Trigonometrie

soh/cah/toa:

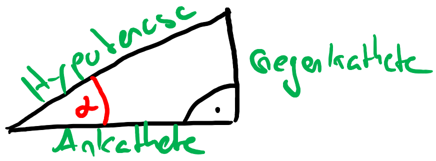
$\sin = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

s = sinus
c = cosinus
t = tangens

$\left.\begin{array}{l} \text{o = opposite = Gegenkathete} \\ \text{a = adjacent = Ankathete} \\ \text{h = hypotenuse = Hypotenuse} \end{array}\right\}$ vom Winkel gesehen



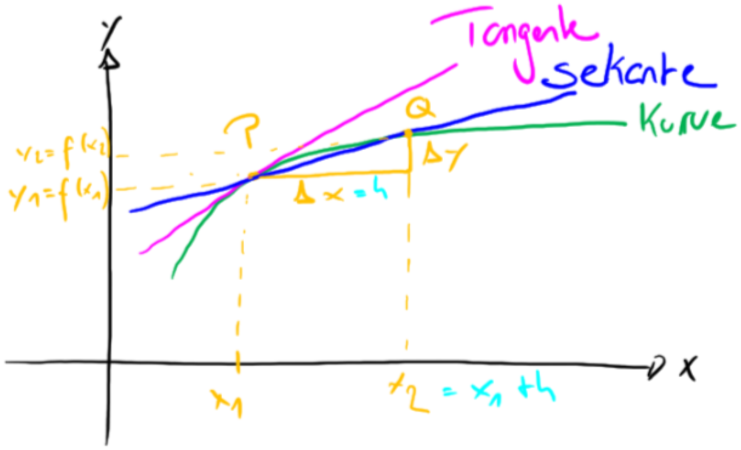
Satz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

wichtige Seiten:

- Winkel, in Grad & Radiant gemessen seite 36
- Werte von $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ für ausgewählte Werte von θ seite 39
- Additionstheoreme, Doppelwinkelgleichung, Halbwinkelgleichung seite 41

Aenderungsraten & Tangenten an Kurven



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

mittlere Aenderungsrate

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1} = \boxed{\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}}$$

Bsp.:

Wie gross ist die Steigung von $y = x^2$ bei $x_1 = 2$?

Steigung der Sekante:

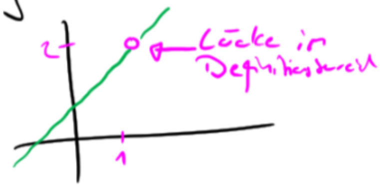
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \underline{\underline{4 + h}}$$

$$\lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$$

Grenzwert einer Funktion & Grenzwertsätze

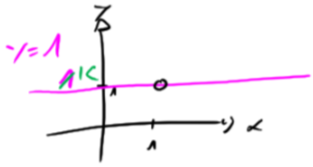
$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \underbrace{x+1}_{\text{wenn } x \neq 1}$



$f(1)$ existiert nicht

$y = x + 1$ → $y = x$, $y = 1$



$\lim_{x \to 1} 1 = 1$

Allg. $\lim_{x \to 1} K = 1$

$\lim_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$

$\lim_{x \to 1} x = 1$

Allg. $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

Spezialfälle:

- Funktion springt
- wächst zu stark
- oszilliert

} Seite 55

Satz 2.1 Grenzwertsätze
Sind L, M, c und k reelle Zahlen und ist

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{und} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ so gilt}$$

1. Summenregel: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$
2. Differenzenregel: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$
3. Faktorregel: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$
4. Produktregel: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
5. Quotientenregel: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$
6. Potenzregel: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n ist eine positive ganze Zahl
7. Wurzelregel: $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n ist eine positive ganze Zahl (Ist n gerade, so nehmen wir $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$ an.)

