Capítulo 2

Sistemas Lineares

2.1. INTRODUÇÃO

Um problema de grande interesse prático que aparece, por exemplo, em cálculo de estruturas e redes elétricas e solução de equações diferenciais, é o da resolução numérica de um sistema linear S_n de n equações com n incógnitas:

$$S_n = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

ou

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.2)$$

Sob a forma matricial S_n pode ser escrito como

$$A\mathbf{x} = b \qquad (2.3)$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n, b e $\mathbf{x}$ são matrizes $n \times 1$, isto é, com n linhas e uma coluna, a_{ij} é chamado coeficiente da incógnita x_j e os b_i são chamados termos independentes, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tanto os coeficientes quanto os termos independentes são, em geral, dados do problema. A matriz A é chamada matriz dos coeficientes e a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} = [A : b]$$

é chamada matriz aumentada ou matriz completa do sistema.

Os números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ constituem uma solução de (2.1) ou (2.2) se para $x_i = \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ as equações de S_n se transformam em igualdades numéricas. Com estes números, pode-se formar a matriz coluna.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

a qual é chamada matriz solução de (2.3). Observe que por definição

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1 \, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)^T$$

2.1.1. Classificação Quanto ao Número de Soluções

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções em *compatível,* quando apresenta solução, e *incompatível,* caso contrário.

Exemplo 2.1

Se $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, se a matriz $b = 0$, o sistema é dito *homogêneo.* Todo sistema homogêneo é compatível, pois admite sempre a solução $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, a matriz $\mathbf{x} = 0$ é sempre solução. Esta solução é chamada de trivial.

Exemplo 2.2

O sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

é incompatível. Geometricamente, pode-se interpretar o sistema do seguinte modo: tomando coordenadas num plano, a equação $x_1 + x_2 = 0$ é a equação de uma reta, o mesmo sucedendo para a equação $x_1 + x_2 = 1$:

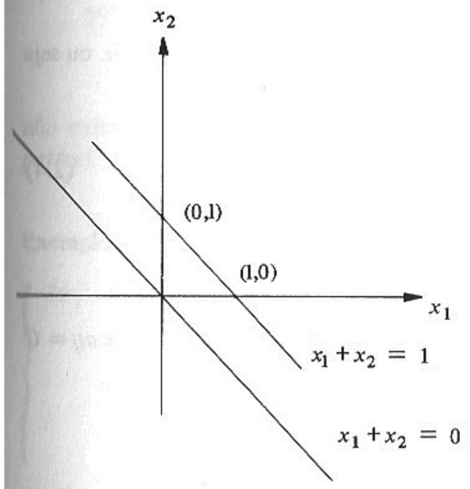


Figura 2.1

Logo, a solução do sistema, que seria o ponto comum entre as retas, não existe, pois elas são paralelas.

Os sistemas compatíveis podem ainda ser classificados em *determinado,* quando apresenta uma única solução, e *indeterminado,* caso contrário.

Exemplo 2.3

O sistema homogêneo

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

é determinado, enquanto que

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

é indeterminado. Geometricamente, as retas de S_1 têm em comum a origem, enquanto que as retas de S_2, coincidem.

2.1.2. Sistemas Triangulares

Seja um sistema S_n:

$A\mathbf{x} = b$

onde a matriz $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ se $j < i$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ou seja

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Um sistema deste tipo é chamado *triangular superior* enquanto que se $a_{ij} = 0$ para $j > i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ tem-se um sistema *triangular inferior*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.5}$$

Observe-se que os sistemas triangulares determinados, isto é, quando $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são facilmente resolvidos por substituição retroativa ou progressiva. No caso do sistema (2.4), por exemplo, calcula-se $x_n = b_n/a_{nn}$ ($a_{nn} \neq 0$) na n-ésima equação; a seguir, leva-se o valor de x_n na $(n-1)$-ésima equação e calcula-se o valor de x_{n-1} ($a_{n-1,\, n-1} \neq 0$) e assim sucessivamente até o cálculo de x_1 ($a_{11} \neq 0$). Neste caso, o sistema possui solução única. Entretanto, poderia haver algum elemento nulo na diagonal e, neste caso, surgiriam equações do seguinte tipo:

$$0x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \tag{2.6}$$

Observando a equação acima pode-se distinguir dois casos:

1º) $b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = 0$: o sistema admite mais de uma solução

pois, qualquer que seja o valor de x_i, a equação (2.6) será satisfeita; logo o sistema é *indeterminado*.

2º) $b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \neq 0$: o sistema não admite solução pois

não existe valor de x_i que satisfaça a equação (2.6); logo, o sistema é *incompatível*.

Exemplo 2.4

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \qquad\ \ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$x_4 = \dfrac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$

$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$

$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow x_2 = -1$

$3x_1 + 4(-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \rightarrow x_1 = 1$

A solução é $\overline{\mathbf{x}} = [1\ \ -1\ \ 2\ \ 1]^T$.

O sistema é determinado.

Exemplo 2.5

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$$

$$0x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow 0x_2 = 0$$

Qualquer valor de x_2 satisfaz a equação acima. Seja, então, $x_2 = \lambda$:

$$3x_1 + 4\lambda - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \rightarrow x_1 = -\frac{1 + 4\lambda}{3}$$

A solução é $\overline{\mathbf{x}} = [\frac{-1 + 4\lambda}{3} \quad \lambda \quad 2 \quad 1]^T$

O sistema é *indeterminado*.

Exemplo 2.6

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$$

$$0x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow 0x_2 = -1$$

Nenhum valor de x_2 satisfaz a equação acima. O sistema é *incompatível* pois não admite solução.

2.1.3. Implementação da Substituição Retroativa

Seguem, na página seguinte, a implementação do método pela sub-rotina SRETRO e um exemplo de programa para usá-la.

2.1.3.1. SUB-ROTINA SRETRO

```
C.....................................................................
C
C
C      SUBROTINA SRETRO
C
C      OBJETIVO :
C           RESOLUCAO DE SISTEMA LINEAR TRIANGULAR SUPERIOR
C
C      METODO UTILIZADO :
C           SUBSTITUICOES RETROATIVAS
C
C      USO :
C           CALL SRETRO(A,N,NMAX,MMAX,X)
C
C      PARAMETROS DE ENTRADA :
C           A       : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C                     INDEPENDENTES
C           N       : ORDEM DA MATRIZ A
C           NMAX    : NUMERO MAXIMO DE LINHAS DECLARADO
C           MMAX    : NUMERO MAXIMO DE COLUNAS DECLARADO
C
C      PARAMETRO DE SAIDA :
C           X       : VETOR SOLUCAO
C
C.....................................................................
C
C
      SUBROUTINE SRETRO(A,N,NMAX,MMAX,X)
C
C
      INTEGER I,J,K,L,M,MMAX,N,NMAX,N1
      REAL A(NMAX,MMAX),X(NMAX)
C
C      SUBSTITUICOES RETROATIVAS
C
      N1=N+1
      K=N-1
      X(N)=A(N,N1)/A(N,N)
      DO 20 I = 1, K
        L = N-I
        X(L)=A(L,N1)
        M = L+1
        DO 10 J = M,N
          X(L) = X(L)-A(L,J)*X(J)
 10     CONTINUE
        X(L) = X(L)/A(L,L)
 20   CONTINUE
C
C      FIM DAS SUBSTITUICOES
C
C      IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
      WRITE(2,21)
```

```
21    FORMAT(1H1,15H  VETOR SOLUCAO,/)
      DO 30 I=1,N
        WRITE(2,22)X(I),I
22      FORMAT(1H0,6HX    = ,1PE12.5,/,2X,I2)
30    CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.1.3.2. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C
C        PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA SRETRO
C
C
      INTEGER I,J,MMAX,N,NMAX,N1
      REAL A(20,21),X(20)
        NMAX=20
        MMAX=NMAX+1
        READ(1,1)N
1       FORMAT(I2)
C        N      : ORDEM DA MATRIZ
        N1=N+1
        DO 10 I=1,N
          READ(1,2)(A(I,J),J=I,N1)
2         FORMAT(10F8.0)
C          A      : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS INDEPENDENTES
10      CONTINUE
C
        CALL SRETRO(A,N,NMAX,MMAX,X)
C
        CALL EXIT
      END
```

Exemplo 2.7

Determinar o vetor solução do seguinte sistema linear triangular superior:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 0x_5 - 9x_6 + 6x_7 - x_8 &= 6{,}25\\
4x_2 + 3x_3 - x_4 + 8x_5 + 6x_6 - 7x_7 + 4x_8 &= 55{,}08\\
7x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 4x_6 - 8x_7 + 2x_8 &= -2{,}454\\
-3x_4 + 5x_5 + 9x_6 + 5x_7 + x_8 &= 51{,}442\\
2x_5 - 6x_6 - 4x_7 + 8x_8 &= 0\\
-5x_6 + 0x_7 + 3x_8 &= -0{,}008\\
-9x_7 + 5x_8 &= 7{,}228\\
6x_8 &= 24
\end{aligned}
$$

Para resolver este exemplo usando o programa acima, devem ser fornecidos: Dados de entrada

```
Ø8
1., 3., -2., 7., Ø., -9., 6., -1., 6.25,
4., 3., -1., 8., 6., -7., 4., 55.Ø8,
7., 4., 2., -4., -8., 2., -2.454,
-3., 5., 9., 5., 1., 51.442,
2., -6., -4., 8., Ø.,
-5., Ø., 3., - Ø.ØØ8,
-9., 5., 7.228,
6., 24.,
```

Os resultados obtidos foram:

```
 VETOR SOLUCAO

X    =  1.39877E+02
  1

X    =  7.18887E+00
  2

X    =  1.24441E+01
  3

X    = -1.61723E+01
  4

X    = -5.95698E+00
  5

X    =  2.40160E+00
  6

X    =  1.41911E+00
  7

X    =  4.00000E+00
  8
```

Observação: A sub-rotina SRETRO não prevê zero na diagonal principal.

2.1.4. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo:

2.1.4.1
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

2.1.4.2
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

2.1.4.3
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

2.1.4.4
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

2.1.4.5
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

2.1.4.6
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

2.1.5. Transformações Elementares

Denominam-se transformações elementares às seguintes operações sobre as equações de um sistema linear:

a) Trocar a ordem de duas equações do sistema.

b) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula.

c) Adicionar duas equações do sistema.

2.1.6. Definição

Dois sistemas S_1 e S_2 serão equivalentes se S_2 puder ser obtido de S_1 através de transformações elementares.

Observação: Dois sistemas equivalentes S_1 e S_2 ou são incompatíveis ou têm as mesmas soluções.

A resolução numérica de um sistema linear é feita, em geral, por dois caminhos: os métodos diretos e os métodos iterativos. Convém notar que o método de Cramer é inviável em função do tempo de computação.

2.2. MÉTODOS DIRETOS

São métodos que determinam a solução de um sistema linear com um número finito de operações.

2.2.1. Método de Gauss

Com $(n-1)$ passos o sistema linear $A\mathbf{x} = b$ é transformado num sistema triangular equivalente:

$U\mathbf{x} = c$

o qual se resolve facilmente por substituição.

Exemplo 2.8

Resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss.

