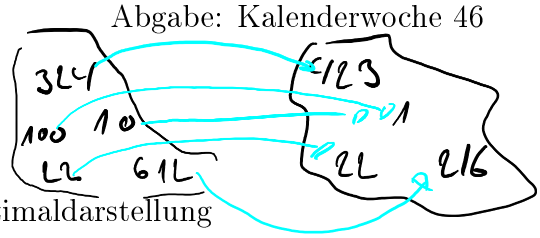
Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 4

Abgabe: Kalenderwoche 46



Aufgabe 1

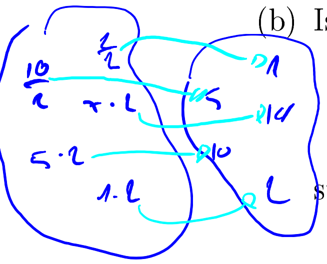
(a) Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wobei

$$F(n) = \text{Die Zahl } n \text{ in ihrer Dezimaldarstellung rückwärts gelesen (fürende Nullen gestrichen).}$$

Es gilt z.B. $F(324) = 423$ $F(0) = 0$ und $F(10) = 1$. Ist F surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort. Ja, denn es gibt keine nat. Zahl welche rückwärts nicht dargestellt werden kann

(b) Ist die Funktion

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ordnet jedes Element $\mathbb{N}$ einem Element von $\mathbb{N}$ zu



$$G : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \text{mit} \qquad G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 2x & \text{sonst.} \end{cases}$$

surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, denn jede nat. Zahl kann mit $\frac{x}{2}$ bzw. $2x$ dargestellt werden

Aufgabe 2

Wir betrachten die Mengen A und B, die wie folgt gegeben sind:

$A :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a' und 'b' gebildet werden können

$B :=$ endliche Wörter die mit Buchstaben 'a','b', 'c' gebildet werden können

Geben Sie je eine surjektive Funktion $F : A \to B$ und eine surjektive Funktion $G : B \to A$ an.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge Seq aller Tupel (beliebiger Länge) von natürlichen Zahlen. Es gilt beispielsweise $(2, 4, 55) \in Seq$, $(1, 1, 1, 1) \in Seq$ etc... Geben Sie eine surjektive Funktion $F : \mathbb{N} \to Seq$ an. Diskutieren Sie was so eine Funktion für die Abzählbarkeit der Menge Seq bedeutet.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie eine Abzählung von der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ähnlich wie wir dies für die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in der Vorlesung getan haben.

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Wenn X und Y abzählbar sind, dann ist auch $X \times Y$ abzählbar. *Hinweis:* Benützen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 6

Die Relation R ist auf der Menge $\{-20, -19, \ldots, 19, 20\}$, durch

$$xRy :\Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graphen.

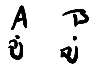
Aufgabe 7

Gegeben sei eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit:

$$X \sim Y \;:\Leftrightarrow\; X \subset Y \vee Y \subset X \vee X \cap Y = \varnothing.$$

Entscheiden Sie ob diese Relation reflexiv, (anti)symmetrisch und/oder transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8



Ist jede symmetrische und transitive Relation auch reflexiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

$A \to B$, $B \to A$ $\quad$ $A \to B \to C$, $A \to C$ $\quad$ $A \to A$, $B \to B$

