2.1.1 Alguns tipos de matrizes

Matrizes com determinados formatos e elementos aparecem com tanta freqüência que merecem nomes especiais.

Coluna e linha

Uma matriz de tamanho $n \times 1$ é dita uma matriz coluna ou um vetor coluna de tamanho n. Por outro lado, uma matriz de tamanho $1 \times m$ é uma matriz linha ou um vetor linha de tamanho m.

Nula

Se todos os elementos de uma matriz A forem iguais a zero, então ela é uma matriz nula, ou seja, $a_{ij} = 0, \ \forall\, i, j$.

Diagonal

Uma matriz quadrada é dita diagonal se todos os elementos fora da diagonal principal forem nulos, isto é, se $d_{ij} = 0, \ \forall\, i \neq j$.

Identidade

Matriz identidade é uma matriz diagonal com os elementos da diagonal principal iguais a 1, ou seja, $e_{ij} = 1, \ \forall\, i = j$ e $e_{ij} = 0, \ \forall\, i \neq j$.

Triangular

Existem dois tipos de matrizes triangulares: inferior e superior. Uma matriz triangular inferior é uma matriz com todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, isto é, $b_{ij} = 0, \ \forall\, i < j$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

De modo similar, uma matriz triangular superior é uma matriz com todos os elementos abaixo da diagonal principal sendo nulos, ou seja, $c_{ij} = 0, \ \forall\, i > j$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2m} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}.$$

Densa e esparsa

Uma matriz é densa quando a maior parte de seus elementos forem não nulos e é esparsa quando a maioria for igual a zero. Muitas vezes, as matrizes provenientes da solução de problemas reais são esparsas e de alta ordem, existindo esquemas especiais para representá-las e manipulá-las [14].

Simétrica

Uma matriz é dita simétrica se houver uma simetria dos elementos em relação à diagonal principal, isto é, $m_{ij} = m_{ji}, \ \forall\, i, j$. Deste modo, uma matriz é simétrica se ela for igual à sua transposta, ou seja, $M = M^T$ (ver Seção 2.1.2).

Exemplo 2.1 A matriz simétrica M e sua transposta M^T

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

■

2.1.2 Operações matriciais

Operações envolvendo matrizes são de grande importância na solução de problemas. Algumas delas são descritas a seguir.

Transposição

A transposta de uma matriz A, representada por A^T, é uma matriz obtida trocando-se as suas linhas pelas colunas, de modo que a linha i torna-se a coluna i e a coluna j transforma-se na linha j.

Exemplo 2.2 A transposição da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

■

Adição e subtração

Se A e B forem matrizes de dimensão $n \times m$, então $C = A + B$ também será $n \times m$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall\, i, j$. É claro que apenas matrizes de mesmo tamanho podem ser somadas ou subtraídas.

Exemplo 2.3 As operações de adição e subtração das matrizes A e B

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \ \text{e} \ D = A - B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

■

Multiplicação

O produto de uma matriz A de dimensão $n \times m$ por um escalar k resulta em uma matriz $B = kA$ de mesma dimensão $n \times m$, tal que $b_{ij} = ka_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Exemplo 2.4 O produto de matriz por escalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

■

O produto de uma matriz A $(n \times m)$ por um vetor v $(m \times 1)$ resulta em um vetor x $(n \times 1)$, de forma que

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo 2.5 O produto de matriz por vetor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow x = Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

■

O produto de uma matriz A $(n \times p)$ por uma matriz B $(p \times m)$ é uma matriz $C = AB$ $(n \times m)$, tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplo 2.6 O produto de matriz por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}.$$

■

O elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha i de A pelos correspondentes elementos da coluna j de B. Desse modo, duas matrizes podem ser multiplicadas se, e somente se, o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

A pré-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D tem o efeito de multiplicar cada linha de A pelo correspondente elemento de D

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & d_{11}a_{13} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & d_{22}a_{23} \\ d_{33}a_{31} & d_{33}a_{32} & d_{33}a_{33} \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, a pós-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D faz com que cada coluna de A seja multiplicada pelo correspondente elemento de D

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} & a_{13}d_{33} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} & a_{23}d_{33} \\ a_{31}d_{11} & a_{32}d_{22} & a_{33}d_{33} \end{bmatrix}.$$

Pelas expressões anteriores, pode-se verificar que a multiplicação matricial não segue a lei comutativa, ou seja, geralmente $AB \neq BA$.

Produto interno e externo

O produto escalar ou interno entre um vetor x $(n \times 1)$ e um vetor y $(n \times 1)$ é um escalar k obtido por

$$k = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Por outro lado, o produto externo entre um vetor x $(n \times 1)$ e outro vetor y $(m \times 1)$ resulta em uma matriz M $(n \times m)$, de forma que

$$M = xy^T,\ \text{com } m_{ij} = x_i y_j,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } j = 1, 2, \ldots, m,$$

isto é,

$$M = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.7 O produto interno e externo de dois vetores

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow k = x^T y = 10 \text{ e } M = xy^T = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 20 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

■

Determinante

Uma matriz quadrada A de ordem n tem um número associado denominado determinante, cujo valor pode ser obtido pela fórmula de recorrência

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(M_{1n}),$$

onde M_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ resultante da remoção da linha i e coluna j de A e sendo o determinante de uma matriz (1×1) igual a esse único elemento. Particularmente,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ e}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \quad (2.1)$$

Um modo mais eficiente de calcular o determinante de uma matriz será mostrado mais adiante. Uma matriz A com $\det(A) = 0$ é dita singular e com $\det(A) \neq 0$ é não singular.

Exemplo 2.8 O determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 2 \times 5 - 4 \times 1 = 6.$$

■

Posto

Uma seqüência de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é dita linearmente dependente se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0.$$

Neste caso, diz-se também que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ são linearmente dependentes. Se a igualdade acima só se verificar com os α_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ iguais a zero, diz-se que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ são linearmente independentes. Agora, pode-se definir posto de uma matriz A $(m \times n)$ como o número máximo de vetores linhas ou de vetores colunas de A que são linearmente independentes, sendo $\text{posto}(A) \leq \min(m, n)$.

Exemplo 2.9 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando que as linhas 2 e 4 são obtidas pela combinação linear das linhas 1 e 3, pois

linha 2 = linha 1 + linha 3
linha 4 = 2(linha 1) − linha 3

e como as linhas 1, 3 e 5 são linearmente independentes, então tem-se $\text{posto}(A) = 3$. ■

Traço

O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal

$$\text{traço(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemplo 2.10 A matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

tem $\text{traço}(M) = 5 + 3 + 9 = 17.$ ■

Inversa

A inversa de uma matriz quadrada A de ordem n é representada por A^{-1} e definida tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Assim, a lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa. Um método para calcular a matriz inversa será apresentado na Seção 2.7.2.

Exemplo 2.11 Uma matriz A e sua inversa A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \; A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Operações com transposta e inversa

a) $(A^T)^T = A.$

b) $(A^{-1})^{-1} = A.$

c) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}.$

d) Se $A = BCD$, então $A^T = D^T C^T B^T$ e $A^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1}.$

e) $(A + B)^T = A^T + B^T.$

f) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$

2.1.3 Noções sobre autovalores e autovetores

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

que apresenta a propriedade

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

É dito, então, que a matriz A possui um autovalor $\lambda = 2$ e um correspondente autovetor $v = [1 \;\; 2]^T$. O mesmo também é verdade para $\lambda = 4$ e $v = [2 \;\; 3]^T$

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, pode-se definir a relação fundamental de uma matriz A de ordem n com seus n autovalores λ e os correspondentes autovetores v

$$Av = \lambda v. \tag{2.2}$$

O problema do autovalor consiste em encontrar a solução não trivial (ou não nula) do sistema homogêneo

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Pelo Teorema 2.1 [29] e sabendo que uma matriz singular tem determinante nulo, então

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.3}$$

Teorema 2.1 *Se M for uma matriz de ordem n, então o sistema homogêneo $My = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, M for singular.*

Exemplo 2.12 Para a matriz A mostrada acima

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-\lambda & -4 \\ 12 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0, \text{isto é,}$$

$$(10-\lambda)(-4-\lambda) - 12(-4) = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4) = 0.$$

Portanto, os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$ são os chamados autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ daquela matriz A. É fácil ver que para $\lambda = 2$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 2I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-2 & -4 \\ 12 & -4-2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - 2I) = 8 \times -6 - 12 \times -4 = 0.$$

Também para $\lambda = 4$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 4I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-4 & -4 \\ 12 & -4-4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - 4I) = 6 \times -8 - 12 \times -4 = 0.$$

Já para $\lambda \neq 2$ ou $\lambda \neq 4$, por exemplo, $\lambda = 1$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-1 & -4 \\ 12 & -4-1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - I) = 9 \times -5 - 12 \times -4 = 3 \neq 0.$$

■

Polinômio característico

O determinante (2.3) é da forma

$$D_n(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

$$D_n(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\right). \qquad (2.4)$$

O polinômio $D_n(\lambda)$ de grau n é chamado de polinômio característico de A e seus n zeros λ_i são os autovalores de A. Por exemplo, expandindo o determinante dado por (2.4), para $n = 3$, obtém-se o seguinte polinômio característico

$$\begin{aligned} D_3(\lambda) \;=\; & -\lambda^3 + [a_{11} + a_{22} + a_{33}]\lambda^2 - \\ & [(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})]\lambda + \\ & [a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})], \end{aligned}$$

que é da forma $D_3(\lambda) = d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0$. Deve ser observado que o coeficiente $d_{n-1} = d_2$ do polinômio é igual a $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{traço}(A)$ e que $d_0 = \det(A)$, conforme (2.1). Pelas relações entre raízes e coeficientes de uma equação algébrica (relações de Girard), mostradas na Seção 6.1.1, tem-se que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{d_0}{d_n}.$$

Conseqüentemente, duas importantes propriedades são obtidas

$$\text{traço}(A) = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz (traço) é igual à soma dos seus autovalores e, além disso,

$$\det(A) = (-1)^n \frac{d_0}{d_n} \longrightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

isto é, o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores. Isso mostra que uma matriz singular tem, no mínimo, um autovalor nulo.

Exemplo 2.13 Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$\text{traço}(A) = 10 + (-4) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 4 \text{ e}$$

$$\det(A) = 10(-4) - 12(-4) = 8 = \lambda_1\lambda_2 = 2 \times 4.$$

■

Por (2.4), uma matriz com elementos reais tem seu polinômio característico com coeficientes reais. Mas, pelo Teorema 6.2, se os coeficientes de uma equação algébrica forem reais, então suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares, ou seja, uma matriz com elementos reais tem autovalores reais e/ou complexos conjugados em pares.

Exemplo 2.14 Calcular os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por (2.4), o polinômio característico é

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 2 \leadsto$$

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Como os autovalores λ_i de A são os zeros do polinômio característico $D_2(\lambda)$, então

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

É fácil verificar que

$$\text{traço}(A) = 2 + (-1) = 1 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 3 + (-2) \quad \text{e}$$

$$\det(A) = 2(-1) - 2 \times 2 = -6 = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i = 3 \times (-2).$$

■

O processo de calcular os autovalores por intermédio da determinação dos zeros do polinômio característico, apesar de ser esquematicamente simples, é ineficiente em termos computacionais e, portanto, é um processo não recomendado. O estudo de métodos mais eficientes, como aqueles baseados em transformações ortogonais [20, 34], está além do escopo deste texto.

Forma quadrática

Seja A uma matriz simétrica de ordem n com autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ e v um vetor qualquer não nulo de tamanho n. A forma quadrática de uma matriz é definida pelo escalar

$$q = v^T A v, \ \forall\, v \neq 0.$$

A Tabela 2.1 mostra que, dependendo do valor da forma quadrática de A, a matriz pode ter diferentes nomes. Ela apresenta também a relação entre a forma quadrática de A e seus autovalores λ_i.

Tabela 2.1 Valores da forma quadrática.

Forma quadrática	Nome de A	Autovalores de A
$v^T A v > 0$	definida positiva	$\lambda_i > 0$
$v^T A v \geq 0$	semidefinida positiva	$\lambda_i \geq 0$
$v^T A v < 0$	definida negativa	$\lambda_i < 0$
$v^T A v \leq 0$	semidefinida negativa	$\lambda_i \leq 0$

Quando uma matriz A não for enquadrada em nenhum dos nomes da Tabela 2.1 é dita indefinida, pois seus autovalores podem ser negativos, nulos e positivos.

Outras propriedades dos autovalores

a) Considerando que $\det(A) = \det(A^T)$, então os autovalores λ de A, representados por $\lambda(A)$, são iguais a $\lambda(A^T)$.

b) Se A for uma matriz triangular de ordem n, então, por (2.4)

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Esta equação se anula para $\lambda_i = a_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, significando que os autovalores de uma matriz triangular ou diagonal são iguais aos elementos da diagonal principal.

c) O posto de uma matriz quadrada é igual ao número de autovalores não nulos.

d) Se λ_i são os autovalores de A, então λ_i^{-1} são os autovalores de A^{-1}. Multiplicando ambos os lados da igualdade $Av = \lambda v$ por A^{-1}, tem-se

$$A^{-1} A v = \lambda A^{-1} v,$$

$$Iv = \lambda A^{-1} v \longrightarrow A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v.$$

Exemplo 2.15 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Então

Autovalores de $A: \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5,$

$\text{posto}(A) = 3$ e

Autovalores de $A^{-1}: \tau_1 = \lambda_1^{-1} = 0{,}5;\ \ \tau_2 = \lambda_2^{-1} = 1;\ \ \tau_3 = \lambda_3^{-1} = 0{,}2;$ sendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}7 \\ 0 & 1 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

■

2.1.4 Normas

O modo usual de expressar a magnitude de um vetor ou de uma matriz é por meio de um escalar denominado norma. No caso de um vetor x de comprimento n, as normas são definidas em termos da norma-p

$$\boxed{\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.}$$

A partir desta equação geral, obtêm-se as três normas vetoriais mais comuns

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|} \text{ (norma de soma de magnitudes),}$$

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}} \text{ (norma Euclidiana) e}$$

$$\boxed{\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \max_{1\le i\le n} |x_i|} \text{ (norma de máxima magnitude).}$$

Uma norma vetorial é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, que associa um número real a cada vetor e que satisfaz às condições

$$\|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ e}$$

$$\|kx\| = |k|\|x\|,$$

onde $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ são vetores e $k \in \mathbb{C}$ é um escalar.

Exemplo 2.16 Calcular as normas 1, 2 e ∞ do vetor $x = [3\ \ {-5}\ \ 1]^T$.

$$\|x\|_1 = |3| + |-5| + |1| \rightsquigarrow \|x\|_1 = 9,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|3|^2 + |-5|^2 + |1|^2} \rightsquigarrow \|x\|_2 = \sqrt{35} \approx 5{,}9161 \text{ e}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|3|, |-5|, |1|) \rightsquigarrow \|x\|_\infty = 5.$$

■

Exemplo 2.17 Calcular as normas 1, 2 e ∞ do vetor $v = [1\ \ {-3}\ \ 4{+}3i\ \ 4{-}3i]^T$.

$$\|v\|_1 = |1| + |-3| + |4{+}3i| + |4{-}3i| = 1 + 3 + 5 + 5 \rightsquigarrow \|v\|_1 = 14,$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-3|^2 + |4{+}3i|^2 + |4{-}3i|^2} \rightsquigarrow \|v\|_2 = \sqrt{60} \approx 7{,}7460 \text{ e}$$

$$\|v\|_\infty = \max(|1|, |-3|, |4{+}3i|, |4{-}3i|) \rightsquigarrow \|v\|_\infty = 5.$$

■

Quanto às normas de matrizes, elas satisfazem às condições

$$\|A\| \geq 0 \text{ e } \|A\| = 0 \text{ se, e somente se, } A = 0,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ e}$$

$$\|kA\| = |k|\|A\|,$$

onde A e $B \in \mathbb{C}^n$ são matrizes de mesma ordem e $k \in \mathbb{C}^n$ é um escalar. As normas matriciais mais comuns são

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \text{ (norma de soma máxima de coluna),}$$

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \text{ (norma de soma máxima de linha),}$$

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}} \text{ (norma de Frobenius) e}$$

$$\boxed{\|A\|_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} & \text{se } A = A^T \\ \sigma_{\max} & \text{se } A \neq A^T \end{cases}} \text{ (norma espectral),} \tag{2.5}$$

onde $\lambda_{\max}$ é o maior autovalor de A em módulo e $\sigma_{\max}$ é o maior valor singular de A, sendo $\sigma_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$ (raiz quadrada do maior autovalor em módulo da matriz A^TA).

Uma norma matricial $\|A\|$ é dita consistente com uma norma vetorial $\|x\|$ se, para qualquer matriz A $(n \times n)$ e vetor x $(n \times 1)$, tem-se que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Uma norma matricial consistente $\|A\|$ é dita subordinada a uma norma vetorial $\|y\|$ se para qualquer matriz A $(n \times n)$ existe um vetor y $(n \times 1)$, $y \neq 0$, tal que $\|Ay\| = \|A\|\|y\|$. Se a norma for subordinada, então $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. As normas matriciais 1, 2 e ∞ são consistentes e subordinadas às respectivas normas vetoriais. No entanto, a norma de Frobenius é consistente, mas não subordinada à norma-2 vetorial [3].

Exemplo 2.18 Calcular as normas 1, ∞, F e 2 da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\|A\|_1 = \max(|2| + |3|, |-1| + |5|) = \max(5, 6) \rightsquigarrow \|A\|_1 = 6,$$

$$\|A\|_\infty = \max(|2| + |-1|, |3| + |5|) = \max(3, 8) \rightsquigarrow \|A\|_\infty = 8,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |5|^2} \rightsquigarrow \|A\|_F = \sqrt{39} \approx 6{,}2450 \text{ e}$$

$$\|A\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(A^TA)}\right) = \max(2{,}2284;\ 5{,}8339) \rightsquigarrow \|A\|_2 = 5{,}8339.$$

■

Exemplo 2.19 Calcular as normas 1, ∞, F e 2 da matriz $B = \begin{bmatrix} 3+4i & -2i \\ 3-4i & 9 \end{bmatrix}$.

$$\|B\|_1 = \max(|3+4i| + |3-4i|, |-2i| + |9|) = \max(10, 11) \rightsquigarrow \|B\|_1 = 11,$$

$$\|B\|_\infty = \max(|3+4i| + |-2i|, |3-4i| + |9|) = \max(7, 14) \rightsquigarrow \|B\|_\infty = 14,$$

$$\|B\|_F = \sqrt{|3+4i|^2 + |-2i|^2 + |3-4i|^2 + |9|^2} \rightsquigarrow \|B\|_F = \sqrt{135} \approx 11{,}6190 \text{ e}$$

$$\|B\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(B^TB)}\right) = \max(5{,}2831;\ 10{,}3484) \rightsquigarrow \|B\|_2 = 10{,}3484.$$ ■

2.1.5 Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações algébricas lineares consiste em um conjunto de m equações polinomiais com n variáveis x_i de grau 1

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad & \ \ \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

que pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ou simplesmente $Ax = b$, onde A é chamada de matriz dos coeficientes, x é o vetor solução e b é o vetor dos termos independentes. Se A for uma matriz quadrada $(n \times n)$ não singular, então

$$Ax = b \longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \longrightarrow x = A^{-1}b,$$

ou seja, o vetor solução pode ser obtido pelo produto da inversa da matriz dos coeficientes pelo vetor de termos independentes. Resolver um sistema de equações lineares consiste em encontrar um vetor x $(n \times 1)$ que satisfaça simultaneamente às n equações.