1ª etapa

Escreve-se a matriz aumentada do sistema acima, isto é,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A \mid b]$$

Fazendo $B_0 = B$ e chamando de $L_1^{(0)}$, $L_2^{(0)}$ e $L_3^{(0)}$ as linhas 1, 2 e 3, respectivamente, de B_0, escolhe-se $a_{11}^{(0)}$ como pivô e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{2}{2} = -1$$

Fazem-se, agora, as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_0:

$L_1^{(0)} \to L_1^{(1)}$
$m_{21}^{(0)}\, L_1^{(0)} + L_2^{(0)} \to L_2^{(1)}$
$m_{31}^{(0)}\, L_1^{(0)} + L_3^{(0)} \to L_3^{(1)}$

$L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$ e $L_3^{(1)}$ são linhas da matriz transformada, B_1.

Finaliza, assim, a 1ª etapa, que consiste em eliminar todos os valores abaixo do pivô $a_{11}^{(0)} = 2$.

Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

2ª etapa

Escolhe-se $a_{22}^{(1)} = -2$ como pivô e calcula-se o multiplicador

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

São feitas agora as seguintes transformações elementares sobre as linhas B_1:

$L_1^{(1)} \to L_1^{(2)}$
$L_2^{(1)} \to L_2^{(2)}$
$m_{32}^{(1)}\, L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \to L_3^{(2)}$

$L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$ e $L_3^{(2)}$ são as linhas da matriz transformada, B_2, que já está na forma triangular, isto é:

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

A matriz B_2 é a matriz aumentada do sistema triangular superior

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad\; - 2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 15 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema dado. Resolvendo o sistema triangular por substituições retroativas tem-se $\bar{\mathbf{x}} = [1\ 2\ 3]^T$ que é, também, solução para o sistema dado.

O dispositivo prático dado a seguir torna mais compacta a triangulação da matriz aumentada do sistema do exemplo 2.8. Nas linhas (1), (2) e (3) colocam-se os coeficientes das incógnitas e os termos independentes do sistema em suas respectivas colunas, calculando-se, na coluna MULTIPLICADOR, os multiplicadores da linha (1) que serão usados na eliminação dos primeiros elementos das linhas (2) e (3). Nas linhas (4) e (5) colocam-se as transformadas das linhas (2) e (3), indicando-se as respectivas transformações na coluna TRANSFORMAÇÕES; calcula-se, também, o multiplicador da linha (4) a ser usado na eliminação do primeiro elemento não nulo da linha (5). Na linha (6) coloca-se a transformada da linha (5), indicando a transformação na coluna TRANSFORMAÇÕES:

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas			Termos Independentes	Transformações
(1)		2	3	−1	5	
(2)	$-\frac{4}{2} = -2$	4	4	−3	3	
(3)	$-\frac{2}{2} = -1$	2	−3	1	−1	
(4)		0	−2	−1	−7	−2 (1) + (2)
(5)	$-\frac{-6}{-2} = -3$	0	−6	2	−6	−1 (1) + (3)
(6)		0	0	5	15	−3 (4) + (5)

O sistema triangular obtido após as transformações elementares tem como equações as linhas (1), (4) e (6), isto é:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad\;\; -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad 5x_3 = 15 \end{cases}$$

Resolvendo-o por substituições retroativas obtém-se a solução $\overline{\mathbf{x}} = [1\ 2\ 3]^T$, que é também solução do sistema dado, uma vez que ambos são equivalentes.

O exemplo 2.9, a seguir, mostra os efeitos de arredondamento na fase de eliminação e na fase de substituições retroativas.

Exemplo 2.9

Resolver pelo método de Gauss retendo, durante os cálculos, duas casas decimais.

$$\begin{aligned} 8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 &= 16{,}4 \\ 24{,}5x_1 - 8{,}8x_2 + 11{,}5x_3 - 45{,}1x_4 &= -49{,}7 \\ 52{,}3x_1 - 84{,}0x_2 - 23{,}5x_3 + 11{,}4x_4 &= -80{,}8 \\ 21{,}0x_1 - 81{,}0x_2 - 13{,}2x_3 + 21{,}5x_4 &= -106{,}3 \end{aligned}$$

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas				Termos Independentes	Transformações
(1)		8,7	3,0	9,3	11,0	16,4	
(2)	−2,82	24,5	−8,8	11,5	−45,1	−49,7	
(3)	−6,01	52,3	−84,0	−23,5	11,4	−80,8	
(4)	−2,41	21,0	−81,0	−13,2	21,5	−106,3	
(5)		0,0	−17,26	−14,73	−76,12	−95,95	−2,82(1)+(2)
(6)	−5,91	0,0	−102,03	−79,39	−54,71	−179,36	−6,01(1)+(3)
(7)	−5,11	0,0	−88,23	−35,61	−5,01	−145,82	−2,41(1)+(4)
(8)		0,0	0,0	7,66	395,16	387,70	−5,91(5)+(6)
(9)	−5,18	0,0	0,0	39,66	383,96	344,48	−5,11(5)+(7)
(10)		0,0	0,0	0,0	−1662,97	−1663,81	−5,18(8)+(9)

O sistema triangular obtido após as transformações é:

$$\begin{aligned} 8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 &= 16{,}4 \\ -17{,}26x_2 - 14{,}73x_3 - 76{,}12x_4 &= -95{,}95 \\ 7{,}66x_3 + 395{,}16x_4 &= 387{,}70 \\ -1662{,}97x_4 &= -1663{,}81 \end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{x}} = [0{,}97 \quad 1{,}98 \quad -0{,}97 \quad 1{,}00]^T$$

Uma medida para avaliar a precisão dos cálculos é o resíduo, que é dado por:

$$r = b - A\overline{\mathbf{x}}$$

isto é,

$$r = \begin{bmatrix} 16{,}4 \\ -49{,}7 \\ -80{,}8 \\ -106{,}3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8{,}7 & 3{,}0 & 9{,}3 & 11{,}0 \\ 24{,}5 & -8{,}8 & 11{,}5 & -45{,}1 \\ 52{,}3 & -84{,}0 & -23{,}5 & 11{,}4 \\ 21{,}0 & -81{,}0 & -13{,}2 & 21{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}97 \\ 1{,}98 \\ -0{,}97 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Implementação do Método de Gauss

Seguem, abaixo, a implementação do método pela sub-rotina GAUSS e um exemplo de programa para usá-la.

2.2.2.1. SUB-ROTINA GAUSS

```
C.............................................................
C
C
C       SUBROTINA GAUSS
C
C       OBJETIVO :
C            RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES LINEARES
C
C       METODO UTILIZADO :
C            ELIMINACAO DE GAUSS
C
C       USO :
C            CALL GAUSS(A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
C       PARAMETROS DE ENTRADA :
C            A       : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C                      INDEPENDENTES
C            N       : ORDEM DA MATRIZ A
C            NMAX    : NUMERO MAXIMO DE LINHAS DECLARADO
C            MMAX    : NUMERO MAXIMO DE COLUNAS DECLARADO
C
C       PARAMETROS DE SAIDA :
C            X       : VETOR SOLUCAO
C            DET     : VALOR DO DETERMINANTE DE A
C
C.............................................................
C
C
      SUBROUTINE GAUSS(A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
C
      INTEGER I,IC,J,K,L,LF,LI,M,MM,MMAX,N,NC,NMAX,N1
      REAL A(NMAX,MMAX),DET,MULT,X(NMAX)
C
C        IMPRESSAO DA MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C        INDEPENDENTES
C
      WRITE(2,1)
    1 FORMAT(1H1,29X,22HMATRIZ DE COEFICIENTES,/)
      N1=N+1
      NC=N/5
      LI=1
      LF=0
      IF(NC.EQ.0)GO TO 30
      DO 20 IC=1,NC
        LF=IC*5
        WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
    2   FORMAT(1H0,3HI/J,7X,I2,4(13X,I2))
        DO 10 I=1,N
          WRITE(2.3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
    3     FORMAT(1H0,I2,5(3X,1PE12.5))
   10   CONTINUE
        LI=LF+1
   20 CONTINUE
   30 K=MOD(N,5)
      IF(K.EQ.0)GO TO 50
        LF=LF+K
        WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
        DO 40 I=1,N
          WRITE(2,3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
   40   CONTINUE
   50 CONTINUE
      WRITE(2,51)
   51 FORMAT(1H0)
      WRITE(2,52)
   52 FORMAT(1H0,21H TERMOS INDEPENDENTES,/)
      DO 60 I=1,N
        WRITE(2,53)I,A(I,N1)
   53   FORMAT(1X,I2,3X,1PE12.5,/)
   60 CONTINUE
C
C        FIM DA IMPRESSAO
C
C        METODO DE GAUSS
C
      DET=1.
      MM  = N-1
      DO 100 K = 1,MM
        IF (ABS(A(K,K)).GT.1.E-7) GO TO 70
          WRITE(2,61)K,K
   61     FORMAT(1H1,36H O ELEMENTO DA DIAGONAL PRINCIPAL NA,
     G            6H LINHA,I3,29H ESTA' IGUAL A ZERO,NO PASSO ,
     H            I3)
          RETURN
   70   CONTINUE
        DET = DET*A(K,K)
        M = K+1
        DO 90 I = M,N
          MULT = -A(I,K)/A(K,K)
          DO 80 J = K,N1
            A(I,J) = A(I,J)+MULT*A(K,J)
   80     CONTINUE
   90   CONTINUE
  100 CONTINUE
      IF(ABS(A(N,N)).GT.1.E-7) GO TO 120
        IF (ABS(A(N,N1)).GT.1.E-7) GO TO 110
          WRITE(2,101)
  101     FORMAT(1H1,27H O SISTEMA E' INDETERMINADO)
          RETURN
  110     CONTINUE
          WRITE(2,111)
  111     FORMAT(1H1,24H O SISTEMA E' IMPOSSIVEL)
          RETURN
  120   CONTINUE
```

```
      DET = DET*A(N,N)
      X(N)=A(N,N1)/A(N,N)
      K=N-1
      DO 140 I=1,K
        L=N-I
        X(L)=A(L,N1)
        M=L+1
        DO 130 J=M,N
          X(L)=X(L)-A(L,J)*X(J)
 130    CONTINUE
        X(L)=X(L)/A(L,L)
 140  CONTINUE
C
C     FIM DO METODO DE GAUSS
C
C     IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
      WRITE(2,141)
 141  FORMAT(1H1,15H   VETOR SOLUCAO,/)
      DO 150 I=1,N
        WRITE(2,142)X(I),I
 142    FORMAT(1H0,6HX    = ,1PE12.5,/2X,I2)
 150  CONTINUE
      WRITE(2,151)DET
 151  FORMAT(1H0,28H O VALOR DO DETERMINANTE E' ,1PE12.5)
      RETURN
    END
```

