tadores. Além disso, foi usado na programação apenas um subconjunto básico de comandos para que um maior número de pessoas possa entendê-lo e utilizá-lo.

O texto presta-se também a um curso que utilize, como instrumento de cálculo, uma minicalculadora, programável ou não.

Queremos registrar aqui os nossos agradecimentos aos colegas Carlos Alberto Gonçalves, Elias Antonio Jorge e Pedro Américo de Almeida Magalhães, professores do DCC/ICEx/UFMG, que utilizaram a versão preliminar deste trabalho, apresentando valiosas sugestões; ao Departamento de Ciência da Computação da UFMG que nos propiciou o clima adequado à execução deste projeto e, em particular, aos professores Ivan Moura Campos e Roberto da Silva Bigonha, nossos incentivadores; aos monitores Ana Maria de Paula, Paulo Vicente da Silva Guimarães e Pedro Fernandes Tavares, excelentes auxiliares na parte de testes computacionais e resolução de exercícios; a Mariza Soares de Almeida e Ruth Maria Leão Mendes que datilografaram os originais; aos nossos alunos de Cálculo Numérico do ICEx com os quais testamos a versão preliminar.

Esperamos que o livro possa ser útil a professores e alunos e quaisquer sugestões que visem o aprimoramento deste trabalho em edições vindouras serão bem aceitas.

*Os autores*



# Capítulo 1

# Erros

## 1.1. INTRODUÇÃO

A obtenção de uma solução numérica para um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de limites razoáveis. Esta afirmação é verdadeira mesmo quando se aplica um método adequado e os cálculos são efetuados de uma maneira correta.

Esta diferença é chamada de erro e é inerente ao processo, não podendo, em muitos dos casos, ser evitada.

Este capítulo foi escrito com o objetivo de fornecer ao usuário de métodos numéricos noções sobre as fontes de erros, para que ele possa saber como controlá-los ou, idealmente, evitá-los.

Para facilitar a apresentação das fontes de erros, o processo de solução de um problema físico, por meio da aplicação de métodos numéricos, é representado abaixo de uma forma geral.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{PROBLEMA}\\\text{FÍSICO}\end{array}} \xrightarrow{\text{MODELAGEM}} \boxed{\begin{array}{c}\text{MODELO}\\\text{MATEMÁTICO}\end{array}} \xrightarrow{\text{RESOLUÇÃO}} \boxed{\text{SOLUÇÃO}}$$

Duas fases podem ser identificadas no diagrama da página anterior:

a) MODELAGEM – é a fase de obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do sistema físico em questão.

b) RESOLUÇÃO – é a fase de obtenção da solução do modelo matemático através da aplicação de métodos numéricos.

## 1.2. ERROS NA FASE DE MODELAGEM

Ao se tentar representar um fenômeno do mundo físico por meio de um modelo matemático, raramente se tem uma descrição correta deste fenômeno. Normalmente, são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático com o qual se possa trabalhar.

Pode-se observar estas simplificações nas Leis de Mecânica que são ensinadas no 2º grau.

**Exemplo 1.1**

Para o estudo do movimento de um corpo sujeito a uma aceleração constante, tem-se a seguinte equação:

$$d = d_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad (1.1)$$

onde:

$d$ – distância percorrida
$d_0$ – distância inicial
$v_0$ – velocidade inicial
$t$ – tempo
$a$ – aceleração

Supondo-se que um engenheiro queira determinar a altura de um edifício e que para isso disponha apenas de uma bolinha de metal, um cronômetro e a fórmula acima, ele sobe então ao topo do edifício e mede o tempo que a bolinha gasta para tocar o solo, ou seja, 3 segundos.

Levando este valor à equação (1.1), obtém-se:

$$d = 0 + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 3^2$$

$$d = 44{,}1 \text{ m}$$

Este resultado é confiável?

É bem provável que não, pois no modelo matemático não foram consideradas outras forças como, por exemplo, a resistência do ar, a velocidade do vento etc.



