

Entwicklung eines Termersetzungssystems für
assoziative und kommutative Ausdrücke zum
vereinfachen arithmetischer Terme

Version 0.0.1

Bruno Borchardt

heute

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Definitionen	2
2.1	Funktionsauswertung	3
2.2	Äquivalenz	4
3	Erste Normalform	4
3.1	Assoziative Funktionsanwendungen	4
3.2	Kommutative Funktionsanwendungen	5
3.3	Teilweise Auswertung	6
4	Patternmatching	6
4.1	Muster	6
4.2	Naiver Algorithmus	7
5	Umsetzung in C++	7
6	Vereinfachen von Arithmetischen Termen	8
6.1	Vergleich meiner Features mit anderen Computeralgebrasystemen	9
7	Zusammenfassung	9

1 Einleitung

Anmerkung: Hier kommt hin, was halt in eine Einleitung soll:

- was ist ein Termersetzungssystem?
- Einsatz von Termersetzungssystemen
 - Beweisprüfer /Beweisassistenten
 - Arithmetikausdrücke vereinfachen
 - Optimierender Compiler
 - Interpreter funktionaler Sprachen
 - bestimmt noch mehr
- was soll die in dieser Arbeit umgesetzte Variante (gut) können?

2 Definitionen

Eine Menge von Termen T ist in dieser Arbeit immer in Abhängigkeit der Menge F , sowie der Stelligkeitsfunktion $\text{arity}: F \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \omega$.

$$T(F) := \{(f, t_0, \dots, t_{n-1}) \mid f \in F, \text{arity}(f) \in \{n, \omega\}, t_0, \dots, t_{n-1} \in T(F)\}$$

Elemente $f \in F$ werden *Funktionssymbole* genannt. Ist $\text{arity}(f) = \omega$, wird f als *variadisches* Funktionssymbol bezeichnet. Ist $\text{arity}(f) = 0$, wird f als Konstantensymbol bezeichnet.

Wichtig ist, dass vorerst nicht zwischen einem Konstantensymbol $c \in F$ unterschieden wird, welches bekannte Eigenschaften hat, etwa der Komplexen Zahl $c = -5i$ und einem Symbol, wessen Eigenschaften vom Kontext abhängen können, etwa dem Zeichen $c = x$ (vorausgesetzt $-5i, x \in F$).

$(f, t_0, \dots, t_{n-1}) \in T$ mit $n > 0$ wird auch als $f(t_1, \dots, t_n)$ geschrieben und *Funktionsanwendung* von f auf die *Parameter* t_1, \dots, t_n genannt. t_1, \dots, t_n sind zudem die *Kinder* ihres Vaters f . Kinder sind allgemeiner *Nachkommen*. Nachkommen verhalten sich transitiv, also ein Nachkomme z des Nachkommen y von x ist auch ein Nachkomme von x . Umgekehrt ist x *Ahne* von y und z .

Ein *Teilterm* ist Nachkomme des äußersten Funktionssymbols oder der gesamte Term.

Häufig werden Abschnitte der Parameter einer Funktionsanwendung beliebiger Länge der Form t_i, \dots, t_k vorkommen. Kompakt wird $ts\dots$ für den (möglicherweise leeren) Abschnitt des Funktionsanwendungstupels geschrieben.

$f(t_0, \dots, t_k, a, t_{k+2}, \dots, t_n)$ kann also äquivalent $f(ts\dots, a, rs\dots)$ geschrieben werden, mit $(t_0, \dots, t_k) = (ts\dots)$ und $(t_{k+2}, \dots, t_n) = (rs\dots)$.

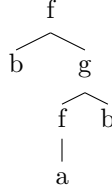


Abbildung 1: Baumdarstellung des Terms $f(b, g(f(a), b))$

Beispiel

Wählt man $F = \{f, g, a, b, c\}$ kann arity gewählt werden als

$$\text{arity}(v) = \begin{cases} \omega & v = f \\ 2 & v = g \\ 0 & v \notin \{f, g\} \end{cases}$$

$t = f(b, g(f(a), b)) \in T(F)$ ist ein Term, dargestellt in Abb. 2. b ist ein Kind von g und ein Ahne von f . Damit ist g Vater von b . $g(ts\dots)$ ist zudem Kind von f . b und $f(a)$ sind Teilterme von t .