2.2.2.2. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C
C      PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA GAUSS
C
C
      INTFGER I,J,MMAX,N,NMAX,N1
      REAL A(20,21),DET,X(20)
        NMAX=20
        MMAX=NMAX+1
        READ(1,1)N
    1   FORMAT(I2)
C        N       : ORDEM DA MATRIZ
        N1=N+1
        DO 10 I=1,N
          READ (1,2) (A(I,J),J = 1,N1)
    2     FORMAT(10f8.0)
C         A      : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS INDEPENDENTES
   10   CONTINUE
C
        CALL GAUSS (A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
        CALL EXIT
      END
```


Exemplo 2.10

Determinar o vetor solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - 7x_5 + 21x_6 - 7x_7 - 2x_8 & = & -10{,}79 \\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 3x_5 - 13x_6 + x_8 & = & -2{,}14 \\
2x_1 + x_2 + 9x_3 - 6x_4 - 6x_5 + 8x_6 - 3x_7 + 3x_8 & = & -130{,}608 \\
4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 8x_5 - 6x_6 + 2x_7 - 4x_8 & = & 76{,}3 \\
-5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 - 10x_6 + x_7 + 5x_8 & = & -11{,}1 \\
6x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 15x_5 + 4x_6 - 9x_7 + 7x_8 & = & 0{,}135 \\
- 9x_2 + 1x_3 + x_4 - 12x_5 + 2x_6 + 10x_7 + 8x_8 & = & -3{,}108 \\
3x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 - 3x_8 & = & 632{,}5
\end{array}
\right.
$$

Para resolver este exemplo, usando o programa acima, devem ser fornecidos: Dados de entrada

Ø8
1., – 5., 3., 9., – 7., 21., – 7., – 2., – 1Ø.79,
3., 2., – 5., 8., 3., – 13., Ø., 1., – 2.14,
2., 1., 9., – 6., – 6., 8., – 3., 3., – 13Ø.6Ø8,
4., – 4., 2., 5., 8., – 6., 2., – 4., 76.3,
– 5., 6., – 4., 4., 9., – 1Ø., 1., 5., – 11.1,
6., 1., 5., – 2., 15., 4., – 9., 7., Ø.135,
Ø., – 9., 1., 1., – 12., 2., 1Ø., 8., – 3.1Ø8,
3., 1Ø., 3., 7., 3., 1., 1., – 3., 632.5,

Os resultados obtidos foram:

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
1	1.00000E+00	-5.00000E+00	3.00000E+00	9.00000E+00
2	3.00000E+00	2.00000E+00	-5.00000E+00	8.00000E+00
3	2.00000E+00	1.00000E+00	9.00000E+00	-6.00000E+00
4	4.00000E+00	-4.00000E+00	2.00000E+00	5.00000E+00
5	-5.00000E+00	6.00000E+00	-4.00000E+00	4.00000E+00

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
6	6.00000E+00	1.00000E+00	5.00000E+00	-2.00000E+00
7	0.00000E+00	9.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00
8	3.00000E+00	1.00000E+01	3.00000E+00	7.00000E+00

I/J	5	6	7	8
1	-7.00000E+00	2.10000E+01	-7.00000E+00	-2.00000E+00
2	3.00000E+00	-1.30000E+01	0.00000E+00	1.00000E+00
3	-6.00000E+00	8.00000E+00	-3.00000E+00	3.00000E+00
4	8.00000E+00	-6.00000E+00	2.00000E+00	-4.00000E+00
5	9.00000E+00	-1.00000E+01	1.00000E+00	5.00000E+00
6	1.50000E+01	4.00000E+00	-9.00000E+00	7.00000E+00
7	-1.20000E+01	2.00000E+00	1.00000E+01	8.00000E+00
8	3.00000E+00	1.00000E+00	1.00000E+00	-3.00000E+00

TERMOS INDEPENDENTES

1	-1.07900E+01
2	-2.14000E+00
3	-1,30608E+02
4	7.63000E+01
5	-1.11000E+01
6	1.35000E-01
7	-3.10800E+00
8	6.32500E+02

VETOR SOLUCAO

X_1 = 1.84245E+01

X_2 = 4.32176E+01

X_3 = -1.14706E+01

X_4 = -1.30122E+00

X_5 = 1.39106E+01

X_6 = 1.47225E+01

X_7 = 8.72343E+00

X_8 = -4.11309E+01

O VALOR DO DETERMINANTE E' 5.51885E+08

2.2.3. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo através do método de eliminação de Gauss.

2.2.3.1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6{,}90 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6{,}60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10{,}20 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -12{,}30 \end{cases}$$

2.2.3.2

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

2.2.3.3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

2.2.3.4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7{,}12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12{,}02 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14{,}90 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20{,}72 \end{cases}$$

2.2.4. Refinamento de Soluções

Quando se opera com números exatos, não se cometem erros de arredondamento no decorrer dos cálculos e as transformações elementares, juntamente com as substituições (retroativas ou progressivas), produzem resultados exatos. Entretanto, na maioria das vezes, tem-se que se contentar com cálculos aproximados e, aí, cometem-se erros de arredondamento que podem se propagar, chegando mesmo a comprometer os resultados. Daí o uso de técnicas especiais para minimizar a propagação de tais erros de arredondamento. Uma das técnicas é a seguinte:

Seja $\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$ a solução aproximada para o sistema $A\mathbf{x} = b$.

Então, a solução melhorada $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}$ é obtida como se segue:

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \overline{\mathbf{x}}^{(0)} + \delta^{(0)}$$

onde $\delta^{(0)}$ é uma parcela de correção.

Logo:

$$A\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = b$$

Então, tem-se:

$$A\,(\overline{\mathbf{x}}^{(0)} + \delta^{(0)}) = b$$
$$A\,\overline{\mathbf{x}}^{(0)} + A\,\delta^{(0)} = b$$
$$A\,\delta^{(0)} = b - A\,\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$$
$$A\,\delta^{(0)} = r^{(0)}$$

Assim, para se obter a parcela de correção $\delta^{(0)}$ basta que se resolva o sistema linear acima, onde A é a matriz de coeficientes das incógnitas do sistema $A\mathbf{x} = b$ e $r^{(0)}$ é o resíduo produzido pela solução aproximada $\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$.

A nova aproximação será, então,

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \overline{\mathbf{x}}^{(0)} + \delta^{(0)}$$

Caso se queira uma melhor aproximação, resolve-se, agora, o sistema

$$A\,\delta^{(1)} = r^{(1)}$$

onde $\delta^{(1)}$ é parcela de correção para $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}$ e $r^{(1)}$ é o resíduo produzido por $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}$.

O processo é repetido até que se obtenha a precisão desejada.

Exemplo 2.11

Conforme foi visto no exemplo 2.9, a solução do sistema é:

$$\overline{\mathbf{x}} = [\,0{,}97 \;\; 1{,}98 \;\; -0{,}97 \;\; 1{,}00]^T$$

com resíduo

$$r = [\,0{,}042 \;\; 0{,}214 \;\; 0{,}594 \;\; -0{,}594]^T$$

Fazendo

$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \overline{\mathbf{x}}^{(0)} + \delta^{(0)}$ e

$r = r^{(0)}$

o cálculo da parcela é feito pelo sistema

$$A\,\delta^{(0)} = r^{(0)}$$

que fornece como resultado

$$\delta^{(0)} = [\,0{,}0295 \;\; 0{,}0195 \;\; -0{,}0294 \;\; 0{,}0000\,]^T$$

$\overline{\mathbf{x}}$ será, então:

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \overline{\mathbf{x}}^{(0)} + \delta^{(0)}$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}000 \\ -0{,}999 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$$

cujo resíduo é

$$r^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}009 \\ -0{,}011 \\ 0{,}024 \\ 0{,}013 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = \overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \delta^{(1)}$ e

$r = r^{(1)}$

tem-se outra parcela de correção fornecida pelo sistema

$$A\,\delta^{(1)} = r^{(1)}$$

$$\delta^{(1)} = [-\,0{,}0002 \;\, -\,0{,}0002 \;\, -\,0{,}0007 \;\;\, 0{,}0000]^T$$

O valor melhorado de $\overline{\mathbf{x}}$ será:

$$\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = \overline{\mathbf{x}}^{(1)} + \delta^{(1)}$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = [\,1{,}000 \;\; 2{,}000 \;\; -1{,}000 \;\; 1{,}000)\,]^T$$

com resíduo

$$r^{(2)} = [\,0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\,]^T$$

Conforme o leitor deve ter notado nos exemplos anteriores, foram tomados pivôs diferentes de zero para que fossem possíveis as eliminações. Caso ocorra algum pivô nulo, deve-se efetuar uma troca de linhas conveniente para escolher um novo pivô não nulo, a fim de que se possa prosseguir com as eliminações. Outra maneira de se evitar o pivô nulo é usar o *método da pivotação completa*, que será descrito na subsecção 2.2.5. A pivotação completa serve, também, para minimizar a ampliação de erros de arredondamento durante as eliminações, sendo recomendado especialmente na resolução de sistemas lineares de maior porte por meio de computadores digitais.

2.2.5. Método da Pivotação Completa

Dado o sistema $A\mathbf{x} = b$, seja M sua matriz aumentada:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Escolhe-se em (2.7) o elemento $a_{pq} \neq 0$ de *maior módulo* e *não pertencente* à coluna dos termos independentes e calculam-se os fatores m_i:

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}} \;, \forall\; i \neq p$$

a_{pq} é o *elemento pivô* e a linha p é a *linha pivotal.*

Soma-se, a cada linha não pivotal, o produto da linha pivotal pelo fator correspondente m_i da linha não pivotal. Disso resulta uma nova matriz, cuja q-ésima coluna é composta de zeros, exceto o pivô. Rejeitando esta coluna e a p-ésima linha do pivô, tem-se uma nova matriz $M^{(1)}$, cujo número de linhas e colunas é diminuído de um.

Agora, repetindo-se o mesmo raciocínio acima para a nova matriz $M^{(1)}$, obtém-se $M^{(2)}$. Continuando o processo, é gerada uma seqüência de matrizes $M, M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots, M^{(n-1)}$, onde $M^{(n-1)}$ é uma linha com dois termos, considerada como linha pivotal.

Para se obter a solução, constrói-se o sistema formado por todas as linhas pivotais e, a partir da última linha pertencente à matriz $M^{(n-1)}$, resolve-se, através de substituições retroativas, o sistema criado. Naturalmente, deve-se prestar atenção à ordem em que foram feitas as eliminações para cada incógnita.

Exemplo 2.12

Resolver pelo método da pivotação completa, retendo, durante as eliminações, cinco algarismos depois da vírgula:

$$\begin{cases} 0{,}8754x_1 + 3{,}0081x_2 + 0{,}9358x_3 + 1{,}1083x_4 = 0{,}8472 \\ 2{,}4579x_1 - 0{,}8758x_2 + 1{,}1516x_3 - 4{,}5148x_4 = 1{,}1221 \\ 5{,}2350x_1 - 0{,}8473x_2 - 2{,}3582x_3 + 1{,}1419x_4 = 2{,}5078 \\ 2{,}1015x_1 + 8{,}1083x_2 - 1{,}3232x_3 + 2{,}1548x_4 = -6{,}4984 \end{cases}$$

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas				Termos Independentes	Transformações
(1)	−0,37099	0,8754	3,0081	0,9358	1,1083	0,8472	
(2)	0,10801	2,4579	−0,8758	1,1516	−4,5148	1,1221	
(3)	0,10450	5,2350	−0,8473	−2,3582	1,1419	2,5078	
(4)		2,1015	8,1083	−1,3232	2,1548	−6,4984	
(5)	−0,01756	0,09576	0	1,42669	0,30889	3,25804	−0,37099(4) + (1)
(6)	−0,49222	2,68489	0	1,00868	−4,28205	0,42019	0,10801(4) + (2)
(7)		5,4546	0	−2,49647	1,36707	1,82873	0,10450(4) + (3)
(8)	0,0575	0	0	1,47052	0,28489	3,22594	−0,01756(7) + (5)
(9)		0	0	2,2375	−4,95496	−0,47996	−0,49222(7) + (6)
(10)		0	0	1,59917	0	3,19834	0,05750(9) + (8)

O sistema, após as eliminações, é:

$$\begin{cases} 2{,}1015x_1 + 8{,}1083x_2 - 1{,}3232x_3 + 2{,}1548x_4 = -6{,}4984 \\ 5{,}4546x_1 \qquad\qquad 2{,}49647x_3 + 1{,}36707x_4 = 1{,}82873 \\ \qquad\qquad\qquad 2{,}2375x_3 - 4{,}95496x_4 = -0{,}47996 \\ \qquad\qquad\qquad 1{,}59917x_3 \qquad\qquad = 3{,}19834 \end{cases}$$

$\bar{\mathbf{x}} = [\,1{,}0000 \quad -1{,}0000 \quad 2{,}0000 \quad 1{,}0000\,]^T$

$r = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]^T$

2.2.6. Método de Jordan

Consiste em operar transformações elementares sobre as equações do sistema linear dado até que se obtenha um sistema diagonal equivalente.

Exemplo 2.13

Resolver pelo método de Jordan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas			Termos Independentes	Transformações
(1)		1	1	2	4	
(2)	$-\frac{2}{1} = -2$	2	−1	−1	0	
(3)	$-\frac{1}{1} = -1$	1	−1	−1	−1	
(4)	$-\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$	1	1	2	4	(1)
(5)		0	−3	−5	−8	−2 (1) + (2)
(6)	$-\frac{-2}{-3} = -\frac{2}{3}$	0	−2	−3	−5	−1 (1) + (3)
(7)	$-\frac{1/3}{1/3} = -1$	1	0	1/3	4/3	$\frac{1}{3}$ (5) + (4)
(8)	$-\frac{-5}{1/3} = 15$	0	−3	−5	−8	(5)
(9)		0	0	1/3	1/3	$-\frac{2}{3}$ (5) + (6)
(10)		1	0	0	1	−1 (9) + (7)
(11)		0	−3	0	−3	15 (9) + (8)
(12)		0	0	1/3	1/3	

O sistema diagonal é formado pelas linhas (10), (11) e (12):

$$\begin{cases} x_1 = 1 & \text{ou} \quad x_1 = 1 \\ -3x_2 = -3 & \text{ou} \quad x_2 = 1 \\ \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} & \text{ou} \quad x_3 = 1 \end{cases}$$

$\bar{\mathbf{x}} = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]^T$

2.2.7. Cálculo de Determinantes

De modo análogo ao que foi feito com sistemas, pode-se definir transformações elementares para matrizes e também definir matrizes equivalentes A e B quando B puder ser obtida de A por transformações elementares nas linhas (ou colunas). Pode-se provar que se A e B são equivalentes então $\det A = \det B$.

Como nas matrizes triangulares e diagonais o determinante é o produto dos elementos diagonais usa-se, para o cálculo de determinantes, o método de Gauss ou o de Jordan.

Exemplo 2.14

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

usa-se o método de Gauss para obter

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A seguir calcula-se $\det U = \det A = 2\,(-2)\,5 = -20$.

Exemplo 2.15

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

é transformada pelo método de Jordan em

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Logo, $\det A = \det D = 1 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{3} = -1$.

2.2.8. Implementação do Método de Jordan

Seguem, abaixo, a implementação do método pela sub-rotina JORDAN e um exemplo de programa para usá-la.

2.2.8.1. *SUB-ROTINA JORDAN*

