CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

3.1 INTRODUÇÃO

A resolução de sistemas lineares é um problema que surge nas mais diversas áreas.

Exemplo 1

Considere o problema de determinar as componentes horizontal e vertical das forças que atuam nas junções da treliça abaixo:

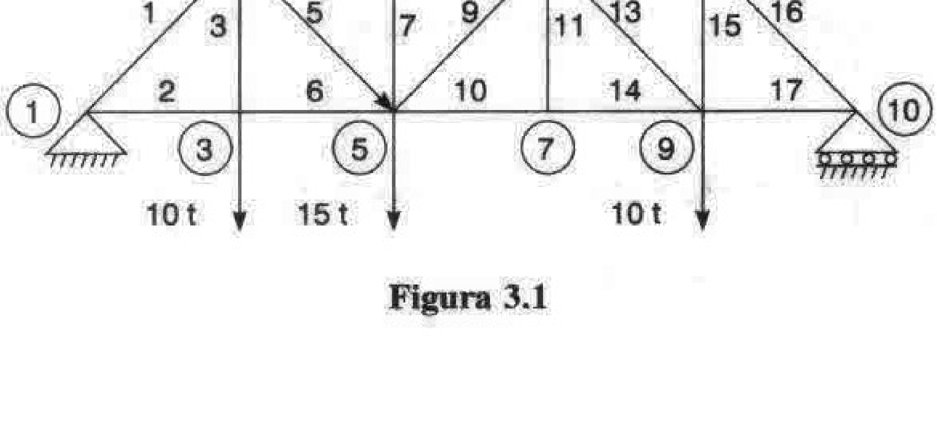


Figura 3.1

Para isto, temos de determinar as 17 forças desconhecidas que atuam nesta treliça. As componentes da treliça são supostamente presas nas junções por pinos, sem fricção.

Um teorema da mecânica elementar nos diz que, como o número de junções j está relacionado ao número de componentes m por $2j - 3 = m$, a treliça é estaticamente determinante; isto significa que as forças componentes são determinadas completamente pelas condições de equilíbrio estático nos nós.

Sejam F_x e F_y as componentes horizontal e vertical, respectivamente. Fazendo $\alpha = \text{sen}(45^o) = \cos(45^o)$ e supondo pequenos deslocamentos, as condições de equilíbrio são:

$$\text{Junção 2} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0 \\ \Sigma F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 3} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \Sigma F_y = f_3 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 4} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_4 + f_8 = 0 \\ \Sigma F_y = -f_7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 5} \begin{cases} \Sigma F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0 \\ \Sigma F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 6} \begin{cases} \Sigma F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} = 0 \\ \Sigma F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção 7}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_{10} + f_{14} = 0 \\ \Sigma F_y = f_{11} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 8}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} = 0 \\ \Sigma F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 9}\begin{cases}\Sigma F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} = 0 \\ \Sigma F_y = \alpha f_{13} + f_{15} - f_{10} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 10}\ \{\Sigma F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} = 0$$

Portanto, para obter as componentes pedidas é preciso resolver esse sistema linear, que tem 17 variáveis: $f_1, f_2, ..., f_{17}$ e 17 equações.

Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde

a_{ij} : coeficientes $\quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$

x_j : variáveis $\quad j = 1,..., n$

b_i : constantes $\quad i = 1,..., m$

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j, $(j = 1,..., n)$, caso eles existam, que satisfaçam as m equações simultaneamente.

Usando notação matricial, o sistema linear pode ser assim representado:

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$ é o vetor das variáveis

e

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$ é o vetor constante.

Chamaremos de x^* o vetor solução e de $\bar{x}$, uma solução aproximada do sistema linear $Ax = b$.

A formulação matricial do sistema $Ax = b$ do Exemplo 1, que será resolvido no final deste capítulo, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix}
-\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1
\end{bmatrix}$$

$$b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0]^T$$

$$x = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad f_{14} \quad f_{15} \quad f_{16} \quad f_{17}]^T$$

Analisaremos a seguir, através de exemplos com duas equações e duas variáveis, as situações que podem ocorrer com relação ao número de soluções de um sistema linear.

i) Solução única:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases} \quad \text{com } x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ii) Infinitas soluções:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \tag{2}$$

para o qual, qualquer $x^* = (\alpha, 3 - 2\alpha)^t$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, é solução.

iii) Nenhuma solução:

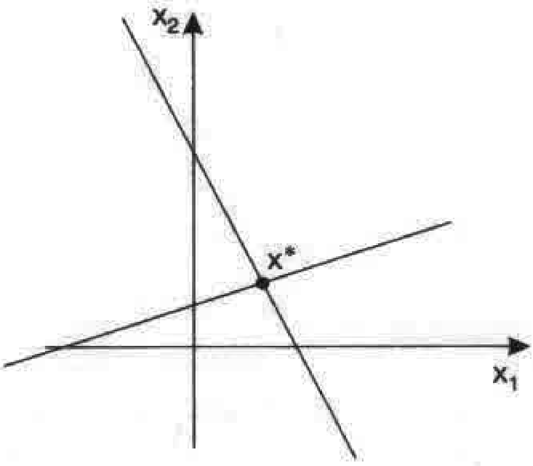
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Graficamente, cada um desses casos é representado respectivamente por:

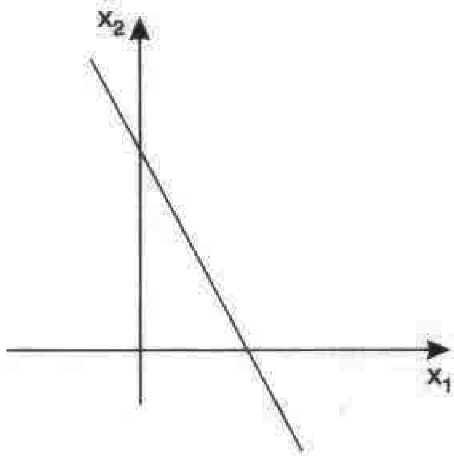
(1) retas concorrentes

(2) retas coincidentes

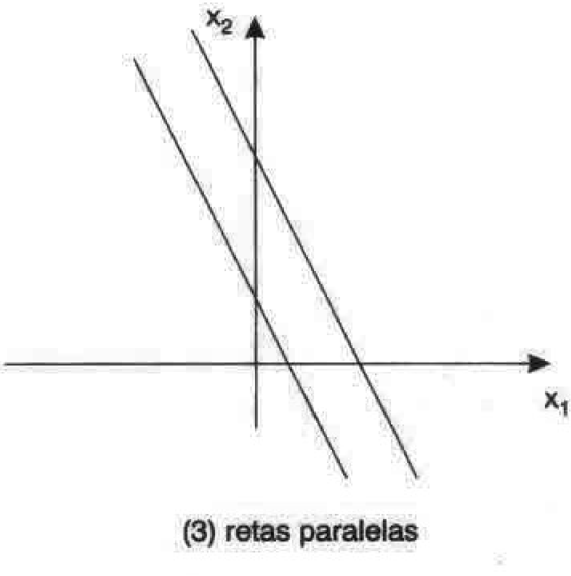
(3) retas paralelas



(1) retas concorrentes



(2) retas coincidentes



(3) retas paralelas

Figura 3.2

Mesmo no caso geral em que o sistema linear envolve m equações e n variáveis, apenas uma entre as situações abaixo irá ocorrer:

i) o sistema linear tem solução única;

ii) o sistema linear admite infinitas soluções;

iii) o sistema linear não admite solução.

No caso em que $m = n = 2$ este fato foi facilmente verificado através dos gráficos das retas envolvidas no sistema, conforme mostra a Figura 3.2. Para analisar o caso geral, m equações e n variáveis, usaremos conceitos de Álgebra Linear.

Consideremos a matriz A: $m \times n$ como uma função que a cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ associa um vetor $b \in \mathbb{R}^m$, $b = Ax$:

$$\begin{aligned} A:\ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & x \to b = Ax \end{aligned}$$

Então, resolver o sistema linear $Ax = b$ consiste em:

"dado $b \in \mathbb{R}^m$ obter, caso exista, $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $Ax = b$".

A resolução de $Ax = b$ nos leva a encontrar respostas para as seguintes perguntas:

- existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax^* = b$?
- se existir, x^* é único?
- como obter x^*?

Consideremos a matriz A: 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz associa a um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^2$ um outro vetor do $\mathbb{R}^2$.

Por exemplo:

se $v = (1\ 1)^T$ então: $u = Av = (3\ \ -2)^T$;

se $w = (2\ -1)^T$ então: $t = Aw = (3\ \ 5)^T$;

e, dado $b = (3\ -2)^T$, existe um único $x^* = (1\ 1)^T$ tal que $Ax^* = b$, conforme podemos comprovar graficamente através da Figura 3.2 (1).

Graficamente:

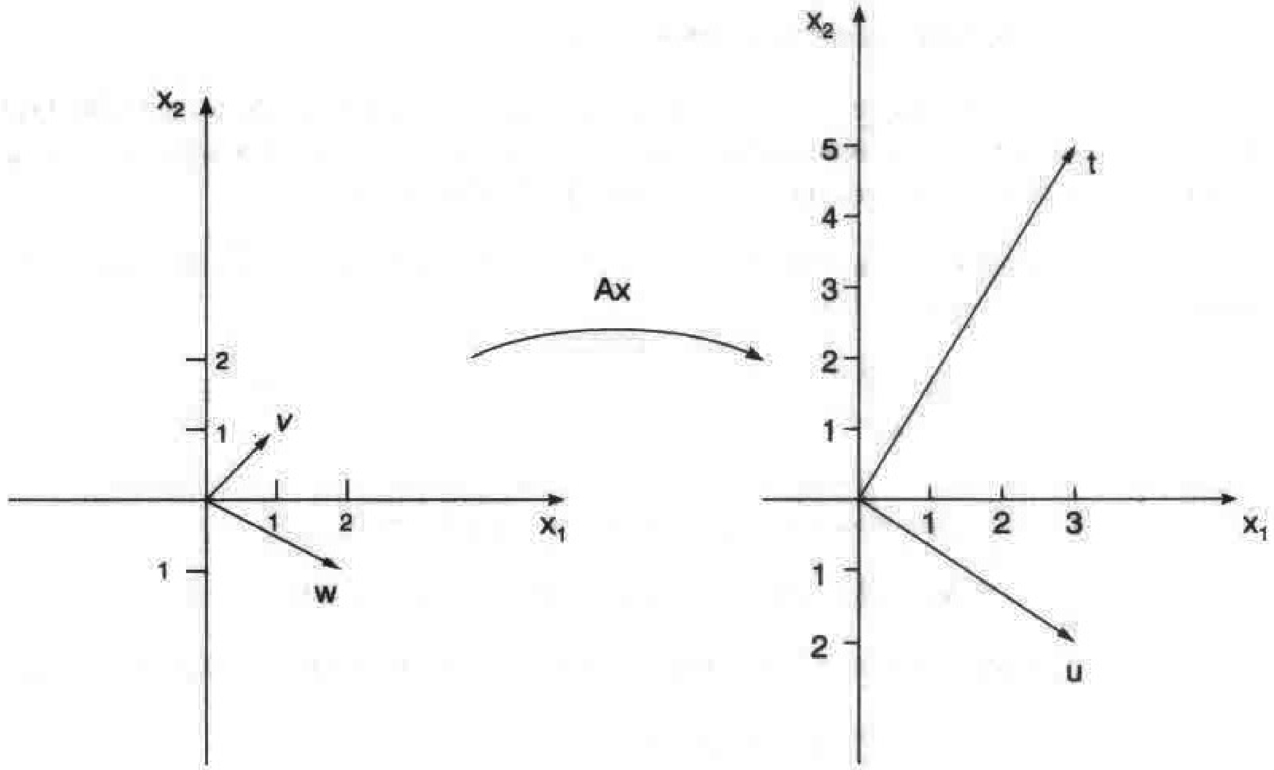


Figura 3.3

Dada uma matriz A: m × n, definimos o conjunto Imagem de A (denotado por Im(A)) por:

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax\}$$

O conjunto Im(A) é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$.

Sob o ponto de vista das colunas de A, resolver o sistema linear $Ax = b$, A: m × n implica em se obter os escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que permitem escrever o vetor b de $\mathbb{R}^m$ como combinação linear das n colunas de A.

$$b = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

No sistema (1) as colunas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes e portanto formam uma base para o $\mathbb{R}^2$. Então, dado qualquer $u \in \mathbb{R}^2$, existem e são únicos os escalares $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$u = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Para este caso, temos $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$.

