Übungsblatt 1

Bemerkung. Das Zeichen $\mathbb{N}$ steht für die Menge aller natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ Alle Quantoren verstehen wir hier als Quantoren über der Menge $\mathbb{N}$.

Aufgabe 1. Es sei $\mathsf{E}(n)$ irgend eine Eigenschaft welche auf natürliche Zahlen zutreffen kann oder nicht. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

a) "Es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft E"

b) "Alle natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft E"

c) "Genau eine natürliche Zahl hat die Eigenschaft E"

d) "Mindestens drei natürliche Zahlen haben die Eigenschaft E"

e) "Es gibt höchstens zwei natürliche Zahlen mit der Eigenschaft E"

Aufgabe 2. Es sind folgende Prädikate gegeben:

- $\mathsf{PF}(x, y) :=$ "x ist ein Primfaktor von y"
- $\mathsf{Prim}(x) :=$ "x ist eine Primzahl"

Formalisieren Sie folgende Aussagen über die Natürlichen Zahlen:

a) "Primfaktoren sind immer Primzahlen"

b) "Jede natürliche Zahl die grösser als 1 ist besitzt einen Primfaktor"

c) "Jede Primzahl besitzt genau einen Primfaktor"

d) "Zahlen die genau einen Primfaktor besitzen sind nicht notwendigerweise Primzahlen"

e) "Primzahlen sind genau die Zahlen die sich selbst als Primfaktor haben"

Aufgabe 3. Übersetzen Sie (möglichst prägnant) folgende Formeln in natürlichsprachliche Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitsgehalt.

a) $\forall x \left(\neg \mathsf{PF}(x, x+1)\right)$

b) $\forall x \left(\mathsf{Prim}(x) \wedge \mathsf{Prim}(x+1) \Rightarrow x = 2\right)$

c) $\exists x \, \forall y \left(\neg \mathsf{PF}(y, x)\right)$

d) $\exists x \, \forall y \left(\neg \mathsf{PF}(x, y)\right)$

Bemerkung. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heisst *monoton*, wenn für alle natürlichen Zahlen x, y die Implikation $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ gilt.

Aufgabe 4 (Bonus Aufgabe)**.** Zeigen Sie, dass für jede monotone Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und alle natürlichen Zahlen x, n folgendes gilt:

$$f(x) < n \land n < f(x+1) \;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbb{N}\,(f(y) \neq n).$$

Hinweis: Fallunterscheidung

Lösungen Pascal Brunner: $\wedge$ = oder ; $\vee$ = und ; $\forall$ = Allquantor ; $\exists$ = Existenzquantor

Aufgabe 1. Es sei E(n) irgend eine Eigenschaft welche auf natürliche Zahlen zutreffen kann oder nicht. Formalisieren Sie folgende Aussagen:

a) “Es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft E”

gibt eine = mind. eine $\Rightarrow \exists n$

$\exists n\ E(n)$

b) “Alle natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft E

alle = $\forall$

$\forall n\ E(n)$

c) “Genau eine natürliche Zahl hat die Eigenschaft E”

genau eine = mind. eine & nicht zwei

$\exists n\ (E(n) \wedge \forall x\ (x \neq n \Rightarrow \neg E(x)))$

d) “Mindestens drei natürliche Zahlen haben die Eigenschaft E

mind. 3 = 3 oder mehr möglich, muss klar stellen, dass n, y, z unterschiedl. sind.

$\exists n, y, z\ (E(n) \wedge E(y) \wedge E(z) \wedge (n \neq y) \wedge (n \neq z) \wedge (y \neq z))$

e) “Es gibt höchstens zwei natürliche Zahlen mit der Eigenschaft E”

$\Rightarrow$ bedeutet, dass es nicht drei gibt. $\Rightarrow$ Umkehr Folge von d) $\Rightarrow$ nicht $\exists$ $\Rightarrow$ 0, 1, 2 möglich

$\neg\exists n, y, z\ (E(n) \wedge E(y) \wedge E(z) \wedge (n \neq y) \wedge (n \neq z) \wedge (y \neq z))$

Aufgabe 2. Es sind folgende Prädikate gegeben:
- PF(x, y) := “x ist ein Primfaktor von y”
- Prim(x) := “x ist eine Primzahl”

Formalisieren Sie folgende Aussagen über die Natürlichen Zahlen:

a) “Primfaktoren sind immer Primzahlen”

$\exists x, y\ PF(x, y) \Rightarrow Prim(x)$

b) “Jede natürliche Zahl die grösser als 1 ist besitzt einen Primfaktor”

$\forall \cancel{\alpha}\, x\ (\cancel{\alpha}\, x > 1 \Rightarrow \exists y\ PF(\cancel{y}\, x; \cancel{n}\, y))$

c) “Jede Primzahl besitzt genau einen Primfaktor”

$\forall x\ Prim(x) \Rightarrow \exists!\,(PF(\alpha, y))$

Es gibt Zahlen welche genau einen Primfaktoren $\Rightarrow$ haben, die keine Primzahl ist.

?

d) “Zahlen die genau einen Primfaktor besitzen sind nicht notwendigerweise Primzahlen”

$\forall y\ (\exists!\, \cancel{\alpha}\, (PF(x, y)) \Rightarrow \exists y\ (Prim(y) \vee \neg Prim(y)))$

$\exists x\ (\neg Prim(x) \wedge \exists!_y\, PF(y, x))$

?

e) “Primzahlen sind $\boxed{\text{genau}}$ die Zahlen die sich selbst als Primfaktor haben” $\rightarrow \Leftrightarrow$

$\forall x\ Prim(x) \Leftrightarrow \exists y\ (PF(x, y) \wedge (x = y))$

$\forall x\ (Prim(x) \Leftrightarrow PF(x, x))$

Aufgabe 3. Übersetzen Sie (möglichst prägnant) folgende Formeln in natürlichsprachliche Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitsgehalt.

a) ∀x (¬PF(x, x + 1))

(Für alle x gilt,) x ist kein Primfaktor von x + 1

b) ∀x (Prim(x) ∧ Prim(x + 1) ⇒ x = 2)

Für alle x gilt, die Primzahl x und die Primzahl x + 1 ergeben gilt x = 2

x ist (genau) 2, wenn x und x + 1 eine Primzahl ist

c) ∃x∀y (¬PF(y, x))

mind. ein x und alle y haben nicht die Primfaktoren y, x

d) ∃x∀y ((¬PF(x, y))

mind. ein x und alle y haben nicht die Prim lcharen x, y

Fehler zu 1)c

$$\underbrace{\exists n, x\, (E(n) \land E(x) \land \forall y\, ((y \neq n) \land (y \neq x) \Rightarrow \neg E(y)))}_{\text{es gibt genau 2}}$$