Além destas, existe um outro fator que tem muita influência: a precisão da leitura do cronômetro, pois para uma pequena variação no tempo medido existe uma grande variação na altura do edifício. Se o tempo medido fosse 3,5 segundos ao invés de 3 segundos, a altura do edifício seria de 60 metros. Em outras palavras, para uma variação de 16,7% no valor lido no cronômetro, a altura calculada apresenta uma variação de 36%.

Com este exemplo pode-se notar a grande influência que o modelo matemático e a precisão dos dados obtidos exercem sobre a confiabilidade da resposta conseguida.

Será visto, a seguir, um outro exemplo para melhor mostrar essa influência.

**Exemplo 1.2**

A variação no comprimento de uma barra de metal sujeita a uma certa variação de temperatura é dada pela seguinte fórmula:

$$\Delta\ell = \ell_0 (\alpha t + \beta t^2) \qquad (1.2)$$

onde:

$\Delta\ell$ – variação do comprimento
$\ell_0$ – comprimento inicial
$t$ – temperatura
$\alpha$ e $\beta$ – constantes específicas para cada metal

Supondo-se que um físico queira determinar a variação no comprimento de uma barra de metal quando sujeita a uma variação de temperatura de 10°C e sabendo-se que

$$\ell_0 = 1 \text{ m}$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}001253 \\ \beta = 0{,}000068 \end{array}\right\} \text{obtidos experimentalmente}$$

basta que se substituam estes valores na equação (1.2), ou seja:

$$\Delta\ell = 1 \cdot (0{,}001253 \cdot 10 + 0{,}000068 \cdot 10^2)$$

$$\Delta\ell = 0{,}019330$$

Entretanto, como os valores de $\alpha$ e $\beta$ foram obtidos experimentalmente com a precisão da ordem de $10^{-6}$, tem-se que:

$$0{,}001252 < \alpha < 0{,}001254 \quad \text{e}$$

$$0{,}000067 < \beta < 0{,}000069$$

então:

$\Delta\ell > 1 \cdot (0{,}001252 \cdot 10 + 0{,}000067 \cdot 10^2)$

$\Delta\ell < 1 \cdot (0{,}001254 \cdot 10 + 0{,}000069 \cdot 10^2)$

logo:

$0{,}019220 < \Delta\ell < 0{,}019440$

ou, ainda,

$\Delta\ell = 0{,}0193 \pm 10^{-4}$

Como se pode notar, uma imprecisão na sexta casa decimal de $\alpha$ e $\beta$ implicou uma imprecisão na quarta casa decimal de $\Delta\ell$.

Dependendo do instrumento que o físico utilize para medir a variação do comprimento, esta imprecisão não será notada e, para ele, o resultado será exato.

Deve-se ter sempre em mente que a precisão do resultado obtido não é só função do modelo matemático adotado, mas também da precisão dos dados de entrada.

## 1.3. ERROS NA FASE DE RESOLUÇÃO

Para a resolução de modelos matemáticos, muitas vezes torna-se necessária a utilização de instrumentos de cálculo que necessitam, para seu funcionamento, que sejam feitas certas aproximações. Tais aproximações podem gerar erros que serão apresentados a seguir, após uma pequena revisão sobre mudança de base.

### 1.3.1. Conversão de Bases

Um número na base 2 pode ser escrito como:

$$a_m 2^m + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \ldots + a_n 2^n$$

ou ainda,

$$\sum_{i=n}^{m} = a_i \cdot 2^i$$



onde:

$a_i$ — é 0 ou 1

$n, m$ — números inteiros, com $n \leqslant 0$ e $m \geqslant 0$

Para mudar de base 2 para base 10, basta multiplicar o dígito binário por uma potência de 2 adequada.

**Exemplo 1.3**

$$\begin{aligned} 1011_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= 11_{10} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.4**

$$\begin{aligned} 10{,}1_2 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} \\ &= 2 + 0 + 0{,}5 \\ &= 2{,}5_{10} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5**

$$\begin{aligned} 11{,}01_2 &= 1 + 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 2 + 1 + 0{,}25 \\ &= 3{,}25_{10} \end{aligned}$$

Para converter um número da base 10 para a base 2, tem-se que aplicar um processo para a parte inteira e um outro para a parte fracionária.