2.1.6 Classificação de sistemas

Um sistema linear pode ser classificado sob vários critérios, como, por exemplo, a forma da matriz dos coeficientes e o número de soluções.

Forma da matriz

Quando a matriz dos coeficientes A $(m \times n)$ possuir $m \geq n$ e posto$(A) = n$, têm-se mais equações do que incógnitas e o sistema (2.6) é dito sobredeterminado. Este é um problema de quadrados mínimos lineares

$$\underset{x}{\textbf{minimize}}\ \|b - Ax\|_2$$

o qual possui uma única solução, chamada de solução de quadrados mínimos.

Por outro lado, quando $m < n$ e posto$(A) = m$, diz-se que o sistema é subdeterminado, significando que existem mais incógnitas do que equações. Neste caso, ou o sistema não tem solução ou existe um número infinito de soluções que satisfazem $b - Ax = 0$. Nesta situação, é muitas vezes útil encontrar a solução única x que minimiza $\|x\|_2$ e o problema é chamado determinar a solução de norma mínima do sistema linear (2.6).

A situação mais comum é quando $m = n$, caso em que a matriz dos coeficientes é quadrada. Resolver um sistema de ordem n significa encontrar as n incógnitas x_i que satisfaçam, simultaneamente, às n equações algébricas lineares (2.6). Esta é a situação que será abordada neste capítulo.

Número de soluções

O número de soluções de um sistema de equações lineares depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes. Há três situações possíveis:

a) Única solução

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) \neq 0 \text{ e } x = [1\ \ 2]^T.$$

O fato do $\det(A) \neq 0$ resulta que o sistema admite uma única solução. Geometricamente, a solução de um sistema linear de ordem n é um ponto no $\mathbb{C}^n$ comum aos n hiperplanos descritos por cada uma das n equações, ou seja, o ponto que satisfaz simultaneamente a todas as equações. Por exemplo, a solução de

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -20 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{bmatrix}$$

é o vetor $x = [5\ \ 1\ \ 10]^T$. O vetor solução x é a interseção dos três planos descritos por cada uma das três equações E1, E2 e E3 acima, conforme mostrado na Figura 2.1. Neste caso, com $\det(A) = 251 \neq 0$, os três planos se interceptam em um único ponto no $\mathbb{R}^3$.

b) Infinitas soluções

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = 0 \text{ e } x = [\theta\ \ 2-\theta]^T.$$

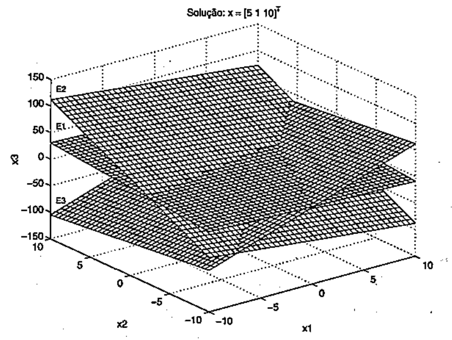
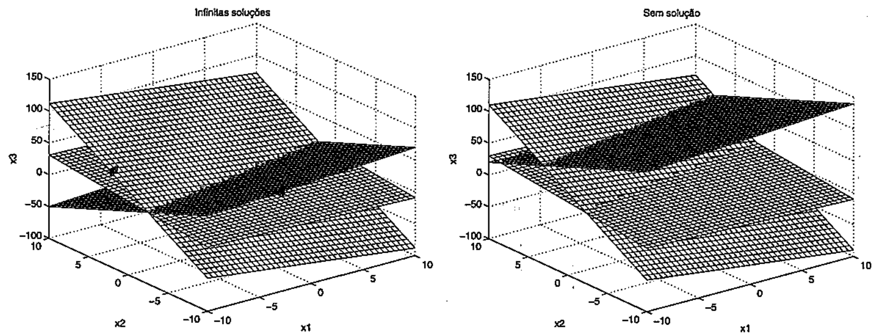


Figura 2.1 Interpretação geométrica da solução de $Ax = b$.

Como $\det(A) = 0$, o sistema admite infinitas soluções, uma para cada valor de θ. A Figura 2.2(a) exibe a representação geométrica dos planos descritos por

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Neste sistema, com $\det(A) = 0$, os três planos se interceptam em uma linha reta descrita por $x = [70-6{,}5\theta \;\; 16-1{,}5\theta \;\; \theta]^T$, conforme será apresentado no Exemplo 2.32. Assim, para cada valor de θ ter-se-á uma solução do sistema linear.



(a) Sistema com infinitas soluções. (b) Sistema sem solução.

Figura 2.2 Interpretação geométrica de sistema linear com matriz singular.

c) Sem solução

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = 0 \text{ e } \nexists\, x.$$

Se $\det(A) = 0$, o sistema pode também não ter solução. A Figura 2.2(b) mostra que os planos descritos por

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}$$

(com $\det(A) = 0$) não têm nenhum ponto em comum, ou seja, o sistema acima não admite solução (ver Exemplo 2.32).

Deste modo, conclui-se que, se $\det(A) \neq 0$, o sistema possui uma única solução, e, se $\det(A) = 0$, ou o sistema tem infinitas soluções ou nenhuma. Sistema linear com matriz dos coeficientes singular será abordado na Seção 2.4.4.

2.2 Sistemas triangulares

Os sistemas triangulares são amplamente utilizados porque as suas soluções são facilmente obtidas. Há dois tipos de sistemas triangulares: inferiores e superiores.

2.2.1 Sistema triangular inferior

Um sistema triangular inferior de ordem n apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

A solução de um sistema triangular inferior é calculada pelas substituições sucessivas

$$l_{11}x_1 = c_1 \rightsquigarrow x_1 = \frac{c_1}{l_{11}},$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \rightsquigarrow x_2 = \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}},$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3 \rightsquigarrow x_3 = \frac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}},$$

$$\cdots$$

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = c_n \rightsquigarrow$$

$$x_n = \frac{c_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots - l_{n,n-1}x_{n-1}}{l_{nn}}.$$

As substituições sucessivas podem ser representadas por

$$\boxed{x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \; i = 1, 2, \ldots, n.} \qquad (2.7)$$

Exemplo 2.20 Calcular a solução do sistema triangular inferior usando as substituições sucessivas (2.7)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4,\ x_1 = \frac{4}{2} \rightsquigarrow x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1,\ x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \rightsquigarrow x_2 = -1,$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 48,\ x_3 = \frac{48 - (2) + 6(-1)}{8} \rightsquigarrow x_3 = 5 \text{ e}$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 6,\ x_4 = \frac{6 + (2) - 4(-1) + 3(5)}{9} \rightsquigarrow x_4 = 3.$$

■

Conseqüentemente, a solução do sistema triangular inferior é $x = [2\ -1\ 5\ 3]^T$. A Figura 2.3 mostra um algoritmo para resolver um sistema triangular inferior usando as substituições sucessivas (2.7). Os parâmetros de entrada são a ordem n do sistema, a matriz triangular inferior L e o vetor de termos independentes c. O parâmetro de saída é o vetor solução x.

```
Algoritmo Substituições_Sucessivas
{ Objetivo: Resolver o sistema triangular inferior Lx = c }
{           pelas substituições sucessivas }
parâmetros de entrada n, L, c
   { ordem, matriz triangular inferior e vetor independente }
parâmetros de saída x  { solução do sistema triangular inferior }
   x(1) ← c(1)/L(1, 1)
   para i ← 2 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até i − 1 faça
         Soma ← Soma + L(i, j) * x(j)
      fimpara
      x(i) ← (c(i) − Soma)/L(i, i)
   fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.3 Solução de sistema triangular inferior pelas substituições sucessivas.

Exemplo 2.21 Resolver o sistema triangular inferior do Exemplo 2.20 usando o algoritmo da Figura 2.3.


```
% Os valores de entrada
n = 4
L =
    2    0    0    0
    3    5    0    0
    1   -6    8    0
   -1    4   -3    9
c =
    4
    1
   48
    6
% produzem o resultado
x =
    2
   -1
    5
    3
```

■

2.2.2 Sistema triangular superior

Um sistema triangular superior de ordem n apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & u_{33} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

O vetor solução de um sistema triangular superior é obtido pelas substituições retroativas

$$u_{nn}x_n = d_n \rightsquigarrow x_n = \frac{d_n}{u_{nn}},$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \rightsquigarrow x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}},$$

$$\cdots$$

$$u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2 \rightsquigarrow x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}} \text{ e}$$

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n = d_1 \rightsquigarrow x_1 = \frac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1n}x_n}{u_{11}}.$$

As substituições retroativas podem ser representadas por

$$\boxed{x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}},\ i = n, n-1, \ldots, 1.} \tag{2.8}$$

Exemplo 2.22 Determinar a solução do sistema triangular superior utilizando as substituições retroativas (2.8)

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8,\ x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28,\ x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \leadsto x_3 = 2,$$

$$3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2,\ x_2 = \frac{-2 - 7(2) + 4(4)}{3} \leadsto x_2 = 0 \text{ e}$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1,\ x_1 = \frac{1 + 2(0) - 6(2) - (4)}{5} \leadsto x_1 = -3.$$ ■

O vetor solução do sistema triangular superior é $x = [-3 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 4]^T$. Deve ser observado que os elementos de x são obtidos em ordem reversa. A Figura 2.4 exibe um algoritmo para resolver um sistema triangular superior pelas substituições retroativas (2.8). Os parâmetros de entrada são a ordem n do sistema, a matriz triangular superior U e o vetor de termos independentes d. O parâmetro de saída é o vetor solução x.

```
Algoritmo Substituições_Retroativas
{ Objetivo: Resolver o sistema triangular superior Ux = d }
{           pelas substituições retroativas }
parâmetros de entrada n, U, d
  { ordem, matriz triangular superior e vetor independente }
parâmetros de saída x  { solução do sistema triangular superior }
  x(n) ← d(n)/U(n, n)
  para i ← n − 1 até 1 passo −1 faça
    Soma ← 0
    para j ← i + 1 até n faça
      Soma ← Soma + U(i, j) ∗ x(j)
    fimpara
    x(i) ← (d(i) − Soma)/U(i, i)
  fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.4 Solução de sistema triangular superior pelas substituições retroativas.

Exemplo 2.23 Resolver o sistema triangular superior do Exemplo 2.22 usando o algoritmo da Figura 2.4.


```
% Os valores de entrada
n = 4
U =
     5    -2     6     1
     0     3     7    -4
     0     0     4     5
     0     0     0     2
d =
     1
    -2
    28
     8
% produzem o resultado
x =
    -3
     0
     2
     4
```

■

2.2.3 Complexidade computacional

Considerando que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, a complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas mostrado na Figura 2.3 é

Adições: $\sum_{i=2}^{n}[(i-1)+1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$

Multiplicações: $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$

Divisões: $1 + \sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + n - 1 = n.$

Os resultados acima estão resumidos na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 Complexidade das substituições sucessivas para sistema de ordem n.

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	n

De modo similar, a complexidade computacional do algoritmo de substituições retroativas da Figura 2.4 é

Adições: $\sum_{i=1}^{n-1}[(n-i)+1] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$

Multiplicações: $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$;

Divisões: $1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = 1 + n - 1 = n$.

Estes resultados estão resumidos na Tabela 2.3, os quais são idênticos aos mostrados na Tabela 2.2.

Tabela 2.3 Complexidade das substituições retroativas para sistema de ordem n.

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	n

Como o número de operações aritméticas das substituições sucessivas e retroativas é descrito por polinômios, diz-se que estes algoritmos são polinomiais.

2.3 Eliminação de Gauss

Existem duas grandes classes de métodos para resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e iterativos. Os métodos diretos são aqueles em que a solução exata do sistema é obtida, teoricamente, com um número finito de operações aritméticas. Na prática, os erros de arredondamento devidos à aritmética de ponto flutuante interferem no resultado verdadeiro. Por outro lado, os métodos iterativos obtêm a solução exata somente com um número infinito de operações. Em cada passo desses métodos a solução é calculada com um nível de exatidão crescente, o qual é limitado pelo número finito de *bytes* utilizados para armazenar as variáveis do programa que implementa o método iterativo. Os métodos de eliminação de Gauss, decomposição LU, de Cholesky e LDL^T, que serão abordados neste capítulo, são exemplos de métodos diretos.

2.3.1 Sistemas equivalentes

Antes de ser apresentado o método de eliminação de Gauss, faz-se necessário definir o conceito de equivalência de sistemas. Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando possuem o mesmo vetor solução. Por exemplo,

$$A\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \text{e } B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2 \\ x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \Longrightarrow x^A = x^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \sim B,$$

onde o símbolo $\sim$ significa equivalência.

2.3.2 Operações l-elementares

Um sistema de equações lineares pode ser transformado em um outro sistema equivalente utilizando as três operações l-elementares (operações de linha)

a) Trocar a ordem de duas equações

$$B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2 \\ x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \text{e } C\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases} \Longrightarrow x^B = x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow B \sim C.$$

b) Multiplicar uma equação por uma constante não nula

$$C\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases} \text{e } D\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow x^C = x^D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow C \sim D.$$

c) Somar uma equação à outra

$$D\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \text{e } E\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow x^D = x^E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow D \sim E.$$

Pode ser observado que $A \sim B \sim C \sim D \sim E = A$. Portanto, pelo uso das operações l-elementares torna-se possível transformar um sistema linear em um outro sistema equivalente de solução mais fácil, como, por exemplo, um sistema triangular.

2.3.3 Sistema triangular equivalente

O método de eliminação de Gauss[1] consiste em transformar um sistema de equações lineares em um sistema triangular superior equivalente por intermédio das operações l-elementares, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

A transformação também pode ser representada por $Ax = b \sim Ux = d$. Assim, a solução do sistema triangular superior $Ux = d$ é obtida pelas substituições retroativas (2.8). A exatidão da solução pode ser verificada pelo cálculo do vetor resíduo $r = b - Ax$, de modo que se $r = 0$, então a solução é exata.

Exemplo 2.24 Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

[1] O nome do método foi uma homenagem a Gauss. O processo aparece no livro chinês *Nove capítulos sobre a arte matemática*, escrito por volta de 250 a.C.

Os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal devem ser eliminados, baseando-se no elemento da diagonal da primeira linha $a_{11} = 1$. Por esta razão, a_{11} é chamado de elemento pivô e a linha que o contém é a linha pivotal. Para eliminar $a_{21} = -2$, a primeira linha deve ser multiplicada por um fator $-m_{21}$ e somada à segunda linha. Este fator é tal que $-m_{21}a_{11} + a_{21} = 0 \longrightarrow m_{21} = a_{21}/a_{11} = (-2)/1 = -2$. A nova linha 2 será $L_2' = 2L_1 + L_2$. Obviamente, esta operação l-elementar deve ser efetuada nos dois lados da igualdade.

Do mesmo modo, para eliminar $a_{31} = 4$ deve-se multiplicar a primeira linha por $-m_{31}$ e somar à terceira linha, com $-m_{31}a_{11} + a_{31} = 0 \longrightarrow m_{31} = a_{31}/a_{11} = 4/1 = 4$, ou seja, $L_3' = -4L_1 + L_3$. Após estas duas operações l-elementares, o sistema equivalente intermediário terá os dois elementos abaixo da diagonal iguais a zero

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Agora, para eliminar o elemento da segunda coluna abaixo da diagonal, deve-se usar $a_{22}' = 2$ como elemento pivô e a segunda linha como pivotal. Se a primeira linha continuar sendo a pivotal, então o elemento $a_{31}' = 0$ terá um indesejável valor diferente de zero. A segunda linha é multiplicada pelo fator $-m_{32}$ e somada à terceira linha, com $-m_{32}a_{22}' + a_{32}' = 0 \longrightarrow m_{32} = a_{32}'/a_{22}' = 6/2 = 3$. A nova linha 3 será $L_3'' = -3L_2' + L_3'$, resultando finalmente no sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Esta etapa de obtenção do sistema triangular superior equivalente pode ser sumarizada no seguinte dispositivo prático

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	-6	5	29	
4		0	$\underline{2}$	3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	-3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	-36	$-3L_4 + L_5$

O sistema intermediário equivalente (2.9) é composto por L_1 (linha pivotal), L_4 e L_5. O sistema triangular superior equivalente (2.10) é composto por L_1 (primeira linha pivotal), L_4 (segunda linha pivotal) e L_6 (última linha), e os elementos pivôs estão sublinhados. O sistema triangular superior (2.10) pode ser resolvido pelas substituições retroativas (2.8)

$$-12x_3 = -36,\ x_3 = \frac{-36}{-12} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7,\ x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11,\ x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \rightsquigarrow x_1 = 2.$$

Conseqüentemente, o vetor solução do sistema é $x = [2\ -1\ 3]^T$. O vetor resíduo $r = b - Ax$ deve ser utilizado para verificar a exatidão da solução obtida

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como o vetor resíduo é nulo, a solução é exata. Deve ser usado o sistema original $Ax = b$ para calcular o resíduo r e não o triangular equivalente $Ux = d$. Desta forma, poderá ser detectado um possível erro cometido ao se obter o sistema triangular equivalente. ■

Exemplo 2.25 Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

Usando o dispositivo prático, tem-se

L	Multiplicador	A				b	Operações
1		$\underline{1}$	6	2	4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5	33	9	3	72	
5		0	$\underline{1}$	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = (-2)/1 = -2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = 3/1 = 3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$
8		0	0	$\underline{2}$	-10	12	$2L_5 + L_6$
9	$m_{43} = 5/2 = 2{,}5$	0	0	5	-26	29	$-3L_5 + L_7$
10		0	0	0	$\underline{-1}$	-1	$-2{,}5L_8 + L_9$

O sistema triangular superior equivalente é composto pelas linhas pivotais (com os pivôs sublinhados), ou seja, L_1, L_5, L_8 e L_{10}

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo pelas substituições retroativas (2.8)

$$-1x_4 = -1,\ x_4 = \frac{-1}{-1} \rightsquigarrow x_4 = 1,$$

$$2x_3 - 10x_4 = 12,\ x_3 = \frac{12 + 10(1)}{2} \rightsquigarrow x_3 = 11,$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,\ x_2 = \frac{1 + 2(11) - 3(1)}{1} \rightsquigarrow x_2 = 20 \text{ e}$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8,\ x_1 = \frac{8 - 6(20) - 2(11) - 4(1)}{1} \rightsquigarrow x_1 = -138.$$

Assim, o vetor solução é $x = [-138\ \ 20\ \ 11\ \ 1]^T$, e o resíduo

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mostra que a solução é exata. ■

2.3.4 Cálculo do determinante

O valor do determinante da matriz dos coeficientes pode ser obtido como um subproduto do método de eliminação de Gauss. Para tanto, basta saber quais as relações entre os determinantes das matrizes dos sistemas equivalentes intermediários obtidos pelas operações l-elementares durante o processo de eliminação.

a) Se duas linhas quaisquer de uma matriz A forem trocadas, então o determinante da nova matriz B será

$$\det(B) = -\det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \to \det(A) = 10 \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \to \det(B) = -10.$$

b) Se todos os elementos de uma linha de A forem multiplicados por uma constante k, então o determinante da matriz resultante B será

$$\det(B) = k\det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \to \det(A) = -10 \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \det(B) = -5.$$

c) Se um múltiplo escalar de uma linha de A for somado a outra linha, então o determinante da nova matriz B será

$$\det(B) = \det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \det(A) = -5 \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \to \det(B) = -5.$$

d) Se A for uma matriz triangular ou diagonal de ordem n, então o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \det(A) = -2 \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \det(B) = 15.$$

e) Se uma matriz A for multiplicada por uma matriz B, o determinante da matriz resultante C será

$$\det(C) = \det(A)\det(B).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \det(A) = 10,\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \det(B) = 3 \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \to \det(C) = 30.$$

Exemplo 2.26 Calcular o determinante da matriz do Exemplo 2.24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

A seqüência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (2.9) e (2.10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Considerando que (2.9) e (2.10) foram obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas, então estas três matrizes possuem determinantes com o mesmo valor (propriedade **c**). Deste modo, como (2.10) é uma matriz triangular, então, pela propriedade **d**, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal, ou seja, o determinante será simplesmente o produto dos pivôs

$$\det(A) = 1 \times 2 \times -12 = -24.$$

■

2.3.5 Pivotação parcial

O método de Gauss irá falhar quando um pivô for nulo, pois, neste caso, não será possível calcular os multiplicadores m_{ij} utilizados na eliminação. Este sério problema pode ser evitado pelo uso da estratégia da pivotação parcial, que consiste em escolher como pivô o maior elemento em módulo da coluna, cujos elementos serão eliminados. A pivotação parcial garante que o pivô seja não nulo, exceto quando a matriz for singular. Outra vantagem é que todos os multiplicadores satisfazem $-1 \le m_{ij} \le 1$, evitando, assim, que eles sejam muito grandes. Multiplicadores grandes podem ampliar os erros de arredondamento de modo a comprometer a solução do sistema.

