2.7.21. Verificar se o sistema abaixo é mal condicionado:

$$\begin{cases} 3{,}81x_1 + 0{,}25x_2 + 1{,}28x_3 + 0{,}80x_4 = 4{,}21 \\ 2{,}25x_1 + 1{,}32x_2 + 5{,}08x_3 + 0{,}49x_4 = 6{,}97 \\ 5{,}31x_1 + 6{,}78x_2 + 0{,}98x_3 + 1{,}04x_4 = 2{,}38 \\ 9{,}89x_1 + 2{,}45x_2 + 3{,}35x_3 + 2{,}28x_4 = 10{,}98 \end{cases}$$

2.7.22. Resolver pelo método de Gauss, retendo quatro decimais:

$$\begin{cases} 1{,}427x_1 - 3{,}948x_2 + 10{,}383x_3 = -32{,}793 \\ -2{,}084x_1 + 6{,}425x_2 - 0{,}083x_3 = 36{,}672 \\ 15{,}459x_1 - 2{,}495x_2 - 1{,}412x_3 = -6{,}557 \end{cases}$$

2.7.23. Resolver o sistema abaixo pelo método de Gauss-Seidel usando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ ]^T$ e como critérios de parada $k = 10$ ou $\epsilon < 10^{-2}$.

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 = 11{,}33 \\ -x_1 - x_2 - 6x_3 = 42 \end{cases}$$

2.7.24. Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

Após resolvê-lo, pelo método de Jordan, retendo quatro decimais, obteve-se o seguinte resultado:

$$\bar{\mathbf{x}} = [\ 1{,}0001\ \ 1{,}9999\ \ 1\ ]^T$$

Aplicar refinamentos sucessivos até que $\max\limits_i \ r_i^{(k)} \leqslant 10^{-4}$ ou $k = 3$.

Capítulo **3**

Equações Algébricas e Transcendentes

3.1. INTRODUÇÃO

Em muitos problemas de Ciência e Engenharia há necessidade de se determinar um número ξ para o qual uma função $f(x)$ seja zero, ou seja, $f(\xi) = 0$. Este número é chamado raiz da equação $f(x) = 0$ ou zero da função $f(x)$.

As equações algébricas de 1º e 2º graus, certas classes de 3º e 4º graus e algumas equações transcendentes podem ter suas raízes computadas exatamente através de métodos analíticos, mas para polinômios de grau superior a quatro e para a grande maioria das equações transcendentes o problema só pode ser resolvido por métodos que aproximam as soluções.

Embora estes métodos não forneçam raízes exatas, elas podem ser calculadas com a exatidão que o problema requeira, desde que certas condições sobre f sejam satisfeitas.

Para se calcular uma raiz duas etapas devem ser seguidas:

a) Isolar a raiz, ou seja, achar um intervalo $[\ a, b\ ]$, o menor possível, que contenha uma e somente uma raiz da equação $f(x) = 0$.

b) Melhorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão requerido.

3.2. ISOLAMENTO DE RAÍZES

Será visto, agora, um importante teorema da Álgebra para isolamento de raízes.

Teorema 3.1: Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$, em outras palavras haverá, no mínimo, um número $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$ (Figura 3.1).

O leitor interessado na demonstração poderá encontrá-la em [20].

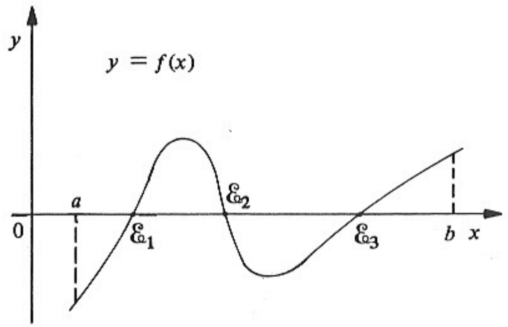


Figura 3.1. $f(a) \cdot f(b) < 0$

A raiz ξ será definida e única se a derivada $f'(x)$ existir e preservar o sinal dentro do intervalo (a, b), isto é, se $f'(x) > 0$ (Figura 3.2) ou $f'(x) < 0$ para $a < x < b$.

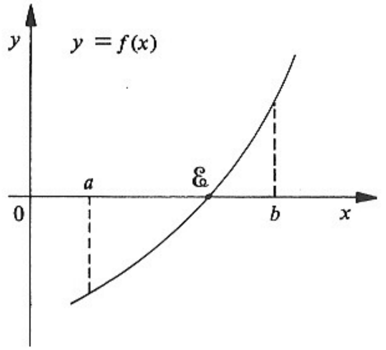


Figura 3.2. $f'(x) > 0$

Devido às propriedades de cada tipo de equação (algébrica ou transcendente), o isolamento de raízes de cada uma delas será visto separadamente.

3.2.1. Equações Algébricas

3.2.1.1. *PROPRIEDADES GERAIS*

Seja uma equação algébrica de grau n ($n \geqslant 1$):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (3.1)$$

onde os coeficientes a_i são números reais e $a_n \neq 0$.

Teorema 3.2 (Teorema fundamental da Álgebra): Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, desde que cada raiz seja contada de acordo com sua multiplicidade. A demostração pode ser obtida em [20].

Uma raiz ξ da equação (3.1) tem multiplicidade m se:

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \ldots = P^{m-1}(\xi) = 0 \text{ e } P^m(\xi) \neq 0$$

onde $P^j(\xi) = \left.\dfrac{d^j P(x)}{dx^j}\right| \quad x = \xi, j = 1, 2, \ldots m$

Exemplo 3.1

$$\begin{array}{lll}
\text{Seja } P(x) & = (x-2)^3 (x+1) & \\
 & = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 & \therefore P(2) = 0 \\
P'(x) & = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 & \therefore P'(2) = 0 \\
P''(x) & = 12x^2 - 30x + 12 & \therefore P''(2) = 0 \\
P'''(x) & = 24x - 30 & \therefore P'''(2) \neq 0
\end{array}$$

então $\xi = 2$ é raiz de multiplicidade $m = 3$.

Teorema 3.3: Se os coeficientes da equação algébrica (3.1) são reais, então as raízes complexas desta equação são complexos conjugados em pares, isto é, se $\xi_1 = \alpha + \beta i$ é uma raiz de (3.1) de multiplicidade m, então o número $\xi_2 = \alpha - \beta i$ também é uma raiz desta equação e tem a mesma multiplicidade m.

A demonstração pode ser vista em [20].

Exemplo 3.2

Seja:

$P(x) = x^2 - 6x + 10$

$$\&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} \begin{cases} \&_1 = 3 + i \\ \&_2 = 3 - i \end{cases}$$

Corolário 3.1: Uma equação algébrica de grau ímpar com coeficientes reais tem, no mínimo, uma raiz real.

Exemplo 3.3

Aproveitando o exemplo 3.2, seja:

$P(x) = (x^2 - 6x + 10)(x - 1)$

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$

As raízes são

$\&_1 = 3 + i$

$\&_2 = 3 - i$

$\&_3 = 1$

3.2.1.2. VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Dado um polinômio $P(x)$, um problema que se coloca é o de calcular o valor de $P(x)$ para $x = x_0$, ou seja, $P(x_0)$. Este problema aparece, por exemplo, quando se quer isolar uma raiz.

Exemplo 3.4

Dado $P(x) = x^2 - 3x + 1$, então
$P(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 1$

Para calcular $P(x_0)$, sendo $P(x)$ dado pelo primeiro membro de (3.1), é necessário fazer $n(n+1)/2$ multiplicações e n adições. Então, se o grau n do polinômio for elevado (digamos $n \geqslant 20$), o cálculo de $P(x_0)$, além de se tornar muito laborioso, é, também, ineficiente em termos computacionais.

Exemplo 3.5

Avaliando

$P(x) = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 + 2x^6 - 15x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 3x - 5$

no ponto 2, tem-se:

$$\begin{aligned} P(2) &= 3 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^8 - 10 \cdot 2^7 + 2 \cdot 2^6 - 15 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 \\ &= 3 \cdot 512 + 2 \cdot 256 - 10 \cdot 128 + 2 \cdot 64 - 15 \cdot 32 - 3 \cdot 16 + 2 \cdot 8 - 16 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 5 \\ &= 321 \end{aligned}$$

Número de operações requeridas:

$$\text{multiplicações} = \frac{9(9+1)}{2} = 45$$

adições $= 9$

Serão vistos, agora, dois métodos que tornam esta tarefa mais fácil e que necessitam somente de n multiplicações e n adições.

A. Método de Briot-Ruffini

Sejam os polinômios:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$

Dividindo $P(x)$ pelo binômio $(x - c)$, obtém-se a igualdade:

$P(x) = (x - c)\, Q(x) + r$

onde $Q(x)$ é o polinômio quociente de grau $n - 1$ e r é uma constante (resto).

O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - c)$ é o valor numérico de $P(c)$:

$P(c) = (c - c)\, Q(c) + r = r$

Se $r = 0$, então, c é uma raiz real de $P(x) = 0$.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini para avaliar $P(c)$:

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-k} = cb_{n+1-k} + a_{n-k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \qquad (3.2)$$

ou

$$b_{n-1} = cb_n + a_{n-1}$$

$$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_0 = cb_1 + a_0$$

Esquematicamente:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c		cb_n	$+cb_{n-1}$	$\dots$	cb_2	$+cb_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	$b_0 = r$

Exemplo 3.6

$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$

	1	−7	16	−10
2		+2	−10	+12
	1	−5	6	2

$P(2) = 2$

	1	−7	16	−10
−3		−3	+30	−138
	1	−10	46	−148

$P(-3) = -148$

	1	−7	16	−10
1		+1	−6	+10
	1	−6	10	0

$P(1) = 0$

(ver exemplo 3.3)

B. Método de Horner

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$= (a_nx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_2x + a_1)\,x + a_0$$

$$= ((a_nx^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \dots + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P(x) = \underbrace{((\dots}_{n-1}(a_nx + a_{n-1})x + \dots + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$$

Exemplo 3.7

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

$$= (2x^3 - 5x^2 - 2x + 4)x - 8$$

$$= ((2x^2 - 5x - 2)x + 4)x - 8$$

$$P(x) = (((2x - 5)x - 2)x + 4)x - 8$$

$$P(3) = (((2 \cdot 3 - 5) \cdot 3 - 2) \cdot 3 + 4) \cdot 3 - 8$$

$$P(3) = 13$$

Exemplo 3.8

$$P(x) = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 + 2x^6 - 15x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 3x - 5$$

$$(3x^8 + 2x^7 - 10x^6 + 2x^5 - 15x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 16x + 3)\,x - 5$$

$$((3x^7 + 2x^6 - 10x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 2x - 16)x + 3)\,x - 5$$

$$(((3x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 3x + 2)x - 16)x + 3)\,x - 5$$

$$((((3x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 15x - 3)x + 2)x - 16)x + 3)\,x - 5$$

$$(((((3x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 2x - 15)x - 3)x + 2)x - 16)x + 3)x - 5$$

$$((((((3x^3 + 2x^2 - 10x + 2)x - 15)x - 3)x + 2)x - 16)x + 3)x - 5$$

$$(((((((3x^2 + 2x - 10)x + 2)x - 15)x - 3)x + 2)x - 16)x + 3)x - 5$$

$$= ((((((((3x + 2)x - 10)x + 2)x - 15)x - 3)x + 2)x - 16)x + 3)x - 5$$

$$P(2) = 321$$

Número de operações requeridas:
multiplicações = 9
adições = 9

Com um pouco de prática o leitor conseguirá passar, facilmente, um polinômio da forma de potência para a forma de Horner:

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5$$
$$= (((2x + 3)x - 1)x + 0)x + 5$$

$$P(x) = -x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1$$
$$= ((((-x + 2)x - 5)x + 2)x + 4)x - 1$$

3.2.1.3. OS LIMITES DAS RAÍZES REAIS

Consideremos um polinômio $P(x)$ tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ e $a_i \in R$

Será visto, a seguir, um teorema que permite delimitar as raízes da equação (3.1).

Teorema 3.4 (Teorema de Lagrange): Sejam $a_n > 0$, $a_0 \neq 0$ e k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ o maior índice dos coeficientes negativos do polinômio $P(x)$. Então, para o limite superior das raízes positivas da equação (3.1) pode-se tomar o número

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

onde B é o máximo dos módulos dos coeficientes negativos do polinômio. O leitor interessado na demonstração poderá encontrá-la em [8].

Assim, se ξ_p é a maior das raízes positivas, então $\xi_p \leqslant L$. Se os coeficientes de $P(x)$ forem todos não negativos, então $P(x) = 0$ não terá raízes positivas.

Exemplo 3.9

Seja o polinômio:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$$
$$k = 3$$
$$B = |-7|$$
$$L = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{7}{1}} \quad \therefore L = 8$$

ou seja, a partir de $x = 8$ o polinômio não tem zeros.