Na Figura 3.4 representamos os vetores coluna de A: $a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e o vetor $u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2a^1 + a^2$:

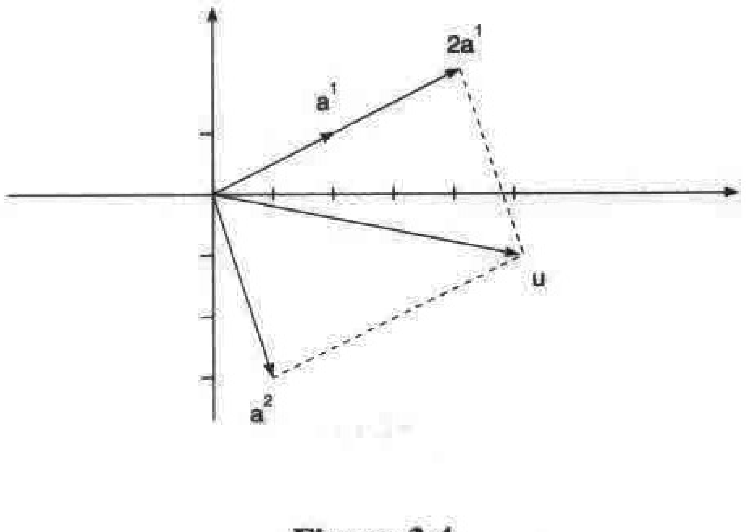


Figura 3.4

Definimos:

Posto(A) = dimensão(Im(A)) = dim(Im(A)).

Retomando os sistemas lineares (1), (2) e (3) do início desta secção:

caso *i*): solução única $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$

neste caso, já vimos anteriormente que $Im(A) = \mathbb{R}^2$, portanto existe um único $x^* = (1 \ \ 1)^T$ tal que $b = 1a^1 + 1a^2$. Graficamente:

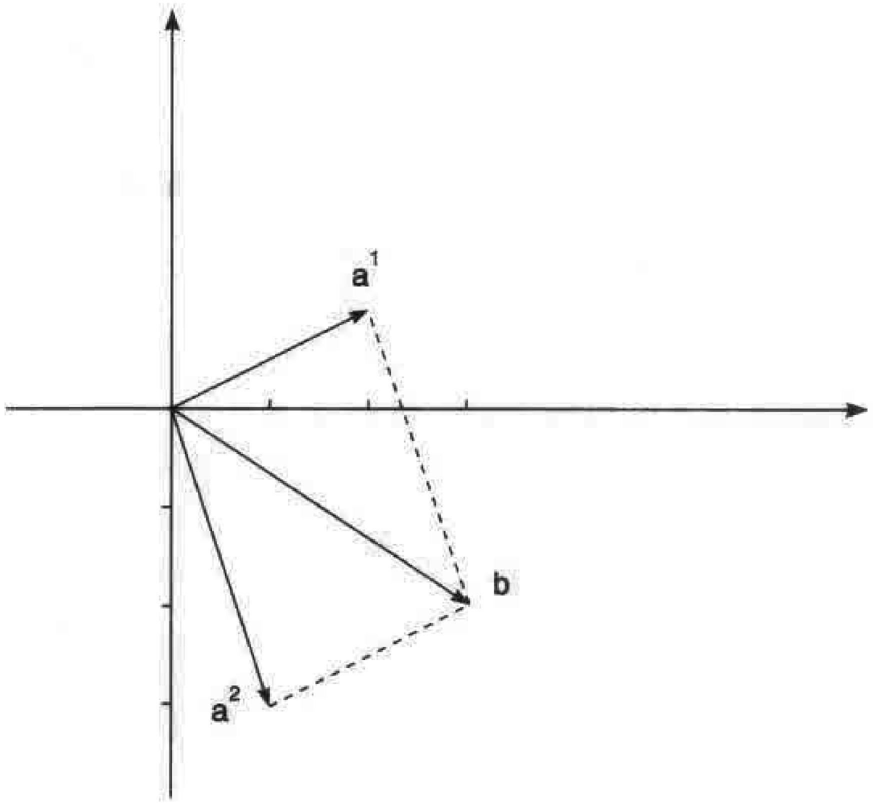


Figura 3.5

Assim, o sistema (1) é *compatível determinado.*

Nos casos (*ii*) e (*iii*) a matriz A dos coeficientes é $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ na qual: $a^1 = 2a^2$.

Estas colunas são pois linearmente dependentes e conseqüentemente não formam uma base para o $\mathbb{R}^2$; para esta matriz, posto(A) = dim(Im(A)) = 1. Dado um vetor $b \in \mathbb{R}^2$, se $b \in \text{Im}(A)$ o sistema linear $Ax = b$ admitirá infinitas soluções e será *compatível indeterminado*. Se $b \notin \text{Im}(A)$, o sistema linear não admitirá solução e será *incompatível*.

No caso (*ii*) $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ pertence a Im(A):

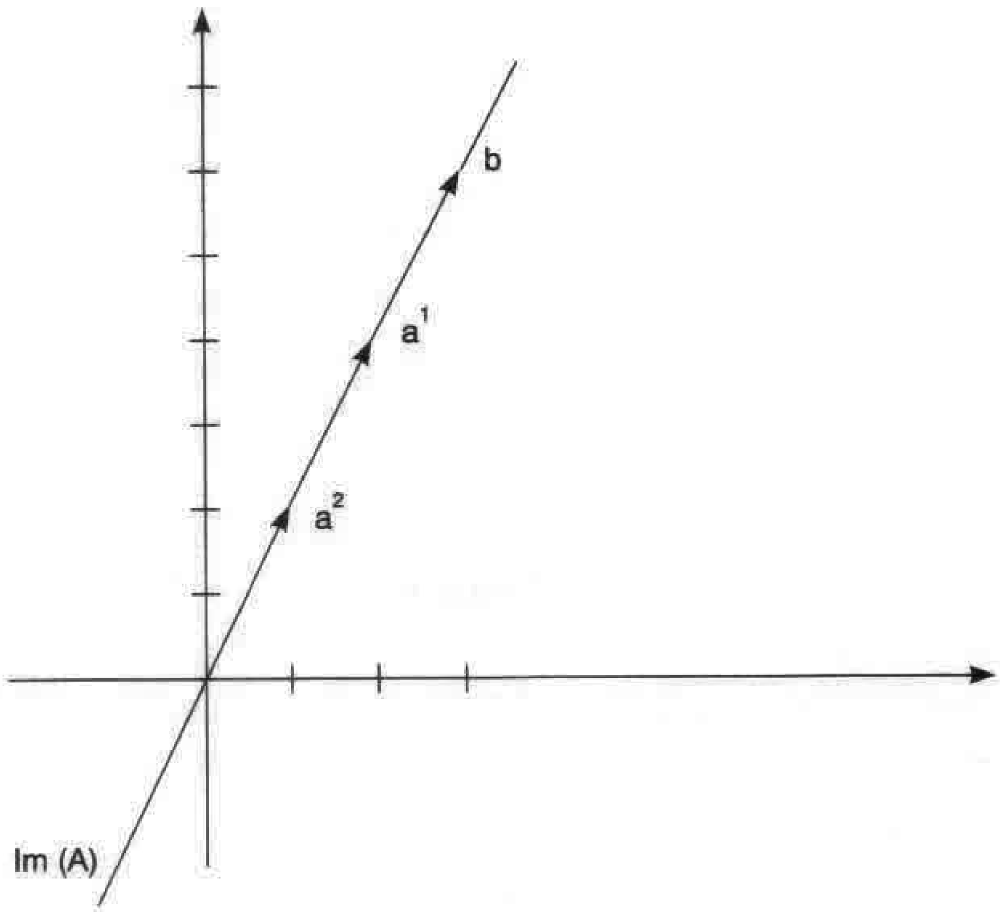


Figura 3.6

$$b = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (3 - 2\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ para qualquer } \alpha \in \mathbb{R}.$$

No caso (*iii*), $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ não pertence a Im(A):

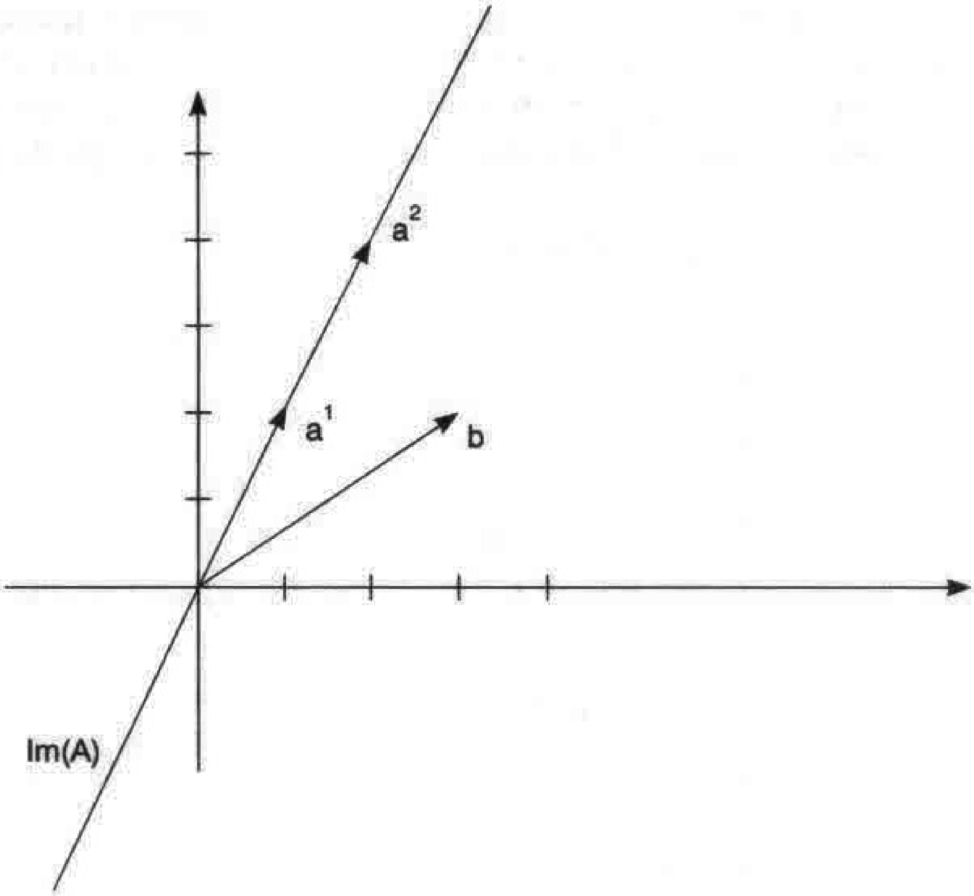


Figura 3.7

Nos casos em que $m \neq n$, embora tenhamos situações semelhantes, gostaríamos de observar que:

i) posto(A) $\leq$ min{m,n}

ii) se $m < n$ o sistema linear $Ax = b$ nunca poderá ter solução única pois posto(A) < n, sempre. Ilustrando,

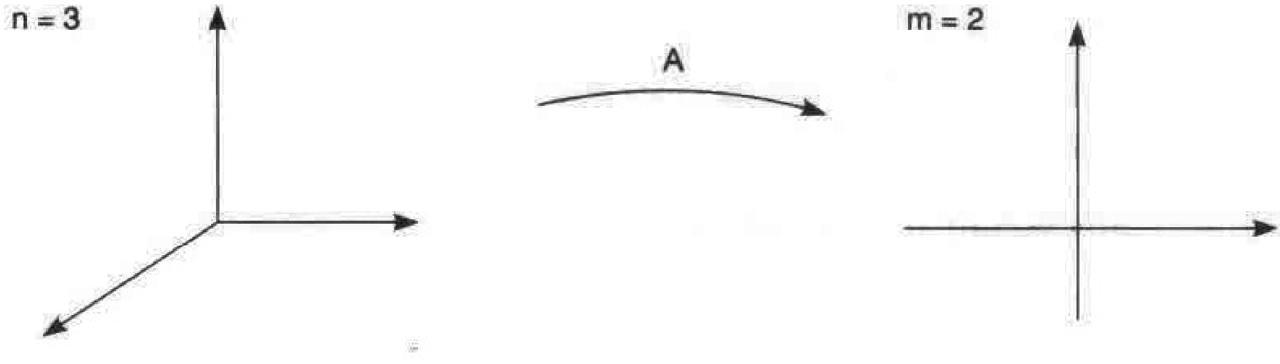


Figura 3.8

Por exemplo, consideremos o sistema linear:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Eliminando x_2 da 2ª equação e substituindo na 1ª equação obtemos $x_1 = 12 + x_3$ e teremos o conjunto das infinitas soluções dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } x = (12 + x_3 \quad 9 - x_3 \quad x_3)^T\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } x = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall \ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Neste exemplo, posto(A) = m = 2 < n = 3 e o sistema é compatível indeterminado.

