

ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

2.1 INTRODUÇÃO

Nas mais diversas áreas das ciências exatas ocorrem, freqüentemente, situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo $f(x) = 0$.

Consideremos, por exemplo, o seguinte circuito:

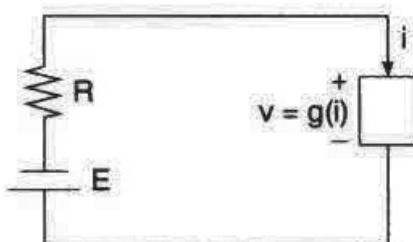


Figura 2.1

A figura acima representa um dispositivo não linear, isto é, a função g que dá a tensão em função da corrente é não linear. Dados E e R e supondo conhecida a característica do dispositivo $v = g(i)$, se quisermos saber a corrente que vai fluir no circuito temos de resolver a equação $E - Ri - g(i) = 0$ (pela lei de Kirchoff). Na prática, $g(i)$ tem o aspecto de um polinômio do terceiro grau.

Queremos então resolver a equação $f(i) = E - R_i - g(i) = 0$.

O objetivo deste capítulo é o estudo de métodos numéricos para resolução de equações não lineares como a acima.

Um número real ξ é um *zero da função* $f(x)$ ou uma *raiz da equação* $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$.

Em alguns casos, por exemplo, de equações polinomiais, os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos. Neste capítulo, estaremos interessados somente nos zeros reais de $f(x)$.

Graficamente, os zeros reais são representados pelas abscissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo \overrightarrow{ox} .

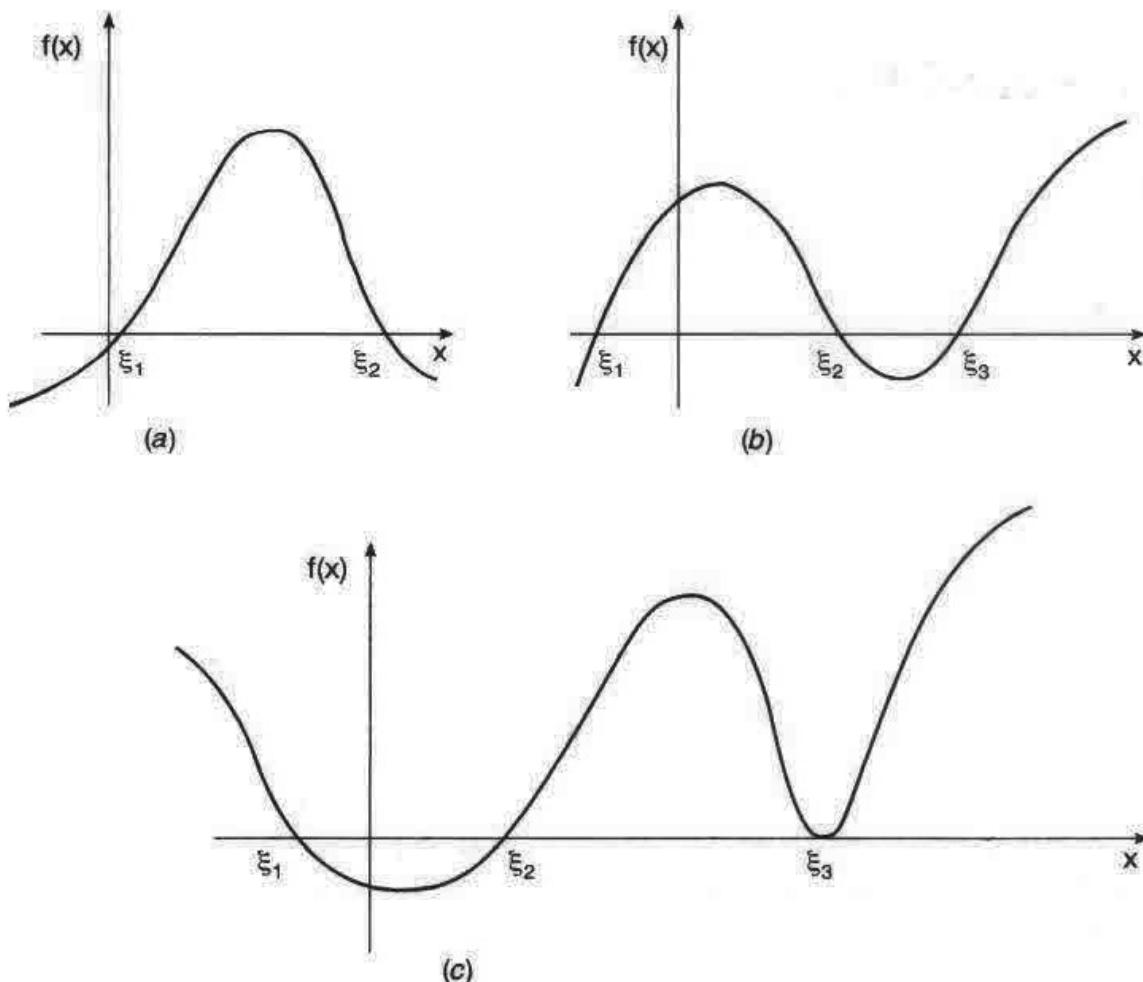


Figura 2.2

Como obter raízes reais de uma equação qualquer?

Sabemos que, para algumas equações, como por exemplo as equações polinomiais de segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes. No entanto, no caso de polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complicadas, é praticamente impossível se achar os zeros exatamente. Por isso, temos de nos contentar em encontrar apenas aproximações para esses zeros; mas isto não é uma limitação muito séria, pois, com os métodos que apresentaremos, conseguimos, a menos de limitações de máquinas, encontrar os zeros de uma função com qualquer precisão prefixada.

A idéia central destes métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refiná-la através de um processo iterativo.

Por isso, os métodos constam de duas fases:

FASE I: Localização ou isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;

FASE II: Refinamento, que consiste em, escolhidas aproximações iniciais no intervalo encontrado na Fase I, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão e prefixada.

2.2 FASE I: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

Nesta fase é feita uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$. É importante ressaltar que o sucesso da Fase II depende fortemente da precisão desta análise.

Na análise teórica usamos freqüentemente o teorema:

TEOREMA 1

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

GRAFICAMENTE

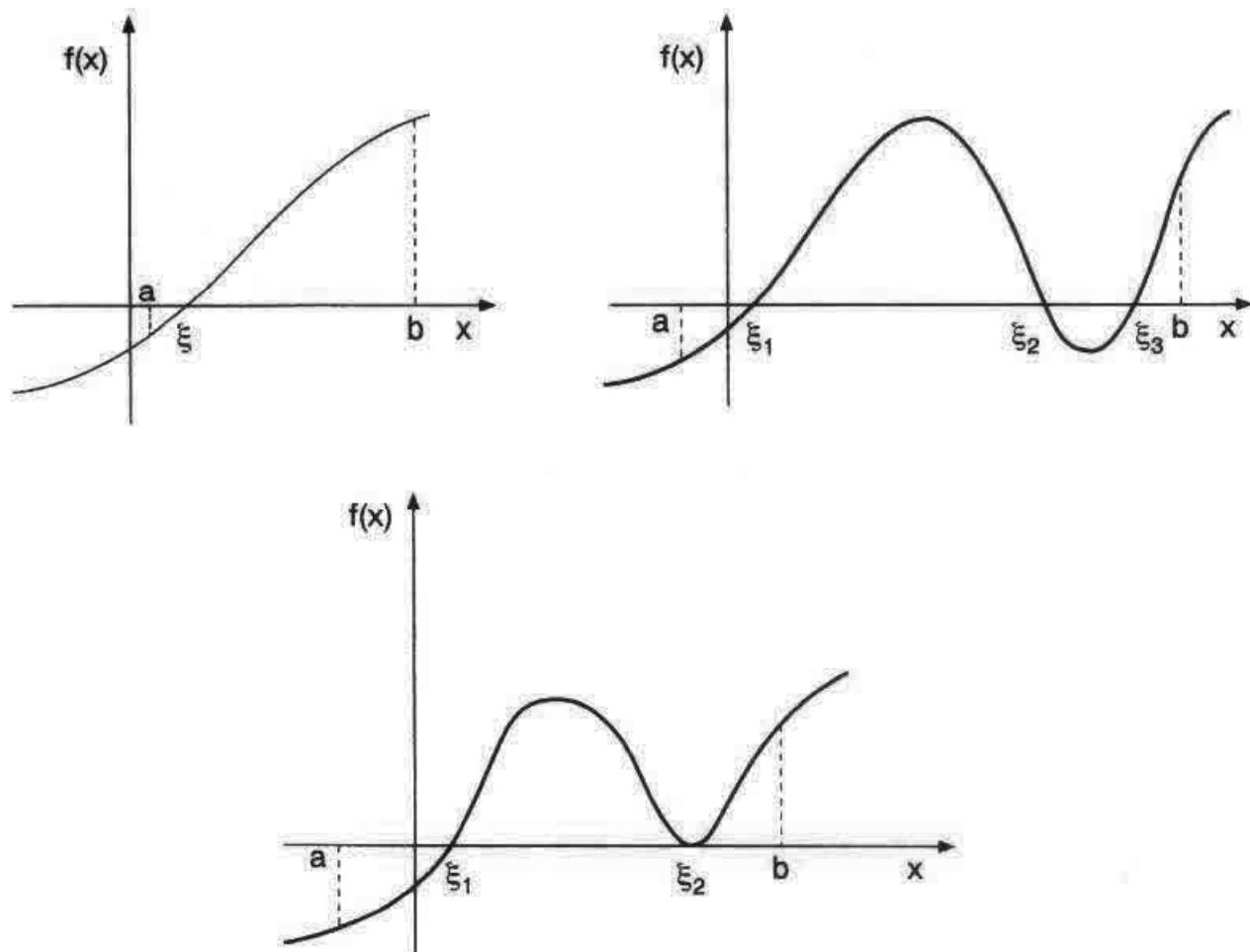
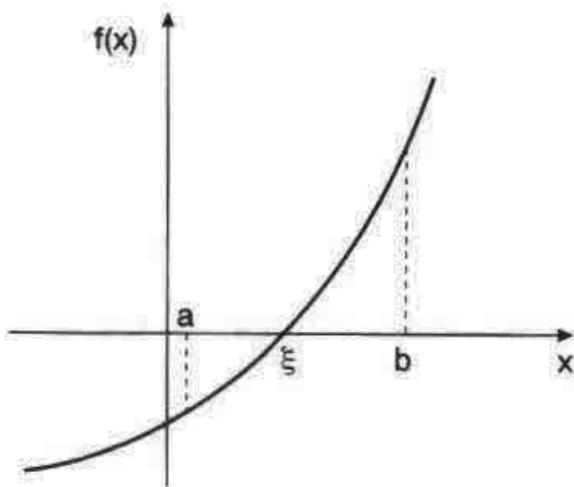


Figura 2.3

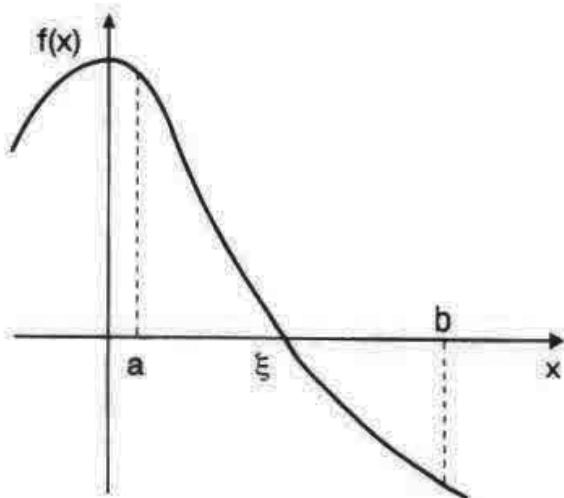
Conforme vemos, a interpretação gráfica deste teorema é extremamente simples (e uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11]).

OBSERVAÇÃO

Sob as hipóteses do teorema anterior, se $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a, b) , então este intervalo contém um único zero de $f(x)$.

GRAFICAMENTE

$$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$$



$$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$$

Figura 2.4

Uma forma de se isolar as raízes de $f(x)$ usando os resultados anteriores é tabelar $f(x)$ para vários valores de x e analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e o sinal da derivada nos intervalos em que $f(x)$ mudou de sinal.

Exemplo 1

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Construindo uma tabela de valores para $f(x)$ e considerando apenas os sinais, temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

Sabendo que $f(x)$ é contínua para qualquer x real e observando as variações de sinal, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1 = [-5, -3]$, $I_2 = [0, 1]$ e $I_3 = [2, 3]$ contém pelo menos um zero de $f(x)$.

Como $f(x)$ é polinômio de grau 3, podemos afirmar que cada intervalo contém um único zero de $f(x)$; assim, localizamos todas as raízes de $f(x) = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

Temos que $D(f) = \mathbb{R}^+$ ($D(f) \equiv$ domínio de $f(x)$)

Construindo uma tabela de valores com o sinal de $f(x)$ para determinados valores de x temos:

x	0	1	2	3	...
$f(x)$	-	-	+	+	...

Analizando a tabela, vemos que $f(x)$ admite pelo menos um zero no intervalo $(1, 2)$.

Para se saber se este zero é único neste intervalo, podemos usar a observação anterior, isto é, analisar o sinal de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Assim, podemos concluir que $f(x)$ admite um único zero em todo seu domínio de definição e este zero está no intervalo $(1, 2)$.

OBSERVAÇÃO

Se $f(a)f(b) > 0$ então podemos ter várias situações no intervalo $[a, b]$, conforme mostram os gráficos:

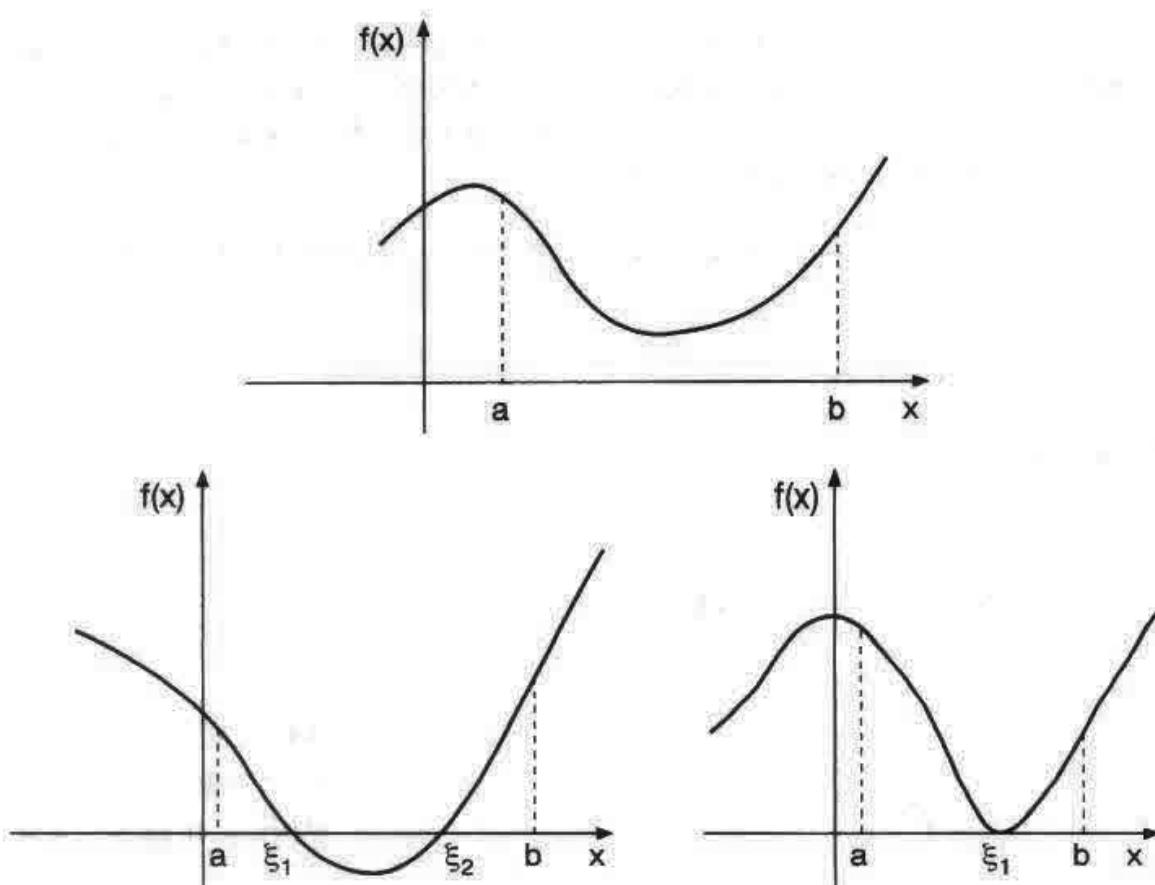


Figura 2.5

A análise gráfica da função $f(x)$ ou da equação $f(x) = 0$ é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz.

Para tanto, é suficiente utilizar um dos seguintes processos:

- i) esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo \overrightarrow{ox} ;
- ii) a partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$;
- iii) usar os programas que traçam gráficos de funções, disponíveis em algumas calculadoras ou softwares matemáticos.

O esboço do gráfico de uma função requer um estudo detalhado do comportamento desta função, que envolve basicamente os itens: domínio da função; pontos de descontinuidade; intervalos de crescimento e decrescimento; pontos de máximo e mínimo; concavidade; pontos de inflexão e assíntotas da função.

Este esquema geral de análise de funções e construção de gráficos é encontrado em [16] e [20].