```
C..................................................................
C
C
C        SUBROTINA JORDAN
C
C        OBJETIVO :
C             RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES LINEARES
C
C        METODO UTILIZADO :
C             ELIMINACAO DE JORDAN
C
C        USO :
C             CALL JORDAN(A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
C        PARAMETROS DE ENTRADA :
C             A       : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C                       INDEPENDENTES
C             N       : ORDEM DA MATRIZ A
C             NMAX    : NUMERO MAXIMO DE LINHAS DECLARADO
C             MMAX    : NUMERO MAXIMO DE COLUNAS DECLARADO
C
C        PARAMETROS DE SAIDA :
C             X       : VETOR SOLUCAO
C             DET     : VALOR DO DETERMINANTE DE A
C
C..................................................................
C
C
      SUBROUTINE JORDAN(A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
      INTEGER I,IC,J,K,LF,LI,MMAX,N,NC,NMAX,N1
      REAL A(NMAX,MMAX),DET,MULT,X(NMAX)
C
```



```
C        IMPRESSAO DA MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C        INDEPENDENTES
C
      WRITE(2,1)
    1 FORMAT(1H1,29X,22HMATRIZ DE COEFICIENTES,/)
      N1=N+1
      NC=N/5
      LI=1
      LF=0
      IF(NC.EQ.0)GO TO 30
      DO 20 IC=1,NC
        LF=IC*5
        WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
    2   FORMAT(1H0,3HI/J,7X,I2,4(13X,I2))
        DO 10 I=1,N
          WRITE(2,3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
    3     FORMAT(1H0,I2,5(3X,1PE12.5))
   10   CONTINUE
        LI=LF+1
   20 CONTINUE
   30 K=MOD(N,5)
      IF(K.EQ.0)GO TO 50
        LF=LF+K
        WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
        DO 40 I=1,N
          WRITE(2,3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
   40   CONTINUE
   50 CONTINUE
      WRITE(2,51)
   51 FORMAT(1H0)
      WRITE(2,52)
   52 FORMAT(1H0,21H TERMOS INDEPENDENTES,/)
      DO 60 I=1,N
        WRITE(2,53)I,A(I,N1)
   53   FORMAT(1X,I2,3X,1PE12.5,/)
   60 CONTINUE
C
C        FIM DA IMPRESSAO
C
C        METODO DE JORDAN
C
      DET=1.
      DO 120 K = 1,N
        IF(ABS(A(K,K)).GT.1.E-7) GO TO 90
          IF(K.EQ.N)GO TO 70
            WRITE(2,61)K,K
   61       FORMAT(1H1,33H O ELEMENTO DA DIAGONAL PRINCIPAL,
     G             9H NA LINHA,I3,22H ESTA' IGUAL A ZERO,NO,
     H             7H PASSO ,I3)
            RETURN
   70     CONTINUE
            IF(ABS(A(N,N1)).GT.1.E-7)GO TO 80
              WRITE(2,71)
   71         FORMAT(1H1,27H O SISTEMA E' INDETERMINADO)
              RETURN
   80         CONTINUE
              WRITE(2,81)
```

```
 81         FORMAT(1H1,24H O SISTEMA E' IMPOSSIVEL)
            RETURN
 90      CONTINUE
         DET = DET*A(K,K)
         DO 110 I=1,N
           IF(I.EQ.K)GO TO 110
            MULT = -A(I,K)/A(K,K)
            DO 100 J = K,N1
              A(I,J) = A(I,J)+MULT*A(K,J)
100         CONTINUE
110      CONTINUE
120   CONTINUE
C
C       FIM DO METODO DE JORDAN
C
C       IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
      WRITE(2,121)
121   FORMAT(1H1,15H  VETOR SOLUCAO,/)
      DO 130 I=1,N
        X(I)=A(I,N1)/A(I,I)
        WRITE(2,122)X(I),I
122     FORMAT(1H0,6HX     = ,1PE12.5,/,2X,I2)
130   CONTINUE
      WRITE(2,131)DET
131   FORMAT(1H0,28H O VALOR DO DETERMINANTE E' ,1PE12.5)
      RETURN
     END
```

2.2.8.2. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C
C        PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA JORDAN
C
C
      INTEGER I,J,MMAX,N,NMAX,N1
      REAL A(20,21),DET,X(20)
        NMAX=20
        MMAX=NMAX+1
        READ(1,1)N
    1   FORMAT(I2)
C        N       : ORDEM DA MATRIZ
        N1=N+1
        DO 10 I=1,N
          READ (1,2) (A(I,J),J = 1,N1)
    2     FORMAT(10F8.0)
C         A       : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS INDEPENDENTES
   10   CONTINUE
C
        CALL JORDAN(A,N,NMAX,MMAX,X,DET)
C
         CALL EXIT
       END
```


Exemplo 2.16

Determinar o vetor solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 4x_6 - x_7 = -0{,}108 \\ -9x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 - 12x_5 + 6x_6 + 3x_7 = 26{,}24 \\ 1x_1 - 9x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - 5x_6 + 5x_7 = 92{,}808 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 8x_4 - x_5 + 4x_6 - 4x_7 = 53{,}91 \\ -5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 11x_4 + 3x_5 + 8x_6 + 7x_7 = 143{,}55 \\ 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 7x_4 - 5x_5 - 3x_6 + 8x_7 = -6{,}048 \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 + x_6 - 3x_7 = 137{,}94 \end{cases}$$

Para resolver este exemplo, usando o programa acima, devem ser fornecidos:

Dados de entrada

```
ø7
3., ø., –9., 6., 9., 4., –1., – ø.1ø8,
–9., 3., 8., 9., –12., 6., 3., 26.24,
1., –9., 1., –3., 1., –5., 5., 92.8ø8,
4., 8., –1ø., 8., –1., 4., –4., 53.91,
–5., 5., 4., 11., 3., 8., 7., 143.55,
6., –2., 9., –7., –5., –3., 8., –6.ø48,
8., 7., 2., 5., 2., 1., –3., 137.94,
```

Os resultados obtidos foram:

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
1	3.00000E+00	0.00000E+00	-9.00000E+00	6.00000E+00
2	-9.00000E+00	3.00000E+00	8.00000E+00	9.00000E+00
3	1.00000E+00	-9.00000E+00	1.00000E+00	-3.00000E+00
4	4.00000E+00	8.00000E+00	-1.00000E+01	8.00000E+00
5	-5.00000E+00	5.00000E+00	4.00000E+00	1.10000E+01
6	6.00000E+00	-2.00000E+00	9.00000E+00	-7.00000E+00
7	8.00000E+00	7.00000E+00	2.00000E+00	5 00000E+00

I/J	5	6	7
1	9.00000E+00	4.00000E+00	-1.00000E+00
2	-1.20000E+01	6.00000E+00	3.00000E+00
3	1.00000E+00	-5.00000E+00	5.00000E+00
4	-1.00000E+00	4.00000E+00	-4.00000E+00
5	3.00000E+00	8.00000E+00	7.00000E+00
6	-5.00000E+00	-3.00000E+00	8.00000E+00
7	2.00000E+00	1.00000E+00	-3.00000E+00

TERMOS INDEPENDENTES

1	-1.08000E-01
2	2.62400E+01
3	9.28080E+01
4	5.39100E+01
5	1.43550E+02
6	-6.04800E+00
7	1.37940E+02

VETOR SOLUCAO

X_1 = -2.83519E+00

X_2 = 1.32316E+01

X_3 = 2.10986E+00

X_4 = 2.71105E+01

X_5 = 6.13817E+00

X_6 = -4.43192E+01

X_7 = 1.32430E+01

O VALOR DO DETERMINANTE E' 8.04193E+06

2.2.9. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo, através do método de Jordan:

2.2.9.1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6{,}90 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6{,}60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10{,}20 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -12{,}30 \end{cases}$$

2.2.9.2. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

2.2.9.3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

2.2.9.4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7{,}12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12{,}02 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14{,}90 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20{,}72 \end{cases}$$

2.3. MÉTODOS ITERATIVOS

2.3.1. Introdução

A solução $\overline{\mathbf{x}}$ de um sistema linear $A\mathbf{x} = b$ pode ser obtida utilizando-se um método iterativo, que consiste em calcular uma seqüência $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \ldots$ de aproximação de $\overline{\mathbf{x}}$, sendo dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. Para tanto, transforma-se o sistema dado num equivalente da forma

$$\mathbf{x} = F\mathbf{x} + d \tag{2.8}$$

onde F é uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{x}$ e d são matrizes $n \times 1$. Para facilitar a notação serão usados indistintamente:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ou } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

Partindo-se de uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}, \ldots, x_n{}^{(0)})^T$ obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= F\mathbf{x}^{(0)} + d \\ \mathbf{x}^{(2)} &= F\mathbf{x}^{(1)} + d \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= F\mathbf{x}^{(k)} + d \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{(x_i^{(k)} - x_i)\}$

Se $\lim \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0$ então $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \ldots$ converge quando $k \to \infty$.

