Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

# Zusatzskript MANIT1

## INHALTSVERZEICHNIS



scee 2017

# 1 Folgen und Reihen

## 1.1 Reelle Zahlenfolgen und Eigenschaften

### 1.1.1 Beispiele von Zahlenfolgen

**Lineare Abschreibung:** Eine Maschine habe einen Anschaffungswert von $W_0 = 42'000$ und und eine Nutzungsdauer von 8 Jahren. Angenommen der Restwert der Maschine nach 8 Jahren sei $W_8 = 10'000$ und die Wertverminderung erfolge linear, d.h. mit jährlich konstanten Beträgen, dann bilden die jährlichen Buchwerte nachstehende Zahlenfolge (in 1'000):

$$(42, 38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10)$$

Jedem Zeitpunkt $t$ wird offenbar ein Wert $W$ wie folgt zugeordnet:

$$W: t \longmapsto 42 - 4t$$

**Sparprozess:** Legen wir ein Anfangskapital $K_0 = 100$ zu einem fixen Zinssatz von $i = 0.1$ an, so bilden die jährlichen Kontostände die nachstehende Folge

$$(100, 110, 121, 133.1, 146.41, \ldots)$$

Mit andern Worten, wir ordnen dem $n$-ten Jahr einen Kontostand am Jahresende wie folgt zu:

$$K: n \longmapsto 100 \cdot 1.1^n$$

**Fibonacci-Folge:** Die Folge von Zahlen *c*

$$(1,1,2,3,5,8, \ldots)$$

wird nach dem bedeutenden Mathematiker des Mittelalters Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci (* um 1180? in Pisa; † nach 1241? in Pisa) bezeichnet. Wie lautet die nächste Zahl?

### 1.1.2 Definition von Zahlenfolgen

In der Analysis, einem Teilbereich der Mathematik, sind die Folgen *das zentrale Konzept*. Begriffe wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit, mit denen wir uns später beschäftigen, werden mit Hilfe von Folgen definiert.

**Definition:** Eine gerichtete Anordnung von reellen Zahlen

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$$

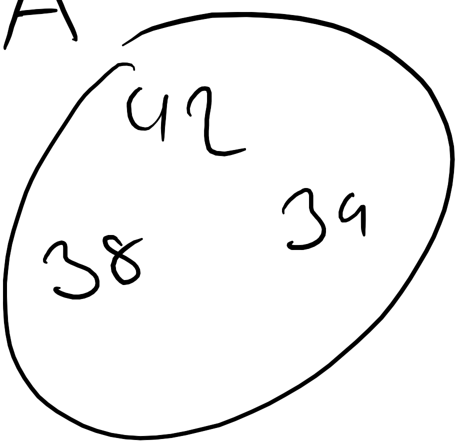
heisst **Zahlenfolge**, wobei $a_1$ das erste und $a_n$ das $n$-te Folgenglied genannt wird.

| t | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|
| w | 42 | 38 | 34 | ... |

→ gerichtete Anordnung

Mengenlehre

A




$$A = \{42, 38, 34\}$$
$$= \{34, 38, 42\}$$

Reihenfolge egal

$$w_t = 42 - 4(t-1)$$

Die tiefgestellte Zahl bezeichnen wir als Indexvariable oder Index. Diese durchläuft die natürlichen Zahlen von 1 (manchmal auch 0)bis $n$ und ihr wird jeweils genau eine reelle Zahl $a_n$ zugeordnet. Wir schreiben kurz

$$n \longmapsto a_n$$

oder mathematisch präziser unter Verwendung des Funktionsbegriffs

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ (\text{auch } f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R})$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n \,.$$

$f$ bezeichnet dabei die Zuordnungsvorschrift, die zwischen $n$ und $a_n$ herrscht. $f$ kann ein Ausdruck sein, welcher beschreibt, wie aus einem $n$ das entsprechende $a_n$ gebildet wird.

Häufig sprechen wir kurz von **Folge** und verwenden auch die Notationen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n) \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Hat eine Folge nur endlich viele Glieder, so sprechen wir von einer **endlichen** oder **abbrechenden Folge**.

### 1.1.3 Explizite Form von Zahlenfolgen

Die Folgenglieder der Buchwerte $(W_t)$ und der Sparprozessfolge $(K_n)$ aus dem Einführungsbeispiel können durch eine Formel beschrieben werden, was zur folgenden Definition führt:

nicht immer möglich

**Definition**: Wird das Folgenglied $a_n$ durch einen Ausdruck in der Variablen $n$ festgelegt, so nennen wir die Folge **explizit definiert**.

In diesem Zusammenhang verwenden wir auch die Bezeichnungen **explizite Form** oder **explizite Bildungsvorschrift** einer Folge. Ist eine Folge explizit definiert, so können wir jedes Folgenglied durch den angegebenen Ausdruck in der Variablen $n$ direkt berechnen:

$$n \longmapsto a_n$$

Beispielsweise für die Folge der Buchwerte $(W_t)$ verwenden wir anstelle der Zahlen $n$ die Zeitpunkte $t$ und anstelle von $a_n$ den Ausdruck $W_t = 42 - 4t$:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $42 - 4 \cdot t$ | 42 | 38 | 34 | 30 | 26 | ... |

### 1.1.4 Rekursive Form von Zahlenfolgen

Die Fibonacci-Folge ist dadurch gekennzeichnet, dass das nächste Glied aus einem oder mehreren Vorgängergliedern berechnet wird.

$a_1 = 42$
$a_2 = a_1 - 4 \quad \rightarrow \quad a_{n+1} = a_n - 4$
$a_3 = a_2 - 4$

**Definition**: Wird das Folgenglied $a_n$ durch ein oder mehrere Vorgängerglieder festgelegt, so nennen wir die Folge **rekursiv definiert**.

Wir verwenden auch die Bezeichnungen **rekursive Form** oder **rekursiven Bildungsvorschrift** einer Folge. Bei einer rekursiv definierten Folge lässt sich in der Regel das $n$-te Glied nur bestimmen, wenn zuvor sukzessive alle Vorgänger berechnet wurden:

$$a_1 \longmapsto a_2 \longmapsto a_3 \longmapsto \cdots \longmapsto a_n$$

Die Fibonacci-Folge $(c_n)$ lässt sich zum Beispiel wie folgt rekursiv ausdrücken: Das nächste Glied ist die Summe der beiden vorangehenden Glieder, wobei für die beiden ersten Glieder die Werte *eins* vorgegeben sind, oder formal:

$$c_{n+2} = c_n + c_{n+1} \qquad wobei\ c_1 = c_2 = 1$$

Beachten Sie, dass die rekursive Bildungsvorschrift nur dann vollständig definiert ist, wenn genügend Startglieder gegeben sind. In der Fibonacci-Folge bedarf es also zweier Startglieder.

### 1.1.5 Graph von Zahlenfolgen

Anfangsstücke der Graphen von Zahlenfolgen lassen sich mittels einer Wertetabelle zeichnen. D.h. wir berechnen endlich viele Punkte mit den Koordinaten

$$(n; a_n), wobei\ n = 1, \ldots, N$$

und übertragen diese in ein Koordinatensystem. Der Graph einer Folge besteht nur aus Punkten, ist also keine Kurve wie bei Funktionen.