Exemplo 2

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Usando o processo (i), temos:

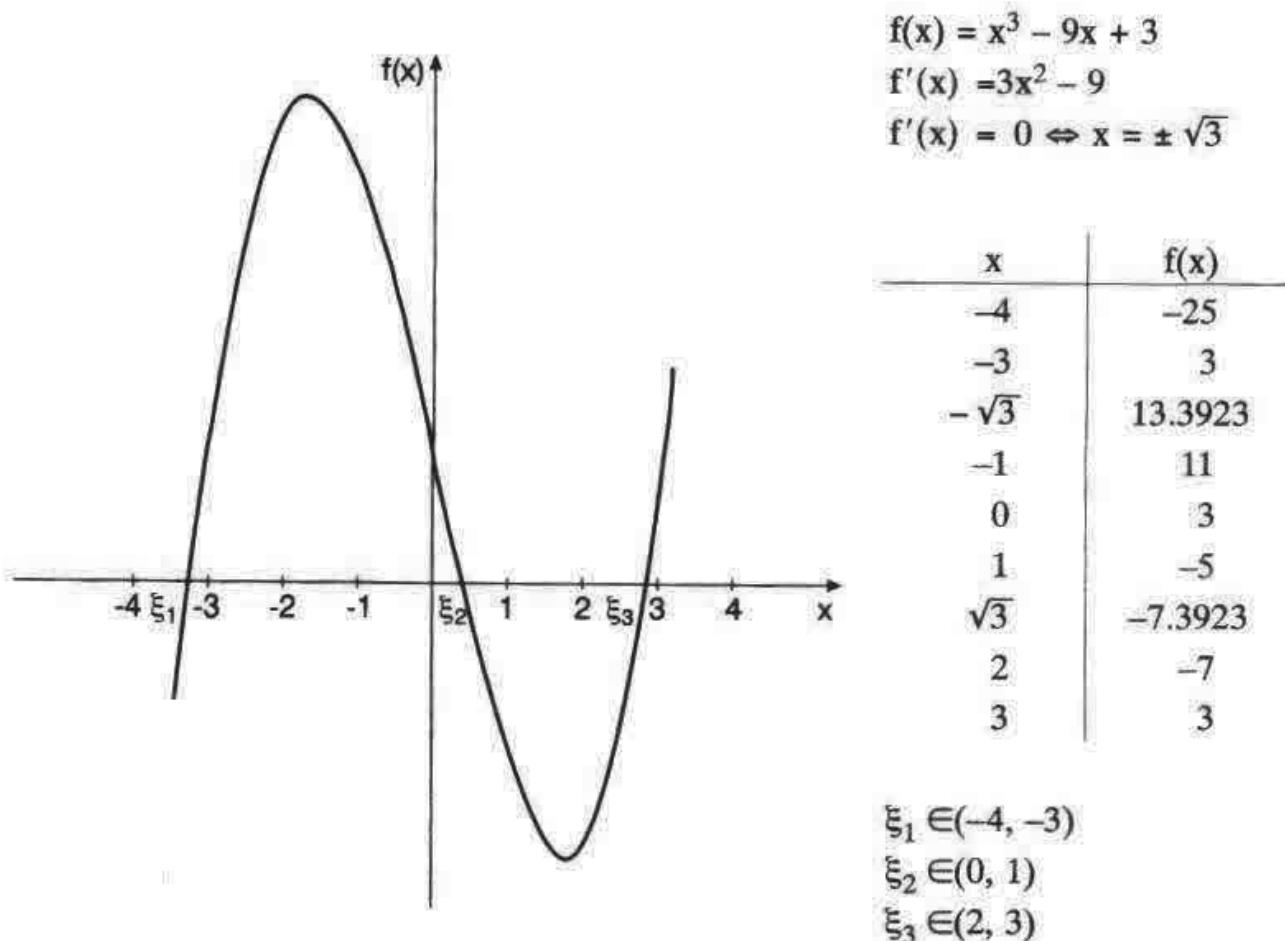
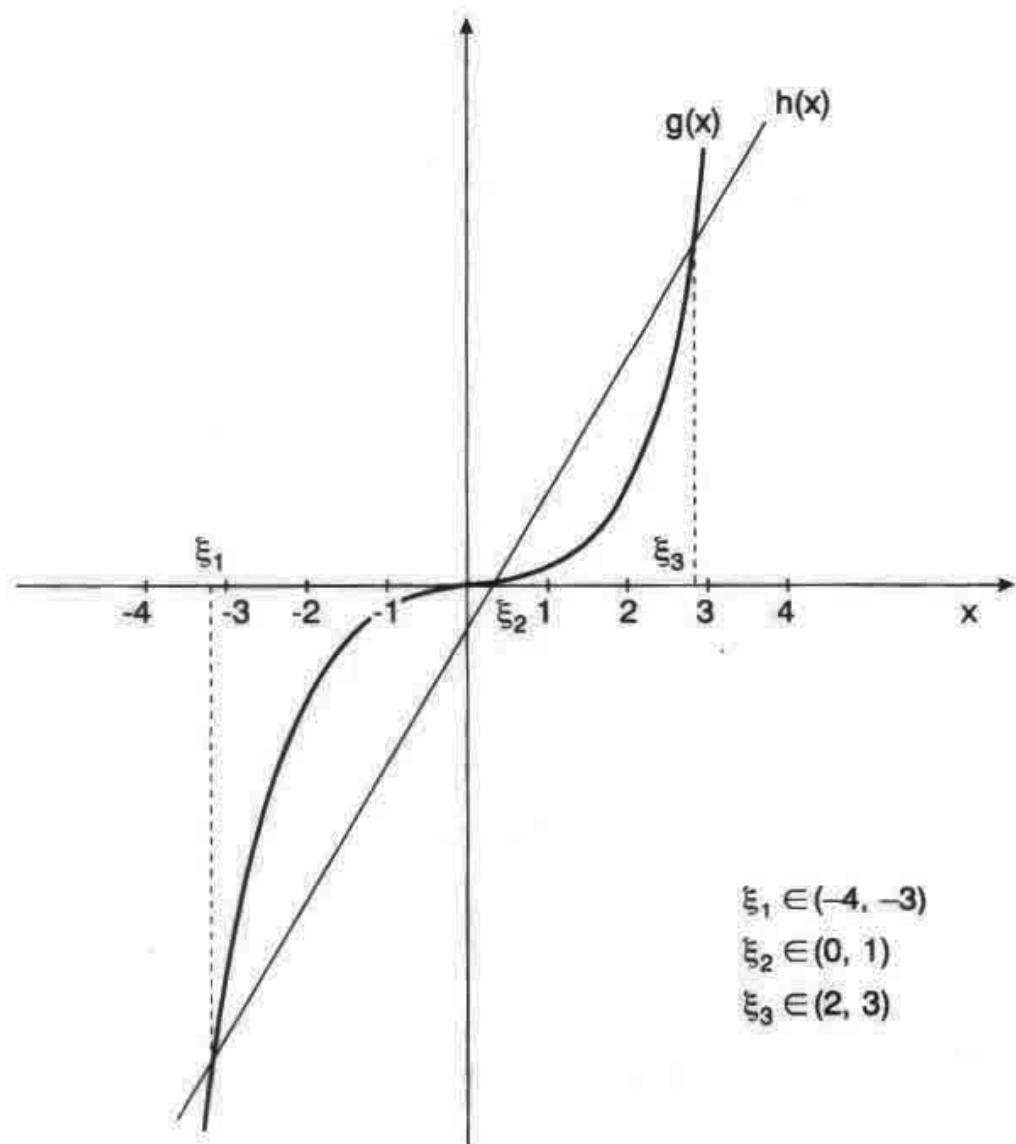


Figura 2.6

E, usando o processo (ii): da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, podemos obter a equação equivalente $x^3 = 9x - 3$. Neste caso, temos $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$. Assim,



$$\begin{aligned}\xi_1 &\in (-4, -3) \\ \xi_2 &\in (0, 1) \\ \xi_3 &\in (2, 3)\end{aligned}$$

Figura 2.7

$$b) \quad f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$$

Neste caso, é mais conveniente usar o processo (ii):

$$\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5e^{-x} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x} \text{ e } h(x) = 5e^{-x}$$

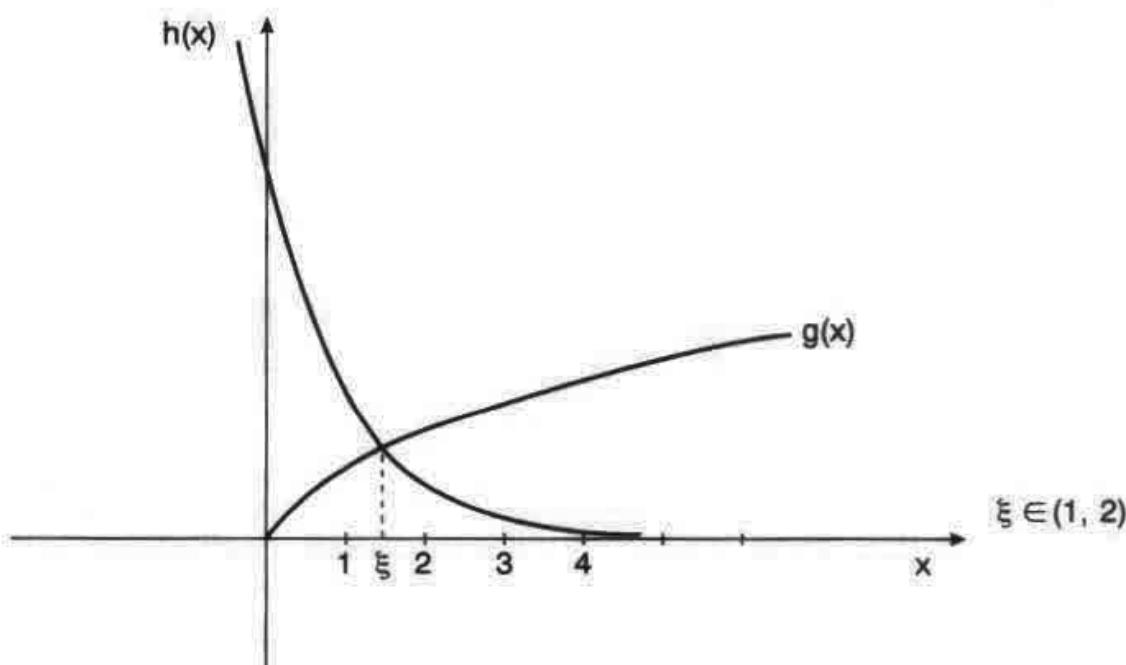


Figura 2.8

$$c) \quad f(x) = x \log(x) - 1$$

Usando novamente o processo (ii) temos que

$$x \log(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = \log(x) \text{ e } h(x) = \frac{1}{x}$$

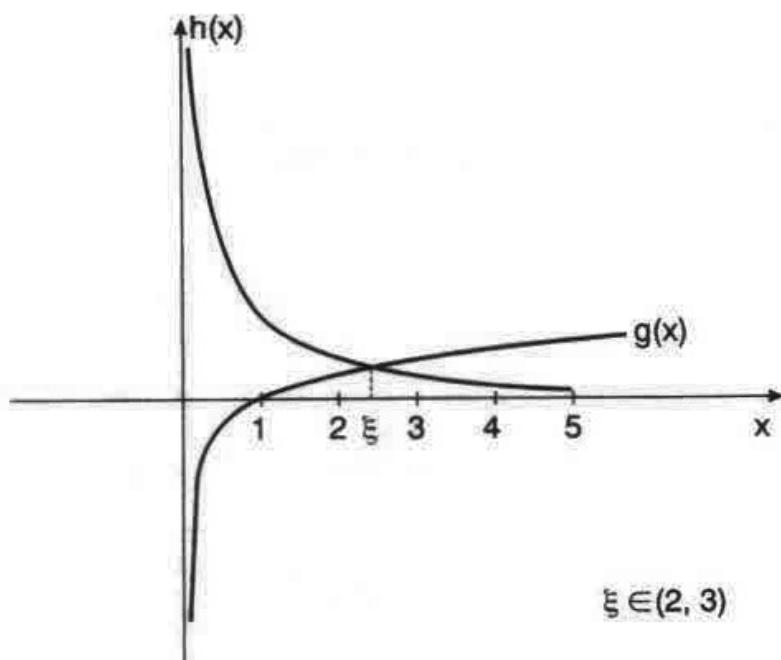


Figura 2.9

2.3 FASE II: REFINAMENTO

Estudaremos neste item vários métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua o refinamento é que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um *método iterativo* consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.

A execução de um ciclo recebe o nome de *iteração*. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.

Observamos que os métodos iterativos para obter zeros de funções fornecem apenas uma aproximação para a solução exata.

Os métodos iterativos para refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num diagrama de fluxo:

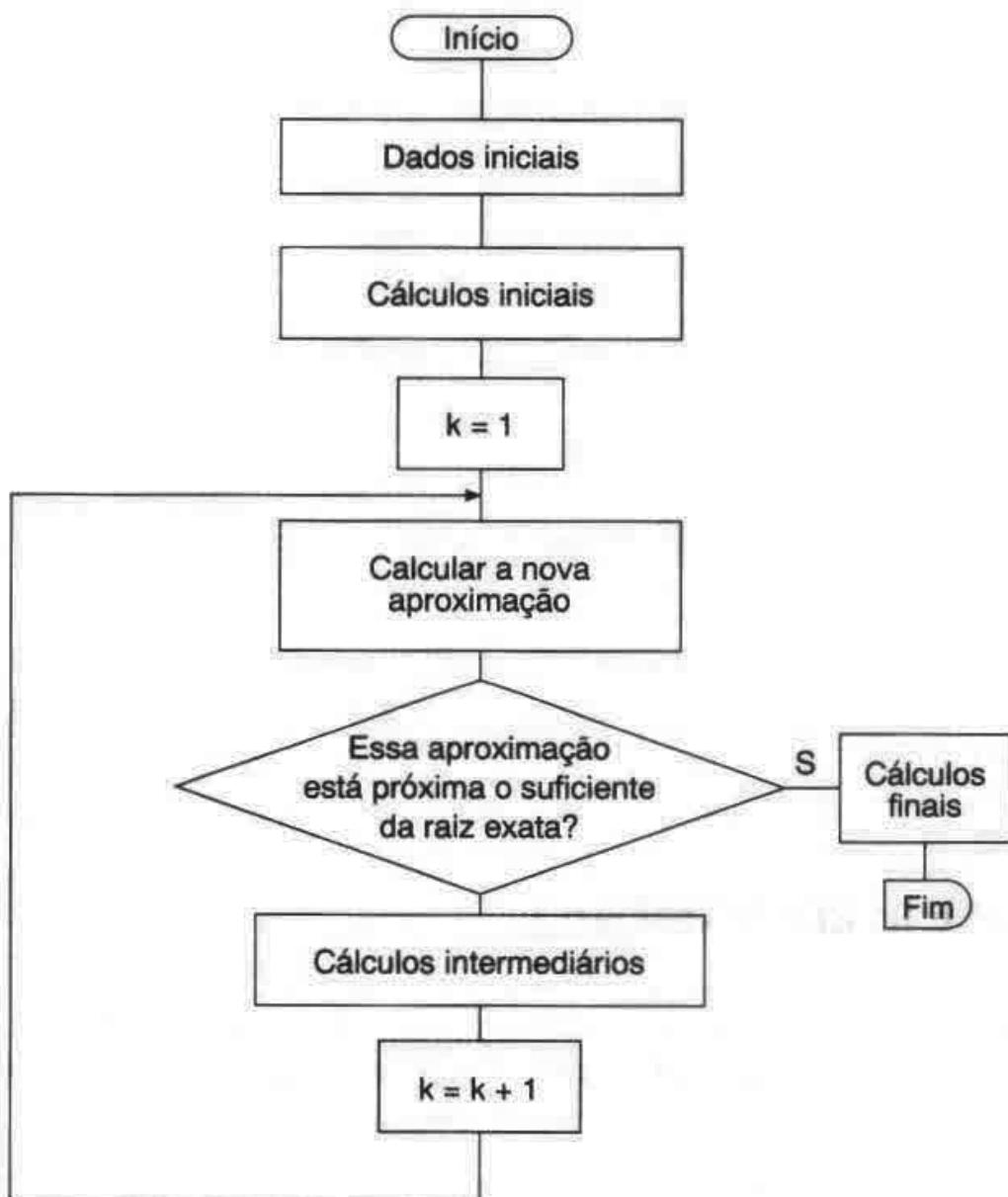


Figura 2.10

2.3.1 CRITÉRIOS DE PARADA

Pelo diagrama de fluxo verifica-se que todos os métodos iterativos para obter zeros de função efetuam um teste do tipo:

x_k está suficientemente próximo da raiz exata?

Que tipo de teste efetuar para se verificar se x_k está suficientemente próximo da raiz exata? Para isto é preciso entender o significado de raiz aproximada.

Existem duas interpretações para raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado:

\bar{x} é raiz aproximada com precisão ϵ se:

- i) $|\bar{x} - \xi| < \epsilon$ ou
- ii) $|f(\bar{x})| < \epsilon$.

Como efetuar o teste (i) se não conhecemos ξ ?

