x_i}^\top \boldsymbol{\beta}),$$

onde $\boldsymbol{x_i}$ and $\boldsymbol{\beta}$ são vetores $(p \times 1)$ de covariáveis conhecidas e parâmetros de regressão.

- Em `R` temos `dptw()`.
- g função de ligação (log link).

2.4

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

Distribuição COM-Poisson

Distribuição COM-Poisson

- Nome COM-Poisson, advém de seus autores **CO**nway e **M**axwell (também é chamada de distribuição Conway-Maxwell-Poisson).
- Proposta em um contexto de filas, essa distribuição generaliza a Poisson com a adição de um parâmetro.
- Modifica a relação entre probabilidades consecutivas.

  - **Distribuição Poisson**

$$\frac{Pr(Y = y - 1)}{Pr(Y = y)} = \frac{y}{\lambda}$$

  - **Distribuição COM-Poisson**

$$\frac{Pr(Y = y - 1)}{Pr(Y = y)} = \frac{y^\nu}{\lambda}$$

Distribuição COM-Poisson

Distribuição de probabilidades

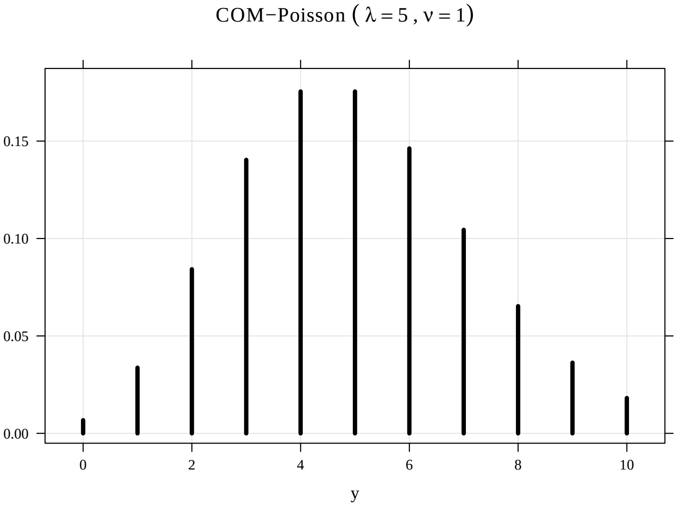
$$f(y;\lambda,\nu) = \frac{\lambda^y}{(y!)^\nu Z(\lambda,\nu)}, \quad \text{em que } Z(\lambda,\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}; \text{e} \quad \lambda > 0, \nu \geq 0$$

Casos particulares

- Distribuição Poisson, quando $\nu = 1$
- Distribuição Bernoulli, quando $\nu \to \infty$
- Distribuição Geométrica, quando $\nu = 0, \quad \lambda < 1$

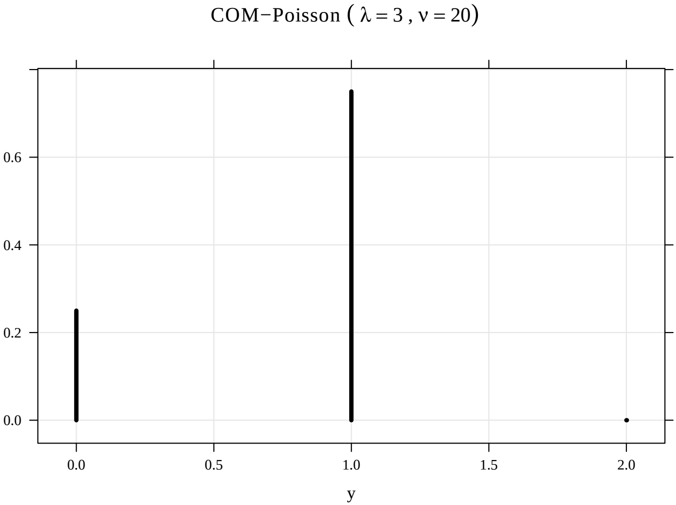
Distribuição COM-Poisson

- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \to \infty$
- Geométrica $\nu = 0$, $\lambda < 1$