iii) se m > n, mesmo que posto(A) = n o sistema pode não ter solução pois a situação $b \notin Im(A)$ ocorre com freqüência:

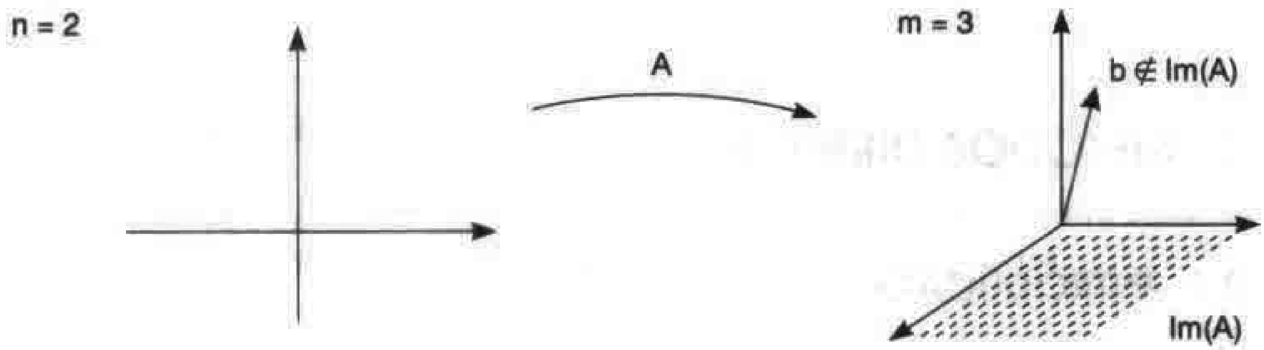


Figura 3.9

A tabela a seguir apresenta um resumo de todas as possibilidades para sistemas lineares:

Dada A, matriz m × n usaremos na tabela a seguinte definição:

Se posto(A) = min{m, n}, então A é posto-completo.

Se posto(A) < min{m, n}, então A é posto-deficiente.

Matriz A		$m = n$	$m < n$	$m > n$
Posto Completo		(posto(A) = n) Compatível determinado	(posto(A) = m) Infinitas soluções	(posto(A) = n) $b \in$ Im(A), solução única $b \notin$ Im(A), incompatível
Posto Deficiente	$b \in$ Im(A)	Infinitas soluções	Infinitas soluções	Infinitas soluções
	$b \notin$ Im(A)	Incompatível	Incompatível	Incompatível

Neste capítulo apresentaremos métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares $n \times n$.

Os métodos numéricos para resolução de um sistema linear podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

Métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Os *métodos iterativos* geram uma seqüência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições esta seqüência converge para a solução x^*, caso ela exista.

3.2 MÉTODOS DIRETOS

3.2.1 INTRODUÇÃO

Pertencem a esta classe todos os métodos estudados nos cursos de 1º e 2º graus, destacando-se a regra de Cramer. Este método, aplicado à resolução de um sistema $n \times n$ envolve o cálculo de $(n + 1)$ determinantes de ordem n. Se n for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será $21 \times 20! \times 19$ multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetue cerca de cem milhões de multiplicações por segundo levaria 3×10^5 anos para efetuar as operações necessárias.

Desta forma, o estudo de métodos mais eficientes é necessário, pois, em geral, os problemas práticos exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte, isto é, sistemas que envolvem um grande número de equações e variáveis.

Devemos observar que no caso de sistemas lineares $n \times n$, com solução única, o vetor x^* é dado por: $x^* = A^{-1}b$. No entanto, calcular explicitamente a matriz A^{-1} e em seguida efetuar o produto $A^{-1}b$ é desaconselhável, uma vez que o número de operações envolvidas é grande, o que torna este processo não competitivo com os métodos que estudaremos a seguir.

3.2.2 MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Entre os métodos diretos, destacam-se os métodos de eliminação que evitam o cálculo direto da matriz inversa de A e além disto não apresentam problemas com tempo de execução como a regra de Cramer.

O método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata. Dizemos que dois sistemas lineares são *equivalentes* quando possuem a mesma solução.

Veremos a seguir um algoritmo para resolução de sistemas triangulares e estudaremos como o método da Eliminação de Gauss efetua a transformação do sistema linear original no sistema triangular equivalente.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS TRIANGULARES

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde A: matriz $n \times n$, triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

x_{n-1} pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se $x_{n-2}, \ldots, x_2$ e finalmente x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

ALGORITMO 1: Resolução de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_2, x_1$ são assim obtidas:

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para $k = (n-1), \ldots, 1$

$$\left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ s = s + a_{kj}x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array}\right.$$

DESCRIÇÃO DO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Conforme dissemos anteriormente, o método consiste em transformar convenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.

Para modificar convenientemente o sistema linear dado de forma a obter um sistema equivalente, faremos uso do teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

TEOREMA 1

Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

i) trocar duas equações;

ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;

iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.

Descreveremos a seguir como o método da Eliminação de Gauss usa este teorema para triangularizar a matriz A. Vamos supor que $\det(A) \neq 0$.

A eliminação é efetuada por colunas e chamaremos de etapa k do processo a fase em que se elimina a variável x_k das equações $k + 1, k + 2, \ldots, n$.

Usaremos a notação $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final da k-ésima etapa, bem como $b_i^{(k)}$ será o i-ésimo elemento do vetor constante no final da etapa k.

Considerando que $\det(A) \neq 0$, é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição a_{11} seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (*i*):

$$\text{Seja } A^{(0)} \mid b^{(0)} = A \mid b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right)$$

onde $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

Etapa 1:

A eliminação da variável x_1 das equações i = 2, ..., n é feita da seguinte forma: da equação i subtraímos a 1ª equação multiplicada por m_{i1}. Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \ldots, n$.

Os elementos $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, $i = 2, \ldots, n$ são os *multiplicadores* e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é denominado *pivô* da 1ª etapa.

Ao final desta etapa teremos a matriz:

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots\ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots\ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots\ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

onde

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \ldots, n$$

$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

e

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad i = 2, \ldots, n \ \text{ e } \ j = 1, \ldots, n$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad i = 2, \ldots, n$$

Etapa 2:

Deve-se ter pelo menos um elemento $a_{i2}^{(1)} \neq 0$, para $i = 2,..., n$, caso contrário, $\det(A^{(1)}) = 0$, o que implica que $\det(A) = 0$; mas $\det(A) \neq 0$, por hipótese.

Então, é sempre possível reescrever a matriz $A^{(1)}$, sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô, $a_{22}^{(1)}$, seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3,..., n$.

A variável x_2 é eliminada das equações $i = 3,..., n$ da seguinte forma: da equação i subtraímos a segunda equação multiplicada por m_{i2}.

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)} | b^{(2)}$:

$$A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{1n}^{(2)} & & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

onde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$ para $i = 1, 2$ e $j = i, i+1, \ldots n$

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)}$ para $i = 1, 2$

e

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)}$ para $i = 3,..., n$ e $j = 2,..., n$

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)}$ para $i = 3,..., n$

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa (n – 1) e a matriz, ao final desta etapa, será:

$$A^{(n-1)} \mid b^{(n-1)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots\dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots\dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots\dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

e o sistema linear $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

Exemplo 2

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Etapa 1:

Eliminar x_1 das equações 2 e 3:

Para facilitar o entendimento do processo, de agora em diante usaremos a notação L_i para indicar o vetor linha formado pelos elementos da linha i da matriz $A^{(k)} \mid b^{(k)}$. Assim, nesta etapa, $L_1 = (3 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 1)$.

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$m_{21} = 1/3$

$m_{31} = 4/3$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right)$$

Etapa 2:

Eliminar x_2 da equação 3:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

$m_{32} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$

$$\Rightarrow A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 = 1 \\ \qquad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \qquad\qquad - \quad 8x_3 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é o vetor $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ALGORITMO 2: Resolução de Ax = b através da Eliminação de Gauss.

Seja o sistema linear $Ax = b$, $A: n \times n$, $x: n \times 1$, $b: n \times 1$.

Supor que o elemento que está na posição a_{kk} é diferente de zero no início da etapa k.

Eliminação

$$\left[\begin{array}{l} \text{Para } k = 1, \ldots, n-1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \qquad m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \qquad a_{ik} = 0 \\ \qquad \text{Para } j = k+1, \ldots n \\ \qquad a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj} \\ \qquad b_i = b_i - m b_k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Resolução do sistema:

$$\left[\begin{array}{l} x_n = b_n / a_{nn} \\ \text{Para } k = (n-1), \ldots 2,1 \\ \left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \left[s = s + a_{kj} x_j \right. \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

O algoritmo acima efetua, na fase da eliminação, $(4n^3 + 3n^2 - 7n)/6$ operações e, para resolver o sistema triangular superior, o número de operações efetuadas é n^2.

Assim, o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método da Eliminação de Gauss é $(4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$.

ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

Vimos que o algoritmo para o método da Eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \qquad i = k + 1, \ldots, n$$

em cada etapa k do processo.

O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero?

Estes dois casos merecem atenção especial pois é impossível trabalhar com um pivô nulo. E trabalhar com um pivô próximo de zero pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Isto porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com aritmética de precisão finita, e pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que, por sua vez, origina uma ampliação dos erros de arredondamento.

Para se contornar estes problemas deve-se adotar uma *estratégia de pivoteamento*, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal.

ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL

Esta estratégia consiste em:

i) no início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes: $a_{ik}^{(k-1)}$, $i = k, k+1, \ldots, n$;

ii) trocar as linhas k e i se for necessário.

Exemplo 3

n = 4 e k = 2

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Início da etapa 2:

i) escolher pivô

$$\max_{j=2,3,4} |a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3 \Rightarrow \text{pivô} = -3$$

ii) trocar linhas 2 e 3.

Assim,

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

e os multiplicadores desta etapa serão:

$$m_{32} = \frac{1}{-3} = -1/3$$

$$m_{42} = \frac{2}{-3} = -2/3$$

Observamos que a escolha do maior elemento em módulo entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que evita a ampliação dos erros de arredondamento.

ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO COMPLETO

Nesta estratégia, no início da etapa k é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação:

$$\max_{\forall\, i,j \geq k} |a_{ij}^{(k-1)}| = |a_{rs}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{pivô} = a_{rs}^{(k-1)}$$

Observamos que, no Exemplo 3, se fosse adotada esta estratégia, o pivô da etapa 2 seria $a_{34}^{(1)} = 7$, o que acarretaria a troca das colunas 2 e 4 e, em seguida, das linhas 2 e 3, donde:

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Esta estratégia não é muito empregada, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos $a_{ij}^{(k-1)}$, $i, j \geq k$ e troca de linhas e colunas, conforme vimos no exemplo anterior; é evidente que todo este processo acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial.

Exemplo 4

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Inicialmente vamos resolvê-lo sem a estratégia de pivoteamento parcial e vamos supor que temos de trabalhar com aritmética de três dígitos. Nosso sistema é:

$$\begin{cases} 0.2 \times 10^{-3}x_1 + 0.2 \times 10^{1}x_2 = 0.5 \times 10^{1} \\ 0.2 \times 10^{1}x_1 + 0.2 \times 10^{1}x_2 = 0.6 \times 10^{1} \end{cases}$$

Então,

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^{1} & 0.5 \times 10^{1} \\ 0.2 \times 10^{1} & 0.2 \times 10^{1} & 0.6 \times 10^{1} \end{array}\right)$$

Etapa 1:

Pivô: 0.2×10^{-3}

$$m_{21} = (0.2 \times 10^{1})/(0.2 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^{4} = 0.1 \times 10^{5} \text{ e } a_{21}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \times m_{21} &= 0.2 \times 10^{1} - (0.2 \times 10^{1}) \times (0.1 \times 10^{5}) = \\ &= 0.2 \times 10^{1} - 0.2 \times 10^{5} = -0.2 \times 10^{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2}^{(1)} = b_{2}^{(0)} - b_{1}^{(0)} \times m_{21} &= 0.6 \times 10^{1} - (0.5 \times 10^{1}) \times (0.1 \times 10^{5}) = \\ &= 0.6 \times 10^{1} - 0.5 \times 10^{5} = -0.5 \times 10^{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^{1} & 0.5 \times 10^{1} \\ 0 & -0.2 \times 10^{5} & -0.5 \times 10^{5} \end{array}\right)$$

E a solução do sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$ resultante é

$$-0.2 \times 10^{5}x_2 = -0.5 \times 10^{5} \Rightarrow x_2 = (0.5)/(0.2) = 2.5 = 0.25 \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 \times 10^{-3}x_1 + 0.2 \times 10^{1} \times 0.25 \times 10^{1} = 0.5 \times 10^{1}$$

$$\Rightarrow \quad 0.2 \times 10^{-3}x_1 = 0.5 \times 10^{1} - 0.05 \times 10^{2} = 0.5 \times 10^{1} - 0.5 \times 10^{1} = 0$$

e, portanto, $\bar{x} = (0 \quad 2.5)^T$.