Uma forma é reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração. Ao se conseguir um intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \xi \in [a, b] \\ \epsilon \\ b - a < \epsilon \end{array} \right\} \text{então } \forall x \in [a, b], |x - \xi| < \epsilon. \text{ Portanto, } \forall x \in [a, b] \text{ pode ser} \\ \text{tomado como } \bar{x}$$

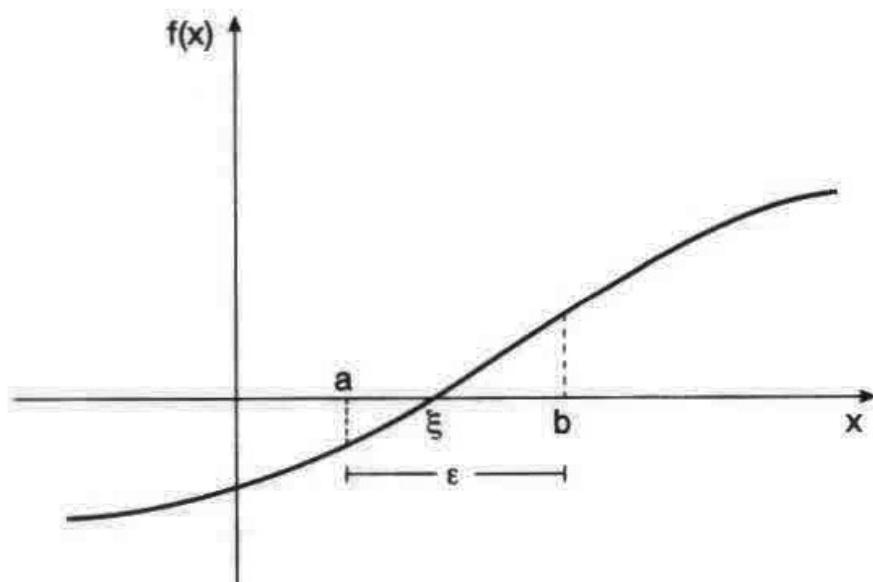


Figura 2.11

Nem sempre é possível ter as exigências (i) e (ii) satisfeitas simultaneamente. Os gráficos a seguir ilustram algumas possibilidades:

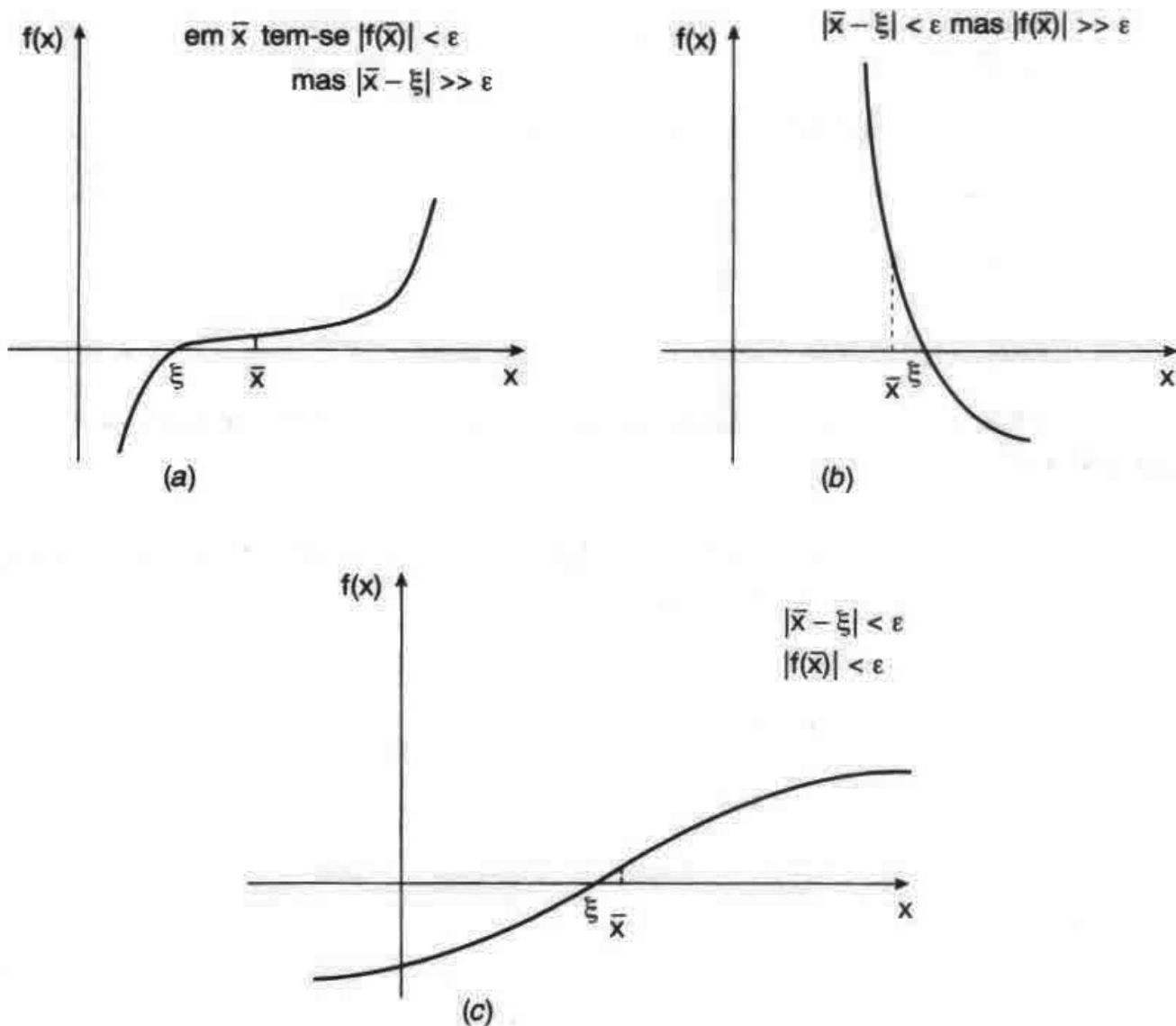


Figura 2.12

Os métodos numéricos são desenvolvidos de forma a satisfazer pelo menos um dos critérios.

Observamos que, dependendo da ordem de grandeza dos números envolvidos, é aconselhável usar teste do erro relativo, como por exemplo, considerar \bar{x} como aproximação de ξ se $\frac{|f(\bar{x})|}{L} < \varepsilon$ onde $L = |f(x)|$ para algum x escolhido numa vizinhança de ξ .

Em programas computacionais, além do teste de parada usado para cada método, deve-se ter o cuidado de estipular um *número máximo de iterações* para se evitar que o programa entre em “looping” devido a erros no próprio programa ou à inadequação do método usado para o problema em questão.

2.3.2 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SE OBTER ZEROS REAIS DE FUNÇÕES

I. MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

Vamos supor, para simplificar, que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$.

O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida: $(b - a) < \epsilon$, usando para isto a sucessiva divisão de $[a, b]$ ao meio.

GRAFICAMENTE

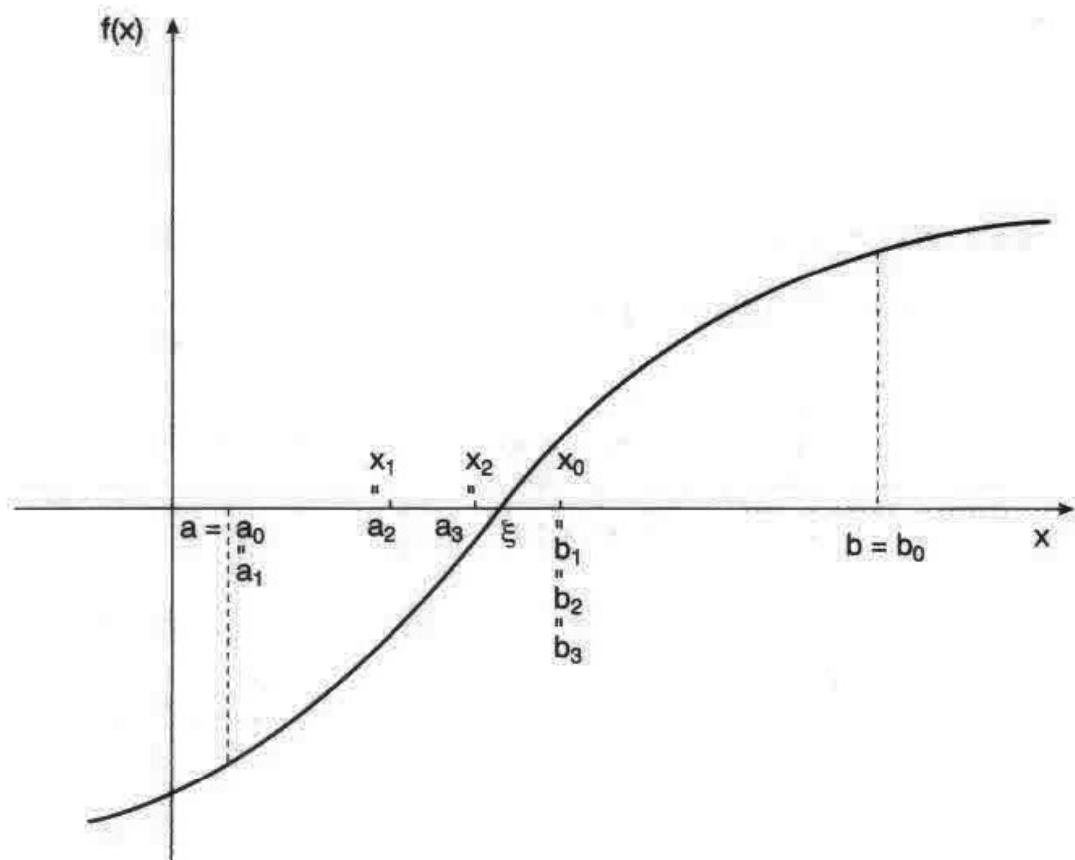


Figura 2.13

As iterações são realizadas da seguinte forma:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{array} \right.$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{array} \right.$$

• • • •

Exemplo 3

Já vimos que a função $f(x) = x \log(x) - 1$ tem um zero em $(2, 3)$.

O método da bissecção aplicado a esta função com $[2, 3]$ como intervalo inicial fornece:

$$x_0 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(2) = -0.3979 < 0 \\ f(3) = 0.4314 > 0 \\ f(2.5) = -5.15 \times 10^{-3} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (2.5, 3) \\ a_1 = x_0 = 2.5 \\ b_1 = b_0 = 3 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{2.5 + 3}{2} = 2.75 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(2.5) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f(2.75) = 0.2082 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (2.5, 2.75) \\ a_2 = a_1 = 2.5 \\ b_2 = x_1 = 2.75 \end{array} \right.$$

• • •

ALGORITMO 1

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

- 1) Dados iniciais:
 - a) intervalo inicial $[a, b]$
 - b) precisão ε
- 2) Se $(b - a) < \varepsilon$, então escolha para \bar{x} qualquer $x \in [a, b]$. FIM.
- 3) $k = 1$
- 4) $M = f(a)$
- 5) $x = \frac{a + b}{2}$
- 6) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 8.
- 7) $b = x$
- 8) Se $(b - a) < \varepsilon$, escolha para \bar{x} qualquer $x \in [a, b]$. FIM.
- 9) $k = k + 1$. Volte para o passo 5.

Terminado o processo, teremos um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz (e tal que $(b - a) < \varepsilon$) e uma aproximação \bar{x} para a raiz exata.

Exemplo 4

$f(x) = x^3 - 9x + 3$	$I = [0, 1]$	$\epsilon = 10^{-3}$	
Iteração	x	f(x)	b - a
1	.5	-1.375	.5
2	.25	.765625	.25
3	.375	-.322265625	.125
4	.3125	.218017578	.0625
5	.34375	-.0531311035	.03125
6	.328125	.0822029114	.015625
7	.3359375	.0144743919	7.8125×10^{-3}
8	.33984375	-.0193439126	3.90625×10^{-3}
9	.337890625	$-2.43862718 \times 10^{-3}$	1.953125×10^{-3}
10	.336914063	$6.01691846 \times 10^{-3}$	9.765625×10^{-4}

Então $\bar{x} = .337402344$ em dez iterações. Observe que neste exemplo escolhemos $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$.

ESTUDO DA CONVERGÊNCIA

É bastante intuitivo perceber que se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, o método da bissecção vai gerar uma seqüência $\{x_k\}$ que converge para a raiz.

No entanto, a prova analítica da convergência requer algumas considerações. Suponhamos que $[a_0, b_0]$ seja o intervalo inicial e que a raiz ξ seja única no interior desse intervalo. O método da bissecção gera três seqüências:

$\{a_k\}$: não-decrescente e limitada superiormente por b_0 ; então existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = r$$

$\{b_k\}$: não-crescente e limitada inferiormente por a_0 , então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = s$$

$\{x_k\}$: por construção ($x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$), temos $a_k < x_k < b_k, \forall k$.

A amplitude de cada intervalo gerado é a metade da amplitude do intervalo anterior.

$$\text{Assim, } \forall k: b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$\text{Então } \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(b_0 - a_0)}{2^k} = 0.$$

Como $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são convergentes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k. \text{ Então } r = s.$$

Seja $\ell = r = s$ o limite das duas seqüências. Dado que para todo k o ponto x_k pertence ao intervalo (a_k, b_k) , o Cálculo Diferencial e Integral nos garante que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell$$

Resta provar que ℓ é o zero da função, ou seja, $f(\ell) = 0$.

Em cada iteração k temos $f(a_k) f(b_k) < 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) f(b_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k) f(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k) = \\ &= f(r) f(s) = f(\ell) f(\ell) = [f(\ell)]^2 \end{aligned}$$

Assim, $0 \geq [f(\ell)]^2 \geq 0$ donde $f(\ell) = 0$.

Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$ e l é zero da função. Das hipóteses iniciais temos que $l = \xi$.

Concluímos, pois, que o método da bissecção gera uma seqüência convergente sempre que f for contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$.

Ao leitor interessado nos resultados sobre convergência de seqüências de reais utilizados nesta demonstração recomendamos a referência [11].

ESTIMATIVA DO NÚMERO DE ITERAÇÕES

Dada uma precisão ϵ e um intervalo inicial $[a, b]$, é possível saber, *a priori*, quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha $b - a < \epsilon$, usando o Algoritmo 1.

Vimos que

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Deve-se obter o valor de k tal que $b_k - a_k < \epsilon$, ou seja,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow k \log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon) \Rightarrow$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$$

Portanto se k satisfaz a relação acima, ao final da iteração k teremos o intervalo $[a, b]$ que contém a raiz ξ , tal que $\forall x \in [a, b] \Rightarrow |x - \xi| \leq b - a < \epsilon$.

Por exemplo, se desejarmos encontrar ξ , o zero da função $f(x) = x \log(x) - 1$ que está no intervalo $[2, 3]$ com precisão $\epsilon = 10^{-2}$, quantas iterações, no mínimo, devemos efetuar?

$$k > \frac{\log(3 - 2) - \log(10^{-2})}{\log(2)} = \frac{\log(1) + 2 \log(10)}{\log(2)} = \frac{2}{0.3010} \approx 6.64 \Rightarrow k = 7$$

OBSERVAÇÕES FINAIS

- conforme demonstramos, satisfeitas as hipóteses de continuidade de $f(x)$ em $[a, b]$ e de troca de sinal em a e b , o método da bissecção gera uma seqüência convergente, ou seja, é sempre possível obter um intervalo que contém a raiz da equação em estudo, sendo que o comprimento deste intervalo final satisfaz a precisão requerida;
- as iterações não envolvem cálculos laboriosos;
- a convergência é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $b_0 - a_0 \gg \epsilon$ e se ϵ for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande, como por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} b_0 - a_0 = 3 \\ \epsilon = 10^{-7} \end{array} \right\} \Rightarrow k \geq 24.8 \Rightarrow k = 25.$$

O Algoritmo 1 pode incluir também o teste de parada com o módulo da função e o do número máximo de iterações.

II. MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Seja $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

Supor que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$.

Podemos esperar conseguir a raiz aproximada \bar{x} usando as informações sobre os valores de $f(x)$ disponíveis a cada iteração.

No caso do método da bissecção, x é simplesmente a média aritmética entre a e b :

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

No Exemplo 4, temos $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $[a, b] = [0, 1]$ e $f(1) = -5 < 0 < 3 = f(0)$. Como $|f(0)|$ está mais próximo de zero que $|f(1)|$, é provável que a raiz esteja mais próxima de 0 que de 1 (pelo menos isto ocorre quando $f(x)$ é linear em $[a, b]$).

Assim, em vez de tomar a média aritmética entre a e b , o método da posição falsa toma a média aritmética ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

visto que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos.