2.1 Funktionsauswertung

Ein Funktionssymbol ist in der allgemeinen Definition eines Terms noch keine Funktion, da die Abbildungsvorschrift, sowie Definitionsmenge und Bildmenge nicht definiert sind. Eine Funktionsanwendung kann allerdings als Datenstruktur gesehen werden, etwa die des binären Funktionssymbols *pair* auf die zwei Parameter a und b als ein Paar: $\text{pair}(a, b)$ oder die des variadischen Funktionssymbols *set* als Darstellungsmöglichkeit für endliche Mengen innerhalb eines Terms.

Die erste Erweiterung der Funktionssymbolmenge zur Menge von Funktionen folgt mittels der eval Funktion.

$$T_Y := \{(f, y_0, \dots, y_{n-1}) \mid f \in F, \text{arity}(f) \in \{n, \omega\}, y_0, \dots, y_{n-1} \in Y\}$$

$$\text{eval}: (T_Y \rightarrow Y) \times T \rightarrow Y$$

$$\begin{aligned} \text{eval}(v, t) &= \text{eval}(v, (f, t_0, \dots, t_{n-1})) \\ &= v(f, \text{eval}(v, t_0), \dots, \text{eval}(v, t_{n-1})) \end{aligned}$$

Die Funktion $v: T_Y \rightarrow Y$ wird dabei als *Interpretation* von T bezeichnet. Für einen Term $t \in T$ ist $\text{eval}(v, t)$ die *Auswertung* von t .

Beispiel

Als Beispiel ist $F = \mathbb{N}_0 \cup \{+, \cdot\}$ mit $\text{arity}(f) = 0$ für $f \in \mathbb{N}_0$ und $\text{arity}(f) = \omega$

für $f \in \{+, \cdot\}$. Als Interpretation kann dann die Auswertung des Terms zu den natürlichen Zahlen gewählt werden.

$$v(f, y_0, \dots, y_{n-1}) = \begin{cases} f & f \in \mathbb{N}_0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i & f = + \\ \prod_{i=0}^{n-1} y_i & f = \cdot \end{cases}$$

Der Term $t = +(3, \cdot(2, 4))$ kann dann ausgewertet werden zu

$$\begin{aligned} \text{eval}(v, t) &= \text{eval}(v, +(3, \cdot(2, 4))) \\ &= v(+, \text{eval}(v, 3), \text{eval}(v, \cdot(2, 4))) \\ &= v(+, 3, v(\cdot, \text{eval}(v, 2), \text{eval}(v, 4))) \\ &= v(+, 3, v(\cdot, 2, 4)) \\ &= v(+, 3, 8) \\ &= 11 \end{aligned}$$

2.2 Äquivalenz

Das Kernthema dieser Arbeit ist die Vereinfachung von Termen. Eine Vereinfachung ist allerdings nur gültig, sofern sich die Bedeutung des vereinfachten Terms gegenüber der des ursprünglichen Terms nicht geändert hat. Da ein Term in sich keine Bedeutung trägt, muss eine Vereinfachung immer in Bezug auf eine Interpretation gesehen werden. Etwa kann der Ausdruck XAX^{-1} zu A vereinfacht werden, wenn $X, A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allerdings ist die Vereinfachung allgemein nicht möglich, sollten die Symbole X und A für Matrizen stehen.

Im folgenden wird von der Assoziativität oder Kommutativität bestimmter Funktionssymbole gesprochen. Diese ist immer im Kontext einer entsprechenden Interpretation zu sehen. Gleichzeitig ist aber auch klar, dass unabhängig von der Interpretation verschiedene Funktionssymbole die Rolle der Multiplikation übernehmen müssen, sollte sowohl skalare Multiplikation als auch Matrixmultiplikation in einem Term möglich sein.