Als Beispiele zeichnen wir die folgenden 4 Graphen:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n = \frac{1}{n}$ | 1 | 0.5 | $0.\overline{3}$ | 0.25 | 0.2 | $0.1\overline{6}$ | ... |
| $b_n = (-1)^n$ | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | ... |
| Fibonacci-Folge $(c_n)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | ... |
| 1 $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | 2.25 | 2.37... | 2.44... | 2.49... | 2.52... | ... |

# Fibonacci-Folge

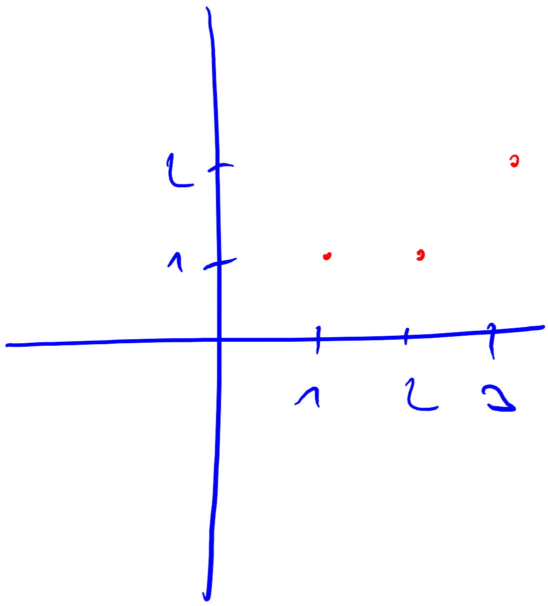
$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | ... |

1



(1) → Blatt unten bezogen

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |
| (2) $b_n = (-1)^n$ | $-1$ $(-1)^1$ | $1$ $(-1)^2$ | $-1$ $(-1)^3$ | $1$ $(-1)^4$ |
| $b_n^* = (-1)^{n+1}$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |
| $b_n^{**} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| (3) $c_n$ | | | | |
| (4) $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | | | | |

Zinseszins:

$K_n = K_0 (1+i)^1$

$1 \qquad 1 \mathrel{\widehat{=}} 100\%$

$K_n = (1+1)^1 \qquad K_1 = 2^1 = 2$

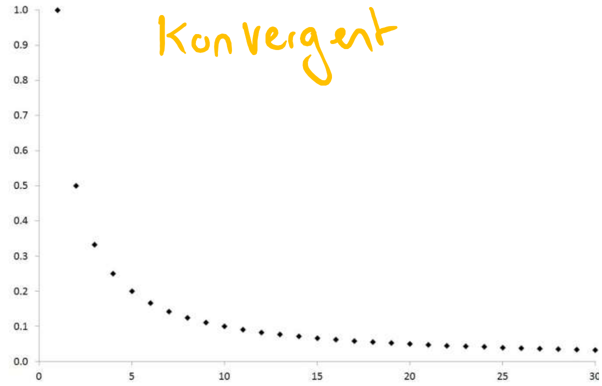
$\underline{n=1}$

$n=2$

$\hookrightarrow K_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$K_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

1 Konvergent

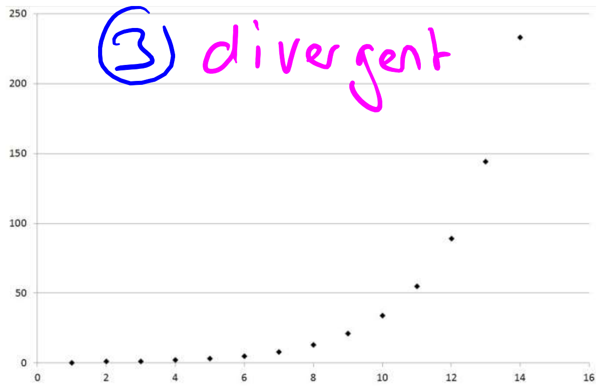



$$a_n = \frac{1}{n}$$

2 divergent

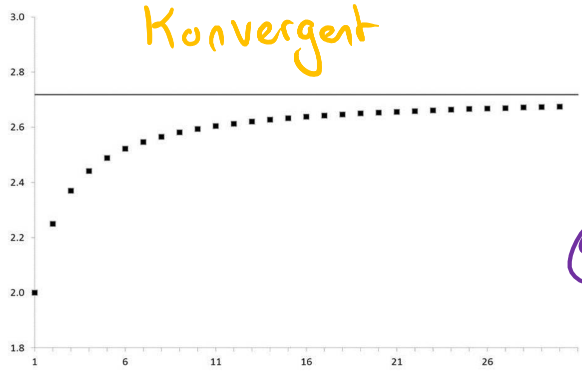

$$b_n = (-1)^n$$

3 divergent




$$c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$$
$$wobei\ c_1 = c_2 = 1$$

Konvergent 4




$$d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

streben gegen einen Wert (z.B. 0)

### 1.1.6 Konvergente und divergente Folgen

Zielwert kann nicht bestimmt werden

Wir können für alle $n = 1,2,3, \ldots$ die Anfangsstücke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Folge bestimmen. Was aber passiert mit den Werten $a_n$ wenn $n$ sehr gross wird und gegen unendlich strebt? Formal schreiben wir dann:

$$n \to \infty$$

Wir untersuchen unsere Beispiele auf diesen Sachverhalt:

(1) Für die Folge $(a_n)$ gilt offensichtlich, dass der Wert der Glieder mit zunehmendem $n$ gegen einen Grenzwert von *null* strebt. Wir schreiben dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

und sagen: „Der Limes von $a_n$ für $n$ gegen unendlich ist *null*“.

(2) Die Folge $(\boldsymbol{b_n})$ nimmt nur die Werte 1 und -1 an. Ihre Folgenglieder nähern sich nicht einem Wert an, werden aber auch nicht unendlich gross bzw. klein.

$$\begin{array}{ccc} n & \longrightarrow & a_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ n \to \infty & & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \end{array}$$

„Limes-Schreibweise"

Nullfolge

R

Bsp: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0}$

Grenzwert = 0
(Zielwert)

Konvergent

Bsp: $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Bsp: $c_n$ (Fibonacci)

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ $\Big\}$ bestimmt divergent

Bsp: $b_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = ?$ $\Big\}$ unbestimmt divergent

(3) Die Fibonacci-Folge $(\boldsymbol{c_n})$ wächst mit zunehmendem $\boldsymbol{n}$ über alle Grenzen und wird beliebig gross, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

Ebenso wächst die Sparprozessfolge $(\boldsymbol{K_n})$ aus der Einleitung mit zunehmendem $\boldsymbol{n}$ ins Unendliche. Wir schreiben dafür

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0(1+i)^n = \infty$$

(4) Der Graph von $(\boldsymbol{d_n})$ legt Konvergenz nahe (Definition siehe unten). Wenn wir genau hinschauen, können wir folgende Vermutung anstellen:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Die Folge $(d_n)$ konvergiert gegen die Eulersche* Zahl $e = 2.71828\,...$, eine irrationale Zahl mit grossem Stellenwert in der Mathematik. (*Leonhard Euler, *1707in Basel †1783 in St. Petersburg; Euler gehört zu den bedeutendsten Mathematikern überhaupt.)

Wir fassen zusammen:

**Definition:** Wir sagen die Folge $(a_n)$

i) **konvergiert gegen** $a$, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, der die Glieder $a_n$ für $n \to \infty$ beliebig nahe kommen. Dafür schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Die Zahl $a$ heisst **Grenzwert** von $(a_n)$ und ist eindeutig bestimmt. Konvergiert die Folge $(a_n)$ gegen *Null*, so sprechen wir von einer **Nullfolge**.

ii) sei **divergent**, falls $(a_n)$ nicht konvergiert. Genauer heisst $(a_n)$

a) **bestimmt divergent gegen** $+\infty$, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) **bestimmt divergent gegen** $-\infty$, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) **unbestimmt divergent** sonst.