Para transformar um número inteiro na base 10 para base 2 utiliza-se o método das divisões sucessivas, que consiste em dividir o número por 2, a seguir divide-se por 2 o quociente encontrado e assim o processo é repetido até que o último quociente seja igual a 1. O número binário será, então, formado pela concatenação do último quociente com os restos das divisões lidos em sentido inverso ao que foram obtidos, ou seja,

$$\begin{array}{llllll} N & \underline{|\,2} & & & & \\ r_1 & q_1 & \underline{|\,2} & & & \\ & r_2 & q_2 & \underline{|\,2} & & \\ & & r_3 & q_3 \ldots & q_{n-1} & \underline{|\,2} \\ & & & & r_{n-1} & 1 \end{array}$$

$N_{10} = 1 r_{n-1} \ldots r_3 r_2 r_1$

**Exemplo 1.6**

$$\begin{array}{lllll}
18 & \underline{|2} & & & \\
0 & 9 & \underline{|2} & & \\
 & 1 & 4 & \underline{|2} & \\
 & & 0 & 2 & \underline{|2} \\
 & & & 0 & 1
\end{array}$$

$18_{10} = 10010_2$

**Exemplo 1.7**

$$\begin{array}{llll}
11 & \underline{|2} & & \\
1 & 5 & \underline{|2} & \\
 & 1 & 2 & \underline{|2} \\
 & & 0 & 1
\end{array}$$

$11_{10} = 1011_2$

Para transformar um número fracionário na base 10 para base 2, utiliza-se o método das multiplicações sucessivas, que consiste em:

a) multiplicar o número fracionário por 2;

b) deste resultado, a parte inteira será o primeiro dígito do número na base 2 e a parte fracionária é novamente multiplicada por 2. O processo é repetido até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero.

**Exemplo 1.8**

$$\begin{array}{rrrr}
0{,}1875 & 0{,}375 & 0{,}75 & 0{,}50 \\
\underline{\times 2} & \underline{\times 2} & \underline{\times 2} & \underline{\times 2} \\
0{,}3750 & 0{,}750 & 1{,}50 & 1{,}00
\end{array}$$

$0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2$

**Exemplo 1.9**

$$\begin{array}{rrrrr}
0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}6 \\
\underline{\times 2} & \underline{\times 2} & \underline{\times 2} & \underline{\times 2} & \underline{\times 2} \\
1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}6 & 1{,}2
\end{array}$$

... os produtos estão começando a se repetir

$0{,}6_{10} = 0{,}1001\ldots_2$



**Exemplo 1.10**

$13{,}25_{10} = 13_{10} + 0{,}25_{10}$

$$\begin{array}{llll}
13 & \underline{|2} & & \\
1 & 6 & \underline{|2} & \\
 & 0 & 3 & \underline{|2} \\
 & & 1 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
0{,}25 & 0{,}50 \\
\underline{\times 2} & \underline{\times 2} \\
0{,}50 & 1{,}00
\end{array}$$

$13_{10} = 1101_2$ $\qquad$ $0{,}25_{10} = 0{,}01_2$

$13{,}25_{10} = 1101_2 + 0{,}01_2 = 1101{,}01_2$

## 1.3.2. Erros de Arredondamento

Um número é representado, internamente, na máquina de calcular ou no computador digital através de uma seqüência de impulsos elétricos que indicam dois estados: 0 ou 1, ou seja, os números são representados na base 2 ou binária.

De uma maneira geral, um número $x$ é representado na base $\beta$ por:

$$x = \pm \left[ \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \cdots + \frac{d_t}{\beta^t} \right] \cdot \beta^{exp}$$

onde:

$d_i$ – são números inteiros contidos no intervalo

$$0 \leqslant d_i \leqslant \beta - 1 \,;\, i = 1, 2, \ldots, t$$

$exp$ – representa o expoente de $\beta$ e assume valores entre

$$I \leqslant exp \leqslant S$$

$I, S$ – limite inferior e limite superior, respectivamente, para a variação do expoente

$\left[ \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t} \right]$ é chamada de mantissa e é a parte do número que representa seus dígitos significativos e $t$ é o número de dígitos significativos do sistema de representação, comumente chamado de precisão da máquina.