A única diferença entre o método de eliminação de Gauss com e sem pivotação parcial está no modo de escolha do elemento pivô. Nos dois métodos, após o pivô ter sido escolhido, devem ser eliminados os demais elementos da coluna que contém o pivô, exceto aqueles elementos que pertençam a alguma linha pivotal.

Exemplo 2.27 Resolver o sistema do Exemplo 2.24 pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

O primeiro elemento pivô escolhido é $a_{31} = 4$ porque ele é o maior elemento em módulo da primeira coluna. Para eliminar os demais elementos da coluna (a_{11} e a_{21}) efetua-se $L_1' = -m_{11}L_3 + L_1$, com a condição $-m_{11}a_{31} + a_{11} = 0 \longrightarrow m_{11} = a_{11}/a_{31} = 1/4 = 0{,}25$ e $L_2' = -m_{21}L_3 + L_2$, com $-m_{21}a_{31} + a_{21} = 0 \longrightarrow m_{21} = a_{21}/a_{31} = (-2)/4 = -0{,}5$. Efetuando-se essas duas operações l-elementares, o sistema equivalente intermediário conterá dois elementos nulos na primeira coluna

$$\begin{bmatrix} 0 & -1{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}75 \\ -0{,}5 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Para eliminar o elemento da segunda coluna, escolhe-se o maior elemento em módulo desta coluna, sem considerar o elemento da linha pivotal L_3. Portanto, o elemento pivô será $a_{22}' = 5$. Para eliminar a_{12}', basta $L_1'' = -m_{12}L_2' + L_1'$, com $-m_{12}a_{22}' + a_{12}' = 0 \longrightarrow m_{12} = a_{12}'/a_{22}' = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$. O sistema equivalente é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}2 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6 \\ -0{,}5 \\ 29 \end{bmatrix},$$

o qual pode ser transformado em um sistema triangular superior efetuando-se a operação l-elementar de trocar a ordem de duas linhas, no caso, a primeira e a terceira linhas

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}.$$

Estas operações l-elementares estão representadas no seguinte dispositivo prático

L	Multiplicador	A			b	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1	−3	2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0{,}5$	−2	8	−1	−15	
3		<u>4</u>	−6	5	29	
4	$m_{12} = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$	0	−1,5	0,75	3,75	$-0{,}25L_3 + L_1$
5		0	<u>5</u>	1,5	−0,5	$0{,}5L_3 + L_2$
6		0	0	<u>1,2</u>	3,6	$0{,}3L_5 + L_4$

O sistema triangular superior é constituído pelas linhas pivotais L_3, L_5 e L_6, ou seja, as linhas que contêm os elementos pivôs sublinhados. Este sistema é resolvido pelas substituições retroativas (2.8)

$$1{,}2x_3 = 3{,}6;\ x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5;\ x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29,\ x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \rightsquigarrow x_1 = 2.$$

Por isso, $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$. ■

2.4 Decomposição LU

Uma matriz quadrada pode ser escrita como o produto de duas matrizes, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, uma matriz A foi fatorada tal que $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior unitária ($l_{ii} = 1,\ \forall\ i$) e U é uma matriz triangular superior. Deste modo, para resolver o sistema $Ax = b$, usa-se a matriz A na forma decomposta

$$Ax = b \longrightarrow LUx = b.$$

Fazendo

$$Ux = y, \quad \text{então} \quad Ly = b.$$

A solução y do sistema triangular inferior $Ly = b$ é obtida pelas substituições sucessivas (2.7) com $l_{ii} = 1$ porque L é uma matriz unitária. O vetor y é usado como termo independente no sistema triangular superior $Ux = y$, cuja solução x é calculada pelas substituições retroativas (2.8).

2.4.1 Cálculo dos fatores

Uma matriz A pode ser fatorada usando-se o método de eliminação de Gauss. A matriz triangular superior U é a mesma do método de Gauss e a matriz triangular inferior unitária L, além de $l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0, i < j$, possui $l_{ij} = m_{ij}, i > j$, sendo m_{ij} os multiplicadores usados no processo de eliminação de Gauss.

Exemplo 2.28 Resolver o sistema do Exemplo 2.24 usando a decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Utilizando um dispositivo prático similar ao da eliminação de Gauss, tem-se

L	m	A			Operações
1		1	−3	2	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	−2	8	−1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	−6	5	
4		0	2	3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	−3	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	−12	$-3L_4 + L_5$

A partir do dispositivo, obtêm-se as duas matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Pode ser verificada a igualdade $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema $Ly = b$ é calculada pelas substituições sucessivas (2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$y_1 = 11,$

$$-2y_1 + y_2 = -15,\ y_2 = -15 + 2(11) \rightsquigarrow y_2 = 7 \text{ e}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29,\ y_3 = 29 - 4(11) - 3(7) \rightsquigarrow y_3 = -36.$$

Assim, $y = [11\ \ 7\ \ -36]^T$. A solução do sistema $Ux = y$, idêntico ao (2.10), é obtida pelas substituições retroativas (2.8)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix},$$

$$-12x_3 = -36,\ x_3 = \frac{-36}{-12} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7,\ x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11,\ x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \rightsquigarrow x_1 = 2.$$

O vetor solução do sistema é $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$, que obviamente é o mesmo obtido pelo método de eliminação de Gauss (ver Exemplo 2.24). ■

A única diferença entre os dispositivos práticos da eliminação de Gauss e da decomposição LU é a ausência da coluna relativa ao vetor b de termos independentes na LU. Na realidade, efetuar as substituições sucessivas para resolver $Ly = b$ na decomposição LU é o mesmo que fazer as operações l-elementares em b na eliminação de Gauss. Desta forma, a solução de $Ly = b$ funciona como uma memória de cálculo para ser efetuada sobre o vetor b. Isto facilita resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz dos coeficientes, pois a fatoração da matriz é feita uma única vez. Alguns exemplos serão mostrados na Seção 2.7.

2.4.2 Pivotação parcial

De modo similar ao método de eliminação de Gauss, a estratégia da pivotação parcial deve ser usada na decomposição LU para evitar um pivô nulo e que os multiplicadores m_{ij} tenham valores muito grandes. Quando a pivotação parcial for usada, a decomposição será da forma

$$PA = LU,$$

onde P é uma matriz de permutações, que será constituída das linhas de uma matriz identidade I, colocadas na mesma ordem das linhas pivotais que geram a matriz triangular superior U. A matriz triangular inferior unitária L é formada pelos multiplicadores m_{ij} utilizados na eliminação. A ordem em que os multiplicadores são atribuídos a cada linha de L é dada pelos índices das linhas pivotais. Para resolver o sistema $Ax = b$, tem-se

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb.$$

Fazendo

$$\boxed{Ux = y, \ \text{ então } \ Ly = Pb}. \qquad (2.11)$$

A solução y do sistema triangular inferior $Ly = Pb$ é calculada pelas substituições sucessivas. Por sua vez, o vetor y é utilizado como termo independente no sistema triangular superior $Ux = y$ para obter a solução x pelas substituições retroativas.

Exemplo 2.29 Resolver o sistema do Exemplo 2.27 pela decomposição LU usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o dispositivo prático, tem-se

L	m	A			Operações	p
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1	-3	2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0{,}5$	-2	8	-1		2
3		$\underline{4}$	-6	5		$\underline{3}$
4	$m_{12} = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$	0	$-1{,}5$	0,75	$-0{,}25L_3 + L_1$	1
5		0	$\underline{5}$	1,5	$0{,}5L_3 + L_2$	$\underline{2}$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	$0{,}3L_5 + L_4$	$\underline{1}$

Neste dispositivo, o multiplicador m_{ij} é utilizado para eliminar o elemento da posição (i, j), e a coluna $\underline{p}$ indica quais são as linhas pivotais determinadas durante a pivotação parcial. A linha pivotal escolhida para eliminar uma coluna é sublinhada e as remanescentes são listadas a seguir para que se faça a escolha da próxima linha pivotal. Este processo se repete até restar apenas uma única linha.

Considerando que L é uma matriz triangular inferior unitária, então ela possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os elementos acima da diagonal iguais a 0. Cada linha de L é constituída pelos multiplicadores relativos a cada uma das linhas pivotais. Mas deve ser notado que não existe multiplicador associado às linhas sublinhadas porque uma linha pivotal não é mais transformada.

Os índices das linhas pivotais estão no vetor $\underline{p} = [\underline{3} \;\; \underline{2} \;\; \underline{1}]$, cujos elementos informam como montar as linhas da matriz L a partir dos multiplicadores m_{ij}. A linha 1 de L não utiliza multiplicador porque $l_{11} = 1$ e $l_{1j} = 0 \; \forall \; j > 1$. A linha 2 de L é construída com o multiplicador $m_{\underline{i}1}$, sendo $\underline{i} = \underline{p}(2) = \underline{2}$, ou seja, $l_{21} = m_{\underline{2}1} = -0{,}5$. A linha 3 de L usa os multiplicadores $m_{\underline{i}1}$ e $m_{\underline{i}2}$, com $\underline{i} = \underline{p}(3) = \underline{1}$, conseqüentemente, $l_{31} = m_{\underline{1}1} = 0{,}25$ e $l_{32} = m_{\underline{1}2} = -0{,}3$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{\underline{2}1} & 1 & 0 \\ m_{\underline{1}1} & m_{\underline{1}2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, a matriz U é formada simplesmente pelas linhas pivotais. A matriz P possui as linhas de uma matriz identidade na ordem das linhas pivotais de $\underline{p} = [\underline{3} \;\; \underline{2} \;\; \underline{1}]$, ou P pode ser vista como uma matriz similar à identidade com as linhas colocadas de modo que os elementos iguais a 1 estejam nas colunas relativas aos índices das linhas pivotais

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O vetor obtido do produto Pb é formado pelos elementos de b dispostos na ordem das linhas pivotais contidas em $\underline{p}$. A solução do sistema $Ly = Pb$ é conseguida pelas substituições sucessivas (2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 29,$$

$$-0{,}5y_1 + y_2 = -15, \; y_2 = -15 + 0{,}5(29) \rightsquigarrow y_2 = -0{,}5 \text{ e}$$

$$0{,}25y_1 - 0{,}3y_2 + y_3 = 11, \; y_3 = 11 - 0{,}25(29) + 0{,}3(-0{,}5) \rightsquigarrow y_3 = 3{,}6.$$

Assim, $y = [29 \;\; -0{,}5 \;\; 3{,}6]^T$. A solução do sistema $Ux = y$ é obtida pelas substituições retroativas (2.8)

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix},$$

$$1{,}2x_3 = 3{,}6; \; x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5; \; x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29, \; x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \rightsquigarrow x_1 = 2,$$

ou seja, o vetor solução do sistema é $x = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T$. O vetor resíduo é

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

indicando que a solução x é exata. ■

2.4.3 Cálculo do determinante

Considerando que

$$PA = LU \longrightarrow \det(PA) = \det(LU),$$

então, pela propriedade e dos determinantes vista na Seção 2.3.4,

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)}.$$

Pela propriedade **d**,

$$\det(L)=\prod_{i=1}^{n} l_{ii}=1 \quad \text{e} \quad \det(U)=\prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{(produto dos pivôs)}$$

e, pela propriedade **a**,

$$\det(P)=(-1)^t,$$

onde t é o número de trocas de linhas necessárias para transformar a matriz de permutações P em uma matriz identidade. Conseqüentemente,

$$\boxed{\det(A)=(-1)^t\prod_{i=1}^{n} u_{ii}}. \qquad (2.12)$$

Exemplo 2.30 Calcular o determinante da matriz do Exemplo 2.29

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante de A por (2.12), deve ser encontrado o valor de t, isto é, o número de trocas de linhas necessárias para transformar a matriz P em uma matriz identidade. Para isso, basta contar quantas permutações precisam ser feitas para colocar os índices das linhas pivotais em ordem crescente

t	Linhas pivotais			Comentário
0	3	2	1	trocar 3 com 1
1	1	2	3	ordem crescente

Deste modo, $t=1$ e o determinante, dado por (2.12), será

$$\det(A)=(-1)^t\prod_{i=1}^{3} u_{ii}=(-1)^1\times 4\times 5\times 1{,}2 \leadsto \det(A)=-24.$$

■

Exemplo 2.31 Resolver o sistema abaixo pela decomposição LU, usando pivotação parcial, e verificar a exatidão e a unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Construindo o dispositivo prático, tem-se

L	m	A				Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11}=4/5=0{,}8$	4	−1	0	−1		1
2	$m_{21}=1/5=0{,}2$	1	−2	1	0		2
3	$m_{31}=0/5=0$	0	4	−4	1		3
4		$\underline{5}$	0	5	−1		$\underline{4}$
5	$m_{12}=(-1)/4=-0{,}25$	0	−1	−4	−0,2	$-0{,}8L_4+L_1$	1
6	$m_{22}=(-2)/4=-0{,}5$	0	−2	0	0,2	$-0{,}2L_4+L_2$	2
7		0	$\underline{4}$	−4	1	$0L_4+L_3$	$\underline{3}$
8		0	0	$\underline{-5}$	0,05	$0{,}25L_7+L_5$	$\underline{1}$
9	$m_{23}=(-2)/(-5)=0{,}4$	0	0	−2	0,7	$0{,}5L_7+L_6$	2
10		0	0	0	$\underline{0{,}68}$	$-0{,}4L_8+L_9$	$\underline{2}$

O vetor $\underline{p}$ é formado pelos índices das linhas pivotais, isto é, $\underline{p}=[\underline{4}\ \ \underline{3}\ \ \underline{1}\ \ \underline{2}]$. A linha 1 de L já está pronta, pois $l_{11}=1$ e $l_{1j}=0\ \forall\ j>1$. A linha 2 de L usa o multiplicador $m_{\underline{i}1}$, sendo $\underline{i}=\underline{p}(2)=\underline{3}$, portanto, $l_{21}=m_{\underline{3}1}=0$. A linha 3 de L é construída com os multiplicadores $m_{\underline{i}1}$ e $m_{\underline{i}2}$, com $\underline{i}=\underline{p}(3)=\underline{1}$, assim, $l_{31}=m_{\underline{1}1}=0{,}8$ e $l_{32}=m_{\underline{1}2}=-0{,}25$. Finalmente, a linha 4 de L utiliza os multiplicadores $m_{\underline{i}1}$, $m_{\underline{i}2}$ e $m_{\underline{i}3}$, sendo $\underline{i}=\underline{p}(4)=\underline{2}$, ou seja, $l_{41}=m_{\underline{2}1}=0{,}2$, $l_{42}=m_{\underline{2}2}=-0{,}5$ e $l_{43}=m_{\underline{2}3}=0{,}4$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{\underline{3}1} & 1 & 0 & 0 \\ m_{\underline{1}1} & m_{\underline{1}2} & 1 & 0 \\ m_{\underline{2}1} & m_{\underline{2}2} & m_{\underline{2}3} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz U é obtida pelas linhas pivotais (sublinhadas), e a matriz P possui elementos iguais a 1 nas colunas com índices das linhas pivotais contidos em $\underline{p}$

$$U=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}68 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O produto da matriz P pelo vetor b é equivalente ao vetor obtido pelos elementos de b dispostos na ordem das linhas pivotais dada em $\underline{p}$. A solução do sistema $Ly=Pb$ é dada pelas substituições sucessivas (2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \leadsto y=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2{,}95 \\ -3{,}12 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema $Ux=y$ é obtida pelas substituições retroativas (2.8)

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}68 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2{,}95 \\ -3{,}12 \end{bmatrix} \leadsto x=\begin{bmatrix} -0{,}6617 \\ 0{,}9412 \\ 0{,}5441 \\ -4{,}5882 \end{bmatrix}.$$

A quase exatidão da solução é verificada pelo vetor resíduo $r = b - Ax$ que para este caso $r = [-0{,}0002 \;\; 0{,}0000 \;\; -0{,}0002 \;\; -0{,}0002]^T$. A unicidade da solução é confirmada por intermédio do cálculo do determinante. Para isto, é necessário encontrar t, contando quantas permutações precisam ser feitas para colocar os índices das linhas pivotais em ordem crescente

t	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2
2	1	2	4	3	trocar 4 com 3
3	1	2	3	4	ordem crescente

Assim, $t = 3$ e o determinante, dado por (2.12), será

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{4} u_{ii},$$

$$\det(A) = (-1)^3 \times 5 \times 4 \times -5 \times 0{,}68 = 68 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$ ■

2.4.4 Sistema com matriz singular

Conforme visto na Seção 2.1.6, quando a matriz dos coeficientes A de um sistema linear $Ax = b$ for singular, isto é, $\det(A) = 0$, então este sistema pode ter infinitas soluções ou não ter solução. Será mostrado, por um exemplo, como diferenciar essas duas situações.