Sendo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ as raízes de $P(x) = 0$, pode-se escrever o polinômio na forma fatorada:

$$P(x) = a_n (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3) \ldots (x - \xi_n)$$

A fim de se estabelecer os outros limites das raízes, positivas e negativas, serão consideradas três equações auxiliares, ou seja:

1) $P_1(x) = x^n P(1/x) = 0$

$$= x^n \left[a_n \left(\frac{1}{x} - \xi_1\right)\left(\frac{1}{x} - \xi_2\right)\left(\frac{1}{x} - \xi_3\right) \ldots \left(\frac{1}{x} - \xi_n\right) \right] = 0$$

$$P_1(x) = a^n (1 - x\xi_1)(1 - x\xi_2)(1 - x\xi_3) \ldots (1 - x\xi_n) = 0$$

As raízes de $P_1(x)$ são:

$$1/\xi_1, 1/\xi_2, 1/\xi_3, \ldots, 1/\xi_n$$

Sendo $1/\xi_p$ a maior das raízes positivas e L_1 o limite superior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$, então

$$\frac{1}{\xi_p} \leqslant L_1 \;\therefore\; \xi_p \geqslant 1/L_1$$

ou seja, $1/L_1$ é o limite inferior das raízes positivas de $P(x) = 0$.

2) $P_2(x) = P(-x) = 0$

Suas raízes são (ver exercício 3.12.1):

$$-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3, \ldots, -\xi_n$$

Sendo $-\xi_q$ $(\xi_q < 0)$ a maior das raízes positivas e L_2 o limite superior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$, então:

$$-\xi_q \leqslant L_2 \therefore \xi_q \geqslant -L_2$$

ou seja, $-L_2$ é o limite inferior das raízes negativas de $P(x) = 0$

3) $P_3(x) = x^n P(-1/x) = 0$

Suas raízes são (ver exercício 3.12.2):

$$-1/\xi_1, -1/\xi_2, -1/\xi_3, \ldots, -1/\xi_n$$

Sendo $-1/\xi_q$ $(\xi_q < 0)$ a maior das raízes positivas e L_3 o limite superior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$, então:

$$-\frac{1}{\xi_q} \leqslant L_3 \therefore \xi_q \leqslant -1/L_3$$

ou seja, $-1/L_3$ é o limite superior das raízes negativas de $P(x) = 0$

Em vista disto, todas as raízes positivas ξ^+ da equação (3.1), se existirem, satisfarão a desigualdade

$$1/L_1 \leqslant \xi^+ \leqslant L$$

Do mesmo modo, todas as raízes negativas ξ^- da equação (3.1), se houver alguma, satisfarão a desigualdade (ver Figura 3.3)

$$-L_2 \leqslant \xi^- \leqslant -1/L_3$$

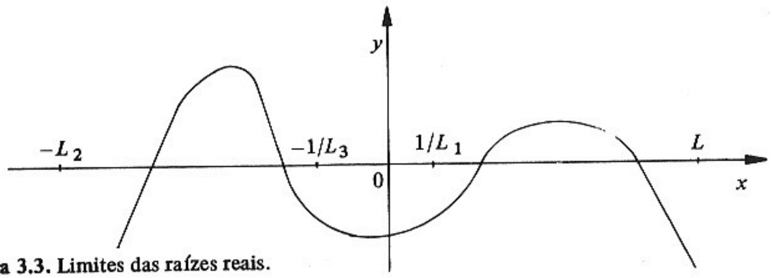


Figura 3.3. Limites das raízes reais.

Exemplo 3.10

Seja a equação algébrica do exemplo 3.9:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = 0$$

então

$$P_1(x) = 30x^4 + 29x^3 - 7x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$P_2(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0$$

$$P_3(x) = 30x^4 - 29x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$L_1 = 1 + (7/30)^{\frac{1}{4-2}} = 1{,}48 \rightarrow 1/L_1 = 0{,}68$$

$$L_2 = 1 + (29/1)^{\frac{1}{4-2}} = 6{,}39 \rightarrow -L_2 = -6{,}39$$

$$L_3 = 1 + (29/30)^{\frac{1}{4-3}} = 1{,}97 \rightarrow -1/L_3 = -0{,}51$$

$L = 8$ (Ver exemplo 3.9)

$0{,}68 \leqslant \xi^+ \leqslant 8$

$-6{,}39 \leqslant \xi^- \leqslant -0{,}51$

Dispositivo Prático

$n = 4$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
a_0	30	1	30	1
a_1	29	−5	−29	5
a_2	−7	−7	−7	−7
a_3	−5	29	5	−29
a_4	1	30	1	30
k	3	2	2	3
$n-k$	1	2	2	1
B	7	7	29	29
L_i	8,00	1,48	6,39	1,97
$L\xi$	8,00	0,68	−6,39	−0,51

Sendo L_i o limite superior das raízes positivas das equações auxiliares e L_ξ os limites superior e inferior das raízes positivas e negativas de $P(x) = 0$.

3.2.1.4. O NÚMERO DE RAÍZES REAIS

Na seção anterior foi visto como delimitar as raízes reais de $P(x) = 0$. Agora é necessário que se saiba quantas raízes existem nos intervalos. Os métodos que fornecem o número exato de raízes reais estão acima do nível deste texto, mas podem ser vistos em [8]; no entanto, serão vistos métodos que dão uma boa indicação sobre este número.

Teorema 3.5 (*Teorema de Bolzano*): Seja $P(x) = 0$ uma equação algébrica com coeficientes reais e $x \in (a, b)$.

Se $P(a) \cdot P(b) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo (a, b) (ver figura 3.4).

Se $P(a) \cdot P(b) > 0$, então existe um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existem raízes reais no intervalo (a, b) (ver figura 3.5).

A demonstração pode ser vista em [14].

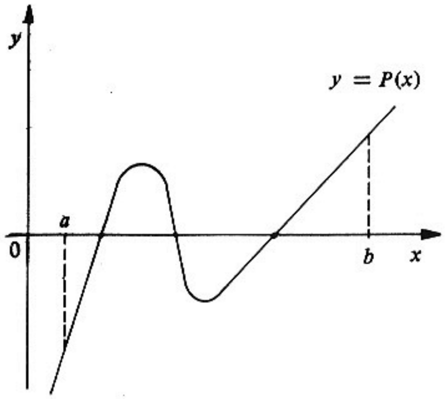


Figura 3.4. $P(a) \cdot P(b) < 0$

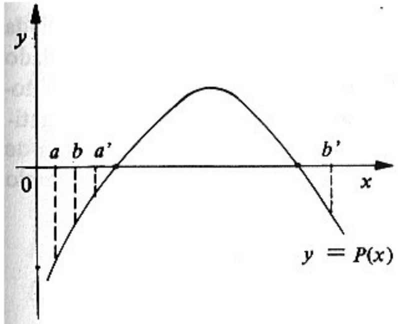


Figura 3.5. $P(a) \cdot P(b) > 0$

Regra de Sinais de Descartes

O número de raízes reais positivas n^+ de uma equação algébrica é igual ao número de variações de sinais na seqüência dos coeficientes, ou menor que este número por um inteiro par, sendo uma raiz de multiplicidade m contada como m raízes e não sendo contados os coeficientes iguais a zero.

Corolário 3.2: Se os coeficientes de uma equação algébrica são diferentes de zero, então, o número de raízes reais negativas n^- (contando multiplicidades) é igual ao número de permanências de sinais na seqüência dos seus coeficientes, ou é menor que este número por um inteiro par.

A prova desta afirmativa segue diretamente da aplicação da regra de Descartes para o polinômio $P(-x)$.

Exemplo 3.11

Seja a equação algébrica no exemplo 3.10:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = 0$$
$$n^+ = 2 - 2k_1 \rightarrow n^+ = 2 \text{ ou } 0$$
$$n^- = 2 - 2k_2 \rightarrow n^- = 2 \text{ ou } 0$$

Sabendo-se que as raízes da equação do exemplo 3.10 são

$$\xi_1 = -2,\ \xi_2 = -1,\ \xi_3 = 3 \text{ e } \xi_4 = 5$$

pode-se observar que a previsão do número de raízes reais positivas e negativas, dada pela regra de Descartes (exemplo 3.11), e o intervalo onde elas se encontram, dado pelo teorema de Lagrange (exemplo 3.10), estão corretos. É muito importante notar que n^+ e n^- não são, necessariamente, o número de raízes positivas e negativas, respectivamente (a menos que $n^+ = 1$ ou $n^- = 1$). Observe que a regra de Descartes menciona "ou é menor que este número por um inteiro par". O exemplo abaixo esclarece melhor.

Exemplo 3.12

Seja a equação

$$P(x) = x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 185x^2 - 792x + 1.040 = 0$$

$$n^+ = 4 - 2k_1$$

$$n^- = 1$$

As raízes são:

$$\xi_1 = -5, \ \xi_2 = \xi_3 = 4, \ \xi_4 = 3 - 2i \ \text{e} \ \xi_5 = 3 + 2i$$

Observem que $n^+ = 2$ e não 4, que é o número de variações de sinais dos coeficientes. Deve-se ter muito cuidado ao se aplicar a regra de Descartes.

3.2.1.5. RELAÇÕES ENTRE RAÍZES E COEFICIENTES (RELAÇÕES DE GIRARD)

Escrevendo $P(x) = 0$ na forma fatorada tem-se:

$$P(x) = a_n(x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)\ldots(x - \xi_n) = 0$$

Multiplicando-se

$$P(x) = a_n x^n - a_n(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n)x^{n-1}$$
$$+ a_n(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \ldots + \xi_{n-1}\xi_n)x^{n-2}$$
$$- a_n(\xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \ldots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n)x^{n-3} + \ldots +$$
$$(-1)^n a_n(\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n) = 0$$

Comparando o resultado com $P(x) = 0$ na forma de potências:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

e aplicando a condição de identidade das equações algébricas, tem-se:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n = -a_{n-1}/a_n$$
$$\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \ldots + \xi_{n-1}\xi_n = a_{n-2}/a_n$$
$$\xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \ldots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n = -a_{n-3}/a_n$$

. . . .

somatório dos C_i^n produtos de i raízes $= (-1)^i a_{n-i}/a_n$

. . . .

$$\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n = (-1)^n a_0/a_n$$

Estas são as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica, ou relações de Girard.

Exemplo 3.13

Seja a equação do exemplo 3.3:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = 0$$

cujas raízes são:

$$\xi_1 = 3 + i$$
$$\xi_2 = 3 - i$$
$$\xi_3 = 1$$

Então:

$$(3 + i) + (3 - i) + 1 = 7 = -(-7)/1$$
$$(3 + i) \cdot (3 - i) + (3 + i) \cdot 1 + (3 - i) \cdot 1 = 16 = 16/1$$
$$(3 + i) \cdot (3 - i) \cdot 1 = 10 = -(-10)/1$$

3.2.2. Equações Transcendentes

Um estudo analítico do comportamento de equações transcendentes está acima do nível deste texto devido à sua complexidade.

A determinação do número de raízes geralmente é quase impossível, pois algumas equações podem ter um número infinito de raízes.

O método mais simples de se achar um intervalo que contenha só uma raiz, ou seja, isolar uma raiz, é o método gráfico. Antes de abordar este método será útil uma recordação do esboço de algumas funções importantes.

3.2.2.1. ESBOÇOS DE FUNÇÕES

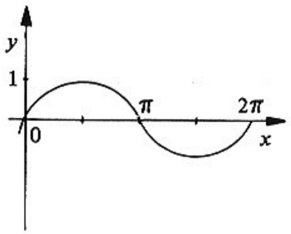


Figura 3.6. $y = \text{sen } x$

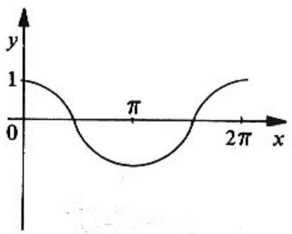


Figura 3.7. $y = \cos x$

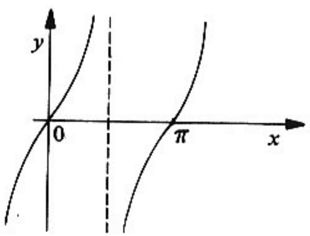


Figura 3.8. $y = \text{tg } x$

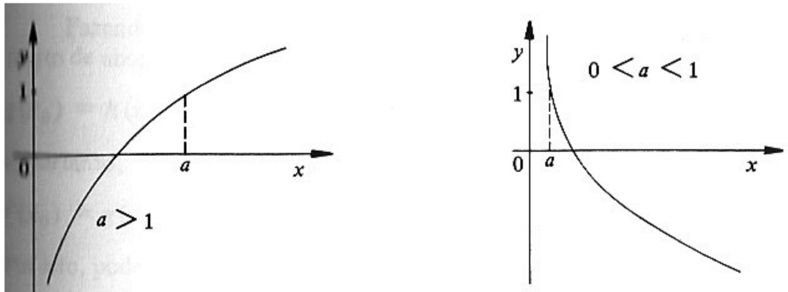


Figura 3.9. $y = \log_a x$

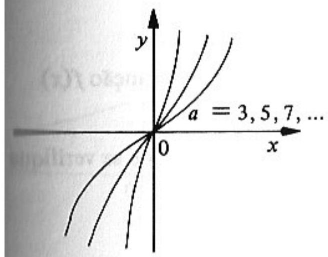


Figura 3.10. $y = x^a$

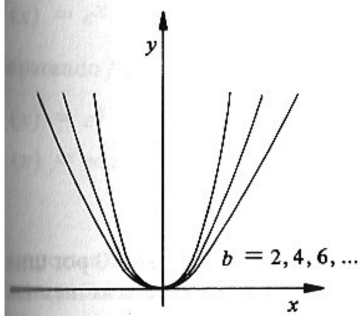


Figura 3.11. $y = x^b$

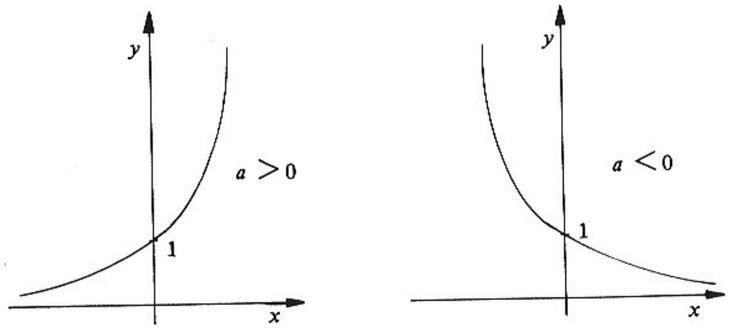


Figura 3.12. $y = e^{ax}$

3.2.2.2. *MÉTODO GRÁFICO*

Uma raiz real de uma equação $f(x) = 0$ é um ponto onde a função $f(x)$ toca o eixo dos x (figura 3.1).