Observação: Dado $A\mathbf{x} = b$ existem várias maneiras de se obter (2.8), por exemplo:

$A\mathbf{x} + I\mathbf{x} - b = I\mathbf{x}$

ou

$\mathbf{x} = (A + I)\mathbf{x} - b$

2.3.2. Método de Jacobi

Seja o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.9}$$

Explicita-se em (2.9) x_1 na primeira equação, x_2 na segunda, ...

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \end{cases} \tag{2.10}$$

O leitor deve observar que em (2.10) os elementos $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$. Caso isso não ocorra, as equações de (2.9) devem ser reagrupadas para que se consiga essa condição.

O sistema (2.10) pode ser colocado na forma $\mathbf{x} = F\mathbf{x} + d$ onde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O método de Jacobi funciona do seguinte modo:

a) Escolhe-se uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

b) Geram-se aproximações sucessivas de $\mathbf{x}^{(k)}$ a partir da iteração

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = F\mathbf{x}^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

c) Continua-se a gerar aproximações até que um dos critérios abaixo seja satisfeito

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mathbf{x}_i^{(k+1)} - \mathbf{x}_i^{(k)}| \leqslant \epsilon, \quad \epsilon \text{ tolerância}$$

ou

$k > M$, M número máximo de iterações

Observação: A tolerância ϵ fixa o grau de precisão das soluções.

Exemplo 2.17

Resolver pelo método de Jacobi o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

com $\epsilon \leqslant 10^{-2}$ ou $k > 10$

Explicitando x_1 na primeira equação e x_2 na segunda, tem-se as equações de iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

O vetor inicial é tomado arbitrariamente. Fazendo-o

$\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0]^T$ tem-se:

$$\text{para } k = 0 \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0{,}5 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(0)}) = \frac{1}{2}(3 - 0) = 1{,}5 \end{cases}$$

$$\text{para } k = 1 \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1{,}5) = 1{,}25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(3 - 0{,}5) = 1{,}25 \end{cases}$$

Prosseguindo as iterações para $k = 2, 3 \ldots$ e colocando-as numa tabela obtém-se:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	ϵ
0	0	0	–
1	0,5	1,5	1,5
2	1,25	1,25	0,75
3	1,125	0,875	0,375
4	0,938	0,938	0,187
5	0,969	1,031	0,093
6	1,016	1,016	0,047
7	1,008	0,992	0,024
8	0,996	0,996	0,012
9	0,998	1,002	0,006

$$\left.\begin{array}{c} 0{,}006 \leqslant 10^{-2}? \\ \text{ou} \\ k > 10? \end{array}\right\} \quad \text{Sim. Então pare!} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0{,}998 \\ x_2 = 1{,}002 \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [0{,}998 \ \ 1{,}002]^T$$

2.3.3. Implementação do Método de Jacobi

Seguem, abaixo, a implementação do método pela sub-rotina JACOBI e um exemplo de programa para usá-la.

2.3.3.1 SUB-ROTINA JACOBI

```
C..............................................................
C
C
C       SUBROTINA JACOBI
C
C       OBJETIVO :
C            RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES LINEARES
```

```
C
C       METODO UTILIZADO :
C             JACOBI
C
C       USO :
C             CALL JACOBI(A,N,NMAX,MMAX,ITERM,XO,EPS,ITER,X)
C
C       PARAMETROS DE ENTRADA :
C             A       : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C                       INDEPENDENTES
C             N       : ORDEM DA MATRIZ A
C             NMAX    : NUMERO MAXIMO DE LINHAS DECLARADO
C             MMAX    : NUMERO MAXIMO DE COLUNAS DECLARADO
C             ITERM   : NUMERO MAXIMO DE ITERACOES DECLARADO
C             XO      : VETOR DE APROXIMACAO INICIAL
C             EPS     : PRECISAO REQUERIDA
C             ITER    : NUMERO DE ITERACOES
C
C       PARAMETRO DE SAIDA :
C             X       : MATRIZ DE APROXIMACOES
C
C.................................................................
C
C
      SUBROUTINE JACOBI(A,N,NMAX,MMAX,ITERM,XO,EPS,ITER,X)
C
C
      INTEGER I,IC,ITER,ITERM,ITER1,J,K,L,LF,LI,L2,MMAX,N,NC,
     J        NMAX,N1
      REAL A(NMAX,MMAX),AUX,EPS,MAIOR,X(NMAX,ITERM),XO(NMAX),
     S     TOL(99)
C
C       IMPRESSAO DA MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C       INDEPENDENTES
C
      N1=N+1
      WRITE(2,1)
    1 FORMAT(1H1,29X,22HMATRIZ DE COEFICIENTES,/)
      NC=N/5
      LI=1
      LF=0
      IF(NC.EQ.0) GO TO 30
        DO 20 IC=1,NC
          LF=IC*5
          WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
    2     FORMAT(1H0,3HI/J,7X,I2,4(13X,I2))
          DO 10 I=1,N
            WRITE(2,3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
    3       FORMAT(1H0,I2,5(3X,1PE12.5))
   10     CONTINUE
          LI=LF+1
   20   CONTINUE
   30 CONTINUE
      K=MOD(N,5)
      IF(K.EQ.0)GO TO 50
        LF=LF+K
        WRITE(2,2)(I,I=LI,LF)
```



```
        DO 40 I=1,N
          WRITE(2,3)I,(A(I,J),J=LI,LF)
   40   CONTINUE
   50 CONTINUE
      WRITE(2,51)
   51 FORMAT(1H0)
      WRITE(2,52)
   52 FORMAT(1H0,21H TERMOS INDEPENDENTES,/)
      DO 60 I=1,N
        WRITE(2,53)I,A(I,N1)
   53   FORMAT(1X,I2,3X,1PE12.5,/)
   60 CONTINUE
C
C       FIM DA IMPRESSAO
C
C       METODO DE JACOBI
C
      ITER1=ITER+1
      DO 70 I=1,N
        X(I,1)=XO(I)
   70 CONTINUE
      DO 110 L=2,ITER1
        DO 90 I=1,N
          X(I,L)=A(I,N1)+X(I,L-1)*A(I,I)
          DO 80 J=1,N
            X(I,L)=X(I,L)-X(J,L-1)*A(I,J)
   80     CONTINUE
          X(I,L)=X(I,L)/A(I,I)
   90   CONTINUE
        AUX=X(1,L)-X(1,L-1)
        MAIOR=ABS(AUX)
        DO 100 I=2,N
          AUX=X(I,L)-X(I,L-1)
          AUX=ABS(AUX)
          IF(AUX.LE.MAIOR)GO TO 100
            MAIOR=AUX
  100   CONTINUE
        TOL(L)=MAIOR
        IF(MAIOR.LE.EPS)GO TO 120
  110 CONTINUE
  120 CONTINUE
C
C       FIM DO METODO
C
C       IMPRESSAO DAS APROXIMACOES E RESULTADO FINAL
C
      IF(MAIOR.GT.EPS)L=L-1
      NC=L/5
      LI=1
      LF=0
      WRITE(2,121)
  121 FORMAT(1H1)
      IF(NC.EQ.0)GO TO 170
      DO 160 IC=1,NC
        LF=IC*5
```

```
      J=LI-1
      L2=LF-1
      WRITE(2,122)J,(I,I=LI,L2)
122   FORMAT(1H0,8HITERACAO,8X,I2,4(12X,I2))
      DO 130 I=1,N
        WRITE(2,123)(X(I,J),J=LI,LF)
123     FORMAT(1H0,3X,1HX,5X,5(2X,1PE12.5))
        WRITE(2,124)I
124     FORMAT(5X,I2)
130   CONTINUE
      IF(IC.NE.1) GO TO 140
        WRITE(2,131)(TOL(J),J=2,5)
131     FORMAT(1H0,10HTOLERÂNCIA,13X,4(2X,1PE12.5))
        WRITE(2,132)
132     FORMAT(2(/))
        GO TO 150
140     CONTINUE
        WRITE(2,141)(TOL(J),J=LI,LF)
141     FORMAT(1H0,11HTOLERÂNCIA ,1PE12.5,4(2X,1PE12.5))
        WRITE(2,132)
150   CONTINUE
      LI=LF+1
160   CONTINUE
170   CONTINUE
      K=MOD(L,5)
      IF(K.EQ.0)GO TO 200
        LF=LF+K
        J=LI-1
        L2=LF-1
        WRITE(2,122)J,(I,I=LI,L2)
        DO 180 I=1,N
          WRITE(2,123)(X(I,J),J=LI,LF)
          WRITE(2,124)I
180     CONTINUE
        IF(LI.NE.1)GO TO 190
          WRITE(2,131)(TOL(J),J=2,5)
          GO TO 200
190       CONTINUE
          WRITE(2,141)(TOL(J),J=LI,LF)
          WRITE(2,132)
200   CONTINUE
      IF(MAIOR.LE.EPS)GO TO 210
        WRITE(2,201)ITER
201     FORMAT(1H0,25HERRO : NAO CONVERGIU COM ,I2,
     G           10H ITERACOES)
        RETURN
210     CONTINUE
        WRITE(2,211)
211     FORMAT(5(/),5X,13HVETOR SOLUCAO,/)
        DO 220 I=1,N
          WRITE(2,212)X(I,L),I
212       FORMAT(1H0,6HX    = ,1PE12.5,/,2X,I2)
220     CONTINUE
        RETURN
      END
```


