

Lineare Algebra

Übung 1

Abgabe: Kalenderwoche 10

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Elemente von S_5 :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Geben Sie $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ in der Zyklenschreibweise an.
- Bestimmen Sie τ^{-1} . Skizzieren Sie τ^{-1} als bipartiten graph.
- Lösen Sie die Gleichung

$$\tau \circ x = \sigma$$

nach x auf.

Aufgabe 2

Es seien die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $n \oplus k := \max\{n, k\}$ und $n \ominus k := \min\{n, k\}$ gegeben. Entscheiden Sie von den Strukturen (\mathbb{N}, \oplus) und (\mathbb{N}, \ominus) ob diese Halbgruppen, Monoide oder gar Gruppen sind.

Aufgabe 3

Es sei \mathbb{E} die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} . Beweisen sie:

- Die Struktur (\mathbb{E}, \cup) ist ein Monoid aber keine Gruppe.
- Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

Aufgabe 4

In einer Halbgruppe (H, \star) gilt die Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in H$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a \star b = a \star c &\Rightarrow b = c \\ b \star a = c \star a &\Rightarrow b = c. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass in allen Gruppen die Kürzungsregel gilt.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Es sei (G, \bullet) eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und $f : \mathbb{N} \rightarrow G$ sei eine beliebige Folge. Beweisen Sie, dass es natürliche Zahlen n und k gibt, so dass

$$f(n) \bullet f(n+1) \bullet \dots \bullet f(n+k) = e$$

gilt.

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Elemente von S_5 :

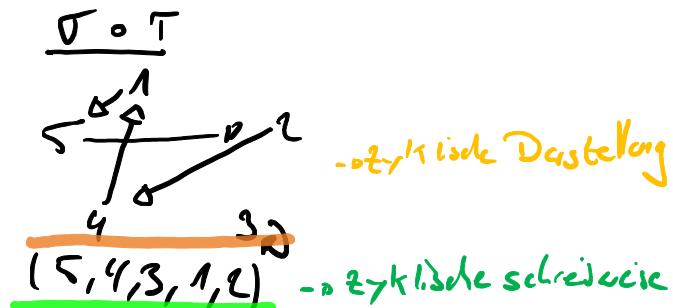
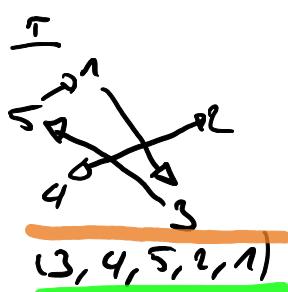
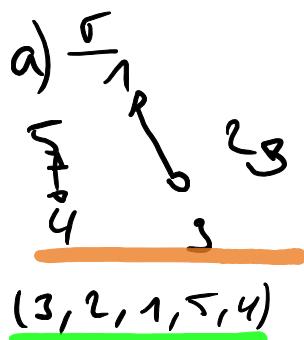
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

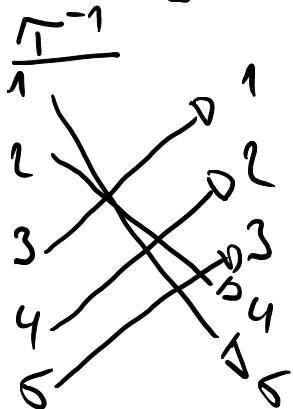
- (a) Geben Sie $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau$ in der Zyklenschreibweise an.
- (b) Bestimmen Sie τ^{-1} . Skizzieren Sie τ^{-1} als bipartiten graph.
- (c) Lösen Sie die Gleichung

$$\tau \circ x = \sigma$$

nach x auf.



b) $\tau^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$



c) $\tau \circ x = \sigma$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \circ x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(\tau \circ \tau^{-1})}_{\text{O dahe}} \circ x = \tau^{-1} \circ \sigma$$

x "allein"

Überlegung: Wenn wir das inverse Element von τ auf beiden Seiten (da Gleichung) multiplizieren, erhalten wir links das x , alleine da $\tau \circ \tau^{-1} = \text{leer Menge}$ & rechts $\sigma \circ \tau^{-1}$

$$x = \tau^{-1} \circ \sigma$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Es seien die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\ominus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $n \oplus k := \max\{n, k\}$ und $n \ominus k := \min\{n, k\}$ gegeben. Entscheiden Sie von den Strukturen (\mathbb{N}, \oplus) und (\mathbb{N}, \ominus) ob diese Halbgruppen, Monoide oder gar Gruppen sind.

(\mathbb{N}, \oplus) :

Monoïd, assoziativ ist es &
das neutrale Element existiert
und

Definitions:

- Halbgruppe: falls assoziativ
- Monoïd: falls (\mathbb{N}, \oplus) Halbgruppe und ein neutrales Element $e \in \mathbb{N}$ existiert
- Gruppe: falls (\mathbb{N}, \oplus) Monoïd und für alle $a \in \mathbb{N}$
ein $b \in \mathbb{N}$ existiert, so dass
 $a \cdot b = b \cdot a = e$ gilt

(\mathbb{N}, \ominus) :

Monoïd, assoziativ ist es &
das neutrale Element existiert
und

| - kommutative: falls (\mathbb{N}, \ominus) eine Gruppe & \ominus
Gruppe kommutativ ist

Aufgabe 3

Es sei \mathbb{E} die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} . Beweisen sie:

- (a) Die Struktur (\mathbb{E}, \cup) ist ein Monoid aber keine Gruppe.
- (b) Die Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ ist ein Monoid aber keine Gruppe.

Aufgabe 4

In einer Halbgruppe (H, \star) gilt die Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in H$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a \star b = a \star c &\Rightarrow b = c \\ b \star a = c \star a &\Rightarrow b = c. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass in allen Gruppen die Kürzungsregel gilt.