Exemplo 2.32 Resolver os sistemas $Ax = b$ e $Ax = c$ usando decomposição LU com pivotação parcial, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

As representações gráficas dos sistemas $Ax = b$ e $Ax = c$ são exibidas nas Figuras 2.2(a) e (b) na página 44. Utilizando o dispositivo prático, tem-se

L	m	A			Operações	p
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0{,}5$	1	-3	2		1
2		$\underline{-2}$	8	-1		$\underline{2}$
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0{,}5$	-1	5	1		3
4		0	$\underline{1}$	1,5	$0{,}5L_2 + L_1$	$\underline{1}$
5	$m_{32} = 1/1 = 1$	0	1	1,5	$-0{,}5L_2 + L_3$	3
6		0	0	0	$-L_4 + L_5$	$\underline{3}$

Assim, os três fatores são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema $Ly = Pb$ é obtida pelas substituições sucessivas (2.7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema $Ux = y$ é obtida pelas substituições retroativas (2.8)

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$0x_3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = \theta$ (qualquer valor de x_3 é solução),

$x_2 + 1{,}5x_3 = 16 \rightsquigarrow x_2 = 16 - 1{,}5\theta$ e

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -12, \; x_1 = \frac{-12 - 8(16 - 1{,}5\theta) + \theta}{-2} \rightsquigarrow x_1 = 70 - 6{,}5\theta.$$

Conseqüentemente, o vetor solução do sistema é $x = [70 - 6{,}5\theta \;\; 16 - 1{,}5\theta \;\; \theta]^T$, ou seja, o sistema $Ax = b$ apresenta infinitas soluções, uma para cada valor de θ.

Para $Ax = c$, a solução de $Ly = Pc$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

e a solução de $Ux = y$ é

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$0x_3 = 70 \longrightarrow \nexists\, x_3 \rightsquigarrow \nexists\, x.$

Deste modo, o sistema $Ax = c$ não tem solução porque $\nexists\, x_3$ tal que $0x_3 \neq 0$. ■

2.4.5 Algoritmos e complexidade

A Figura 2.5 apresenta um algoritmo para a decomposição LU de uma matriz A, via método de eliminação de Gauss com pivotação parcial. Os parâmetros de entrada são a ordem n e a matriz A. Os parâmetros de saída são as matrizes $L\backslash U$ escritas sobre A, o determinante *Det* de A e o vetor *Pivot* contendo as linhas pivotais.

```
Algoritmo Decomposição_LU
{ Objetivo: Fazer a decomposição LU de uma matriz A }
parâmetros de entrada n, A  { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det, Pivot
  { matriz decomposta A = U + L − I, determinante, pivôs }
  para i ← 1 até n faça Pivot(i) ← i, fimpara; Det ← 1
  para j ← 1 até n − 1 faça
    { escolha do elemento pivô }
    p ← j; Amax ← abs(A(j,j))
    para k ← j + 1 até n faça
      se abs(A(k,j)) > Amax então
        Amax ← abs(A(k,j)); p ← k
      fimse
    fimpara
    se p ≠ j então
    { troca de linhas }
      para k ← 1 até n faça
        t ← A(j,k); A(j,k) ← A(p,k); A(p,k) ← t
      fimpara
      m ← Pivot(j); Pivot(j) ← Pivot(p); Pivot(p) ← m
      Det ← −Det
    fimse
    Det ← Det * A(j,j)
    se abs(A(j,j)) ≠ 0 então
    { eliminação de Gauss }
      r ← 1/A(j,j)
      para i ← j + 1 até n faça
        Mult ← A(i,j) * r; A(i,j) ← Mult
        para k ← j + 1 até n faça
          A(i,k) ← A(i,k) − Mult * A(j,k)
        fimpara
      fimpara
    fimse
  fimpara
  Det ← Det * A(n,n)
fimalgoritmo
```

Figura 2.5 Decomposição LU por eliminação de Gauss com pivotação parcial. (Ver significado da função abs na Tabela 1.1, na página 6.)

Neste algoritmo, as matrizes triangulares L e U são escritas sobre a matriz original A

$$A\text{, antes da decomposição} \longrightarrow A\text{, após a decomposição}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A é transformada em $L\backslash U$, se A não puder ser destruída durante a decomposição, então ela deve ser previamente copiada em uma outra matriz. Na decomposição LU, a matriz L é triangular inferior unitária, ou seja, os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Além disso, como o esquema da pivotação parcial é utilizado, então o algoritmo das substituições sucessivas para solução de $Ly = b$ deve ser modificado para resolver $Ly = Pb$ de (2.11), tal como o algoritmo apresentado na Figura 2.6. Os parâmetros de entrada são a ordem n do sistema, a matriz triangular inferior L, o vetor de termos independentes b e o vetor *Pivot* contendo as linhas pivotais. O parâmetro de saída é o vetor solução y.

```
Algoritmo Substituições_Sucessivas_Pivotal
{ Objetivo: Resolver o sistema triangular inferior Ly = Pb }
{           pelas substituições sucessivas, com a matriz L }
{           obtida de decomposição LU com pivotação parcial }
parâmetros de entrada n, L, b, Pivot
  { ordem, matriz triangular inferior unitária, }
  { vetor independente e posição dos pivôs }
parâmetros de saída y  { solução do sistema triangular inferior }
  k ← Pivot(1); y(1) ← b(k)
  para i ← 2 até n faça
    Soma ← 0
    para j ← 1 até i − 1 faça
      Soma ← Soma + L(i,j) * y(j)
    fimpara
    k ← Pivot(i); y(i) ← b(k) − Soma
  fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.6 Solução do sistema triangular inferior $Ly = Pb$, de LU com pivotação parcial.

A solução de $Ux = y$ de (2.11) é obtida pelas substituições retroativas, usando o algoritmo da Figura 2.4.

A Tabela 2.4 mostra a complexidade computacional do algoritmo da Figura 2.5. Deve ser mencionado que não foram consideradas as operações de trocas de sinal e multiplicações necessárias para o cálculo do determinante.

Tabela 2.4 Complexidade da decomposição LU de uma matriz de ordem n.

(Desconsiderando operações para o cálculo do determinante.)

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$
divisões	$n - 1$

A complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas pivotal difere da daquele apresentado na Figura 2.3 somente quanto ao número de divisões, que é nulo, pois, como a matriz L neste caso é unitária, não há necessidade de divisão.

Exemplo 2.33 Resolver o sistema do Exemplo 2.31 usando os algoritmos da Figura 2.5, Figura 2.6 e Figura 2.4. Comparar os resultados intermediários com os valores obtidos naquele exemplo: matriz $L\backslash U$ em `A`, matriz P em `Pivot`, determinante em `Det`, vetor y em `y` e solução x em `x`.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     4    -1     0    -1
     1    -2     1     0
     0     4    -4     1
     5     0     5    -1
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    5.0000         0    5.0000   -1.0000
         0    4.0000   -4.0000    1.0000
    0.8000   -0.2500   -5.0000    0.0500
    0.2000   -0.5000    0.4000    0.6800
Det = 68.0000
Pivot =     4     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
     1
    -2
    -3
     4
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
    4.0000
   -3.0000
   -2.9500
```



```
   -3.1200
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
   -0.6618
    0.9412
    0.5441
   -4.5882
```

■

2.4.6 Sistemas lineares complexos

Os sistemas de equações lineares que envolvam números complexos podem ser solucionados pelos algoritmos apresentados neste capítulo. Eles são resolvidos tanto pelos algoritmos implementados em uma linguagem de programação que suporta aritmética complexa quanto pelos algoritmos implementados com aritmética real. Mas, para este caso, o sistema complexo deve ser previamente transformado em um sistema real.

Para resolver um sistema complexo usando aritmética real, faz-se necessária uma transformação. Seja o sistema complexo $Ax = b$. Fazendo $A = A_r + iA_i$, $x = x_r + ix_i$, $b = b_r + ib_i$ e substituindo na equação acima, tem-se

$$(A_r + iA_i)(x_r + ix_i) = b_r + ib_i,$$

$$A_r x_r - A_i x_i + i(A_i x_r + A_r x_i) = b_r + ib_i.$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Exemplo 2.34 Resolver o sistema abaixo, utilizando os algoritmos da Figura 2.4, Figura 2.5 e Figura 2.6 implementados em uma linguagem com aritmética complexa.

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 5 \\ 2+3i & 1+i & 1-i \\ 4 & 2i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-16i \\ -5+12i \\ 13+2i \end{bmatrix}.$$

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
   1.0000+ 2.0000i        0- 3.0000i   5.0000
   2.0000+ 3.0000i   1.0000+ 1.0000i   1.0000- 1.0000i
   4.0000                 0+ 2.0000i   3.0000- 2.0000i
% Produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
   4.0000                 0+ 2.0000i   3.0000- 2.0000i
   0.2500+ 0.5000i   1.0000- 3.5000i   3.2500- 1.0000i
   0.5000+ 0.7500i   0.1887+ 0.6604i  -3.2736- 4.2075i
Det =
 -72.0000+29.0000i
Pivot =
```

```
     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
  10.0000-16.0000i
  -5.0000+12.0000i
  13.0000+ 2.0000i
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
  13.0000+ 2.0000i
   7.7500-23.0000i
 -26.6509+ 0.4717i
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
   3.0000+ 4.0000i
   2.0000+ 0.0000i
   3.0000- 4.0000i
```

O vetor solução é

$$x = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 2 \\ 3-4i \end{bmatrix}.$$

■

Exemplo 2.35 Resolver o sistema do Exemplo 2.34, utilizando os algoritmos da Figura 2.4, Figura 2.5 e Figura 2.6 implementados em uma linguagem que não tem aritmética complexa.

Por (2.13), o sistema complexo pode ser resolvido por meio do sistema real

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 13 \\ -16 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

```
% Os valores de entrada
n = 6
A =
     1     0     5    -2     3     0
     2     1     1    -3    -1     1
     4     0     3     0    -2     2
     2    -3     0     1     0     5
     3     1    -1     2     1     1
     0     2    -2     4     0     3
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    4.0000         0    3.0000         0   -2.0000    2.0000
    0.5000   -3.0000   -1.5000    1.0000    1.0000    4.0000
    0.2500         0    4.2500   -2.0000    3.5000   -0.5000
         0   -0.6667   -0.7059    3.2549    3.1373    5.3137
    0.7500   -0.3333   -0.8824    0.1747    5.3735   -0.5361
    0.5000   -0.3333   -0.2353   -0.9639    0.7780    6.7545
```



```
Det =
  6.0250e+03
Pivot =
     3     4     1     6     5     2
% vetor de termos independentes
b =
    10
    -5
    13
   -16
    12
     2
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
   13.0000
  -22.5000
    6.7500
   -8.2353
    2.1446
  -27.0179
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
    3.0000
    2.0000
    3.0000
    4.0000
    0.0000
   -4.0000
```

Portanto, o vetor solução é

$$x = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 2 \\ 3-4i \end{bmatrix}.$$

■

2.5 Decomposição de Cholesky e LDL^T

Quando a matriz dos coeficientes A for simétrica e definida positiva, ou seja, sua forma quadrática $v^TAv > 0$, $\forall\, v \neq 0$ (ver Tabela 2.1), então A pode ser decomposta tal que

$$A = LL^T,$$

onde L é uma matriz triangular inferior e, conseqüentemente, L^T será triangular superior. A existência da decomposição de Cholesky é garantida pelo Teorema 2.2 [20, Teorema 4.2.5].

Teorema 2.2 (Cholesky) *Se A for uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular L com elementos da diagonal positivos tal que $A = LL^T$.*

2.5.1 Cálculo do fator

Seja o produto $LL^T = A$ de uma matriz, por exemplo, de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

O elemento l_{44} da diagonal é obtido por

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \to l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} \rightsquigarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^{3} l_{4k}^2}.$$

Esta expressão pode ser generalizada para um elemento qualquer da diagonal de L

$$\boxed{l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2},\ j = 1, 2, \ldots, n.} \tag{2.14}$$

O elemento l_{43} abaixo da diagonal é calculado por intermédio de

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \to l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} \rightsquigarrow l_{43} = \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^{2} l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

Para obter um elemento genérico abaixo da diagonal principal

$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}},\ j = 1, 2, \ldots, n-1 \ \text{ e } \ i = j+1, j+2, \ldots, n.} \tag{2.15}$$

Os elementos de L são computados por (2.14) e (2.15), com as operações podendo ser efetuadas ou por linha ou por coluna. Um elemento da diagonal de L é, por (2.14), a raiz quadrada da diferença entre o correspondente elemento da diagonal de A e o somatório dos quadrados dos elementos da mesma linha, à qual pertence o elemento da diagonal de L que se deseja obter. Para calcular um elemento l_{ij} por (2.15), toma-se o somatório do produto dois a dois dos elementos pertencentes às linhas i e j de L que estejam da coluna 1 até a coluna $j-1$. Em seguida, calcula-se a diferença do correspondente elemento de A e aquele somatório. E, finalmente, obtém-se a razão entre esta diferença e o elemento situado na diagonal de L.

Devido à estabilidade numérica da decomposição de uma matriz simétrica definida positiva, não se faz necessário o uso da pivotação parcial na decomposição de Cholesky. De maneira similar à decomposição LU, o sistema de equações lineares $Ax = b$ é resolvido por

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

Fazendo

$$\boxed{L^T x = y \ \text{ então } \ Ly = b}. \tag{2.16}$$

O sistema triangular inferior $Ly = b$ é resolvido pelas substituições sucessivas na forma

$$\boxed{y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j}{l_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{2.17}$$

O vetor solução do sistema triangular superior $L^T x = y$ é obtido pelas substituições retroativas na forma

$$\boxed{x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}x_j}{l_{ii}},\ i = n, n-1, \ldots, 1.} \tag{2.18}$$

2.5.2 Cálculo do determinante

Para calcular o determinante pela decomposição de Cholesky basta considerar as propriedades **d** e **e** da Seção 2.3.4

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T) \longrightarrow \boxed{\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2}. \tag{2.19}$$

Exemplo 2.36 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

Pelo uso de (2.14) e (2.15), obtém-se

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1,\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3,\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (1)(-1)}{3} = -2.$$

Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{30 - ((1)^2 + (-2)^2)} = 5.$$

Estes resultados podem ser sumarizados no dispositivo prático

A				L			
i\j	1	2	3	i\j	1	2	3
1	4			1	2		
2	−2	10		2	−1	3	
3	2	−7	30	3	1	−2	5

Deve ser observado que $LL^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas (2.17)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $L^T x = y$ pelas substituições retroativas (2.18)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A exatidão da solução é verificada pelo vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A unicidade da solução é confirmada por intermédio do cálculo do determinante por (2.19)

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 = ((2)(3)(5))^2 = 900 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

■

Exemplo 2.37 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix}.$$

Por (2.14) e (2.15), têm-se

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2,\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{20 - (2)^2} = 4,\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - (-1)(2)}{4} = 1,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{22 - (1)(2)}{4} = 5.$$

Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{6 - ((-1)^2 + (1)^2)} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} = \frac{2 - ((1)(-1) + (5)(1))}{2} = -1.$$

Coluna 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} = \sqrt{28 - ((1)^2 + (5)^2 + (-1)^2)} = 1.$$

Os resultados acima estão compilados no dispositivo prático

A					L				
i\j	1	2	3	4	i\j	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	−3	2	6		3	−1	1	2	
4	3	22	2	28	4	1	5	−1	1

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas (2.17)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $L^T x = y$ pelas substituições retroativas (2.18)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A solução é exata, pois o vetor resíduo $r = b - Ax = [0\ 0\ 0\ 0]^T$. Quanto à unicidade, por (2.19)

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{4} l_{ii} \right)^2 = ((3)(4)(2)(1))^2 = 576 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

■

Exemplo 2.38 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Pelo uso de (2.14) e (2.15), obtêm-se

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2{,}2361;$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2{,}2361} = -0{,}4472;\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2{,}2361} = 0{,}8944.$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{8 - (-0{,}4472)^2} = 2{,}7929;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{4 - (0{,}8944)(-0{,}4472)}{2{,}7929} = 1{,}5754.$$

Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{10 - ((0{,}8944)^2 + (1{,}5754)^2)} = 2{,}5919.$$

Esses resultados podem ser listados no dispositivo prático

	A				L		
i\j	1	2	3	i\j	1	2	3
1	5			1	2,2361		
2	−1	8		2	−0,4472	2,7929	
3	2	4	10	3	0,8944	1,5754	2,5919

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas (2.17)

$$\begin{bmatrix} 2{,}2361 & 0 & 0 \\ -0{,}4472 & 2{,}7929 & 0 \\ 0{,}8944 & 1{,}5754 & 2{,}5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 9{,}3914 \\ 5{,}0843 \\ 12{,}9598 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $L^T x = y$ pelas substituições retroativas (2.18)

$$\begin{bmatrix} 2{,}2361 & -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0 & 2{,}7929 & 1{,}5754 \\ 0 & 0 & 2{,}5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}3914 \\ 5{,}0843 \\ 12{,}9598 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0001 \end{bmatrix}.$$

A exatidão da solução é verificada pelo vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0002 \\ -0{,}0004 \\ -0{,}0010 \end{bmatrix},$$

significando que a solução não é exata devido aos erros de arredondamento. A unicidade da solução é verificada por meio do cálculo do determinante por (2.19)

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 \approx ((2{,}2361)(2{,}7929)(2{,}5919))^2,$$

$$\det(A) \approx 262{,}0171 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

■

2.5.3 Algoritmo e complexidade

A Figura 2.7 apresenta um algoritmo para fatorar uma matriz A simétrica definida positiva, tal que $A = LL^T$, usando a decomposição de Cholesky. Os parâmetros de entrada são a ordem *n* e a parte triangular inferior da matriz *A*. Os parâmetros de saída são o fator *L* escrito sobre *A*, o determinante *Det* e a condição de erro *CondErro*. A condição *CondErro = 0* significa que a decomposição foi realizada com sucesso, enquanto *CondErro = 1* significa que não foi porque a matriz não é definida positiva. As substituições sucessivas e retroativas necessárias para resolver os sistemas triangulares $Ly = b$ e $L^T x = y$ de (2.16) podem ser computadas pelos algoritmos mostrados nas Figuras 2.3 e 2.4.

Exemplo 2.39 Resolver o sistema do Exemplo 2.37 usando os algoritmos da Figura 2.7, Figura 2.3 e Figura 2.4. Observar que a condição `CondErro = 0` indica que não houve erro na decomposição, pois a matriz A é, de fato, definida positiva.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     9
     6    20
    -3     2     6
     3    22     2    28
% produzem os resultados pela decomposicao de Cholesky
A =
     3
     2     4
    -1     1     2
     1     5    -1     1
Det = 576
CondErro = 0
% vetor de termos independentes
b =
    12
    64
     4
    82
% As substituicoes sucessivas resultam em
y =
     4
    14
    -3
```

```
     5
% As substituicoes retroativas produzem
x =
     2
    -3
     1
     5
```