É fácil verificar que $\bar{x}$ não satisfaz a segunda equação, pois

$2 \times 0 + 2 \times 2.5 = 5 \neq 6.$

Usando agora a estratégia de pivoteamento parcial (e ainda aritmética de três dígitos), temos

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

Assim o pivô é 0.2×10^1 e $m_{21} = (0.2 \times 10^{-3})/(0.2 \times 10^1) = 0.1 \times 10^{-3}$. De forma análoga ao que fizemos acima, obtemos o novo sistema

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0 & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

cuja solução é $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \times 10^1 \end{pmatrix}$

E o vetor $\bar{x}$ é realmente a solução do nosso sistema, pois

$$0.2 \times 10^{-3} \times 0.5 + 0.2 \times 10^1 \times 0.25 \times 10^1 = 0.1 \times 10^{-3} + 0.05 \times 10^2 = 0.5 \times 10^1 = 5$$

e

$$\begin{aligned} &0.2 \times 10^1 \times 0.5 + 0.2 \times 10^1 \times 0.25 \times 10^1 = 0.1 \times 10^1 + 0.05 \times 10^2 = \\ &= 0.01 \times 10^2 + 0.05 \times 10^2 = 0.06 \times 10^2 = 0.6 \times 10^1 = 6. \end{aligned}$$

3.2.3 FATORAÇÃO LU

Seja o sistema linear $Ax = b$.

O *processo de fatoração* para resolução deste sistema consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma seqüência de sistemas lineares que nos conduzirá à solução do sistema linear original.

Por exemplo, se pudermos realizar a fatoração: A = CD, o sistema linear Ax = b pode ser escrito:

$$(CD)x = b$$

Se y = Dx, então resolver o sistema linear Ax = b é equivalente a resolver o sistema linear Cy = b e, em seguida, o sistema linear Dx = y.

A vantagem dos processos de fatoração é que podemos resolver qualquer sistema linear que tenha A como matriz dos coeficientes. Se o vetor b for alterado, a resolução do novo sistema linear será quase que imediata.

A fatoração LU é um dos processos de fatoração mais empregados. Nesta fatoração a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior.

CÁLCULO DOS FATORES L e U

Os fatores L e U podem ser obtidos através de fórmulas para os elementos l_{ij} e u_{ij}, ou então, podem ser construídos usando a idéia básica do método da Eliminação de Gauss.

A obtenção dos fatores L e U pelas fórmulas dificulta o uso de estratégias de pivoteamento e, por esta razão, veremos como obter L e U através do processo de Gauss.

Usaremos um exemplo teórico de dimensão 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Trabalharemos somente com a matriz dos coeficientes. Seja então:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix} = A$$

Os multiplicadores da etapa 1 do processo de Gauss são:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{e} \quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{(supondo que } a_{11}^{(0)} \neq 0\text{)}$$

Para eliminar x_1 da linha i, i = 2, 3, multiplicamos a linha 1 por m_{i1} e subtraímos o resultado da linha i.

Os coeficientes $a_{ij}^{(0)}$ serão alterados para $a_{ij}^{(1)}$, onde:

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \qquad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(0)} \qquad \text{para } i = 2, 3 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

Estas operações correspondem a se pré-multiplicar a matriz $A^{(0)}$ pela matriz $M^{(0)}$, onde

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois:}$$

$$M^{(0)}A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} & a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

Portanto, $M^{(0)}A^{(0)} = A^{(1)}$ onde $A^{(1)}$ é a mesma matriz obtida no final da etapa 1 do processo de Gauss.

Supondo agora que $a_{22}^{(1)} \neq 0$, o multiplicador da etapa 2 será: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Para eliminar x_2 da linha 3, multiplicamos a linha 2 por m_{32} e subtraímos o resultado da linha 3.

Os coeficientes $a_{ij}^{(1)}$ serão alterados para:

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 2, 3$$

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - m_{32}\, a_{2j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 2, 3$$

As operações efetuadas em $A^{(1)}$ são equivalentes a pré-multiplicar $A^{(1)}$ por $M^{(1)}$, onde

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois:}$$

$$M^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - m_{32}a_{22}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Portanto, $M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$ onde $A^{(2)}$ é a mesma matriz obtida no final da etapa 2 do método da Eliminação de Gauss.

Temos então que:

$A = A^{(0)}$

$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$

$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A^{(0)} = M^{(1)}M^{(0)}A$

onde $A^{(2)}$ é triangular superior.

É fácil verificar que:

$$(M^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (M^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $A = (M^{(1)} M^{(0)})^{-1} A^{(2)} = (M^{(0)})^{-1} (M^{(1)})^{-1} A^{(2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = LU$$

Ou seja: $L = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}$ e $U = A^{(2)}$.

Isto é, fatoramos a matriz A em duas matrizes triangulares L e U, sendo que o fator L é triangular inferior com diagonal unitária e seus elementos l_{ij} para $i > j$ são os multiplicadores m_{ij} obtidos no processo da Eliminação de Gauss; o fator U é triangular superior e é a matriz triangular superior obtida no final da fase da triangularização do método da Eliminação de Gauss.

TEOREMA 2: (Fatoração LU)

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A. Suponha que $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, ..., (n - 1)$. Então, existe uma única matriz triangular inferior $L = (m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$ e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tais que $LU = A$. Ainda mais, $\det(A) = u_{11}u_{22} \dots u_{nn}$.

Demonstração: ver [13]

RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR Ax = b USANDO A FATORAÇÃO LU DE A

Dados o sistema linear $Ax = b$ e a fatoração LU da matriz A, temos:

$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema linear pode ser obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

Verifiquemos teoricamente que o vetor y é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da Eliminação de Gauss.

Considerando o sistema linear $Ly = b$, temos que $y = L^{-1} b$.

Mas, $L = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} \Rightarrow L^{-1} = M^{(1)}M^{(0)}$.

Então, $y = M^{(1)}M^{(0)}b^{(0)}$, onde $b^{(0)} = b$

Temos que

$$M^{(0)} b^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ b_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} - m_{21}b_1^{(0)} \\ b_3^{(0)} - m_{31}b_1^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} = b^{(1)}.$$

Isto é, o vetor obtido após o produto de $M^{(0)}$ por $b^{(0)}$ é o mesmo vetor do lado direito obtido após a etapa 1 do processo da Eliminação de Gauss.

Obtido $b^{(1)}$, temos que $y = M^{(1)}b^{(1)} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} - m_{32}b_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix} = b^{(2)}.$$

Exemplo 5

Resolver o sistema linear a seguir usando a fatoração LU:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Usando o processo de Gauss, sem estratégia de pivoteamento parcial, para triangularizar A, temos:

Etapa 1:

Pivô = $a_{11}^{(0)} = 3$

Multiplicadores: $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{1}{3}$ e $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{4}{3}$.

Então,

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1 \end{array} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que os elementos $a_{21}^{(1)}$ e $a_{31}^{(1)}$ são nulos, podemos guardar os multiplicadores nestas posições, então:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \cline{1-1} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{array}\right).$$

Etapa 2:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

Multiplicadores: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

Teremos:

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2 \end{array} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Os fatores L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo L(Ux) = b:

i) Ly = b

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$

$y = (1 \quad 5/3 \quad 0)^T$

ii) Ux = y:

$$Ux = y \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 4x_3 = 1 \\ \qquad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \qquad\qquad\quad - \ \ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$x = (-3 \quad 5 \quad 0)^T$.

FATORAÇÃO LU COM ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL

Estudaremos a aplicação da estratégia de pivoteamento parcial à fatoração LU. Esta estratégia requer permutação de linhas na matriz $A^{(k)}$, quando necessário. Por este motivo, veremos inicialmente o que é uma matriz de permutação e, em seguida, como se usa a estratégia de pivoteamento parcial no cálculo dos fatores L e U e quais os efeitos das permutações realizadas na resolução dos sistemas lineares Ly = b'e Ux = y.

Uma matriz quadrada de ordem n é uma *matriz de permutação* se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas (ou colunas).

Pré-multiplicando-se uma matriz A por uma matriz de permutação P obtém-se a matriz PA com as linhas permutadas e esta permutação de linhas é a mesma efetuada na matriz identidade para se obter P.

Exemplo 6

Sejam

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Seja o sistema linear $Ax = b$ e sejam os fatores L e U obtidos pelo processo da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial.

L e U são fatores da matriz A', onde A' é a matriz A com as linhas permutadas, isto é, $A' = PA$

Mas as mesmas permutações efetuadas nas linhas de A devem ser efetuadas sobre o vetor b, uma vez que permutar as linhas de A implica permutar as equações de $Ax = b$.

Seja então $b' = Pb$

O sistema linear $A'x = b'$ é equivalente ao original e, se $A' = LU$, teremos $A'x = b' \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$

Resolvemos então os sistemas triangulares:

i) $Ly = Pb$

ii) $Ux = y$ e obtemos a solução do sistema linear original.

Exemplo 7

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 \qquad - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Etapa 1:

Pivô: $4 = a_{31}^{(0)}$; então devemos permutar as linhas 1 e 3:

$$A'^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A'^{(0)} = P^{(0)}A^{(0)}$$

Efetuando a eliminação em $A'^{(0)}$:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{pmatrix}.$$

Etapa 2:

Pivô: $-4 = a_{32}^{(1)}$, então devemos permutar as linhas 2 e 3:

$$A'^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{pmatrix}, \quad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A'^{(1)} = P^{(1)}A^{(1)}$$

Efetuando a eliminação temos:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{pmatrix}.$$

Os fatores L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{pmatrix}$$

e estes são os fatores da matriz $A' = PA$ onde $P = P^{(1)} P^{(0)}$, isto é:

$$A' = PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) $Ly = Pb$ onde

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ 3/4y_1 + y_2 = 9 \\ 1/4y_1 - 1/2y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{pmatrix}$$

ii) Ux = y

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 - 3x_3 = -2 \\ -4x_2 + 13/4x_3 = 21/2 \\ 35/8x_3 = 35/4 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Considerando uma matriz geral, A: n × n. Se A é não singular, então no início da etapa k da fase de eliminação existe pelo menos um elemento não nulo entre os elementos $a_{kk}^{(k-1)}, \ldots, a_{nk}^{(k-1)}$ de modo que através de uma troca de linhas sobre $A^{(k-1)}$ é sempre possível obter a matriz $A'^{(k-1)}$ com elemento não nulo na posição (k, k). Desta forma, os cálculos necessários em cada etapa da eliminação podem ser realizados e os fatores L e U da matriz PA serão unicamente determinados, onde $P = P^{(n-1)} P^{(n-2)} \ldots P^{(0)}$ e $P^{(k)}$ representa a troca de linhas efetuada na etapa k.

As permutações de linha realizadas durante a fatoração podem ser representadas através de um vetor n × 1, que denotaremos por p, definido por p(k) = i se na etapa k a linha i da matriz original $A^{(0)}$ for a linha pivotal.

Considerando o Exemplo 7, teríamos inicialmente: p = (1 2 3). No início da etapa 1, a linha 3 é a pivotal, então p = (3 2 1). No início da etapa 2, a linha 3 da matriz $A^{(1)}$ é a linha pivotal, então p = (3 1 2).

ALGORITMO 3: Resolução de Ax = b através da fatoração LU com pivoteamento parcial

Considere o sistema linear Ax = b, A: n × n; o vetor p representará as permutações realizadas durante a fatoração.