Graficamente, este ponto x é a intersecção entre o eixo \overrightarrow{ox} e a reta $r(x)$ que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

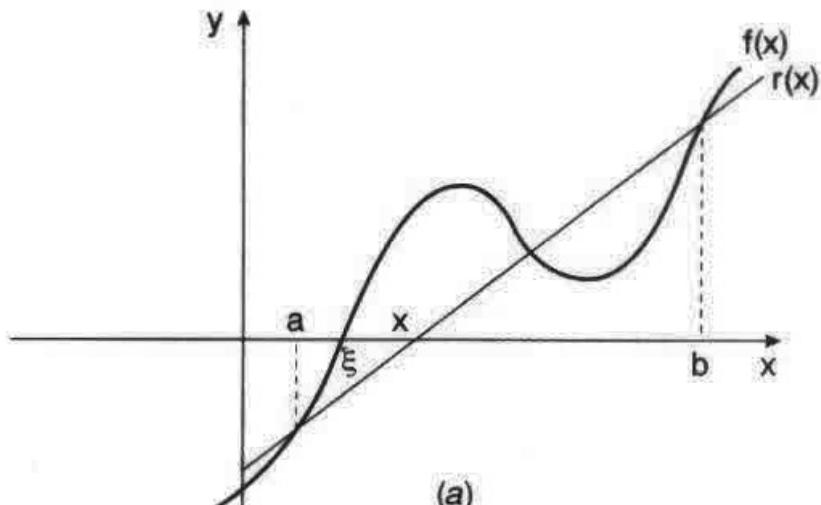


Figura 2.14

E as iterações são feitas assim:

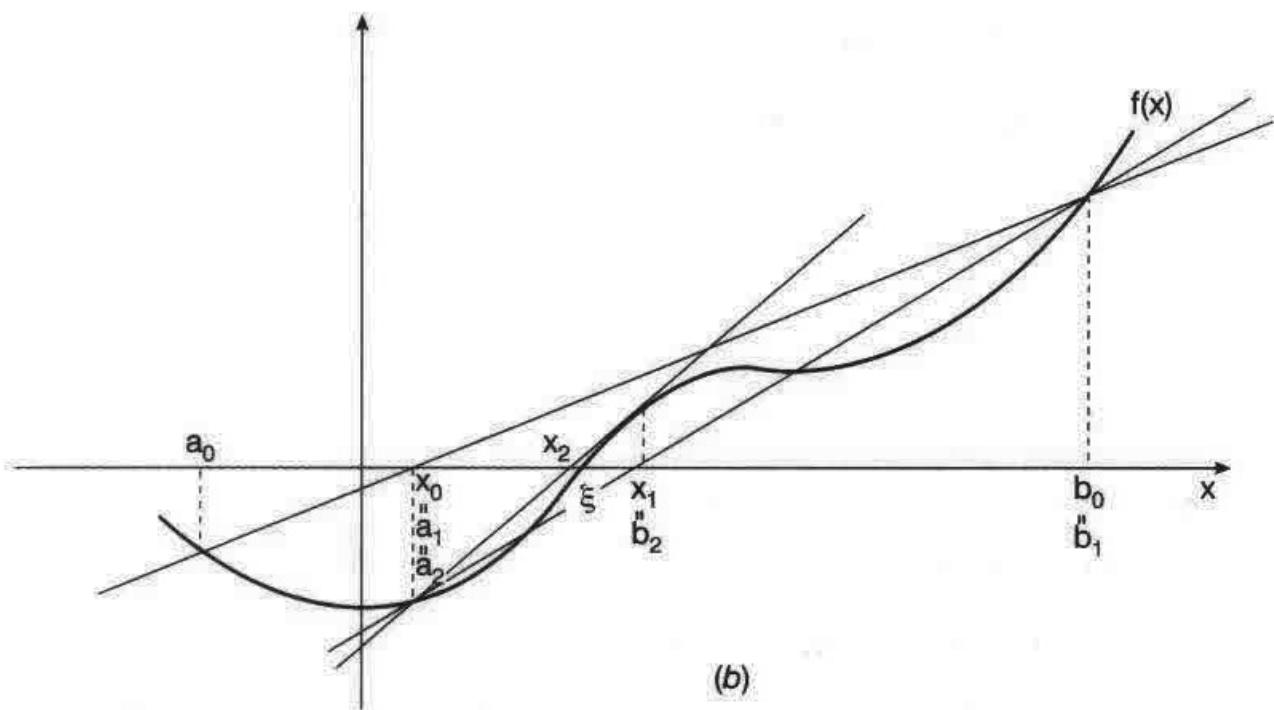


Figura 2.14

Exemplo 5

O método da posição falsa aplicado a $x \log(x) - 1$ em $[a_0, b_0] = [2, 3]$, fica:

$$f(a_0) = -0.3979 < 0$$

$$f(b_0) = 0.4314 > 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{2 \times 0.4314 - 3 \times (-0.3979)}{0.4314 - (-0.3979)} = \frac{2.0565}{0.8293} = 2.4798$$

$f(x_0) = -0.0219 < 0$. Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm o mesmo sinal,

$$\begin{cases} a_1 = x_0 = 2.4798 & f(a_1) < 0 \\ b_1 = 3 & f(b_1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2.4798 \times 0.4314 - 3 \times (-0.0219)}{0.4314 - (-0.0219)} = 2.5049 \quad \text{e}$$

$f(x_1) = -0.0011$. Analogamente,

$$\begin{cases} a_2 = x_1 = 2.5049 \\ b_2 = b_1 = 3 \end{cases}$$

•
•
•

ALGORITMO 2

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

- 1) Dados iniciais
 - a) intervalo inicial $[a, b]$
 - b) precisões ϵ_1 e ϵ_2
- 2) Se $(b - a) < \epsilon_1$, então escolha para \bar{x} qualquer $x \in [a, b]$. FIM.
- 3) $k = 1$
- 4) $M = f(a)$
- 5) $x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$
- 6) Se $|f(x)| < \epsilon_2$, escolha $\bar{x} = x$. FIM.
- 7) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 9.
- 8) $b = x$
- 9) Se $b - a < \epsilon_1$, então escolha para \bar{x} qualquer $x \in (a, b)$. FIM.
- 10) $k = k + 1$. Volte ao passo 5.

Exemplo 6

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad I = [0, 1] \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$$

Aplicando o método da posição falsa, temos:

Iteração	x	f(x)	b - a
1	.375	-322265625	1
2	.338624339	-8.79019964 × 10 ⁻³	.375
3	.337635046	-2.25883909 × 10 ⁻⁴	.338624339

E portanto $\bar{x} = 0.337635046$ e $f(\bar{x}) = -2.25 \times 10^{-4}$.

CONVERGÊNCIA

Na referência [30] encontramos demonstrado o seguinte resultado:

“Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$ então o método da posição falsa gera uma seqüência convergente”.

Embora não façamos aqui a demonstração, observamos que a idéia usada é a mesma aplicada na demonstração da convergência do método da bissecção, ou seja, usando as seqüências $\{a_k\}$, $\{x_k\}$ e $\{b_k\}$. Observamos, ainda, que quando f é derivável duas vezes em $[a, b]$ e $f''(x)$ não muda de sinal nesse intervalo, é bastante intuitivo verificar a convergência graficamente:

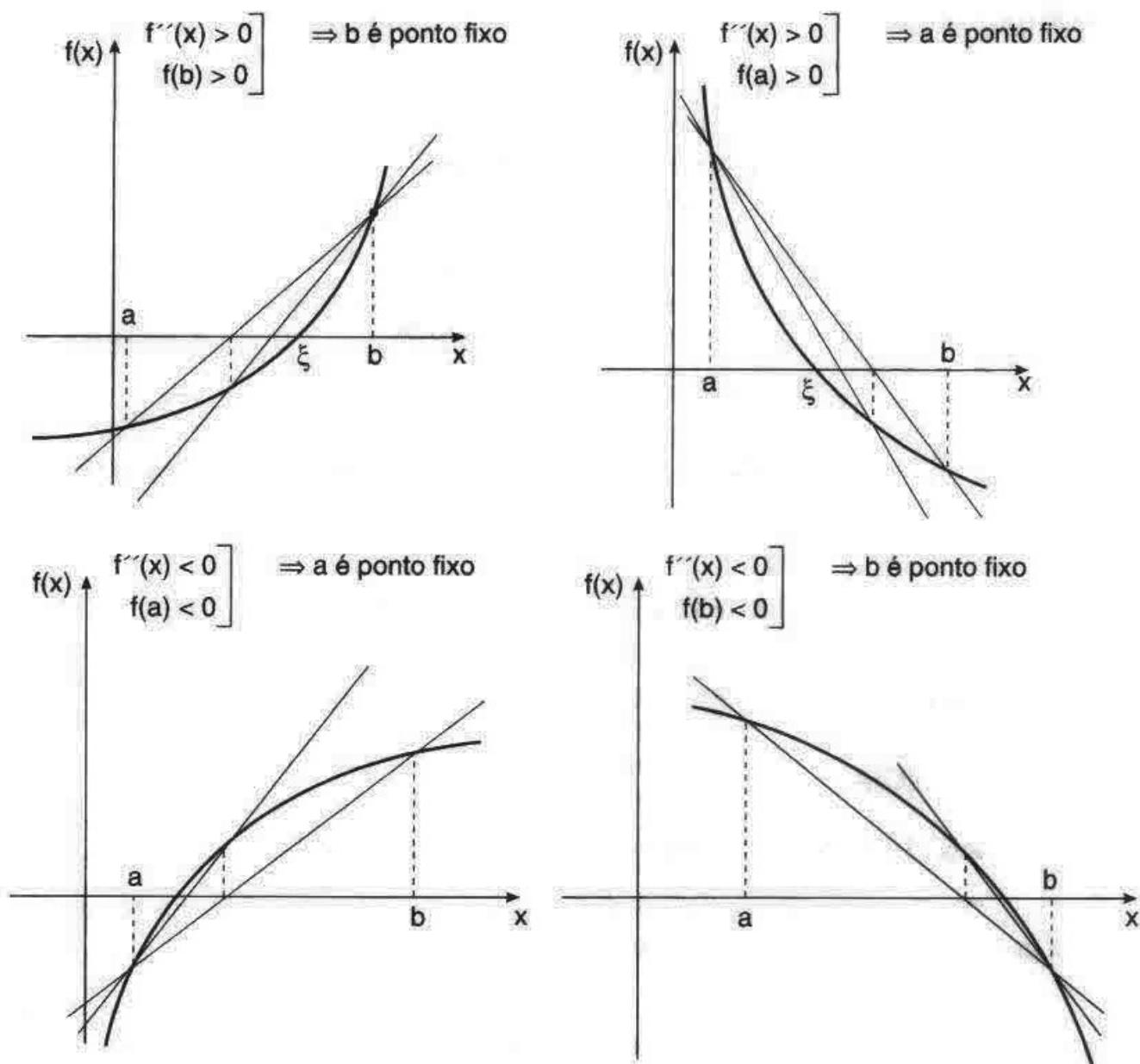


Figura 2.15

Em todos os casos da figura anterior os elementos da seqüência $\{x_k\}$ se encontram na parte do intervalo que fica entre a raiz e o extremo *não-fixo* do intervalo e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

Analizando ainda estes gráficos, podemos concluir que em geral o método da posição falsa obtém como raiz aproximada um ponto \bar{x} , no qual $|f(\bar{x})| < \varepsilon$, sem que o intervalo $I = [a, b]$ seja pequeno o suficiente. Portanto, se for exigido que os dois critérios de parada sejam satisfeitos simultaneamente, o processo pode exceder um número máximo de iterações.

III. MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

A importância deste método está mais nos conceitos que são introduzidos em seu estudo que em sua eficiência computacional.

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.

O MPF consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$. Transformamos assim o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$.

Uma função $\varphi(x)$ que satisfaz a condição acima é chamada de *função de iteração* para a equação $f(x) = 0$.

Exemplo 7

Para a equação $x^2 + x - 6 = 0$ temos várias funções de iteração, entre as quais:

$$a) \quad \varphi_1(x) = 6 - x^2;$$

$$b) \quad \varphi_2(x) = \pm \sqrt{6 - x};$$

$$c) \quad \varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1;$$

$$d) \quad \varphi_4(x) = \frac{6}{x + 1}.$$

A forma geral das funções de iteração $\varphi(x)$ é $\varphi(x) = x + A(x)f(x)$, com a condição que em ξ , ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\xi) \neq 0$.

Mostremos que $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi) = \xi$.

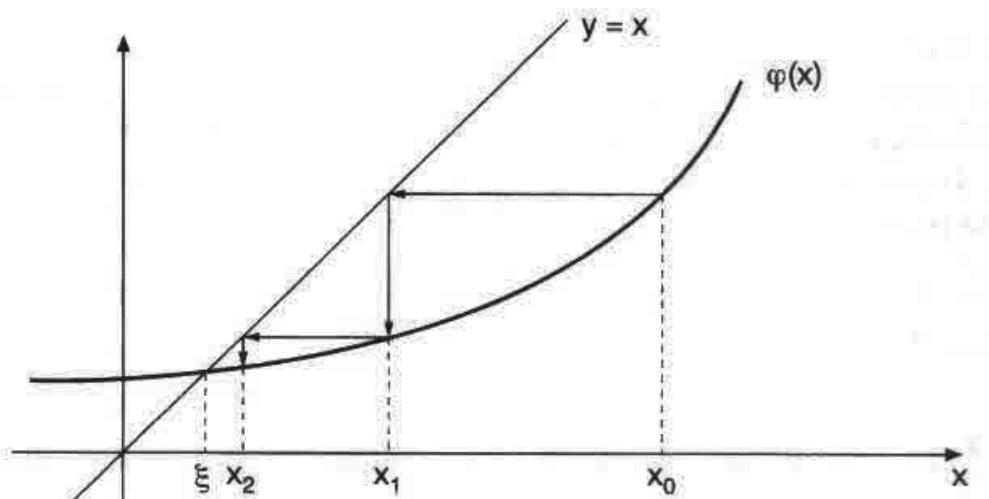
(\Rightarrow) seja ξ tal que $f(\xi) = 0$.

$$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi) = \xi \quad (\text{porque } f(\xi) = 0).$$

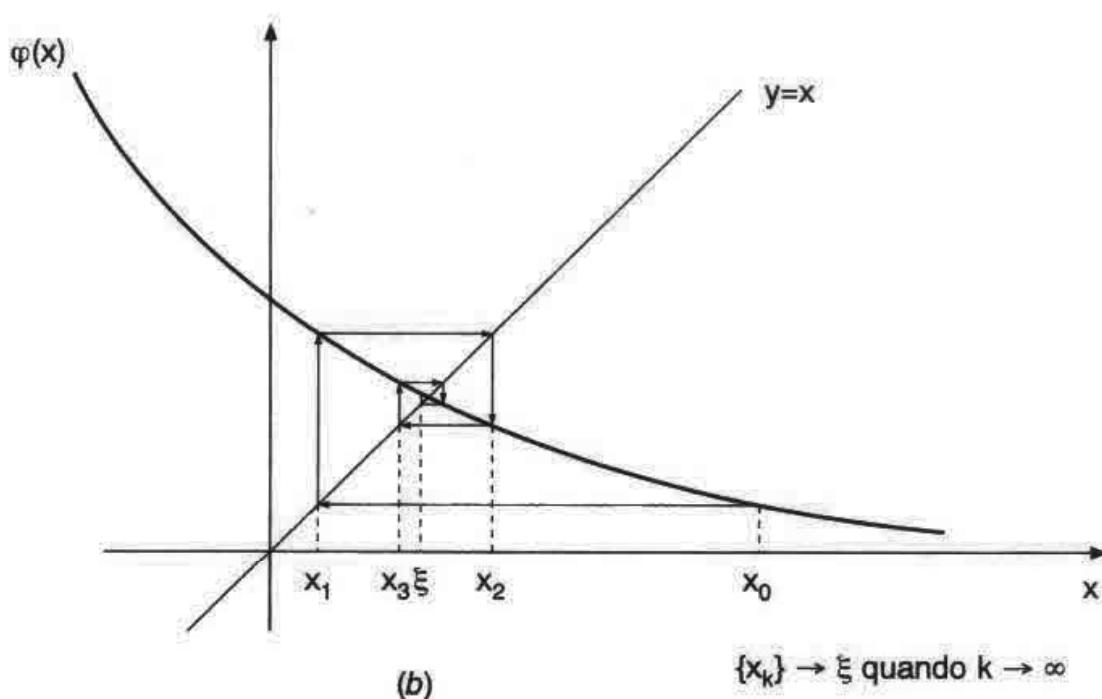
$$(\Leftarrow) \text{ se } \varphi(\xi) = \xi \Rightarrow \xi + A(\xi)f(\xi) = \xi \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0 \quad (\text{porque } A(\xi) \neq 0).$$

Com isto vemos que, dada uma equação $f(x) = 0$, existem infinitas funções de iteração $\varphi(x)$ para a equação $f(x) = 0$.

