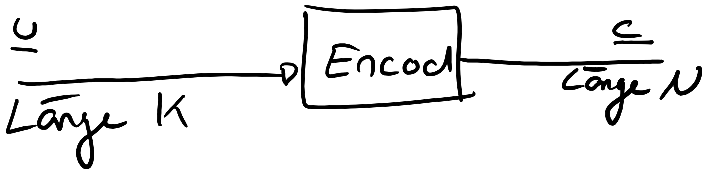
Blockcodes

Blockcodes (N, K) $\quad R = \frac{K}{N}$



linear: Summe von 2 Codeworten ist ein Codewort

zyklisch: Jede Permutation von einem Codewort ist ein Codewort

Bsp: 10|00111111

↳ 0011111110 ⇒ Permutation

systematisch: Prüfsumme wird abgeschnitten, das wo übrig bleibt ist das Codewort

Bsp: (3,2) Blockcode

[000] [101] [110] [011] → linear

→ zyklisch

→ systematisch

$\underline{u}$	$\underline{c}$
(00)	(000)
(01)	(011)
(10)	(101)
(11)	(110)

Hamming-Gewicht

$w_H(\underline{c})$ ⇒ Anzahl '1' in Codewort $\underline{c}$

Bsp.: $w_H([101]) = 2$

Hamming-Distanz

$d_H(\underline{c}_1, \underline{c}_2)$ ⇒ Anzahl Stellen wo sich $\underline{c}_1$ & $\underline{c}_2$ unterscheiden

Bsp.: $d_H([110], [101]) = 2$

für linearen (N, K) Block-code

$$d_{min} = \min_{i \neq j} d_H(\underline{c}_i, \underline{c}_j)$$

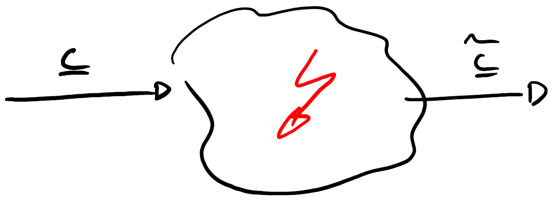
$$= \min_{i \neq j} w_H(\underline{c}_i + \underline{c}_j)$$

$$= \min_{k \neq 0} w_H(\underline{c}_k)$$

$$= w_{min} \quad \text{(exkl. 00-codewort)}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Übertragungsfehler



$\underline{c} = [110]$

$\underline{e} = [100]$

$\tilde{\underline{c}} = [010]$

Fehlerdetektion (für lineare (N,K) Codes)

Alle Fehlermuster $\underline{e}$ mit $d_{min} - 1$ Bit sind sicher erkennbar

$K \rightarrow 2^K$, davon $1 \times [00\ldots0]$

$2^K - 1$ Fehlermuster, die ein gültiges Codewort ergeben

Fehlerkorrektur (für lin (N,K) Blockcodes)

Alle Fehlermuster mit $\max \left[\frac{d_{min} - 1}{2}\right]$ Bitfehler sind sicher richtig korrigierbar

Korrektur im Sinne des kleinsten Fehlervektors, d.h. $\min w_H(\underline{e}_k) \rightarrow \hat{\underline{c}} = \tilde{\underline{c}} + \underline{e}_k$

(5, 2) Block code

$$\left.\begin{matrix}(00000)\\(00111)\\(11001)\\(11110)\end{matrix}\right\}$$ ⟶ linear

⟶ 2 Fehler sicher erkennbar

⟶ 1 Fehler sicher korrigierbar

Bsp.:

$\underline{c} = [1\,1\,1\,1\,0]$

$\underline{e} = [0\,0\,1\,0\,0]$

$\underline{\tilde{c}} = [1\,1\,0\,1\,0]$ ⟶

(00000)	$d_H = 3$
(00111)	$d_H = 4$
(11001)	$d_H = 2$
(11110)	$d_H = 1$

⟶ kleinst mögliche Fehlercode

(N, K, t) Blockcode

⟶ kann t Fehler sicher korrigieren

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Wsk dass ein solcher (N, K, t) Blockcode über einen BSC korrekt überträgt:

$$P_0 = (1 - \varepsilon)^N$$

$$P_1 = \binom{N}{1} \varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)^{N-1}$$

