a) Geben Sie für die reelle Dezimalzahl $x_0 = 118'559.999$ die Maschinenzahl $\tilde{x}_0$ in normalisierter Gleitpunktdarstellung zur Basis 12 (Duodezimalsystem) mit Mantisselänge $n = 7$ und hinreichend grossem Exponenten an (verwenden Sie dazu die Ziffern 0,1,...,9 sowie $A \triangleq 10$, $B \triangleq 11$). Wie gross ist der absolute und relative Fehler, der bei der Abbildung auf die Maschinenzahl entsteht, wenn die überflüssigen Ziffern abgeschnitten werden? Wie gross ist der absolute und relative Fehler, wenn gerundet wird?

$x_0 = (118'559.999)_{10}$

$118'559 : 12 =$	9879	Rest	11	
$9'879 : 12 =$	823	Rest	3	
$823 : 12 =$	68	Rest	7	$5873B_{12}$
$68 : 12 =$	5	Rest	8	
$5 : 12 =$	0	Rest	5	

$(5873B.BBA3)_{12}$

$0.999 \cdot 12 = 11.988$	$\Rightarrow$	11	
$0.988 \cdot 12 = 11.856$	$\Rightarrow$	11	$BBA3_{12}$
$0.856 \cdot 12 = 10.272$	$\Rightarrow$	10	
$0.272 \cdot 12 = 3.264$	$\Rightarrow$	3	

$\underbrace{0.5873BBB|A3}_{n=8} \cdot 12^5$

Abschneiden

$\tilde{x}_0 = 0.5873BBB \cdot 12^5$

absoluter Fehler:

$|x_0 - \tilde{x}_0| = 0.A \cdot 12^{-2}$

relativer Fehler:

$$\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{x_0} = 0.18BA \cdot 12$$

Runden

$\tilde{x}_0 = 0.5874000 \cdot 12^5$

absoluter Fehler:

$|x_0 - rd(x_0)| = 0.1BBB \cdot 12^2$

-2

relativer Fehler:

-9

$$\frac{|x_0 - rd(x_0)|}{x_0} = 0.4245 \cdot 12^2$$

b) Berechnen Sie nun den Funktionswert $f(x) = x^3 - 1.6665 \cdot 10^{15}$ sowohl für x_0 als auch $\tilde{x}_0$. Wie gross ist der relative Fehler der Funktionswerte für die abgeschnittene Machinenzahl $\tilde{x}_0$ und für die gerundete?

$x_0 = 118'559.999 = 0.118559999 \cdot 10^6$

$f(x_0) = 118'559.999^3 - 1.6665 \cdot 10^{15} = 3.546784657 \cdot 10^{10}$
$= 0.3546784657 \cdot 10^{11}$

$f(\tilde{x}_0) = 118'559.99^3 - 1.6665 \cdot 10^{15} = 3.508832182 \cdot 10^{10}$
$= 0.3508832182 \cdot 10^{11}$

$f(rd(x_0)) = 118'560^3 - 1.665 \cdot 10^{15} = 3.5510016 \cdot 10^{10}$
$= 0.35510016 \cdot 10^{11}$

Abgeschnitten:

relativer Fehler: $\frac{|x_0 - \tilde{x}_0|}{x_0} = 0.0107005 2982$

Ronden

relativer Fehler: $\frac{|x_0 - rd(x_0)|}{x_0} = -1.188948134 \cdot 10^{-3}$
$= -0.001188948134 \cdot 10^{-3}$

c) Berechnen Sie für die abgeschnittene Maschinenzahl die Konditionszahl und vergleichen Sie diese mit dem Verhältnis der relativen Fehlern aus a) und b). Gab die Konditionszahl in diesem Beispiel eine realistische Abschätzung für die Fehlerfortpflanzung?

Konditionszahl $K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$ → kleines K gut für rel. Fehler
→ grosses K schlecht

Fehlerfortpflanzung $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \leq 1$

$x_0 = 118'559.99 = 0.11855999 \cdot 10^6$

$f(x) = \sin(0.11855999 \cdot 10^6) = 0.866896 7489$

$f'(x) = \cos(0.11855899 \cdot 10^6) = -0.498487 7398$

$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} = 68174.96623$

⇒ Nein