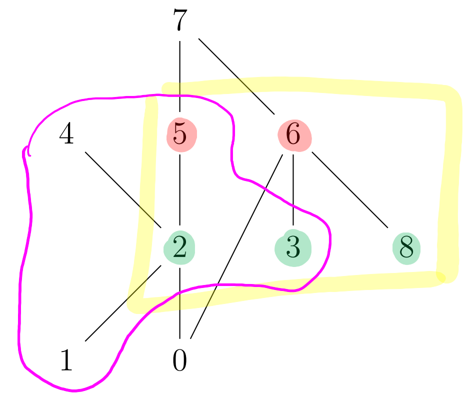
Grundlagen und diskrete Mathematik
Übung 5

Abgabe: Kalenderwoche 48

Aufgabe 1

Gegeben sei das Hasse-Diagramm der Relation R wie folgt:

b) 0, 1, 3
0, 1, 8
4, 5, 6
1, 4, 7
2, 3, 8
3, 4, 5



(a) Geben Sie alle minimalen und alle maximalen Elemente von der Menge $\{2, 5, 6, 3, 8\}$ an.

(b) Geben Sie drei paarweise unvergleichbare Elemente an.

$\to (x<y) \wedge (x>0) \wedge (y<6)$

(c) Schreiben Sie die Menge $R \cap \{(x, y) \mid 0 < x < y < 6\}$ in aufzählender Schreibweise auf. $\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\}$

Aufgabe 2

Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tiere an, so dass die Äquivalenzklassen genau den "Tierarten" entsprechen.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\, (f(x) \leq g(x)).$$

(a) Geben Sie zwei Funktionen f und g mit $f \preceq g$ an.

(b) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ an, die eine echt aufsteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$f_0 \preceq f_1 \preceq \ldots$$

(c) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen $g_0, g_1, \ldots$ an, die eine echt absteigende Folge in $\preceq$ bilden.

$$g_0 \succeq g_1 \succeq \ldots$$

! Funktionen sind genau dann untersch. wenn für mind. ein Input ein anderer output erfolgt. !

Aufgabe 4

(a) Ist jede endliche totale Ordnung eine Wohlordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die "normale" $\leq$-Relation eine Wohlordnung auf der Menge $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(c)
$$n^2 + n \text{ ist gerade}$$

(d)
$$a \in \mathbb{N}_{>1} \Rightarrow a^n - 1 \text{ ist durch } a - 1 \text{ teilbar}$$

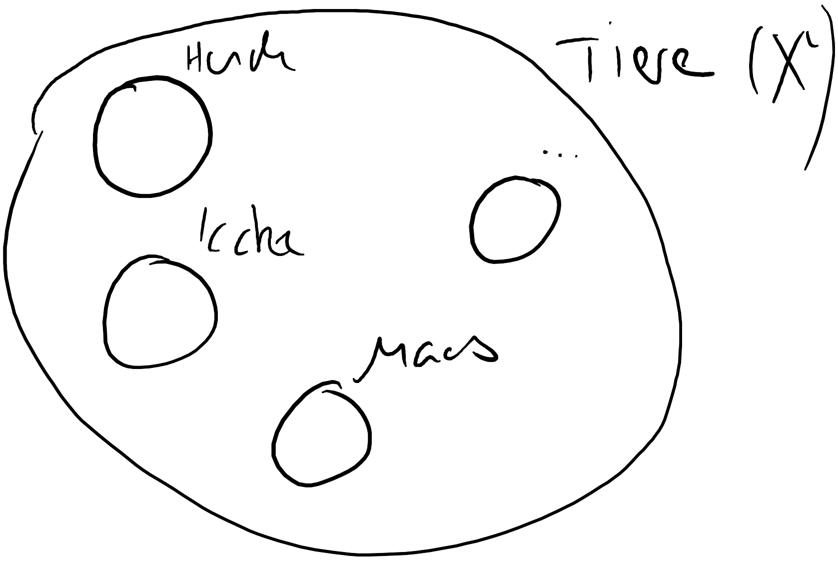
Aufgabe 6

Die Fibonacci Folge $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist rekursiv wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass aufeinander folgende Glieder der Fibonacci Folge stets teilerfremd sind.