## 1.2 Arithmetische Folgen

### 1.2.1 Definition der arithmetischen Folge

Die Folge der Buchwerte aus dem Einführungsbeispiel ist dadurch gekennzeichnet, dass zwischen 2 benachbarten Gliedern eine konstante Differenz, nämlich die jährliche Abschreibung von 4 (in CHF 1'000) besteht.

| | |
|---|---|
| **Definition:** | Eine Folge $(a_n)$ heisst **arithmetische Folge**, falls es eine konstante Differenz $d$ gibt, so dass $$a_{n+1} - a_n = d$$ für alle $n = 1,2,3\dots$ |

Beim Einführungsbeispiel beträgt $d = -4$. Da $d < 0$ ist, nehmen die Folgeglieder, also die jährlichen Buchwerte, um $d$ ab. Wir bezeichnen diese Folge auch als arithmetisch fallende (degressive) Folge.

Wäre $d > 0$ würden die Folgeglieder jeweils um $d$ zunehmen, und wir bezeichnen die Folge auch als arithmetisch steigend (progressiv).

### 1.2.2 Rekursive und explizite Form der arithmetischen Folge

Für eine arithmetische Folge kann die Bildungsvorschrift aus ihrer Definition abgeleitet werden.

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Für die rekursive Form gilt:

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

Die explizite Form einer arithmetischen Folge erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Definition wie folgt:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3 \cdot d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

**Beispiel:** Die arithmetische Folge $(3, 8, 13, 18, 23, \dots)$ lässt sich wie folgt analysieren: $a_1 = 3$ und $d = 5$. Sie hat deshalb die rekursive Form

$$a_{n+1} = a_n + 5 \text{ mit } a_1 = 3$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 42 | 38 | 34 | 30 | ... |

$-4 \quad -4 \quad -4 = d$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$$

↳ arithmetische Folge

↳ immer bestimmte divergente

relcursive Form:

$$\boxed{a_1}$$

$$a_2 = a_1 - d$$

$$a_3 = a_2 - d$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

explizite Form:

$$a_1 \to a_2 = a_1 + d \to a_3 = a_1 + 2d$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Bsp:

$$a_4 = 42 + 3(-4) = 30$$

und die explizite Form

$$a_n = 3 + 5 \cdot (n - 1)$$

## 1.3 Geometrische Folgen

### 1.3.1 Definition der geometrischen Folge

Wir betrachten nun eine weitere Teilmenge der Menge aller Folgen, die sogenannten geometrischen Folgen. Sie weisen die gleiche „Bauart“ auf wie die Sparprozessfolge $(K_n)$ aus der Einleitung zu diesem Kapitel.

**Definition:** Eine Folge $(a_n)$ heisst **geometrische Folge**, falls das Verhältnis zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist, d.h. es gibt einen konstanten Quotienten $q$, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

für alle $n = 1,2,3, \ldots$, wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bei der Sparprozessfolge $(K_n)$ beträgt demnach $q = 1.1$. Dies entspricht einer jährlichen Zunahme von 10% (wie wir später sehen werden).

### 1.3.2 Rekursive und explizite Form der geometrischen Folge

Die rekursive Form einer geometrischen Folge lesen wir unmittelbar aus der Definition ab. Es gilt

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

Die explizite Bildungsvorschrift einer geometrischen Folge erhalten wir mit Hilfe der rekursiven Definition

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

**Beispiel:** Die geometrische Folge (3, -6, 12, -24, 48,…) lässt sich wie folgt analysieren: $a_1 = 3$ und $q = -2$. Sie hat deshalb die rekursive Form

$$a_{n+1} = -2a_n \quad \text{mit } a_1 = 3$$

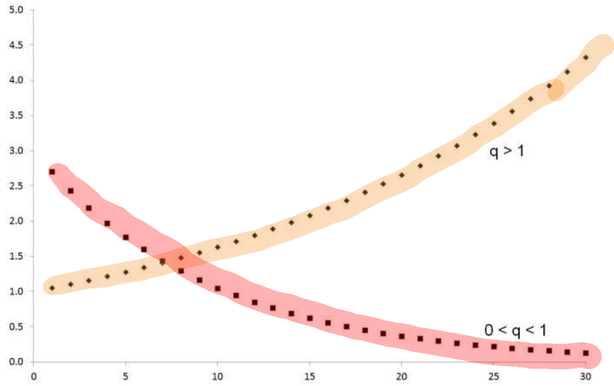
und die explizite Form

$$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

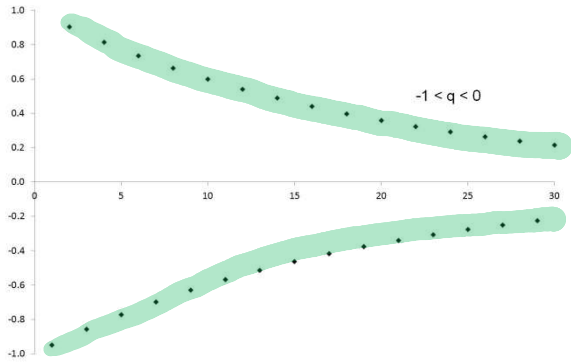
### 1.3.3 Wichtige Eigenschaften geometrischer Folgen

**Exponentielles Wachstum:** Die geometrischen Folgen sind also nichts anders als diskrete, exponentielle Wachstums- (falls $q > 1$) bzw. Zerfallsfunktionen (falls $0 < q < 1$).

$$n \longmapsto a_1 \cdot q^n$$




**Alternierende Folge:** Für $q < 0$ erhalten wir sog. alternierende Folgen. Das sind Folgen, deren Glieder abwechselnd positives und negatives Vorzeichen aufweisen.




**Konvergenz:** Anhand dieser Graphen wird auch sofort klar, dass eine geometrische Folge $(a_n)$ genau dann gegen *Null* konvergiert, wenn $|q| < 1$. Im Fall $q = 1$ ist $(a_n)$ konstant und somit konvergent. Im Fall $q = -1$ ist sie alternierend also unbestimmt divergent (siehe hierzu das Beispiel von oben).

Allgemein gilt:

**Satz:** Sei $(a_n)$ eine geometrische Folge. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ \infty & q > 1 \\ a_1 & q = 1 \end{cases}$$

**Beispiel:** Die ersten Glieder der geometrische Folge mit $a_1 = 100$ und $q = -0.1$ lauten

$$(100, -10, 1, -0.1, 0.01, \text{-}0.001, \ldots)$$

und es wird klar, dass die Folge gegen *Null* konvergiert.

## 1.4 Reihen

Reihen sind ganz speziell gebaute Folgen. Das Motto bei der Konstruktion von Reihen könnte lauten: Aus Alt mach Neu. Ausgehend von der Zahlenfolge $(a_n)$ konstruieren wir durch Summieren eine neue Folge $(s_n)$ gemäss dem nachstehenden Muster

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

**Definition:** Es sei $(a_n)$ eine beliebige Zahlenfolge. Wir nennen die Zahlenfolge $(s_n)$, wobei $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, **endliche Reihe** oder auch nur **Reihe.**

$s_n$ heisst ***n*-te Partialsumme**.

Die Folge $(s_n)$ nennen wir etwas salopp **Summandenfolge**. Das rekursive Bildungsgesetz einer Reihe lässt sich leicht angeben

$$s_1 = a_1, \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dagegen ist die explizite Form in der Regel nur schwer zu finden.