(Cálculo dos fatores:)

```
Para i = 1, . . . , n
[ p(i) = i

Para k = 1, . . . , (n - 1)
[ pv = |a(k, k)|
| r = k
| Para i = (k + 1), . . . , n
| [ se (|a(i, k)| > pv), faça:
| | [ pv = |a(i, k)|
| | [ r = i
|
| se pv = 0, parar; a matriz A é singular
| se r ≠ k, faça:
| [ aux = p(k)
| | p(k) = p(r)
| | p(r) = aux
| | Para j = 1, . . . , n
| | [ aux = a(k, j)
| | | a(k, j) = a(r, j)
| | [ a(r, j) = aux
|
| Para i = (k + 1), . . . , n
| [ m = a(i, k)/a(k, k)
| | a(i, k) = m
| | para j = (k + 1), . . . , n
| [ a(i, j) = a(i, j) - ma(k, j)
```

(Resolução dos sistemas triangulares)

```
           Para i = 1, . . . , n
c = Pb   [ r = p(i)
         [ c(i) = b(r)
```

```
         Para i = 1, . . . , n
         [ soma = 0
Ly = c   | Para j = 1, . . . , (i - 1)
         | [ soma = soma + a(i, j)y(j)
         | y(i) = c(i) - soma

         Para i = n, (n - 1), . . . , 1
         [ soma = 0
Ux = y   | Para j = (i + 1), . . . , n
         | [ soma = soma + a(i, j)x(j)
         | x(i) = (y(i) - soma)/a(i, i)
```

3.2.4 FATORAÇÃO DE CHOLESKY

Uma matriz A: $n \times n$ é *definida positiva* se $x^TAx > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

A resolução de sistemas lineares em que a matriz A é simétrica, definida positiva, é freqüente em problemas práticos e tais matrizes podem ser fatoradas na forma:

$$A = GG^T$$

onde G: $n \times n$ é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos. Esta fatoração é conhecida como *fatoração de Cholesky*.

Seja A: $n \times n$ e vamos supor que A satisfaça as hipóteses do Teorema 2. Então, A pode ser fatorada, de forma única, como $LD\overline{U}$ (ver Exercício 12) com:

L: $n \times n$, triangular inferior com diagonal unitária;

D: $n \times n$, diagonal e

$\overline{U}$: $n \times n$, triangular superior com diagonal unitária.

Se, além das hipóteses do Teorema 2, a matriz for simétrica, demonstra-se [14] que $\overline{U} = L^T$, e, então, a fatoração fica: $A = LDL^T$.

Exemplo 8

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix}$$

Calculando os fatores L e U de A e, em seguida, os fatores L, D e $\overline{U}$, teremos:

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

i) $\overline{u}_{ij} = u_{ij} / u_{ii}$;

ii) como a matriz A é simétrica, $\overline{U} = L^T$.

Se A for definida positiva, os elementos da matriz D são estritamente positivos, conforme demonstramos a seguir: como A é definida positiva, temos que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $x^TAx > 0$. Usando a fatoração LDL^T de A, temos:

$$0 < x^TAx = x^T(LDL^T)x = y^TDy.$$

Agora, $y = L^Tx$ e L tem posto completo. Então, $y \neq 0$ pois x é não nulo e, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $y = L^Tx$.

Fazendo $y = e_i$, $i = 1,..., n$, teremos: $e_i^T De_i = d_{ii}$, e, como $y^TDy > 0$, qualquer $y \neq 0$, obtemos: $d_{ii} > 0$, $i = 1,...,n$.

Concluindo, se A for simétrica definida positiva, então A pode ser fatorada na forma LDL^T com L triangular inferior com diagonal unitária e D matriz diagonal com elementos na diagonal estritamente positivos.

Podemos escrever então:

$$A = LDL^T = L\bar{D}\bar{D}L^T$$

onde $\bar{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$

e, se $G = L\bar{D}$, obtemos $A = GG^T$ com G triangular inferior com diagonal estritamente positiva.

Formalizamos este resultado no Teorema 3.

TEOREMA 3: (Fatoração de Cholesky)

Se A: n × n é simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular inferior G: n × n com diagonal positiva, tal que $A = GG^T$.

Exemplo 9

Retomando a matriz A do Exemplo 8 e sua fatoração LDL^T, observamos que o fator D é tal que $d_{ii} > 0$, $i = 1,..., 4$.

Fazendo $\bar{D} = D^{1/2}$, teremos:

$$A = LDL^T = L\bar{D}\,\bar{D}L^T = (L\bar{D})\,(\bar{D}L^T) = GG^T$$

$$\text{onde } \overline{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

A matriz G, triangular inferior com diagonal positiva, é o fator de Cholesky da matriz A.

Neste exemplo, o fator de Cholesky foi obtido a partir da fatoração LDL^T, que por sua vez foi obtida a partir da fatoração LU. No entanto, o fator de Cholesky deve ser calculado através da equação matricial $A = GG^T$, uma vez que, assim, os cálculos envolvidos serão reduzidos pela metade.

Cálculo do fator de Cholesky:

É dada A: n × n, matriz simétrica e definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

O fator G: n × n triangular inferior com diagonal positiva será obtido a partir da equação matricial:

$$A = GG^T$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

O cálculo será realizado por colunas:

coluna 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} g_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^2 \\ g_{21}g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{11} \end{pmatrix};$$

então: $g_{11} = \sqrt{a_{11}}$

e $g_{j1} = a_{j1}/g_{11}, \;\; j = 2, \ldots, n;$

coluna 2:

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}g_{21} \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ \vdots \\ g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{pmatrix};$$

então: $g_{21}^2 + g_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$

e $g_{j1}g_{21} + g_{j2}g_{22} = a_{j2}$, $\quad j = 3, \dots, n$.

Os elementos g_{j1} já estão calculados; assim,

$g_{j2} = (a_{j2} - g_{j1}\, g_{21}) / g_{22}$, $\quad j = 3, \dots, n$.

Coluna k:

Para obter os elementos da coluna k de G: $(0 \dots g_{kk}\; g_{k+1k} \dots g_{nk})^T$, $k = 3, \dots, n$, usamos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{kk} \\ a_{k+1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nk} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} g_{k1} \\ g_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{kk} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

e teremos:

$a_{kk} = g_{k1}^2 + g_{k2}^2 + \dots + g_{kk}^2$ e daí

$$g_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ki}^2 \right)^{1/2}$$

e $a_{jk} = g_{j1}g_{k1} + g_{j2}g_{k2} + \dots + g_{jk}g_{kk}$, $j = (k + 1), \dots, n$

Como todos os elementos g_{ik}, $i = 1, \dots, (k - 1)$ já estão calculados, teremos:

$$g_{jk} = \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ji}g_{ki} \right) / g_{kk} \qquad j = (k + 1), \dots, n.$$

ALGORITMO 4: Fatoração de Cholesky

Seja A: n × n, simétrica definida positiva:

```
Para k = 1, . . . , n
[ soma = 0
| Para j = 1, . . . , (k - 1)
| [ soma = soma + g_kj^2
| r = a_kk - soma
| g_kk = (r)^(1/2)
| Para i = (k + 1), . . . , n
| [ soma = 0
| | Para j = 1, . . . , (k - 1)
| | [ soma = soma + g_ij g_kj
| | g_ik = (a_ik - soma) / g_kk
| L
L
```

Na prática, aplicamos a fatoração de Cholesky para verificar se uma determinada matriz A simétrica é definida positiva. Se o algoritmo falhar, isto é, se em alguma etapa tivermos $r \leq 0$, o processo será interrompido e, conseqüentemente, a matriz original não é definida positiva; caso contrário, ao final teremos $A = GG^T$ com o fator conforme descrito no Teorema 3. Demonstra-se (Exercício 21) que uma matriz na forma BB^T é definida positiva, se B tem posto completo.

A fatoração de Cholesky requer cerca de $n^3/3$ operações de multiplicação e adição no cálculo dos fatores, aproximadamente a metade do número de operações necessárias na fase da eliminação da fatoração LU.

Observamos que alguns autores contam uma adição e uma multiplicação como uma operação apenas; assim, para esses autores, a fatoração LU realiza cerca de $n^3/3$ operações e a fatoração de Cholesky, $n^3/6$.

Obtido o fator G, a resolução do sistema linear Ax = b prossegue com a resolução dos sistemas triangulares:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^T)x = b \Rightarrow \begin{cases} i)\ Gy = b \\ ii)\ G^Tx = y \end{cases}$$

3.3 MÉTODOS ITERATIVOS

3.3.1 INTRODUÇÃO

A idéia central dos métodos iterativos é generalizar o método do ponto fixo utilizado na busca de raízes de uma equação que foi visto no Capítulo 2.

Seja o sistema linear $Ax = b$, onde:

A: matriz dos coeficientes, $n \times n$;

x: vetor das variáveis, $n \times 1$;

b: vetor dos termos constantes, $n \times 1$.

Este sistema é convertido, de alguma forma, num sistema do tipo $x = Cx + g$ onde C é matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. Observamos que $\varphi(x) = Cx + g$ é uma função de iteração dada na forma matricial.

É então proposto o esquema iterativo:

Partimos de $x^{(0)}$ (vetor aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:

$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$, (primeira aproximação),

$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$, (segunda aproximação) etc.

De um modo geral, a aproximação $x^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, ou seja, $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$

É importante observar que se a seqüência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ é tal que, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$, então $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é solução do sistema linear $Ax = b$.

3.3.2 TESTES DE PARADA

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por $d^{(k)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

Assim, dada uma precisão ε, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como $\bar{x}$, solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \varepsilon$.

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

Computacionalmente usamos também como teste de parada um número máximo de iterações.

3.3.3 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear $Ax = b$ em $x = Cx + g$ é a seguinte:

Tomamos o sistema original:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, isolamos o vetor x mediante a separação pela diagonal, assim:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases}$$

Desta forma, temos $x = Cx + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \ldots\ldots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}$ ..., $x^{(k)}$... através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases}$$

Exemplo 10

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0.05$.

O processo iterativo é

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10} (7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \dfrac{2}{10} x_2^{(k)} - \dfrac{1}{10} x_3^{(k)} + \dfrac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{5} (-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\dfrac{1}{5} x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5} x_3^{(k)} - \dfrac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{10} (6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\dfrac{2}{10} x_1^{(k)} - \dfrac{3}{10} x_2^{(k)} + 0x_3^{(k)} + \dfrac{6}{10}. \end{cases}$$

Na forma matricial $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ temos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}.$$

Assim (k = 0) temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2\,(-1.6) - 0.1 \times 0.6 + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.2 \times 0.6 - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.3\,(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

ou

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}.$$

Calculando $d_r^{(1)}$, temos:

$$\begin{array}{l} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26 \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26 \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34 \end{array} \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para k = 1:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon$$

e para k = 2:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon .$$

Então, a solução $\bar{x}$ do sistema linear acima, com erro menor que 0.05, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo tomamos $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$. No entanto, o valor de $x^{(0)}$ é arbitrário, pois veremos mais adiante que a convergência ou não de um método iterativo para a solução de um sistema linear de equações é independente da aproximação inicial escolhida.

UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Daremos aqui um teorema que estabelece uma condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi.

TEOREMA 4: (Critério das linhas)

Seja o sistema linear $Ax = b$ e seja $\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$. Se $\alpha = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma seqüência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [30], Capítulo 9.

Exemplo 11

Analisando a matriz A do sistema linear do Exemplo 10,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1; \ \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1; \ \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1 \text{ e}$$

então $\max\limits_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0.5 < 1$ donde, pelo critério das linhas, temos garantia de convergência para o método de Gauss-Jacobi.

Exemplo 12

Para o sistema linear $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$ o método de Gauss-Jacobi gera uma seqüência convergente para a solução exata $x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. (Verifique!) No entanto, o critério das linhas não é satisfeito, visto que $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$. Isto mostra que a condição do Teorema 4 é apenas suficiente.

Exemplo 13

A matriz A do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ \phantom{x_1 +{}} 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ não satisfaz o critério das linhas pois $\alpha_1 = \frac{3 + 1}{1} = 4 > 1$. Contudo, se permutarmos a primeira equação com a segunda, temos o sistema linear $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ \phantom{x_1 +{}} 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ que é equivalente ao sistema original e a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ deste novo sistema satisfaz o critério das linhas.

Assim, é conveniente aplicarmos o método de Gauss-Jacobi a esta nova disposição do sistema, pois desta forma a convergência está assegurada.

Concluindo, sempre que o critério das linhas não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça o critério das linhas. No entanto, nem sempre é possível obter tal disposição, como facilmente verificamos com o sistema linear do Exemplo 12.