Para se achar a raiz, basta que se faça um esboço da função $f(x)$ e que se verifique em que ponto do eixo dos x a função se anula.

Exemplo 3.14

Seja $f(x) = e^x - \text{sen } x - 2$

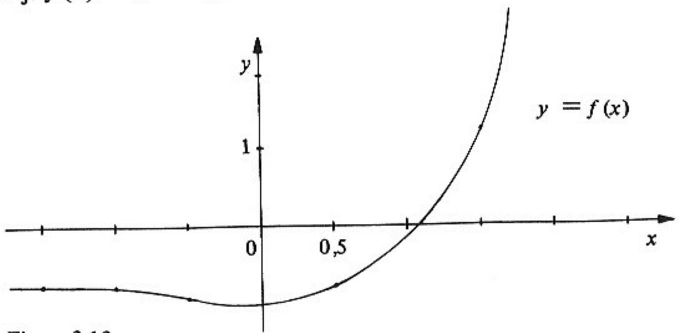


Figura 3.13

A função tem uma raiz $\xi \doteq 1{,}1$.

Uma outra maneira de se resolver o problema é substituir $f(x) = 0$ por uma equação $g(x) - h(x) = 0$ equivalente, ou seja, uma equação que tem as mesmas raízes de $f(x) = 0$.

$f(x) = g(x) - h(x)$

Fazendo os gráficos de $y_1 = g(x)$ e $y_2 = h(x)$, eles se interceptam em um ponto de abscissa $x = x_0$ (figura 3.14); neste ponto,

$g(x_0) = h(x_0)$

e, portanto,

$f(x_0) = g(x_0) - h(x_0) = 0$

Por isto, pode-se concluir que $\xi = x_0$.

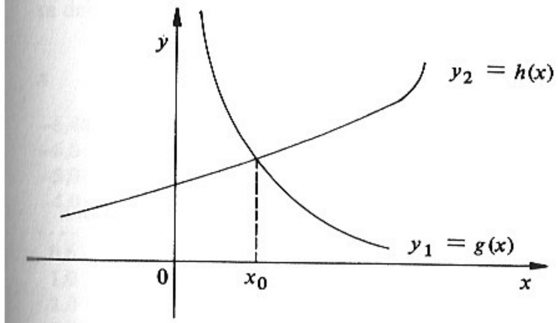


Figura 3.14. Método gráfico.

Exemplo 3.15

Seja a função do exemplo 3.14:

$f(x) = e^x - \text{sen } x - 2$

Separando $f(x)$ em duas funções, tem-se:

$g(x) = e^x$

$h(x) = \text{sen } x + 2$

É importante mencionar aqui que as raízes da equação $f(x) = 0$ não podem estar muito próximas e que o valor obtido graficamente deve ser usado apenas, como uma aproximação inicial da raiz exata ξ.

Os métodos de aproximação da raiz exata serão vistos adiante.

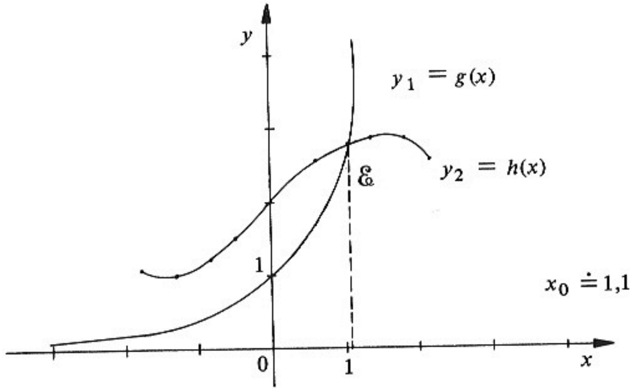


Figura 3.15

Serão vistos, agora, dois exemplos que sintetizam o que foi abordado, até aqui.

Exemplo 3.16

Isolar todas as raízes da equação

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 30 = 0$$

a) Limite das raízes reais:

$n = 3$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
a_0	30	1	−30	−1
a_1	−20	−2	−20	−2
a_2	−2	−20	2	20
a_3	1	30	1	30
k	2	2	1	1
$n - k$	1	1	2	2
B	20	20	30	2
L_i	21	1,67	6,48	1,26
$L\mathcal{E}$	21	0,60	−6,48	−0,79

$$0{,}60 \leqslant \mathcal{E}^+ \leqslant 21$$
$$-6{,}48 \leqslant \mathcal{E}^- \leqslant -0{,}79$$

b) Número de raízes reais:

$n^+ = 2$ ou 0

$n^- = 1$

Portanto, existe uma raiz negativa no intervalo $[-6{,}48; -0{,}79]$ e, se existirem duas raízes positivas, elas estarão no intervalo $[0{,}60; 21]$.

c) Esboço da função:

A função pode ser esboçada apenas no domínio destes dois intervalos, pois fora deles não há raízes.

x	$P(x)$
−6,48	−196,5
−6,0	−138,0
−5,0	−45,0
−4,0	14,0
.....	......
0,6	17,5
1,0	9,0
2,0	−10,0
3,0	−21,0
4,0	−18,0
5,0	5,0

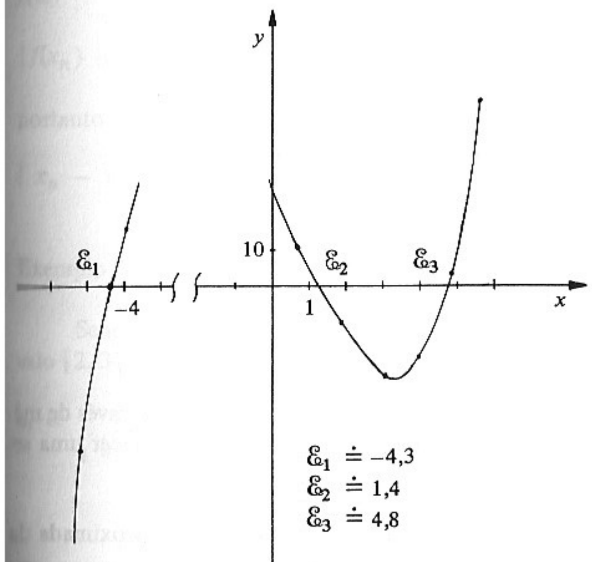


Figura 3.16

Exemplo 3.17

Isolar todas as raízes da equação:

$f(x) = x^2 - \text{sen } x - 1$

$g(x) = x^2; \; h(x) = \text{sen } x + 1$

x	$g(x)$	$h(x)$
−1,5	2,3	0,0
−1,0	1,0	0,2
−0,5	0,3	0,5
0,0	0,0	1,0
0,5	0,3	1,5
1,0	1,0	1,8
1,5	2,3	2,0
2,0	4,0	1,9

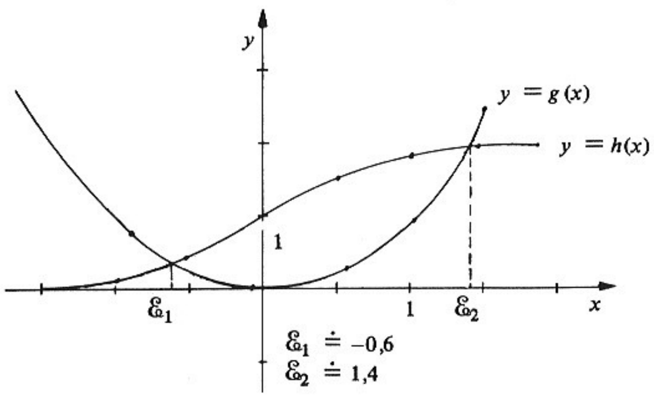


Figura 3.17

3.3. GRAU DE EXATIDÃO DA RAIZ

Depois de isolar a raiz no intervalo $[a, b]$, passa-se a calculá-la através de métodos numéricos. Como será visto adiante, estes métodos devem fornecer uma seqüência $\{x_i\}$ de aproximações, cujo limite é a raiz exata $\mathcal{E}$.

Teorema 3.6: Seja $\mathcal{E}$ uma raiz isolada exata e x_n uma raiz aproximada da equação $f(x) = 0$, com $\mathcal{E}$ e x_n pertencentes ao intervalo $[a,b]$ e

$|f'(x)| \geqslant m > 0 \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b$

onde

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$$

Então

$$|x_n - \mathcal{E}| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Prova:

Aplicando o teorema do valor médio, tem-se:

$f(x_n) - f(\mathcal{E}) = (x_n - \mathcal{E})\, f'(c)$

onde

$x_n < c < \mathcal{E} \rightarrow c \in (a, b)$

Como

$f(\mathcal{E}) = 0$ e $|f'(c)| \geqslant m,$ tem-se:

$|f(x_n) - f(\mathcal{E})| = |f(x_n)| \geqslant m\, |x_n - \mathcal{E}|$

portanto

$$|x_n - \mathcal{E}| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Exemplo 3.18

Sendo $f(x) = x^2 - 8$, delimitar o erro cometido com $x_n = 2{,}827$ no intervalo $[2, 3]$.

$$m = \min_{2 \leqslant x \leqslant 3} |2x| = 4$$

$$|2{,}827 - \mathcal{E}| \leqslant \frac{0{,}008}{4} = 0{,}002$$

$$\mathcal{E} = 2{,}827 \pm 0{,}002 \qquad (\sqrt{8} = 2{,}828\ldots)$$

O cálculo de m é muitas vezes trabalhoso e difícil de ser feito. Por esta razão, a tolerância ϵ é, muitas vezes, avaliada por um dos três critérios abaixo:

$$|f(x_n)| \leqslant \epsilon \qquad \text{Critério 3.1}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \epsilon \qquad \text{Critério 3.2}$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leqslant \epsilon \qquad \text{Critério 3.3}$$

Em cada aproximação x_n da raiz exata & usa-se um destes critérios e compara-se o resultado com a tolerância ϵ prefixada.

Observação: Se a raiz é da ordem da unidade (aproximadamente 1), devemos usar o critério 3.2 (teste de erro absoluto), caso contrário, usa-se o critério 3.3 (teste do erro relativo). Há casos em que a condição do critério 3.2 é satisfeita sem que o mesmo ocorra com o critério 3.1.

Agora que já foi visto como se isolar uma raiz, pode-se passar para a segunda etapa deste capítulo. Os métodos que se seguem têm como objetivo o refinamento da raiz isolada.

3.4. MÉTODO DA BISSEÇÃO

3.4.1. Descrição

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtém-se x_0 (figura 3.18), havendo, pois, dois subintervalos, $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$, a ser considerados.

Se $f(x_0) = 0$, então, & $= x_0$; caso contrário, a raiz estará no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos, ou seja, se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, então, & $\in (a, x_0)$; senão $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ e & $\in (x_0, b)$.

O novo intervalo $[a_1, b_1]$ que contém & é dividido ao meio e obtém-se o ponto x_1. O processo se repete até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata &, com a tolerância ϵ desejada.

3.4.2. Interpretação Geométrica

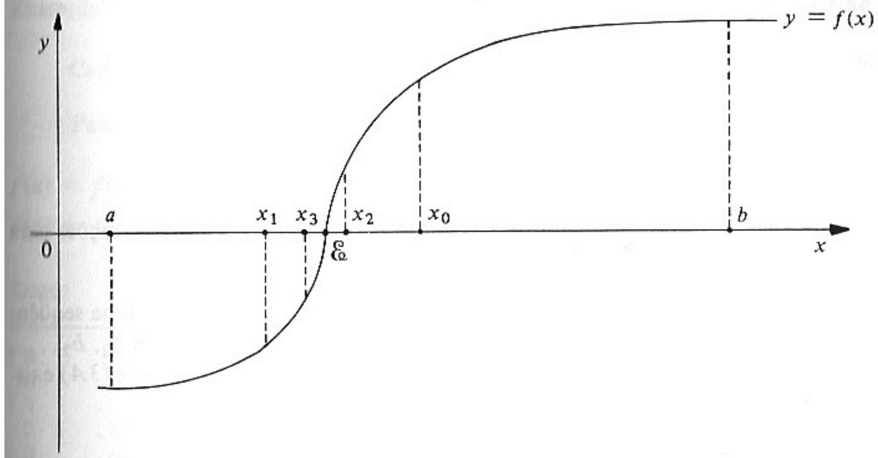


Figura 3.18. Interpretação geométrica do método da bisseção.