## 1.5 Arithmetische Reihen

Die Summenformel für die arithmetische Reihe ist schon seit mehr als 2000 Jahren bekannt, wird aber regelmässig mit Carl Friedrich Gauss (*1777 in Braunschweig; † 1855 in Göttingen), einem der bedeutendsten deutschen Mathematiker, in Zusammenhang gebracht. Es wird überliefert, dass der 9-jährige Gauss und seine Mitschüler vom Lehrer die Aufgabe bekamen, alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 aufzuaddieren, damit dieser sich einer dringenden Angelegenheit widmen konnte. Kaum war die Aufgabe ausgesprochen, hatte Gauss schon die Lösung aus folgender Betrachtung:

# Reihe

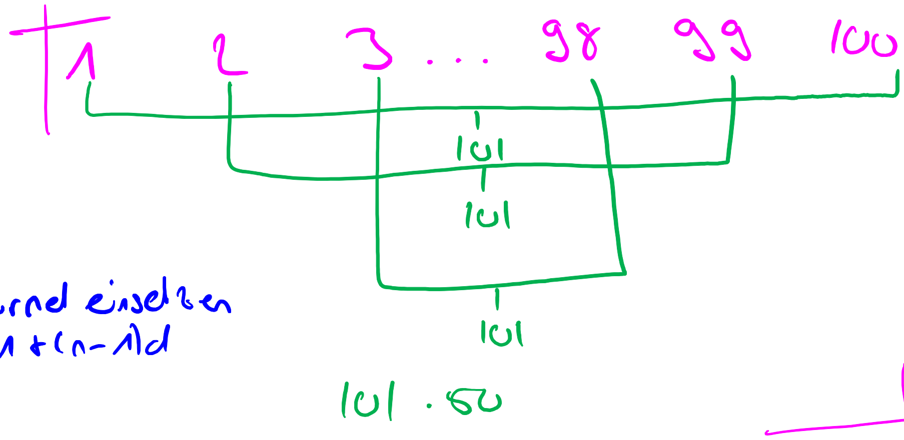
Folgenglieder aufsummieren

$s_1 = \boxed{42}$

$s_2 = \boxed{42} + 38 = \boxed{80}$

$s_3 = \boxed{80} + 34 = 114$

usw.




$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + \boxed{a_n}\right)$ Formel einsetzen $a_n = a_1 + (n-1)d$

$= \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

$S_{164} = \frac{164}{2}\left(42 + 42 + (164-1)(-4)\right) = -46576$

$$
\begin{gathered}
1 + 100 = 101 \\
2 + 99 = 101 \\
3 + 98 = 101 \\
\vdots \\
49 + 52 = 101 \\
50 + 51 = 101
\end{gathered}
$$

Die Lösung lautet: Summe aus dem erstem und dem letztem Glied der Folge multipliziert mit der Anzahl Paare:

$$s_{100} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Allgemein gilt für die arithmetische Reihe (Beweis als Übung):

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$$

Da wir $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ aus der expliziten Form berechnen können, lässt sich die arithmetische Reihe auch wie folgt schreiben:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]}$$

**Beispiel:** Die Summe der ersten 15 Glieder der arithmetischen Folge $(3, 8, 13, 18, 23, \dots)$ lässt sich wie folgt berechnen ($a_1 = 3$, $d = 5$ und $n = 15$):

$$s_{15} = \frac{15}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (15-1) \cdot 5] = 570$$

## 1.6 Geometrische Reihen

### 1.6.1 Endliche geometrische Reihe

Der Legende nach hatte der Erfinder des Schachspiels für seine geniale Erfindung vom König einen Wunsch frei. Er wünschte sich auf dem

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \text{Feld} & 1\ \text{Reiskorn} \\
2.\ \text{Feld} & 2\ \text{Reiskörner} \\
3.\ \text{Feld} & 4\ \text{Reiskörner} \\
4.\ \text{Feld} & 8\ \text{Reiskörner} \\
\vdots & \vdots \\
63.\ \text{Feld} & 2^{62}\ \text{Reiskörner} \\
64.\ \text{Feld} & 2^{63}\ \text{Reiskörner}
\end{array}
$$

„Wenn es weiter nichts ist!“, meinte der König lachend und wies seinen Schatzmeister an, den Erfinder des Schachspiels auszuzahlen. Wie viele Reiskörner bekam er?

Die Anzahl der Reiskörner auf jedem Feld des Schachbrettes bilden eine (endliche) geometrische Folge $(a_n)$, $n = 1,2,\ldots,64$ mit $q = 2$. Sie kann wie folgt beschrieben werden:

Rekursiv: $a_{n+1} = 2a_n, \quad a_1 = 1$
Explizit: $a_n = 2^{n-1}$

Wir wollen die $n$-te Partialsumme einer geometrischen Reihe allgemein wie folgt herleiten:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

Dabei haben wir $a_k = a_1 q^{k-1}$ aus der expliziten Bildungsvorschrift entnommen. Die Summe lässt sich neu schreiben als:

$$s_n = a_1(q^0 + q^1 + \cdots + q^{n-1})$$

Da $a_1$ ausgeklammert werden kann, reicht es, die Klammer

$$(q^0 + q^1 + \cdots + q^{n-1}) = \tilde{s}_n$$

zu berechnen. Wir tun dies wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + 0 & = & \tilde{s}_n \\ -(0 \;\; + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n & = & q \cdot \tilde{s}_n) \\ \hline q^0 - 0 \;\; - 0 \;\; - 0 - \cdots \;\; - 0 \;\;\; - q^n & = & \tilde{s}_n - q \cdot \tilde{s}_n \end{array}$$

Wir lösen nach $\tilde{s}_n$ auf und erhalten

$$\tilde{s}_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Insgesamt führt dies zu folgender Summenformel der geometrischen Reihe:

**Satz:** Sei $(a_n)$ eine geometrische Folge mit $q \neq 1$. Dann ist die $n$-te Partialsumme gegeben durch:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Wie viele Reiskörner muss der König also dem Erfinder des Schachspiels aushändigen? Zu berechnen ist die Summe:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 9'223'372'036'854'775'808 = s$$

Schon die Grösse des letzten Summanden lässt erahnen, dass der Erfinder des Schachspiels nicht so selbstlos war, wie der König zu Beginn angenommen hatte. Mit $a_1 = 1, q = 2$ und $n = 64$ ergibt sich

$$s = 2^{64} - 1 = 18'446'744'073'709'551'615$$

Nehmen wir an, ein Reiskorn wiege 0.03 Gramm, so ergibt das ein Gesamtgewicht von ca. $5.53 \cdot 10^{11}$ Tonnen. Das ist ca. 800-mal die weltweite Reisproduktion des Jahres 2008 ($6.85 \cdot 10^8$ Tonnen)!

### 1.6.2 Unendliche geometrische Reihe

Geometrische Reihen haben nur dann eine Chance zu konvergieren, wenn der Zahlenwert von $q$ kleiner als 1, also $|q| < 1$ ist. Tatsächlich gilt der Satz:

**Satz:** Sei $(a_n)$ eine geometrische Folge mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}.$$

Dies lässt sich mithilfe der Summenformel der geometrischen Reihe beweisen, indem wir den Zähler wie folgt umformen:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \left( \frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1} \right)$$

Und mit $|q| < 1$ erhalten wir für den Fall, dass $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} a_1 \left( \frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1} \right) = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q},$$

weil

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

# Geometrische Folge

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | ... |

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

$\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$

Zwischen zwei Nachbarn, gibt es immer einen einheitlichen Quotient

$\Downarrow$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

! wenn $q > 1$ → steigt → exponentiell !
$q = 1$ → bleibt gleich
$q < 1$ → sinkt → Nullfolge

rekursive Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad | \cdot a_n$$

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

$a_1$ = Startwert

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

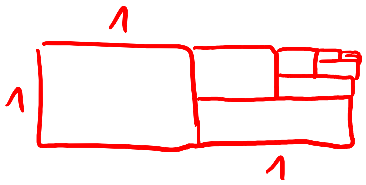
→ explizite Form

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

$q = -\frac{1}{2}$ ⇒ alternierenden Folge

$$b_n: \quad s_{18} = 1 \, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{18} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1.99999$$ } Geometrische Reihe