2.3.3.2. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C
C          PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA JACOBI
C
C
      INTEGER I,ITER,ITERM,J,MMAX,N,NMAX,N1
      REAL A(20,21),EPS,X(20,99),X0(20)
        NMAX=20
        MMAX=NMAX+1
        ITERM=99
        READ(1,1)N,ITER,EPS
1       FORMAT(2I2,F10.0)
C        N       : ORDEM DA MATRIZ
C        ITER    : NUMERO DE ITERACOES, MENOR QUE 99
C        EPS     : PRECISAO REQUERIDA
        READ(1,2)(X0(I),I=1,N)
2       FORMAT(16F5.0)
C        X0      : VETOR DE APROXIMACAO INCIAL
        N1=N+1
        DO 10 I=1,N
          READ(1,3)(A(I,J),J=1,N1)
3         FORMAT(10F8.0)
C         A      : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS INDEPENDENTES
10      CONTINUE
C
        CALL JACOBI(A,N,NMAX,MMAX,ITERM,X0,EPS,ITER,X)
C
        CALL EXIT
      END
```

Exemplo 2.18

Determinar o vetor solução do sistema de equações lineares abaixo, usando como vetor inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$, como precisão $\epsilon < 10^{-4}$ e como número máximo de iterações $k = 30$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & - & 2x_6 & = & 6{,}57 \\
4x_1 & - & 20x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & + & 7x_6 & = & -\ 68{,}448 \\
5x_1 & - & 3x_2 & + & 15x_3 & - & x_4 & - & 4x_5 & + & x_6 & = & -112{,}05 \\
-x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & = & -\ 3{,}968 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 9x_5 & - & x_6 & = & -\ 2{,}18 \\
-4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & + & 12x_6 & = & 10{,}882
\end{array}\right.$$

Para resolver este exemplo, usando o programa acima, devem ser fornecidos:

Dados de entrada:

```
Ø63ØØ.ØØØ1
1., 1., 1., 1., 1., 1.,
1Ø., 1., 1., 2., 3., −2., 6.57,
4., −2Ø., 3., 2., −1., 7., −68.448,
5., −3., 15., −1., −4., 1., −112.Ø5,
−1., 1., 2., 8., −1., 2., −3.968,
1., 2., 1., 3., 9., −1., −2.18,
−4., 3., 1., 2., −1., 12., 1Ø.882,
```

Os resultados obtidos foram:

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
1	1.00000E+01	1.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00
2	4.00000E+00	−2.00000E+01	3.00000E+00	2.00000E+00
3	5.00000E+00	−3.00000E+00	1.50000E+01	−1.00000E+00
4	−1.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00	8.00000E+00
5	1.00000E+00	2.00000E+00	1.00000E+00	3.00000E+00
6	−4.00000E+00	3.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00

I/J	5	6
1	3.00000E+00	−2.00000E+00
2	−1.00000E+00	7.00000E+00
3	−4.00000E+00	1.00000E+00
4	−1.00000E+00	2.00000E+00
5	9.00000E+00	−1.00000E+00
6	−1.00000E+00	1.20000E+01

TERMOS INDEPENDENTES

1	6.57000E+00
2	−6.84480E+01
3	−1.12050E+02
4	−3.96800E+00
5	−2.18000E+00
6	1.08820E+01

ITERACAO	0	1	2
X_1	1.00000E+00	1.57000E−01	1.58499E+00
X_2	1.00000E+00	4.17240E+00	2.59987E+00
X_3	1.00000E+00	−7.33667E+00	−7.04319E+00
X_4	1.00000E+00	−8.71000E−01	5.16756E−01
X_5	1.00000E+00	−9.08889E−01	1.01518E−02
X_6	1.00000E+00	8.23500E−01	5.96882E−01
TOLERANCIA		8.33667E+00	1.57253E+00

ITERACAO	3	4	5
X_1	1.11431E+00	1.26600E+00	1.23474E+00
X_2	2.94300E+00	3.08848E+00	3.01013E+00
X_3	−7.48099E+00	−7.35781E+00	−7.38721E+00
X_4	9.89987E−01	7.84021E−01	8.25085E−01
X_5	−3.19436E−01	−3.75825E−01	−4.04766E−01
X_6	1.28685E+00	9.74320E−01	1.00788E+00
TOLERANCIA	6.89968E−01	3.12530E−01	7.83472E−02

ITERACAO	6	7	8
X_1	1.25270E+00	1.24925E+00	1.24994E+00
X_2	3.01677E+00	3.01873E+00	3.02080E+00
X_3	-7.39968E+00	-7.40063E+00	-7.39972E+00
X_4	8.26314E-01	8.32029E-01	8.29726E-01
X_5	-3.90575E-01	-3.92807E-01	-3.93955E-01
X_6	1.01024E+00	1.01658E+00	1.01388E+00
TOLERANCIA	1.79557E-02	6.34277E-03	2.69902E-03

ITERACAO	9	10	11
X_1	1.24991E+00	1.25001E+00	1.25000E+00
X_2	3.01996E+00	3.01993E+00	3.01999E+00
X_3	-7.39982E+00	-7.40001E+00	-7.40001E+00
X_4	8.29859E-01	8.29981E-01	8.30021E-01
X_5	-3.94125E-01	-3.93975E-01	-3.93982E-01
X_6	1.01381E+00	1.01398E+00	1.01403E+00
TOLERANCIA	8.43287E-04	1.89304E-04	5.69820E-05

VETOR SOLUCAO

X_1 = 1.25000E+00

X_2 = 3.01999E+00

X_3 = -7.40001E+00

X_4 = 8.30021E-01

X_5 = -3.93982E-01

X_6 = 1.01403E+00

2.3.4. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo, através do método de Jacobi, com no máximo 10 iterações:

2.3.4.1. $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 = 0 \\ -0{,}25x_1 + x_2 - 0{,}25x_4 = 0 \\ -0{,}25x_1 + x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}25 \\ -0{,}25x_2 + x_4 = 0{,}25 \end{cases}$$

2.3.4.2. $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

2.3.4.3. $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 3\ 1\ 3]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 33 \end{cases}$$

2.3.4.4 $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -8x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 13 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 10x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 = 7 \end{cases}$$

2.3.5. Método de Gauss-Seidel

Seja o sistema $A\mathbf{x} = b$ dado na forma (2.10). O método iterativo de Gauss-Seidel consiste em:

a) partindo-se de uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$,

b) calcula-se a seqüência de aproximações $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}, ...$ utilizando-se as equações:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)}]$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1} x_1^{(k+1)} - a_{n2} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)}]$$

ou então

$$x_i^{(k+1)} = d + \left[\sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} F_{ij} x_j^{(k)} \right] \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, ..., n \\ k = 0, 1, 2 ... \end{matrix}$$

Continua-se a gerar aproximações até que um dos critérios abaixo seja satisfeito

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | < \epsilon \text{ tolerância}$$

ou

$k > M$, M número máximo de iterações

Exemplo 2.19

Resolver pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

com $\mathbf{x}^{(0)} = [0\quad 0]^T$

As equações iterativas são
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$k = 0$ (1ª iteração):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0,5 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,5) = 1,25 \end{cases}$$

$k = 1$ (2ª iteração):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,25) = 1,125 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,125) = 0,9375 \end{cases}$$

Prosseguindo as iterações o leitor notará que o método de Gauss-Seidel converge para a solução mais rapidamente que o método de Jacobi.

Exemplo 2.20

Resolver pelo método de Gauss-Seidel, retendo quatro casas decimais.

$$\begin{cases} 20x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 33 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 38,4 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 43,5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 20x_4 = 45,6 \end{cases}$$

As equações iterativas são:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}(33 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 2x_4^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(38{,}4 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)} - 4x_4^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(43{,}5 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} - x_4^{(k)})$$

$$x_4^{(k+1)} = \frac{1}{20}(45{,}6 - 2x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)})$$

Iter.	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
x_1	0	1,6500	1,1730	1,1951	1,1996	1,2000	1,2000
x_2	0	3,6750	2,5497	2,4110	2,4006	2,4000	2,4000
x_3	0	3,4500	3,6020	3,6010	3,6001	3,6000	3,6000
x_4	0	1,2075	1,4727	1,4982	1,4999	1,5000	1,5000
ϵ	–	3,6750	1,1253	0,0104	0,0104	0,0006	0,0000

2.3.6. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo, através do método de Gauss-Seidel, com no máximo 10 iterações:

2.3.6.1 $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 = 0 \\ -0{,}25x_1 + x_2 - 0{,}25x_4 = 0 \\ -0{,}25x_1 + x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}25 \\ -0{,}25x_2 + x_4 = 0{,}25 \end{cases}$$

2.3.6.2 $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

2.3.6.3 $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 3]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 33 \end{cases}$$

2.3.6.4 $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e $\epsilon < 10^{-2}$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -8x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 13 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 10x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 = 7 \end{cases}$$

2.3.7. Convergência dos Métodos Iterativos

Seja o sistema $A\mathbf{x} = b$ na sua forma

$$\mathbf{x} = F\mathbf{x} + d \qquad (2.11)$$

e a iteração definida por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = F\mathbf{x}^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.12)$$

Subtraindo (2.11) de (2.12), tem-se:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} = F(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x})$$

Seja $e^{(k)}$, o erro na k-ésima iteração, dado por:

$$e^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$$

Substituindo-se em (2.12), tem-se:

$$e^{(k+1)} = Fe^{(k)} \qquad (2.13)$$

Teorema 2.1: É condição suficiente, para que a iteração (2.12) convirja, que os elementos f_{ij} de F satisfaçam a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n} |f_{ij}| \leqslant L < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.14}$$

qualquer que seja a condição inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Demonstração

Escrevendo (2.13) na sua forma expandida, tem-se:

$$e_1^{(k+1)} = f_{11}\, e_1^{(k)} + f_{12}\, e_2^{(k)} + \ldots + f_{1n}\, e_n^{(k)}$$

$$e_2^{(k+1)} = f_{21}\, e_1^{(k)} + f_{22}\, e_2^{(k)} + \ldots + f_{2n}\, e_n^{(k)}$$

$$\vdots$$

$$e_n^{(k+1)} = f_{n1}\, e_1^{(k)} + f_{n2}\, e_2^{(k)} + \ldots + f_{nn}\, e_n^{(k)}$$

Tomando o módulo em ambos os membros, aplicando a desigualdade triangular e somando membro a membro as igualdades acima, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| \leqslant |e_1^{(k)}| \sum_{i=1}^{n} |f_{i1}| + \ldots + |e_n^{(k)}| \sum_{i=1}^{n} |f_{in}| \tag{2.15}$$

Aplicando (2.14) em (2.15) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| < L \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k)}| \tag{2.16}$$

Fazendo $k = 0, 1, 2 \ldots$ em (2.16) tem-se:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| < L^2 \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k-1)}| < L^3 \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k-2)}| < \ldots < L^{k+1} \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(0)}| \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| < L^{k+1} \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(0)}|$$

Como $L < 1$, segue que:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| = 0 \qquad \text{como se queria demonstrar.}$$

Pode-se fazer o erro tão pequeno quanto se queira.

Corolário 2.1 (Critério das linhas): É condição sucifiente para que a iteração definida em (2.12) convirja, que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots n$$

Observação: A matriz que satisfaz as hipóteses do corolário 2.1 é chamada *diagonal dominante estrita.*

Teorema 2.2: É condição suficiente, para que a iteração definida em (2.12) convirja, que os elementos f_{ij} de F satisfaçam a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{n} |f_{ij}| \leqslant L < 1, \text{ para } i = 1, 2, \ldots n$$

qualquer que seja a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

A demonstração fica como exercício.

Corolário 2.2 (Critério das colunas): É condição suficiente para que a iteração definida em (2.12) convirja, que

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

Na prática, são usados os critérios de suficiência de convergência expressos nos corolários 2.1 e 2.2 tanto para o método de Jacobi quanto para o método de Gauss-Seidel. Basta que o sistema satisfaça apenas um desses critérios para ter-se convergência garantida, independentemente da escolha do vetor inicial. Os sistemas dos exemplos 2.17, 2.19 e 2.20 satisfazem a ambos os critérios. Verifique!

2.3.8. Implementação do Critério das Linhas

Seguem, abaixo, a implementação do critério pela função ICONV e um exemplo de programa para usá-la.

2.3.8.1. *FUNÇÃO ICONV*

