Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 2
Abgabe: Kalenderwoche 41

Aufgabe 1
Gegeben sind die beiden aussagenlogischen Formeln $F := \overset{0}{p_1} \rightarrow (\overset{1}{p_2} \wedge \overset{1}{p_5})$ und $G := (\underset{1}{p_3} \wedge \underset{1}{p_2}) \rightarrow \underset{0}{p_4}$ sowie eine Belegung B mit

$$B(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ eine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\widehat{B}(F)$ und $\widehat{B}(G)$.

(b) Geben Sie eine Belegungen an, unter der F zu 0 und G zu 1 evaluiert wird.

Aufgabe 2
Geben Sie von folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder in KNF sind.

(a) p DNF und KNF

(b) $p \wedge (\neg q \wedge p_1)$ KNF & DNF

(c) $p \vee (q \rightarrow p)$ keines

(d) $p \vee (\neg p \wedge (p \vee q))$ ~~DNF~~ weder noch

(e) $(p \vee q) \wedge (p \vee (p \vee p))$ KNF

Aufgabe 3
Bringen Sie folgende aussagenlogischen Formeln in DNF und KNF.

(a) $p \rightarrow (q \vee (p_1 \wedge p_2))$

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow p_1)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p_1$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel F genau dann unerfüllbar ist, wenn die Formel $\neg F$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen ob folgende Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$

Aufgabe 1

1a) $\hat{B}(p_1 \to (p_2 \to p_5))$

$= \hat{B}(\neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_5))$

$= \max(\underbrace{\hat{B}(\neg p_1)}_{1}, \hat{B}(p_2 \wedge p_5))$

Da max erreicht ist muss zweite Hälfte nicht mehr ausgerechnet werden.

$= \underline{\underline{1}}$

$\hat{B}(p_3 \wedge p_2) \to p_4$

$= \hat{B}(p_3 \wedge p_2 \vee \neg p_4)$

$= \max(\hat{B}(p_3 \wedge p_2), \hat{B}(\underbrace{\neg p_4}_{0}))$

$= \max(\hat{B}(\underset{1}{p_3} \wedge \underset{1}{p_2})$

$= \underline{1}$

Aufgabe 1b)

$$\hat{B}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Korrektur von Lehrperson

(4) Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel F genau dann unerfüllbar ist, wenn die Formel ¬F allgemeingültig ist.

Wenn ¬F allgemeingültig ist, dann ist ¬F ~~(immer erfüllbar)~~ → unter jeder Belegung wahr

Wenn ¬F eine bel. Belegung ist: → für jede Belegung B gilt

$$\hat{B}(\neg F) = 1 - (\hat{B}(F)) \; *$$

selbst wenn F jetzt erfüllbar wäre (~ 1), dann resultiert

$$= 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$$

Somit ist F unerfüllbar wenn (¬F) allgemeingültig ist.

→ Wäre F erfüllbar, dann würde für eine Belegung B $\hat{B}(F) = 1$

& somit wegen * $\hat{B}(\neg F) = 0$ gelten

Dies steht im Widerspruch zum „ersten Satz“

⇒ Wenn ¬F allgemeingültig ist, dann ist ¬F unter jeder Belegung wahr.

Für jede Belegung B gilt:

$$\hat{B}(\neg F) = 1 - (\hat{B}(\neg F))^{*}$$

Wäre F erfüllbar, dann würde für eine Belegung $B = \hat{B}(F) = 1$

& somit wegen * $\hat{B}(\neg F) = 0$ gelten.

Dies steht in Widerspruch zur Aussage: „Wenn ¬F allgemeingültig ist, dann ist ¬F unter jeder Belegung wahr“

$\neg F$ aj $\iff \forall \mathcal{B}\,(\hat{\mathcal{B}}(\neg F) = 1)$

$\iff \forall \mathcal{B}\,(1 - \hat{\mathcal{B}}(F) = 1)$

$\iff \forall \mathcal{B}\,(\hat{\mathcal{B}}(F) = 0)$

$\iff F$ unerfüllbar

3

a) $p \to (q \vee (p_1 \wedge p_2)) \equiv p \to ((q \vee p_1) \wedge (q \vee p_2))$

$\equiv \neg p \vee ((q \vee p_1) \wedge (q \vee p_2))$

$\equiv ((\neg p \wedge q) \vee p_1) \vee ((\neg p \wedge q) \vee p_2)$

$\equiv ((\neg p \vee p) \wedge (q \vee p)) \vee ((\neg p \vee p_2) \wedge (q \vee p_2))$