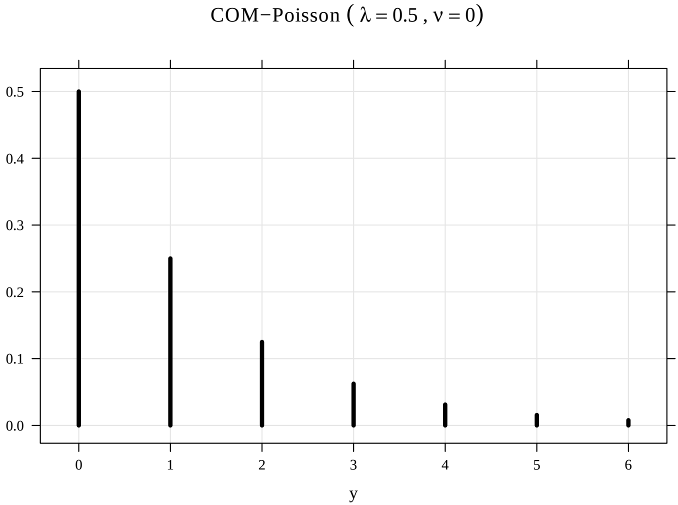
Distribuição COM-Poisson

- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \to \infty$
- Geométrica $\nu = 0$, $\lambda < 1$



Distribuição COM-Poisson

- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \to \infty$
- Geométrica $\nu = 0$, $\lambda < 1$



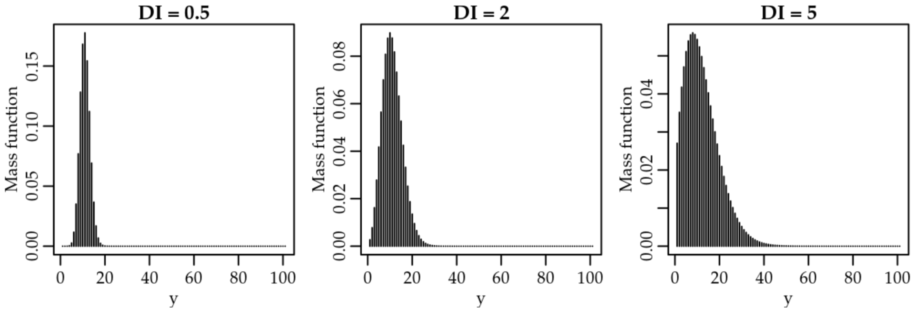
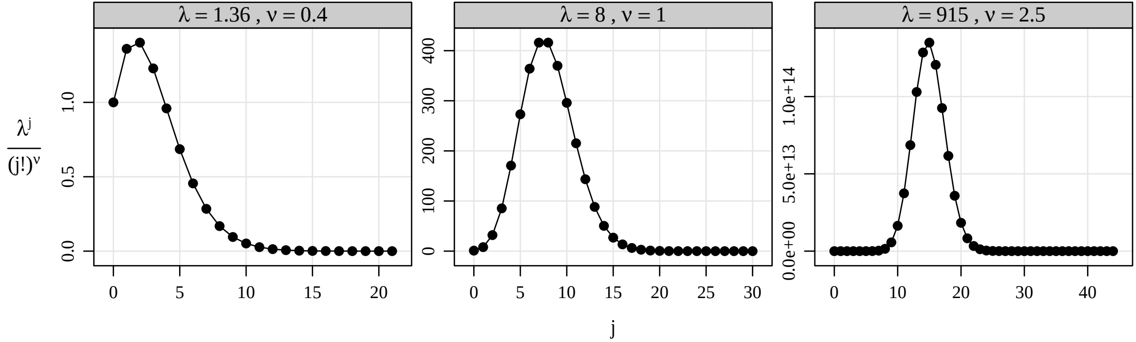


Figura: Distribuição de probabilidade por valores do índice de dispersão: COM-Poisson.