3 Erste Normalform

In diesem Abschnitt werden erste Termumformungen beschrieben, die isolierte Eigenschaften einzelner Funktionen ausnutzen. Ziel ist es kommutative und assoziative Funktionsanwendungen eindeutig darzustellen.

3.1 Assoziative Funktionsanwendungen

Die geschachtelte Anwendung einer assoziativen Funktion führt je nach Klammersetzung zu verschiedenen mathematisch äquivalenten Termen. Als Beispiel dient hier die Addition, dargestellt als Anwendung des Funktionssymbols $+$. Die

folgenden Ausdrücke sind paarweise verschiedene Terme, jedoch alle mathematisch äquivalent.

$$\begin{aligned}
+(+(+(a, b), c), d) &= +(+(a, +(b, c)), d) \\
&= +(+(a, b), +(c, d)) \\
&= +(a, +(b, +(c, d))) \\
&= \dots
\end{aligned} \tag{1}$$

Es gibt mehrere Optionen eine solche Schachtelung in einem Term zu normalisieren, also in eine eindeutige Form zu bringen. Die erste ist, festzulegen, dass höchstens einer der beiden Parameter der binären assoziativen Funktion wieder Ergebnis dieser Funktion sein darf. Wählt man den zweiten Parameter dafür aus, ist wird die Summe in der Normalform dargestellt als $+(a, +(b, +(c, d)))$. Diese Methode nennt sich Pivotisierung und wird in **Quellen** näher untersucht. Alternativ kann man die Summe von zwei Parametern auch als Spezialfall einer Summe von $n \in \mathbb{N}$ Parametern auffassen, dann gewohnt geschrieben als $\Sigma_{x \in \{a, b, c, d\}} x$. Dieser Weg wird im folgenden gewählt, wobei die Darstellung als Term dann $+(a, b, c, d)$ ist. Assoziative Funktionen sind in der gewählten Darstellung damit variadisch.

Die Normalisierung von Funktionsanwendungen des assoziativen Funktionssymbols f ersetzt dann alle Teilterme der Form $f(as..., f(bs...), cs...)$ zu $f(as..., bs..., cs...)$.

3.2 Kommutative Funktionsanwendungen

Eine Normalform für kommutative Funktionsanwendungen erfordert eine totale Ordnung auf der Menge aller Terme $T(F, \Sigma)$. Aufbauend auf einer totalen Ordnung von F , kann eine lexikographische Ordnung von T wie folgt definiert werden.

- sind $a = f(ts...), b = g(rs...) \in T$ Funktionsanwendungen und ist $f \neq g$ gilt $a < b \iff f < g$
- sind $a = f(t_1, \dots, t_n), b = f(r_1, \dots, r_m) \in T$ Funktionsanwendungen, und $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m$ die normalisierten Parameter von a und b , ist die Ordnung wie folgt
 - wenn $\exists k \leq \min(n, m): \forall i < k \tilde{t}_i = \tilde{r}_i, \tilde{t}_k \neq \tilde{r}_k$ gilt a und b sind geordnet wie \tilde{t}_k und \tilde{r}_k
 - ist $n < m$ und $\forall i < n: \tilde{t}_i = \tilde{r}_i$ gilt $a < b$
 - ist $n = m$ und $\forall i \leq n: \tilde{t}_i = \tilde{r}_i$ gilt $a = b$

Zur Normalisierung einer kommutativen Funktionsanwendung werden zuerst alle Parameter normalisiert, dann können die Parameter nach der lexikographischen Ordnung von T sortiert werden.

3.3 Teilweise Auswertung

Mit der Darstellung assoziativer Funktionen als variadische Funktionen, ist es möglich, dass eine Funktion mittels eval teilweise ausgewertet werden kann, also gilt für assoziative Funktionssymbole $f \in F$

$$f(a, b) = c \implies f(xs..., a, b, ys...) = f(xs..., c, ys...)$$

Ist f zudem kommutativ gilt

$$f(a, b) = c \implies f(xs..., a, ys..., b, zs...) = f(xs..., c, ys..., zs...)$$

Eine normalisierte Funktionsanwendung ist damit so weit wie möglich ausgewertet. Sollte sie ganz ausgewertet werden können, ist die normalisierte Funktionsanwendung das Ergebnis der Auswertung.