Beweis:



# Geometrische Reihe

$S_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + \boxed{2^{63}}$ $\quad \boxed{a_{64} = 1 \cdot 2^{63}}$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | $q$ | $q^2$ | $q^3$ | $q^4$ | ... |

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} \qquad | \cdot q$$

$$S_n \cdot q = \qquad q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$

---

$$S_n - S_n \cdot q = 1 - q^n$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^n \qquad |:()$$

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

muss eine Nullfolge sein!

geometrische Reihe
↳ $S_\infty$

strebt nach 0

$$\lim_{n \to \infty}\left(a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = a_1 \frac{-1}{q-1} = \boxed{a_1 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

$$S_\infty = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\lim_{n \to \infty}(q^n) = \underline{\underline{0}} \qquad \text{wenn } q = \frac{1}{2}$$

$6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$

$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$

# 2 Aufgaben mit Lösungen

## 2.1 Aufgaben

2.1 Nennen Sie die nächsten zwei Elemente der unten aufgeführten Folgen:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | A 2.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 50 | 100 | 200 | 400 | 800 | 1600 | $\times 2$ |
| $b_n$ | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 | $-4$ |
| $c_n$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | $\times n$ |
| $d_n$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | $+3$ |
| $e_n$ | 8 | $-4$ | 2 | $-1$ | 0.5 | $-0.25$ | $:(-2)$ |

$c_n = n! \Rightarrow$ Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

2.2 Bestimmen Sie die fehlenden Glieder der unten aufgeführten Folgen:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-3$ | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 |
| $b_n$ | $-32$ | 16 | $-8$ | 4 | $-2$ | 1 |
| $c_n$ | 5 | $-5$ | 5 | $-5$ | 5 | $-5$ |
| ? $d_n$ | 51.2 | 64 | | 100 | | 156.25 |
| $e_n$ | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | $-3$ |

2.3 Zeichnen Sie die Graphen der nachstehenden Zahlenfolgen.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 6 | 5.5 | 5 | 4.5 | 4 | 3.5 |
| $b_n$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
| $c_n$ | 10 | 5 | 2.5 | 1.25 | 0.625 | 0.3125 |
| $d_n$ | $-10$ | 5 | $-2.5$ | 1.25 | $-0.625$ | 0.3125 |

2.4 Welche der Folgen aus Aufgabe 2.1 sind arithmetische, welche geometrische? Geben Sie jeweils entweder die feste Differenz $d$ zwischen zwei Gliedern oder den festen Quotienten $q$ an. siehe direkt bei 2.1

2.5 Geben Sie für alle Folgen aus Aufgabe 2.3 ihre rekursive und ihre explizite Form an.

2.6 Bestimmen Sie das 8. und das 12. Glied der arithmetischen Folge mit den Eigenschaften

a) $a_1 = 4$ und $d = 5$

b) $b_1 = 1.2$ und $d = -0.2$

2.7 Bestimmen Sie das 4. und das 9. Glied der geometrischen Folge mit den Eigenschaften

a) $a_1 = -0.5$ und $q = 3$

b) $b_1 = 100$ und $q = -0.25$

2.8 Gegeben ist die Folge $(6, 13, 20, 27, 34, \dots)$. Geben Sie das $n$-te Folgeglied an.

2.9 Berechnen Sie $a_n$ für die geometrischen Folgen:

a) $5, 10, 20, 40, \dots$ für $n = 10$

b) $50, -20, 8, \dots$ für $n = 8$

2.10 Wie lautet das $k$-te Glied der Folge $(-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \dots)$?

Wenn abwechselnd + und -, dann ist immer -1^k
Weil Zähler 2, 3, 4, 5 --> K+1
Weil Nenner 3, 9, 27, 81 --> dreier Potenz 3^k

2.11 Bestimmen Sie die ersten 4 Glieder der Folge $b_k = 2^k - k^2$.

2.12 Definieren Sie nachstehende Folge rekursiv: $(3, 12, 60, 360, 2'520, \dots)$.

2.13 Wie viele Glieder der geometrischen Folge $8, 9, \dots$ sind kleiner als $10^{12}$ ?

2.14 Eine Folge ist explizit definiert durch $c_i = \frac{1}{3} \cdot (10^i - 1)$ gegeben. Wie lautet die rekursive Definition dieser Folge?

2.15 Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

a) $a_n = \frac{4}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{4}{n}\right) = 0$ Wenn Nenner = n, denn je grösser die Zahl ist desto näher bei 0

b) $a_n = \frac{17}{6n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{17}{6n^2}\right) = 0$

$\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{3n^2}{n^2}}{\frac{6n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{4}{n^2}-3}{6+\frac{1}{n^2}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ $n=\infty \Rightarrow 0$

$:n^2$

g) $(n+3)(n-2) = n^2-2n+3n-6$

$2n^2(n-2) = 2n^3-4n^2$

c) $a_n = \frac{3}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n-1}\right) = 0$

d) $a_n = \frac{4-3n^2}{6n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\boxed{\frac{4-3n^2}{6n^2+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $a_n = \frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{6}{n}} + \frac{7}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{6}{n}} + \frac{7}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)$

f) $a_n = \frac{(2n-1)(n+2)}{4n^2+2n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+3n-2}{4n^2+2n-3}\right) = \frac{1}{2}$

g) $a_n = \frac{2n^2}{n+3} - \frac{2n^3}{n^2+n-6} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-4n^2}{n^2+n-6} - \frac{2n^3}{n^2+n-6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4n^2}{n^2+n-6}\right) =$

$:n^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4}{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}} = -4$

h) $a_n = e^{-\frac{4}{n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{n}\right) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$

2.16 Der Nahrungsmittelkonsum $C$ [in GE/Jahr] eines Haushaltes sei in Abhängigkeit des Haushalteinkommens $Y$ [in GE/Jahr] gegeben durch die folgende Konsumfunktion:

$$C(Y) = \frac{38Y - 120}{Y + 6}\,, \quad Y \geq 0$$

a) Man ermittle den Sättigungswert des Nahrungsmittelkonsums.

b) Gegen welchen Wert strebt die durchschnittliche Nahrungsmittelquote, d.h. $\frac{C(Y)}{Y}$, wenn das Einkommen über alle Grenzen steigt?

2.17 Die Folge $(a_n)$ ist rekursiv durch $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$ mit $a_1 = 1$ definiert.

a) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_2, a_3, a_4, a_5$.

b) Beschreiben Sie die Folge $(a_n)$ explizit

c) Entscheiden Sie, ob die Folge konvergiert oder divergiert, und geben Sie allenfalls den Grenzwert an.

2.18 Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder aller Folgen aus Aufgabe 2.3.

direkt im Excel

2.19 Von einer geometrischen Folge kennt man die Glieder $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $a_9 = \frac{1}{8}$.

a) Geben Sie das $n$-te Folgeglied an.

b) Berechnen Sie die Summe der ersten 18 Folgeglieder.

2.20 Die Folge $(a_i)$ ist rekursiv definiert durch: $a_{i+1} = a_i + 2^i$ mit Anfangsglied $a_1 = -1$.

a) Geben Sie die ersten 5 Folgeglieder an.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $5$ | $13$ | $29$ |
| $=-1+2^1$ | $=1+2^2$ | $=5+2^3$ | $=13+2^4$ | |

b) Bestimmen Sie das Folgeglied $a_m$. $2^{n}-3$

$a_1=-1$, $a_2=-1+2^1$, $a_3=-1+2^1+2^2$, $a_4=-1+2^1+2^2+2^3$, $a_5=-1+2^1+2^2+2^3+2^4$

$a_m=-1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}$ Summe: geometrische mit $q=2$ & $a_1=2$ & $n=n-1$

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n-2$

2.21 Von einer geometrischen Folge wissen Sie, dass $a_1 = 1$, $q = 3$ und $s_n = 364$ ist. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

a) $n = ?$

b) $a_n = ?$

2.22 Ein Unternehmen produzierte im Jahr 2013 von einem bestimmten Artikel 100'000 Stück. In den folgenden Jahren soll die Produktionsmenge jährlich um 12% - bezogen auf den Vorjahreswert - zunehmen. Wie viele Stücke werden im Zeitraum 2016 bis 2024 insgesamt hergestellt werden?