3.4.3. Convergência

Em alguma etapa do processo tem-se ou a raiz exata & ou uma seqüência infinita de intervalos encaixados $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$, tal que

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.3}$$

Como a cada iteração o intervalo $[a, b]$ é dividido ao meio, na n-ésima iteração o comprimento do intervalo será:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \tag{3.4}$$

ou

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad \text{(ver exercício 3.12.3)}$$

Desde que

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \epsilon$$

então

$$\left|\frac{b-a}{2^{n+1}}\right| \leqslant \epsilon$$

ou

$$n \geqslant \frac{\ln\left[(b-a)/\ \epsilon\ \right]}{\ln 2} - 1$$

ou seja, para um dado intervalo $[a,\ b]$ são necessárias, no mínimo, n iterações para se calcular a raiz ξ com tolerância ϵ.

Visto que os pontos extremos inferiores $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ formam uma seqüência monótona não-descrescente limitada e os pontos extremos superiores $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$ formam uma seqüência monótona não-crescente limitada, então, por (3.4) existe um limite comum.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

Passando ao limite na desigualdade (3.3) com $n \to \infty$ tem-se, em virtude da continuidade da função $f(x)$, que $[f(\xi)]^2 \leqslant 0$, de onde $f(\xi) = 0$, o que significa que ξ é uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Nos exemplos abaixo, a tolerância ϵ é avaliada usando-se o critério 3.2.

Exemplo 3.19

Calcular a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 3$ com $\epsilon \leqslant 0{,}01$.

Isolando-se a raiz, tem-se que $\xi \in (1, 2)$ e que

$f(a) = f(1) = -2 < 0$

$f(b) = f(2) = \quad 1 > 0$

Logo:

N	AN	BN	XN	F(XN)	E
0	1.00000	2.00000	1.50000	-.75000	
1	1.50000	2.00000	1.75000	.06250	.25000
2	1.50000	1.75000	1.62500	-.35938	.12500
3	1.62500	1.75000	1.68750	-.15234	.06250
4	1.68750	1.75000	1.71875	-.04590	.03125
5	1.71875	1.75000	1.73437	.00806	.01563
6	1.71875	1.73437	1.72656	-.01898	.00781

A raiz é $\xi \doteq x_6 = 1{,}72656$

Exemplo 3.20

Calcular a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ com $\epsilon \leqslant 0{,}01$.

Fazendo o gráfico da equação verifica-se que $\xi \in (0{,}5;\ 1{,}0)$ e que

$f(a) = f(0{,}5) = -0{,}44315 < 0$

$f(b) = f(1{,}0) = \quad 1{,}00000 > 0$

Logo:

N	AN	BN	XN	F(XN)	E
0	.50000	1.00000	.75000	.27482	
1	.50000	.75000	.62500	.07938	.12500
2	.62500	.75000	.68750	.09796	.06250
3	.62500	.68750	.65625	.00945	.03125
4	.62500	.65625	.64063	-.03491	.01563
5	.64063	.65625	.64844	-.01272	.00781

$\xi \doteq x_5 = 0{,}64844$

Exemplo 3.21

Calcular a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ com $\epsilon < 0{,}1$.

Sabendo-se que $\xi \in (2, 3)$ e que

$f(a) = f(2) = -2 < 0$

$f(b) = f(3) = \quad 17 > 0$

tem-se:

N	AN	BN	XN	F(XN)	E
0	2.00000	3.00000	2.50000	5.62500	
1	2.00000	2.50000	2.25000	1.39062	.25000
2	2.00000	2.25000	2.12500	-.40430	.12500
3	2.12500	2.25000	2.18750	.46753	.06250

$\xi \doteq x_3 = 2{,}18750$

Observação: O método da bisseção deve ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz para posterior aplicação de outro método, pois o esforço computacional cresce demasiadamente quando se aumenta a exatidão com que se quer a raiz.

3.4.4. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leqslant 10^{-2}$, usando o método da bisseção.

3.4.4.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

3.4.4.2 $f(x) = x + \log x = 0$

3.4.4.3 $f(x) = 3x - \cos x = 0$

3.4.4.4 $f(x) = x + 2\cos x = 0$

3.5. MÉTODO DAS CORDAS

3.5.1. Descrição

Seja $f(x)$ uma função contínua que tenha derivada segunda com sinal constante no intervalo $[a, b]$, sendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e que existe somente um número $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

No método das cordas, ao invés de se dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio, ele é dividido em partes proporcionais à razão $-f(a) / f(b)$ (figura 3.19), ou seja:

$$\frac{h_1}{b - a} = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}$$

Isto conduz a um valor aproximado da raiz,

$$x_1 = a + h_1$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a) \qquad (3.5)$$

Ao se aplicar este procedimento ao novo intervalo que contém ξ ($[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$), obtém-se uma nova aproximação x_2 da raiz.

3.5.2. Interpretação Geométrica

O método das cordas equivale a substituir a curva $y = f(x)$ por uma corda que passa através dos pontos $A[a, f(a)]$ e $B[b, f(b)]$. Quatro situações são possíveis:

$$f''(x) > 0 \begin{cases} f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0 : \text{Caso I} & \text{(figura 3.19)} \\ f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0 : \text{Caso II} & \text{(figura 3.20)} \end{cases}$$

$$f''(x) < 0 \begin{cases} f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0 : \text{Caso III} & \text{(figura 3.21)} \\ f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0 : \text{Caso IV} & \text{(figura 3.22)} \end{cases}$$

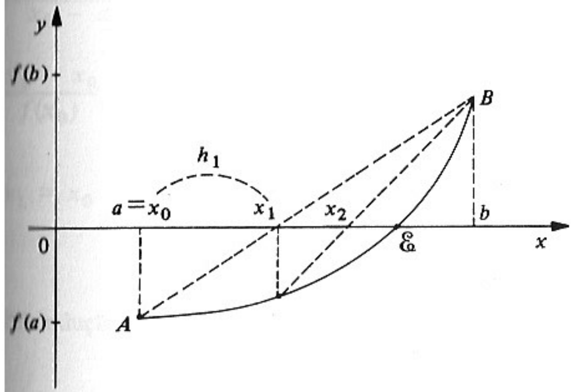


Figura 3.19. Caso I.

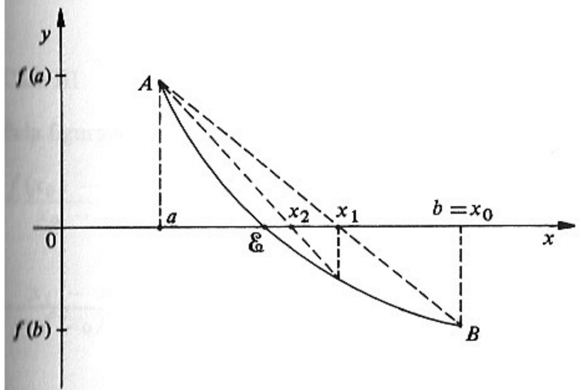


Figura 3.20. Caso II.

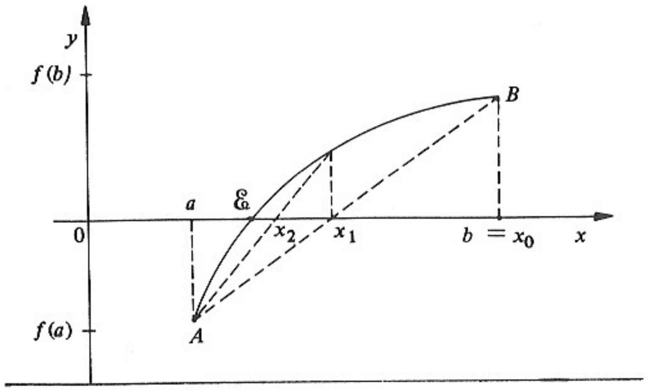


Figura 3.21. Caso III.

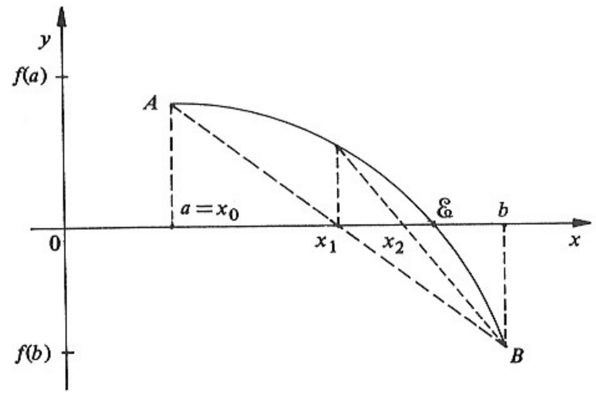


Figura 3.22. Caso IV.

Caso I

Pela figura 3.19 vê-se que

$$\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{-f(x_0)} = \frac{x_0 - b}{f(x_0) - f(b)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(b)} (x_0 - b)$$

Por indução,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)} (x_n - b) \qquad (3.6)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Caso II

Pela figura 3.20 vê-se que

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{x_0 - a} = \frac{0 - f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{f(x_0)} = -\frac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)} (x_0 - a)$$

Por indução,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} (x_n - a) \qquad (3.7)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Caso III

Pela figura 3.21 vê-se que

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{-f(x_0)} = \frac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)} (x_0 - a)$$

Por indução,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} (x_n - a) \qquad (3.8)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Caso IV

Pela figura 3.22 vê-se que

$$\frac{f(x_0) - f(b)}{b - x_0} = \frac{f(x_0) - 0}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{f(x_0)} = - \frac{x_0 - b}{f(x_0) - f(b)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(b)} (x_0 - b)$$

Por indução,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)} (x_n - b) \qquad (3.9)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

3.5.3. Equação Geral

Observando as figuras 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22 e as equações (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) conclui-se que:

a) O ponto fixado (a ou b) é aquele no qual o sinal da função $f(x)$ coincide com o sinal da sua derivada $f''(x)$.

b) A aproximação sucessiva x_n se faz do lado da raiz ξ, onde o sinal da função $f(x)$ é oposto ao sinal de sua derivada segunda $f''(x)$.

Com base no que foi exposto, tem-se a equação geral para o cálculo de raiz de equação pelo método das cordas:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)} (x_n - c) \qquad (3.10)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

sendo c o ponto extremo do intervalo $[a, b]$ onde a função apresenta o mesmo sinal de $f''(x)$, ou seja,

$f(c) \cdot f''(c) > 0.$

3.5.4. Convergência

A aproximação x_{n+1} está mais próxima da raiz ξ que a anterior x_n. Supondo

$$\bar{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad (a < \bar{\xi} < b)$$

este limite existe, pois a seqüência $\{x_n\}$ é limitada e monótona.

Passando ao limite na equação (3.10)

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} \left[\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)} (x_n - c) \right]$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f(\bar{\xi}) - f(c)} (\bar{\xi} - c) \quad \therefore f(\bar{\xi}) = 0$$

Já que a equação $f(x) = 0$ tem somente uma raiz ξ no intervalo $[a, b]$, tem-se que $\bar{\xi} = \xi$.

Nos exemplos abaixo, a tolerância ϵ é avaliada usando o critério 3.2.

Exemplo 3.22

Calcular a raiz da equação $f(x) = e^x - \text{sen } x - 2$ com $\epsilon \leqslant 10^{-5}$.

Esta equação tem uma raiz em $[1{,}0; 1{,}2]$ (Ver exemplo 3.14):

$f''(x) = e^x + \text{sen } x > 0 \ \forall x \in [1{,}0; 1{,}2]$

$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}0) = -0{,}12319 < 0 \\ f(1{,}2) = 0{,}38808 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = 1{,}2 \text{ pois } f(1{,}2) \cdot f''(1{,}2) > 0 \\ x_0 = 1{,}0 \end{array}$$

N	XN	F(XN)	E
0	1.00000	-.12319	
1	1.04819	-.01404	-.04819
2	1.05349	-.00151	-.00530
3	1.05406	-.00016	-.00057
4	1.05412	-.00002	-.00006
5	1.05413	-.00000	-.00001

Logo,

$\& \doteq x_5 = 1{,}05413$

Exemplo 3.23

Calcular uma raiz da equação $f(x) = 2x^2 + \text{sen } x - 10$ com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$.

Fazendo um esboço da função, vê-se que $\& \in [\pi/2, \pi]$:

$f''(x) = 4 - \text{sen } x > 0 \ \forall x \in [\pi/2, \pi]$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi/2) = -4{,}06520 < 0 \\ f(\pi) = 9{,}73921 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = \pi \text{ pois } f(\pi) \cdot f''(\pi) > 0 \\ x_0 = \pi/2 \end{array}$$

N	XN	F(XN)	E
0	1.57080	-4.06518	
1	2.03337	-.83587	-.46257
2	2.12097	-.15054	-.08760
3	2.13651	-.02648	-.01554
4	2.13923	-.00464	-.00273
5	2.13971	-.00081	-.00048

Logo,

$\& \doteq x_5 = 2{,}13971$

Exemplo 3.24

Calcular um zero do polinômio $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ com $\epsilon \leqslant 10^{-2}$.

Aplicando o teorema de Lagrange e fazendo um esboço da função, constata-se que existe uma $\& \in [1{,}4; 2{,}2]$:

$f''(x) = 6x - 8 > 0 \ \forall x \in [1{,}4, 2{,}2]$

$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}4) = 2{,}30400 > 0 \\ f(2{,}2) = -0{,}51200 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = 1{,}4 \text{ pois } f(1{,}4) \cdot f''(1{,}4) > 0 \\ x_0 = 2{,}2 \end{array}$$

N	XN	F(XN)	E
0	2.20000	-.51200	
1	2.05455	-.15752	.14545
2	2.01266	-.03765	.04189
3	2.00281	-.00841	.00985

Logo,

$\& \doteq x_3 = 2{,}00281$

3.5.5. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$, usando o método das cordas.