Assintocidade da função Z

$$Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}$$



Momentos da distribuição

Não tem expressão analítica, calculamos utilizando a definição de média e variância;

- $\text{E}(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot p(y)$
- $\text{var}(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y^2 \cdot p(y) - \text{E}^2(Y)$

Aproximação proposta por Shimueli (2005), boa aproximação para $\nu \leq 1$ ou $\lambda > 10^{\nu}$

- $\text{E}(Y) \approx \lambda^{\frac{1}{\nu}} - \dfrac{\nu - 1}{2\nu}$
- $\text{var}(Y) \approx \dfrac{1}{\nu} \cdot \text{E}(Y)$

- Regressão COM-Poisson: $\lambda_i = \exp(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$, em que $\boldsymbol{x}_i$ é o vetor de covariáveis do i-ésimo indivíduo e $\boldsymbol{\beta}$ o vetor de parâmetros.

2.5

Distribuições para contagens: propriedades e modelos de regressão

Comparando distribuições para contagens

Medindo propriedades das distribuições

- Índice de dispersão:

$$\text{DI} = \frac{\text{var}(Y)}{\text{E}(Y)}.$$

$DI < 1$ subdispersão, $DI = 1$ equidispersão e $DI > 1$ superdispersão.

- Índice de inflação de zeros:

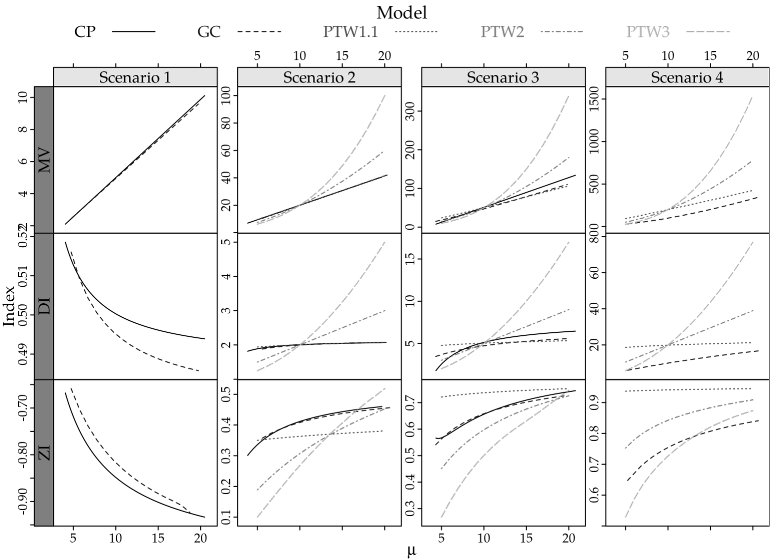
$$\text{ZI} = 1 + \frac{\log \text{P}(Y = 0)}{\text{E}(Y)}.$$

$ZI < 0$ zero deflacionado, $ZI = 1$ não zero inflacionado e $ZI > 1$ zero inflacionado.

- Índice de cauda pesada:

$$\text{HT} = \frac{\text{P}(Y = y + 1)}{\text{P}(Y = y)} \quad \text{for} \quad y \to \infty.$$

$\text{HT} \to 1$ quando $y \to \infty$ indica cauda pesada.


Model
CP
GC
PTW1.1
PTW2
PTW3
Scenario 1
Scenario 2
Scenario 3
Scenario 4
MV
DI
ZI
Index
μ

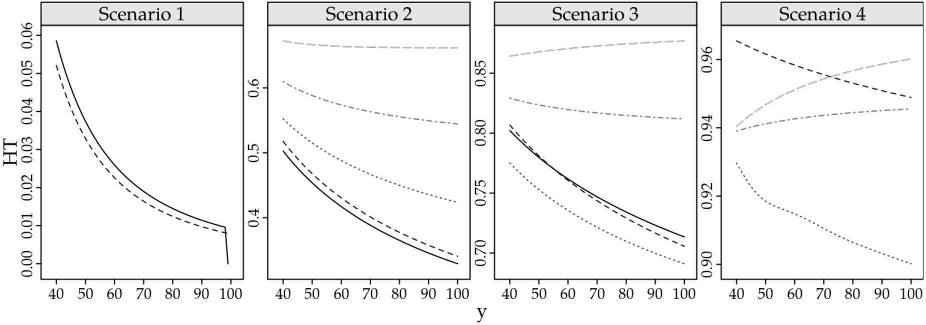


Figura: Índice de cauda pesada para alguns valores extremos da va Y.

