Aufgabe 1 (45 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite h bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle n, um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)dx$$

auf einen Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel ?

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)\,dx$$

Rechtecksregel

$$\Big|\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} - Rf(h)\Big| \leq \frac{h^2}{24} * (b-a) * \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-5}$$

$b = 2$; $a = 1$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \longrightarrow \max_{x\in[a,b]} \left|-\frac{2}{x^2}\right| = \max_{x\in[a,b]} \left|-\frac{2}{1^2}\right| = 2$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{h^2}{24} \cdot 1 \cdot 2 \leq 10^{-5}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{24} \cdot 2 \leq 10^{-5} \quad | \cdot 24$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 \leq 24 \cdot 10^{-5} \quad | : 2$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq 12 \cdot 10^{-5} \quad | \sqrt{\ }$$

$$\frac{1}{n} \leq \sqrt{12 \cdot 10^{-5}}$$

$$\frac{1}{n} \leq 0.0109544511$$

$$\frac{1}{0.01095} \leq n$$

$$91.2870 \leq n$$

$$\underline{\underline{n = 92}}$$

Trapez $I = \int_1^2 \ln(x^2)\, dx$

$$\Big|\underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{I} - Tf(x)\Big| \le \frac{h^2}{12}(b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$b = 2, \quad a = 1$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \longrightarrow \max_{x \in [a,b]} \left|-\frac{2}{x^2}\right| = \max_{x \in [a,b]} \left|-\frac{2}{1^2}\right| = 2$$

$$\frac{h^2}{12} \cdot 2 \le 10^{-5}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{12} \cdot 2 \le 10^{-5} \quad | \cdot 12$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 \le 12 \cdot 10^{-5} \quad | : 2$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \le 6 \cdot 10^{-5} \quad | \sqrt{\ }$$

$$\frac{1}{n} \le \sqrt{6 \cdot 10^{-5}}$$

$$\frac{1}{n} \le 0.0074596$$

$$\frac{1}{0.0074596} \le n$$

$$\underline{\underline{n = 135}}$$

Simpson

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)\,dx$$

$$\Big|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I} - S f(x)\Big| \le \frac{h^4}{2880}(b-a)\cdot \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

$b = 2, \quad a = 1$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-12}{x^4} \rightarrow \max_{x\in[a,b]}\left|-\frac{12}{x^4}\right| = \max_{x\in[a,b]}\left|-\frac{12}{1^4}\right| = 12$$

$$\frac{h^4}{2880}\cdot 12 \le 10^{-5}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{2880}\cdot 12 \le 10^{-5} \quad \Big|\cdot 2880$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4\cdot 12 \le 2880\cdot 10^{-5} \quad \Big|:12$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 \le 240\cdot 10^{-5} \quad \Big|\sqrt[4]{\ }$$

$$\frac{1}{n} \le \sqrt[4]{240\cdot 10^{-5}}$$

$$\frac{1}{n} \le 0.221336383$$

$$\frac{1}{0.2213363} \le n$$

$$\underline{\underline{n = 5}}$$

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h = \frac{b-a}{2^i}$, $(i = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{i0} komplett mit allen Summanden auf, also z.B.

$T_{20} = h\left(\frac{\cos(...)+\cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...)\right)$.

$$T_{ik} = \frac{4^k \cdot T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{4^k - 1}$$

$$Tf(h) = h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$h = \frac{b-a}{2^i} \qquad b = \pi, \quad a = 0 \qquad x_i = a + i \cdot h$$

$$h = \frac{\pi}{2^i}$$

$$T_{00} = \pi \left(\frac{\cos(0^2) + \cos(\pi^2)}{2}\right)$$

$$T_{10} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos(0^2) + \cos(\pi^2)}{2} + \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right)$$

$$T_{20} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos(0^2) + \cos(\pi^2)}{2} + \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) + \cos\left(\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + \cos\left(\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right)^2\right)\right)$$

