Auftrag: Simulation eines Zweikörperproblems

Abgabetermin: Freitag, 16. 11. 2018, 16.00, in Form eines PDF – Files.

Aufgabenstellung

Bei einem Zweikörperproblem werden zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet, welche miteinander wechselwirken. Ein Beispiel dafür ist das System Erde – Mond (sofern es isoliert betrachtet wird!), bei dem die beiden Himmelskörper sich über die Gravitation gegenseitig beeinflussen (anziehen).

Ziel des Auftrags ist (1) ein Modell für ein solches System zu entwickeln und in einer Computersimulation zu testen, (2) das Verhalten der Simulationsresultate bezüglich numerischen Problemen qualitativ und soweit möglich quantitativ zu beschreiben und (3) der Einfluss verschiedener Wechselwirkungsgesetzte auszuprobieren.

Konkrete Aufgabenstellung:

A. Modellierung: Finden Sie die Systemgleichungen, welche die Bewegung von zwei Körpern in zwei Dimensionen beschreiben.

B. Implementieren Sie das Modell in einen graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna) und simulieren Sie die Bewegung der beiden Körper.

C. Wiederholen Sie die Berechnungen für verschiedene Zeitschritte und nummerische Verfahren (Euler, RK2, RK4). Analysieren Sie die Konsequenzen. Welchen Zusammenhang (qualitativ und quantitativ) beobachten Sie zwischen den Bahnkurven und der Zeitschrittgrösse?

D. Was geschieht, wenn Sie anstelle eines $1/r^2$-Gesetztes eine andere Potenz verwenden (z.B. $1/r^\alpha$ mit $\alpha = 2.01$)? Lässt sich eine Regel (Vermutung) formulieren?

Vorgehen

Sie arbeiten in Zweier- oder Dreiergruppen und schreiben einen kurzen, graphisch überzeugenden Report Ihrer Resultate. Handschriftliche Resultate werden nicht akzeptiert.

Was Sie tun sollen

Die Position der Objekte ist gegeben durch die Vektoren $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$. Nun wissen Sie, dass die Kraft zwischen zwei Massen gegeben ist durch

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2} \vec{n}_{12}$$

Damit erhalten Sie die Kraft auf die Masse 1 und mit $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ auch diejenige auf Masse 2.

Wenn Sie die Kräfte haben, können Sie die Beschleunigungen ermitteln. Die Beschleunigungen sind die Ableitungen / Veränderungsraten der Geschwindigkeit und diese wiederum sind die Veränderungsraten der Positionen.

Da die Kräfte auf der Verbindungslinie der beiden Massen wirken, können Sie sich auf ein zweidimensionales System beschränken. Wählen Sie vernünftige Anfangsbedingungen. Wir wissen, wie lange der Mond braucht um einmal um die Erde zu fliegen (Für die, die das nicht wissen ein Tipp: Es heisst nicht einfach nur so MONat), und wie weit der Mond von der Erde weg ist, entnehmen Sie einem Buch). Beachten Sie die Wahl der Anfangsgeschwindigkeiten folgendes:

- Die Anfangsgeschwindigkeiten sind natürlich nicht null.
- Die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Gesamtystems sollte null sein.
- Versuchen Sie, elliptische und kreisförmige Bahnen zu realisieren.

Kurz gesagt:

- Sie müssen die Komponenten der Beschleunigungen der untersuchten Objekte aus den wirkenden Kräften berechnen.
- Mit Hilfe von BM berechnen Sie dann die Geschwindigkeiten und letztlich die Ortsvektoren (Trajektorien).
- Sie müssen die Anfangsbedingungen geeignet und realistisch wählen.

Versuchen Sie, den Output etwas ansprechend zu gestalten. Also nicht einfach nur BM – Kurven der x-Komponente der Geschwindigkeit des zweiten Körpers o.ä. sondern Bahnkurven in der xy- Ebene oder etwas anderes, dass Ihnen gefällt.

Wenn Ihnen etwas nicht klar ist: Fragen Sie uns! Wir sind dafür da, Ihnen zu helfen!

Was Sie NICHT tun sollen

- Setzen Sie nicht voraus, dass es sich um kreisförmige Bahnen handelt.
- Versuchen Sie nicht, eine formale Lösung zu finden. Es gibt eine solche, aber diese ist schwierig zu finden.
- Gehen Sie NICHT auf Wikipedia, um zu erfahren, dass Sie den Lenz'schen Vektor finden müssen, alles in Schwerpunktkoordinaten berechnen sollen oder einen wilden Ansatz aus dem 19. Jahrhundert verfolgen müssen. Das stimmt zwar alles, ist aber für eine numerische Lösung weder nötig noch zielführend.