Flexibilidade

Tabela: Modelo de referência e fatos dominantes por valores dos parâmetros de dispersão e potência.

Modelo de referência	Fatos dominantes	Dispersão	Power
Poisson	Equi	–	–
Gamma-Count	Sub, Equi, Super, deflação de zero	$\alpha \lesseqgtr 1$	–
COM-Poisson	Sub, Equi, Super, deflação de zero	$\nu \lesseqgtr 1$	–
Hermite	Super	$\phi > 0$	$p = 0$
Neyman Type A	Super, Zero-inflacionado	$\phi > 0$	$p = 1$
Poisson compound Poisson	Super, Zero-inflacionado	$\phi > 0$	$1 < p < 2$
Pólya-Aeppli	Super, Zero-inflacionado	$\phi > 0$	$p = 1.5$
Negative binomial	Super	$\phi > 0$	$p = 2$
Poisson positive stable	Super, cauda pesada	$\phi > 0$	$p > 2$
Poisson-inverse Gaussian	Super, cauda pesada	$\phi > 0$	$p = 3$

3

Método de máxima verossimilhança

Método de máxima verossimilhança

- Conhecemos a distribuição que gerou os dados $f(y; \boldsymbol{\theta})$.
- Mas não seu finito vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$.
- Θ em geral é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$.
- Dado y uma observação da va Y a função de verossimilhança

$$L(\boldsymbol{\theta}; y) = f(y; \boldsymbol{\theta}).$$

- Note que $f(y; \boldsymbol{\theta})$ é uma função de probabilidade no espaço amostral.
- Porém, $L(\boldsymbol{\theta}; y) = f(y; \boldsymbol{\theta})$ é uma função no espaço paramétrico Θ.
- $L(\boldsymbol{\theta}; y)$ expressa a plausibilidade para diferentes valores dos parâmetros após observarmos y sem ter nenhuma outra informação sobre $\boldsymbol{\theta}$.
- Para dados de contagem a verossimilhança é a probabilidade de observar o ponto y caso $\boldsymbol{\theta}$ seja o verdadeiro valor do parâmetro.

Estimador de máxima verossimilhança

- Estimador de máxima verossimilhança (MLE) $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}(y); y) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}; y)$.
- Seja Y_i iid va com fp $f(y; \boldsymbol{\theta})$ então

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} L(\boldsymbol{\theta}; y_i) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \boldsymbol{\theta}).$$

- Log-verossimilhança

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log\{L(\boldsymbol{\theta}; y_i)\}.$$

Estimador de máxima verossimilhança

- MLE em geral pode ser obtido como a solução das equações de verossimilhança (ou escore)

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}^\top, \ldots, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p}^\top \right)^\top = \mathbf{0}.$$

- Soluções analíticas são raras e métodos numéricos são necessários.
- A entrada (i, j) da matrix $p \times p$ de informação de Fisher $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\theta}}$ para o vetor $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\theta}_{ij}} = -\mathrm{E}\left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}.$$

- Algorithm Newton scoring

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \mathcal{F}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}^{(i)}).$$

- Distribuição assintótica $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1})$.

Comentários MLE

- A verdadeira distribuição que gerou os dados é conhecida.
- É possível obter de forma analítica a primeira e segunda derivada da log-verossimilhança.
- A log-verossimilhança é
    1. Poisson sem problemas!
    2. Count-Gamma: diferença de duas integrais.
    3. Poisson-Tweedie: expressa como uma integral sem solução analítica.
    4. COM-Poisson: envolve uma soma infinita.
- Nestes casos não é possível obter expressões fechadas para as funções escore e matriz de informação de Fisher.
- Solução! Maximizar diretamente a log-verossimilhança usando algum método quase-Newton ou derivadas-free.
- Exemplos BFGS, Gradiente conjugado, Nelder-Mead.
- Ver função `optim()` em `R`.

