Serie 10

Aufg 1

Gegeben:

x_i	0	1	2	3
y_i	2	1	2	2

Gesucht: Koeffizienten: a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome s_i $i = 0, 1, 2$ mittels natürliche Splinefunktion:

① $a_i = y_i$

$a_0 = 2 \quad a_1 = 1 \quad a_i = 2 \quad a_3 = 2$

② $h_i = x_{i+1} - x_i$

$h_0 = 1 - 0 = 1 \quad h_1 = 2 - 1 = 1 \quad h_2 = 3 - 2 = 1$

③ $c_0 = 0 \quad c_1 = 0 \quad n = i - 1 = 3$

④ Berechnen

a) $i = 1$:

$2(h_0 + h_1) \cdot c_1 + h_1 \cdot c_2 = 3 \cdot \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0}$

$= 3 + 3 = 6$

b) $i = 2$ bis $n - 2$

$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - 3 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$

$\Rightarrow$ Brauchen wir nicht, da $i = 2 = n - 1$ $\rightarrow$ weiter bei c)

c) $i = n - 1$

$h_{n-2} \cdot c_{n-2} + 2 \cdot (h_{n-2} + h_{n-1}) \cdot c_{n-1} = 3 \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}$

$c_1 + 4 \cdot c_2 = -3$

$c_1 = -3 - 4c_2$

$\Rightarrow$ In a) einsetzen: $4(-4 \cdot c_2 - 3) + c_2 = 6$

$-16 \cdot c_2 - 12 + c_2 = 6$

$-18 = 15 \cdot c_2$

$c_2 = \underline{\underline{-\frac{6}{5}}}$ $\quad \Rightarrow c_1 = -3 + \frac{24}{5} = \underline{\underline{\frac{9}{5}}}$

⑤ $b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} \cdot (c_{i+1} + 2c_i)$

$b_0 = -1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{5}\right) = \underline{\underline{-\frac{8}{5}}}$ $\quad b_1 = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$ $\quad b_2 = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$

⑥ $d_i = \frac{1}{3 \cdot h_i} \cdot (c_{i+1} - c_i)$

$d_0 = \frac{3}{5}$ $\quad d_1 = -1$ $\quad d_2 = \frac{2}{5}$

⑦ Polynome bestimmen

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

$S_0(x) = 2 - \frac{8}{5}(x-0) + 0 \cdot (x-0)^2 + \frac{3}{5}(x-0)^3$

$S_1(x) = 1 + \frac{1}{5} \cdot (x-1) + \frac{9}{5} \cdot (x-1)^2 + 1(x-1)^3$

$S_2(x) = 2 + \frac{4}{5} \cdot (x-2) + \frac{6}{5} \cdot (x-2)^2 + \frac{2}{5}(x-2)^3$