Aufgabe 2 Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Tiere an, so dass die Äquivalenzklassen genau den Tierarten entsprechen



$$X^\sim = \{T_n \subseteq X^\sim \mid T_n \neq T_{n-1}\}$$

Aufgabe 3 Gegeben sei die Halbordnung $\preceq$ auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:
$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}\ (f(x) \leq g(x))$.
(a) Geben Sie zwei Funktionen f und g mit $f \preceq g$ an.

(b) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen f0, f1, . . . an, die eine echt aufsteigende Folge in $\preceq$ bilden.
$f_0 \preceq f_1 \preceq \ldots$

(c) Geben Sie paarweise verschiedene Funktionen g0, g1, . . . an, die eine echt absteigende Folge in $\preceq$ bilden.
$g_0 \succeq g_1 \quad \ldots$

Halbordnung = transitiv, reflexiv, antisymmetrisch

transitiv = $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

reflexiv = xRx

antisymmetrisch = $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

$f \preceq g$ = f steht in Halbordnung zu g

a) $f(x) = x$
$g(x) = x + 1$

x	g(x)
0	1
-1	0
-2	-1

x	g(x)
0	-1
1	0
2	1

b) $f(x) = x + 1$

c) $g(x) = \max(x-n, 0)$ (~~$g(0) = 0 - 1 = -1 \quad g(1) = 1 - 1 = 0 \quad g(2) = 2 - 1 = 1$~~)

Aufgabe 4
(a) Ist jede endliche totale Ordnung eine Wohlordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die "normale" ≤-Relation eine Wohlordnung auf der Menge Q? Begründen Sie Ihre Antwort.

totale Ordnung: R in Halbordnung & jedes Element von R vergleichbar ist. Bsp.: Meng Q

Wohlordnung: R eine totale Ordnung & jede Teilmenge ($X \neq \emptyset$) ein minimales Element hat.
Bsp.: keine unendliche absteigende Kette

endlich: wenn eine natürliche Zahl „n" & eine Darstellung in Form $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ gibt.

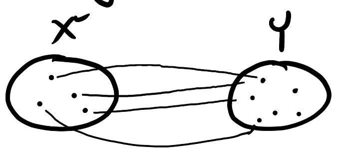
unendlich: nicht endliche Mengen

abzählbar: surjektive Abbildung $F: \mathbb{N} \to X$ existiert oder $X = \emptyset$

abzählbar unendlich: wenn X abzählbar & unendlich ist

überabzählbar: wenn die Menge nicht abzählbar ist

surjektiv: für jeden Wert in der Menge X gibt es einen Wert in der Menge Y.



Teilmenge: X ist eine Teilmenge von Y, wenn jedes Element von X auch ein Element von Y ist

$$X \subset Y :\Leftrightarrow \forall x \, (x \in X \to x \in Y)$$

$$Y = \{2, 4, 7, 10, 12\}$$

echte Teilmenge: falls X eine von Y vers. Teilmenge von Y ist.

$$X \subsetneq Y :\Leftrightarrow \boxed{X \subset Y} \wedge \boxed{X \neq Y}$$ → mind. 1 Element welches nicht in Y vorkommt.

Mengengleichheit: zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

$$X = Y \Leftrightarrow \forall z \, (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)$$

Vorlösen:

a)

endlich: nat. Zahl „n" Darstellung $x = \{x_1, \dots x_n\}$

totale Ordnung: Halbordnung & jedes Element vergleichbar

Wohlordnung: totale Ordnung + Minimum

Halbordnung: transitiv, antisymmetrisch, reflexiv

Ja, denn in einer endlichen totalen Ordnung sind alle Elemente vergleichbar & es gibt ein Minimum. } nicht ausreichend!

Da jede endliche Menge ein minimales Element hat. Ist eine endliche totale Ordnung per Definition eine Wohlordnung.

Denn wenn es keine endliche Menge wäre so gäbe es nach dem minimalen Element, ein noch kleineres Element. & so könnte man dies beliebig oft weiterführen

B) Menge Q $-\infty$ somit kein minimales Element

Aufgabe 4

(a) Ist jede endliche totale Ordnung eine Wohlordnung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist die "normale" ≤-Relation eine Wohlordnung auf der Menge Q? Begründen Sie Ihre Antwort.

r-unvergleichbar: falls weder xRy noch yRx gilt

r-minimal: kein anderes Element $y \in X$ yRx gibt

r-maximal: kein anderes Element $y \in X$ xRy gibt.