3.5.5.1 $f(x) = x^2 - 10 \ln x - 5 = 0$

3.5.5.2 $f(x) = x^3 - e^{2x} + 3 = 0$

3.5.5.3 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2 = 0$

3.5.5.4 $f(x) = \text{sen } x - \ln x = 0$

3.6. MÉTODO PÉGASO

3.6.1. Introdução

O método das cordas pode ser alterado de maneira a ter uma maior convergência; o método da *regula falsi* é um exemplo disto. Este, também, sofreu alterações para acelerar a convergência, resultando métodos como o de Illinois [10] e o Pégaso.

A origem do nome Pégaso é devida à utilização deste método em um computador Pégaso, sendo seu autor desconhecido.

Será vista nesta seção uma breve descrição do método, porém, maiores detalhes, como convergência, podem ser encontrados em [11].

3.6.2. Descrição

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[x_0, x_1]$ e $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Como existe uma raiz neste intervalo (teorema 3.1), as sucessivas aproximações $x_2, x_3, x_4, \ldots$ desta raiz podem ser obtidas pela fórmula de recorrência abaixo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.11}$$

onde as aproximações da iteração seguinte são escolhidas do seguinte modo:

se $f(x_{n+1}) \cdot f(x_n) < 0$, então $[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ é trocado por $[x_n, f(x_n)]$

se $f(x_{n+1}) \cdot f(x_n) > 0$, então $[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ é trocado por $[x_{n-1}, f(x_{n-1}) \cdot f(x_n) / (f(x_n) + f(x_{n+1}))]$

Em ambos os casos, $[x_n, f(x_n)]$ é trocado por $[x_{n+1}, f(x_{n+1})]$ e esta escolha garante que os valores da função usados a cada iteração tenham sempre sinais opostos.

A filosofia do método Pégaso é reduzir o valor $f(x_{n-1})$ por um fator $f(x_n)/(f(x_n) + f(x_{n+1}))$ de modo a evitar a retenção de um ponto, como o ponto $[c, f(c)]$ no método das cordas, e com isto obter um método de convergência mais rápida.

3.6.3. Implementação do Método Pégaso

Seguem, abaixo, a implementação do método pela sub-rotina PÉGASO, a função requerida por ela e um exemplo de programa para usá-la.

3.6.3.1. SUB-ROTINA PÉGASO

```
C
C     ........................................................................
C
C         SUBROTINA PEGASO
C
C         OBJETIVO :
C              CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO
C
C         METODO :
C              METODO PEGASO
```



```
C
C         REFERENCIA :
C              Dowell,M. & Jarratt,P. The " PEGASUS " method
C                  for computing  the  root  of an equation,
C                  BIT 12 : 503-508 (1972)
C
C         USO :
C              CALL PEGASO(FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,X,XA,XB)
C
C         PARAMETROS DE ENTRADA :
C              FUNCAO : ESPECIFICACAO DA FUNCAO
C              ITEMAX : NUMERO MAXIMO DE ITERACOES
C              TOLER  : TOLERANCIA DA RAIZ
C              XA     : LIMITE INFERIOR DO INTERVALO
C              XB     : LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO
C
C         PARAMETROS DE SAIDA :
C              ITER   : NUMERO DE ITERACOES GASTAS
C              X      : RAIZ DA EQUACAO
C
C         FUNCAO EXTERNA REQUERIDA :
C              FUNCAO : ESPECIFICACAO DA FUNCAO
C
C         FUNCAO INTRINSECA REQUERIDA :
C              ABS    : VALOR ABSOLUTO
C
C     ........................................................................
C
      SUBROUTINE PEGASO(FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,X,XA,XB)
C
      INTEGER ITEMAX,ITER
      REAL A,B,DIF,FA,FB,FUNCAO,FX,TOLER,TOLER2,X,XA,XB
      LOGICAL L1,L2,L3,L4
C
      WRITE(3,13)
   13 FORMAT(1H0,11X,38HCALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO,
     G       7H PEGASO,/12X,1HN,9X,2HXN,11X,5HF(XN),7X,
     H       10HTOLERANCIA)
      ITER=0
      TOLER2=TOLER**2
      A=XA
      B=XB
      FA=FUNCAO(A)
      FB=FUNCAO(B)
      X=B
      WRITE(3,23) ITER,X,FB
   23 FORMAT(10X,I3,4X,F10.5,2(5X,1PE10.3))
   30 CONTINUE
         DIF=FB*(B-A)/(FB-FA)
         X=X-DIF
         FX=FUNCAO(X)
         IF(FX*FB.GE.0.0) GO TO 40
            A=B
            FA=FB
            GO TO 50
   40    CONTINUE
            FA=FA*FB/(FB+FX)
   50    CONTINUE
         B=X
         FB=FX
         ITER=ITER+1
         WRITE(3,23) ITER,X,FX,DIF
         L1=ABS(DIF).GT.TOLER
         L2=ITER.LT.ITEMAX
         L3=ABS(FA).GT.TOLER2
         L4=ABS(FB).GT.TOLER2
```

```
C        QUANDO PELO MENOS UMA DAS EXPRESSOES LOGICAS ACIMA
C        FOR FALSA O CICLO TERMINARA'
C
      IF(L1.AND.L2.AND.L3.AND.L4) GO TO 30
      IF(L2) GO TO 60
         WRITE(3,53) ITEMAX
   53    FORMAT(1H0,5X,25HERRO : NAO CONVERGIU COM ,I3,
     &           10H ITERACOES)
   60 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.6.3.2 *FUNÇÃO FUNCAO*

```
C
C          F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO= " escreva a forma analitica de f(x) "
      RETURN
      END
```

3.6.3.3 *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C        PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA PEGASO
C
      INTEGER ITEMAX,ITER
      REAL A,B,FUNCAO,RAIZ,TOLER
      EXTERNAL FUNCAO
      READ(1,11) A,B,TOLER,ITEMAX
   11 FORMAT(3F10.0,I2)
C        A      : LIMITE INFERIOR DO INTERVALO
C        B      : LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO
C        TOLER  : TOLERANCIA DA RAIZ
C        ITEMAX : NUMERO MAXIMO DE ITERACOES
C
      CALL PEGASO(FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,RAIZ,A,B)
C
      WRITE(3,13) RAIZ,ITER
   13 FORMAT(1H0,11X,19HRAIZ DA EQUACAO   = ,F10.5,//12X,
     &       19HITERACOES GASTAS = ,I4)
      CALL EXIT
      END
```

Exemplo 3.25

Calcular uma raiz de $f(x) = 5 - xe^x = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-5}$.

Fazendo um esboço da equação, vê-se que $\xi \in [1, 2]$.

Para resolver este exemplo usando o programa acima, devem ser fornecidos

a) Dados de entrada

1.0, 2.0, 0.00001, 10

b) Função FUNCAO

```
C
C          F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO=5.0-X*EXP(X)
      RETURN
      END
```

Os resultados obtidos foram:

```
CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO PEGASO
N        XN            F(XN)        TOLERANCIA
0      2.00000      -9.778E+00
1      1.18920       1.094E+00       8.108E-01
2      1.27079       4.713E-01      -8.159E-02
3      1.31784       7.744E-02      -4.704E-02
4      1.32672       4.387E-05      -8.883E-03
5      1.32672       0.000E+00      -5.035E-06

RAIZ DA EQUACAO   =    1.32672

ITERACOES GASTAS =     5
```

Exemplo 3.26

Achar a raiz negativa de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 30 = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-6}$ (ver exemplo 3.16).

Mesmo usando o intervalo original [–6,48; –0,79], a convergência é rápida:

```
CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO PEGASO
N        XN            F(XN)        TOLERANCIA
0      -.79000       4.406E+01
1     -1.83223       5.378E+01       1.042E+00
2     -3.58928       2.978E+01       1.757E+00
3     -4.58188      -1.654E+01       9.926E-01
4     -4.22744       3.257E+00      -3.544E-01
5     -4.28575       2.607E-01       5.831E-02
6     -4.29070       1.373E-03       4.956E-03
7     -4.29073      -5.722E-06       2.625E-05
8     -4.29073      -5.722E-06      -1.088E-07
```

Logo,

$\xi \doteq x_8 = -4{,}29073$

Exemplo 3.27

Calcular uma raiz de $f(x) = (x - 3)^2 - e^{-x} - 55 = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-5}$.

Deve-se observar a convergência, ainda que usando um intervalo grande como [0, 20].

CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO PEGASO

N	XN	F(XN)	TOLERANCIA
0	20.00000	2.340E+02	
1	3.34520	-5.492E+01	1.665E+01
2	6.51088	-4.268E+01	-3.166E+00
3	9.81257	-8.589E+00	-3.302E+00
4	10.55282	2.045E+00	-7.402E-01
5	10.41046	-8.511E-02	1.424E-01
6	10.41615	-7.782E-04	-5.688E-03
7	10.41620	0.000E+00	-5.246E-05

Logo,

$\xi \doteq x_7 = 10{,}41620$

3.6.4. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, $\epsilon \leqslant 10^{-3}$, usando o método Pégaso.

3.6.4.1 $f(x) = e^{\cos x} + x^3 - 3 = 0$

3.6.4.2 $f(x) = 0{,}1\,x^3 - e^{2x} + 2 = 0$

3.6.4.3 $f(x) = 2 \ln (3 - \cos x) - 3x^x + 5 \operatorname{sen} x = 0$

3.6.4.4 $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$

3.7. MÉTODO DE NEWTON

3.7.1. Descrição

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[\,a, b\,]$ e ξ o seu único zero neste intervalo; as derivadas $f'(x)$ $(f'(x) \neq 0)$ e $f''(x)$ devem também ser contínuas. Encontra-se uma aproximação x_n para a raiz ξ e é feita uma expansão em série de Taylor para $f(x) = 0$:

$$f(x) \doteq f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

$$f(x_{n+1}) \doteq 0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.12)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde x_{n+1} é uma aproximação de ξ.

3.7.2. Interpretação Geométrica

O método de Newton é equivalente a substituir um pequeno arco da curva $y = f(x)$ por uma reta tangente, traçada a partir de um ponto da curva (figura 3.23).

Como no método das cordas, quatro situações são possíveis:

$f''(x) > 0$ { $f'(x) > 0$: Caso I (figura 3.19)
$f'(x) < 0$: Caso II (figura 3.20)

$f''(x) < 0$ { $f'(x) > 0$: Caso III (figura 3.21)
$f'(x) < 0$: Caso IV (figura 3.22)

A equação do método de Newton será deduzida a partir do Caso I, embora todos os casos forneçam a mesma equação.

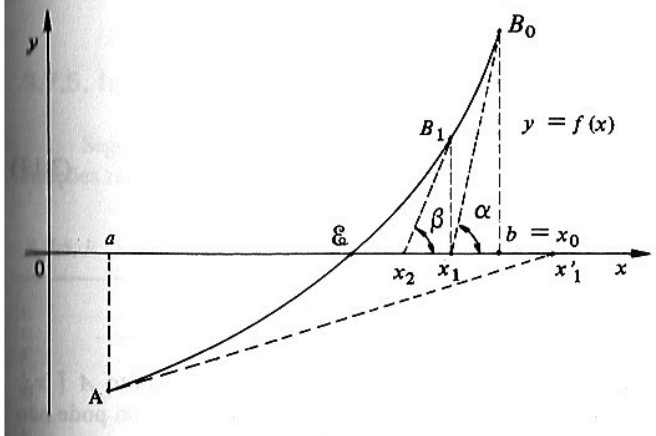


Figura 3.23. Interpretação geométrica do método de Newton.

A fim de se obter uma melhor aproximação x_1 da raiz ξ, traça-se, a partir do ponto B_0 $[x_0, f(x_0)]$, uma reta tangente à curva $y = f(x)$, que intercepta o eixo dos x no ponto x_1. Do ponto B_1 $[x_1, f(x_1)]$ traça-se outra reta tangente à curva que corta o eixo dos x no ponto x_2, sendo este ponto uma melhor aproximação da raiz. O processo se repete até que se encontre $\xi \doteq x_n$ com a tolerância requerida.

Geometricamente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Por indução,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

3.7.3. Escolha de x_0

Pela figura 3.23 vê-se que traçando a tangente a partir do ponto A $[x_0, f(x_0)]$ pode-se encontrar um ponto $x_1' \notin [a, b]$ e o método de Newton pode não convergir. Por outro lado, escolhendo-se $b = x_0$ o processo convergirá.

É condição suficiente para a convergência do método de Newton que: $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal em (a, b) e x_0 seja tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

3.7.4. Convergência

Sendo

$$\bar{\xi} = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad (a < \bar{\xi} < b)$$

este limite existe, pois a seqüência $\{x_n\}$ é limitada e monótona. Passando ao limite a equação, tem-se que

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}$$

$$f(\bar{\xi}) = 0$$

Já que a função $f(x)$ tem somente um zero no intervalo $[a, b]$, conclui-se que:

$$\bar{\xi} = \xi$$

3.7.5. Implementação do Método de Newton

Seguem, abaixo, a implementação do método pela sub-rotina NEWTON, as funções requeridas por ela e um exemplo de programa para usá-la.