Graficamente, uma raiz da equação $x = \varphi(x)$ é a abcissa do ponto de intersecção da reta $y = x$ e da curva $y = \varphi(x)$:

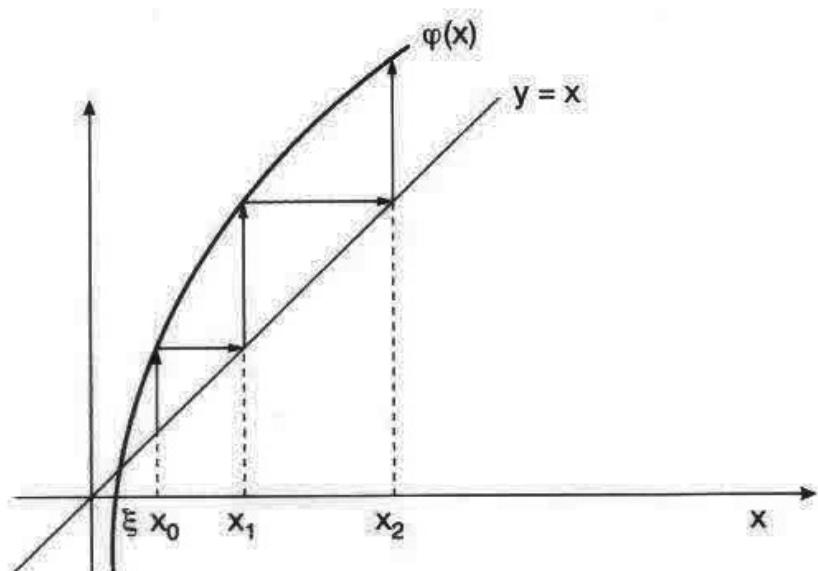


(a)

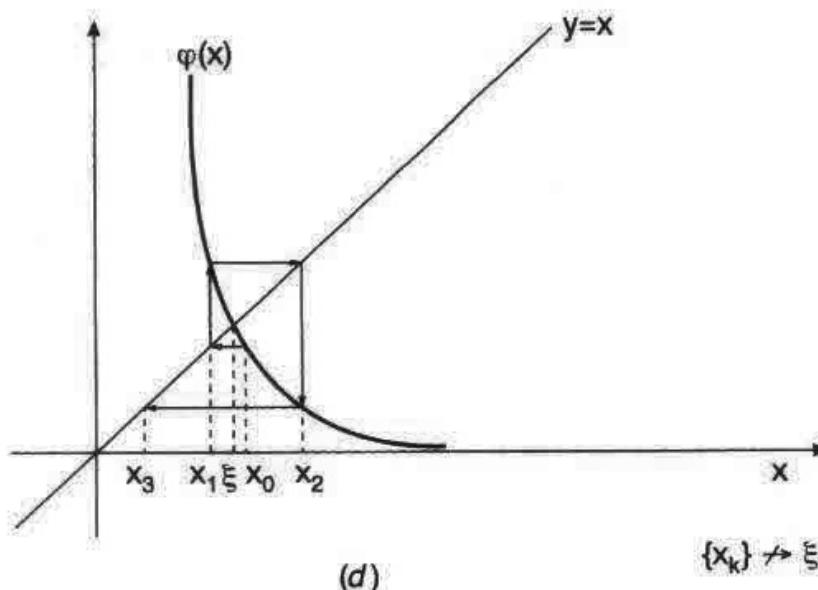
$$\{x_k\} \rightarrow \xi \text{ quando } k \rightarrow \infty$$


(b)

$$\{x_k\} \rightarrow \xi \text{ quando } k \rightarrow \infty$$
Figura 2.16



(c)

 $\{x_k\} \nearrow \xi$ 

(d)

 $\{x_k\} \nearrow \xi$ **Figura 2.16**

Portanto, para certas $\varphi(x)$, o processo pode gerar uma seqüência que diverge de ξ .

ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MPF

Vimos que, dada uma equação $f(x) = 0$, existe mais de uma função $\varphi(x)$, tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$.

De acordo com os gráficos da Figura 2.16, não é para qualquer escolha de $\varphi(x)$ que o processo recursivo definido por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ gera uma seqüência que converge para ξ .

Exemplo 8

Embora não seja preciso usar método numérico para se encontrar as duas raízes reais $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$ da equação $x^2 + x - 6 = 0$, vamos trabalhar com duas das funções de iteração dadas no Exemplo 7 para demonstrar numérica e graficamente a convergência ou não do processo iterativo.

Consideremos primeiramente a raiz $\xi_2 = 2$ e $\varphi_1(x) = 6 - x^2$. Tomando $x_0 = 1.5$ temos $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ e

$$x_1 = \varphi(x_0) = 6 - 1.5^2 = 3.75$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 6 - (3.75)^2 = -8.0625$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = 6 - (-8.0625)^2 = -59.003906$$

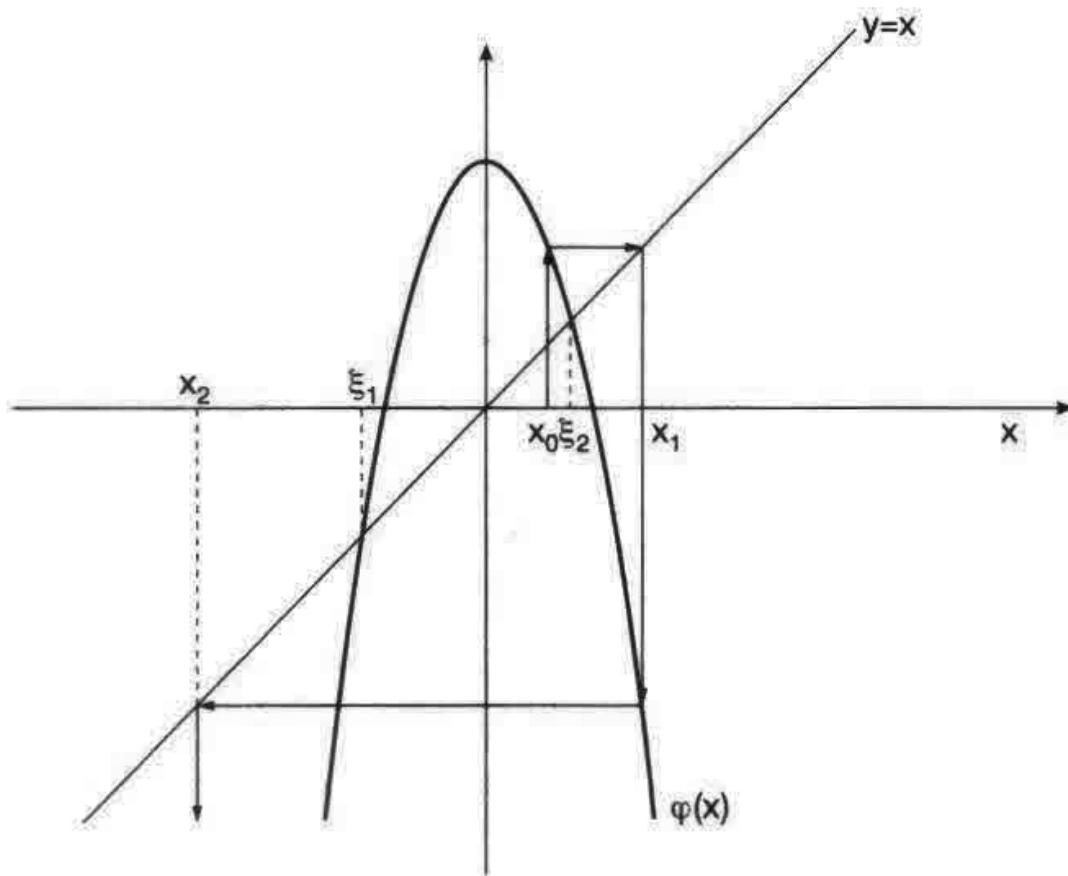
$$x_4 = \varphi(x_3) = -(-59.003906)^2 + 6 = -3475.4609$$

⋮

⋮

⋮

e podemos ver que $\{x_k\}$ não está convergindo para $\xi_2 = 2$.

GRAFICAMENTE**Figura 2.17**

Seja agora $\xi_2 = 2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ e novamente $x_0 = 1.5$. Temos, assim, $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ e

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} = 2.12132$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 1.96944$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00763$$

$$x_4 = \varphi(x_3) = 1.99809$$

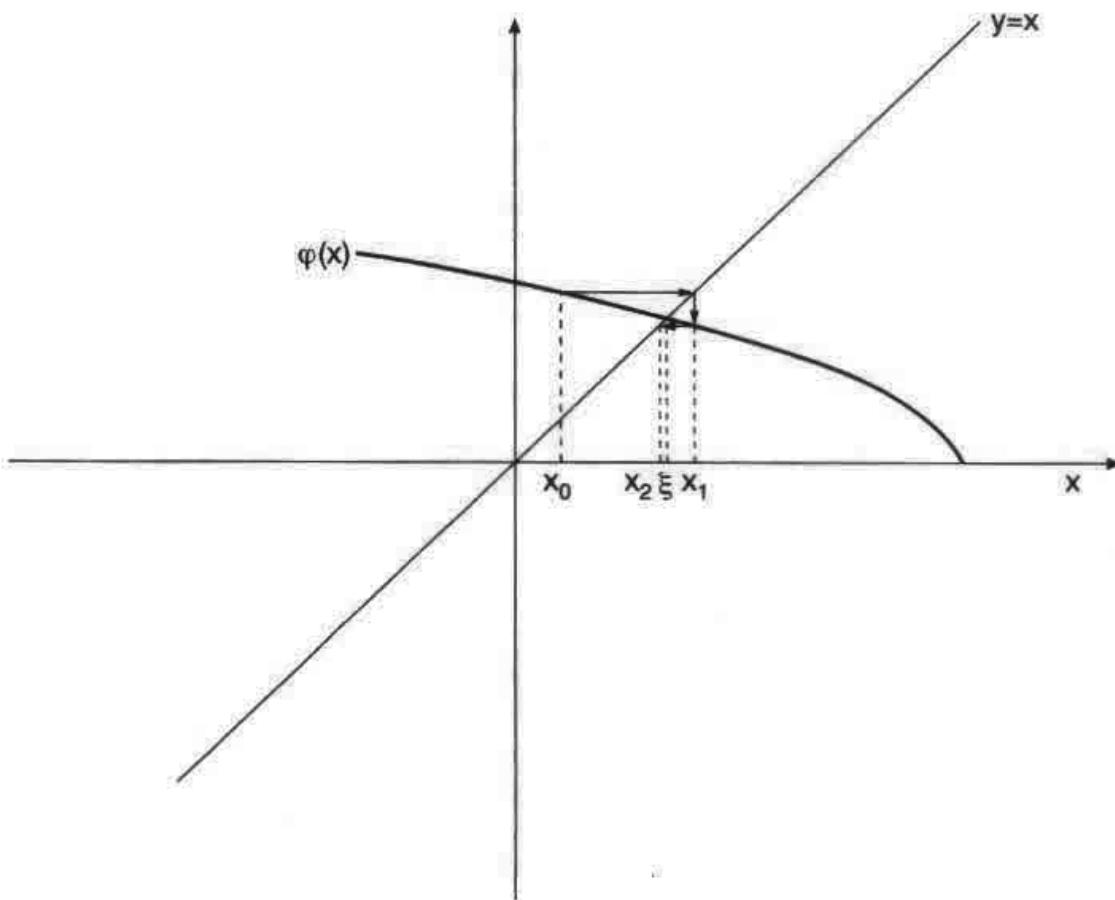
$$x_5 = \varphi(x_4) = 2.00048$$

.

.

.

e podemos ver que $\{x_k\}$ está convergindo para $\xi_2 = 2$.

GRAFICAMENTE**Figura 2.18**

O teorema a seguir nos fornece condições suficientes para que o processo seja convergente.

TEOREMA 2

Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrado em ξ .

Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Se

- i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I ,
- ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ e
- iii) $x_0 \in I$,

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ .

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração deste teorema é feita em duas partes:

1) prova-se que se $x_0 \in I$, então $x_k \in I, \forall k$;

2) prova-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

1) ξ é uma raiz exata da equação $f(x) = 0$.

Assim, $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \varphi(\xi)$ e,

para qualquer k , temos: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$\Rightarrow x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) \quad (1)$$

Agora, $\varphi(x)$ é contínua e diferenciável em I , então, pelo Teorema do Valor Médio, se $x_k \in I$, existe c_k entre x_k e ξ tal que

$$\varphi'(c_k)(x_k - \xi) = \varphi(x_k) - \varphi(\xi).$$

Portanto, temos

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi), \forall k.$$

$$\text{Assim, } x_{k+1} - \xi = \varphi'(c_k)(x_k - \xi) \quad (2)$$

Então, $\forall k$,

$$|x_{k+1} - \xi| = \underbrace{|\varphi'(c_k)|}_{< 1} |x_k - \xi| < |x_k - \xi|$$

ou seja, a distância entre x_{k+1} e ξ é estritamente menor que a distância entre x_k e ξ e, como I está centrado em ξ , temos que se $x_k \in I$, então $x_{k+1} \in I$.

Por hipótese, $x_0 \in I$, então $x_k \in I, \forall k$.

2) Provar que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

De (1), segue que:

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = \underbrace{|\varphi'(c_0)|}_{\leq M} |x_0 - \xi| \leq M |x_0 - \xi| \quad (c_0 \text{ está entre } x_0 \text{ e } \xi)$$

$$|x_2 - \xi| = |\varphi(x_1) - \varphi(\xi)| = \underbrace{|\varphi'(c_1)|}_{\leq M} |x_1 - \xi| \leq M |x_1 - \xi| \leq M^2 |x_0 - \xi| \quad (c_1 \text{ está entre } x_1 \text{ e } \xi)$$

$$|x_k - \xi| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\xi)| = \underbrace{|\varphi'(c_{k-1})|}_{\leq M} |x_{k-1} - \xi| \leq M |x_{k-1} - \xi| \leq \dots \leq M^k |x_0 - \xi| \quad (c_k \text{ está entre } x_k \text{ e } \xi)$$

Então, $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M^k |x_0 - \xi| = 0$ pois $0 < M < 1$.

Assim, $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

Exemplo 9

No Exemplo 8, verificamos que $\varphi_1(x)$ gera uma seqüência divergente de $\xi_2 = 2$ enquanto $\varphi_2(x)$ gera uma seqüência convergente para esta raiz.

A seguir, analisaremos as condições do Teorema 2 para estas funções:

a) $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ e $\varphi'_1(x) = -2x$

$\varphi_1(x)$ e $\varphi'_1(x)$ são contínuas em \mathbb{R} .

$$|\varphi'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \text{ Então, não existe um intervalo } I \text{ centrado}$$

em $\xi_2 = 2$, tal que $|\varphi'_1(x)| < 1, \forall x \in I$. Portanto, $\varphi_1(x)$ não satisfaz a condição (ii) do Teorema 2 com relação a $\xi_2 = 2$. Esta é a justificativa teórica da divergência da seqüência $\{x_k\}$ gerada por $\varphi_1(x)$ para $x_0 = 1.5$.

b) $\varphi_2(x) = \sqrt{6 - x}$ e $\varphi'_2(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6 - x}}$

$\varphi_2(x)$ é contínua em $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$ (3)

$\varphi'_2(x)$ é contínua em $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$ (4)

$$|\varphi'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2\sqrt{6 - x}} \right| < 1 \Leftrightarrow x < 5.75$$

De (3) e (4) temos que é possível obter um intervalo I centrado em $\xi_2 = 2$ tal que as condições do Teorema 2 sejam satisfeitas.

Exemplo 10

Analisaremos aqui a função $\varphi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$ e a convergência da seqüência $\{x_k\}$ para $\xi_1 = -3$; usando $x_0 = -2.5$:

$$\varphi'(x) = \frac{-6}{x^2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0$$

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{-6}{x^2} \right| = \frac{6}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0$$

$$|\varphi'(x)| < 1 \Leftrightarrow \frac{-6}{x^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 > 6 \Leftrightarrow x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}$$

Assim, como o objetivo é obter a raiz negativa, temos que

I_1 tal que $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in I_1$, será: $I_1 = (-\infty; \sqrt{6})$.

$$(\sqrt{6} \approx 2.4494897)$$

Podemos, pois, trabalhar no intervalo $I = [-3.5, -2.5]$ que o processo convergirá, visto que $I \subset I_1$ está centrado na raiz $\xi_1 = -3$.

Tomando $x_0 = -2.5$, temos:

$$x_1 = -3.4$$

$$x_2 = -2.764706$$

$$x_3 = -3.170213$$

$$x_4 = -2.892617$$

•

•

•

Como a raiz $\xi_1 = -3$ é conhecida, é possível escolher um intervalo I centrado em ξ_1 , tal que em I as condições do teorema são satisfeitas. Contudo, ao se aplicar o MPF na resolução de uma equação $f(x) = 0$, escolhe-se I “aproximadamente” centrado em ξ . Quanto mais preciso for o processo de isolamento de ξ , maior exatidão será obtida na escolha de I .

CRITÉRIOS DE PARADA

No algoritmo do método do ponto fixo, escolhe-se x_k como raiz aproximada de ξ se $|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$ ou se $|f(x_k)| < \varepsilon$.

Devemos observar que $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ não implica necessariamente que $|x_k - \xi| < \varepsilon$ conforme mostra a Figura 2.19:

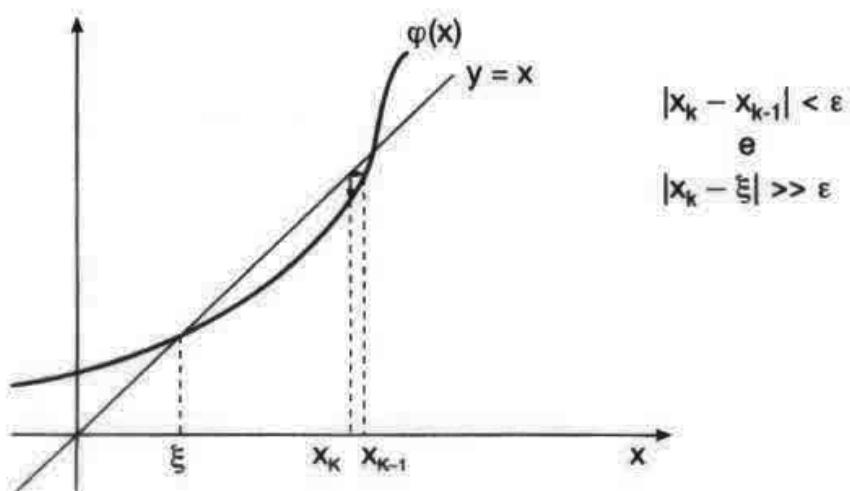


Figura 2.19

Contudo, se $\varphi'(x) < 0$ em I (intervalo centrado em ξ), a seqüência $\{x_k\}$ será oscilante em torno de ξ e, neste caso, se $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \Rightarrow |x_k - \xi| < \varepsilon$, pois $|x_k - \xi| < |x_k - x_{k-1}|$.