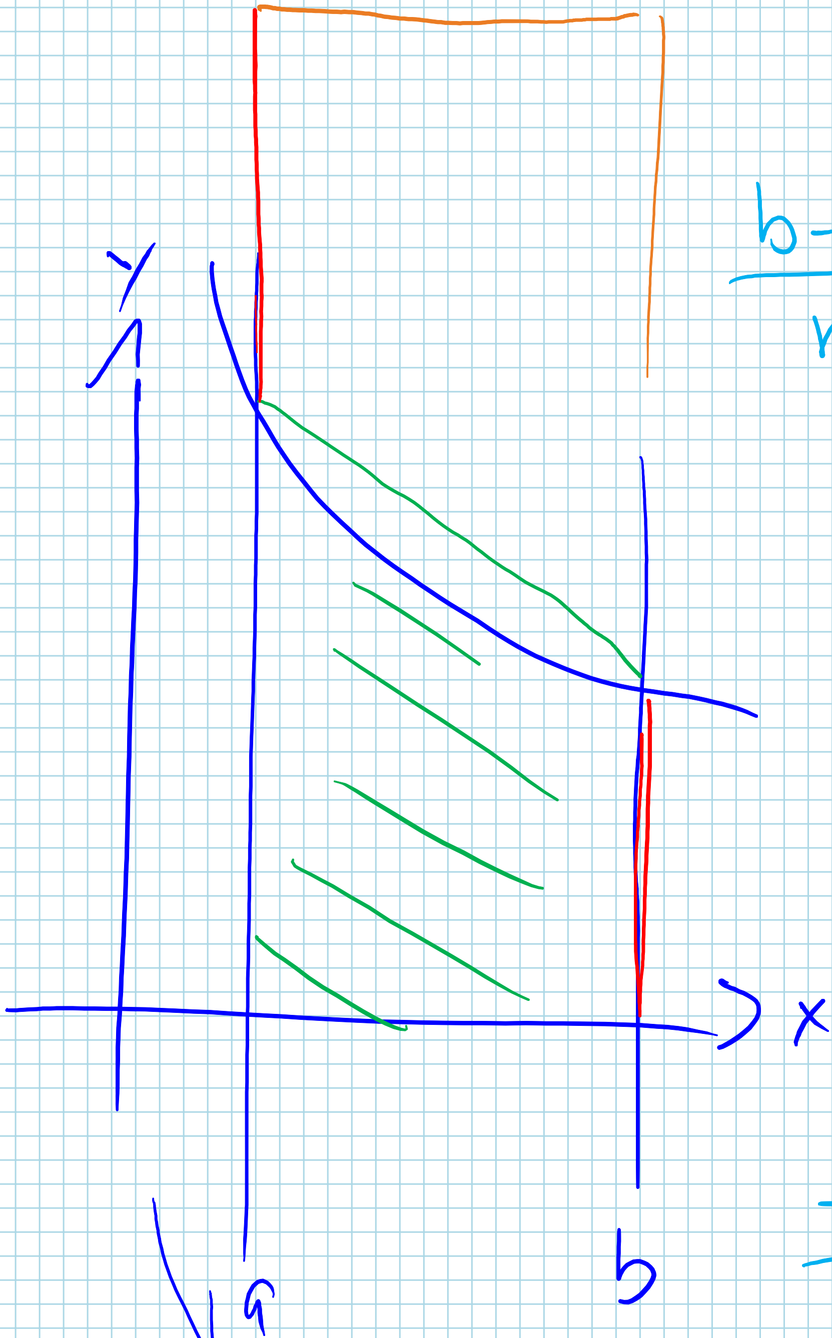
$$T_{30} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\cos(0^2) + \cos(\pi^2)}{2} + \cos\left(\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\right) + \cos\left(\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)^2\right) + \cos\left(\left(3 \cdot \frac{\pi}{8}\right)^2\right) + \dots + \cos\left(\left(7 \cdot \frac{\pi}{8}\right)^2\right)\right)$$

$$T_{40} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{\cos(0^2) + \cos(\pi^2)}{2} + \cos\left(\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\right) + \cos\left(\left(2 \cdot \frac{\pi}{16}\right)^2\right) + \cos\left(\left(3 \cdot \frac{\pi}{16}\right)^2\right) + \cos\left(\left(4 \cdot \frac{\pi}{16}\right)^2\right) + \dots + \cos\left(\left(15 \cdot \frac{\pi}{16}\right)^2\right)\right)$$

h	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}	T_{i4}
π	0.1529				
$\frac{\pi}{2}$	-1.1507	-1.5852			
$\frac{\pi}{4}$	0.6498	1.2499	1.4389		
$\frac{\pi}{8}$	0.6026	0.5869	0.5427	0.5285	
$\frac{\pi}{16}$	0.5745	0.5652	0.5637	0.5640	0.5642

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right.$$

$+$



$$\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+$$

$$\frac{f(x_1)+f(b)}{2}$$