■

```
Algoritmo Cholesky
{ Objetivo: Fazer a decomposição LL^T de uma matriz A }
{               simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det, CondErro
  { fator L escrito sobre A, determinante e condição de erro }
  CondErro ← 0; Det ← 1
  para j ← 1 até n faça
    Soma ← 0
    para k ← 1 até j − 1 faça
      Soma ← Soma + A(j, k)^2
    fimpara
    t ← A(j, j) − Soma
    se t > 0 então
      A(j, j) ← raiz2(t); r ← 1/A(j, j); Det ← Det ∗ t
    senão
      CondErro ← 1, escreva "a matriz não é definida positiva", abandone
    fimse
    para i ← j + 1 até n faça
      Soma ← 0
      para k ← 1 até j − 1 faça
        Soma ← Soma + A(i, k) ∗ A(j, k)
      fimpara
      A(i, j) ← (A(i, j) − Soma) ∗ r
    fimpara
  fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.7 Decomposição de Cholesky da matriz A simétrica definida positiva.
(Ver significado da função raiz_2 na Tabela 1.1, na página 6.)

A complexidade computacional do algoritmo da Figura 2.7 é mostrada na Tabela 2.5, sendo a operação de potenciação computada como uma multiplicação e não incluindo as n multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.

Tabela 2.5 Complexidade da decomposição de Cholesky de matriz de ordem n.
(Desconsiderando as multiplicações para o cálculo do determinante.)

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$
divisões	n
raízes quadradas	n

2.5.4 Fatoração LDL^T

Uma matriz A simétrica pode ser decomposta, tal que $A = LDL^T$, onde L é uma matriz triangular inferior unitária ($l_{jj} = 1,\ \forall\ j$) e D é uma matriz diagonal. A matriz D é computada por

$$\boxed{d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk},\ j = 1, 2, \ldots, n.} \quad (2.20)$$

Por sua vez, a matriz unitária L é obtida por

$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}}{d_{jj}},\ j = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ e } i = j+1, j+2, \ldots, n.} \quad (2.21)$$

A solução do sistema de equações lineares $Ax = b$ é obtida por

$$Ax = b \longrightarrow LDL^T x = b.$$

Fazendo

$$L^T x = t \text{ e } Dt = y \text{ então } Ly = b.$$

O sistema triangular inferior unitário $Ly = b$ é resolvido pelas substituições sucessivas. A solução do sistema diagonal $Dt = y$ é, simplesmente, $t_i = y_i/D_{ii}$, e o vetor solução do sistema triangular superior unitário $L^T x = t$ é obtido pelas substituições retroativas.

Pelas propriedades **d** e **e** da Seção 2.3.4 o determinante é dado por

$$\det(A) = \det(L)\det(D)\det(L^T) \longrightarrow \boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}}. \quad (2.22)$$

Exemplo 2.40 Resolver o sistema do Exemplo 2.38 usando a decomposição de LDL^T e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Pelo uso de (2.20) e (2.21), obtêm-se

Coluna 1:

$$d_{11} = a_{11} = 5,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{5} = -0{,}2;\ l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Coluna 2:

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 8 - (-0{,}2)^2(5) = 7{,}8;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - (0{,}4)(5)(-0{,}2)}{7{,}8} = 0{,}5641.$$

Coluna 3:

$$d_{33} = a_{33} - (l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22}) = 10 - ((0{,}4)^2(5) + (0{,}5641)^2(7{,}8)) = 6{,}7180.$$

É fácil observar que $A = LDL^T$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas (2.17)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 21 \\ 14{,}2 \\ 33{,}5898 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $Dt = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14{,}2 \\ 33{,}5898 \end{bmatrix} \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 1{,}8205 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $L^Tx = t$ pelas substituições retroativas (2.18)

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 1{,}8205 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

A exatidão da solução é verificada pelo vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, a solução é exata com quatro decimais. A unicidade da solução é verificada por meio do cálculo do determinante dado por (2.22)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} \approx (5)(7{,}8)(6{,}7180) = 262{,}0020 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

■

Um algoritmo para fatorar uma matriz A simétrica definida positiva tal que $A = LDL^T$ é mostrado na Figura 2.8. Os parâmetros de entrada são a ordem n e a parte triangular inferior da matriz A. Os parâmetros de saída são A (contendo em sua diagonal a diagonal de D e na parte triangular inferior o fator L sem os elementos unitários) e o determinante *Det*.

As soluções dos sistemas $Ly = b$, $Dt = y$ e $L^Tx = t$ são obtidas após pequenas modificações dos algoritmos das Figuras 2.3 e 2.4.

```
Algoritmo Decomposição_LDL^T
{ Objetivo: Fazer a decomposição LDL^T de uma matriz A }
{                simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det
  { matriz decomposta A = L − I + D e determinante }
  Det ← 1
  para j ← 1 até n faça
    Soma ← 0
    para k ← 1 até j − 1 faça
      Soma ← Soma + A(j, k)^2 ∗ A(k, k)
    fimpara
    A(j, j) ← A(j, j) − Soma
    r = 1/A(j, j); Det ← Det ∗ A(j, j)
    para i ← j + 1 até n faça
      Soma ← 0
      para k ← 1 até j − 1 faça
        Soma ← Soma + A(i, k) ∗ A(k, k) ∗ A(j, k)
      fimpara
      A(i, j) ← (A(i, j) − Soma) ∗ r
    fimpara
  fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.8 Decomposição LDL^T da matriz A simétrica definida positiva.

Exemplo 2.41 Decompor a matriz do sistema do Exemplo 2.40 utilizando o algoritmo da Figura 2.8.

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    5
   -1    8
    2    4    10
% produzem os resultados pela decomposicao LDLt
A =
   5.0000
  -0.2000    7.8000
   0.4000    0.5641    6.7179
Det =  262.0000
```

■

A complexidade computacional do algoritmo da Figura 2.8 é apresentada na Tabela 2.6, sendo a operação de potenciação contada como multiplicação e não incluindo as n multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.

Tabela 2.6 Complexidade da decomposição LDL^T de matriz de ordem n.

(Desconsiderando as multiplicações para o cálculo do determinante.)

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$
divisões	n

A vantagem da fatoração LDL^T é evitar o cálculo de raiz quadrada. Assim, poder-se-ia pensar em usá-la em matriz simétrica que não seja definida positiva. No entanto, neste caso esta decomposição não é estável, sendo recomendado o uso de outros métodos, como o de Aasen [20].

2.6 Decomposição espectral

Considerando que uma matriz A de ordem n possui autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, e que cada autovalor tem um autovetor correspondente, então a relação (2.2) torna-se

$$Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \text{ ou}$$

$$AV = V\Lambda,$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores λ_i e V é a matriz, cujas colunas são os autovetores v_i. Pós-multiplicando a equação acima por V^{-1}, tem-se a matriz A decomposta em termos de seus autovalores e autovetores, a chamada decomposição espectral de A

$$\boxed{A = V\Lambda V^{-1}}. \tag{2.23}$$

2.6.1 Cálculo dos autovetores

Da relação fundamental (2.2), tem-se que

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0. \tag{2.24}$$

No entanto, como a matriz $(A - \lambda_i I)$ é singular $(\det(A - \lambda_i I) = 0)$ e o sistema (2.24) é homogêneo, então ele apresenta infinitas soluções v_i e não nenhuma solução. Atribuindo um valor arbitrário a um elemento de v_i, por exemplo $v_{i1} = 1$, podem-se obter os demais elementos do autovetor pela solução do sistema resultante de ordem $n - 1$.

Exemplo 2.42 Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

Desenvolvendo o determinante, tem-se que

$$D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12.$$

Os três zeros do polinômio característico são os três autovalores de A, a saber, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -3$. Portanto, a matriz Λ contendo os autovalores é

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

O cálculo das raízes de equações algébricas será abordado no Capítulo 6. Para calcular o autovetor v correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 4$, utiliza-se (2.24)

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como as equações 1 e 2 são redundantes, elimina-se a segunda e faz-se $v_1 = 1$. Deste modo,

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = -0{,}5 \text{ e } v_3 = -2 \longrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo do autovetor w correspondente à $\lambda_2 = 1$ resolve-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo as equações 1 e 3 redundantes, então elimina-se a terceira e faz-se $w_1 = 1$, assim

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \to w_2 = -1 \text{ e } w_3 = -4 \longrightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo do autovetor z correspondente à $\lambda_3 = -3$, determina-se a solução de

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo as equações 2 e 3 redundantes, então elimina-se a terceira e faz-se $z_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix} \to z_2 = -1 \text{ e } z_3 = -2 \longrightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente, a matriz V contendo os autovetores de A é

$$V = [v\ w\ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

O processo de cálculo de matriz inversa será abordado somente na Seção 2.7.2; no entanto, pode-se mostrar que

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a decomposição espectral $A = V\Lambda V^{-1}$ pode ser confirmada por

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

■

2.6.2 Solução de sistema linear

A solução do sistema $Ax = b$ pode ser obtida por $x = A^{-1}b$. Então, por (2.23)

$$x = (V\Lambda V^{-1})^{-1}b \leadsto \boxed{x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b}. \tag{2.25}$$

Esta expressão mostra que o vetor solução x depende dos recíprocos dos autovalores λ_i. Assim, no caso de uma quase singularidade da matriz A, quando pelo menos um autovalor possui um valor próximo de zero faz com que a solução x tenha elementos muito grandes.

Exemplo 2.43 Calcular a solução do sistema abaixo, o qual envolve a matriz dos coeficientes do Exemplo 2.42

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Por (2.25) e utilizando os resultados do Exemplo 2.42

$$x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} \leadsto$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A solução é exata porque o vetor resíduo $r = b - Ax$ é nulo

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

É claro pelos exemplos acima que a decomposição espectral é de grande custo computacional quando comparada à decomposição LU ou Cholesky e, normalmente, não é utilizada para a solução de sistemas de equações lineares. No entanto, existem situações em que seu uso se faz necessário [7].

2.7 Uso da decomposição

As decomposições LU, LL^T e LDL^T podem ser usadas para resolver sistemas de equações lineares, bem como calcular o determinante de uma matriz, conforme visto nas seções anteriores. Outras importantes aplicações dessas decomposições estão no refinamento da solução de sistemas e no cálculo da matriz inversa.

2.7.1 Refinamento da solução

Seja x^0 uma solução aproximada do sistema $Ax = b$ calculada por (2.11), usando decomposição LU com pivotação parcial

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t.$$

O vetor temporário t é obtido pelas substituições sucessivas (2.7), e a solução aproximada x^0 é calculada pelas substituições retroativas (2.8). Apesar de a decomposição LU ser um método direto e, portanto, teoricamente exato, a solução será aproximada quando os fatores

L e U perderem exatidão devido aos erros de arredondamento. Uma solução melhorada x^1 é obtida por

$$x^1 = x^0 + c^0,$$

onde c^0 é um vetor de correção. Assim,

$$Ax^1 = b \longrightarrow A(x^0 + c^0) = b \longrightarrow Ac^0 = b - Ax^0 \rightsquigarrow Ac^0 = r^0.$$

Deste modo, a parcela de correção c^0 é a solução do sistema $Ac^0 = r^0$ dada por

$$LUc^0 = Pr^0 \longrightarrow Lt = Pr^0 \text{ e } Uc^0 = t.$$

Uma melhor aproximação x^2 é conseguida por

$$x^2 = x^1 + c^1,$$

onde c^1 é a solução de $Ac^1 = r^1$ obtida por $LUc^1 = Pr^1$, e assim sucessivamente. Esquematicamente,

$$\boxed{\begin{array}{l} LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ \left.\begin{array}{l} r^k = b - Ax^k \\ LUc^k = Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} = x^k + c^k \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}}$$

O processo se repete até que um critério de parada seja satisfeito. As decomposições LL^T e LDL^T também podem ser usadas para o refinamento da solução de um sistema linear, desde que a matriz dos coeficientes seja simétrica definida positiva. No caso da decomposição de Cholesky, basta usar L^T em vez de U e $P = I$ nas equações acima.

Exemplo 2.44 Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

A decomposição LU com pivotação parcial fornece as três matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}67 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}42 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6{,}33 & 3 \\ 0 & 0 & 2{,}74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, calcula-se x^0

$$Ax^0 = b \longrightarrow LUx^0 = Pb,$$

$$Lt = Pb \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 19 \\ 8{,}73 \\ 13{,}6034 \end{bmatrix} \text{ e } Ux^0 = t \rightsquigarrow x^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9731 \\ -0{,}9738 \\ 4{,}9647 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, a solução é refinada até que a condição de parada seja satisfeita

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0{,}0601 \\ 0 \\ 0{,}0712 \end{bmatrix}, \quad LUc^0 = Pr^0 \rightsquigarrow c^0 = \begin{bmatrix} 0{,}0268 \\ -0{,}0262 \\ 0{,}0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9999 \\ -1{,}0000 \\ 4{,}9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0 \\ 0{,}0002 \end{bmatrix}, \quad LUc^1 = Pr^1 \rightsquigarrow c^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0001 \end{bmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + c^1 = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

O refinamento é interrompido porque $\|c^1\|_\infty = 0{,}0001 < 10^{-3}$. ■

2.7.2 Cálculo da matriz inversa

A matriz inversa satisfaz à propriedade

$$AA^{-1} = I$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onde $V = A^{-1}$ é usado para simplificar a notação. Para calcular V, basta resolver os n sistemas lineares da forma

$$Av_i = e_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

onde v_i e e_i são as i-ésimas colunas das matrizes inversa e identidade, respectivamente. Como a matriz dos coeficientes é a mesma para os n sistemas, deve ser feita a decomposição de A usando LL^T ou LDL^T se A for simétrica definida positiva ou LU se A for não simétrica. Depois, os n vetores v_i que compõem a inversa são calculados usando as substituições sucessivas e retroativas.

Exemplo 2.45 Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix}.$$

Como A é simétrica pode ser usada a decomposição de Cholesky, cujo fator é

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

As três colunas são calculadas como se segue:

Coluna 1: $Av_1 = e_1$

$$LL^T v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_1 = t \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2{,}75 \\ 1{,}70 \\ 0{,}10 \end{bmatrix}.$$

Coluna 2: $Av_2 = e_2$

$$LL^T v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_2 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_2 = t \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1{,}70 \\ 1{,}16 \\ 0{,}08 \end{bmatrix}.$$

Coluna 3: $Av_3 = e_3$

$$LL^T v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_3 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_3 = t \rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}08 \\ 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente, $A^{-1} = V = [v_1\ v_2\ v_3]$, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}75 & 1{,}70 & 0{,}10 \\ 1{,}70 & 1{,}16 & 0{,}08 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

A relação $AA^{-1} = I$ pode ser verificada

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}75 & 1{,}70 & 0{,}10 \\ 1{,}70 & 1{,}16 & 0{,}08 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

2.8 Métodos iterativos estacionários

Um sistema de equações lineares $Ax = b$ pode ser resolvido por um processo que consiste em gerar, a partir de um vetor inicial x^0, uma seqüência de vetores $\{x^1, x^2, x^3, \ldots, x^k, \ldots\}$ que deve convergir para a solução x do sistema. Tal processo é chamado iterativo, pois uma mesma série de operações é repetida várias vezes. Existem várias classes de métodos iterativos, todavia somente os estacionários serão estudados neste texto.

Seja uma matriz M chamada matriz de iteração e c um vetor constante. Um método iterativo escrito na forma

$$\boxed{x^{k+1} = Mx^k + c} \tag{2.26}$$

é dito estacionário quando a matriz M for fixa, ou seja, quando ela não for alterada durante o processo. Serão abordados, nesta seção, três métodos iterativos estacionários: Jacobi, Gauss-Seidel e sobre-relaxação sucessiva.

2.8.1 Condição de convergência

O fato de a seqüência de vetores $\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$ convergir para a solução do sistema $Ax = b$ é garantido pela condição do Teorema 2.3 [3, Teorema 5.3].

Teorema 2.3 *O método iterativo (2.26) converge com qualquer valor inicial x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M.*

Porém, a determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$. Por isso, para alguns métodos iterativos estacionários usualmente se utiliza o chamado critério das linhas para prever a convergência [3, Teorema 5.8]

Teorema 2.4 *É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonal estritamente dominante, ou seja,*

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{2.27}$$

Em palavras, é condição suficiente para convergência se a matriz dos coeficientes for diagonalmente dominante, isto é, que o elemento da diagonal, em módulo, seja maior que a soma, em módulo, dos demais elementos da mesma linha, para todas as linhas. Pelos Teoremas 2.3 e 2.4, pode-se notar que a convergência não depende da escolha do vetor inicial x^0.

2.8.2 Critério de parada

A cada passo do método iterativo (2.26) a solução é obtida com uma exatidão crescente, isto é,

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x.$$

O processo deve ser interrompido quando algum critério de parada for satisfeito, como, por exemplo,

$$\boxed{\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \varepsilon} \quad \text{ou} \tag{2.28}$$

$$\boxed{k \geq k_{\max}}, \tag{2.29}$$

onde ε é a tolerância e $k_{\max}$ é o número máximo de iterações. Nos algoritmos, será adotada a norma-∞ em (2.28), ou seja,

$$\boxed{\frac{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right|}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^k\right|} \le \varepsilon},$$

sendo x_i^k o i-ésimo componente do vetor x^k obtido na k-ésima iteração. Na prática, a tolerância ε define com qual exatidão a solução é calculada. Entretanto, quando se utiliza aritmética de ponto flutuante a exatidão não pode ser tão grande quanto se queira, pois ela é limitada de acordo com o número de *bytes* das variáveis do programa.

2.8.3 Método de Jacobi

Considere o sistema linear $Ax = b$, com a matriz A decomposta de modo que

$$A = D + E + F,$$

onde D é uma matriz diagonal e E e F são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas. O sistema pode, então, ser escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow Dx = -(E + F)x + b.$$

Esta igualdade pode ser convertida em um processo iterativo formando a recorrência

$$\boxed{x^{k+1} = \left(-D^{-1}(E+F)\right)x^k + D^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Jx^k + c}, \qquad (2.30)$$

tal que, por (2.26), a matriz $J = -D^{-1}(E+F)$ é a matriz de iteração do método de Jacobi [26]. Uma forma análoga de deduzir o método de Jacobi consiste em escrever o sistema de equações lineares na forma

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

e explicitar x_i na i-ésima equação. Escrevendo na forma de iteração, têm-se as chamadas equações de iterações do método de Jacobi

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right), \\
x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right), \\
x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right), \\
\vdots \\
x_n^{k+1} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n\right),
\end{array}\right\} \qquad (2.31)$$

ou na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_{c}.$$

Uma das vantagens dos métodos iterativos é que a convergência independe do valor inicial x^0. Assim, pode ser usado como x^0 ou uma estimativa conhecida, ou um valor qualquer, caso esta não esteja disponível. Usualmente, faz-se $x^0 = 0$; no entanto, usando este valor em (2.30), tem-se que

$$x^1 = c \longrightarrow x_i^1 = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Deste modo, este valor pode ser tomado como o valor inicial

$$\boxed{x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}}. \qquad (2.32)$$

Algoritmo e complexidade

O algoritmo mostrado na Figura 2.9 calcula a solução de um sistema linear $Ax = b$ pelo método iterativo de Jacobi, com critério de parada dado por (2.28) e (2.29). Os parâmetros de entrada são a ordem *n*, a matriz *A*, o vetor *b*, a tolerância (critério de parada) *Toler* e o número máximo de iterações *IterMax*. Os parâmetros de saída são o vetor solução *x*, o número de iterações gastas *Iter* e a condição de erro *CondErro* para verificar se houve convergência (*CondErro = 0* significa que houve convergência e *CondErro = 1*, que não houve). Os valores intermediários do vetor solução também são listados durante a execução do algoritmo. A complexidade computacional do algoritmo da Figura 2.9 é mostrada na Tabela 2.7.

Tabela 2.7 Complexidade de Jacobi usando k iterações em sistema de ordem $n > 1$.

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k+1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