4 Patternmatching

Im vorigen Abschnitt wurde eine erste Normalform für Terme definiert. Alle Vereinfachungen, die dort behandelt wurden, sind recht einfach und direkt zu implementieren, da nur auf lokale Eigenschaften des zu vereinfachenden Terms Rücksicht genommen werden muss. In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie ein Term auch zuverlässig auf komplexere Muster geprüft werden kann, so dass nach Implementierung der Mustererkennung selbst jede einzelne Vereinfachungsregel durch zwei Muster beschrieben werden kann: ein Muster gibt an, welche Struktur im zu vereinfachenden Term gesucht wird, ein zweites Muster gibt an, zu was diese Struktur transformiert wird. Ein Beispiel für ein solches Musterpaar ist etwa die Anwendung der ersten binomischen Formel:

$$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a + b)^2$$

In der etablierten Schreibweise als Term dann geschrieben als:

$$\text{sum}(\text{pow}(a, 2), \text{product}(2, a, b), \text{pow}(b, 2)) \rightarrow \text{pow}(\text{sum}(a, b), 2)$$

Die Zeichen a und b stehen dabei nicht für Elemente von Σ , sondern dienen lediglich als Platzhalter für beliebige Teilterme, wobei die verschiedenen Vorkommnisse des selben Zeichens immer auch mit äquivalenten Termen assoziiert werden müssen. Ein solches Zeichen wird im folgenden *Mustervariable* genannt.

4.1 Muster

Eine Menge von Termen $T(F)$ kann durch Vereinigung von F mit der Menge der Mustervariablen V zu einer Menge von Mustertermen M erweitert werden.

$$M(F) := T(F \cup V)$$

$$\forall c \in V: \text{arity}(c) = \omega$$

Ein drei-Tupel $(m, v, t) \in (M, M_T \rightarrow T, T)$ wird als *Match* bezeichnet, wenn die Auswertung eines Literals mit der Interpretation $v: M_T \rightarrow T$ wieder in dem selben Literal resultiert, also $\forall \tilde{t} \in T: \text{eval}(v, \tilde{t}) = \tilde{t}$. Zudem muss m mit v zu t ausgewertet werden, also $\text{eval}(v, m) = t$.

4.2 Naiver Algorithmus

Anmerkung: den, der sich diesen Algorithmus zuerst ausgedacht hat muss ich noch rausfinden, danach wird der Unterkapitelname entsprechend angepasst.

Algorithm 1 My algorithm

```

1: stringlen  $\leftarrow$  length of string
2: i  $\leftarrow$  patlen
3: if i > stringlen then return false
4: j  $\leftarrow$  patlen
5: if string(i) = path(j) then
6:   j  $\leftarrow$  j - 1.
7:   i  $\leftarrow$  i - 1.
8:   goto loop.
9:   close;
10: i  $\leftarrow$  i + max(delta1(string(i)), delta2(j)).
11: goto top.
```

5 Umsetzung in C++

Anmerkung: Hier wird erläutert, wie meine konkrete Implementierung Terme speichert und verwaltet. Vielleicht werden auch ein paar grundlegende Algorithmen auf der Datenstruktur erklärt, sofern ich mein exaktes Vorgehen in keinem Paper wiederfinde.