3.7.5.1. SUB-ROTINA NEWTON

```
C
C     ..................................................................
C
C        SUBROTINA NEWTON
C
C        OBJETIVO :
C             CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO
C
```

```
C          METODO UTILIZADO :
C               METODO DE NEWTON
C
C          USO :
C               CALL NEWTON(DERFUN,FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,X,XO)
C
C          PARAMETROS DE ENTRADA :
C               DERFUN : ESPECIFICACAO DA DERIVADA DA FUNCAO
C               FUNCAO : ESPECIFICACAO DA FUNCAO
C               ITEMAX : NUMERO MAXIMO DE ITERACOES
C               TOLER  : TOLERANCIA DA RAIZ
C               XO     : APROXIMACAO INICIAL DA RAIZ
C
C          PARAMETROS DE SAIDA :
C               ITER   : NUMERO DE ITERACOES GASTAS
C               X      : RAIZ DA EQUACAO
C
C          FUNCOES EXTERNAS REQUERIDAS :
C               DERFUN : ESPECIFICACAO DA DERIVADA DA FUNCAO
C               FUNCAO : ESPECIFICACAO DA FUNCAO
C
C          FUNCAO INTRINSECA REQUERIDA :
C               ABS    : VALOR ABSOLUTO
C
C     ............................................................
C
      SUBROUTINE NEWTON(DERFUN,FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,X,XO)
C
      INTEGER ITEMAX,ITER
      REAL DERFUN,DFX,DIF,FUNCAO,FX,TOLER,X,XO
      LOGICAL DIVZER,L1,L2,L3
      DATA DIVZER/.FALSE./
C
      WRITE(3,13)
   13 FORMAT(1HO,10X,38HCALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO,
     G       10H DE NEWTON,/12X,1HN,10X,2HXN,11X,5HF(XN),7X,
     H       10HTOLERANCIA)
      ITER=0
      X=XO
      FX=FUNCAO(X)
      DFX=DERFUN(X)
      WRITE(3,23) ITER,X,FX
   23 FORMAT(10X,I3,5X,F10.5,2(5X,1PE10.3))
   30 CONTINUE
         IF(ABS(DFX).LT.1.0E-5) GO TO 40
            DIF=FX/DFX
            X=X-DIF
            FX=FUNCAO(X)
            DFX=DERFUN(X)
            ITER=ITER+1
            WRITE(3,23) ITER,X,FX,DIF
            GO TO 50
   40    CONTINUE
            DIVZER=.TRUE.
   50    CONTINUE
         L1=ABS(DIF).GT.TOLER
         L2=ITER.LT.ITEMAX
         L3=.NOT.DIVZER
C
C        QUANDO PELO MENOS UMA DAS EXPRESSOES LOGICAS ACIMA
C        FOR FALSA O CICLO TERMINARA'
C
      IF(L1.AND.L2.AND.L3) GO TO 30
      IF(L2) GO TO 60
         WRITE(3,53) ITEMAX
   53    FORMAT(1HO,5X,25HERRO : NAO CONVERGIU COM ,I3,
     G          10H ITERACOES)
```



```
   60 CONTINUE
      IF(L3) GO TO 70
         WRITE(3,63)
   63    FORMAT(1HO,5X,26HERRO : ABS(F'(X)) < 1.0E-5)
   70 CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.7.5.2. *FUNÇÕES FUNCAO E DERFUN*

```
C
C         F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO= " escreva a forma analitica de f(x) "
      RETURN
      END
C
C         F'(X)
C
      REAL FUNCTION DERFUN(X)
      REAL X
      DERFUN= " escreva a forma analitica de f'(x) "
      RETURN
      END
```

3.7.5.3. *PROGRAMA PRINCIPAL*

```
C
C         PROGRAMA PRINCIPAL PARA UTILIZACAO DA SUBROTINA NEWTON
C
      INTEGER ITEMAX,ITER
      REAL DERFUN,FUNCAO,RAIZ,TOLER,XO
      EXTERNAL DERFUN,FUNCAO
      READ(1,11) XO,TOLER,ITEMAX
   11 FORMAT(2F10.0,I2)
C        XO     : APROXIMACAO INICIAL DA RAIZ
C        TOLER  : TOLERANCIA DA RAIZ
C        ITEMAX : NUMERO MAXIMO DE ITERACOES
C
      CALL NEWTON(DERFUN,FUNCAO,ITEMAX,ITER,TOLER,RAIZ,XO)
C
      WRITE(3,13) RAIZ,ITER
   13 FORMAT(1HO,11X,19HRAIZ DA EQUACAO   = ,F10.5,//12X,
     G       19HITERACOES GASTAS = ,I4)
      CALL EXIT
      END
```

Nos dois primeiros exemplos dados a seguir, os resultados foram obtidos usando-se o programa Newton, com tolerância ϵ, avaliada pelo critério 3.2.

Exemplo 3.28

Achar a raiz de $f(x) = 2x^3 + \ln x - 5 = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-7}$.

Fazendo um esboço da equação vê-se que $\xi \in [1, 2]$:

$$f'(x) = 6x^2 + 1/x$$

$$f''(x) = 12x - 1/x^2 > 0 \ \forall \ x \in [1, 2]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -3{,}00000 < 0 \\ f(2) = 11{,}69315 > 0 \end{array}\right\} x_0 = 2 \text{ pois } f(2) \cdot f''(2) > 0$$

Para resolver este exemplo, usando o programa acima, devem ser fornecidos:

a) Dados de entrada
   2.0, 0.0000001, 10

b) Funções FUNCAO e DERFUN