Exemplo: MLE distribuição Count-Gamma

- Log-verossimilhança

```r
# Função de probabilidade
dgc <- function(y, gamma, alpha, log = FALSE) {
  p <- pgamma(q = 1,
              shape = y * alpha,
              rate = alpha * gamma) -
    pgamma(q = 1,
           shape = (y + 1) * alpha,
           rate = alpha * gamma)
  if(log == TRUE) {p <- log(p)}
  return(p)
}
# Função de log-verossimilhança
ll_gc <- function(gamma, alpha, y) {
  ll <- sum(dgc(y = y, gamma = gamma, alpha = alpha, log = TRUE))
  return(-ll)
}
```

Exemplo: MLE distribuição Count-Gamma

- Maximização numérica e ajuste final

```r
require(bbmle)
y <- rpois(100, lambda = 10)
fit_gc <- mle2(ll_gc, start = list("gamma" = 10, "alpha" = 1),
               data = list("y" = y))
fit_gc

##
## Call:
## mle2(minuslogl = ll_gc, start = list(gamma = 10, alpha = 1),
##     data = list(y = y))
##
## Coefficients:
##     gamma     alpha
## 9.5321032 0.8224768
##
## Log-likelihood: -263.21
```

4

Modelos especificados por suposições de momentos

4.1

Modelos especificados por suposições de momentos

Especificação

Motivação

- Assumem que a distribuição de probabilidade é completamente conhecida a menos de um vetor de parâmetros.
- Na prática pode ser difícil escolher uma particular distribuição.
- Difícil de estimar usando métodos baseados em verossimilhança.
- Nem sempre a esperança é conhecida.
- O efeito das covariáveis não são diretamente relacionados a esperança da va.
- Abordagem mais geral que se adapte automaticamente a estrutura de dispersão dos dados.
- Fácil de implementar.
- SOLUÇÃO: Poisson-Tweedie estendida.

Modelos de regressão

- Considere $(y_i, \boldsymbol{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, onde y_i's são iid. va's.
- Especificação paramétrica completa:

$$Y_i \sim \text{PTw}_\text{p}(\mu_i, \phi).$$

- Especificação baseada em momentos:

$$\begin{aligned} \text{E}(Y_i) &= \mu_i \\ \text{var}(Y_i) &= \mu_i + \phi \mu_i^p \end{aligned}$$

  onde $g(\mu_i) = \eta_i = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{x}_i$ e $\boldsymbol{\beta}$ são $(p \times 1)$ vetores de covariáveis conhecidas e parâmetros de regressão desconhecidos.
- $\text{var}(Y_i) > 0$, assim $\phi > -\mu_i^{(1-p)} \Longrightarrow$ sub, equi e superdispersão.
- g função de ligação (log link).

Modelos de regressão

- Poisson-Tweedie estendida pode lidar com subdispersão $\phi < 0$.

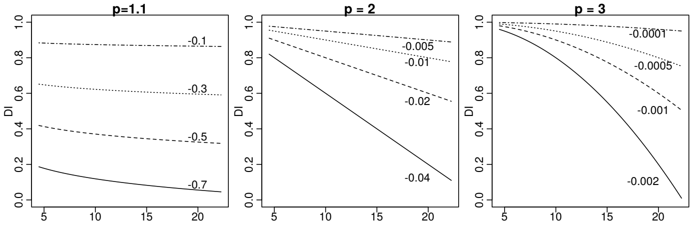


Figura: Índice de dispersão como uma função da média por valores dos parâmetros de dispersão e potência.

- Máxima verossimilhança precisa da especificação paramétrica completa.
- Funções de estimação (Bonat, et. al. 2016)
- Espaço paramétrico para o parâmetro de potência é livre ($p \in \Re$).