**Exemplo 1.11**

No sistema de base $\beta = 10$, tem-se:

$$0{,}345_{10} = \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3}\right) \cdot 10^0$$

$$31{,}415_{10} = 0{,}31415 \cdot 10^2 = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{5}{10^5}\right) \cdot 10^2$$

Os números assim representados estão normalizados, isto é, a mantissa é um valor entre 0 e 1.

**Exemplo 1.12**

No sistema binário, tem-se:

$$5_{10} = 101_2 = 0{,}101 \cdot 2^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \cdot 2^3$$

$$4_{10} = 100_2 = 0{,}1 \cdot 2^3 = \frac{1}{2} \cdot 2^3$$

**Exemplo 1.13**

Numa máquina de calcular cujo sistema de representação utilizado tenha $\beta = 2$, $t = 10$, $I = -15$ e $S = 15$, o número 25 na base decimal é, assim representado:

$$25_{10} = 11001_2 = 0{,}11001 \cdot 2^5 = 0{,}11001 \cdot 2^{101}$$

$$\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \cdot 2^{101}$$

ou, de uma forma mais compacta:

| MANTISSA | EXPOENTE |
|---|---|
| 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 | 1 0 1 |

Cada dígito é chamado de bit, portanto, nesta máquina são utilizados 10 bits para a mantissa, 4 bits para o expoente e mais um bit para o sinal da mantissa (se bit $= 0$ positivo, se bit $= 1$ negativo) e um bit para o sinal do expoente, resultando, no total, 16 bits, que são assim representados:



$25_{10} =$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

VALOR DA MANTISSA

VALOR DO EXPOENTE

SINAL DA MANTISSA

SINAL DO EXPOENTE

**Exemplo 1.14**

Utilizando a mesma máquina do exemplo anterior, a representação de $3{,}5_{10}$ seria dada por:

$$3{,}5_{10} = 0{,}111 \cdot 2^{10}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Exemplo 1.15**

Ainda utilizando a mesma máquina do exemplo 1.13, o número $-7{,}125_{10}$ seria assim representado:

$$-7{,}125_{10} = -0{,}111001 \cdot 2^{11}$$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

O maior valor representado por esta máquina descrita no exemplo 1.13 seria:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

que, na base decimal, tem o seguinte valor:

$$0{,}1111111111 \cdot 2^{1111} = 32736_{10}$$

E o menor valor seria:

$$-0{,}1111111111 \cdot 2^{1111} = -32736_{10}$$

Logo, os números que podem ser representados nesta máquina estariam contidos no intervalo $[-32736 ; 32736]$.

Nesta máquina, ainda, o valor zero seria representado por:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

O próximo número positivo representado seria:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$0{,}1 \cdot 2^{-15} = 0{,}000015259$

O subseqüente seria:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$0{,}1000000001 \cdot 2^{-15} = 0{,}000015289$

Através desses exemplos pode-se concluir que o conjunto dos números repre sentáveis neste sistema é um subconjunto dos números reais, dentro do interval mostrado anteriormente.

O número de elementos deste conjunto é dado pela fórmula:

$$2(\beta - 1)(S - I + 1)\ \beta^{t-1} + 1$$

ou seja:

$$2 \cdot (2-1) \cdot (15-(-15)+1) \cdot 2^{10-1} + 1 = 31745$$

Estes números não estão igualmente espaçados dentro do intervalo.

Ao se tentar representar números reais por meio deste sistema, certament se incorre nos chamados erros de arredondamento, pois nem todos os números rea têm representação no sistema.

**Exemplo 1.16**

Qual seria a representação de $0{,}00001527_{10}$ ?

Já foi visto anteriormente que os números $0{,}000015259_{10}$ e 0,000015289 são representáveis, mas que não existe entre os dois nenhum outro número represe tável, logo o número 0,00001527 será representado como o número 0,0000152 pois é o valor que tem representação binária mais próxima do valor binário 0,00001527.

Um outro problema que pode surgir ao se representar valores decimais forma binária está ligado ao fato de não haver tal representação finita.