```
C.................................................................
C
C
C        FUNCAO ICONV
C
C        OBJETIVO :
C             VERIFICACAO DA CONVERGENCIA DE METODOS ITERATIVOS
C             PARA RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES LINEARES
C
C        METODO UTILIZADO :
C             CRITERIO DAS LINHAS
C
C        USO :
C             ICONV(A,N,NMAX,MMAX)
C
C        PARAMETROS :
C             A      : MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C                      INDEPENDENTES
C             N      : ORDEM DA MATRIZ A
C             NMAX   : NUMERO MAXIMO DE LINHAS DECLARADO
C             MMAX   : NUMERO MAXIMO DE COLUNAS DECLARADO
C
C.................................................................
C
C
      INTEGER FUNCTION ICONV(A,N,NMAX,MMAX)
C
C
      INTEGER I,J,MMAX,N,NMAX
      REAL A(NMAX,MMAX),SOMA
        ICONV=0
        DO 20 I=1,N
          SOMA=0.
          DO 10 J=1,N
            IF(I.EQ.J)GO TO 10
              SOMA=SOMA+ABS(A(I,J))
   10     CONTINUE
          IF(ABS(A(I,I)).GT.SOMA)GO TO 20
            ICONV=1
            RETURN
   20   CONTINUE
        RETURN
      END
```


2.3.8.2. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C
C        PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA FUNCAO ICONV
C
C
      INTEGER I,IC,J,K,LF,LI,MMAX,N,NC,NMAX,N1
      REAL A(20,21)
        NMAX=20
        MMAX=NMAX+1
        READ(1,1)N
    1   FORMAT(I2)
        N1=N+1
        DO 10 I=1,N
          READ(1,2)(A(I,J),J=1,N1)
    2     FORMAT(10F8.0)
   10   CONTINUE
C
C         IMPRESSAO DA MATRIZ DE COEFICIENTES E TERMOS
C         INDEPENDENTES
C
        WRITE(2,11)
   11   FORMAT(1H1,29X,22HMATRIZ DE COEFICIENTES,/)
        NC=N/5
        LI=1
        LF=0
        IF(NC.EQ.0)GO TO 40
        DO 30 IC=1,NC
          LF=IC*5
          WRITE(2,12)(I,I=LI,LF)
   12     FORMAT(1H0,3HI/J,7X,I2,4(13X,I2))
          DO 20 I=1,N
            WRITE(2,13)I,(A(I,J),J=LI,LF)
   13       FORMAT(1H0,I2,5(3X,1PE12.5))
   20     CONTINUE
          LI=LF+1
   30   CONTINUE
   40   K=MOD(N,5)
        IF(K.EQ.0)GO TO 60
          LF=LF+K
          WRITE(2,12)(I,I=LI,LF)
          DO 50 I=1,N
            WRITE(2,13)I,(A(I,J),J=LI,LF)
   50     CONTINUE
   60   CONTINUE
        WRITE(2,61)
   61   FORMAT(1H0)
        WRITE(2,62)
   62   FORMAT(1H0,21H TERMOS INDEPENDENTES,/)
        DO 70 I=1,N
          WRITE(2,63)I,A(I,N1)
   63     FORMAT(1X,I2,3X,1PE12.5,/)
   70   CONTINUE
C
```

```
C         FIM DA IMPRESSAO
C
C         IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
         IF(ICONV(A,N,NMAX,MMAX).EQ.0)GO TO 80
          WRITE(2,71)
   71     FORMAT(5(/),1X,29HO SISTEMA NAO CONVERGE COM AS,
    G            23H EQUACOES NA ORDEM DADA)
          CALL EXIT
   80     CONTINUE
          WRITE(2,81)
   81     FORMAT(5(/),1X,18HO SISTEMA CONVERGE)
          CALL EXIT
       END
```

Exemplo 2.21

Verificar se o sistema de equações lineares abaixo converge ou não:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 6{,}57 \\ 4x_1 - 20x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + 7x_6 = -68{,}448 \\ 5x_1 - 3x_2 + 15x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = -112{,}05 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 - x_5 + 2x_6 = -3{,}968 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 9x_5 - x_6 = -2{,}18 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 12x_6 = 10{,}882 \end{cases}$$

Para resolver este exemplo, usando o programa acima, devem ser fornecidos:
Dados de entrada

10., 1., 1., 2., 3., – 2., 6.57,
4., – 20., 3., 2., – 1., 7., – 68.448,
5., – 3., 15., – 1., – 4., 1., – 112.05,
– 1., 1., 2., 8., – 1., 2., – 3.968,
1., 2., 1., 3., 9., – 1., – 2.18,
4., 3., 1., 2., – 1., 12., 10.882,

Os resultados obtidos foram:

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
1	1.00000E+01	1.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00
2	4.00000E+00	-2.00000E+01	3.00000E+00	2.00000E+00

MATRIZ DE COEFICIENTES

I/J	1	2	3	4
3	5.00000E+00	-3.00000E+00	1.50000E+01	-1.00000E+00
4	-1.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00	8.00000E+00
5	1.00000E+00	2.00000E+00	1.00000E+00	3.00000E+00
6	-4.00000E+00	3.00000E+00	1.00000E+00	2.00000E+00

I/J	5	6
1	3.00000E+00	-2.00000E+00
2	-1.00000E+00	7.00000E+00
3	-4.00000E+00	1.00000E+00
4	-1.00000E+00	2.00000E+00
5	9.00000E+00	-1.00000E+00
6	-1.00000E+00	1.20000E+01

TERMOS INDEPENDENTES

1	6.57000E+00
2	-6.84480E+01
3	-1.12050E+02
4	-3.96800E+00
5	-2.18000E+00
6	1.08820E+01

O SISTEMA CONVERGE

2.3.9. Qual Método é Melhor: o Direto ou o Iterativo?

Não se pode garantir *a priori* que método é o mais eficiente. É necessário o estabelecimento de certos critérios. Dado o caráter introdutório deste curso e usando critérios bem gerais, pode-se afirmar que os métodos diretos se prestam aos sistemas de pequeno porte com matrizes de coeficientes densas; também, resolvem satisfatoriamente vários sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes. Já os métodos iterativos, quando há convergência garantida, são bastante vantajosos na resolução de sistemas de grande porte com a matriz de coeficientes do tipo "esparso" (grande proporção de zeros entre seus elementos). Os sistemas oriundos da discretização de equações diferenciais parciais são um caso típico. Neles, os zeros da matriz original são preservados e as iterações são conduzidas com a matriz original, tornando os cálculos autocorrigíveis, o que tende a minimizar os erros de arredondamento.

2.4. SISTEMAS LINEARES COMPLEXOS

Seja o sistema

$$A\mathbf{x} = b \tag{2.17}$$

onde A, $\mathbf{x}$ e b são matrizes complexas.

Fazendo

$$\begin{aligned} A &= M + iN \\ b &= c + id \\ \mathbf{x} &= s + it \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde:

M, N – são matrizes reais de dimensão $n \times n$
c, d, s, t – são matrizes reais de dimensão $n \times 1$

Substituindo (2.18) em (2.17), tem-se:

$(M + iN)(s + it) = c + id$
$Ms - Nt + i(Ns + Mt) = c + id$

ou, ainda,

$Ms - Nt = c$ e
$Ns + Mt = d$

Este último sistema se reduz a

$$\left[\begin{array}{c|c} M & -N \\ \hline N & M \end{array}\right] \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

O sistema (2.17) foi reduzido, portanto, ao sistema real (2.19). Basta, pois aplicar em (2.19) um dos métodos vistos nas secções 2.2 e 2.3.

Exemplo 2.22

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} (1 + 2i)x_1 + 3x_2 = -5 + 4i \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 3 + 0i \\ -1 + 0i & 1 + 0i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

$$b = \begin{bmatrix} -5 + 4i \\ -1 + 0i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}}_{c} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{d}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_{s} + i \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}}_{t}$$

Escrevendo o sistema na forma (2.19) tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \hline t_1 \\ t_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -5 \\ -1 \\ \hline 4 \\ 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema acima por um dos métodos vistos nas secções 2.2 e 2.3 obtém-se a solução:

$$\overline{\mathbf{x}} = [i \quad -1+i]^T$$

2.4.1. Exercícios de Fixação

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares complexos abaixo:

2.4.1.1
$$\begin{cases} (1+i)x_1 + ix_2 + x_3 = 1+4i \\ -x_1 - 2ix_2 + (1+2i)x_3 = -1-2i \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4-i \end{cases}$$

2.4.1.2
$$\begin{cases} (3+4i)x_1 + x_2 = -2+3i \\ ix_1 + (-2-3i)x_2 = 13 \end{cases}$$

2.4.1.3
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2i \end{cases}$$

2.5. NOÇÕES DE MAL CONDICIONAMENTO

Nas subseções 2.2.1, 2.2.4 e 2.2.5 foi usado como critério para avaliar a precisão da solução $\overline{\mathbf{x}}$ do sistema $A\mathbf{x} = b$, o resíduo $r = b - A\hat{\mathbf{x}}$, onde $\hat{\mathbf{x}}$ é a solução computada.

Se $\hat{\mathbf{x}}$ for uma boa aproximação para $\mathbf{x}$, é esperado que as componentes de r sejam valores pequenos. Entretanto, valores pequenos para as componentes do resíduo podem não indicar que $\hat{\mathbf{x}}$ seja uma boa aproximação para $\mathbf{x}$.

Exemplo 2.23

Seja o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}001x_2 = 2{,}001 \\ 0{,}999x_1 + x_2 = 1{,}999 \end{cases} \qquad (2.20)$$

A solução exata para (2.20) é $\overline{\mathbf{x}} = [1 \quad 1]^T$.

Para $\hat{x} = [2 \quad 0{,}001]^T$, o resíduo de (2.20) é

$$r = \begin{bmatrix} 2{,}001 \\ 1{,}999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1{,}001 \\ 0{,}999 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}000 \\ 0{,}001 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 2{,}001 \\ 1{,}999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2{,}001001 \\ 1{,}999000 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -0{,}000001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Examinando r, $\hat{\mathbf{x}} = [2 \quad 0{,}001]^T$ poderia ser considerada como uma boa aproximação para $\mathbf{x}$, o que, de fato, não acontece.

Equações como as do sistema (2.20) são *mal condicionadas.*

Um modo de se detetar o mal condicionamento é através do determinante normalizado da matriz dos coeficientes do sistema dado; se o determinante normalizado for sensivelmente menor que a unidade, o sistema será mal condicionado.