```
Algoritmo Jacobi
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo de Jacobi }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, }
  { tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i,i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então A(i,j) ← A(i,j) * r, fimse
    fimpara
    b(i) ← b(i) * r; x(i) ← b(i)
  fimpara; Iter ← 0
  { iterações de Jacobi }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i,j) * x(j), fimse
      fimpara
      v(i) ← b(i) − Soma
    fimpara
    NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
    para i ← 1 até n faça
      t ← abs(v(i) − x(i))
      se t > NormaNum então NormaNum ← t, fimse
      se abs(v(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(v(i)), fimse
      x(i) ← v(i)
    fimpara
    NormaRel ← NormaNum/NormaDen
    escreva Iter, x, NormaRel
    { teste de convergência }
    se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fimse
  fimrepita
  se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
  fimse
fimalgoritmo
```

Figura 2.9 Método de Jacobi para solução do sistema linear $Ax = b$.

(Ver significado da função abs na Tabela 1.1, na página 6.)

Exemplo 2.46 Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{max} = 50$ usando os critérios (2.28) e (2.29)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Pelas condições (2.27) o processo convergirá, pois a matriz dos coeficientes é diagonal estritamente dominante, isto é,

$$|10| > |3| + |-2|, \quad |8| > |2| + |-1| \text{ e } |5| > |1| + |1|.$$

Por (2.31), as equações de iterações são

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^k + x_3^k + 20\right) \text{ e}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^k - x_2^k - 4\right).$$

Partindo-se de x^0 dado por (2.32) tem-se que $x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T$ e, pelas equações de iterações, as coordenadas do vetor da primeira iteração são

$$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right) = \frac{1}{10}\left(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57\right) \rightsquigarrow x_1^1 = 4{,}79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^0 + x_3^0 + 20\right) = \frac{1}{8}\left(-2(5{,}7) + (-0{,}8) + 20\right) \rightsquigarrow x_2^1 = 0{,}975 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^0 - x_2^0 - 4\right) = \frac{1}{5}\left(-(5{,}7) - (2{,}5) - 4\right) \rightsquigarrow x_3^1 = -2{,}44.$$

Portanto, $x^1 = [4{,}79 \;\; 0{,}975 \;\; -2{,}44]^T$ e

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |0{,}975 - 2{,}5|, |-2{,}44 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |0{,}975|, |-2{,}44|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\ 1{,}525;\ 1{,}64)}{\max(4{,}79;\ 0{,}975;\ 2{,}44)} = 0{,}3424.$$

Os resultados podem ser gerados pelo algoritmo da Figura 2.9

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
b =
    57
    20
    -4
```

```
Toler = 1.0000e-05
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter     x1        x2         x3       NormaRelativa
 0    5.70000   2.50000   -0.80000
 1    4.79000   0.97500   -2.44000    3.42380e-01
 2    4.91950   0.99750   -1.95300    9.89938e-02
 3    5.01015   1.02600   -1.98340    1.80933e-02
 4    4.99552   0.99954   -2.00723    5.29725e-03
 5    4.99869   1.00022   -1.99901    1.64413e-03
 6    5.00013   1.00045   -1.99978    2.88007e-04
 7    4.99991   0.99999   -2.00012    9.12629e-05
 8    4.99998   1.00001   -1.99998    2.72243e-05
 9    5.00000   1.00001   -2.00000    4.59167e-06

Solucao  =    5.00000    1.00001   -2.00000
Iter     =  9
CondErro =  0
```

Na implementação do algoritmo foram acrescentadas algumas informações para facilitar o entendimento dos resultados. Pelos valores acima,

$$x \approx x^9 = [5{,}00000 \;\; 1{,}00001 \;\; -2{,}00000]^T.$$

O valor `CondErro = 0` indica que a solução convergiu dentro das condições especificadas pelos parâmetros *Toler* e *IterMax*. ■

Exemplo 2.47 Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 2.46 utilizando a formulação (2.30): $x^{k+1} = -D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b = Jx^k + c$.

Decompondo $A = D + E + F$, tem-se

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz J e os vetores c e x^0 são

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } c = D^{-1}b = x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T.$$

As primeiras aproximações da solução por (2.30) são mostradas na tabela a seguir, cujos resultados são idênticos àqueles gerados pelo algoritmo da Figura 2.9.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	5,70000	2,50000	−0,80000
1	4,79000	0,97500	−2,44000
2	4,91950	0,99750	−1,95300
3	5,01015	1,02600	−1,98340

■

Exemplo 2.48 Resolver o sistema pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (2.28) e (2.29)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O processo irá convergir, pois a matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante, ou seja, de acordo com as condições (2.27), os elementos das linhas satisfazem

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

Por (2.31), as equações de iterações são

$$x_1^{k+1} = \tfrac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right),$$

$$x_2^{k+1} = \tfrac{1}{8}\left(-x_1^k + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right),$$

$$x_3^{k+1} = \tfrac{1}{6}\left(-x_2^k - x_4^k - 5\right) \text{ e}$$

$$x_4^{k+1} = \tfrac{1}{9}\left(-x_1^k + x_2^k - 2x_3^k\right).$$

Usando x^0 dado por (2.32), $x^0 = [1{,}2 \;\; 1{,}25 \;\; -0{,}8333 \;\; 0]^T$. Pelas equações de iterações

$$x_1^1 = \tfrac{1}{5}(-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \tfrac{1}{5}(-2(1{,}25) + (0) + 6) = 0{,}7;$$

$$x_2^1 = \tfrac{1}{8}(-x_1^0 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \tfrac{1}{8}(-(1{,}2) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10) = 0{,}7875;$$

$$x_3^1 = \tfrac{1}{6}(-x_2^0 - x_4^0 - 5) = \tfrac{1}{6}(-(1{,}25) - (0) - 5) = -1{,}0417;$$

$$x_4^1 = \tfrac{1}{9}(-x_1^0 + x_2^0 - 2x_3^0) = \tfrac{1}{9}(-(1{,}2) + (1{,}25) - 2(-0{,}8333)) = 0{,}1907.$$

Conseqüentemente, o vetor da primeira iteração é

$$x^1 = [0{,}7 \;\; 0{,}7875 \;\; -1{,}0417 \;\; 0{,}1907]^T \text{ e}$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}7875-1{,}25|, |-1{,}0417-(-0{,}8333)|, |0{,}1907-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}7875|, |-1{,}0417|, |0{,}1907|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\ 0{,}4625;\ 0{,}2084;\ 0{,}1907)}{\max(0{,}7;\ 0{,}7875;\ 1{,}0417;\ 0{,}1907)} = 0{,}4800.$$

Pelo algoritmo da Figura 2.9, tem-se

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     5     2     0    -1
     1     8    -3     2
     0     1     6     1
     1    -1     2     9
b =
     6
    10
    -5
     0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter      x1        x2        x3        x4       NormaRelativa
  0    1.20000   1.25000  -0.83333   0.00000
  1    0.70000   0.78750  -1.04167   0.19074   4.80000e-01
  2    0.92315   0.72419  -0.99637   0.24120   2.23960e-01
  3    0.95856   0.70067  -0.99423   0.19931   4.21369e-02
  4    0.95960   0.70751  -0.98333   0.19229   1.10879e-02
  5    0.95545   0.71323  -0.98330   0.19051   5.81305e-03
  6    0.95281   0.71420  -0.98396   0.19160   2.68474e-03
  7    0.95264   0.71402  -0.98430   0.19215   5.56291e-04

Solucao  =     0.95264   0.71402  -0.98430   0.19215
Iter     =  7
CondErro =  0
```

Deste modo, $x \approx x^7 = [0{,}95264\ \ 0{,}71402\ \ -0{,}98430\ \ 0{,}19215]^T$. ■

2.8.4 Método de Gauss-Seidel

Seja o sistema $Ax = b$, com a matriz A sendo decomposta tal que $A = D + E + F$, sendo D uma matriz diagonal e E e F matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas. O sistema linear pode, então, ser escrito como

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b$$

ou na forma de iteração obtida pela recorrência

$$\boxed{x^{k+1} = \left(-(D+E)^{-1}F\right)x^k + (D+E)^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Sx^k + d}. \tag{2.33}$$

Por (2.26), a matriz $S = -(D + E)^{-1}F$ é a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel[2]. Um modo mais prático de implementar este método, sem usar a matriz de iteração que utiliza inversa, é mostrado a seguir. Seja

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

[2]Há uma curiosidade a respeito do nome deste método. Segundo G. E. Forsythe [24, pág. 115], o método de Gauss-Seidel não era conhecido por Gauss e nem recomendado por Seidel!

Na forma de recorrência,

$$(D + E)x^{k+1} = -Fx^k + b \longrightarrow Dx^{k+1} = -Ex^{k+1} - Fx^k + b.$$

Escrevendo a segunda equação na forma matricial

$$Dx^{k+1} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b},$$

obtêm-se, então, as equações de iterações do método de Gauss-Seidel

$$\left.\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right), \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right), \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

As equações de iterações do método de Jacobi (2.31) mostram que x^{k+1} é calculado usando somente valores x_i^k da iteração anterior. Por outro lado, (2.34) deixa claro que no método de Gauss-Seidel o vetor x^{k+1} é obtido a partir dos elementos mais recentes, incluindo o próprio x^{k+1} e x^k. O vetor inicial x^0 para o método de Gauss-Seidel pode ser o mesmo usado pelo método de Jacobi, dado por (2.32)

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Algoritmo e complexidade

A Figura 2.10 mostra um algoritmo para achar a solução de um sistema linear $Ax = b$ pelo método iterativo de Gauss-Seidel, com critério de parada dado por (2.28) e (2.29). Como no algoritmo de Jacobi, os parâmetros de entrada são a ordem *n*, a matriz *A*, o vetor *b*, a tolerância *Toler* e o número máximo de iterações *IterMax*; os parâmetros de saída são a solução *x*, o número de iterações gastas *Iter* e a condição de erro *CondErro* para verificar se a solução convergiu (*CondErro* = *0* significa que houve convergência e *CondErro* = *1*, que não houve). A complexidade computacional do algoritmo da Figura 2.10 é mostrada na Tabela 2.8.

Tabela 2.8 Complexidade de Gauss-Seidel usando k iterações em sistema de ordem $n > 1$.

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k+1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

Exemplo 2.49 Resolver o sistema do Exemplo 2.46 pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (2.28) e (2.29)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Já se sabe, pelas condições (2.27), que o processo convergirá porque a matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante. Por (2.34), as equações de iterações são

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^{k+1} + x_3^k + 20\right) \text{ e}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^{k+1} - x_2^{k+1} - 4\right).$$

Utilizando-se x^0 dado por (2.32), tem-se que $x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T$, e pelas equações de iterações, as coordenadas do vetor da primeira iteração são

$$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right) = \frac{1}{10}\left(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57\right) \rightsquigarrow x_1^1 = 4{,}79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^1 + x_3^0 + 20\right) = \frac{1}{8}\left(-2(4{,}79) + (-0{,}8) + 20\right) \rightsquigarrow x_2^1 = 1{,}2025 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^1 - x_2^1 - 4\right) = \frac{1}{5}\left(-(4{,}79) - (1{,}2025) - 4\right) \rightsquigarrow x_3^1 = -1{,}9985.$$

Deste modo, o vetor da primeira iteração é $x^1 = [4{,}79 \;\; 1{,}2025 \;\; -1{,}9985]^T$ e

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |1{,}2025 - 2{,}5|, |-1{,}9985 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |1{,}2025|, |-1{,}9985|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\ 1{,}2975;\ 1{,}1985)}{\max(4{,}79;\ 1{,}2025;\ 1{,}9985)} = 0{,}2709.$$

Esses e os demais valores das iterações podem ser gerados utilizando-se o algoritmo da Figura 2.10.


```
Algoritmo Gauss-Seidel
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo de }
{           Gauss-Seidel }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, }
  { tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i, i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então A(i, j) ← A(i, j) * r, fimse
    fimpara
    b(i) ← b(i) * r; x(i) ← b(i)
  fimpara; Iter ← 0
  { iterações de Gauss-Seidel }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i, j) * x(j), fimse
      fimpara
      v(i) ← x(i); x(i) ← b(i) − Soma
    fimpara
    NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
    para i ← 1 até n faça
      t ← abs(x(i) − v(i))
      se t > NormaNum então NormaNum ← t, fimse
      se abs(x(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(x(i)), fimse
    fimpara
    NormaRel ← NormaNum/NormaDen
    escreva Iter, x, NormaRel
    { teste de convergência }
    se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fimse
  fimrepita
  se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
  fimse
fimalgoritmo
```

Figura 2.10 Método de Gauss-Seidel para solução do sistema linear $Ax = b$.
(Ver significado da função abs na Tabela 1.1, na página 6.)

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
b =
    57
    20
    -4
Toler = 1.0000e-05
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
 Iter     x1        x2        x3        NormaRelativa
  0     5.70000   2.50000   -0.80000
  1     4.79000   1.20250   -1.99850    2.70877e-01
  2     4.93955   1.01530   -1.99097    3.78982e-02
  3     4.99722   1.00182   -1.99981    1.15396e-02
  4     4.99949   1.00015   -1.99993    4.55035e-04
  5     4.99997   1.00002   -2.00000    9.55994e-05
  6     5.00000   1.00000   -2.00000    5.32440e-06

Solucao  =     5.00000    1.00000   -2.00000
Iter     =  6
CondErro =  0
```

Conseqüentemente, $x \approx x^6 = [5{,}00000\ 1{,}00000\ \ -2{,}00000]^T$. Como na implementação do algoritmo de Jacobi, neste também foram acrescentadas algumas informações para facilitar o entendimento dos resultados. ■

Exemplo 2.50 Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 2.49 usando a formulação (2.33): $x^{k+1} = -(D+E)^{-1}Fx^k + (D+E)^{-1}b = Sx^k + d$.

Decompondo $A = D + E + F$, obtêm-se

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $(D+E)^{-1}$ pode ser calculada utilizando o esquema apresentado na Seção 2.7.2: $(D+E)(D+E)^{-1} = I$. Como a matriz $(D+E)$ é triangular inferior, cada coluna da inversa é obtida pelas substituições sucessivas. Deste modo, as matrizes $(D+E)^{-1}$ e S são

$$(D+E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}025 & 0{,}125 & 0 \\ -0{,}015 & -0{,}025 & 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix}.$$

Os vetores d e x^0 são

$$d = (D+E)^{-1}b = [5{,}7\ \ 1{,}075\ \ -2{,}155]^T \text{ e } x^0 = D^{-1}b = [5{,}7\ \ 2{,}5\ \ -0{,}8]^T.$$

As primeiras aproximações da solução por (2.33) são mostradas na tabela a seguir, que, obviamente, são iguais àqueles valores produzidos pelo algoritmo da Figura 2.10.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	5,70000	2,50000	−0,80000
1	4,79000	1,20250	−1,99850
2	4,93955	1,01530	−1,99097
3	4,99722	1,00182	−1,99981

■

Exemplo 2.51 Resolver o sistema do Exemplo 2.48 pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (2.28) e (2.29)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelas condições (2.27), o processo convergirá, pois a matriz dos coeficientes é diagonal estritamente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

Por (2.34), as equações de iterações do método de Gauss-Seidel são

$$x_1^{k+1} = \tfrac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right),$$

$$x_2^{k+1} = \tfrac{1}{8}\left(-x_1^{k+1} + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right),$$

$$x_3^{k+1} = \tfrac{1}{6}\left(-x_2^{k+1} - x_4^k - 5\right) \text{ e}$$

$$x_4^{k+1} = \tfrac{1}{9}\left(-x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 2x_3^{k+1}\right).$$

Com x^0 dado por (2.32), $x^0 = [1{,}2\ \ 1{,}25\ \ -0{,}8333\ \ 0]^T$. Pelas equações de iterações, as coordenadas do vetor da primeira iteração são

$$x_1^1 = \tfrac{1}{5}(-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \tfrac{1}{5}(-2(1{,}25) + (0) + 6) = 0{,}7;$$

$$x_2^1 = \tfrac{1}{8}(-x_1^1 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \tfrac{1}{8}(-(0{,}7) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10) = 0{,}85;$$

$$x_3^1 = \tfrac{1}{6}(-x_2^1 - x_4^0 - 5) = \tfrac{1}{6}(-(0{,}85) - (0) - 5) = -0{,}975;$$

$$x_4^1 = \tfrac{1}{9}(-x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1) = \tfrac{1}{9}(-(0{,}7) + (0{,}85) - 2(-0{,}975)) = 0{,}2333.$$

Assim, $x^1 = [0{,}7\ \ 0{,}85\ \ -0{,}975\ \ 0{,}2333]^T$ e

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}85-1{,}25|, |-0{,}975-(-0{,}8333)|, |0{,}2333-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}85|, |-0{,}975|, |0{,}2333|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1417;\ 0{,}2333)}{\max(0{,}7;\ 0{,}85;\ 0{,}975;\ 0{,}2333)} = 0{,}5128.$$

Usando o algoritmo da Figura 2.10, tem-se

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     5     2     0    -1
     1     8    -3     2
     0     1     6     1
     1    -1     2     9
b =
     6
    10
    -5
     0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter     x1         x2         x3         x4       NormaRelativa
 0    1.20000    1.25000   -0.83333    0.00000
 1    0.70000    0.85000   -0.97500    0.23333    5.12821e-01
 2    0.90667    0.71271   -0.99101    0.19867    2.08542e-01
 3    0.95465    0.70937   -0.98467    0.19156    4.87314e-02
 4    0.95456    0.71354   -0.98418    0.19193    4.22999e-03
 5    0.95297    0.71383   -0.98429    0.19216    1.61801e-03
 6    0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216    9.20739e-05