2.23 Für einen Privathaushalt bilden die jährlichen Ausgaben für ein bestimmtes Luxusgut rezessionsbedingt eine *abnehmende geometrische* Folge: Im 2. und 3. Jahr zusammen gibt der Haushalt CHF 14820 für das Luxusgut aus, im 4. Jahr sind es noch CHF 6859. Welchen Betrag gibt dieser Haushalt während der ersten 8 Jahre insgesamt für das Luxusgut aus?

Reihe : $a_n \Rightarrow$ 1 2 4 8 16 ($n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$; $a_0$, $a_1$, $a_2$; $2^n$)

for(i=0, i++, i>10) $a_n = k+i$;

2.24 Berechnen Sie die unendliche geometrischen Reihe für

a) $a_1 = 3$ und $q = 0.25$ und a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1-0.25}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{0.75}\right) = \lim_{n\to\infty}(4)$

b) $a_1 = 3$ und $q = -0.25$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1+0.25}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1.25}\right) = \lim_{n\to\infty}(2.4)$

2.25 Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 2$

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] = \frac{a_1}{1-q} \to q=\frac{1}{2},\ a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^1 \to \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] = \frac{a_1}{1-q} \to q=-\frac{1}{2},\ a_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^1 \to \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right]$ mit $|a| > 1$ $= \frac{(\frac{1}{a})^1}{1-\frac{1}{a}} + \frac{\frac{3}{5}^0}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{0.4} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{a}} + 2.5 = \frac{a^2}{a-1} + 2.5$

$\frac{1}{1}-\frac{1}{a} = \frac{a}{a}-\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$; $\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$; $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \to \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{6}$

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

$\sum_{k=0}^{\infty}[2^k] \to a_0 = 2^0,\ a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2,\ a_3 = 2^3$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $(-\frac{1}{2})^k$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ |

# Äquivalenzprinzip → FinMa

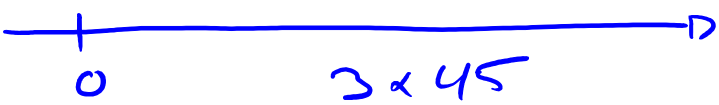
$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$K_n = K_0 (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$$

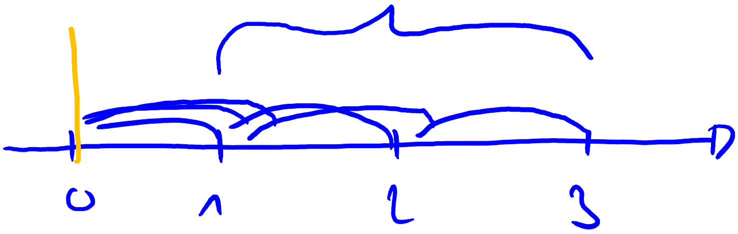
## 21.9

118.5

a)



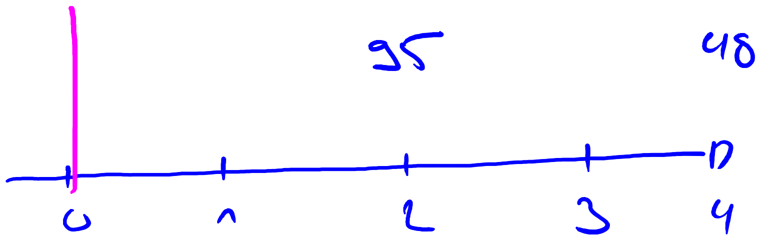

b)




$$Z = \frac{45}{1.08} + \frac{45}{1.08^2} + \frac{45}{1.08^3} = 115.97$$

⇒ Günstigste Variante

c)



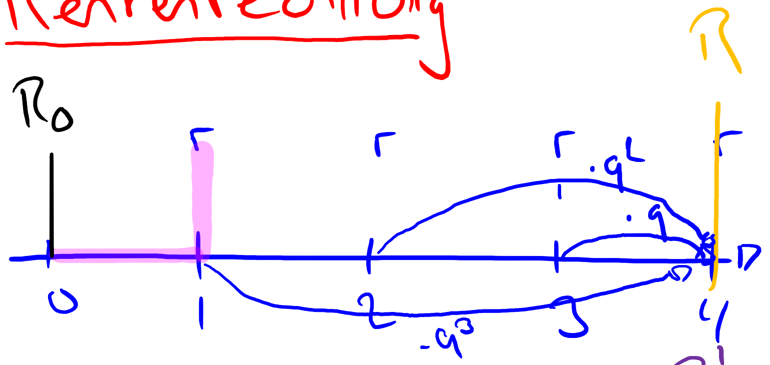

$$Z = \frac{95}{1.08^2} + \frac{48}{1.08^4} = 116.72$$

Wert zum Zeitpunkt 0 heisst Barwert

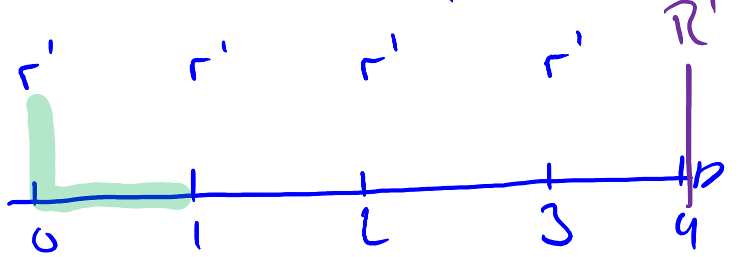
⇒ Es ist egal zu welchem Zeitpunkt!

- wichtig ist, dass der Zeitpunkt identisch ist!

# Rentenrechnung




am Ende einer Periode




zu Beginn einer Periode

! immer die erste oder letzte Zahlung anschauen!

$$R = r + r\cdot q + r\cdot q^2 + r\cdot q^3 + \ldots + r\cdot q^{n-1}$$

$$\boxed{R = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Endwert einer nachschüssigen Rente

$$R' = rq + rq^2 + rq^3 + \ldots + rq^n$$

$$\boxed{R' = R\cdot q = rq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Endwert einer vorschüssigen Rente

$$R_0 = \frac{R}{q^n} = r\cdot\frac{1}{q^n}\cdot\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Lösungen Pascal Brunner

2.6 Bestimmen Sie das 8. und das 12. Glied der arithmetischen Folge mit den Eigenschaften
a) $a1 = 4$ und $d = 5$
b) $b1 = 1.2$ und $d = -0.2$

a1) $a_8 = 4 + (8-1) \cdot 5 = 39$ a2) $a_{12} = 4 + (12-1) \cdot 5 = 59$

b1) $b_8 = 1.2 + (8-1) \cdot (-0.2) = -0.2$ b2) $b_{12} = 1.2 + (8-1) \cdot (-0.2) = -1$

2.7 Bestimmen Sie das 4. und das 9. Glied der geometrischen Folge mit den Eigenschaften
a) $a1 = -0.5$ und $q = 3$
b) $b1 = 100$ und $q = -0.25$

a1) $a_4 = -0.5 \cdot 3^{4-1} = -13.5$ a2) $a_9 = -0.5 \cdot 3^{9-1} = -3280.5$

b1) $b_4 = 100 \cdot -0.25^{4-1} = -1.5625$ b2) $b_9 = 100 \cdot -0.25^{9-1} = -\frac{25}{16384}$