3.3.4 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma equivalente $x = Cx + g$ por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\,(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\[2ex] x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\,(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\[2ex] x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\,(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x^{(k)} - \ldots - a_{3n}x^{(k)}) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\,(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Portanto, no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$ usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}$ restantes.

Exemplo 14

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$.

O processo iterativo é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\[1ex] x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\[1ex] x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}. \end{cases}$$

Como $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(k = 0):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.875 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} &|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1 \\ &|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.75 \qquad \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{1}{\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = 1 > \varepsilon \\ &|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.875. \end{aligned}$$

Assim, (k = 1) e

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \times 0.75 + 0.2 \times 0.875 = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \times 1.025 - 0.25 \times (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = -0.5 \times 1.025 - 0.5 \times 0.95 = -0.9875 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} &|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025 \\ &|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.20 \qquad \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.2}{\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon \\ &|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1125 \end{aligned}$$

Continuando as iterações obtemos:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = 0.0409 < \varepsilon.$$

Assim, a solução $\bar{x}$ do sistema linear dado com erro menor que ε, pelo método de Gauss-Seidel, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix}.$$

O esquema iterativo do método de Gauss-Seidel pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

Inicialmente escrevemos a matriz A, dos coeficientes, como $A = L + D + R$, onde:

L : matriz triangular inferior com diagonal nula;

D : matriz diagonal com $d_{ii} \neq 0$, $i = 1,..., n$;

R : matriz triangular superior com diagonal nula.

O modo mais simples de se escrever A nesta forma é

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $Ax = b \Leftrightarrow (L + D + R)x = b \Leftrightarrow Dx = b - Lx - Rx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1} b - D^{-1}Lx - D^{-1}Rx.$$

No método de Gauss-Seidel o vetor $x^{(k+1)}$ é calculado por:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Rx^{(k)}.$$

Agora, podemos ainda escrever $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, considerando que $A = D(L_1 + I + R_1)$ onde:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

então $Ax = b \Leftrightarrow$

$$D(L_1 + I + R_1)\, x = b \Leftrightarrow$$

$$(L_1 + I + R_1)\, x = D^{-1}\, b \Leftrightarrow$$

$x = -L_1x - R_1x + D^{-1}\, b$ e o método de Gauss-Seidel é

$$x^{(k+1)} = -L_1x^{(k+1)} - R_1x^{(k)} + D^{-1}\, b,$$

donde $(I + L_1)\, x^{(k+1)} = -R_1\, x^{(k)} + D^{-1}b$

ou $x^{(k+1)} = \underbrace{-(I + L_1)^{-1}\, R_1}_{C}\, x^{(k)} + \underbrace{(I + L_1)^{-1}\, D^{-1}b}_{g} = Cx^{(k)} + g$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO CASO 2 x 2

Consideremos a aplicação geométrica dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3\,. \end{cases}$$

Preparação:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}\,(3 + x_1)\,. \end{cases}$$

O esquema iterativo para Gauss-Jacobi é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\,(3 + x_1^{(k)}) \end{cases}$$

Teremos:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix};\ x^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

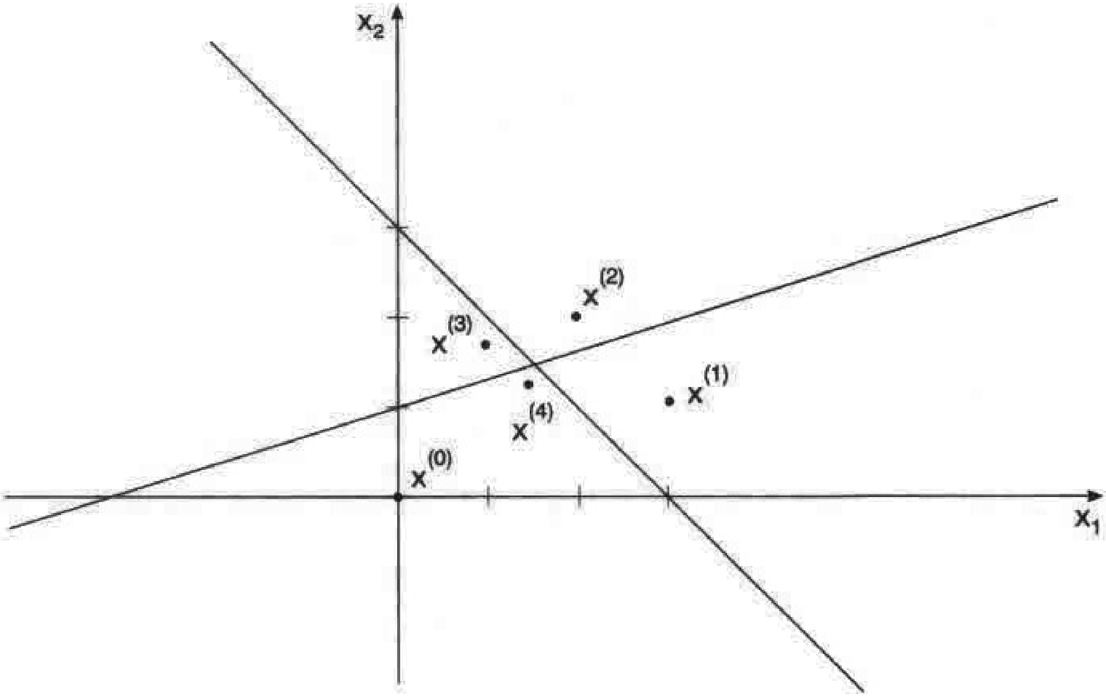


Figura 3.10

O esquema iterativo para Gauss-Seidel é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\,(3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Para melhor visualização gráfica, marcaremos no gráfico os pontos $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$; $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$, ... para k = 0, 1, 2,...

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}, \ldots$$

Observamos que os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação e os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda equação.

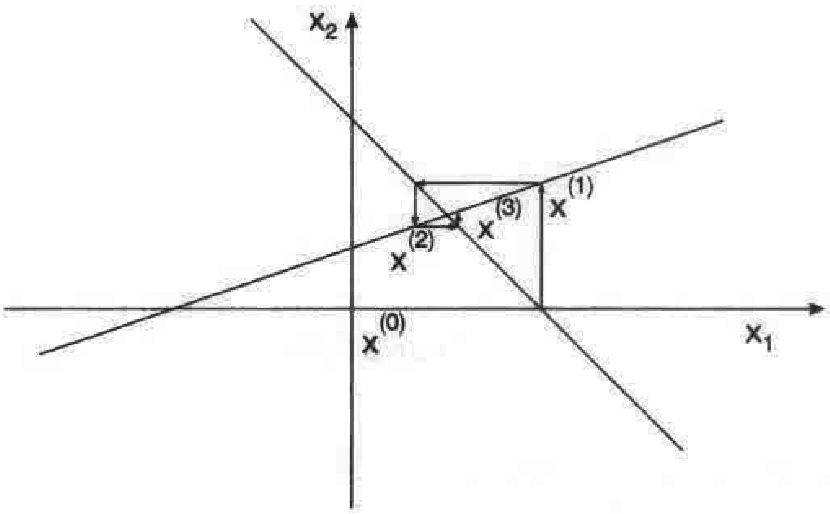


Figura 3.11

Embora a ordem das equações num sistema linear não mude a solução exata, as seqüências geradas pelos métodos de Gauss-Seidel e de Gauss-Jacobi dependem fundamentalmente da disposição das equações.

É fácil verificar que a seqüência $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ está convergindo para a solução exata do sistema linear que é $x^* = (1.5, 1.5)$, tanto no método de Gauss-Jacobi quanto no de Gauss-Seidel.

No entanto, o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência divergente para este mesmo sistema escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

para a qual o esquema iterativo será:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)}. \end{cases}$$

Para $x^{(0)} = (0, 0)^T$ teremos:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}, \ldots$$

Graficamente, comprovamos a divergência de $x^* = (1.5, 1.5)^T$:

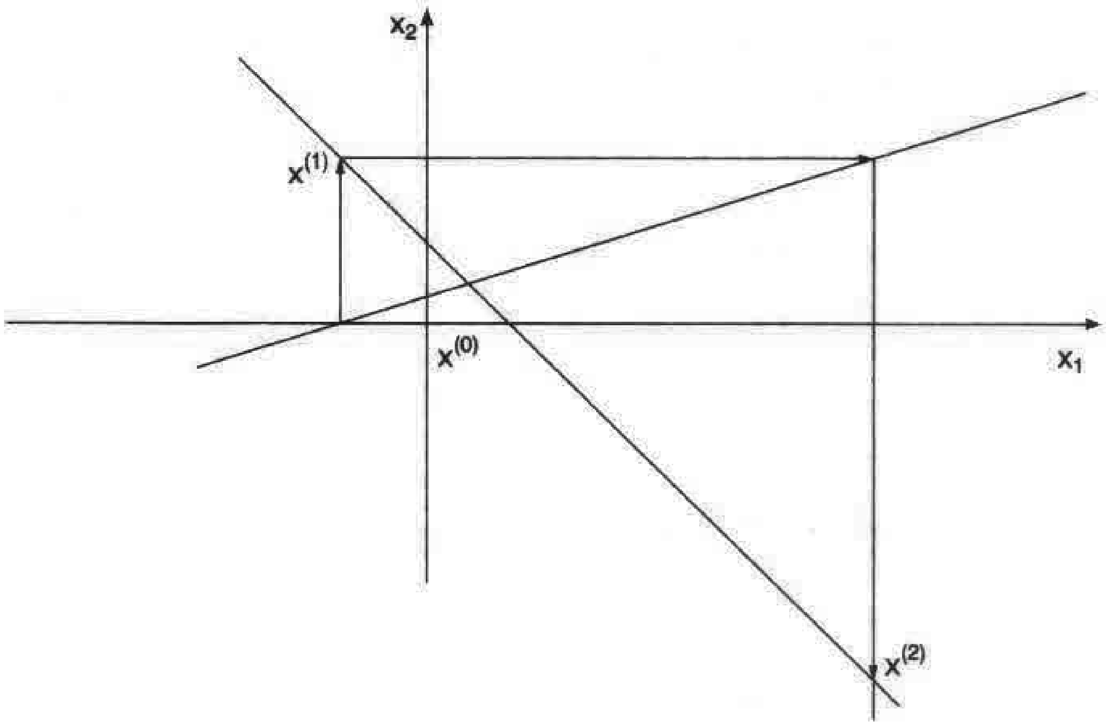


Figura 3.12

ESTUDO DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Como em todo processo iterativo, precisamos de critérios que nos forneçam garantia de convergência.

Para o método de Gauss-Seidel analisaremos os seguintes critérios, que estabelecem condições suficientes de convergência: o critério de Sassenfeld e o critério das linhas.

CRITÉRIO DE SASSENFELD

Seja $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ a solução exata do sistema $Ax = b$ e seja:

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \text{ a k-ésima aproximação de } x^*.$$

Queremos uma condição que nos garanta que $x^{(k)} \to x^*$ quando $k \to \infty$, ou seja, que $\lim_{k \to \infty} e_i^{(k)} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ onde $e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i^*$.

Agora,

$$\begin{cases} e_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{11}} (a_{12}e_2^{(k)} + a_{13}e_3^{(k)} + \ldots + a_{1n}e_n^{(k)}) \\ e_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{22}} (a_{21}e_1^{(k+1)} + a_{23}e_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}e_n^{(k)}) \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \\ e_n^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{nn}} (a_{n1}e_1^{(k+1)} + a_{n2}e_2^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}e_{n-1}^{(k+1)}). \end{cases} \tag{4}$$

Chamemos de $E^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|e_i^{(k)}|\}$ e sejam

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| / |a_{11}| \text{ e para } i = 2, 3, \ldots, n$$

$$\beta_i = [\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|] / |a_{ii}|.$$

Note que a condição $x^{(k)} \to x^*$ equivale a $E^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$.

Mostremos por indução que $E^{(k+1)} \leqslant \beta E^{(k)}$ onde $\beta = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i$.

Para i = 1, temos

$$|e_1^{(k+1)}| \leqslant \frac{1}{|a_{11}|} (|a_{12}||e_2^{(k)}| + |a_{13}||e_3^{(k)}| + \ldots + |a_{1n}||e_n^{(k)}|) \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{|a_{11}|} (|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|)}_{=\beta_1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\}$$

Então, $|e_1^{(k+1)}| \leqslant \beta_1 \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\} \leqslant \beta \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\}$.