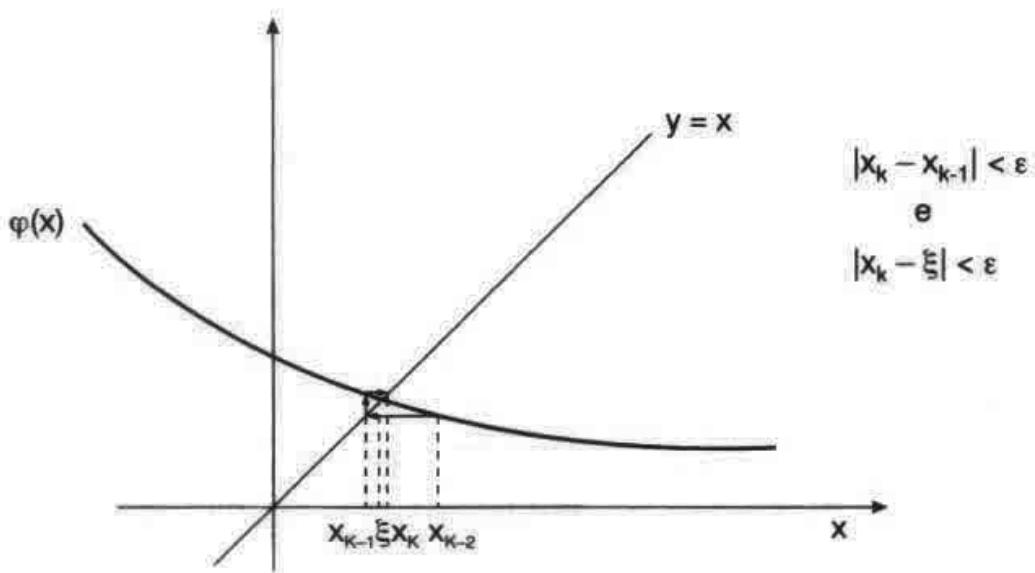


Figura 2.20

ALGORITMO 3

Considere a equação $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = \varphi(x)$.

Supor que as hipóteses do Teorema 2 estão satisfeitas.

1) Dados iniciais:

a) x_0 : aproximação inicial;

b) ε_1 e ε_2 : precisões.

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

4) $x_1 = \varphi(x_0)$

5) Se $|f(x_1)| < \varepsilon_1$
ou se $|x_1 - x_0| < \varepsilon_2$] então faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$

Volte ao passo 4.

Exemplo 11

$$f(x) = x^3 - 9x + 3; \quad \varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}; \quad x_0 = 0.5; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}; \quad \xi \in (0,1)$$

Iteração	x	f(x)
1	.3472222	$-0.8313799 \times 10^{-1}$
2	.3379847	$-0.3253222 \times 10^{-2}$
3	.3376233	$-0.1239777 \times 10^{-3}$

assim, $\bar{x} = 0.3376233$ e $f(\bar{x}) = -0.12 \times 10^{-3}$.

Deixamos como exercício a verificação de que $\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2 considerando a raiz de $f(x) = 0$ que se encontra no intervalo $(0,1)$.

ORDEM DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DO PONTO FIXO

Definição: “Seja $\{x_k\}$ uma seqüência que converge para um número ξ e seja $e_k = x_k - \xi$ o erro na iteração k .

Se existir um número $p > 1$ e uma constante $C > 0$, tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \quad (5)$$

então p é chamada de *ordem de convergência* da seqüência $\{x_k\}$ e C é a *constante assintótica de erro*.

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C$, $0 \leq |C| < 1$, então a convergência é pelo menos linear.”

Uma vez obtida a ordem de convergência p de um método iterativo, ela nos dá uma informação sobre a rapidez de convergência do processo, pois de (5) podemos escrever a seguinte relação:

$$|e_{k+1}| \approx C |e_k|^p \text{ para } k \rightarrow \infty.$$

Considerando que a seqüência $\{x_k\}$ é convergente, temos que $e_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, portanto quanto maior for p , mais próximo de zero estará o valor $C |e_k|^p$ (independentemente do valor de C), o que implica uma convergência mais rápida da seqüência $\{x_k\}$. Assim, se dois processos iterativos geram seqüências $\{x_k^1\}$ e $\{x_k^2\}$, ambas convergentes para ξ , com ordem de convergência p_1 e p_2 , respectivamente, e se $p_1 > p_2 \geq 1$, o processo que gera a seqüência $\{x_k^1\}$ converge mais rapidamente que o outro.

A seguir, provaremos que o MPF, em geral, tem convergência apenas linear. Da demonstração do Teorema 2 temos a relação:

$$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi) \text{ com } c_k \text{ entre } x_k \text{ e } \xi$$

$$\Rightarrow \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(c_k).$$

Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'(c_k) = \varphi'(\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k)) = \varphi'(\xi).$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \varphi'(\xi) = C$ e $|C| < 1$ pois $\varphi'(x)$ satisfaz as hipóteses do

Teorema 2.

A relação acima afirma que para grandes valores de k o erro em qualquer iteração é proporcional ao erro na iteração anterior, sendo que o fator de proporcionalidade é $\varphi'(\xi)$. Observamos que a convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$.

IV. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

No estudo do método do ponto fixo, vimos que:

- i) uma das condições de convergência é que $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz;
- ii) a convergência do método será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$.

O que o método de Newton faz, na tentativa de garantir e acelerar a convergência do MPF, é escolher para função de iteração a função $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

Então, dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $\varphi(x)$, queremos obter a função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi).$$

Assim, $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$, donde tomamos $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$.

Então, dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\varphi'(\xi) = 0$, pois como podemos verificar:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

e, como $f(\xi) = 0$, $\varphi'(\xi) = 0$ (desde que $f'(\xi) \neq 0$).

Assim, escolhido x_0 , a seqüência $\{x_k\}$ será determinada por $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

MOTIVAÇÃO GEOMÉTRICA

O método de Newton é obtido geometricamente da seguinte forma:

dado o ponto $(x_k, f(x_k))$ traçamos a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:

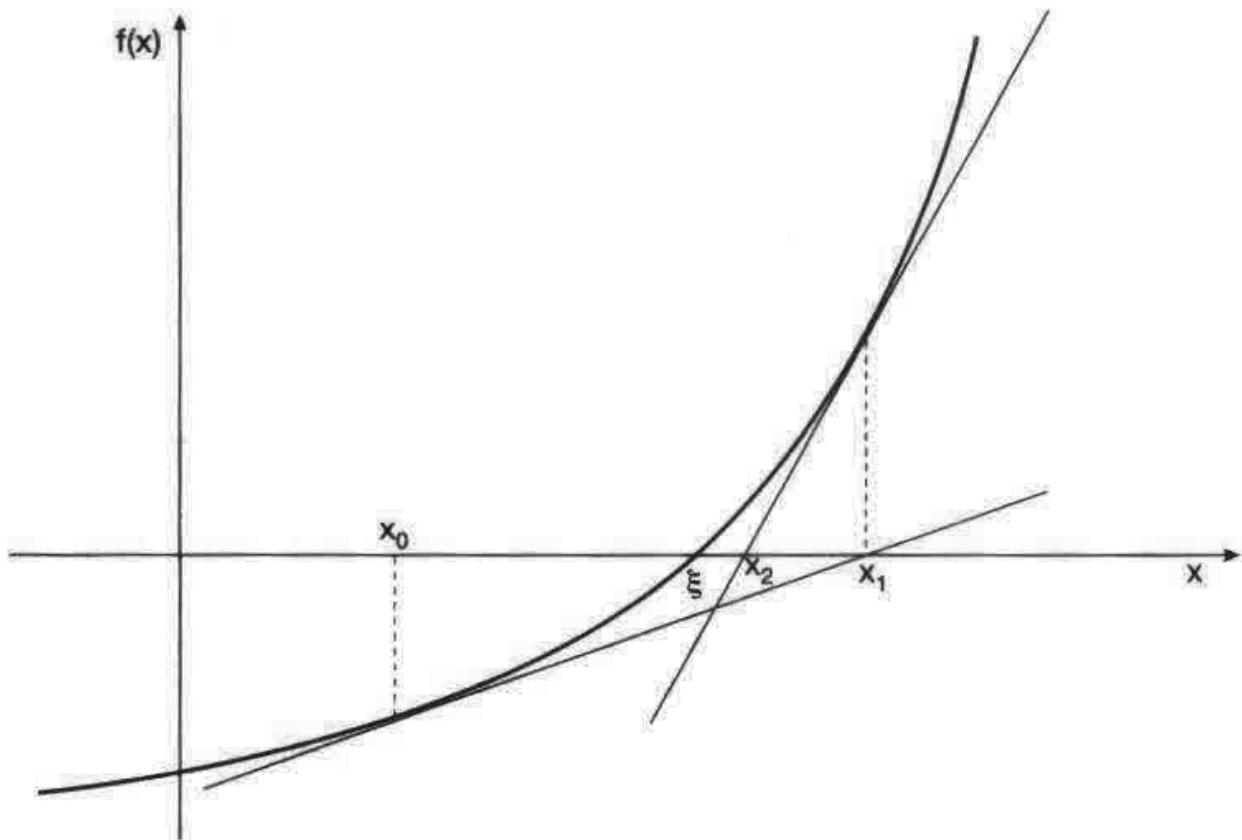
$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

$L_k(x)$ é um modelo linear que aproxima a função $f(x)$ numa vizinhança de x_k .

Encontrando o zero deste modelo, obtemos:

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fazemos então $x_{k+1} = x$.

GRAFICAMENTE**Figura 2.21****Exemplo 12**

Consideremos $f(x) = x^2 + x - 6$, $\xi_2 = 2$ e $x_0 = 1.5$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

Temos, pois,

$$x_0 = 1.5$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = 2.0625$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 2.00076$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00000.$$

Assim, trabalhando com cinco casas decimais, $\bar{x} = x_3 = \xi$. Observamos que no MPF com $\varphi(x) = \sqrt{6 - x}$ (Exemplo 8) obtivemos $x_5 = 2.00048$ com cinco casas decimais.

ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON

TEOREMA 3

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$. Supor que $f'(\xi) \neq 0$.

Então, existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz ξ , tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ convergirá para a raiz.

DEMONSTRAÇÃO

Vimos que o método de Newton-Raphson é um MPF com função de iteração $\varphi(x)$ dada por

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Portanto, para provar a convergência do método, basta verificar que, sob as hipóteses acima, as hipóteses do Teorema 2 estão satisfeitas para $\varphi(x)$.

Ou seja, é preciso provar que existe $\bar{I} \subset I$ centrado em ξ , tal que:

- i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em \bar{I} ;
- ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in \bar{I}$.

Temos que

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{e} \quad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Por hipótese, $f'(\xi) \neq 0$ e, como $f'(x)$ é contínua em I , é possível obter $I_1 \subset I$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I_1$.

Assim, no intervalo $I_1 \subset I$, tem-se que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas e $f'(x) \neq 0$.

Portanto, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I_1 .

Agora, $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$. Como $\varphi'(x)$ é contínua em I_1 e $\varphi'(\xi) = 0$, é possível escolher $I_2 \subset I_1$ tal que $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in I_2$ e, ainda mais, I_2 pode ser escolhido de forma que ξ seja seu centro.

Concluindo, conseguimos obter um intervalo $I_2 \subset I$, centrado em ξ , tal que $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ sejam contínuas em I_2 e $|\varphi'(x)| < 1$, $\forall x \in I_2$. Assim, $\bar{I} = I_2$.

Portanto, se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ converge para a raiz ξ .

Em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que x_0 seja escolhido “suficientemente próximo” da raiz ξ .

A razão desta afirmação está na demonstração acima, onde se verificou que, para pontos suficientemente próximos de ξ , as hipóteses do teorema da convergência do MPF estão satisfeitas.

Exemplo 13

Comprovaremos neste exemplo que uma escolha cuidadosa da aproximação inicial é, em geral, essencial para o bom desempenho do método de Newton.

Consideremos a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ que possui três zeros: $\xi_1 \in I_1 = (-4, -3)$ $\xi_2 \in I_2 = (0, 1)$ e $\xi_3 \in I_3 = (2, 3)$ e seja $x_0 = 1.5$. A seqüência gerada pelo método é

Iteração	x	f(x)
1	-1.6666667	0.1337037×10^2
2	18.3888889	0.6055725×10^4
3	12.3660104	0.1782694×10^4
4	8.4023067	0.5205716×10^3
5	5.83533816	0.1491821×10^3
6	4.23387355	0.4079022×10^2
7	3.32291096	0.9784511×10
8	2.91733893	0.1573032×10
9	2.82219167	0.7837065×10^{-1}
10	2.81692988	0.2342695×10^{-3}

Podemos observar que de início há uma divergência da região onde estão as raízes, mas, a partir de x_7 , os valores aproximam-se cada vez mais de ξ_3 . A causa da divergência inicial é que x_0 está próximo de $\sqrt{3}$ que é um zero de $f'(x)$ e esta aproximação inicial gera $x_1 = -1.66667 \approx -\sqrt{3}$ que é o outro zero de $f'(x)$ pois

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

ALGORITMO 4

Seja a equação $f(x) = 0$.

Supor que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.

1) Dados iniciais:

a) x_0 : aproximação inicial;

b) ε_1 e ε_2 : precisões

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

$$4) x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

5) Se $|f(x_1)| < \varepsilon_1$
ou se $|x_1 - x_0| < \varepsilon_2$] faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$

Volte ao passo 4.

Exemplo 14

$$f(x) = x^3 - 9x + 3; \quad x_0 = 0.5; \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \times 10^{-4}; \quad \xi \in (0,1).$$

Os resultados obtidos ao aplicar o método de Newton são:

Iteração	x	f(x)
0	0.5	-0.1375×10
1	.333333333	0.3703703×10^{-1}
2	.337606838	0.1834054×10^{-4}

Assim, $\bar{x} = 0.337606838$ e $f(\bar{x}) = 1.8 \times 10^{-5}$.

ORDEM DE CONVERGÊNCIA

Inicialmente supomos que o método de Newton gera uma seqüência $\{x_k\}$ que converge para ξ .

Ao observá-lo como um MPF, diríamos que ele tem ordem de convergência linear. Contudo, o fato de sua função de iteração ser tal que $\varphi'(\xi) = 0$ nos levará a demonstrar que a ordem de convergência é quadrática, ou seja, $p = 2$.

Vamos supor que estão satisfeitas aqui todas as hipóteses do Teorema 3.

$$\text{Temos que } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_{k+1}.$$

O desenvolvimento de Taylor de $f(x)$ em torno de x_k nos dá

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(c_k)}{2}(x - x_k)^2, \quad c_k \text{ entre } x \text{ e } x_k.$$

$$\text{Assim, } 0 = f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{f''(c_k)}{2}(x_k - \xi)^2$$

$$\Rightarrow f(x_k) = f'(x_k)(x_k - \xi) - \frac{f''(c_k)}{2}(x_k - \xi)^2 (+ f'(x_k))$$

$$\Rightarrow \frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} e_k^2 = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + e_k = e_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)}$$

$$\text{Assim, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''[\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k)]}{f'[\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k)]} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{1}{2} \varphi''(\xi) = C$$

Portanto, o método de Newton tem convergência quadrática.

Exemplo 15

Seja obter a raiz quadrada de um número positivo A, usando o método de Newton. Temos de resolver a equação $f(x) = x^2 - A = 0$. Tomando $A = 7$ e $x_0 = 2$, a seqüência gerada é:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2.75$$

$$x_2 = 2.\underline{647727273}$$

$$x_3 = 2.\underline{645752048}$$

$$x_4 = 2.\underline{645751311}$$

$$x_5 = 2.\underline{645751311} .$$

Portanto, trabalhando com nove casas decimais, $\bar{x} = 2.645751311$.

Os dígitos sublinhados são os dígitos decimais corretos de cada valor x_k obtido.

Podemos observar que estes dígitos corretos começam a surgir após x_2 e, a partir dele, a quantidade de dígitos corretos praticamente duplica. A duplicação de dígitos corretos ocorre à medida que os valores x_k se aproximam da raiz exata, e isto se deve ao fato do método de Newton ter convergência quadrática; como esta é uma propriedade assintótica, não se deve esperar a duplicação de dígitos corretos nas iterações iniciais.

V. MÉTODO DA SECANTE

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular seu valor numérico a cada iteração.

Uma forma de se contornar este problema é substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz.

