Lineare Algebra

Übung 1

Abgabe: Kalenderwoche 10

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Elemente von S_5:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ in der Zyklenschreibweise an.

(b) Bestimmen Sie τ^{-1}. Skizzieren Sie τ^{-1} als bipartiten graph.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\tau \circ x = \sigma$$

nach x auf.

Aufgabe 2

Es seien die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\ominus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \oplus k := \max\{n, k\}$ und $n \ominus k := \min\{n, k\}$ gegeben. Entscheiden Sie von den Strukturen $(\mathbb{N}, \oplus)$ und $(\mathbb{N}, \ominus)$ ob diese Halbgruppen, Monoide oder gar Gruppen sind.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Beweisen sie:

(a) Die Struktur $(\mathbb{E}, \cup)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

(b) Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

Aufgabe 4

In einer Halbgrupppe $(H, \star)$ gilt die Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in H$ folgendes gilt:

$$a \star b = a \star c \Rightarrow b = c$$
$$b \star a = c \star a \Rightarrow b = c.$$

Zeigen Sie, dass in allen Gruppen die Kürzungsregel gilt.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Es sei $(G, \bullet)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und $f : \mathbb{N} \to G$ sei eine beliebige Folge. Beweisen Sie, dass es natürliche Zahlen n und k gibt, so dass

$$f(n) \bullet f(n+1) \bullet .. \bullet f(n+k) = e$$

gilt.

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Elemente von S_5:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ in der Zyklenschreibweise an.

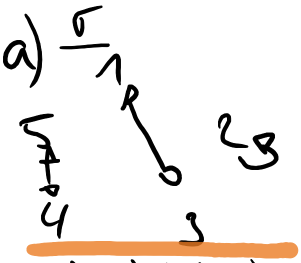
(b) Bestimmen Sie τ^{-1}. Skizzieren Sie τ^{-1} als bipartiten graph.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\tau \circ x = \sigma$$

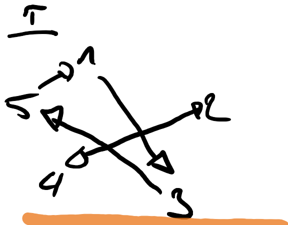
nach x auf.

a) σ



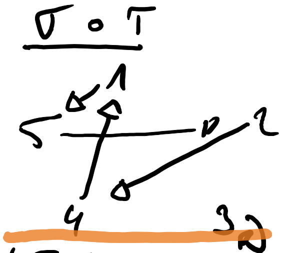
$(1,3)\,(2)\,(4,5)$

τ



$(1,3,5)\,(2,4)$

$\sigma \circ \tau$

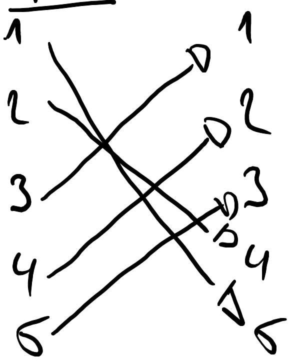


→ zyklische Darstellung

$(5,4,3,1,2)$ → zyklische schreibweise

b) $$\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

τ^{-1}



c) $\tau \circ x = \sigma$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \circ x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{(\tau \circ \tau^{-1})}_{\circ \text{ daher } x \text{ „alleine"}} \circ x = \tau^{-1} \circ \sigma$

Überlegung: Wenn wir das inverse Element von τ auf beiden seiten (der Gleichung) multiplitieren, erhalten wir links das x „alleine" da $\tau \circ \tau^{-1}$ = leer Menge & rechts $\sigma \circ \tau^{-1}$

$x = \tau^{-1} \circ \sigma$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Es seien die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\ominus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \oplus k := \max\{n, k\}$ und $n \ominus k := \min\{n, k\}$ gegeben. Entscheiden Sie von den Strukturen $(\mathbb{N}, \oplus)$ und $(\mathbb{N}, \ominus)$ ob diese Halbgruppen, Monoide oder gar Gruppen sind.

$(\mathbb{N}, \oplus)$:
Monoid, assoziativ ist es & das neutrale Element existiert auch

Definitionen:
- Halbgruppe: falls $\oplus$ assoziativ
- Monoid: falls $(\mathbb{N}, \oplus)$ Halbgruppe und ein neutrales Element $e \in \mathbb{N}$ existiert
- Gruppe: falls $(\mathbb{N}, \oplus)$ Monoid und für alle $a \in \mathbb{N}$ ein $b \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a \cdot b = b \cdot a = e$ gilt
- kommutative Gruppe: falls $(\mathbb{N}, \oplus)$ eine Gruppe & $\oplus$ kommutativ ist

$(\mathbb{N}, \ominus)$:
Halbgruppe, assoziativ ist es, jedoch gibt es kein neutrales Element

(+)

① assoziativ

$\max(1, \max(2,3)) = \max(\max(1,2) 3)$

② neutrales Element $= 0$

③ kein inverses → Da es mind. ein Element gibt, welches kein inverses Element hat.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Beweisen sie:

(a) Die Struktur $(\mathbb{E}, \cup)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

(b) Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

a) ① assoziativ: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $\cup$ = zurückführend auf „oder"

② neutr. Element: $\mathbb{E} \cup \{\} = \{\} \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$

③ $E \cup \,?\, = \{\}$ $\rightarrow$ es gibt kein inverses Element auf $\mathbb{E}$, da es keine Menge gibt welche man mit $\mathbb{E}$ vereinigen kann & die leere Menge rauskommt.

$\Rightarrow$ Monoid, aber keine Gruppe

Aufgabe 4

In einer Halbgruppppe $(H, \star)$ gilt die Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in H$ folgendes gilt:

$$a \star b = a \star c \;\Rightarrow\; b = c$$
$$b \star a = c \star a \;\Rightarrow\; b = c.$$

Zeigen Sie, dass in allen Gruppen die Kürzungsregel gilt.

$$ax = bx$$
$$\Rightarrow (ax)\,x^{-1} = (bx)\,x^{-1}$$
$$\Rightarrow a\,\underbrace{(x\,x^{-1})}_{e} = b\,\underbrace{(x\,x^{-1})}_{e}$$
$$\Rightarrow \quad a = b$$

Aufgabe 5

$a_1, a_2, \boxed{a_3, \ldots\; a_n}, a_{n+1}$

$\llcorner$ o e

$b_i = a_1 \star a_2 \star \ldots \star a_i$

$b_1 = b_1$

$b_2 = b_1 \star b_2$

$b_3 = b_1 \star b_2 \star b_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$b_i = b_j \qquad i \neq j \qquad \boxed{i = j + k \quad k > 0}$

$\Rightarrow b_{j+k} = b_j$

$\Leftrightarrow (a_1 \star \ldots \star a_j) \star \ldots \star a_{j+k} = (a_1 \star \ldots \star a_j)$

$\Rightarrow \cancel{b_j} \star a_{j+1} \star \ldots \star a_{j+k} = \cancel{b_j}$

$\Rightarrow a_{j+1} \star \ldots\; a_{j+k} = e$