Solucao  =    0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216
Iter     =  6
CondErro =  0
```

Portanto, $x \approx x^6 = [0{,}95290 \ \ 0{,}71374 \ -0{,}98432 \ \ 0{,}19216]^T$. ■

2.8.5 Método da sobre-relaxação sucessiva

Considere a matriz A decomposta na forma $A = D+E+F$, onde D é uma matriz diagonal e E e F são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas. Multiplicando o sistema linear por um parâmetro ω, tem-se

$$\omega(D+E+F)x = \omega b.$$

Somando o vetor nulo $(D-D)x$ ao primeiro termo,

$$(D-D)x + \omega(D+E+F)x = \omega b$$

e rearranjando,

$$(D+\omega E)x = [(1-\omega)D - \omega F]x + \omega b,$$

chega-se à forma de iteração

$$(D+\omega E)x^{k+1} = [(1-\omega)D - \omega F]x^k + \omega b, \tag{2.35}$$

$$\boxed{x^{k+1} = (D+\omega E)^{-1}[(1-\omega)D - \omega F]x^k + \omega(D+\omega E)^{-1}b \rightarrow x^{k+1} = Rx^k + e}. \tag{2.36}$$

Por (2.26), a matriz $R = (D+\omega E)^{-1}[(1-\omega)D - \omega F]$ é a matriz de iteração do método denominado sobre-relaxação sucessiva (*SOR: successive over-relaxation*).

A convergência do método SOR depende da escolha do parâmetro ω e é necessário que $0 < \omega < 2$ para garantir a convergência [3, Teorema 5.4]. Usualmente, utiliza-se $1 < \omega < 2$. Particularmente para $\omega = 1$, a recorrência (2.36) torna-se

$$x^{k+1} = -(D+E)^{-1}Fx^k + (D+E)^{-1}b,$$

que é idêntica à (2.33), ou seja, o método de Gauss-Seidel é um caso particular da sobre-relaxação sucessiva.

Podem-se obter as equações de iterações do SOR a partir de (2.35)

$$\begin{aligned}
(D+\omega E)x^{k+1} &= [(1-\omega)D - \omega F]x^k + \omega b,\\
Dx^{k+1} &= \omega(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1-\omega)Dx^k,\\
x^{k+1} &= \omega D^{-1}(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1-\omega)x^k.
\end{aligned}$$

Assim, as equações de iterações do método da sobre-relaxação sucessiva são

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right) + (1-\omega)x_1^k,\\
x_2^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right) + (1-\omega)x_2^k,\\
x_3^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right) + (1-\omega)x_3^k,\\
&\ \vdots\\
x_n^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\right) + (1-\omega)x_n^k.
\end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Um algoritmo para achar a solução de um sistema linear $Ax = b$ pelo método da sobre-relaxação sucessiva, com critério de parada dado por (2.28) e (2.29), é apresentado na Figura 2.11. Os parâmetros de entrada são a ordem *n*, a matriz *A*, o vetor *b*, o parâmetro *Omega*, a tolerância *Toler* e o número máximo de iterações *IterMax*. Os parâmetros de saída são a solução *x*, o número de iterações gastas *Iter* e a condição de erro *CondErro* para verificar se a solução convergiu (*CondErro = 0* significa que houve convergência e *CondErro = 1*, que não houve).

Exemplo 2.52 Resolver o sistema pelo método SOR, com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 500$ usando os critérios (2.28) e (2.29)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 0\\ -1 & 10 & 0 & 8 & 1\\ -1 & 1 & 15 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 10 & 5 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 2 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\\ 56\\ 74\\ 57\\ 107\end{bmatrix}.$$

```
Algoritmo SOR
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo da }
{                sobre-relaxação sucessiva }
parâmetros de entrada n, A, b, Omega, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, parâmetro ω, }
  { tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i, i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então A(i,j) ← A(i,j) * r, fimse
    fimpara
    b(i) ← b(i) * r; x(i) ← b(i)
  fimpara; Iter ← 0
  { iterações da sobre-relaxação sucessiva }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i,j) * x(j), fimse
      fimpara
      v(i) ← x(i); x(i) ← Omega * (b(i) − Soma) + (1 − Omega) * x(i)
    fimpara
    NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
    para i ← 1 até n faça
      t ← abs(x(i) − v(i))
      se t > NormaNum então NormaNum ← t, fimse
      se abs(x(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(x(i)), fimse
    fimpara
    NormaRel ← NormaNum/NormaDen
    escreva Iter, x, NormaRel
    { teste de convergência }
    se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fimse
  fimrepita
  se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
  fimse
fimalgoritmo
```

Figura 2.11 Método da sobre-relaxação sucessiva para solução do sistema linear $Ax = b$.

(Ver significado da função abs na Tabela 1.1, na página 6.)

A Tabela 2.9 mostra a influência do parâmetro ω no raio espectral ρ da matriz de iteração $R = (D + \omega E)^{-1}[(1-\omega)D - \omega F]$ do método da sobre-relaxação sucessiva. Quanto menor $\rho(R)$ menor será o número de iterações. O processo não convergiu para $\omega = 1{,}6$ e $\omega = 1{,}8$ devido a $\rho(R) > 1$ nos dois casos. Apesar de a matriz A não ser diagonal estritamente dominante o processo convergiu para diversos valores de ω. ■

Tabela 2.9 Influência do parâmetro ω no raio espectral da matriz de iteração R.

ω	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$\rho(R)$	0,9357	0,8618	0,7747	0,6674	0,5231	0,4459	0,7506	1,0660	1,3943
iterações	118	63	41	29	20	17	44	>500	>500

O Teorema 2.4 não se aplica ao método da sobre-relaxação sucessiva devido ao parâmetro ω. No Exemplo 2.51, onde a matriz A é diagonal estritamente dominante, o método de Gauss-Seidel converge com 6 iterações. No entanto, a sobre-relaxação sucessiva não converge com $\omega = 1{,}8$ porque neste caso $\rho(R_{\omega=1,8}) = 1{,}0131 > 1$.

2.8.6 Análise de convergência

Seja o erro ϵ^k na k-ésima iteração de um processo iterativo

$$\epsilon^k = x^k - x^*,$$

onde x^* é a solução exata do sistema $Ax = b$ de ordem n e x^k é uma aproximação da solução. Substituindo a equação acima para ϵ^{k+1} em (2.26)

$$\epsilon^{k+1} = x^{k+1} - x^* = Mx^k + c - x^*.$$

Sendo $x^k = \epsilon^k + x^*$, então

$$\epsilon^{k+1} = M(\epsilon^k + x^*) + c - x^*,$$

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k + (Mx^* + c - x^*). \tag{2.38}$$

Tomando o limite de (2.26),

$$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} Mx^k + c \longrightarrow x^* = Mx^* + c.$$

Substituindo a expressão acima em (2.38), tem-se que a propagação de erro é da forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k. \tag{2.39}$$

Sendo λ_i um autovalor da matriz de iteração M e v_i o seu correspondente autovetor, então, por (2.2)

$$Mv_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ ou}$$

$$MV = V\Lambda$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores λ_i e V é a matriz composta pelos autovetores v_i, ou seja, $V = [v_1\ v_2 \ldots v_n]$. Expressando o vetor erro inicial ϵ^0 como uma combinação linear dos autovetores V de M, tem-se

$$\epsilon^0 = Vc$$

sendo c um vetor de coeficientes obtido pela solução do sistema linear acima. Substituindo esta expressão em (2.39), obtém-se

$$\epsilon^1 = M\epsilon^0 = MVc \longrightarrow \epsilon^1 = V\Lambda c.$$

De maneira similar,

$$\epsilon^2 = M\epsilon^1 = MV\Lambda c \longrightarrow \epsilon^2 = V\Lambda^2 c.$$

Assim, na k-ésima iteração o vetor erro é

$$\boxed{\epsilon^k = V\Lambda^k c}, \tag{2.40}$$

que é da forma

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \vdots \\ \epsilon_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\lambda_1^k \\ c_2\lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n\lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Deste modo, quando k aumentar, o vetor erro ϵ^k irá reduzir se, e somente se, o módulo de todos os autovalores λ_i da matriz de iteração M for menor que a unidade. Além do mais, a taxa de convergência será controlada pela magnitude do maior autovalor em módulo, o chamado raio espectral $\rho(M)$ (ver Teorema 2.3).

Exemplo 2.53 Seja o sistema $Ax = b$ do Exemplo 2.49 e sua solução exata x^*

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A partir dos resultados do Exemplo 2.50, obtêm-se os valores para a fórmula de recorrência de Gauss-Seidel $x^{k+1} = Sx^k + d$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}300 & 0{,}200 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 5{,}700 \\ 1{,}075 \\ -2{,}155 \end{bmatrix} \text{ e } x^0 = \begin{bmatrix} 5{,}7 \\ 2{,}5 \\ -0{,}8 \end{bmatrix}.$$

O vetor erro inicial é $\epsilon^0 = x^0 - x^* = [0{,}7\ 1{,}5\ 1{,}2]^T$. Os autovalores Λ da matriz de iteração S e seus respectivos autovetores V são

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}09718 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}07718 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}92174 & -0{,}97074 \\ 0 & 0{,}37189 & -0{,}10615 \\ 0 & 0{,}10997 & 0{,}21538 \end{bmatrix}.$$

Por (2.40) o vetor erro na k-ésima iteração é

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \epsilon_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}92174 & -0{,}97074 \\ 0 & 0{,}37189 & -0{,}10615 \\ 0 & 0{,}10997 & 0{,}21538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8{,}19997(0)^k \\ 4{,}90841(0{,}09718)^k \\ 3{,}06538(-0{,}07718)^k \end{bmatrix},$$

sendo o vetor c a solução do sistema linear $Vc = \epsilon^0$. A partir da equação acima, calcula-se o vetor erro ϵ^k a cada iteração. Como $x^k = \epsilon^k + x^*$, é possível obter a solução aproximada x^k para comparar com os valores mostrados no Exemplo 2.50

k	ϵ_1^k	ϵ_2^k	ϵ_3^k	$\epsilon_1^k - x_1^*$	$\epsilon_2^k - x_2^*$	$\epsilon_3^k - x_3^*$
0	0,70000	1,50000	1,20000	5,70000	2,50000	−0,80000
1	−0,21001	0,20250	0,00150	4,78999	1,20250	−1,99850
2	−0,06045	0,01530	0,00903	4,93955	1,01530	−1,99097
3	−0,00278	0,00182	0,00019	4,99722	1,00182	−1,99981

Como $|\lambda_i| < 1\ \forall\, i$, então

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \epsilon^k = 0,$$

fazendo com que o processo convirja. Se pelo menos um $|\lambda_i| > 1$, então

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = \infty \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \epsilon^k = \infty,$$

implicando uma divergência da solução. ■

2.8.7 Comparação dos métodos iterativos estacionários

Pelo Teorema 2.4, se a matriz dos coeficientes A for diagonal estritamente dominante, então a solução pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel converge. No entanto, se A não for diagonalmente dominante, a previsão de convergência deve ser feita pelo Teorema 2.3 usando o raio espectral $\rho(M)$ da matriz de iteração M. Neste caso, um método pode convergir e o outro não.

Exemplo 2.54 Verificar se o sistema abaixo pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz não é diagonal estritamente dominante, faz-se necessário o uso do Teorema 2.3. As matrizes de iteração dos dois métodos são, por (2.30) e (2.33)

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 1{,}1200 \text{ e}$$

$$S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}08 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0{,}6928.$$

Como $\rho(J) > 1$ e $\rho(S) < 1$, então pelo método de Jacobi a solução não irá convergir, enquanto pelo de Gauss-Seidel irá. De fato, as dez primeiras iterações confirmam

```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter    x1         x2          x3        NormaRelativa
 0    0.40000    0.00000   -0.60000
 1    0.76000    0.20000   -0.76000    4.73684e-01
 2    0.61600    0.00000   -0.82400    2.42718e-01
 3    0.89440    0.20800   -0.84640    3.11270e-01
 4    0.65824   -0.04800   -0.87456    2.92719e-01
 5    0.98234    0.21632   -0.88250    3.29924e-01
 6    0.66991   -0.09984   -0.90641    3.48806e-01
 7    1.06365    0.23649   -0.90790    3.70176e-01
 8    0.66095   -0.15575   -0.93086    4.32612e-01
 9    1.14542    0.26991   -0.92668    4.22963e-01
10    0.63211   -0.21874   -0.95020    5.40209e-01
```

```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter    x1         x2          x3        NormaRelativa
 0    0.40000    0.00000   -0.60000
 1    0.76000   -0.16000   -0.96800    3.80165e-01
 2    1.17280   -0.20480   -1.15104    3.51978e-01
 3    1.33638   -0.18534   -1.20869    1.22408e-01
 4    1.34763   -0.13894   -1.19463    3.44366e-02
 5    1.28350   -0.08887   -1.14895    4.99639e-02
 6    1.19602   -0.04707   -1.09723    7.31440e-02
 7    1.11482   -0.01759   -1.05296    7.28318e-02
 8    1.05288    0.00008   -1.02112    5.88269e-02
 9    1.01258    0.00854   -1.00161    3.98065e-02
10    0.99071    0.01090   -0.99193    2.20409e-02
```

■

Exemplo 2.55 Verificar se o sistema a seguir pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de iteração são

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0{,}8266 \text{ e}$$

$$S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 1{,}2000.$$

Como $\rho(J) < 1$ e $\rho(S) > 1$, pelo método de Jacobi a solução irá convergir, mas pelo de Gauss-Seidel não irá. Para certificar, as dez primeiras iterações mostram


```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter    x1         x2          x3        NormaRelativa
 0    0.40000    0.00000   -0.60000
 1    0.76000   -0.20000   -0.76000    4.73684e-01
 2    1.09600    0.00000   -0.98400    3.06569e-01
 3    0.99040    0.11200   -1.03840    1.07858e-01
 4    0.88864   -0.04800   -0.95136    1.68180e-01
 5    1.02842   -0.06272   -0.97466    1.35914e-01
 6    1.06006    0.05376   -1.03645    1.09881e-01
 7    0.95736    0.02360   -1.00252    1.02439e-01
 8    0.97319   -0.04516   -0.97350    7.06332e-02
 9    1.03829   -0.00032   -1.00734    6.27033e-02
10    1.00478    0.03095   -1.01544    3.30007e-02
```

```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter    x1         x2          x3        NormaRelativa
 0    0.40000    0.00000   -0.60000
 1    0.76000    0.16000   -0.84000    4.28571e-01
 2    0.71200   -0.12800   -0.93600    3.07692e-01
 3    1.11520    0.17920   -0.97440    3.61549e-01
 4    0.76960   -0.20480   -0.98976    3.87973e-01
 5    1.23962    0.24986   -0.99590    3.79163e-01
 6    0.69772   -0.29819   -0.99836    5.48944e-01
 7    1.35684    0.35848   -0.99934    4.85781e-01
 8    0.56943   -0.42992   -0.99974    7.88605e-01
 9    1.51574    0.51600   -0.99990    6.24324e-01
10    0.38073   -0.61916   -0.99996    1.13522e+00
```

■

É curioso notar que os sistemas dos Exemplos 2.54 e 2.55 diferem apenas no elemento a_{22}, que possui sinais contrários. A mudança de sinal daquele coeficiente faz com que a solução convirja por um método e não convirja por outro. Quanto menor o valor de $\rho(M)$, mais rápida será a convergência do método iterativo (ver (2.40)). Para o sistema do Exemplo 2.46, as matrizes de iteração dos dois métodos são

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0{,}2725 \text{ e}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0{,}0972.$$

Considerando que $\rho(S) < \rho(J)$, então o método de Gauss-Seidel converge mais rápido, pois ele gasta 6 iterações (Exemplo 2.49) contra 9 do método de Jacobi (Exemplo 2.46).

2.8.8 Refinamento como método estacionário

Na Seção 2.7.1, foi mostrado como refinar a solução de um sistema linear a partir dos fatores da decomposição. Aquelas equações podem ser rearranjadas

$$x^{k+1} = x^k + c^k$$

$$\begin{aligned} &= x^k + U^{-1}L^{-1}Pr^k \\ &= x^k + U^{-1}L^{-1}P(b - Ax^k) \\ x^{k+1} &= x^k - U^{-1}L^{-1}PAx^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \end{aligned}$$

resultando em

$$x^{k+1} = (I - U^{-1}L^{-1}PA)x^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \tag{2.41}$$

que é da forma (2.26) de um método iterativo estacionário.

Exemplo 2.56 Resolver o sistema do Exemplo 2.44, na página 86, utilizando a formulação mostrada em (2.41)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Os três fatores obtidos pela decomposição LU com pivotação parcial são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}67 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}42 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6{,}33 & 3 \\ 0 & 0 & 2{,}74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de iteração é

$$(I - U^{-1}L^{-1}PA) = \begin{bmatrix} -3{,}6384 & 2{,}2421 & 7{,}2768 \\ 4{,}0359 & -6{,}1000 & -8{,}0719 \\ -5{,}1825 & 6{,}2044 & 10{,}365 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

e os vetores

$$U^{-1}L^{-1}Pb = x^0 = [1{,}9731\ \ -0{,}9738\ \ 4{,}9647]^T.$$

As iterações calculadas por (2.41) são exibidas na tabela a seguir para comparação com os resultados do Exemplo 2.44

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	1,9731	−0,9738	4,9647
1	1,9999	−1,0000	4,9999
2	2,0000	−1,0000	5,0000

O raio espectral da matriz de iteração $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) = 6{,}2355 \times 10^{-4} < 1$. Por esta razão, o processo convergiu. Caso a perturbação nos fatores L e U seja grande o suficiente para $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) \geq 1$, então o processo não mais convergirá. ■

2.9 Análise de erro na solução de sistemas

É importante analisar como pequenas variações nos elementos da matriz dos coeficientes A e/ou no vetor de termos independentes b influenciam a solução x do sistema linear $Ax = b$.

2.9.1 Malcondicionamento

Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix},$$

cuja solução exata é $x = [1\ 1]^T$. Seja o vetor $\tilde{b} = [1{,}99\ 1{,}98]^T \approx b$. A solução exata do sistema $Ay = \tilde{b}$ é $y = [100\ \ -99]^T$. Portanto, uma pequena perturbação no vetor de termos independentes ocasionou uma grande modificação no vetor solução. Considere agora a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}99 \end{bmatrix} \approx A.$$

A solução exata do sistema $\tilde{A}z = b$ é $z = [2\ \ -1/99]^T$. Neste caso, foi uma pequena perturbação na matriz dos coeficientes que acarretou uma grande mudança no vetor solução. Estes problemas são causados porque a matriz A é quase singular ($\det(A) = -10^{-4}$). Um sistema linear com uma matriz com esta característica é chamado malcondicionado.

A Figura 2.12 mostra os três planos definidos por um sistema linear, e dois planos são quase coincidentes. Deste modo, pequenas variações em qualquer um dos três planos causam um grande deslocamento no ponto de interseção, que é a solução do sistema.

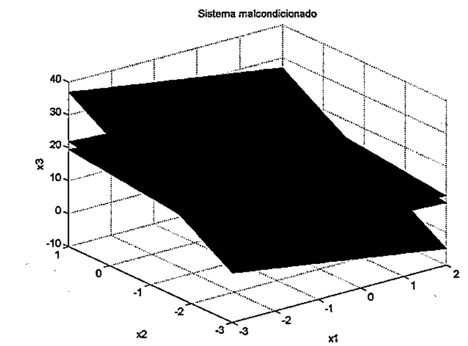


Figura 2.12 Interpretação geométrica do malcondicionamento.

A solução exata de $Ax = b$ é $x = [1\ \ 1]^T$; no entanto, o resíduo para $\tilde{x} = [0{,}9\ \ 1{,}1]^T$ é

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} \leadsto \tilde{r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Apesar de $\tilde{x}$ ser diferente da solução exata x, o resíduo $\tilde{r}$ é pequeno. Quando a solução for quase exata, o resíduo será pequeno, porém a recíproca não é verdadeira para sistemas malcondicionados. Conseqüentemente, o resíduo não será um bom indicador de exatidão da solução quando o sistema for malcondicionado. O grande problema em resolver sistemas malcondicionados é a instabilidade da solução. Se A e/ou b forem medidas experimentais e, portanto, sujeitas a erros, qualquer pequena variação em seus elementos acarretará bruscas alterações no vetor solução.

2.9.2 Número de condição

O malcondicionamento é devido à quase singularidade da matriz A dos coeficientes. No entanto, medir a singularidade de A pelo seu determinante não constitui uma boa prática porque um determinante pequeno não indica necessariamente a ocorrência de um malcondicionamento. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0{,}001 \\ -0{,}001 & 0{,}001 \end{bmatrix}$$

tem $\det(A) = 2{\times}10^{-6}$ e, no entanto, é muito bem-condicionada. Seu determinante é pequeno porque seus elementos são pequenos.

O número de condição de uma matriz é mais apropriado para medir o quanto a matriz é malcondicionada. O número de condição é definido como o produto de duas normas, a saber,

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|, \tag{2.42}$$

onde $\|\cdot\|$ significa uma norma matricial qualquer. Portanto, o valor de $\kappa(A)$ depende da norma utilizada. Particularmente, em vista de (2.5), $\kappa_2(A)$ é dado por

$$\boxed{\kappa_2(A) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} & \text{se } A = A^T \\[2ex] \dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} & \text{se } A \neq A^T \end{cases}} \tag{2.43}$$

desde que $\lambda(A^{-1}) = \lambda^{-1}(A)$, conforme mostrado na Seção 2.1.3. Um sistema $Ax = b$ é considerado malcondicionado se o número de condição for grande, $\kappa(A) \gg 1$.

Exemplo 2.57 Calcular $\kappa_2(A)$ e $\kappa_2(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Por (2.43),

$$\lambda(A) = (1{,}9801,\ -5{,}0504{\times}10^{-5}) \leadsto$$

$$\kappa_2(A) = \frac{|1{,}9801|}{|-5{,}0504{\times}10^{-5}|} = 3{,}9206{\times}10^4 \text{ e}$$

$$\lambda(B^TB) = (1{,}7423{\times}10^2,\ 3{,}7222{\times}10^1,\ 2{,}4548{\times}10^1) \leadsto$$

$$\kappa_2(B) = \sqrt{\frac{1{,}7423{\times}10^2}{2{,}4548{\times}10^1}} = 2{,}6641.$$

Para este exemplo, um sistema linear com a matriz A será malcondicionado, enquanto um sistema com a matriz B será bem-condicionado. ■

Um exemplo clássico de malcondicionamento é a matriz de Hilbert definida por

$$H_n = \frac{1}{i+j-1},\ i,j = 1,2,\ldots,n.$$

Por exemplo,

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

A Figura 2.13 apresenta um algoritmo para gerar a matriz de Hilbert de ordem n e sua inversa, bem como as respectivas normas-∞. O parâmetro de entrada é a ordem n da matriz. Os parâmetros de saída são *H*, contendo a matriz de Hilbert H_n, *Hinv* contendo a inversa H_n^{-1}, *NinfH* com $\|H_n\|_\infty$ e *NinfHinv* com $\|H_n^{-1}\|_\infty$.

Exemplo 2.58 Gerar a matriz de Hilbert de ordem 4 e sua inversa utilizando o algoritmo descrito na Figura 2.13.