**Exemplo 1.17**

$0{,}1_{10} = 0{,}000110011001100\ldots_2$

O valor decimal 0,1 tem como representação binária um número com infinitos dígitos, logo, ao se representar $0{,}1_{10}$ nesta máquina comete-se um erro, pois:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $= 0{,}099976_{10}$ |

Pode ser mostrado que uma fração racional na base 10 pode ser escrita, exatamente, com um número finito de dígitos binários somente se puder ser escrita como o quociente de dois inteiros $r/s$, onde $s = 2^N$ para um inteiro $N$. Infelizmente, apenas uma pequena parte das frações racionais satisfaz esta condição.

Como ilustração, são apresentados abaixo os sistemas de representação de algumas máquinas.

| Máquina | $\beta$ | $t$ | $I$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| Burroughs 5500 | 8 | 13 | − 51 | 77 |
| Burroughs 6700 | 8 | 13 | − 63 | 63 |
| Hewlett-Packard 45 | 10 | 10 | − 98 | 100 |
| Texas SR-5X | 10 | 12 | − 98 | 100 |
| PDP-11 | 2 | 24 | − 128 | 127 |
| IBM/360 | 16 | 6 | − 64 | 63 |
| IBM/370 | 16 | 14 | − 64 | 63 |
| Quartzil QI 800 | 2 | 24 | − 127 | 127 |

Um parâmetro que é muito utilizado para se avaliar a precisão de um determinado sistema de representação é o número de casas decimais exatas da mantissa e este valor é dado pelo valor decimal do último bit da mantissa, ou seja, o bit de maior significância. Logo:

$$\text{PRECISÃO} \leqslant \frac{1}{\beta^t}$$

**Exemplo 1.18**

Numa máquina com $\beta = 2$ e $t = 10$, a precisão da mantissa é da ordem de $\frac{1}{2^{10}} = 10^{-3}$. Logo, o número de dígitos significativos é 3.

Para concluir este item sobre erros de arredondamento, deve-se ressaltar a importância de se saber o número de dígitos significativos do sistema de representação da máquina que está sendo utilizada para que se tenha noção da precisão do resultado obtido.

**Exemplo 1.19**

Programa para determinação da precisão de uma máquina.

```
C          PROGRAMA EPSILON
C
C          OBJETIVO :
C              DETERMINAR A PRECISAO DA MAQUINA
C
       REAL EPS,EPS1
C          A VARIAVEL EPS IRA' CONTER A PRECISAO DA MAQUINA
       EPS = 1.0
10     CONTINUE
          EPS = EPS / 2.0
          EPS1 = EPS + 1.0
       IF (EPS1.GT.1.0) GO TO 10
       WRITE (6,20) EPS
20     FORMAT('  A MAQUINA ACHA QUE ',E13.5,' VALE ZERO')
       CALL EXIT
       END
```

O programa foi testado no Quartzil (QI 800) e obteve a seguinte resposta:

```
A MAQUINA ACHA QUE     .29802E-07 VALE ZERO
```

Logo, o número de dígitos significativos da Quartzil é sete.

### 1.3.3. Erros de Truncamento

São erros provenientes da utilização de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor e que, por razões práticas, são truncados.

Estes processos infinitos são muito utilizados na avaliação de funções matemáticas, tais como, exponenciação, logaritmos, funções trigonométricas e várias outras que uma máquina pode ter.

**Exemplo 1.20**

Uma máquina poderia calcular a função SENO $(x)$ através do seguinte trecho de programa:

```
      FACT = 1
      SENO = X
      SINAL= 1
      DO 10 I = 3, N, 2
         FACT = FACT*I*(I-1)
         SINAL = -SINAL
         TERMO = SINAL*(X**I)/FACT
         SENO = SENO+TERMO
10    CONTINUE
```



Este trecho de programa gera a seguinte série:

$$\text{SENO} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Para que ao final do trecho do programa se tenha na variável SENO o valor de sen $(x)$, o valor $N$ no comando DO deve ser bem grande, o que tornaria o cálculo ineficiente.

A solução adotada é a de interromper os cálculos quando uma determinada precisão é atingida.

De uma maneira geral, pode-se dizer que o erro de truncamento pode ser diminuído até chegar a ficar da ordem do erro de arredondamento; a partir deste ponto, não faz sentido diminuir-se mais, pois o erro de arredondamento será dominante.