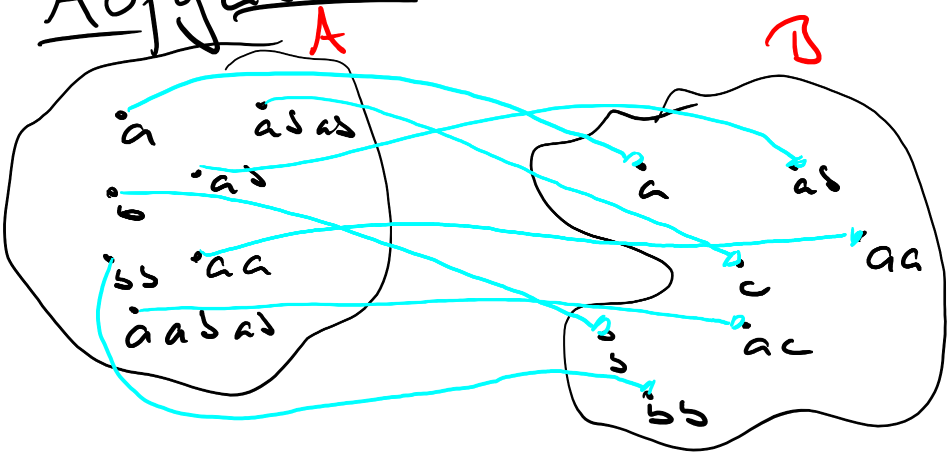
Aufgabe 9 ("Doppelbonusaufgabe")

Finden Sie eine Menge $M = \{X_i \mid i \in I\}$ von Mengen, die folgende Eigenschaften hat:

1. M ist überabzählbar (insbesondere muss also I überabzählbar sein).
2. Alle X_i sind unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$.
3. Für beliebige verschiedene $i, j \in I$ gilt, dass $X_i \cap X_j$ endlich ist.

Bemerkung: Eine Doppelbonusaufgabe ist eine Bonusaufgabe, die doppelt so schwer wie eine "normale" Bonus Aufgabe ist.

Aufgabe 2



$a, b \in A$

$a, b, c \in B$

$a \to a$ besser $\to$ $aa \to a$

$b \to b$ $\quad ab \to b$

$abab \to c$ $\quad ba \to c$

$ba \quad c$

Übergang: Angelehnt an das binär System muss eine gewisse Kombination definiert werden, welche <u>immer</u> eindeutig ist

$$f(a, a) = a$$
$$f(b, b) = b$$
$$f(a, b) = f(b, a) = c$$

$$F: A \to B$$
$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4)\, f(x_{n-1}, x_n)$$

$$g(a) = aa$$
$$g(b) = bb$$
$$g(c) = \emptyset$$
$$G: B \to A$$

Aufgabe 3

Abzählbarkeit: surjektiv oder $\emptyset$

Tupel: $(x_1, \dots x_n)$

Gleichheit v. Tupel: $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_k) :\Leftrightarrow n = k \wedge x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_k$

Menge v. Tupel: $\{(x_1, \dots, x_n) \dots (y_1, \dots, y_n)\}$

$F: \mathbb{N} \to seq$

$$f(x) = \begin{cases} a_1 \dots a_n & \text{falls } x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i+1} \\ & \text{PFZ von } x \\ (0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$1 \to (1)$

$2 \to (2)$

$12 \to (1,2)$

$1245 \to (1,2,4,5)$

$f(15) = (0)$

$f(30) = (0,0,0)$

$f(6) = (0,0)$

Primfaktorzerlegung:

$450 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \mapsto (0,1,1)$

$750 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \mapsto (0,0,2)$

$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \mapsto (1,1,1)$

Variante 2:

$f(1\underbrace{\boxed{00}}_{2}1\underbrace{\boxed{0}}_{1}1\underbrace{\boxed{000}}_{3}1\underbrace{}_{0}1\underbrace{\boxed{0}}_{1}1) = (2,1,3,0,1)$

Aufgabe 5

$\boxed{H: \mathbb{N} \twoheadrightarrow X \times Y}$

bauen!