Se A é uma matriz de ordem n, seu determinante normalizado, denotado por det (Norm A) é dado por:

$$\det(\text{Norm } A) = \frac{\det(A)}{\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

onde $\alpha_i = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$

O determinante normalizado da matriz dos coeficientes de (2.20) é 5×10^{-7}, isto é,

$$\det(\text{Norm } A) < 1$$

O sistema (2.20) é mal condicionado, como já era esperado.

Observação: Há outros critérios para a verificação de mal condicionamento de sistemas lineares e o leitor poderá encontrá-los em [3] e [7].

2.6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

2.6.1. Descrição do Problema

Vários candidatos prestaram concurso para preenchimento de duas vagas numa empresa. Somente quatro dentre eles conseguiram aprovação. A classificação, com as respectivas notas e médias, foi divulgada através da seguinte tabela:

Notas / Candidatos	Português	Matemática	Datilografia	Legislação	Média	Classificação
A	8,0	9,2	8,5	9,3	8,58	1º
B	8,1	7,7	8,2	8,2	8,28	2º
C	8,9	7,3	7,8	8,6	8,22	3º
D	8,0	7,5	7,6	8,1	7,80	4º

Evidentemente, a empresa convocou os candidatos A e B para preencher as vagas. Inconformado com o resultado, o candidato C procurou o gerente da firma para se informar de como as médias tinham sido calculadas, já que pôde verificar que não se tratava de média aritmética, pois, se assim o fosse, sua média seria 8,15 e não 8,22. Recebeu, então, como resposta, que o critério utilizado fora o da média ponderada. Baseado nesta informação, o candidato C requereu à Justiça a anulação do concurso, pois as médias não haviam sido calculadas corretamente.

Qual o veredicto do juiz designado para o caso?

2.6.2. Modelo Matemático

Sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 os respectivos pesos das disciplinas mencionadas acima.

Tendo em vista que se trata de média ponderada, para os candidatos A, B, C e D têm-se as seguintes equações:

$$(S): \left\{ \begin{array}{l} 8{,}58 = \dfrac{8{,}0p_1 + 9{,}2p_2 + 8{,}5p_3 + 9{,}3p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \\[2ex] 8{,}28 = \dfrac{8{,}1p_1 + 7{,}7p_2 + 8{,}2p_3 + 8{,}2p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \\[2ex] 8{,}22 = \dfrac{8{,}9p_1 + 7{,}3p_2 + 7{,}8p_3 + 8{,}6p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \\[2ex] 7{,}80 = \dfrac{8{,}0p_1 + 7{,}5p_2 + 7{,}6p_3 + 8{,}1p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} \end{array} \right.$$

que formam o sistema linear homogêneo (S') abaixo:

$$(S'): \left\{ \begin{array}{l} -0{,}58p_1 + 0{,}62p_2 - 0{,}08p_3 + 0{,}72p_4 = 0 \\ -0{,}18p_1 - 0{,}58p_2 - 0{,}08p_3 + 0{,}38p_4 = 0 \\ 0{,}68p_1 - 0{,}92p_2 - 0{,}42p_3 + 0{,}38p_4 = 0 \\ 0{,}2\ p_1 - 0{,}3\ p_2 - 0{,}2\ p_3 + 0{,}3\ p_4 = 0 \end{array} \right.$$

2.6.3. Solução Numérica

Para resolver o sistema (S') é utilizada a eliminação de Gauss, cuja implementação é feita através da sub-rotina Gauss e do programa principal descritos na subsecção 2.2.2.

Dados de entrada

```
Ø4
-Ø.58, Ø.62, -Ø.Ø8, Ø.72, Ø.,
-Ø.18, -Ø.58, -Ø.Ø8, Ø.38, Ø.,
Ø.68, -0.92, -Ø.42, Ø.38, Ø.,
Ø.2, -0,3, -Ø.2, Ø.3, Ø.,
```

Os resultados obtidos são:

```
VETOR SOLUCAO

X  =  0.00000E+00
 1

X  =  0.00000E+00
 2

X  =  0.00000E+00
 3

X  =  0.00000E+00
 4

O VALOR DO DETERMINANTE E'  -1.34800E-03
```

2.6.4. Análise do Resultado

O vetor solução do sistema (S') é $[0\ 0\ 0\ 0]^T$, isto é, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$, o que não satisfaz às equações do sistema S. Como o determinante é diferente de zero, pode-se afirmar que a solução de (S') é única.

Certamente, o juiz dará ganho de causa ao candidato C, já que os pesos são todos nulos, demonstrando, assim, que o critério da média ponderada não foi aplicado.

2.7. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2.7.1. O método da **pivotação parcial** consiste na resolução de um sistema linear fazendo-se as eliminações do seguinte modo: segue-se a seqüência de eliminações como no método de Gauss (subsecção 2.2.1), cuidando de escolher em cada coluna o coeficiente de maior módulo.

Resolver, pelo método da pivotação parcial, o sistema abaixo, retendo durante as eliminações e as substituições retroativas cinco casas decimais:

$$\begin{cases} 1{,}0234x_1 - 2{,}4567x_2 + 1{,}2345x_3 = 6{,}6728 \\ 5{,}0831x_1 + 1{,}2500x_2 + 0{,}9878x_3 = 6{,}5263 \\ -3{,}4598x_1 + 2{,}5122x_2 - 1{,}2121x_3 = -11{,}2784 \end{cases}$$

2.7.2. Resolver pelo método de Gauss o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2.7.3. Seja A_{nxn} a matriz que se deseja inverter.

Se A possui inversa X_{nxn}, então $AX = I$, onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Sejam $\mathbf{x}^{(1)}\ \mathbf{x}^{(2)} \dots \mathbf{x}^{(n)}$ as colunas de X. Para se achar a matriz inversa é necessário resolver n sistemas lineares, cuja matriz de coeficientes é a mesma, isto é, devem ser resolvidos os sistemas

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(1)} &= (1\ 0\ 0\ \dots\ 0)^T \\ A\mathbf{x}^{(2)} &= (0\ 1\ 0\ \dots\ 0)^T \\ A\mathbf{x}^{(3)} &= (0\ 0\ 1\ \dots\ 0)^T \\ &\ \vdots \\ A\mathbf{x}^{(n)} &= (0\ 0\ 0\ \dots\ 1)^T \end{aligned}$$

Aplicar o método acima para achar a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7.4. Se o método da pivotação completa fosse usado para resolver um sistema linear, como seria calculado o determinante da matriz de coeficientes do sistema dado?

2.7.5. Calcular o determinante da matriz de coeficientes do sistema do exemplo 2.9.

2.7.6. Calcular o determinante da matriz de coeficientes do sistema do exemplo 2.12.

2.7.7. Resolver pelo método de Gauss, retendo cinco decimais durante as eliminações e as substituições retroativas:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ 3x_1 + 19x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 25 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = 18 \\ 5x_1 + 33x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 72 \end{cases}$$

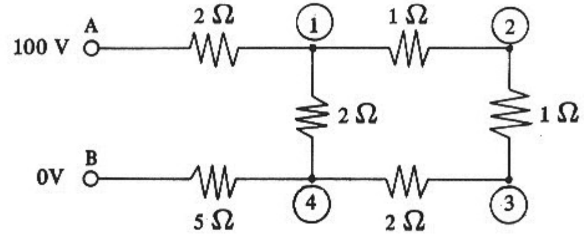
2.7.8. Verificar se o sistema do exercício 2.7.7 é mal condicionado.

2.7.9. Qual o número de multiplicações e divisões na fase de eliminação do método de Jordan? E na fase de resolução do sistema diagonal?

2.7.10. Qual o número de multiplicações e divisões da fase de eliminação do método de Gauss? E da fase de substituições retroativas?

2.7.11. Comparar o número de multiplicações e divisões nos exercícios 2.7.9 e 2.7.10 e responda: qual o método de esforço computacional menor para $n = 5, 10, 20, 30$?

2.7.12. Seja o diagrama de um circuito



A corrente que flui do nó p para o nó q de uma rede elétrica é $I_{pq} = \dfrac{V_p - V_q}{R_{pq}}$, I em ampères e R em ohms, onde V_p e V_q são voltagens nos nós p e q, respectivamente, e R_{pq} é a resistência no arco pq (LEI DE OHM).

A soma das correntes que chegam a cada nó é nula (LEI DE KIRCHOFF); assim, as equações que relacionam as voltagens podem ser obtidas.

No nó 1, tem-se a equação $I_{A1} + I_{21} + I_{41} = 0$, ou seja,

$$\frac{100 - V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_4 - V_1}{2} = 0 \text{ ou } \boxed{-4V_1 + 2V_2 + V_4 = -100}$$

a) Obter as equações dos nós 2, 3 e 4.

b) Resolver, por qualquer método, o sistema linear formado pelas equações dos nós 1, 2, 3 e 4, a fim de obter as voltagens em cada nó do circuito.

2.7.13. As transformações da 1ª e da 2ª etapas do exemplo 2.8 possuem a seguinte interpretação matricial:

Na 1ª etapa, as transformações são equivalentes à pré-multiplicação da matriz B_0 pela matriz

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21}^{(0)} & 1 & 0 \\ m_{31}^{(0)} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $B_1 = M_0 B_0$.

Na 2ª etapa, as transformações são equivalentes à pré-multiplicação da matriz B_1 pela matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $B_2 = M_1 B_1$.

Logo, $B_2 = M_1 M_0 B_0$, onde B_0 é a matriz aumentada do sistema dado e B_2 é a matriz triangular aumentada transformada.

Interpretar, matricialmente, a transformação de B_0 da ordem $n(n+1)$ em B_{n-1}.

2.7.14. Resolver pelo método de Gauss-Seidel ou Jacobi com $\epsilon < 10^{-3}$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

2.7.15. Resolver pelo método de Gauss-Seidel ou Jacobi com $\epsilon < 10^{-3}$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28 \\ x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}$$

2.7.16. Resolver, por qualquer método, o sistema:

$$\begin{cases} -2ix_1 + 3x_2 = 2 + 5i \\ (1+i)x_1 + ix_2 = -3 \end{cases}$$

2.7.17. Resolver, por qualquer método, o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - ix_3 = 1 - 2i \\ -ix_1 + x_2 + 2ix_3 = -2i \\ 2ix_1 - ix_2 + x_3 = -1 + 2i \end{cases}$$

2.7.18. Resolver, por qualquer método, o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 = 1 + 5i \\ (-1+i)x_1 + (1+2i)x_2 = 4i \end{cases}$$

2.7.19. Resolver pelo método de Gauss retendo, durante as eliminações e substituições retroativas, quatro decimais; a seguir, usar refinamento para melhorar a solução:

$$\begin{cases} 8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 = 16{,}4 \\ 24{,}5x_1 - 8{,}8x_2 + 11{,}5x_3 - 45{,}1x_4 = -49{,}7 \\ 52{,}3x_1 - 84{,}0x_2 - 23{,}5x_3 + 11{,}4x_4 = -80{,}8 \\ 21{,}0x_1 - 81{,}0x_2 - 13{,}2x_3 + 21{,}5x_4 = -106{,}30 \end{cases}$$

2.7.20. Resolver pelo método de Jordan:

$$\begin{cases} 0{,}25x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}795 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}24x_3 = 0{,}600 \\ 0{,}24x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}22x_3 = 0{,}710 \end{cases}$$