Neste caso, a função de iteração fica

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} =$$

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{Ou ainda, } \varphi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Observamos que são necessárias duas aproximações para se iniciar o método.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k , o ponto \vec{x}_{k+1} é obtido como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo ox e da reta secante que passa por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$:

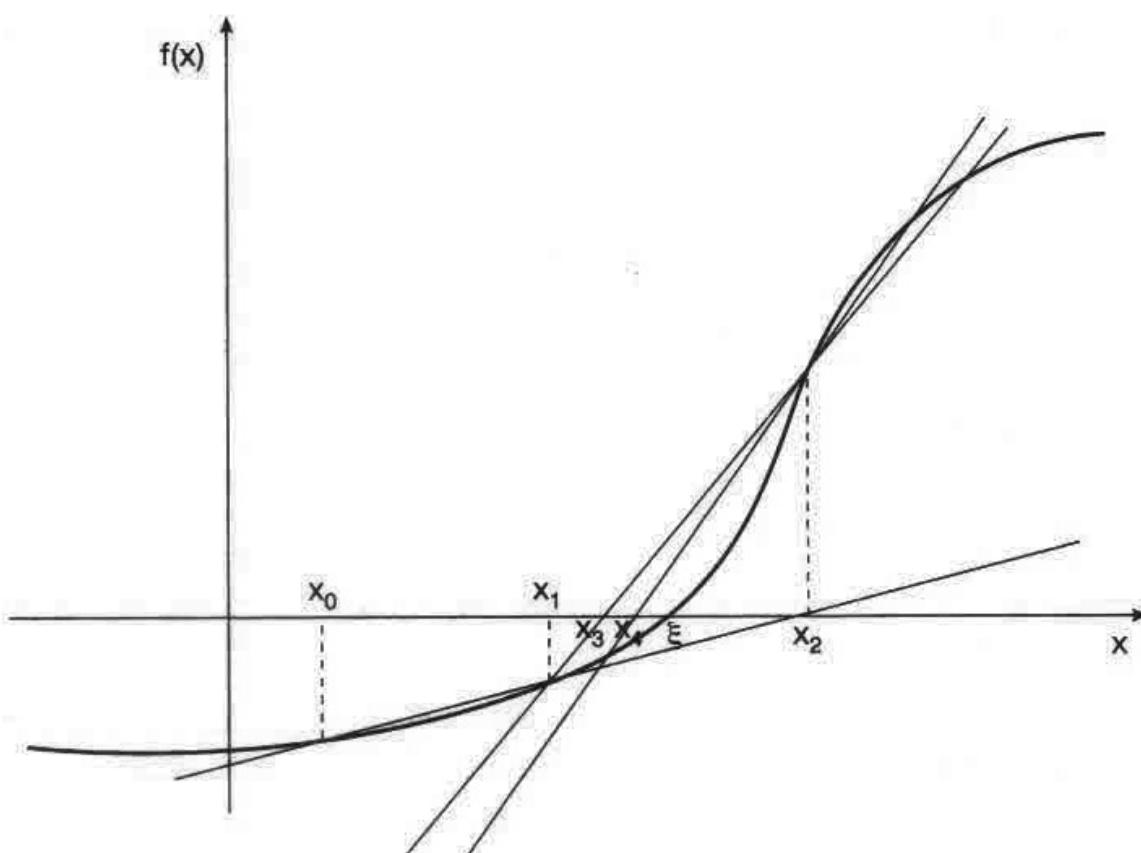


Figura 2.22

Exemplo 16

Consideremos $f(x) = x^2 + x - 6$; $\xi_2 = 2$; $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.7$. Então,

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1.5(-1.41) - 1.7(-2.25)}{-1.41 + 2.25} = 2.03571$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{1.7(0.17983) - (2.03571)(-1.41)}{0.17983 + 1.41} = 1.99774$$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_4) - f(x_3)} = \frac{(2.03571)(-0.01131) - (1.99774)(0.17983)}{-0.01131 - 0.17983} = 1.99999$$

ALGORITMO 5

Seja a equação $f(x) = 0$.

1) Dados iniciais:

- a) x_0 e x_1 : aproximações iniciais;
- b) ϵ_1 e ϵ_2 : precisões.

2) Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$
ou se $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$] faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

4) $k = 1$

$$5) x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} (x_1 - x_0)$$

6) Se $|f(x_2)| < \epsilon_1$
ou se $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$] então faça $\bar{x} = x_2$. FIM.

$$7) \begin{aligned} x_0 &= x_1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

8) $k = k + 1$
Volte ao passo 5.

Exemplo 17

$$f(x) = x^3 - 9x + 3, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$$

Os resultados obtidos ao aplicarmos o método da secante são:

Iteração	x	f(x)
1	.375	-.322265625
2	.331941545	.0491011376
3	.337634621	$-0.2222052 \times 10^{-3}$

Assim, $\bar{x} = 0.337634621$ e $f(\bar{x}) = -2.2 \times 10^{-4}$

COMENTÁRIOS FINAIS

Visto que o método da secante é uma aproximação para o método de Newton, as condições para a convergência do método são praticamente as mesmas; acrescente-se ainda que o método pode divergir se $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.

A ordem de convergência do método da secante não é quadrática como a do método de Newton, mas também não é apenas linear. Na referência [5] Capítulo 3, § 5, está provado que para o método da secante $p = 1.618\dots$

2.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Finalizando este capítulo realizaremos alguns testes com o objetivo de comparar os vários métodos.

Esta comparação deve levar em conta vários critérios entre os quais: garantias de convergência, rapidez de convergência, esforço computacional.

Observamos que o único dado que os exemplos fornecem para se medir a rapidez de convergência é o número de iterações efetuadas, o que não nos permite tirar conclusões sobre o tempo de execução do programa, pois o tempo gasto na execução de uma iteração varia de método para método.

Conforme constatamos no estudo teórico, os métodos da bissecção e da posição falsa têm convergência garantida desde que a função seja contínua num intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Já o MPF e os métodos de Newton e secante têm condições mais restritivas de convergência. Porém, uma vez que as condições de convergência sejam satisfeitas, os dois últimos são mais rápidos que os três primeiros.

O esforço computacional é medido através do número de operações efetuadas a cada iteração, da complexidade destas operações, do número de decisões lógicas, do número de avaliações de função a cada iteração e do número total de iterações.

Tendo isto em mente, percebe-se que é difícil tirar conclusões gerais sobre a eficiência computacional de um método, pois, por exemplo, o método da bissecção é o que efetua cálculos mais simples por iteração enquanto que o de Newton requer cálculos mais elaborados, porque requer o cálculo da função e de sua derivada a cada iteração. No entanto, o número de iterações efetuadas pela bissecção pode ser muito maior que o número de iterações efetuadas por Newton.

Considerando que o método ideal seria aquele em que a convergência estivesse assegurada, a ordem de convergência fosse alta e os cálculos por iteração fossem simples, o método de Newton é o mais indicado sempre que for fácil verificar as condições de convergência e que o cálculo de $f'(x)$ não seja muito elaborado. Nos casos em que é trabalhoso obter e/ou avaliar $f'(x)$, é aconselhável usar o método da secante, uma vez que este é o método que converge mais rapidamente entre as outras opções.

Outro detalhe importante na escolha é o critério de parada, pois, por exemplo, se o objetivo for reduzir o intervalo que contém a raiz, não se deve usar métodos como o da posição falsa que, apesar de trabalhar com intervalo, pode não atingir a precisão requerida, nem secante, MPF ou Newton que trabalham exclusivamente com aproximações x_k para a raiz exata.

Após estas considerações, podemos concluir que a escolha do método está diretamente relacionada com a equação que se quer resolver, no que diz respeito ao comportamento da função na região da raiz exata, às dificuldades com o cálculo de $f'(x)$, ao critério de parada etc.

Exemplo 18

$$f(x) = e^{-x^2} - \cos(x); \quad \xi \in (1, 2); \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[1, 2]	[1, 2]	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1; x_1 = 2$
\bar{x}	1.44741821	1.44735707	1.44752471	1.44741635	1.44741345
$f(\bar{x})$	2.1921×10^{-5}	-3.6387×10^{-5}	7.0258×10^{-5}	1.3205×10^{-6}	-5.2395×10^{-7}
Erro em x	6.1035×10^{-5}	$.552885221$	1.9319×10^{-4}	1.7072×10^{-3}	1.8553×10^{-4}
Número de Iterações	14	6	6	2	5

Exemplo 19

$$f(x) = x^3 - x - 1; \quad \xi \in (1, 2); \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = (x+1)^{1/3}$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[1, 2]	[1, 2]	$x_0 = 1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0; x_1 = 0.5$
\bar{x}	0.1324718×10^1	0.1324718×10^1	0.1324717×10^1	0.1324718×10^1	0.1324718×10^1
$f(\bar{x})$	$-0.1847744 \times 10^{-5}$	$-0.7897615 \times 10^{-6}$	$-0.52154406 \times 10^{-6}$	0.1821000×10^{-6}	$-0.8940697 \times 10^{-7}$
Erro em x	0.9536743×10^{-6}	0.6752825	0.3599538×10^{-6}	0.6299186×10^{-6}	0.8998843×10^{-5}
Número de Iterações	20	17	9	21	27

No método de Newton, o valor inicial $x_0 = 0$, além de estar muito distante da raiz $\xi (= 1.3)$, gera para x_1 o valor $x_1 = 0.5$ que está próximo de um zero da derivada de $f(x)$; $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}/3 \approx 0.5773502$. Isto é uma justificativa para o método ter efetuado 21 iterações.

Argumentos semelhantes podem ser usados para justificar as 27 iterações do método da secante.

Exemplo 20

$$f(x) = 4\sin(x) - e^x; \quad \xi \in (0, 1); \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = x - 2 \sin(x) + 0.5e^x$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[0, 1]	[0, 1]	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0; x_1 = 1$
\bar{x}	0.370555878	0.370558828	.370556114	.370558084	.370558098
$f(\bar{x})$	-1.3755×10^{-5}	1.6695×10^{-6}	-4.5191×10^{-6}	-2.7632×10^{-8}	5.8100×10^{-9}
Erro em x	7.6294×10^{-6}	.370562817	1.1528×10^{-4}	$+1.3863 \times 10^{-4}$	5.7404×10^{-6}
Número de Iterações	17	8	5	3	7

Exemplo 21

$$f(x) = x \log(x) - 1; \quad \xi \in (2, 3); \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-7}$$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = x - 1.3(x \log x - 1)$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[2, 3]	[2, 3]	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.3; x_1 = 2.7$
\bar{x}	2.506184413	2.50618403	2.50618417	2.50618415	2.50618418
$f(\bar{x})$	1.2573×10^{-8}	-9.9419×10^{-8}	2.0489×10^{-8}	4.6566×10^{-10}	2.9337×10^{-8}
Erro em x	5.9605×10^{-8}	.49381442	3.8426×10^{-6}	3.9879×10^{-6}	8.0561×10^{-5}
Número de Iterações	24	5	5	2	3

Exemplo 22

Métodos mais simples como o da bissecção podem ser usados para fornecer uma aproximação inicial para métodos mais elaborados como o de Newton que exigem um bom “chute inicial”.

Consideremos $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 4x - 1.5 = (x - 1)^2(x - 1.5)$.

Como vemos, $\xi_1 = 1$ é raiz dupla de $f(x) = 0$.

Nos testes a seguir, $\epsilon = 10^{-2}$ para o método da bissecção e $\epsilon = 10^{-7}$ para o método de Newton.

Nos testes 1, 2 e 3, executamos apenas o método de Newton. No teste 4, usamos o método conjugado bissecção-Newton no qual o valor que o método da bissecção encontra para \bar{x} é tomado como x_0 para o método de Newton.

	Teste 1	Teste 2	Teste 3
x_0	0.5	1.33333	1.33334
\bar{x}	.999778284	.999708915	1.50000001
$f(\bar{x})$	-2.4214×10^{-8}	-4.1910×10^{-8}	1.3970×10^{-8}
erro em x	2.2491×10^{-4}	2.9079×10^{-4}	3.5082×10^{-5}
nº de iterações	12	35	27

Observamos que nos testes 1 e 2 a raiz encontrada foi a raiz dupla $\xi_1 = 1$. Era de se esperar que o número de iterações fosse grande, pois $\xi_1 = 1$ é zero de $f'(x)$. No entanto, o método conseguiu encontrar a raiz (pois, para as seqüências $\{x_k\}$ geradas, o valor de $f(x_k)$ tendeu a zero mais rapidamente que o valor de $f'(x_k)$).

Temos que $f'(x) = 3x^2 - 7x + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 4/3 = 1.33333\dots$. Observe que nos testes 2 e 3 tomamos propositadamente x_0 bem próximo de $4/3$; no teste 2, $x_0 < 4/3$ e o método encontrou $\xi_1 = 1$ e, no teste 3, $x_0 > 4/3$ e a raiz encontrada foi $\xi_2 = 1.5$. Uma análise do gráfico de $f(x)$ (Figura 2.23) nos ajuda a entender este fato.

No teste 4, aplicamos o método da bissecção até reduzir o intervalo $[0.5, 2]$ a um intervalo de amplitude 0.01 e tomamos como aproximação inicial para o método de Newton o ponto médio desse intervalo: $x_0 = 1.50194313$. A partir desse ponto inicial foram executadas duas iterações do método de Newton e obtivemos os seguintes resultados:

$$\bar{x} = 1.5 \text{ e } f(\bar{x}) = 2.3 \times 10^{-10}.$$

Devemos observar que no intervalo inicial para o método da bissecção existem duas raízes distintas $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 1.5$ e a raiz obtida foi $\bar{x} = 1.5$; isto ocorreu porque o método da bissecção ignora raízes com multiplicidade par, que é o caso de $\xi_1 = 1$.

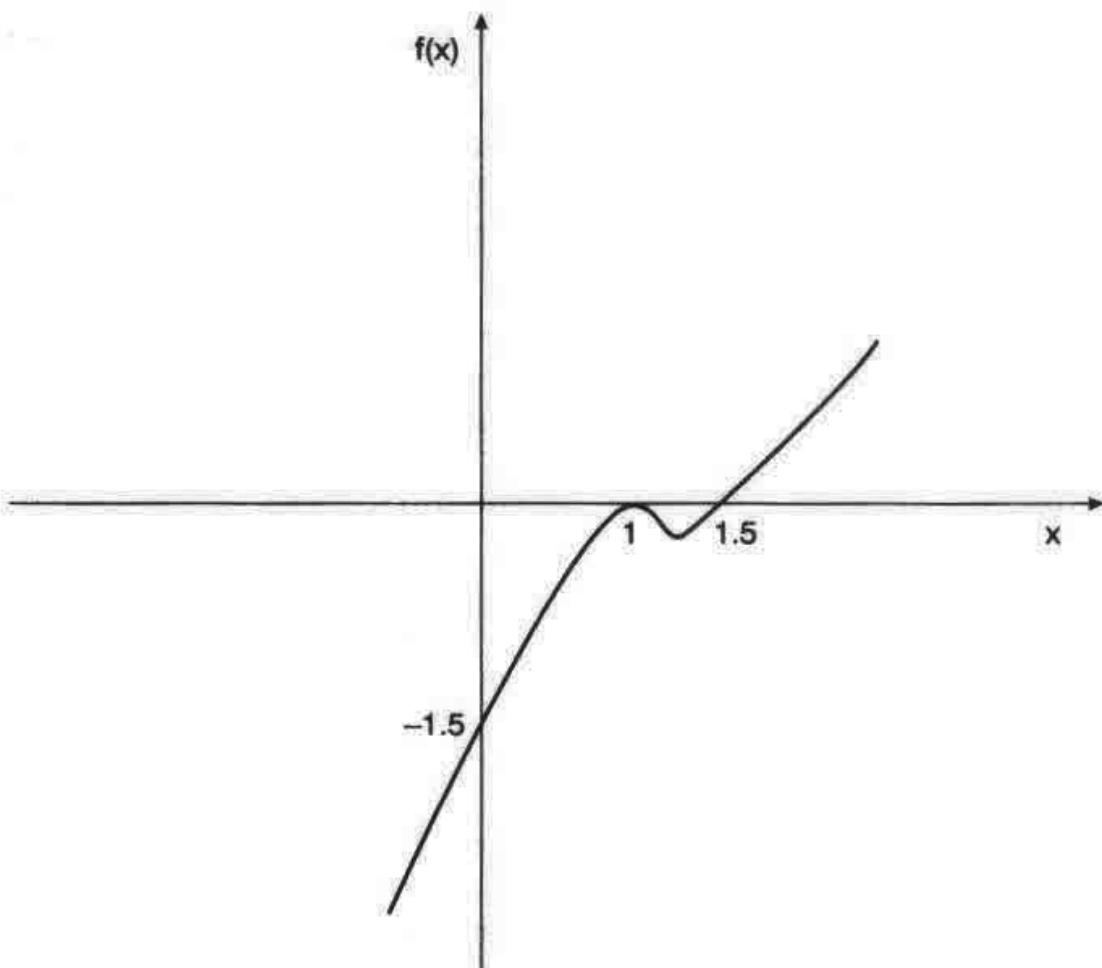


Figura 2.23

2.5 ESTUDO ESPECIAL DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

2.5.1 INTRODUÇÃO

Embora possamos usar qualquer um dos métodos vistos anteriormente para encontrar um zero de um polinômio, o fato de os polinômios aparecerem com tanta freqüência em aplicações faz com que lhes dediquemos especial atenção.

Normalmente, um polinômio de grau n é escrito na forma

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \quad (6)$$

Se $n = 2$, sabemos da álgebra elementar como achar os zeros de $p_2(x)$. Existem fórmulas fechadas, semelhantes à fórmula para polinômios de grau 2, mas bem mais complicadas, para zeros de polinômios de grau 3 e 4. Agora, para $n \geq 5$, em geral, não existem fórmulas explícitas e somos forçados a usar métodos iterativos para encontrar zeros de polinômios.

Vários teoremas da álgebra são úteis na localização e classificação dos tipos de zeros de um polinômio.

Faremos nosso estudo dividido em duas partes:

- 1) localização de raízes,
- 2) determinação das raízes reais.

2.5.2 LOCALIZAÇÃO DE RAÍZES

Alguns teoremas são úteis ao nosso estudo:

TEOREMA 4 (Teorema Fundamental da Álgebra) (4)

“Se $p_n(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, ou seja, $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, a_0, a_1, \dots, a_n reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, então $p_n(x)$ tem pelo menos um zero, ou seja, existe um número complexo ξ tal que $p_n(\xi) = 0$.”

Para determinarmos o número de zeros reais de um polinômio com coeficientes reais, podemos fazer uso da *regra de sinal de Descartes*:

“Dado um polinômio com coeficientes reais, o *número de zeros reais positivos*, p , desse polinômio não excede o número v de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais, $v - p$ é inteiro, par, não negativo”.