4a) Ja, denn in einer endlichen totalen Ordnung sind alle Elemente vergleichbar & es gibt ein Minimum. } nicht ausreichend!

4a - verbessert)

Endlichkeit: Menge ist definiert mit

$$X = \{a_0, a_1, a_2, \dots a_n\}$$

$n \in \mathbb{N}$

endliche & unendliche Menge

totale Ordnung: Halbordnung & vergleichbar

endlich

Wohlordnung: totale Ordnung & minimales Element

Da jede endliche Menge ein minimales Element hat. Ist eine endliche totale Ordnung per Definition eine Wohlordnung.

Denn wenn es keine endliche Menge wäre so gäbe es nach dem minimalen Element, ein noch kleineres Element. & so könnte man dies beliebig oft weiterführen

4B) Nein - Begründung: Die Menge Q ist im positiven und negativen unendlich, hierbei kann kein minimales Element bestimmt werden.

Warum endliche Menge ein Minimum hat.

X endlich (nicht leer) $\Rightarrow$ X hat minimale Elemente

Induktion nach $|X|$

$|X| = 1$ $\quad X = \{x_1\} \Rightarrow x_1$ ist minimal in X

$|X| = n+1$ $\quad X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$

$\{x_2, \dots, x_{n+1}\}$ hat min. Element
$\overset{\text{I.A.}}{\Rightarrow}$ hat minimales Element $\quad x_2 = $ min Elem.

<u>1. Fall</u> $x_1 \leq x_2$ $\quad x_1 = $ minimal

<u>2. Fall</u> $\neg(x_1 \leq x_2)$ $\quad x_2 = $ minimal

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit Induktion, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(c)

$$n^2 + n \text{ ist gerade}$$

(d)

$$a \in \mathbb{N}_{>1} \Rightarrow a^n - 1 \text{ ist durch } a-1 \text{ teilbar}$$

Induktionsverankerung (I.V.): $A(0)$

Induktionsschritt (I.S.): $\forall n \in \mathbb{N}\ (\underbrace{A(n)}_{\text{Induktions-annahme}} \Rightarrow A(n+1))$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Angabe $n \geq n_0$ notwendig?

↳ wird beim Nachweis $A(n+1)$ als Annahme verwendet

1. Induktionsverankerung
   ↳ „kleinste Zahl einsetzen"
2. Induktionsbehauptung
   ↳ Behauptung nochmals aufschreiben
3. Induktionsschritt
   ↳ Induktionsbehauptung benutzen!

a) Musterbeispiel:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}} \longrightarrow A(n) \text{ ist gesucht}$$

1. Schritt = Induktionsverankerung für kleinstes Element

$n = 1$

LS: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$

RS: $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

2. Induktionsbehauptung → Behauptung für Beweis notwendig!

$\exists n \in \mathbb{N}, n > 0: \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

„für eine natürliche Zahl grösser 0 gilt, die Summe über i für i von 1 bis n ist gleich n mal n + 1 halbe"

3. Induktionsschritt

z.z.: Die Behauptung A(n+1) stimmt, wenn sie für A(n) stimmt.

(Dass sie für A(n) stimmt haben wir in der Induktionsbehauptung angenommen & dürfen wir hierfür benutzen)

3.1: einsetzen

LS:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i$$

nun müssen wir das letzte Glied aus der Summe ziehen

⇒ d.h. wir summieren bis n & schreiben den Rest als plus dahinter

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

↳ identisch mit Behauptung

Wenn die Induktionsbehauptung stimmt, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2}$$

Wenn Behauptung & Schritt übereinstimmen, dann gilt der Beweis als erfüllt

b) $\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$

<u>$n \to n+1$:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 + 2(n+1)-1$$

$$\overset{I.A.}{=} n^2+2n+1$$

c) n^2+n ist gerade

$$(n+1)^2+(n+1) = n^2+2n+1+n+1$$

$$= (n^2+n)+2(n+1)$$