Suponhamos por indução que:

$$|e_2^{(k+1)}| \leqslant \beta_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\}$$

$$|e_3^{(k+1)}| \leqslant \beta_3 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$|e_{i-1}^{(k+1)}| \leqslant \beta_{i-1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\} \qquad i \leqslant n$$

e mostraremos que $|e_i^{(k+1)}| \leqslant \beta_i \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\}$.

Mas,

$$|e_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{1}{|a_{ii}|} (|a_{i1}|\,|e_1^{(k+1)}| + |a_{i2}|\,|e_2^{(k+1)}| + \ldots + |a_{i,i-1}|\,|e_{i-1}^{(k+1)}|) +$$

$$\frac{1}{|a_{ii}|} (|a_{i,i+1}|\,|e_{i+1}^{(k)}| + \ldots + |a_{in}|\,|e_n^{(k)}|)$$

e usando a hipótese de indução:

$$|e_i^{(k+1)}| \leqslant \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|}(|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \dots + |a_{ii-1}|\beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}|}_{\beta_i} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{e_j^{(k)}\}$$

ou seja,

$$|e_i^{(k+1)}| \leqslant \beta_i \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\} \leqslant \beta \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\} \quad \forall\ i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Portanto,

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|e_i^{(k+1)}|\} = E^{(k+1)} \leqslant \beta \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|e_j^{(k)}|\} = \beta E^{(k)}. \tag{5}$$

Assim, basta que $\beta < 1$ para que tenhamos $E^{(k+1)} < E^{(k)}$. Além disso, de (5) temos $E^{(k)} \leqslant \beta E^{(k-1)} \leqslant \beta(\beta E^{(k-2)}) \leqslant \dots \leqslant \beta^k E^{(0)}$ e desde que β seja menor que 1, então, $E^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$ e, o que é importante, independentemente da aproximação inicial escolhida.

Com isto estabelecemos o *critério de Sassenfeld:*

Sejam $\beta_1 = \dfrac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$

e $\beta_j = \dfrac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$.

Seja $\beta = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\beta_j\}$.

Se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$.

Além disto, quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

Exemplo 15

a) Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

Para este sistema linear com esta disposição de linhas e colunas, temos

$\beta_1 = [0.5 + 0.1 + 0.1]/1 = 0.7$

$\beta_2 = [(0.2)(0.7) + 0.2 + 0.1]/1 = 0.44$

$\beta_3 = [(0.1)(0.7) + (0.2)(0.44) + 0.2]/1 = 0.358$

$\beta_4 = [(0.1)(0.7) + (0.3)(0.44) + (0.2)(0.358)]/1 = 0.2736.$

Portanto, $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\} = 0.7 < 1$ e então temos a garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma seqüência convergente.

b) Seja agora o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \quad 3x_3 = 3 \end{cases}$$

com esta disposição de linhas e colunas, temos

$\beta_1 = (1 + 3)/2 = 2 > 1!!$

Trocando a 1ª equação pela 3ª, temos

$$\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 = 3 \\ \quad - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

donde $\beta_1 = (0 + 3)/1 = 3 >> 1$!!

A partir desta disposição, trocando a 1ª coluna pela 3ª, temos

$$\begin{cases} 3x_3 \quad\quad\quad + x_1 = 3 \\ x_3 - x_2 \quad\quad\quad = 1 \\ 3x_3 + x_2 + 2x_1 = 9. \end{cases}$$

Desta forma,

$\beta_1 = 1/3$

$\beta_2 = [(1)(1/3) + 0]/1 = 1/3$

$\beta_3 = [(3)(1/3) + (1)(1/3)]/2 = 2/3.$

Portanto, $\beta = \max_{1 \leq i \leq 3} \{\beta_i\} = 2/3 < 1$; então vale o critério de Sassenfeld e temos garantia de convergência.

c) Considerando agora o exemplo usado na interpretação geométrica do método de Gauss-Seidel, verificamos que o critério de Sassenfeld é apenas suficiente, pois para

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3, \end{cases}$$

vimos que o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente e, no entanto,

$\beta_1 = 1/1 = 1$ e

$\beta_2 = [1 \times 1]/3 = 1/3$

e, portanto, o critério de Sassenfeld não é satisfeito.

CRITÉRIO DAS LINHAS

O critério das linhas estudado no método de Gauss-Jacobi pode ser aplicado no estudo da convergência do método de Gauss-Seidel.

O critério das linhas diz que se $\alpha = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1$, onde

$$\alpha_k = \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\Big) / |a_{kk}|$$

então o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente.

A prova da convergência consiste em verificar que se o critério das linhas for satisfeito, automaticamente o critério de Sassenfeld é satisfeito:

$$\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1n}|)/|a_{11}| = \alpha_1 < 1$$

e, para i = 2, ..., k–1, supor por indução que $\beta_i \leq \alpha_i < 1$.

Então,

$$\beta_k = (\beta_1|a_{k1}| + ... + \beta_{k-1}|a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + |a_{kn}|)/|a_{kk}| < (|a_{k1}| + ... +$$

$$+ |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + ... + |a_{kn}|)/a_{kk}| = \alpha_k.$$

Assim, $\beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1,..., n$.

Então, $\alpha_i < 1$ implica que $\beta_i < 1$, $i = 1,..., n$, ou seja, o critério de Sassenfeld é satisfeito.

Observamos, no entanto, que o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja.

Exemplo 16

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 \phantom{{}-x_2} + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

Temos

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{e}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1} = 1; \text{ então o critério das linhas não é satisfeito.}$$

No entanto,

$$\beta_2 = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$$

e

$$\beta_3 = \frac{3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Portanto, o critério de Sassenfeld é satisfeito.

3.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

a) Convergência

Conforme vimos, os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

b) Esparsidade da matriz A

Inúmeros sistemas lineares, que surgem de problemas práticos como discretização de equações diferenciais por método dos elementos finitos ou método de diferenças finitas e descrição de redes de potência, são de grande porte com matriz dos coeficientes esparsa. Para estes casos, são adotados esquemas especiais para armazenamento da matriz A, que tiram proveito de sua esparsidade.

Os métodos diretos quando aplicados a sistemas esparsos provocam preenchimentos na matriz A, isto é, durante o processo de eliminação poderão surgir elementos não nulos em posições a_{ij} que originalmente eram nulas. Para exemplificar, considere a matriz A representada simbolicamente, sendo x a representação de um elemento não nulo:

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & x & x & 0 & x & x \\ x & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 & 0 & x & x & x \\ x & 0 & 0 & x & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Após a 1ª etapa do processo de eliminação teremos:

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & x & x & 0 & x & x \\ x & \bullet & x & \bullet & \bullet & x & \bullet & x \\ 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & 0 \\ x & \bullet & 0 & \bullet & x & x & \bullet & \bullet \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ x & \bullet & x & \bullet & \bullet & x & x & x \\ x & \bullet & 0 & x & \bullet & 0 & x & \bullet \end{pmatrix}$$

onde • representa o elemento não nulo que preencheu uma posição originalmente nula.

Portanto, se a matriz A for esparsa e de grande porte, uma desvantagem dos métodos diretos para a resolução do sistema linear $Ax = b$ é o preenchimento na matriz, exigindo técnicas especiais para escolha do pivô para reduzir este preenchimento. Pode-se conseguir boas implementações para a fatoração LU, empregando-se técnicas de esparsidade, contudo existem situações nas quais pode ser impossível aplicar um método direto, daí a alternativa são os métodos iterativos que têm como principal vantagem não alterar a estrutura da matriz A dos coeficientes.

c) Erros de arredondamento

Vimos que os método diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. Uma forma de amenizar esses problemas é adotar técnicas de pivoteamento. Os métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, independe da aproximação inicial. Desta forma, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução, pois os erros cometidos nas iterações anteriores não levarão à divergência do processo nem à convergência a um outro vetor que não a solução.

3.5 EXEMPLOS FINAIS

Exemplo 17

Retomando o Exemplo 1 da Introdução, com $\alpha = \text{sen}(45^\circ) = \sqrt{2}/2$, resolvemos o sistema linear resultante pelo método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial. Obtivemos o vetor solução:

$$(-29.247105, 19, 10, -28, 13.853892, 19, 0, -28, 9.235928, 22, 0, -16, -9.235928, 22, 16, -24.629141, 16)^T.$$

Permutando algumas linhas de forma que os elementos da diagonal principal fossem não nulos, conseguimos o esquema iterativo do método de Gauss-Seidel. No entanto, a seqüência gerada divergiu da solução.

Exemplo 18

Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 & -3 & -1 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 9 & -3 \\ 9 & 3 & 5 & 1 & 0 & 5 & 6 & -5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & -5 & 7 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 & 9 & 9 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 0 & 4 & 3 & 7 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 6 & 8 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 & -7 & 7 & -7 & 6 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 8 & 3 & -5 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 \\ 45 \\ 52.5 \\ 108 \\ 66.5 \\ 90.5 \\ 139 \\ 61 \\ -43.5 \\ 31 \end{bmatrix}$$

A solução obtida pelo método da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial foi:

$$\bar{x} = (3, -4.5, 7, 8, 3.5, 2, 4, -3.5, 2, 1.5)^T.$$

Também para este exemplo, trocando apenas a nona equação com a décima, não conseguimos uma seqüência convergente para o método de Gauss-Seidel.

Exemplo 19

Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 \\ -30 \\ -40 \\ -110 \\ 0 \\ -15 \\ -90 \\ -25 \\ -55 \\ -65 \end{bmatrix}$$

Resolvendo pelo método da Eliminação de Gauss, com estratégia de pivoteamento parcial, obtivemos o seguinte vetor solução:

$$\bar{x} = (-48.646412, -35.4947917, -25.6157408, -49.0908565, -37.7170139, \\ -26.9681713, -39.3142361, -29.5399306, -26.8773148, -22.9693287)^T.$$

Aplicando o método de Gauss-Seidel com o esquema iterativo montado a partir da disposição original das equações, com $x^{(0)} = (20, ..., 20)^T$ e $\varepsilon = 10^{-7}$, obtivemos o mesmo vetor $\bar{x}$ após 28 iterações.

EXERCÍCIOS

1. Escreva um algoritmo para a resolução de um sistema linear triangular inferior.

2. Verifique que o "custo" $\equiv$ número de operações efetuadas para resolver um sistema linear triangular inferior é o mesmo que para multiplicar uma matriz triangular por um vetor.

3. Verifique que o número de operações necessárias no método da Eliminação de Gauss, sem pivoteamento parcial, é $\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}$, na fase de triangularização da matriz A, e n^2, na fase da resolução do sistema triangular superior. Estão sendo contadas as operações de divisão, multiplicação e soma.

   (Lembramos que $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.)

4. Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$ com matriz tridiagonal ($a_{ij} = 0$ se $|i-j| > 1$).

   a) Escreva um algoritmo para resolver $Ax = b$ através da Eliminação de Gauss com estratégia de pivoteamento parcial de modo que a estrutura especial da matriz A seja explorada.

   b) Compare o "custo" de resolvê-lo por Eliminação de Gauss via algoritmo tradicional, com o de resolvê-lo pelo algoritmo do item (*a*).

   c) Teste seus resultados com o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq (n-1) \\ -x_{n-1} + 2x_n = 0 \end{cases}$$

   para n = 10.

5. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

6. Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss (trabalhe com três casas decimais):

a)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0.252x_1 + 0.36x_2 + 0.12x_3 = 7 \\ 0.112x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3 = 8 \\ 0.147x_1 + 0.21x_2 + 0.25x_3 = 9 \end{cases}$$

7. O cálculo do determinante de matrizes quadradas pode ser feito usando o método da Eliminação de Gauss.

   a) Deduza o método.

   b) Aplique-o no cálculo do determinante das matrizes dos sistemas dos Exercícios 5 e 6.

   c) Inclua o cálculo do determinante da matriz A do sistema linear Ax = b no algoritmo do método da Eliminação de Gauss.

8. Demonstre que, se no início da etapa k do método da Eliminação de Gauss tivermos $a_{kk}^{(k-1)} = a_{(k+1)k}^{(k-1)} = \dots = a_{nk}^{(k-1)} = 0$, então $\det(A) = 0$ e conseqüentemente A não é inversível. ($a_{ij}^{(k-1)}$ é o elemento da posição ij no início da etapa k.)