```
% O parametro de entrada
n = 4
% produz os resultados
H =
   1.0000   0.5000   0.3333   0.2500
   0.5000   0.3333   0.2500   0.2000
   0.3333   0.2500   0.2000   0.1667
   0.2500   0.2000   0.1667   0.1429
NinfH = 2.0833
Hinv =
        16       -120        240       -140
      -120       1200      -2700       1680
       240      -2700       6480      -4200
      -140       1680      -4200       2800
NinfHinv = 13620
```

Considerando que

$$\|H_4\|_\infty = \frac{25}{12} \approx 2{,}0833 \quad \text{e} \quad \|H_4^{-1}\|_\infty = 13620,$$

então H_4 é de fato malcondicionada, desde que, por (2.42)

$$\kappa_\infty(H_4) = \|H_4\|_\infty\|H_4^{-1}\|_\infty = \frac{25}{12}13620 = 28375.$$ ■

```
Algoritmo Hilbert
{ Objetivo: Gerar uma matriz de Hilbert, sua inversa e as normas-∞ }
parâmetros de entrada n { ordem da matriz }
parâmetros de saída H, Hinv, NinfH, NinfHinv
  { H_n, H_n^{-1}, ||H_n||_∞, ||H_n^{-1}||_∞ }
  { cálculo da matriz de Hilbert e sua norma-∞ }
  para i ← 1 até n faça
    H(i, i) ← 1/(2 * i − 1)
    para j ← i + 1 até n faça
      H(i,j) ← 1/(i + j − 1); H(j, i) ← H(i,j)
    fimpara
  fimpara
  NinfH ← 0
  para j ← 1 até n faça
    NinfH ← NinfH + H(1,j)
  fimpara
  { inversa da matriz de Hilbert e sua norma-∞ }
    { linha 1 }
  Hinv(1, 1) ← n²; Prod1 ← 1; Soma ← Hinv(1, 1)
  para j ← 2 até n faça
    Prod1 ← Prod1 * (1 − (n/(j − 1))²)
    Hinv(1,j) ← n²/j * Prod1; Hinv(j, 1) ← Hinv(1,j)
    Soma ← Soma + abs(Hinv(1,j))
  fimpara
  NinfHinv ← Soma
    { linha i > 1 }
  Prod2 ← 1
  para i ← 2 até n faça
    Prod1 ← 1; Prod2 ← Prod2 * ((n/(i − 1))² − 1)
    Hinv(i, i) ← (n * Prod2)²/(2 * i − 1); Soma ← Hinv(i, i)
    para j ← i + 1 até n faça
      Prod1 ← Prod1 * (1 − (n/(j − 1))²)
      Hinv(i,j) ← (n * Prod2)² * Prod1/(i + j − 1)
      Hinv(j, i) ← Hinv(i,j); Soma ← Soma + abs(Hinv(i,j))
    fimpara
    para j ← 1 até i − 1 faça
      Soma ← Soma + abs(Hinv(i,j))
    fimpara
    se Soma > NinfHinv então NinfHinv ← Soma, fimse
  fimpara
fimalgoritmo
```

Figura 2.13 Algoritmo gerador de matriz de Hilbert, sua inversa e normas-∞.
(Ver significado da função abs na Tabela 1.1, na página 6.)

A Tabela 2.10 mostra os valores de $\|H_n\|_\infty$, $\|H_n^{-1}\|_\infty$ e $\kappa_\infty(H_n)$ para $n=1,2,\ldots,10$, obtidos pelo algoritmo da Figura 2.13. À medida que n aumenta, H_n vai se tornando cada vez mais malcondicionada.

Tabela 2.10 Normas-∞ e número de condição das matrizes de Hilbert.

n	$\|H_n\|_\infty$	$\|H_n^{-1}\|_\infty$	$\kappa_\infty(H_n)$
1	1,00000	$1,00000\times10^{0}$	$1,00000\times10^{0}$
2	1,50000	$1,80000\times10^{1}$	$2,70000\times10^{1}$
3	1,83333	$4,08000\times10^{2}$	$7,48000\times10^{2}$
4	2,08333	$1,36200\times10^{4}$	$2,83750\times10^{4}$
5	2,28333	$4,13280\times10^{5}$	$9,43656\times10^{5}$
6	2,45000	$1,18654\times10^{7}$	$2,90703\times10^{7}$
7	2,59286	$3,79965\times10^{8}$	$9,85195\times10^{8}$
8	2,71786	$1,24631\times10^{10}$	$3,38728\times10^{10}$
9	2,82897	$3,88712\times10^{11}$	$1,09965\times10^{12}$
10	2,92897	$1,20716\times10^{13}$	$3,53574\times10^{13}$

2.9.3 Sensibilidade da solução

Seja o sistema $Ax = b$ e uma pequena perturbação δb em b. A correspondente modificação δx na solução $x = A^{-1}b$ satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

Pelas propriedades das normas consistentes (ver Seção 2.1.4), tem-se

$$\|A\|\|x\| \geq \|b\| \quad \text{e} \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|,$$

cuja combinação resulta em

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Em vista de (2.42)

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}. \tag{2.44}$$

Esta equação fornece um limite superior ao erro relativo na solução x devido à perturbação δb no vetor de termos independentes b. Quanto mais malcondicionado um sistema $Ax = b$ for, maior será o número de condição $\kappa(A)$ e, conseqüentemente, maior será o erro relativo na solução.

Exemplo 2.59 Verificar (2.44) para o sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \; \text{e} \; \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

Sendo $x = [1\ 1]^T$ a solução exata de $Ax = b$, $\kappa_2(A) = 3{,}9206{\times}10^4$ (ver Exemplo 2.57), $\|b\|_2 = 2{,}8002$ e $\|\delta b\|_2 = 10^{-2}$, tem-se que o limite superior ao erro relativo em termos da norma-2 é

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \le \kappa_2(A)\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = 3{,}9206{\times}10^4\frac{10^{-2}}{2{,}8002} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \le 1{,}4001{\times}10^2.$$

De fato, com a perturbação δb, a solução variou de $[1\ 1]^T$ para $[100\ \ -99]^T$, significando $\delta x = [100-1\ \ -99-1]^T \rightsquigarrow \|\delta x\|_2 = 1{,}4072{\times}10^2$. Considerando que $\|x\|_2 = 1{,}4142$, na realidade, o erro relativo cometido foi

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1{,}4072{\times}10^2}{1{,}4142} = 9{,}9505{\times}10^1$$

que está dentro do limite previsto por (2.44). ■

Para considerar a perturbação em A, seja

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \longrightarrow Ax + A\,\delta x + \delta A\,x + \delta A\,\delta x = b \rightsquigarrow A\,\delta x = -\delta A(x + \delta x).$$

Tomando as normas consistentes, tem-se

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x + \delta x\| \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \le \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \tag{2.45}$$

Quanto mais malcondicionado um sistema $Ax = b$ for, maior será a influência da perturbação δA em A na solução x. Se, por exemplo, os coeficientes de A forem conhecidos com a precisão de quatro decimais e o número de condição for 10^3, então x pode ter somente a precisão de uma decimal.

Exemplo 2.60 Verificar (2.45) para o sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} \text{ e } \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\kappa_2(A) = 3{,}9206{\times}10^4$ (ver Exemplo 2.57), $\|\delta A\|_2 = 10^{-2}$ e $\|A\|_2 = 1{,}9801$, então o erro relativo em termos da norma-2 é

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \le \kappa_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = 3{,}9206{\times}10^4\frac{10^{-2}}{1{,}9801} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \le 1{,}9800{\times}10^2.$$

Com a perturbação δA, a solução variou de $x = [1\ 1]^T$ para $\tilde{x} = [2\ \ -1/99]^T$. Assim, a variação na solução foi $\delta x = [2-1\ \ -1/99-1]^T$ e o erro relativo real

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} = \frac{1{,}4214}{2{,}0000} = 7{,}1070{\times}10^{-1},$$

portanto, está dentro do limite previsto por (2.45). ■

Os limites aos erros relativos, (2.44) e (2.45), podem ser pessimistas conforme visto neste exemplo. Contudo, essas relações são rigorosas e simples de expressar.

2.10 Exemplos de aplicação

Nesta seção, será mostrado o uso de sistemas de equações lineares para resolver dois problemas práticos, um de Física (cálculo de tensões em um circuito resistivo) e outro de Química (estequiometria de reação química).

2.10.1 Tensões em circuito elétrico

Definição do problema

Calcular as tensões dos nós do circuito elétrico da Figura 2.14.

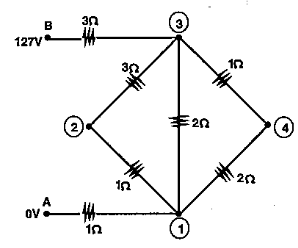


Figura 2.14 Circuito elétrico resistivo.

Modelagem matemática

Pela *lei de Kirchhoff*, a soma das correntes que passam em cada nó do circuito é nula. Pela *lei de Ohm*, a corrente elétrica que flui do nó j para o nó k de um circuito é $I_{jk} = \frac{V_j - V_k}{R_{jk}}$, sendo V_j e V_k as tensões nos nós j e k, respectivamente, e R_{jk} a resistência no arco jk. A corrente I é expressa em ampères e a resistência R, em ohms. As duas leis combinadas permitem o cálculo da tensão em cada nó do circuito.

No nó 1, pela *lei de Kirchhoff*, $I_{A1} + I_{21} + I_{31} + I_{41} = 0$. Utilizando a *lei de Ohm*,

$$\frac{0 - V_1}{1} + \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_3 - V_1}{2} + \frac{V_4 - V_1}{2} = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{-6V_1 + 2V_2 + V_3 + V_4 = 0}.$$

Determinando as equações dos nós 2, 3 e 4, constrói-se um sistema de equações lineares. O vetor solução fornece a tensão em cada nó do circuito elétrico

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -13 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -254 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução numérica

Resolvendo o sistema linear $AV = b$, formado pelas equações dos nós 1, 2, 3 e 4, usando decomposição LU com pivotação parcial como no Exemplo 2.33, obtêm-se as tensões em cada nó do circuito.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
    -6     2     1     1
     3    -4     1     0
     3     2   -13     6
     1     0     2    -3
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
   -6.0000    2.0000    1.0000    1.0000
   -0.5000   -3.0000    1.5000    0.5000
   -0.5000   -1.0000  -11.0000    7.0000
   -0.1667   -0.1111   -0.2121   -1.2929
Det = 256.0000
Pivot = 1     2     3     4
% vetor de termos independentes
b =
     0
     0
  -254
     0
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
         0
         0
 -254.0000
  -53.8788
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
   25.7969
   31.7500
   49.6094
   41.6719
```

As tensões em cada nó do circuito elétrico dado são

$$V_1 = 25{,}80 \text{ V},\ V_2 = 31{,}75 \text{ V},\ V_3 = 49{,}61 \text{ V e } V_4 = 41{,}67 \text{ V}.$$

Análise dos resultados

Nesta etapa, verifica-se a adequação da solução numérica do modelo com relação aos valores possíveis das tensões. Para o circuito dado, a tensão de cada nó deve estar entre 0 e 127 V.

2.10.2 Estequiometria de reação química

Definição do problema

Equilibrar a equação química

$$KMnO_4 + H_2SO_4 + NaNO_2 \longrightarrow K_2SO_4 + MnSO_4 + NaNO_3 + H_2O.$$

Modelagem matemática

O balanceamento de uma equação química é baseado na *lei de conservação da massa de Lavoisier*: "Em um sistema químico isolado, a massa permanece constante, quaisquer que

sejam as transformações que nele se processem." A *lei de Lavoisier* também pode ser expressa na forma: "Em uma reação química, a soma das massas dos reagentes é igual à soma das massas dos produtos resultantes." Conclui-se, então, que os elementos têm que estar nos dois membros da equação em igual quantidade.

O método algébrico de balanceamento [19] consiste em atribuir coeficientes literais x_i às substâncias que aparecem na equação, os quais constituem as incógnitas. Aplicando a *lei de Lavoisier* e comparando os elementos membro a membro, constrói-se um sistema de equações algébricas lineares onde as incógnitas são os coeficientes estequiométricos x_i da reação química. Se houver mais incógnitas do que equações, atribui-se um valor arbitrário a uma delas

$$x_1 KMnO_4 + x_2 H_2SO_4 + x_3 NaNO_2 \longrightarrow x_4 K_2SO_4 + x_5 MnSO_4 + x_6 NaNO_3 + x_7 H_2O,$$

$$\begin{aligned}
&\text{K}: x_1 = 2x_4,\\
&\text{Mn}: x_1 = x_5,\\
&\text{O}: 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4x_4 + 4x_5 + 3x_6 + x_7,\\
&\text{H}: 2x_2 = 2x_7,\\
&\text{S}: x_2 = x_4 + x_5,\\
&\text{Na}: x_3 = x_6,\\
&\text{N}: x_3 = x_6.
\end{aligned}$$

Como as duas últimas expressões são iguais, elimina-se uma delas. Deste modo, tem-se um sistema linear com 6 equações e 7 incógnitas. Atribuindo um valor arbitrário a uma delas, por exemplo, $x_7 = 1$, obtém-se o seguinte sistema linear de ordem 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução numérica

Resolvendo o sistema linear $Ax = b$, usando decomposição LU com pivotação parcial como no Exemplo 2.33, obtêm-se os coeficientes estequiométricos x_i

```
% Os valores de entrada
n = 6
A =
     1     0     0    -2     0     0
     1     0     0     0    -1     0
     4     4     2    -4    -4    -3
     0     2     0     0     0     0
     0     1     0    -1    -1     0
     0     0     1     0     0    -1
```

```
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    4.0000    4.0000    2.0000   -4.0000   -4.0000   -3.0000
         0    2.0000         0         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0   -1.0000
    0.2500   -0.5000   -0.5000    1.0000         0    0.2500
         0    0.5000         0   -1.0000   -1.0000    0.2500
    0.2500   -0.5000   -0.5000   -1.0000   -1.0000    0.7500
Det = 6
Pivot = 3     4     6     2     5     1
% vetor de termos independentes
b =
     0
     0
     1
     2
     0
     0
% As substituicoes sucessivas pivotal resultam em
y =
    1.0000
    2.0000
         0
    0.7500
   -0.2500
    1.2500
% As substituicoes sucessivas produzem a solucao
x =
    0.6667
    1.0000
    1.6667
    0.3333
    0.6667
    1.6667
```

Os coeficientes estequiométricos são obtidos pela solução do sistema acrescido de $x_7 = 1 \longrightarrow x = [0{,}6667\ 1{,}0000\ 1{,}6667\ 0{,}3333\ 0{,}6667\ 1{,}6667\ 1]^T$.

Análise dos resultados

Usualmente, os coeficientes estequiométricos são expressos como números inteiros. Pela regra de Cramer, para obter x com valores inteiros basta mutiplicá-lo pelo determinante de A, no caso, $\det(A) = 6$. Para mais uma simplificação, divide-se o valor obtido por 2, resultando em

$$x = [2\ 3\ 5\ 1\ 2\ 5\ 3]^T.$$

Portanto, a equação química balanceada torna-se

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5NaNO_2 \longrightarrow K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 5NaNO_3 + 3H_2O.$$

2.11 Exercícios

Seção 2.1

2.1. Sejam as matrizes e vetores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Calcular
a) $A + B$.
b) Ax.
c) AB.
d) $x^T y$.
e) xy^T.

2.2. Verificar que $(A+B)^T = A^T + B^T$ usando as matrizes A e B do Exercício 2.1.

2.3. Calcular os autovalores das matrizes dadas abaixo, verificar que

$$\text{traço}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ e } \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

e observar que os autovalores $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

2.4. Dado o vetor $x = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]^T$, calcular as normas
a) $\|x\|_1$.
b) $\|x\|_2$.
c) $\|x\|_\infty$.

2.5. Calcular as normas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 8 & -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) $\|A\|_1$.
b) $\|A\|_\infty$.
c) $\|A\|_F$.

Seção 2.2

2.6. Resolver o sistema triangular inferior por meio das substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2.7. Calcular a solução do sistema triangular superior utilizando as substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

2.8. Achar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.9. Implementar, em qualquer linguagem de programação, o algoritmo de substituições sucessivas mostrado na Figura 2.3.

2.10. Implementar, em uma linguagem de programação, o algoritmo de substituições retroativas apresentado na Figura 2.4.

Seção 2.3

Resolver os sistemas abaixo pelo método de eliminação de Gauss, com a estratégia indicada e usando 3 casas decimais; verificar também a unicidade e exatidão da solução.

2.11. Sem pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 14 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 50 \end{bmatrix}.$$