DNF: $\neg p \vee (q \vee (p_1 \wedge p_2)) \equiv \boxed{\neg p} \vee \boxed{q} \vee \boxed{(p_1 \wedge p_2)}$

KNF: $(\neg p \vee q \vee p_1) \wedge (\neg p \vee q \vee p_2)$

b) $p \to (q \to p_1) \equiv p \to (\neg q \vee p_1) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee p_1) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge p_1)$

c) $(p \to q) \to p_1 \equiv (\neg p \vee q) \to p_1 \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee p_1 \equiv (p \vee \neg q) \vee p_1$

$\equiv p \vee p_1 \vee \neg q \Rightarrow$ DNF & KNF

5

a) $p \to (q \to p)$

p	q	p	$\to$	$(q \to p)$
W	W	W	W	W
W	F	W	W	F
F	W	F	W	F
F	F	F	W	W

b) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

c) $(p \to q) \to (q \to p)$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

d) $(p \to q) \land (p \land \neg q)$

p	q	$\neg q$	$(p \to q$	$p \land \neg q$	$(p \to q) \land (p \land \neg q)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0

c) $(p \to q) \to (q \to p)$

$(p \land \neg q) \lor (\neg q \lor p)$

p	q	$\neg q$	$(p \land \neg q)$	$(\neg q \lor p)$	$(p \land \neg q) \lor (\neg q \lor p)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1

Aufgabe 6

Eine Menge logischer Verknüpfungen heisst *funktional vollständig*, wenn man alle Junktoren ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$) durch Kombinationen dieser Verknüpfungen äquivalent ausdrücken kann. Die Verknüpfungen $\neg, \wedge$ sind zum Beispiel funktional vollständig weil man damit $\rightarrow$ und $\vee$ wie folgt ausdrücken kann:

- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen von Verknüpfungen funktional vollständig sind:

(a) $\{\neg, \vee\}$

(b) $\{\neg, \rightarrow\}$

(c) $\{\,|\,\}$, wobei $A \,|\, B := \neg(A \wedge B)$ (NAND-Operator).

(d) $\{\oplus\}$, wobei $A \oplus B := \neg(A \vee B)$.

Aufgabe 7 (Bonusaufgabe)

Implementieren Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl aussagenlogische Formeln als Klasse/Datentyp. Stellen Sie folgende Funktionalitäten zur Verfügung:

- Eine Methode/Funktion `eval(Formel, Belegung)`, mit der Sie Aussagenlogische Formeln unter einer gegebenen Belegung auswerten können.
- Methoden/Funktionen `nnf(Formel)`, `dnf(Formel)`, `knf(Formel)`, um Formeln in die entsprechenden Normalformen umzuwandeln.
- Eine Methode/Funktion `pretty_print(Formel)`, die Formeln in einer gut lesbaren Form ausgibt (z.B. als LaTeX–Code).

Aufgabe 6

a) $\{\neg, \vee\}$

$\cancel{\neg A \vee B \equiv A \to B \equiv A \wedge \neg B}$

$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

b) $\{\neg, \to\}$

$\cancel{\neg A \to B \equiv \neg\neg A \vee B \equiv A \vee B}$

$A \vee B \equiv \neg A \to B$

c) $\{\,|\,\}$ wobei $A | B := \neg(A \vee B)$

$\cancel{\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B}$

$\neg A \equiv \neg(A \wedge A) \equiv A | A$

$A \wedge B \equiv \neg(A | B) \equiv (A|B) | (A|B)$

d) $\{\oplus\}$ wobei $A \oplus B := \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$A \oplus A \equiv \neg(A \vee A) \equiv \neg A$

$\cancel{\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B}$

$A | B \equiv \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \equiv$

$(A \oplus A) \vee (B \oplus B) \equiv \neg\neg((A \oplus A) \vee (B \oplus B)) \equiv$

$\neg((A \oplus A) \oplus (B \oplus B)) \equiv$

$((A \oplus A) \oplus (B \oplus B)) \oplus ((A \oplus A) \oplus (B \oplus B))$

$$\neg \boxed{} \equiv \boxed{} \oplus \boxed{}$$

$$A \vee B \equiv \neg\neg(A \vee B) \equiv \neg(A \oplus B) \equiv$$

$$(A \oplus B) \oplus (A \oplus B)$$