Anfangsbedingungen – Ein Hinweis

Versuchen Sie, die Frage der Anfangsbedingungen zu verstehen, und fragen Sie die Dozierenden. Falls alles nichts nützt, verwenden Sie

$$\vec{r}_{Erde}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{Mond}(0) = \begin{pmatrix} r_{Erde-Mond} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_{Erde}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\eta M_{Mond}}{M_{Erde}} \sqrt{\frac{\gamma M_{Erde}}{r_{Erde-Mond}}} \end{pmatrix}, \vec{v}_{Mond}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \sqrt{\frac{\gamma M_{Erde}}{r_{Erde-Mond}}} \end{pmatrix}$$

Setzen Sie den Parameter zuerst $\eta = 1.0$ und variieren Sie ihn dann ein wenig.

Bewertung

Die Aufträge A-D sind schriftlich zu bearbeiten. Die Bearbeitungen werden bewertet (Nicht abgegeben = 0 Punkte, genügende Bearbeitung = 6 Punkte, gute Bearbeitung = 8 Punkte, sehr gute Bearbeitung: 10 Punkte. Für hervorragende Bearbeitungen können bis zu zwei Bonuspunkte vergeben werden. Wichtig für die Bearbeitung ist, dass die eigenen Ideen, Konzepte und Gedanken in geeigneter Weise dokumentiert werden. Im Vordergrund steht nicht ein einfaches Resultat, sondern die Auseinandersetzung mit den Konzepten und eine graphisch ansprechende Darstellung.

Gegeben:

▷ $\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}$

▷ $\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ ▷ $|\vec{r}_{12}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

▷ Gravitationskonstante $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}$

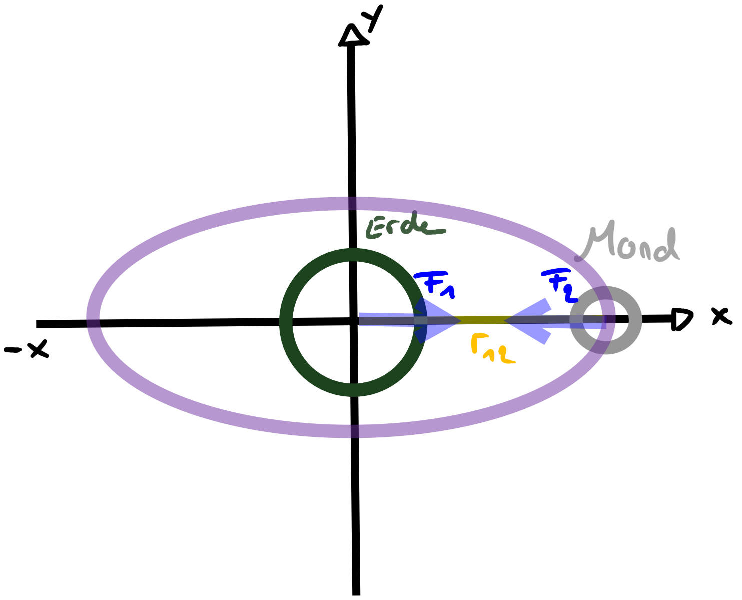
▷ $m_1 = m_{Erde} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

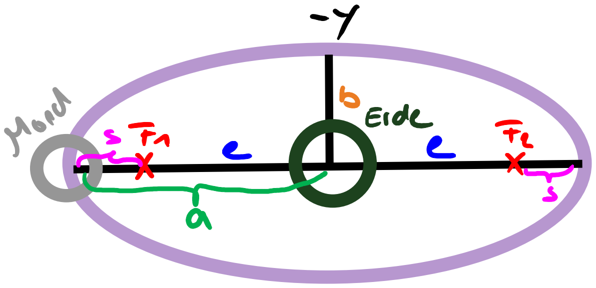
▷ $m_2 = m_{Mond} = 7.348 \cdot 10^{22}$ kg $\approx \frac{1}{81}$ Erde

▷ Distanz zwischen Mond & Erde = 384'000'000 m

▷ Umrundung Mond = 27 Tage ≈ 2'332'800 s

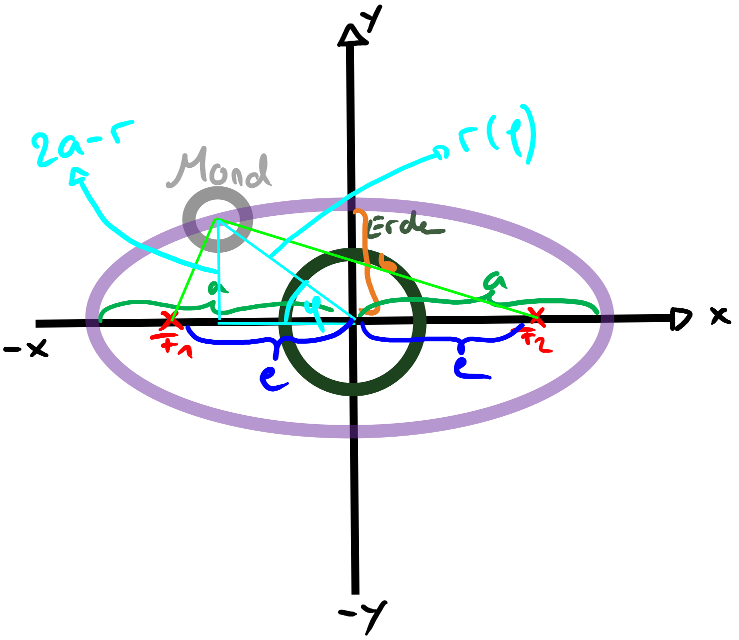
Analytischer Ansatz





Ellipse:

1) Brennweite e definieren
   → Falls e = 0 → Kreis
2) Brennpunkt F_1, F_2 ergeben sich aus Nullpunkt ± e
   $r_1 \binom{0}{0} \pm e \binom{x}{y}$
3) Jeder Punkt P ist genau 2a entfernt von F_1 & F_2
4) $e^2 + b^2 = a^2$



Berechnung Radius von Ellipse:

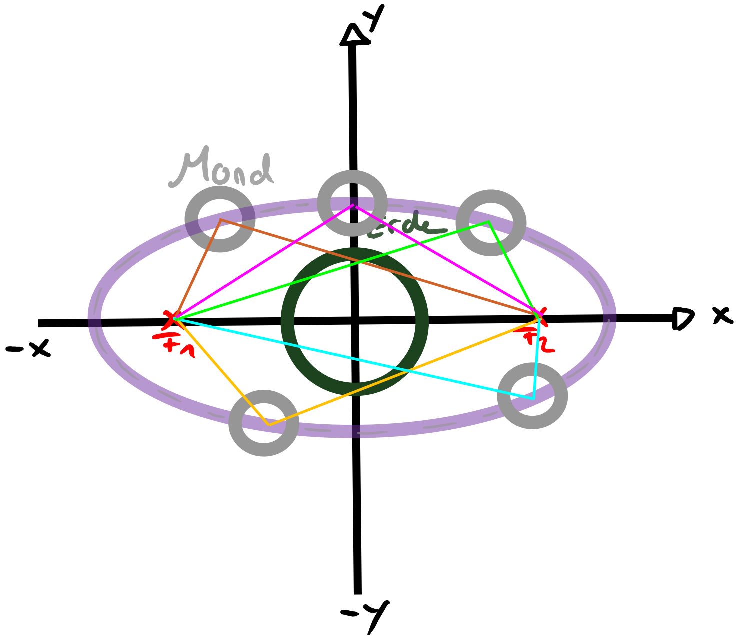
$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a - e \cdot \cos(\varphi)}$$

Berechnung Umfang von Ellipse:

Bogenlänge $s = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$

Umfang $u = 2s$

Alternativ: Fundamentum S.23



Annahme:

$a = 406'700'000\,m$

$b = 356'400'000\,m$

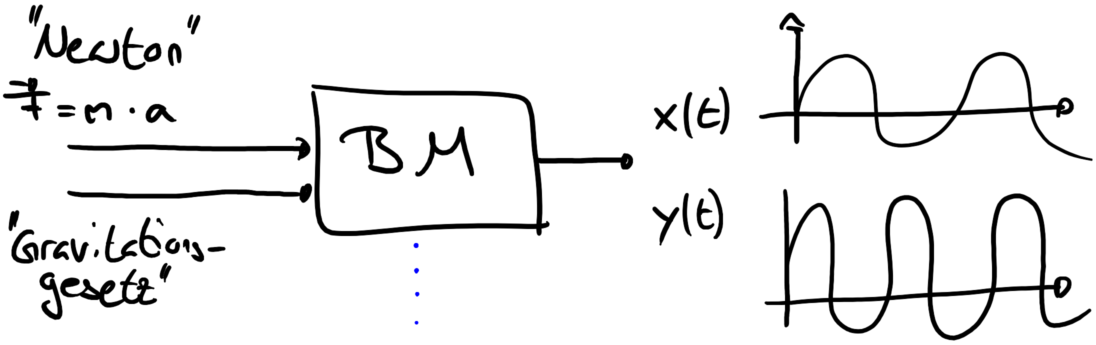
$e = \sqrt{a^2 - b^2} = 195'918'171.7\,m$

$s = a - e = 210'781'828.3\,m$

$F_1 = \begin{pmatrix} Nullpunkt - e \\ 0 \end{pmatrix}$

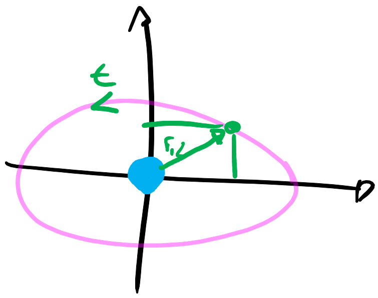
$F_2 = \begin{pmatrix} Nullpunkt + e \\ 0 \end{pmatrix}$

Numerischer Ansatz



$\frac{dx}{dt} = v_x$

$\frac{dv_x}{dt} = a_x$



Startbed: $x_0 = 384$ Mio.m

$y_0 = 0$