2.8 Gegeben ist die Folge (6, 13, 20, 27, 34,…). Geben Sie das $n$-te Folgeglied an.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 |

$a_n = a_{n-1} + 7$ // $a_n = 6 + 7(n-1) = 6 + 7n - 7 = \underline{7n-1}$

2.9 Berechnen Sie $a_n$ für die geometrischen Folgen:
a) 5, 10, 20, 40,… für $n = 10$
b) 50,−20, 8, … für $n = 8$

a) $a_{10} = 5 \cdot 2^{10-1} = 2560$

b) $a_8 = 50 \cdot (-\frac{2}{5})^7 = -\frac{256}{3125}$

2.10 Wie lautet das $k$-te Glied der Folge ?

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{9}$ | $-\frac{4}{27}$ | $\frac{5}{81}$ |
| Zähler | | | | |
| Nenner | | | | |
| Vorzeichen | | | | |

$k+1$

$3^k$

$(-1)^k$

$a_k = \frac{k+1}{3^k} \cdot (-1)$

2.19 Von einer geometrischen Folge kennt man die Glieder $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $a_9 = \frac{1}{8}$ $\}\ a_{n+1} = a_n \cdot q$

a) Geben Sie das $n$-te Folgeglied an.
b) Berechnen Sie die Summe der ersten 18 Folgeglieder.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067812 = a_4$

$\frac{1}{8} = 0.125 = a_9$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$q = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

$q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $:\sqrt{2}$ | $:\sqrt{2}$ | $:\sqrt{2}$ | $:\sqrt{2}$ | $:\sqrt{2}$ | |

$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{2}}$

$a_3 = a_4 \cdot \sqrt{2} = 1$

$a_2 = a_3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$a_1 = a_2 \cdot \sqrt{2} = 2$

$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

$a_1 = \frac{a_4}{q \cdot q \cdot q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $s_{18} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = 6.825$

2.21 Von einer geometrischen Folge wissen Sie, dass an = 1, $q$ = 3 und $s$n = 364 ist.
a) $n$ =?
b) $a$n =?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a)

$$364 = \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$364 = \frac{3^n - 1}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$728 = 3^n - 1 \qquad | + 1$$

$$729 = 3^n \qquad | \log$$

$$\log_3 (729) = n$$

$$6 = n$$

b)

$$a_6 = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{6-1} = 243$$

## 2.2 Lösungen

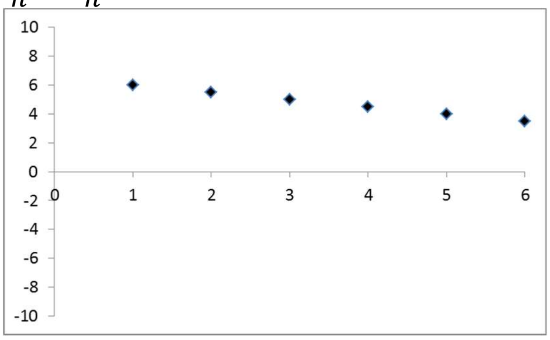
2.1

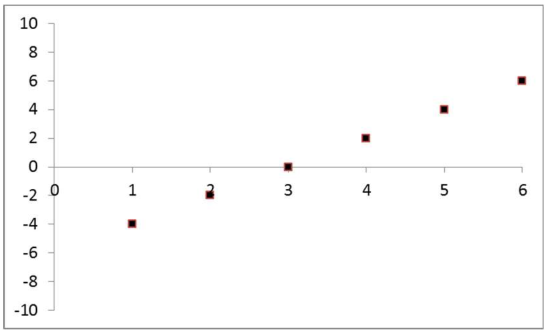
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 50 | 100 | 200 | 400 | 800 | 1600 |
| $b_n$ | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 | 20 |
| $c_n$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 |
| $d_n$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| $e_n$ | 8 | $-4$ | 2 | $-1$ | 0.5 | $-0.25$ |

2.2

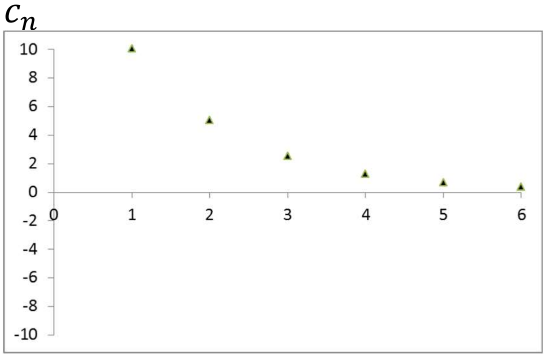
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-3$ | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 |
| $b_n$ | $-32$ | 16 | $-8$ | 4 | $-2$ | 1 |
| $c_n$ | 5 | $-5$ | 5 | $-5$ | 5 | $-5$ |
| $d_n$ | 51.2 | 64 | 80 | 100 | 125 | 156.25 |
| $e_n$ | 12 | 9 | 6 | 3 | 0 | $-3$ |

2.3 $a_n$ $b_n$

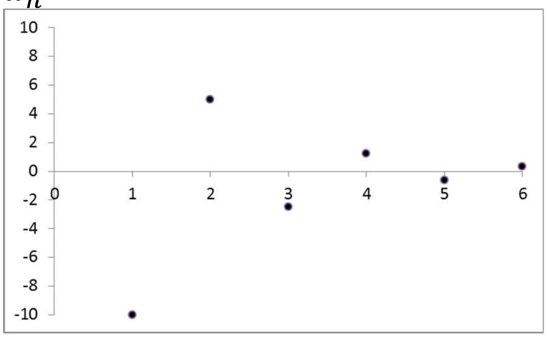



$c_n$




$d_n$




2.4 $(a_n)$ ist eine geometrische Folge mit $q = 2$
$(b_n)$ ist eine arithmetische Folge mit $d = -4$
$(c_n)$ ist weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge
$(d_n)$ ist eine arithmetische Folge mit $d = 3$
$(e_n)$ ist eine geometrische Folge mit $q = -0.5$

2.5 rekursiv: $a_{n+1} = a_n - 0.5$ mit $a_1 = 6$,
explizit: $a_n = 6 - 0.5(n-1) = 6.5 - 0.5n$

rekursiv: $b_{n+1} = b_n + 2$ mit $b_1 = -4$,
explizit: $b_n = -4 + 2(n-1) = -6 + 2n$

rekursiv: $c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot c_n$ mit $c_1 = 10$,
explizit: $c_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
rekursiv: $d_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot d_n$ mit $d_1 = -10$,
explizit: $d_n = -10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2.6 a) $a_8 = 4 + (8-1) \cdot 5 = 39$ $\quad a_{12} = 4 + (12-1) \cdot 5 = 59$
b) $b_8 = 1.2 + (8-1) \cdot (-0.2) = -0.2$
$b_{12} = 1.2 + (12-1) \cdot (-0.2) = -1$

2.7 a) $a_4 = (-0.5) \cdot 3^{4-1} = -13.5$ $\quad a_9 = (-0.5) \cdot 3^{9-1} = -3280.5$
b) $b_4 = 100 \cdot (-0.25)^{4-1} = -1.5625$
$b_9 = 100 \cdot (-0.25)^{9-1} \cong 0.001526$

2.8 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 6 + 7(n-1) = 7n - 1$

2.9 a) $a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 5 \cdot 2^9 = 2560$
b) $a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = 50 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^7 = -\frac{256}{3125}$

2.10 Drei Überlegungen sind zu kombinieren:
- Das Vorzeichen alterniert von Glied zu Glied, was mit $(-1)^k$ modelliert wird.
- Der Zähler ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 2$ und $d = 1$ und lautet: $2 + (k-1) \cdot 1 = k + 1$.
- Der Nenner ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 3$ und $q = 3$ und lautet: $3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$.

$$\Rightarrow a_k = \frac{(-1)^k \cdot (k+1)}{3^k}$$

2.11 $b_1 = 2^1 - 1^2 = 1, b_2 = 2^2 - 2^2 = 0, b_3 = 2^3 - 3^2 = -1$,
$b_4 = 2^4 - 4^2 = 0$

2.12 Die Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch. Lösungsansatz durch verallgemeinern:

$a_2 = 4a_1, a_3 = 5a_2, a_4 = 6a_3, \; a_5 = 7a_4, \ldots$

Der Faktor ist eine arithmetische Folge mit $b_1 = 4$ und $d = 1$ und lautet: $4 + (k-1) \cdot 1 = k + 3$.