$\vdots$

$$\boxed{P_{\leq t} = \sum_{K=0}^{t} \binom{N}{K} \cdot \varepsilon^K \cdot (1 - \varepsilon)^{N-K}}$$

Wichtiges zu Vektorrechnung

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$$ ↯ nicht dieselbe Dimension

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 6 + 4 \cdot 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 44 & 54 \\ 47 & 61 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$2 \cdot 8 + 5 \cdot 9$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

! Verwendung der 1-Bit-Arithmetik !

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alle $\underline{u}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Alle Codewort Möglichkeiten

wenn Einheitsmatrix vorhanden/gebraucht ist der Code auch systematisch

---

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2x Einheitsmatrix
↳ verdoppelt das u

K: 2
N: 4
R: $\frac{1}{2}$

Parity-Check-Matrix

▷ systematische Abbildungen

$G = [\underbrace{I}_{K \times K} \ \underbrace{P}_{K \times N-K}]$ $\Rightarrow$ Prüfmatrix $H = [P^T \ I]$

$G = [P \ I]$ $\Rightarrow$ $H = [I \ P^T]$

Bsp.:

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\quad\ \ I \quad P$

$\underline{c} = [0\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 1\ 1\ 1]$

$[0\ 1\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{[0, 0]}_{\text{Syndrom}}$ $\rightarrow$ gültiges Codewort

Syndrom $= 0$ für gültiges Codewort

Bsp.:

$$[0\ \ 0\ \ 1\ \ 1] \cdot \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} = \underbrace{[1\ \ 1]} \rightarrow \text{ungültiges Codewort da nicht } 0$$

Fehler

Syndrom $\neq 0$ für ungültiges Codewort

Repetition:

(4, 2) Blockcode

- $N = 4$
- $K = 2$
- $R = 1/2$
- linear, falls es eine Generatormatrix gibt
- systematisch, falls eine Einheitsmatrix in G vorkommt

Bsp:

(7,4) Hamming Blockcode:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{}_{\text{Einh.matrix } I_{4\times4}}$ $\underbrace{}_{P_{4\times3}}$

- 7 Bit ⇒ 128 verschiedene Bitmuster mit 7 Bit, davon
- 4 Bit (Informationen) ⇒ sind nur 16 benutzt
- $R = \frac{4}{7}$
- 1 Fehler korrigierbar

$\underline{u} = [0\ 1\ 1\ 0]$

$$[0\ 1\ 1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(letzte drei Spalten: Einh.-matrix)

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0]$$

⇒ Syndrom = 0
↳ gültiges Wort

Fehler erkennen

$$[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 1\ 1]$$

⇒ Syndrom ≠ 0
↳ ungültiges Wort

$$\tilde{\underline{c}} = \underline{c} + \underline{e} \longrightarrow \tilde{\underline{c}} \cdot H^T = (\underline{c} + \underline{e}) \cdot H^T$$

$$= \underbrace{\underline{c} \cdot H^T}_{0} + \underline{e} \cdot H^T$$

$$= \underline{e} \cdot H^T$$

Syndrom

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fehlervektor + Syndrom

$$[\,|\,0\ 1\ 1\ 0\,|\,0\ 0\ 1\,]$$

Syndromtabelle:

$\underline{c}$	$\underline{e}$
0 0 0	0 0 0 0 0 0 0
1 0 1	1 0 0 0 0 0 0
1 1 0	0 1 0 0 0 0 0
1 1 1	0 0 1 0 0 0 0
0 1 1	0 0 0 1 0 0 0
1 0 0	0 0 0 0 1 0 0
0 1 0	0 0 0 0 0 1 0
0 0 1	0 0 0 0 0 0 1