9. Podemos encontrar a fatoração LU de A diretamente, usando simplesmente a definição de produto de matrizes. Esquemas deste tipo são conhecidos como esquemas compactos, e o equivalente à fatoração A = LU com L triangular inferior com diagonal unitária e U triangular superior é chamado de *redução de Doolittle.*

   Supondo que a fatoração LU de A seja possível, de uma forma única,

   a) multiplique a primeira linha de L pela j-ésima coluna de U e iguale a a_{1j}. Verifique que desta forma obtém-se o elemento u_{1j};

   b) repita o item (*a*), multiplicando agora a i-ésima linha de L pela primeira coluna de U, e igualando a a_{i1} será possível obter l_{i1};

c) use o mesmo raciocínio de (*a*) e (*b*) para deduzir que, se as (k – 1) primeiras linhas de U e colunas de L já foram determinadas, então

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, \quad j = k, (k+1), \dots, n$$

e

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \right) / u_{kk}, \quad i = (k+1), \dots, n;$$

d) explique por que, se A é não singular, então U também o será, donde $u_{kk} \neq 0$, k = 1,..., n;

e) escreva um algoritmo para a fatoração LU de A usando a redução de Doolittle;

f) teste seu algoritmo, fatorando A e então resolvendo o sistema abaixo, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3.5 & 1 & 7.5 \\ 1.4 & 2.7 & 5.5 & 12 \\ -2 & 1 & 3 & 28 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 21.6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

10. Calcule a fatoração LU de A, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

11. *a*) Mostre que resolver AX = B, onde A é matriz n × n, X e B são matrizes n × m, é o mesmo que resolver m sistemas do tipo Ax = b, onde A é matriz n × n, x e b, vetores n × 1.

b) Usando o item (*a*), verifique que A^{-1} pode ser obtida através de resolução de n sistemas lineares.

c) Entre o método da Eliminação de Gauss e a fatoração LU, qual o mais indicado para o cálculo de A^{-1}?

d) Aplique o método escolhido no item (*c*) para obter a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

12. Mostre que, se A é matriz não singular e A = LU, então $A = LD\bar{U}$, onde D é matriz diagonal e $\bar{U}$ matriz triangular superior com diagonal unitária.

13. Se A = LDU, como fica a resolução de Ax = b?

14. Escreva um algoritmo para o método da Eliminação de Gauss, usando estratégia de pivoteamento parcial.

15. Seja resolver o sistema linear Ax = b pelo método da Eliminação de Gauss, com estratégia de pivoteamento parcial:

    se $M = \max\limits_{i,j} \{|a_{ij}|\}$ $1 \leq i, j \leq n$, prove que, após o primeiro estágio, $|a_{ij}^{(1)}| \leq 2M$.

16. *a*) Resolva os itens (*b*) e (*c*) do Exercício 11, considerando a estratégia de pivoteamento parcial.

    b) Use os resultados de (*a*) para encontrar a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 2 & 4 & 16 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

17. Trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos em todas as operações, resolva o sistema linear abaixo pelo método da Eliminação de Gauss, sem e com pivoteamento parcial. Discuta seus resultados:

$$\begin{cases} 16x_1 + 5x_2 = 21 \\ 3x_1 + 2.5x_2 = 5.5 \end{cases}$$

    Refaça o exercício usando truncamento para dois dígitos significativos.

18. Trabalhando com quatro dígitos significativos, resolva os sistemas lineares a seguir (ou detecte que não há solução). Use pivoteamento parcial. Estabeleça um critério para decidir se números pequenos em lugares importantes são considerados como zero ou não. Confira a solução obtida:

a) $\begin{cases} 1.12a + 6b = 1.3 \\ 2.21a + 12b = 2.6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1.12a + 6b = 1.3 \\ 2.24a + 12b = 3\,. \end{cases}$

19. Justifique se for verdadeira ou dê contra-exemplo se for falsa a afirmação:

"Dada uma matriz A, n × n, sua fatoração LU, obtida com estratégia de pivoteamento parcial, é tal que todos os elementos da matriz L têm módulo menor ou igual a 1".

20. O vetor p que armazena a informação sobre as permutações realizadas durante a fatoração LU pode ser construído como p(k) = i, se na etapa k a linha i da matriz $A^{(k-1)}$ for escolhida como a linha pivotal. Desta forma, o vetor terá dimensão (n –1) × 1. Para o Exemplo 7, teríamos $p = (3, 3)^T$; a dimensão de p é (n – 1) × 1, uma vez que são realizados (n – 1) etapas. Esta forma para o vetor p é mais eficiente em implementações computacionais porque na fase da resolução dos sistemas triangulares o vetor Pb pode ser armazenado sobre o vetor b original.

Reescreva o algoritmo para a resolução de Ax = b através da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial, usando o vetor p conforme descrito acima.

21. Prove que se B é matriz m × n, m ≥ n com posto completo, então a matriz $C = B^TB$ é simétrica, definida positiva.

22. Em cada caso:

a) verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito;

b) resolva por Gauss-Seidel, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

23. *a*) Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma seqüência convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

b) Escolha o menor valor inteiro e positivo para k e faça duas iterações do método de Gauss- Seidel para o sistema obtido.

c) Comente o erro cometido no item (*b*).

24. *a*) Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifique, usando eliminação gaussiana, que este sistema não tem solução. Qual será o comportamento do método de Gauss-Seidel?

b) Através de um sistema 2×2, dê uma interpretação geométrica do que ocorre com Gauss-Seidel quando o sistema não tem solução e quando existem infinitas soluções.

25. *a*) Aplique analítica e graficamente os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel no sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

b) Repita o item (*a*) para o sistema obtido permutando as equações.

c) Analise seus resultados.

26. Verifique que, se $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$, onde $x^{(j+1)} = Cx^{(j)} + g$, então α é solução de $x = Cx + g$.

27. Prove que, no método de Gauss-Seidel, vale a relação:

$$\begin{cases} e_1^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{11}} \left(a_{12}\, e_2^{(k)} + a_{13}\, e_3^{(k)} + \dots + a_{1n}\, e_n^{(k)}\right) \\ e_2^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{22}} \left(a_{21}\, e_1^{(k+1)} + a_{23}\, e_3^{(k)} + \dots + a_{2n}\, e_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ e_n^{(k+1)} = \dfrac{-1}{a_{nn}} \left(a_{n1}\, e_1^{(k+1)} + a_{n2}\, e_2^{(k+1)} + \dots + a_{n(n-1)}\, e_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

28. *a*) Um possível teste de parada para um método iterativo é testar se $Ax^{(k)} - b$ está próximo de zero, quando então $x^{(k)}$ será escolhido como aproximação da solução x^* do sistema. Como realizar computacionalmente este teste?

b) Compare o "custo" computacional de usar o teste acima com o "custo" do teste $(x^{(k+1)} - x^{(k)})$ estar próximo de zero.

29. Considere o sistema linear cuja matriz dos coeficientes é a matriz esparsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ache a solução por inspeção.

b) Faça mudanças de linhas na matriz original para facilitar a aplicação do método da Eliminação de Gauss. O que você pode concluir, de uma maneira geral?

c) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema. Comente seu desempenho.

d) Faça uma comparação da utilização de métodos diretos e iterativos na resolução de sistemas lineares esparsos.

30. Ao resolver um sistema linear $Ax = b$ por um método direto, vários problemas podem implicar a obtenção de uma solução, x_0, apenas aproximada, para $\bar{x}$. Chamamos $r_0 = Ax_0 - b$ o resíduo associado a x_0. Note que $r_0 = Ax_0 - b = Ax_0 - A\bar{x} = A(x_0 - \bar{x}) = Az$. Se $Az = r_0$ fosse resolvido sem erro, então $\bar{x} = x_0 - z$ seria a solução do sistema: este não é o caso, mas esta observação pode ser usada como base para um esquema iterativo para "refinamento" de soluções aproximadas.

    É razoável supormos que $x_1 = x_0 - \tilde{z}$ ($\tilde{z}$, solução aproximada de $Az = r_0$) seja uma "solução" de $Ax = b$, melhor do que x_0. Com x_1 construímos um novo resíduo $r_1 = Ax_1 - b$ e continuamos o processo. Na realidade, podemos continuá-lo tantas vezes quanto quisermos, o que nos fornece o seguinte

    Algoritmo: (*Refinamento Iterativo*)

    Seja r uma solução (aproximada) para $Ax = b$, obtida por algum método direto, $\varepsilon > 0$ e itmax o número máximo de iterações permitido.

    Para $i = 1, 2, ..., \text{itmax}$

    $r = Ax - b$

    z : solução de $Az = r$

    $x = x - z$

    se $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |z_i| \,/\, \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| < \varepsilon$, fim. A solução é x. Se $i > \text{itmax}$, envie mensagem de não convergência em itmax iterações.

    a) Justifique por que devemos usar fatoração LU neste caso para resolver os sistemas envolvidos.

    b) Neste caso, não devemos sobrepor L e U em A. Justifique.

31. Para cada um dos sistemas lineares a seguir, analise a existência ou não de solução, bem como unicidade de solução, no caso de haver existência.

    a) $3x + 2y = 7$

    b) $\begin{cases} 4m - 2k = 8 \\ 5m + k = 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$

d) $6x + 4y - 3z + w = 10$

e) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 8 \\ x - 3y + 4z = 6 \\ 9x + 4y - 5z = 11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x - 5y + z = -1 \\ 4x - 11y + 5z = 6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 6x - 18y + 4z = 2 \\ 7x - 21y + 5z = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 6x - 18y + 4z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 6u - 3v = 6 \\ 3u - 1.5v = 3 \\ 2u - v = 8 \\ 8u - 4v = 1.7 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4a + 5b + 7c = 1 \\ -a - b - c = 2 \\ 3a + 4b + 6c = 3 \\ -a + b + 7c = -11 \\ 2a + 5b + 13c = -8 \end{cases}$

32. Invente um sistema linear com 6 equações e 4 variáveis sem solução, outro com solução única e outro com infinitas soluções. Justifique cada caso.

33. Resolva os sistemas lineares abaixo usando a fatoração de Cholesky:

a) $\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 32 \\ 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 26 \\ 8x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 = 38 \\ 4x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 12x_4 = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16 \\ 7x_1 + 30x_2 + 8x_3 = 38 \\ 9x_1 + 8x_2 + 30x_3 = 38 \end{cases}$

34. Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

a) obtenha o fator de Cholesky de A;

b) encontre 3 outras matrizes triangulares inferiores R, tais que $A = RR^T$.

35. Prove que se A: $n \times n$ é simétrica definida positiva então A^{-1} existe e é simétrica definida positiva.

36. Dizemos que A: $n \times n$ é uma matriz banda com amplitude q se $a_{ij} = 0$ quando $|i - j| > q$.

Escreva um algoritmo para obter a fatoração de Cholesky de uma matriz banda q, simétrica, definida positiva, tirando proveito de sua estrutura.

PROJETO

a) Compare as soluções dos sistemas lineares

$$\begin{cases} x - \, y = 1 \\ x - 1.00001\, y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - \, y = 1 \\ x - 0.99999\, y = 0 \end{cases}$$

Fatos como este ocorrem quando a matriz A do sistema está próxima de uma matriz singular e então o sistema é *mal condicionado.*

Dizemos que um sistema linear é *bem condicionado* se pequenas mudanças nos coeficientes e/ou nos termos independentes acarretarem pequenas mudanças na solução do sistema. Caso contrário, o sistema é dito mal condicionado.

Embora saibamos que uma matriz A pertence ao conjunto das matrizes não inversíveis se, e somente se, $\det(A) = 0$, o fato de uma matriz A ter $\det(A) \approx 0$ não implica necessariamente que o sistema linear que tem A por matriz de coeficientes seja mal-condicionado.

O *número de condição de A*, $\text{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$, onde $\| \, . \, \|$ é uma norma de matrizes [14], é uma medida precisa do bom ou mau condicionamento do sistema que tem A por matriz de coeficientes, pois demonstra-se que $\dfrac{1}{\text{cond}(A)} = \min \left\{ \dfrac{\|A - B\|}{\|A\|} \text{ tais que B é não inversível} \right\}$.

b) As matrizes de Hilbert, H_n, onde

$h_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$, $1 \leq i, j \leq n$ são exemplos clássicos de matrizes mal condicionadas.

(*b.1*) – Use pacotes computacionais, que estimam ou calculam cond(A), para verificar que quanto maior for n, mais mal condicionada é H_n.

(*b.2*) – Resolva os sistemas $H_n x = b_n$, $n = 3, 4, 5, ..., 10$, onde b_n é o vetor cuja i-ésima componente é

$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i + j - 1}$ Desta forma a solução exata será: $x^* = (1\ 1\ .\ .\ .\ 1)^T$.

(*b.3*) – Analise seus resultados.