Seguindo este raciocínio, o programa anterior deve ser transformado para:

```
      I = 3
      FACT = 1
      SENO = X
      SINAL= 1
5     CONTINUE
         FACT = FACT*I*(I-1)
         SINAL = -SINAL
         TERMO = SINAL*(X**I)/FACT
         SENO = SENO+TERMO
         I = I+2
      IF(TERMO.GT.PREMAN) GO TO 5
```

onde PREMAN é o valor da precisão da mantissa.

Ao longo deste livro serão vistas mais situações onde aparecem erros de truncamento e como é possível controlá-los.

### 1.3.4. Propagação de Erros

Será mostrado abaixo, através de um exemplo, como os erros descritos anteriormente podem influenciar o desenvolvimento de um cálculo.

**Exemplo 1.21**

Supondo-se que as operações abaixo sejam processadas em uma máquina com 4 dígitos significativos e fazendo-se

$x_1 = 0{,}3491 \cdot 10^4$

$x_2 = 0{,}2345 \cdot 10^0$

tem-se:

$$(x_2 + x_1) - x_1 = (0{,}2345 \cdot 10^0 + 0{,}3491 \cdot 10^4) - 0{,}3491 \cdot 10^4$$
$$= 0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4$$
$$= 0{,}0000$$

$$x_2 + (x_1 - x_1) = 0{,}2345 \cdot 10^0 + (0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4)$$
$$= 0{,}2345 + 0{,}0000$$
$$= 0{,}2345$$

Os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser, pois a adição é uma operação distributiva. A causa desta diferença foi um arredondamento feito na adição $(x_2 + x_1)$, cujo resultado tem 8 dígitos. Como a máquina só armazena 4 dígitos, os menos significativos foram desprezados.

Ao se utilizar máquinas de calcular deve-se estar atento a essas particularidades causadas pelo erro de arredondamento, não só na adição mas também nas outras operações.

**Exemplo 1.22**

A seguir, é apresentado um outro exemplo de como a ordem de execução de operações pode influir na solução obtida.

Para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0{,}0030\,x_1 + 30{,}0000\,x_2 = 5{,}0010 \\ 1{,}0000\,x_1 + 4{,}0000\,x_2 = 1{,}0000 \end{cases}$$

a solução exata é: $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/6$

Multiplicando a 1ª equação por $(-1/0{,}003)$, tem-se:

$$\begin{cases} -1{,}0000x_1 - 10.000{,}0000x_2 = -1.667{,}0000 \\ 1{,}0000x_1 + 4{,}0000x_2 = 1{,}0000 \end{cases}$$

somando a segunda equação à primeira, elimina-se $x_1$

$$-9.996{,}0000x_2 = -1.666{,}0000$$
$$x_2 = \frac{-1.666{,}0000}{-9.996{,}0000} = 0{,}1667$$

levando este valor à primeira equação, tem-se:



$$-1{,}0000x_1 - 10.000{,}000\,(0{,}1667) = -1.667{,}0000$$
$$x_1 = 0{,}0000$$

Este valor encontrado para $x_1$ é função da diferença de ordem de grandeza dos coeficientes de $x_1$ e $x_2$ na 1ª equação.

Se a ordem das equações é invertida, tem-se:

$$\begin{cases} 1{,}0000\,x_1 + 4{,}0000\,x_2 = 1{,}0000 \\ 0{,}0030\,x_1 + 30{,}0000\,x_2 = 5{,}0010 \end{cases}$$

multiplicando-se a 1ª equação por $-0{,}0030$, vem:

$$\begin{cases} -0{,}0030x_1 - 0{,}0120x_2 = -0{,}0030 \\ 0{,}0030x_1 + 30{,}0000x_2 = 5{,}0010 \end{cases}$$

somando-se a 1ª com a 2ª equação:

$$29{,}9880x_2 = 4{,}9980$$
$$x_2 = 0{,}1667$$

levando, à 1ª equação, o valor de $x_2$, encontra-se:

$$-0{,}0030x_1 - 0{,}0120\,(0{,}1667) = -0{,}0030$$
$$x_1 = 0{,}3333$$