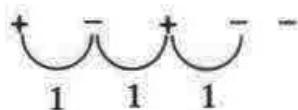
Exemplo 23

a) $p_5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$



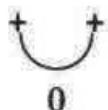
$$\Rightarrow v = 2 \Rightarrow p: \begin{cases} \text{se } v - p = 0, p = 2 \\ \text{se } v - p = 2, p = 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

b) $p_5(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$



$$\Rightarrow v = 3 \text{ e } p: \begin{cases} \text{se } v - p = 0, p = 3 \\ \text{se } v - p = 2, p = 1 \end{cases} \quad \text{ou}$$

c) $p_7(x) = x^7 + 1$



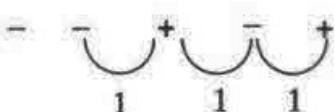
$$\Rightarrow v = 0 \text{ e } p: (v - p \geq 0) \Rightarrow p = 0.$$

Para determinar o número de raízes reais negativas, neg, tomamos $p_n(-x)$ e usamos a regra para raízes positivas:

Exemplo 24

a) $p_5(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$$p_5(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 1$$



$$\Rightarrow v = 3 \text{ e } \text{neg}: \begin{cases} \text{se } v - \text{neg} = 0, \text{neg} = 3 \\ \text{se } v - \text{neg} = 2, \text{neg} = 1 \end{cases} \quad \text{ou}$$

b) $p_5(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1$

$$p_5(-x) = -4x^5 + x^3 + 4x^2 + x - 1$$



$$\Rightarrow v = 2 \text{ e neg: } \begin{cases} \text{se } v - \text{neg} = 0, \text{ neg} = 2 \\ \text{se } v - \text{neg} = 2, \text{ neg} = 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

- c) No caso do exemplo $p_7(x) = x^7 + 1$, vimos que não existe zero positivo. Temos ainda $p_7(0) = 1 \neq 0$. Como

$$p_7(-x) = -x^7 + 1$$



$\Rightarrow v = 1 \text{ e neg: } \{v - \text{neg} = 0 \Rightarrow \text{neg} = 1\}$, ou seja, $p_n(x) = 0$, não tem raiz real positiva, o zero não é raiz e tem apenas uma raiz real negativa donde tem três raízes complexas conjugadas.

TEOREMA 5

Dado o polinômio $p_n(x)$ de grau n, se o desenvolvermos por Taylor em torno do ponto $x = \alpha$, temos

$$p_n(x) \approx p_n(\alpha) + p'_n(\alpha)(x - \alpha) + \frac{p''_n(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \dots + \frac{p_n^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n.$$

Se chamarmos $x - \alpha = y$, ao acharmos o número de raízes reais de $p_n(y) = 0$ que são maiores que zero estaremos encontrando o número de raízes de $p_n(x) = 0$ que são maiores que α .

Podemos usar este resultado juntamente com a regra de sinal de Descartes para analisar as raízes de um determinado polinômio.

Se estamos interessados em estimar o número de zeros que um polinômio possui num intervalo $[\alpha, \beta]$ podemos também usar as *seqüências de Sturm*, que são construídas da seguinte maneira:

Dado o polinômio $p_n(x)$ e um número real α , vamos definir $\tilde{v}(\alpha)$ como sendo o número de variações de sinal em $\{g_i(\alpha)\}$ onde construímos a seqüência $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \dots, g_n(\alpha)$, ignorando os zeros, assim:

$$\begin{cases} g_0(x) = p_n(x) \\ g_1(x) = p'_n(x) \end{cases}$$

e, para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de g_{k-2} por g_{k-1} , com sinal trocado.

Exemplo 25

$$p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\begin{cases} g_0(x) = p_3(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) = p'_3(x) = 3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

$$g_2(x) = ?$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - x + 1 \\ -x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \\ \hline \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \\ -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} \\ \hline -\frac{8}{9}x + \frac{10}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow g_2(x) = \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}.$$

$$g_3(x) = ?$$

$$3x^2 + 2x - 1$$

$$\frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$$

$$\frac{27}{8}x + \frac{207}{32}$$

$$\frac{99}{16}$$

$$\Rightarrow g_3(x) = -\frac{99}{16}.$$

Assim, se $\alpha = 2$, por exemplo, temos

$$g_0(\alpha) = 11 > 0$$

$$g_1(\alpha) = 15 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} g_2(\alpha) = \frac{2}{3} > 0 \\ g_3(\alpha) = -\frac{99}{16} < 0 \end{array} \right] 1$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(\alpha) = \tilde{v}(2) = 1.$$

TEOREMA 6 (de Sturm) (17,30)

Se $p_n(\alpha) \neq 0$ e $p_n(\beta) \neq 0$, então o número de raízes distintas $p_n(x) = 0$ no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é exatamente $\tilde{v}(\alpha) - \tilde{v}(\beta)$.

Tomando $\beta = 3$, por exemplo, no polinômio do exemplo anterior:

$$g_0(\beta) = 34 > 0$$

$$g_1(\beta) = 32 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} g_2(\beta) = \frac{14}{9} > 0 \\ g_3(\beta) = -\frac{99}{16} < 0 \end{array} \right] 1$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(\beta) = \tilde{v}(3) = 1.$$

Então $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ não possui raízes reais no intervalo $[2, 3]$ pois $\tilde{v}(2) - \tilde{v}(3) = 1 - 1 = 0$.

Os teoremas a seguir fornecem regiões do plano que contém zeros de polinômios.

TEOREMA 7 (30)

Se $p_n(x)$ é um polinômio com coeficientes a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ como em (6), então $p_n(x)$ tem pelo menos um zero no interior do círculo centrado na origem e de raio igual a $\min\{\rho_1, \rho_n\}$ onde

$$\rho_1 = n \frac{|a_0|}{|a_1|} \quad \rho_n = \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}.$$

Exemplo 26

Se $p_5(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x^2 + 10.8x - 6.8$; $n = 5$, $a_5 = 1$, $a_1 = 10.8$, $a_0 = -6.8$

Assim,

$$\rho_1 = 5 \left(\frac{6.8}{10.8} \right) = 3.14\dots \quad \rho_5 = \sqrt[5]{\frac{6.8}{1}} = 1.46\dots$$

Então $p_5(x)$ tem pelo menos um zero (real ou complexo) no círculo de raio $1.46\dots$ ou seja, $|x| \leq 1.46\dots$

TEOREMA 8

Se $p_n(x)$ é o polinômio (6) e se

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}$$

então cada zero de $p_n(x)$ se encontra na região circular definida por $|x| \leq r$.

Exemplo 27

Seja $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Então $n = 3$, $a_0 = -1$, $a_1 = +1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$

$$\frac{|a_0|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{|a_1|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{|a_2|}{|a_3|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\max_{0 \leq k \leq 2} \frac{|a_k|}{|a_3|} = \max \{1, 1, 1\} = 1.$$

Assim, $r = 1 + 1 = 2$. Então, todos os zeros de $p_3(x)$ se encontram num disco centrado na origem e com raio 2.

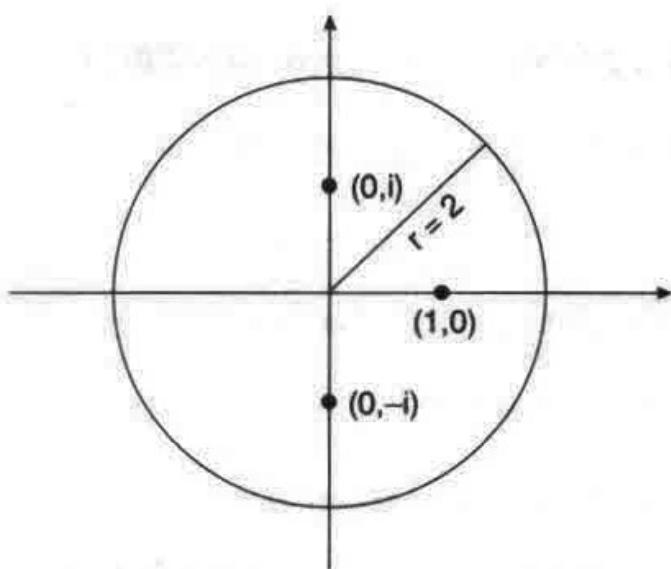


Figura 2.24

De fato, os zeros de $p_3(x)$ são:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = i$$

$$x_3 = -i.$$

2.5.3 DETERMINAÇÃO DAS RAÍZES REAIS

Para se obter raízes reais de equações polinomiais, pode-se aplicar qualquer um dos métodos numéricos estudados anteriormente.

Contudo, estas equações surgem tão freqüentemente que merecem um estudo especial, conforme comentamos no início desta seção.

Conforme vimos, um polinômio de grau n com coeficientes reais será representado na forma (6) onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, ou seja:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Estudaremos um processo para se calcular o valor numéricico de um polinômio, isto porque em qualquer dos métodos este cálculo deve ser feito uma ou mais vezes por iteração.

Por exemplo, no método de Newton, a cada iteração deve-se fazer uma avaliação do polinômio e uma de sua derivada.

MÉTODO PARA SE CALCULAR O VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Para simplificar, estudaremos o processo analisando um polinômio de grau 4:

$$p_4(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (7)$$

Este polinômio pode ser escrito na forma:

$$p_4(x) = (((a_4 x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0, \quad (8)$$

conhecida como forma dos *parênteses encaixados*.

Deve-se observar que, se o valor numéricico de $p_4(x)$ for calculado pelo processo (8), o número de operações será bem menor que pelo processo (7).

Para um polinômio genérico de grau n , vemos que, pelo processo (8), teremos de efetuar n multiplicações e n adições.

No entanto, pelo processo (7), o número de adições é também n mas o número de multiplicações é $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{(1 + n)n}{2}$ desde que x^j seja calculado por $x \cdot x \cdot x \cdots \cdot x$, j vezes, pois a potenciação calculada desta forma introduz erros menores de arredondamento.

Agora,

$$\frac{n + n^2}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} > n \Leftrightarrow n \geq 2, \text{ ou seja,}$$

o processo (8) efetua realmente um número menor de operações que o processo (7).

Temos então, no caso de $n = 4$, que

$$p_4(x) = (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

$\overbrace{\quad\quad\quad}$
 b_4
 $\overbrace{\quad\quad\quad}$
 b_3
 $\overbrace{\quad\quad\quad}$
 b_2

Para se calcular o valor numérico de $p_4(x)$ em $x = c$, basta fazer sucessivamente:

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 \\ b_3 &= a_3 + b_4 c \\ b_2 &= a_2 + b_3 c \\ b_1 &= a_1 + b_2 c \\ b_0 &= a_0 + b_1 c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(c) = b_0.$$

Portanto, para $p_n(x)$ de grau n qualquer, calculamos $p_n(c)$ calculando as constantes b_j , $j = n, n-1, \dots, 1, 0$ sucessivamente, sendo:

$$b_n = a_n$$

$$b_j = a_j + b_{j+1}c \quad j = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$$

e b_0 será o valor de $p_n(x)$ para $x = c$.

Como calcular o valor de $p'_n(x)$ em $x = c$ usando os coeficientes b_j obtidos anteriormente? Tomando como exemplo o polinômio de grau 4, temos

$$p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'_4(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Para $x = c$, temos que

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 & \Rightarrow a_4 &= b_4 \\ b_3 &= a_3 + b_4c & \Rightarrow a_3 &= b_3 - b_4c \\ b_2 &= a_2 + b_3c & \Rightarrow a_2 &= b_2 - b_3c \\ b_1 &= a_1 + b_2c & \Rightarrow a_1 &= b_1 - b_2c \\ b_0 &= a_0 + b_1c & \Rightarrow a_0 &= b_0 - b_1c \end{aligned}$$

Dado que já conhecemos b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$\begin{aligned} p'_4(c) &= 4a_4c^3 + 3a_3c^2 + 2ac + a_1 \\ &= 4b_4c^3 + 3(b_3 - b_4c)c^2 + 2(b_2 - b_3c)c + (b_1 - b_2c) \\ &= 4b_4c^3 - 3b_4c^3 + 3b_3c^2 - 2b_3c^2 + 2b_2c + b_1 - b_2c. \end{aligned}$$

$$\text{Assim } p'_4(c) = b_4c^3 + b_3c^2 + b_2c + b_1$$

Aplicando o mesmo esquema anterior, teremos

$$\begin{aligned} c_4 &= b_4 \\ c_3 &= b_3 + c_4c \\ c_2 &= b_2 + c_3c \\ c_1 &= b_1 + c_2c. \end{aligned}$$

Calculamos, pois, os coeficientes c_j , $j = n, n-1, \dots, 1$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \\ c_j &= b_j + c_{j+1} \quad j = n-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Teremos então $p'(c) = c_1$.

MÉTODO DE NEWTON PARA ZEROS DE POLINÔMIOS

Seja $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e x_0 uma aproximação inicial para a raiz procurada.

Conforme vimos, o método de Newton consiste em desenvolver aproximações sucessivas para ξ a partir da iteração:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$$

Usando as observações anteriores sobre o cálculo de $p(x_k)$ e $p'(x_k)$, construímos o seguinte:

ALGORITMO 6

Dados a_0, a_1, \dots, a_n , coeficientes de $p_n(x)$, x a aproximação inicial, ε_1 e ε_2 precisões desejadas e fixado $itmax$, o número máximo de iterações que serão permitidas,

- 1) $deltax = x$
- 2) $\left[\begin{array}{l} \text{Para } k = 1, \dots, itmax, \text{ faça:} \\ \quad b = a_n \\ \quad c = b \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Para } i = (n-1), \dots, 1, \text{ faça:} \\ \quad \quad b = a_i + bx \\ \quad \quad c = b + cx \\ \quad \quad b = a_0 + bx \\ \quad \text{Se } |b| \leq \varepsilon_1 \text{ vá para o passo 4} \\ \quad deltax = b/c \\ \quad x = x - deltax \\ \quad \text{Se } |deltax| \leq \varepsilon_2 \text{ vá para o passo 4} \end{array} \right. \end{array} \right.$

- 3) Imprimir mensagem de que não houve convergência com “itmax” iterações.
- 4) FIM.

Exemplo 28

Dada a equação polinomial $x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x^2 + 10.8x - 6.8 = 0$, temos que

$$p_5(1) = -2.1$$

$$p_5(2) = 3.6.$$

Então, existe uma raiz no intervalo (1,2).

Partindo de $x_0 = 1.5$ e considerando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$, o método de Newton para polinômios fornece:

$$\bar{x} = x_5 = 1.7, \quad f(\bar{x}) = 1.91 \times 10^{-6} \quad \text{e} \quad |x_5 - x_4| = 2.62 \times 10^{-7}.$$

Exemplo 29

Consideremos agora $p_3(x) = x^3 - 3x + 3 = 0$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$. A Figura 2.25 mostra o gráfico cartesiano de $p_3(x)$.

Vemos assim que $x^3 - 3x + 3 = 0$ tem uma única raiz no intervalo (-3, -1.5).

Executamos o método de Newton para polinômios, para este polinômio, duas vezes:

- i) com $x_0 = -0.8$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$, $\text{itmax} = 30$
- ii) com $x_0 = -2$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$, $\text{itmax} = 10$

Veja o efeito de pegarmos x_0 próximo a um zero da derivada e depois x_0 próximo à raiz:

No caso (i) foi encontrada $\bar{x} = -2.103801$ com $|f(\bar{x})| = 2.4 \times 10^{-7}$ em 17 iterações.

No caso (ii) foi obtido exatamente o mesmo resultado em 3 iterações.

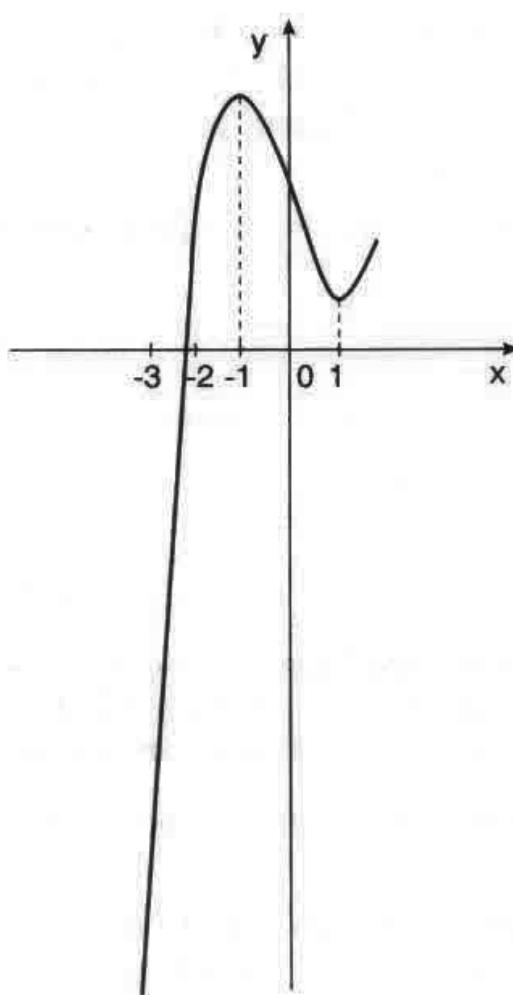


Figura 2.25

EXERCÍCIOS

1. Localize graficamente as raízes das equações a seguir:

a) $4 \cos(x) - e^{2x} = 0$

b) $\frac{x}{2} - \operatorname{tg}(x) = 0$

c) $1 - x \ln(x) = 0$

d) $2^x - 3x = 0$

e) $x^3 + x - 1000 = 0$