```
C
C        F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO=2.0*X**3+ALOG(X)-5.0
      RETURN
      END
C
C        F'(X)
C
      REAL FUNCTION DERFUN(X)
      REAL X
      DERFUN=6.0*X**2+1.0/X
      RETURN
      END
```

Os resultados obtidos foram:

CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO DE NEWTON

N	XN	F(XN)	TOLERANCIA
0	2.00000	1.169E+01	
1	1.52273	2.482E+00	4.773E-01
2	1.35237	2.485E-01	1.704E-01
3	1.33115	3.510E-03	2.122E-02
4	1.33084	4.768E-07	3.084E-04
5	1.33084	4.768E-07	4.191E-08

RAIZ DA EQUACAO = 1.33084

ITERACOES GASTAS = 5

Exemplo 3.29

Calcular a raiz negativa de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, com $\epsilon \leqslant 10^{-5}$.

Aplicando o teorema de Lagrange, nota-se que $\xi \in [-2{,}44; -0{,}38]$:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 10 < 0 \ \forall \ x < 5/3$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2{,}44) = -43{,}73478 < 0 \\ f(-0{,}38) = \quad 1{,}84313 > 0 \end{array}\right\} x_0 = -2{,}44 \text{ pois } f(-2{,}44) \cdot f''(-2{,}44) > 0$$

CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO DE NEWTON

N	XN	F(XN)	TOLERANCIA
0	-2.44000	-4.373E+01	
1	-1.42904	-1.156E+01	-1.011E+00
2	-.88937	-2.548E+00	-5.397E-01
3	-.68167	-3.218E-01	-2.077E-01
4	-.64673	-8.558E-03	-3.494E-02
5	-.64575	-6.676E-06	-9.812E-04
6	-.64575	0.000E+00	-7.666E-07

Logo:

$$\xi \doteq x_6 = -0{,}64575$$

Exemplo 3.30

Calcular $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ para $a = 5$, $a = 16{,}81$ e $a = 805{,}55$, com $\epsilon \leqslant 10^{-5}$.

Fazendo $x = \sqrt{a}$ tem-se que:

$$f(x) = x^2 - a$$

e o problema recai no cálculo da raiz desta equação.

Então,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

ou

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Este método de cálculo da raiz quadrada é chamado processo de Hero. Pode-se mostrar que se $x_0 > 0$ o processo converge, mas deve-se tomar cuidado na escolha de x_0. Existem várias maneiras de se escolher x_0 e uma delas é a seguinte. Escreve-se a na forma

$$a = m \cdot 10^{2p+q}$$

onde m é a mantissa na forma normalizada ($0 \leqslant m < 1$) e $2p+q$ é o expoente, sendo q igual a 0 ou 1.

Então,

$$\sqrt{a} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{10^{2p}} \cdot \sqrt{10^q}$$

Usando um ajuste hiperbólico para $\sqrt{m}$, tem-se a primeira aproximação para $\sqrt{a}$:

$$x_0 = \left(1{,}68 - \frac{1{,}29}{0{,}84 + m}\right) \cdot 10^p \cdot 3{,}16^q$$

E, a seguir, calculam-se as raízes:

Para $a = 5$
$a = 0{,}5 \cdot 10^1 \therefore m = 0{,}5,\ p = 0 \text{ e } q = 1$

n	x_n	ϵ	
0	2,26671		
1	2,23628	0,03043	
2	2,23607	0,00021	
3	2,23607	0,00000	$\Rightarrow \sqrt{5} \doteq 2{,}23607$

Para $a = 16{,}81$
$a = 0{,}1681 \cdot 10^2 \therefore m = 0{,}1681,\ p = 1 \text{ e } q = 0$

n	x_n	ϵ	
0	4,00365		
1	4,10116	0,09751	
2	4,10000	0,00116	
3	4,10000	0,00000	$\Rightarrow \sqrt{16{,}81} \doteq 4{,}10000$

Para $a = 805{,}55$
$a = 0{,}80555 \cdot 10^3 \therefore m = 0{,}80555,\ p = 1 \text{ e } q = 1$

n	x_n	ϵ	
0	28,31574		
1	28,38229	0,06655	
2	28,38221	0,00008	
3	28,38221	0,00000	$\Rightarrow \sqrt{805{,}55} \doteq 28{,}38221$

Observação: Não se deve usar o método de Newton para resolver equações cuja curva $y = f(x)$, próxima do ponto de interseção com o eixo dos x, é quase horizontal, pois neste caso $f'(x) \doteq 0$ e $f(x)\,/\,f'(x)$ dará um número tão grande que pode não ser possível representá-lo em um instrumento de cálculo.

3.7.6. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$, usando o método de Newton.

3.7.6.1. $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x + 4 = 0$

3.7.6.2. $f(x) = e^x - \operatorname{tg} x = 0$

3.7.6.3. $f(x) = 10^x + x^3 + 2 = 0$

3.7.6.4. $f(x) = x^3 - x^2 - 12x = 0$

3.8. MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR

3.8.1. Descrição

Sejam $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e & um número pertencente a este intervalo tal que $f(\&) = 0$.

Por um artifício algébrico pode-se transformar $f(x) = 0$ em

$$x = F(x)$$

onde $F(x)$ é chamada a função de iteração.

Sendo x_0 uma primeira aproximação da raiz &, calcula-se $F(x_0)$. Faz-se, então, $x_1 = F(x_0)$; $x_2 = F(x_1)$; $x_3 = F(x_2)$ e assim sucessivamente, ou seja:

$$x_{n+1} = F(x_n) \ , \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.14}$$

Se a seqüência $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ é convergente, isto é, se existe o limite $\lim_{n \to \infty} x_n = \&$ e $F(x)$ é contínua, então, passando ao limite a equação (3.14), tem-se:

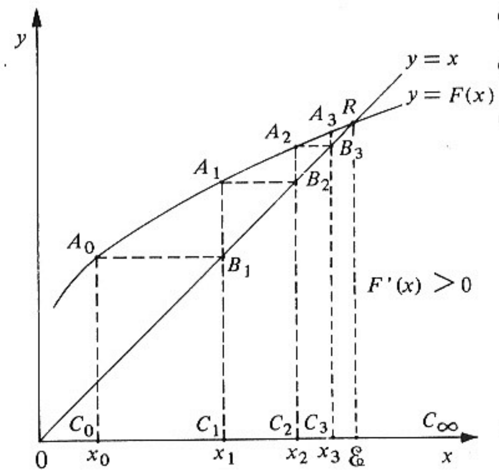
$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = F(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

$$\& = F(\&)$$

onde $\&$ é uma raiz de $f(x) = 0$.

3.8.2. Interpretação Geométrica

Traçam-se no plano xy os gráficos da função $y = x$ e $y = F(x)$. Cada raiz real $\&$ da equação $x = F(x)$ é uma abscissa do ponto de interseção R da curva $y = F(x)$ com a bissetriz $y = x$ (figura 3.24).



$OC_1 = B_1C_1 = A_0C_0 \rightarrow x_1 = F(x_0)$

$OC_2 = B_2C_2 = A_1C_1 \rightarrow x_2 = F(x_1)$

$OC_3 = B_3C_3 = A_2C_2 \rightarrow x_3 = F(x_2)$

$x_{n+1} = F(x_n)$

$OC_\infty = C_\infty R \rightarrow \& = F(\&)$

Figura 3.24. Interpretação geométrica do método da iteração linear.

Do ponto A_0 $[x_0, f(x_0)]$ constrói-se a linha poligonal $A_0B_1A_1B_2A_2B_3$ ... (em forma de escada), cujos segmentos são, alternadamente, paralelos aos eixos dos x e dos y, sendo os pontos A_i pertencentes à curva $y = F(x)$ e os pontos B_i pertencentes à reta $y = x$.

Os pontos A_i, B_i possuem abscissas comuns x_i, que são as sucessivas aproximações da raiz $\&$.

Esta representação geométrica pode ser vista sob outro aspecto.

Seja o triângulo isósceles OC_1B_1. Os lados OC_1 e B_1C_1 são iguais e $B_1C_1 = A_0C_0$. Como $OC_1 = x_1$ e $A_0C_0 = F(x_0)$, então $x_1 = F(x_0)$.

No triângulo OC_2B_2 os lados OC_2 e B_2C_2 são iguais e $B_2C_2 = A_1C_1$; considerando que $OC_2 = x_2$ e $A_1C_1 = F(x_1)$, então, $x_2 = F(x_1)$.

Por indução temos que $x_{n+1} = F(x_n)$. Repetindo o método infinitas vezes chega-se ao triângulo $OC_\infty R$, onde $OC_\infty = C_\infty R$, $OC_\infty = \&$ e $C_\infty R = C_\infty F(\&) = F(\&)$ ou seja, $\& = F(\&)$.

A linha poligonal tem a forma de escada quando a derivada $F'(x)$ é positiva. Se ela for negativa ter-se-á uma poligonal de forma espiral (figura 3.25).

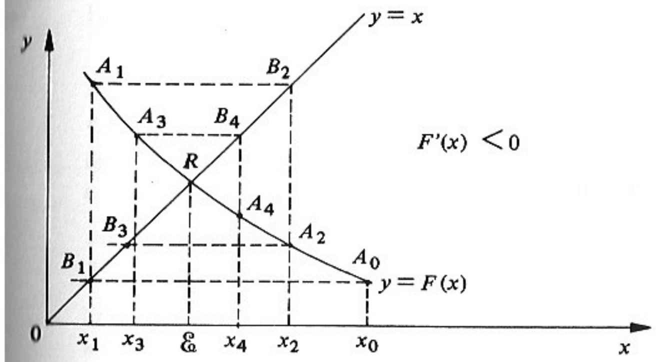


Figura 3.25. Iteração linear com $F'(x) < 0$ (forma espiral).

3.8.3. Convergência

Nas figuras anteriores nota-se que a curva $y = F(x)$ inclina-se numa região próxima de $\&$, isto é, $|F'(x)| < 1$ e o processo de iteração converge.

Por outro lado, se $|F'(x)| > 1$ o processo não converge (figura 3.26).

Portanto, antes de se aplicar o método da iteração linear deve-se verificar se a função de iteração $F(x)$ escolhida conduzirá a um processo convergente. As condições suficientes para assegurar a convergência estão contidas no teorema 3.7.

Teorema 3.7: Seja $\& \in I$ uma raiz da equação $f(x) = 0$ e $F(x)$ contínua e diferenciável em I. Se $|F'(x)| \leqslant k < 1$ para todos os pontos em I e $x_0 \in I$, então os valores dados pela equação (3.14) convergem para $\&$.

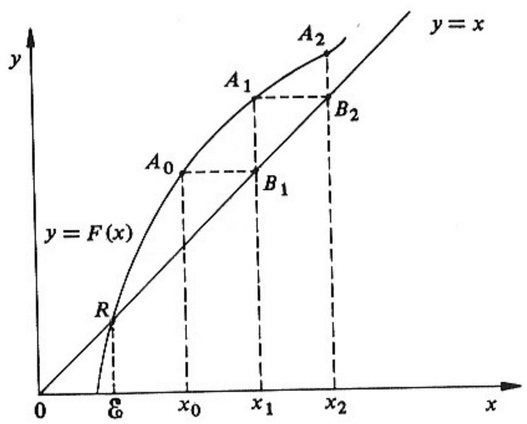


Figura 3.26. Iteração linear não convergente ($|F'(x)| > 1$).

Demonstração

I) $x_0 \in I \rightarrow x_n \in I \; \forall \, n$

$\mathcal{E}$ é raiz $\rightarrow \mathcal{E} = F(\mathcal{E})$

Subtraindo da equação (3.14) a equação acima, tem-se

$x_{n+1} - \mathcal{E} = F(x_n) - F(\mathcal{E})$

Pelo teorema do valor médio, existe ω_n com $x_n \leqslant \omega_n \leqslant \mathcal{E}$, tal que

$$x_{n+1} - \mathcal{E} = F'(\omega_n)(x_n - \mathcal{E}) \tag{3.15}$$

Para $n = 0$:

$x_1 - \mathcal{E} = F'(\omega_0)(x_0 - \mathcal{E})$

como $\omega_0 \in I$ e $|F'(\omega_0)| < 1$ segue que

$|x_1 - \mathcal{E}| = |F'(\omega_0)| \cdot |x_0 - \mathcal{E}|$

$|x_1 - \mathcal{E}| \leqslant |x_0 - \mathcal{E}| \rightarrow x_1 \in I$

Por indução, pode-se mostrar que

$x_n \in I \; \forall \, n$

II) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \mathcal{E}$

Seja e_n o erro cometido na n-ésima iteração, isto é,

$e_n = x_n - \mathcal{E}$.

Substituindo a equação acima na equação (3.15) tem-se:

$e_{n+1} = F'(\omega_n) e_n$

Fazendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ na equação acima e considerando que $|F'(x)| \leqslant k < 1$:

$$|e_{n+1}| \leqslant k^{n+1} |e_0| \tag{3.16}$$

sendo e_0 o erro na aproximação inicial.

Passando ao limite na equação (3.16) tem-se:

$\lim\limits_{n \to \infty} |e_{n+1}| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} k^{n+1} |e_0|$

$\lim\limits_{n \to \infty} |e_{n+1}| = 0, (k < 1)$

$\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - \mathcal{E}| = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \mathcal{E}$

Quando a iteração converge

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \lim\limits_{n \to \infty} F'(\omega_n) = F'(\mathcal{E})$

Esta equação garante que para grandes valores de n o erro em qualquer iteração seja proporcional ao erro da iteração anterior, sendo o fator de proporcionalidade aproximadamente $F'(\mathcal{E})$.

É por isso que o processo é denominado iteração linear e a convergência será tanto mais rápida quanto menor o valor de $|F'(\mathcal{E})|$.

3.8.4. Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$ podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar $\mathcal{E}$.

Só se deve usar uma $F(x)$ que satisfaça ao teorema 3.7.

Exemplo 3.31

Seja $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x = 0$ com $x_0 = 0{,}9$.

Pode-se facilmente obter três funções de iteração.

1) Somando x aos dois membros:

$$x = x^2 - \operatorname{sen} x + x \rightarrow F_1(x) = x^2 - \operatorname{sen} x + x$$

2) Somando sen x e extraindo a raiz quadrada:

$$x^2 - \cancel{\operatorname{sen}} x + \cancel{\operatorname{sen}} x = \operatorname{sen} x$$
$$x = \pm\sqrt{\operatorname{sen} x} \rightarrow F_2(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

3) Subtraindo x^2 e calculando o arco seno:

$$\cancel{x^2} - \operatorname{sen} x - \cancel{x^2} = -x^2$$
$$\operatorname{sen} x = x^2$$
$$x = \operatorname{sen}^{-1}(x^2) \rightarrow F_3(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2)$$

As derivadas das funções de iteração são:

$$F'_1(x) = 2x - \cos x + 1$$

$$F'_2(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

$$F'_3(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Como o valor de ξ é desconhecido, substitui-se $x_0 = 0{,}9$ nas derivadas (por isto deve-se tomar x_0 o mais próximo possível de ξ);

$$|\,F'_1(0{,}9)\,| = 2{,}178 > 1$$
$$|\,F'_2(0{,}9)\,| = 0{,}351 < 1$$
$$|\,F'_3(0{,}9)\,| = 3{,}069 > 1$$

Pelos resultados acima pode-se concluir que somente $F_2(x)$ deverá convergir. De fato, calculando duas iterações com as três funções, pode-se constatar isto, pois é a única em que $\epsilon_n \rightarrow 0$:

	$F_1(x)$		$F_2(x)$		$F_3(x)$	
n	x_n	ϵ_n	x_n	ϵ_n	x_n	ϵ_n
0	0,900		0,900		0,900	
1	0,927	0,027	0,885	0,015	0,944	0,044
2	0,987	0,060	0,880	0,005	1,100	0,156

Nos exemplos abaixo, a tolerância ϵ é avaliada usando o critério 3.2.

Exemplo 3.32

Calcular a raiz positiva de $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$.

Aplicando o teorema de Lagrange, vê-se que $\xi \in [\,0{,}50; 2{,}00\,]$.

Seja $x_0 = 1{,}5$

$$x = F(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad \therefore \quad F'(x) = \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \Rightarrow |\,F'(1{,}5)\,| = 0{,}18 < 1$$

N	XN	E
0	1.50000	
1	1.35721	-.14279
2	1.33086	-.02635
3	1.32588	-.00498
4	1.32494	-.00094

Logo,

$$\xi \doteq x_4 = 1{,}32494$$

Exemplo 3.33

Avaliar a raiz de $f(x) = e^x + \cos x - 3 = 0$, com $\epsilon \leqslant 10^{-4}$

Fazendo um esboço da função, vê-se que a escolha de x_0 pode recair em $x_0 = 1$.

$$x = F(x) = \ln(3 - \cos x) \quad \therefore \quad F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{3 - \cos x} \Rightarrow |F'(1)| = 0{,}34 < 1$$

N	XN	E
0	1.00000	
1	.90004	-.09996
2	.86644	-.03360
3	.85546	-.01098
4	.85191	-.00355
5	.85077	-.00114
6	.85041	-.00037
7	.85029	-.00012
8	.85025	-.00004

Logo,

$$\xi \doteq x_8 = 0{,}85025$$

Exemplo 3.34

Achar a raiz de $f(x) = \cos x + \ln x + x = 0$ com $\epsilon \leqslant 10^{-2}$.

Fazendo um esboço, vê-se que $x_0 = 0{,}5$.

$$x = F(x) = e^{-(\cos x + x)} \quad \therefore \quad F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{e^{\cos x + x}} \Rightarrow |F'(0{,}5)| = 0{,}13 < 1$$

N	XN	E
0	.50000	
1	.25219	-.24781
2	.29507	.04288
3	.28598	-.00909

Logo,

$$\xi \doteq x_3 = 0{,}28598$$

3.8.5. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$, usando o método de iteração linear.

3.8.5.1. $f(x) = x^3 - \cos x = 0$

3.8.5.2. $f(x) = x^2 + e^{3x} - 3 = 0$

3.8.5.3. $f(x) = 3x^4 - x - 3 = 0$

3.8.5.4. $f(x) = e^x + \cos x - 5 = 0$

3.9. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Para concluir este capítulo dá-se, a seguir, o número de iterações gasto em cada método para se avaliar a raiz de duas equações.

Exemplo 3.35

$f(x) = e^{-0,1\,x} + x^2 - 10 = 0$, $\epsilon \leqslant 10^{-5}$ e $\xi \in [2{,}5; 3{,}5]$

$f'(x) = -0{,}1\, e^{-0,1x} + 2x$

$f''(x) = 0{,}01\, e^{-0,1x} + 2 > 0 \ \forall\, x \in [2{,}5; 3{,}5]$

$F(x) = \sqrt{10 - e^{-0,1x}}$

	Bisseção	Cordas	Pégaso	Newton	Iteração Linear
n	16	6	4	3	4

$\xi \doteq 3{,}04342$

Exemplo 3.36

$f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25 = 0$, $\epsilon \leqslant 10^{-5}$ e $\xi \in [0{,}96; 1{,}93]$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x + 1$

$f''(x) = 20x^3 + 6x + 2 > 0 \ \forall\, x \in [0{,}96; 1{,}93]$

$F(x) = (25 - x^3 - x^2 - x)^{0,2}$

	Bisseção	Cordas	Pégaso	Newton	Iteração Linear
n	16	8	6	4	10

$\xi \doteq 1{,}72313$

3.10. OBSERVAÇÕES FINAIS SOBRE OS MÉTODOS

3.10.1. Bisseção

Não exige o conhecimento das derivadas, mas tem uma convergência lenta. Deve ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz.

3.10.2. Cordas

Exige que o sinal da derivada segunda permaneça constante no intervalo (mas isto pode ser verificado até graficamente).

Se o ponto fixado c for razoavelmente próximo da raiz (grosseiramente, $|f(c)| < 10$), o método tem boa convergência; caso contrário, pode ser mais lento que a bisseção.

3.10.3. Pégaso

Além de não exigir o conhecimento do sinal das derivadas, tem uma convergência só superada pelo método de Newton.

3.10.4. Newton

Requer o conhecimento da forma analítica de $f'(x)$, mas sua convergência é extraordinária.

3.10.5. Iteração Linear

Sua maior dificuldade é achar uma função de iteração que satisfaça à condição de convergência.

O teste $|F'(x_0)| < 1$ pode levar a um engano se x_0 não estiver suficientemente próximo da raiz. A velocidade de convergência dependerá de $|F'(\&)|$: quanto menor este valor maior será a convergência.

3.11. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

3.11.1. Descrição do Problema

Uma loja de eletrodomésticos oferece dois planos de financiamento para um produto cujo preço à vista é Cr$ 16.200,00.

Plano A = entrada de Cr$ 2.200,00 + 9 prestações mensais de Cr$ 2.652,52
Plano B = entrada de Cr$ 2.200,00 + 12 prestações mensais de Cr$ 2.152,27

Qual dos dois planos é melhor para o consumidor?

3.11.2. Modelo Matemático

Para escolher o melhor plano deve-se saber qual tem a menor taxa de juros.

A equação abaixo relaciona os juros (j) e o prazo (P) com o valor financiado (VF = preço à vista – entrada) e a prestação mensal (PM):

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{VF}{PM}$$

Fazendo

$x = 1 + j$

$k = VF/PM$

tem-se:

$$\frac{1-x^{-P}}{x-1} = k$$

multiplicando ambos os membros por x^P:

$$\frac{x^P - 1}{x-1} = kx^P$$

e fazendo

$$f(x) = kx^{P+1} - (k+1)x^P + 1 = 0$$

chega-se a uma equação algébrica de grau $P + 1$.

Deve-se, agora, achar o valor de x no qual $f(x)$ se anule, ou seja, calcular uma raiz de $f(x) = 0$.

3.11.3. Solução Numérica

A raiz da equação deve ser primeiramente isolada e depois refinada até a tolerância desejada.

3.11.3.1. ISOLAMENTO DA RAIZ

Sendo $f(x)$ uma equação algébrica, fica mais fácil isolar suas raízes usando-se suas propriedades.

Número de raízes reais:

Sendo $k > 0$ então $n^+ = 2$ ou 0

Limite das raízes reais:

Plano A
$P = 9$
$k = (16.200 - 2.200)/2.652{,}52 = 5{,}278$
$f_A(x) = 5{,}278x^{10} - 6{,}278x^9 + 1$

$n = 10$	$f_A(x)$	$f_{A1}(x)$
a_0	1	5,278
a_1	0	−6,278
a_2	0	0
a_8	0	0
a_9	−6,278	0
a_{10}	5,278	1
k	9	1
n-k	1	9
B	6,278	6,278
L_i	2,19	2,23
$L_{\mathcal{E}}$	2,19	0,45

Plano B
$P = 12$
$k = (16.200 - 2.200)/2.152{,}27 = 6{,}50476$
$f_B(x) = 6{,}50476x^{13} - 7{,}50476x^{12} + 1$

$n = 13$	$f_B(x)$	$f_{B1}(x)$
a_0	1	6,50476
a_1	0	−7,50476
a_2	0	0
a_{11}	0	0
a_{12}	−7,50476	0
a_{13}	6,50476	1
k	12	1
n-k	1	12
B	7,50476	7,50476
L_i	2,15	2,18
$L_{\mathcal{E}}$	2,15	0,46

Portanto

$0{,}45 \leqslant \mathcal{E}_A^+ \leqslant 2{,}19$ e $0{,}46 \leqslant \mathcal{E}_B^+ \leqslant 2{,}15$

Pode-se verificar que $x = 1$ é raiz destas equações, mas isto significa $j = 0$ ($x = j + 1$), o que não ocorre com os financiamentos! Como são duas raízes, a outra está entre um valor maior que 1, por exemplo, $x = 1{,}01$ e o limite superior já calculado pelo teorema de Lagrange:

$1{,}01 \leqslant \mathcal{E}_A \leqslant 2{,}19$ e $1{,}01 \leqslant \mathcal{E}_B \leqslant 2{,}15$

$f_A(1{,}01) = -0{,}04$ $\quad$ $f_B(1{,}01) = -0{,}05$

$f_A(2{,}19) = 6.120{,}25$ $\quad$ $f_B(2{,}15) = 63.223{,}01$

Como cada função muda de sinal no intervalo dado, pode-se afirmar que existe no mínimo uma raiz no intervalo (teorema 3.1); mas como as equações têm, no máximo, duas raízes positivas e uma delas é $x = 1$, então, nos respectivos intervalos existe, exatamente, uma raiz de cada equação. Com isto, a raiz de cada equação já está isolada.

3.11.3.2. *REFINAMENTO DA RAIZ*

Tanto $f_A(x)$ como $f_B(x)$ apresentam valores muito grandes no extremo superior dos intervalos, por isto é interessante aplicar o método da bisseção para diminuir o intervalo até, por exemplo, $f(x) < 10$.

Como se trata de uma equação algébrica com derivada de fácil obtenção, usa-se, a seguir, o método de Newton para o refinamento, pois ele apresenta uma maior convergência.

Método da bisseção

Plano A

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	1,01	2,19	1,60	149,90
1	1,01	1,60	1,31	8,23

$1{,}01 \leqslant \mathcal{E}_A \leqslant 1{,}31$

Plano B

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	1,01	2,15	1,58	672,12
1	1,01	1,58	1,30	23,17
2	1,01	1,30	1,16	1,24

$1{,}01 \leqslant \&_B \leqslant 1{,}16$

Método de Newton

Antes de aplicar o método de Newton, deve-se escolher um x_0 que garanta a convergência ($f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$)

$$f(x) = kx^{P+1} - (k+1)\,x^P + 1$$

$$f'(x) = (P+1)\,kx^P - P(k+1)x^{P-1}$$

$$f''(x) = P(P+1)\,kx^{P-1} - P(P-1)(k+1)x^{P-2}$$

Intervalo onde $f''(x) > 0$

Sendo $k > 0$, $x > 0$ e $P > 1$, então

$$Px^{P-2}\,[(P+1)kx - (P-1)(k+1)] > 0$$

$$(P+1)kx - (P-1)(k+1) > 0$$

Quando

$$x > \frac{(P-1)(k+1)}{(P+1)k} \rightarrow f''(x) > 0$$

Escolha de x_0

Plano A

$f''_A(x) > 0 \;\forall\; x > 0{,}95$

$$\left.\begin{aligned} f_A(1{,}01) &= -0{,}04 \\ f_A(1{,}31) &= 8{,}23 \end{aligned}\right\}\; x_0 = 1{,}31 \text{ pois } f(1{,}31)\cdot f''(1{,}31) > 0$$

Plano B

$f''_B(x) > 0 \;\forall\; x > 0{,}98$

$$\left.\begin{aligned} f_B(1{,}01) &= -0{,}05 \\ f_B(1{,}16) &= 1{,}24 \end{aligned}\right\}\; x_0 = 1{,}16 \text{ pois } f(1{,}16)\cdot f''(1{,}16) > 0$$

3.11.3.3. *USO DA SUB-ROTINA NEWTON*

Pode-se usar a sub-rotina NEWTON e o programa principal descritos no item 3.7.5 para calcular as raízes destas equações, sendo necessário, apenas, fornecer os dados de entrada e as funções FUNCAO e DERFUN.

Plano A

a) Dados de entrada
   1.31, 0.00001, 10
b) Funções FUNCAO e DERFUN