Denkbare Algorithmen zum erklären:

- *Falten eines Terms*
- *Sortieren eines Terms / ordnen von Teiltermen*
- *exaktes Ausrechnen von Teilbäumen ohne Variablen (und warum ich das mit dem Zusammenfassen von geschachtelten Summen und weiteren Sachen in einen Algorithmus zusammenwursten musste)*
- *Frage: aktuell parse ich einen String zum bauen eines Terms noch in $O(n^2)$. Das ist wahrscheinlich nicht optimal. Ergo würde ich diesen Teil wenn, dann eher am Rande erwähnen. Ist es für die Arbeit wichtig, das noch zu optimieren (unter der Voraussetzung, dass die von mir gewählte Grammatik kontextfrei ist, was sie aber glaube ich ist)?*

Mögliche Tangente: Meine Idee (und Umsetzung) einer Art Aufzählung (in C++ und Co. als enum in der Sprache enthalten), die Hierarchien erlaubt und damit Basis eines (wie ich finde) relativ eleganten Typsystems für die einzelnen Arten von Termknoten darstellt. (Tangente der Tangente: Das native C++ Typsystem mit Umsetzung von Polymorphie als Vererbung erschwert einem nicht nur das Speichern eines polymorphen Baums in einem Array, sondern verteilt auch den Code jedes Algorithmus über die verschiedenen Klassen, die die einzelnen Baumknotenarten modellieren. Deswegen habe ich mir was eignendes gebastelt)

6 Vereinfachen von Arithmetischen Termen

Anmerkung: Ich habe begonnen das Termersetzungssystem zu entwickeln, um Arithmetische Ausdrücke zu vereinfachen (etwa $a + 2a \rightarrow 3a$). Wie genau ich das umsetze, wird in diesem Abschnitt erläutert.

Während die Datenstruktur und der Matchingalgorithmus schon benutzbar sind, ist dieser Teil von mir bisher so gut wie gar nicht implementiert worden. Der grobe Plan ist aber folgender:

1. Funktionen höherer Ordnung anwenden:

- ableiten (Prototyp dafür steht schon)
- vielleicht integrieren (soll für den allgemeinen Fall wohl schwer sein)
- vielleicht fouriertransformieren
- vielleicht laplacetransformieren
- ganz ganz ganz vielleicht Differentialgleichungen lösen

2. Normalform herstellen:

- alles ausmultiplizieren ($a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot b + a \cdot c$)
- Vorzeichen aus ungeraden Funktionen herausziehen ($\sin(-x) \rightarrow -\sin(x)$)
- Vorzeichen in geraden Funktionen auf plus setzen ($\cos(-x) \rightarrow \cos(x)$)
- Überlegen, wie man das selbe für Fälle mit Summen im Argument definiert ($\cos(a - b)$ vs. $\cos(b - a)$)
- bekannte Faktoren aus Potenz ziehen ($(3x)^2 \rightarrow 9x^2$)
- ...

3. Vereinfachen:

- manche Transformationen sollten immer angewendet werden (etwa $\sin^2(x) + \cos^2(x) \rightarrow 1$)
- andere Transformationen nur ausprobieren und mit einer passenden Metrik gucken, wie gut ein Term nach Anwendung noch weiter vereinfacht werden kann (etwa, wenn man aus verschiedenen Optionen des Ausklammerns wählen kann)

- vielleicht Linearfaktorzerlegung von Polynomen (schätze ich für den allgemeinen Fall schwierig ein, solange ich nur exakte Operationen zulasse)
- vielleicht Polynomdivision (schätze ich genau so schwierig ein, zumindest wenn ich nicht vorher schon Linearfaktoren habe)
- ...

Anmerkung 1: Die Normalform ist notwendig, um zu garantieren, dass mehrfaches Auftreten eines Teilbaums / Teilterms auch erkannt wird.

Anmerkung 2: es kann sein, dass ich manche Eigenschaften der Normalform auch während des Vereinfachungsschrittes immer wieder wiederherstellen muss.

6.1 Vergleich meiner Features mit anderen Computeralgebrasystemen

Ich bin ja nicht der erste, der auf die Idee kommt, Terme zusammenzufassen. Wolfram Alpha und Maple sind zwar nicht Open Source, aber andere Optionen, wie etwa SymPy aus der Python Standardbibliothek soweit ich weiß schon. Da lässt sich bestimmt ein bisschen vergleichen, wie andere Leute die selben Probleme lösen.

7 Zusammenfassung

Was halt in eine Zusammenfassung kommt