$\mathbb{N} \xrightarrow{F} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \xrightarrow{g^X} X$

$\mathbb{N} \xrightarrow{g^Y} Y$

$\mathbb{N} \xrightarrow{G} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{F} X \times Y$

$F \circ G$

$F(\underbrace{n, m}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}) = (\underbrace{F_X(n)}_{\in X}, \underbrace{F_Y(m)}_{\in Y})$

$F(n_x, m_y) = (x, y)$

$F_X(n_x) = x$

$F_Y(m_y) = y$

Wissen:

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar $\Rightarrow G: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) X abzählbar $\Rightarrow F_X: \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$

3) Y abzählbar $\Rightarrow F_Y: \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y$

Wollen:

$X \times Y$

z.z.: $H: \mathbb{N} \twoheadrightarrow X \times Y$

Musterlösungen

1 a) $f(x) = 10$

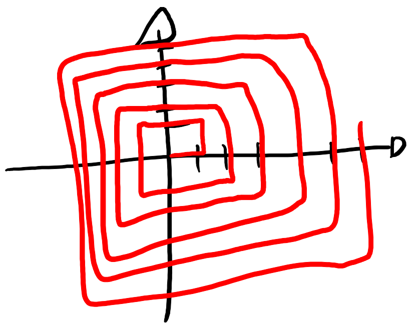
solch ein x gibt es nicht also ist f nicht surjektiv.

b) $G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x = 0 \mod 2 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$

$f(x) = y \iff x = 2y$

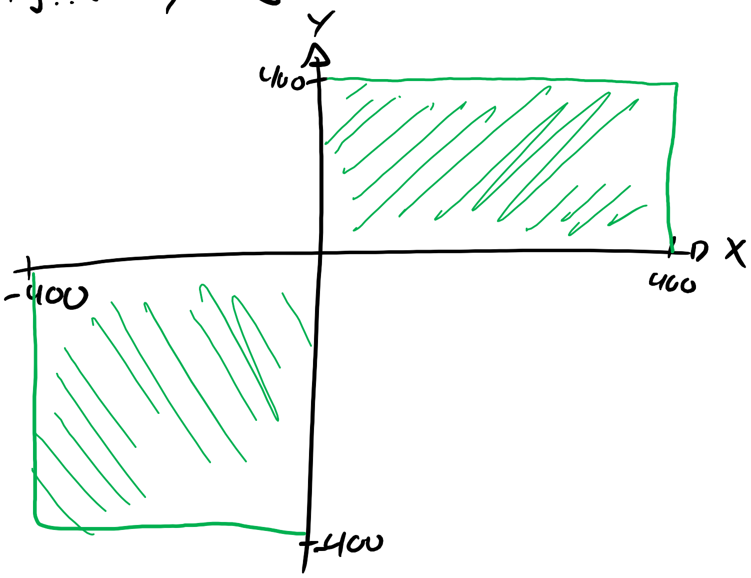
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektiv

4



6

$\{-20, -19 \ldots 19, 20\}$ $\quad x R y \iff x \cdot y \geq 0$



⑧

transitiv:

$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

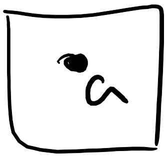
symmetrisch:

$aRb \Rightarrow bRa$

reflexiv

aRa

Gegenbeispiel:



⑦

$$A \sim B \Leftrightarrow \underbrace{(A \subset B)}_{①} \vee \underbrace{(B \subset A)}_{②} \vee \underbrace{(A \cap B = \emptyset)}_{③}$$

reflexiv: ja weil $A \subset A$ (z.B. ①)

symmetrisch: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$$A \sim B = \begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases}$$

$① \Rightarrow B \sim A$

$② \Rightarrow B \sim A$

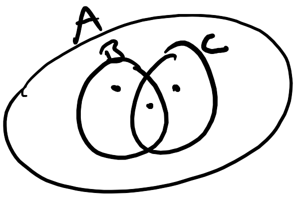
$③ \Rightarrow B \sim A$

Antisymmetrisch:

$A \sim B \wedge B \sim A \cancel{\Rightarrow} B = A$

↳ d.h. nicht antisymmetrisch

transitiv:



$B \sim A \wedge A \sim C$

$\cancel{\Rightarrow B \sim C}$

↳ daraus folgt nicht transitiv