```
C
C        F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO=(5.278*X-6.278)*X**9+1.0
      RETURN
      END
C
C        F'(X)
C
      REAL FUNCTION DERFUN(X)
      REAL X
      DERFUN=(52.78*X-56.502)*X**8
      RETURN
      END
```

Os resultados são:

```
CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO DE NEWTON
N        XN            F(XN)         TOLERANCIA
0      1.31000       8.228E+00
1      1.23494       2.604E+00        7.506E-02
2      1.17949       7.673E-01        5.546E-02
3      1.14387       1.932E-01        3.562E-02
4      1.12685       3.181E-02        1.702E-02
5      1.12273       1.600E-03        4.116E-03
6      1.12250       3.815E-06        2.300E-04
7      1.12250       5.364E-07        5.516E-07

RAIZ DA EQUACAO  =    1.12250

ITERACOES GASTAS =    7
```

Plano B

a) Dados de entrada
1.16, 0.00001,10
b) Funções FUNCAO e DERFUN

```
C
C        F(X)
C
      REAL FUNCTION FUNCAO(X)
      REAL X
      FUNCAO=(6.50476*X-7.50476)*X**12+1.0
      RETURN
      END
C
C        F'(X)
C
      REAL FUNCTION DERFUN(X)
      REAL X
      DERFUN=(84.56188*X-90.05712)*X**11
      RETURN
      END
```

Os resultados são:

```
CALCULO DE RAIZ DE EQUACAO PELO METODO DE NEWTON
 N         XN            F(XN)         TOLERANCIA
 0       1.16000       1.242E+00
 1       1.12979       3.265E-01       3.021E-02
 2       1.11423       5.907E-02       1.556E-02
 3       1.10992       3.758E-03       4.316E-03
 4       1.10960       1.931E-05       3.141E-04
 5       1.10960      -8.345E-07       1.631E-06

 RAIZ DA EQUACAO   =   1.10960

 ITERACOES GASTAS =    5
```

3.11.4 Análise do Resultado

Plano A

A raiz de $f_A(x) = 0$ é $\xi_A = 1{,}12250 \Rightarrow j = 0{,}12250$ ou $j = 12{,}25\%$

Plano B

A raiz de $f_B(x) = 0$ é $\xi_B = 1{,}10960 \Rightarrow j = 0{,}10960$ ou $j = 10{,}96\%$

O total pago no plano A é Cr\$ 26.072,68 (= Cr\$ 2.200,00 + 9 • Cr\$ 2.652,52) contra Cr\$ 28.027,24 (= Cr\$ 2.200,00 + 12 • Cr\$ 2.152, 27) pagos no plano B.

O plano A, à primeira vista, parece melhor pois o consumidor paga uma quantia menor, mas isto é ilusório porque neste plano a taxa de juros cobrada é maior.

Concluindo, o financiamento do plano B é mais interessante para o consumidor.

3.12. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Resolver as questões abaixo:

3.12.1. Mostrar que as raízes de $P(-x)$ são $-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3, \ldots, -\xi_n$, sendo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ as raízes de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

3.12.2. Mostrar que as raízes de $P(-1/x)$ são $-1/\xi_2, -1/\xi_3, \ldots, -1/\xi_n$, sendo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ as raízes de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

3.12.3. Verificar que $|x_n - x_{n-1}| = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

3.12.4. Demonstrar que a equação $x_{n+1} = \dfrac{1}{P}\left((P-1)\,x_n + \dfrac{a}{x_n^{P-1}}\right)$ pode ser usada para calcular $\sqrt[P]{a}, a \geqslant 0$.

3.12.5. Construir um programa para calcular uma raiz usando o método da bisseção, com o auxílio de uma linguagem qualquer.

3.12.6. Escrever um programa, na linguagem de sua preferência, para implementar o método das cordas.

3.12.7. Fazer um programa, em uma linguagem disponível, para utilizar o método da iteração linear.

Resolver os exercícios abaixo usando qualquer método, com $\epsilon \leqslant 10^{-4}$.

3.12.8. Calcular a raiz positiva do exemplo 3.1.

3.12.9. Achar todas as raízes de $f(x) = 0{,}2x^3 - 3{,}006x^2 + 15{,}06x - 25{,}15 = 0$.

3.12.10. Determinar o ponto de mínimo da função $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 3$.

3.12.11. Seja a função $f(x) = e^{x-2} + x^5 - 1$. Achar o valor de x no qual $f(x) = 2$.

3.12.12. Achar o ponto de inflexão da função $f(x) = 2e^x + x^3 - 1$.

3.12.13. Calcular $\sqrt[3]{8}$ (ver exercício 3.12.4).

3.12.14. Calcular $\sqrt[5]{1955}$.

Usar agora o método de sua preferência com $\epsilon \leqslant 10^{-3}$.

3.12.15. O preço à vista (PV) de uma mercadoria é Cr\$ 312.000,00 mas pode ser financiado com uma entrada (E) de Cr \$ 91.051,90 e 12 (P) prestações mensais (PM) de Cr\$ 26.000,00. Calcular os juros (j) sabendo que

$$\frac{1-(1+j)^{-P}}{j} = \frac{PV-E}{PM}$$

3.12.16. Quais serão os juros se o plano de pagamento for uma entrada de Cr\$ 112.000,00 e 18 prestações mensais de Cr\$ 20.000,00?

3.12.17. Uma bola é arremessada para cima com velocidade $v_0 = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ a partir de uma altura $x_0 = 5$ m, em um local onde a aceleração da gravidade é $g = -9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Sabendo que

$$h(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

qual será o tempo gasto para a bola tocar o solo, desconsiderando o atrito com o ar?

3.12.18. A capacidade calorífica C_p $(\text{cal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ da água em função da temperatura T (K) é dada por:

$$C_p(T) = 7{,}219 + 2{,}374 \cdot 10^{-3} T + 2{,}67 \cdot 10^{-7} T^2;$$
$$300 \leqslant T \leqslant 1.500$$

Para sabermos a que temperatura temos uma determinada capacidade calorífica c fazemos:
$C_p(T) - c = 0$.
Em vista disto, em que temperatura a água tem capacidade calorífica igual a
$10\ \text{cal} \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$?

3.12.19. Determinar o comprimento (L) de um cabo suspenso em dois pontos do mesmo nível e distantes $(2x)$ 400 m, com flecha (f) de 100 m, sabendo que

$$L = 2a \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

sendo a a raiz da equação

$$a\left(\cosh \frac{x}{a} - 1\right) - f = 0$$

3.12.20. O pH de soluções diluídas de ácido fraco é calculado pela fómula:

$$[H_3O^+]^3 + K_a [H_3O^+]^2 - (K_a C_a + K_\omega) [H_3O^+] - K_\omega K_a = 0$$

onde:

$pH \doteq -\log [H_3O^+]$
K_a : constante de dissociação do ácido
C_a : concentração do ácido
K_ω : produto iônico da água

Calcular o pH de uma solução de ácido bórico a 24°C, sabendo que

$K_a = 6{,}5 \cdot 10^{-10}$ M
$C_a = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ M
$K_\omega = 1{,}0 \cdot 10^{-14}$ M^2