$\Rightarrow a_{k+1} = (k+3)a_k$ mit $a_1 = 3$

2.13 $a_1 = 8$ und $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{8} \Rightarrow \; a_n = 8 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}$

$8 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1} < 10^{12} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1} < \frac{10^{12}}{8}$

$\Rightarrow n - 1 < \log_{\frac{9}{8}}\left(\frac{10^{12}}{8}\right) = \frac{\ln\left(\frac{10^{12}}{8}\right)}{\ln\left(\frac{9}{8}\right)} = 216.94, \quad \Rightarrow n < 217.94 \Rightarrow n = 217$

2.14 $c_1 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3, \quad c_2 = \frac{1}{3} \cdot 99 = 33, \quad c_3 = \frac{1}{3} \cdot 999 = 333, \quad c_4 = \frac{1}{3} \cdot 9999 = 3333$

$c_{i+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(10^{i+1} - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(10 \cdot 10^i - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \left[10 \cdot \left(10^i - 1\right) + 9\right]$

$= \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \left(10^i - 1\right) + 3 = 10 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot \left(10^i - 1\right)\right)}_{c_i} + 3 = 10 \cdot c_i + 3$ mit $c_1 = 3$

2.15 a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right) = 0$ (Nullfolge)

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{17}{6n^2}\right) = 0$ (Nullfolge)

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n-1}\right) = 0$ (Nullfolge)

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4-3n^2}{6n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{n^2}-3}{6+\frac{1}{n^2}}\right) = -\frac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{6}{n}} + \frac{7}{n^2}\right) = \frac{2}{5}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)(n+2)}{4n^2+2n-3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-2}{4n^2+2n-3}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3n}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{2n}{n^2}-\frac{3}{n^2}}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+3} - \frac{2n^3}{n^2+n-6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2(n-2)-2n^3}{n^2+n-6}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-4n^2-2n^3}{n^2+n-6}\right) = -4$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(e^x) = 1$

2.16 a) $\lim_{Y\to\infty}\left(\frac{38Y-120}{Y+6}\right)=\lim_{Y\to\infty}\left(\frac{38-\frac{120}{Y}}{1+\frac{6}{Y}}\right)=38$ [GE/Jahr]

b) $\lim_{Y\to\infty}\left(\frac{38Y-120}{Y(Y+6)}\right)=\lim_{Y\to\infty}\left(\frac{38-\frac{120}{Y}}{Y+6}\right)=0$ (Nullfolge)

2.17 a) $a_2=\frac{a_1}{1}=1, a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{1}{2}=\frac{a_1}{1\cdot 2}, a_4=\frac{a_3}{3}=\frac{1}{6}=\frac{a_1}{1\cdot 2\cdot 3}$,

$a_5=\frac{a_4}{4}=\frac{1}{24}=\frac{a_1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

b) $a_n=\frac{a_1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}$

c) $(a_n)$ ist eine Nullfolge.

2.18 $(a_n)$: $\sum_{k=1}^{10}(6.5-0.5k)=\frac{10}{2}[2\cdot 6+(10-1)(-0.5)]=37.5$

$(b_n)$: $\sum_{k=1}^{10}(-6+2k)=\frac{10}{2}[2\cdot(-4)+(10-1)\cdot 2]=50$

$(c_n)$: $\sum_{k=1}^{10}\left(10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)=10\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1}\cong 19.98$

$(d_n)$: $\sum_{k=1}^{10}\left(-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)=-10\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{-\frac{1}{2}-1}\cong -6.66$

2.19 a) $a_9=a_4\cdot q^5\Rightarrow 2^{-3}=2^{-\frac{1}{2}}\cdot q^5\Rightarrow 2^{-3}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{5}{2}}=q^5\Rightarrow q=2^{-\frac{1}{2}}$,

$a_1=\frac{a_4}{q^3}=2^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=2$ und $a_n=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

b) $S_{18}=a_1\cdot\frac{q^{18}-1}{q-1}=2\cdot\frac{2^{-\frac{18}{2}}-1}{2^{-\frac{1}{2}}-1}\cong 6.815$

2.20 a) $a_1=-1, a_2=-1+2^1=1, a_3=a_2+2^2=5=-1+2^1+2^2$

$a_4=a_3+2^3=13=-1+2^1+2^2+2^3, a_5=a_4+2^4=29$

b) $a_m=-1+2^1+\cdots+2^{m-1}=-1+\sum_{i=1}^{m-1}2^i=-1+2\frac{2^{m-1}-1}{2-1}$

$=-1+2^m-2=2^m-3$

2.21 a) $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=1\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=364\Rightarrow 3^n=2\cdot 364+1=729$

$\Rightarrow n=\log_3 729=6$

b) $a_6=1\cdot 3^{6-1}=243$

2.22 Die Produktionsmengen bilden eine geometrische Folge mit $q=1.12$. Mit dem Jahr 2016 als Jahr 1 beträgt dannzumal die Produktionsmenge $a_1=100'000\cdot 1.12^3=140'492.8$. Zu bestimmen ist die 9-te $(2024-2016+1=9)$ Partialsumme der geometrische Reihe mit $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$:

$\Rightarrow s_9 = 140'492.8 \cdot \frac{1.12^9-1}{1.12-1} \cong 2'075'873$

2.23 Zu bestimmen ist die 8-te Partialsumme der geometrische Reihe mit $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$:

Gesucht sind die Parameter $a_1$ und q. $n = 8$ ist vorgegeben. Wenn q bekannt ist, dann berechnen wir $a_1 = \frac{a_4}{q^3}$.

Mit der Angabe $a_2 + a_3 = 14'820$ lässt sich q über eine quadratische Gleichung bestimmen. Mit $a_2 = \frac{a_4}{q^2} = \frac{6'859}{q^2}$ und $a_3 = \frac{a_4}{q} = \frac{6'859}{q}$ gilt $\frac{6'859}{q^2} + \frac{6'859}{q} = 14'820$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen, $q_1 = \frac{19}{20} = 0.95$ und $q_1 = -\frac{19}{39} = -0.487$, wobei die negative ökonomisch keinen Sinn macht. Für $a_1$ ergibt sich $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{6'859}{0.95^3} = 8'000$

$\Rightarrow s_8 = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 8'000 \cdot \frac{0.95^8-1}{0.95-1} = 53'852.73$

2.24 a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-0.25} = 4$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-(-0.25)} = 2.4$

2.25 a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] = 2$, weil $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] = \frac{2}{3}$, weil $a_1 = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^k\right] = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{1}{a-1}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^k\right] = \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$

$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{a\left(\frac{a-1}{a}\right)} = \frac{1}{a-1}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right] = \frac{5}{2} + \frac{1}{a-1}$