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)+f(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} f(x) = 2\cdot\lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot f(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} f(x) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^2$$

Satz 2.4 Einschnürungssatz Es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle x in einem offenen Intervall, das den Wert c enthält, ausgenommen möglicherweise an der Stelle $x = c$ selbst. Nehmen wir weiter an, dass

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ist. Dann gilt $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Einseitige Grenzwerte

$\lim_{x \to c} (x) = L$ → beidseitig

$\lim_{x \to c^+} (x) = L$ → rechtsseitig

$\lim_{x \to c^-} (x) = L$ → linksseitig

! $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ (θ in Radiant)

Stetigkeit

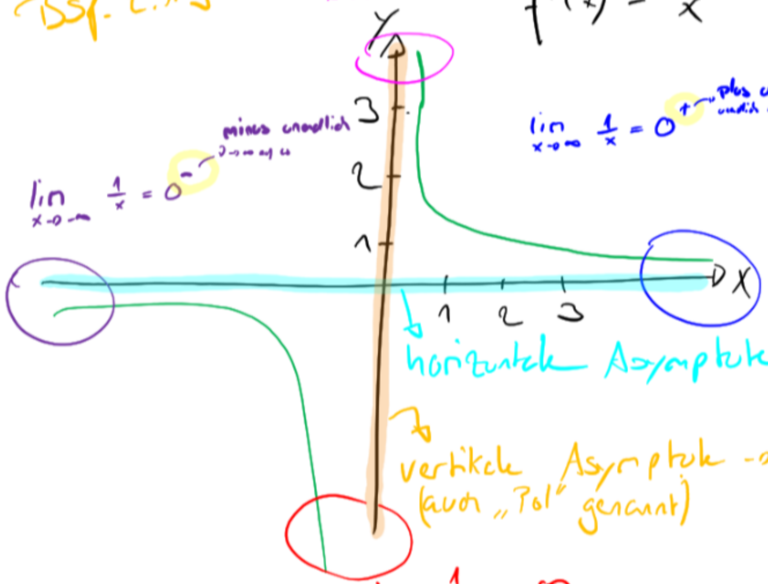
„Stetigkeit ist, wenn man die komplette Funktion zeichnen kann ohne, dass man den Stift einmal absetzen muss" → Funktionswert = Grenzwert

Wenn nur eine Unstetigkeit vorkommt, ist die Funktion unstetig!

Bsp. 2.19

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ minus unendlich (0 → ∞ auf LS)

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0^+$ plus unendlich (unendlich auf RS)

horizontale Asymptote → beschreibt die grüne Kurve in Unendlichen

vertikale Asymptote (auch „Pol" genannt) → beschreibt das Verhalten der grünen Kurve bei $y = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

„Asymptote ist eine Funktion welche einer anderen Funktion im Unendlichen beliebig annähert"

Stetigkeitstest

1. $f(c)$ existiert
   $\Rightarrow c$ liegt im Definitionsbereich von f
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$
   $\Rightarrow f$ hat für $x \to c$ einen Grenzwert
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
   $\Rightarrow$ Grenzwert = Funktionswert

Satz 2.8 Eigenschaften stetiger Funktionen
Sind die Funktionen f und g an der Stelle $x = c$ stetig, so sind auch die folgenden Kombinationen an der Stelle $x = c$ stetig:

1. Summen: $f + g$
2. Differenzen: $f - g$
3. Konstante Vielfache $k \cdot f$, für eine beliebige Zahl k
4. Produkte: $f \cdot g$
5. Quotienten: f/g, vorausgesetzt $g(c) \neq 0$
6. Potenzen: f^n, n ist eine positive ganze Zahl
7. Wurzeln: $\sqrt[n]{f}$, vorausgesetzt f ist auf einem offenen Intervall definiert, das c enthält; n ist eine positive ganze Zahl

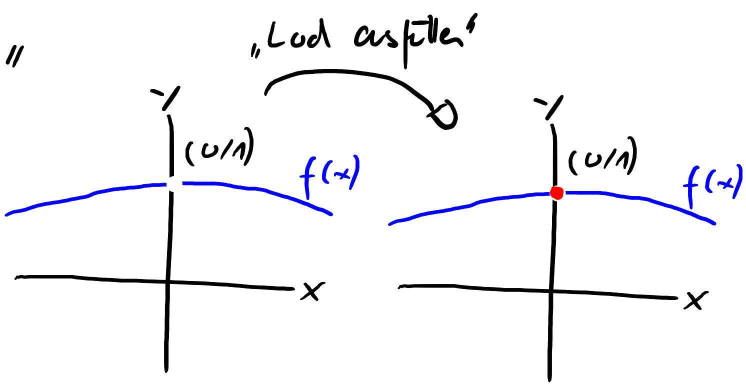
Satz 2.10 Grenzwerte stetiger Funktionen Ist g an der Stelle b stetig und ist $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b$, so gilt

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x \to c} f(x)).$$

Stetige Fortsetzung

„Das Loch wird 'ausgefüllt' "

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



Grenzwerte im Unendlichen

horizontale Asymptote:

Wenn der Grad des Nenner-Polynoms grösser ist, dann geht die Funktion immer gegen 0 & somit eine horizontale Asymptote

vertikale Asymptote:

entweder $\lim_{x \to a^+} (x) = \pm\infty$

oder

$$\lim_{x \to a^-} (x) = \pm\infty$$

schräge Asymptote:

Der Grad des Zählers ist grösser & somit eine schräge Asymptote

Polynomdivision

$$(x^2-3):(2x-4) = \boxed{\frac{x}{2}+1} + \boxed{\frac{1}{2x-4}}$$

$$\begin{array}{l} -\,x^2-2x \\ \hline \quad 0+2x-3 \\ \quad\; -(2x-4) \\ \hline \quad\quad 0+1 \end{array}$$

strebt gegen 0 & kann für Berechnung ignoriert werden

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\boxed{\left(\frac{x}{2}+1\right)}}_{\infty} + \lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{1}{2x-4}}$$

→ schräge Asymptote

Ableitung

„Komplizierter Weg“:

Steigung eines bestimmten Punktes:

$P(3 / f(3))$

$x_0 = 3$

$P_1(3/f(3))$ → erster Punkt

$P_2(3+h / f(3+h))$ → zweiter Punkt (+h)

$$m = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$f(3) = 3^2 = 9$

$f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$

Allg.:

1. Differenzquotient

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

2. Differenzquotient aufstellen

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6\cancel{h} + h^{\cancel{2}} \cancel{-9}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 + 0 = \underline{\underline{6}}$$

Steigung an beliebigen Punkt bestimmen:

$P(a / f(a))$

1.
$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$x_0 = a$

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2.
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2a\cancel{h} + h^{\cancel{2}} \cancel{-a^2}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a + 0 = \underline{\underline{2a}}$$

$f(a) = a^2$

$f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2$

„bessere Variante"

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$\to$ Der Exponent wird zum Faktor

Potenzregel:

$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

$f(x) = x^{\sqrt{2}} \qquad f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$

Faktorregel:

$f(x) = 7 \cdot x^4 \qquad f'(x) = 7 \cdot 4\, x^3 = 28\, x^3$

Summenregel:

$f(x) = 7 \cdot x^4 - 2x^3 \qquad f'(x) = 28x^3 - 6x^2$

Produktregel:

$f(x) = \underbrace{(3x+1)}_{u} \cdot \underbrace{(x-2)}_{v} \qquad f'(x) = 3 \cdot (x-2) + (3x+1) \cdot 1 = 3x - 6 + 3x + 1 = 6x - 5$

$[u \cdot v]' = u'v + uv'$

$u = 3x+1 \qquad u' = 3$

$v = x-2 \qquad v' = 1$

Quotientregel:

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \qquad f'(x) = \frac{3 \cdot (x-2) + (3x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$

$= -\frac{7}{(x-2)^2}$

$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u = 3x+1 \qquad u' = 3$

$v = x-2 \qquad v' = 1$

Ableitung mit trigonometrischen Funktionen

$y = \sin x$ $\qquad$ $y' = ?$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\downarrow$$

$$y'(x) = \cos x$$

$$y = \sin x$$
$$\downarrow '$$
$$y = \cos x$$
$$\downarrow '$$
$$y = -\sin x$$
$$\downarrow '$$
$$y = -\cos x$$
$$\downarrow '$$

immer Zähler grösser Grad wie Nenner

Polynomdivision (immer wenn Zähler grösser Grad wie Nenner hat)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) : (x - 1) = x^2 - 5x + 4 \\
-(x^3 - 1x^2) \\
\hline
\quad -5x^2 + 9x \\
\quad -(-5x^2 + 5x) \\
\hline
\qquad 4x - 4 \\
\qquad -(4x - 4) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

1. dividieren
2. multiplizieren
3. subtrahieren

↳ Rest (vertikale Asymptote)

$$(x^2 - 3) : (2x - 4) = \boxed{\frac{x}{2} + 1} + \boxed{\frac{1}{(2x-4)}}$$

↳ schräge Asymptote

$$
\begin{array}{l}
-(x^2 - 2x) \\
\hline
0 + 2x + 3 \\
\quad -(2x - 4) \\
\hline
\qquad 1
\end{array}
$$

mit was muss ich $2x$ multiplizieren, damit ich x^2 erhalte

$$\frac{x}{2} \cdot (2x - 4) = x^2 - 2x$$