4.2

Modelos especificados por suposições de momentos
Estimação e Inferência

Parâmetros de regressão

- Seja $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\lambda}^\top = (\phi, p)^\top)^\top$ o vetor de parâmetros.
- Função quasi-score para os parâmetros de regressão

$$\psi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_1} C_i^{-1}(y_i - \mu_i)^\top, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_Q} C_i^{-1}(y_i - \mu_i)^\top \right)^\top,$$

  onde $C_i = \mu_i + \phi \mu_i^p$ e $\partial \mu_i / \partial \beta_j = \mu_i x_{ij}$ para $j = 1, \ldots, p$.
- A entrada (j, k) da matriz $p \times p$ de sensitividade para $\psi_{\boldsymbol{\beta}}$ é dada por

$$\mathrm{S}_{\beta_{jk}} = \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial \beta_k} \psi_{\beta_j}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) \right) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_{ij} C_i^{-1} x_{ik} \mu_i. \tag{3}$$

- A enrada (j, k) da matriz $p \times p$ de variabilidade para $\psi_{\boldsymbol{\beta}}$ é dada por

$$\mathrm{V}_{\beta_{jk}} = \mathrm{Var}(\psi_{\beta_{jk}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_{ij} C_i^{-1} x_{ik} \mu_i. \tag{4}$$

Parâmetros de dispersão

- Função de estimação de Pearson

$$\psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^{n} W_{i\phi} \left[(y_i - \mu_i)^2 - C_i \right]^\top, \sum_{i=1}^{n} W_{ip} \left[(y_i - \mu_i)^2 - C_i \right]^\top \right)^\top,$$

onde $W_{i\phi} = -\partial C_i^{-1} / \partial \phi$ e $W_{ip} = -\partial C_i^{-1} / \partial p$.

- A entrada (j, k) data matriz 2×2 de sensitividade é dada por

$$\mathrm{S}_{\boldsymbol{\lambda}_{jk}} = \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \psi_{\lambda_j}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta}) \right) = -\sum_{i=1}^{n} W_{i\lambda_j} C_i W_{i\lambda_k} C_i, \tag{5}$$

onde λ_1 e λ_2 denota ambos ϕ ou p.

Matriz de sensitividade cruzada

- A matriz de sensitividade cruzada é dada por

$$S_{\beta_j\lambda_k} = \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\psi_{\beta_j}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda})\right) = 0 \tag{6}$$

e

$$S_{\lambda_j\beta_k} = \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\beta_k}\psi_{\lambda_j}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta})\right) = -\sum_{i=1}^{n} W_{i\lambda_j} C_i W_{i\beta_k} C_i, \tag{7}$$

onde $W_{i\beta_k} = -\partial C_i^{-1}/\partial\beta_k$.

- A matriz de sensitividade conjunta para o vetor $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$S_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} S_{\boldsymbol{\beta}} & \mathbf{0} \\ S_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}} & S_{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix},$$

cuja entradas são definidas por (**??**), (**??**), (**??**) e (**??**).

Matriz de variabilidade

- A matriz de variabilidade para $\boldsymbol{\theta}$ tem a forma

$$\mathrm{V}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_{\boldsymbol{\beta}} & \mathrm{V}_{\boldsymbol{\lambda\beta}}^{\top} \\ \mathrm{V}_{\boldsymbol{\lambda\beta}} & \mathrm{V}_{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{V}_{\boldsymbol{\beta}}$ foi definido em (**??**).
- As entradas para matriz de variabilidade empírica são dadas por

$$\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_{jk}} = \sum_{i=1}^{n} \psi_{\lambda_j}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta})_i \psi_{\lambda_k}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta})_i \quad \text{and}$$

$$\tilde{\mathrm{V}}_{\lambda_j \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} \psi_{\lambda_j}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta})_i \psi_{\beta_k}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta})_i.$$

Distribuição assintótica e algoritmo de ajuste

- Faça $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ denotar o estimador função de estimação.
- A distribuição assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathrm{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}), \quad \text{onde} \quad \mathrm{J}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathrm{S}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \mathrm{V}_{\boldsymbol{\theta}} \mathrm{S}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$$

  é a matriz de informação de Godambe.
- Algoritmo Chaser

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(i+1)} &= \boldsymbol{\beta}^{(i)} - \mathrm{S}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} \psi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^{(i)}) \\
\boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(i)} - \alpha \mathrm{S}_{\boldsymbol{\lambda}}^{-1} \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\beta}^{(i+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(i)}).
\end{aligned}$$

- Facilmente implementado em `R` através da função `mcglm()` do pacote `mcglm`(Bonat, 2015).
- α é um *tuning* constante para controlar o tamanho do passo.

5

Aplicações

Referências