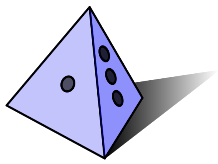
Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Information und Entropie



Ein Würfel mit dreieckigen Seiten hat vier Flächen mit den Augenzahlen 1 bis 4. In einer Datenquelle, die zweistellige Zufallszahlen erzeugt, werden gleichzeitig zwei derartige Würfel geworfen, beispielsweise ein roter und ein blauer. Aus jedem Wurf entsteht eine Zufallszahl. Die Augenzahlen der beiden Würfel bezeichnen wir mit a und b, wobei $a \leq b$ sei. In jeder Zufallszahl S am Ausgang der Quelle[1] ist a die Zehnerziffer und b die Einerziffer.

1. Bestimmen Sie alle möglichen Ereignisse s_k der Datenquelle ($k = 1 \ldots K$).
2. Ermitteln Sie alle Wahrscheinlichkeiten $P(s_k)$.
3. Berechnen Sie den Erwartungswert $E\{S\}$ der Zufallszahl[2].
4. Berechnen Sie die beiden Informationsgehalte $I(s_i)$ und $I(s_j)$ für die Ereignisse $s_i = 22$ und $s_j = 34$.
5. Berechnen Sie die Entropie $H(S)$ der Quelle, resp. der Zufallsvariable S.
6. Vergleichen Sie die Entropie $H(S)$ mit dem theoretischen Maximum der Entropie H_{max} einer Quelle mit K Ereignissen.
7. Wir nehmen nun an, dass die Quelle die Zufallszahlen im BCD-Code ausgibt. Wie gross ist die Redundanz R dieses Codes?

Zahl 11:
1. Wurf = $\frac{1}{4}$ chance auf 1
2. Wurf = $\frac{1}{4}$ chance auf 1

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Zahl 12:
1. Wurf = $\frac{2}{4}$ chance auf 1 oder 2
2. Wurf = $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

[1] Wir bezeichnen S auch als *Zufallsvariable*, welche die Zufallswerte s_k annehmen kann. Die Zufallswerte nennen wir auch *Ereignisse*.

[2] Als Erwartungswert bezeichnen wir jenen Wert, den wir als Mittelwert aus einer sehr grossen Zahl von Ereignissen erhalten.

1) $a = \{1,2,3,4\}$ $b = \{1,2,3,4\}$ $a \leq b$

$S_k = (11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44)$

2) Für Doppelzahlen $= \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$ für alle anderen $\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

3) $E(S) = \sum S_K \cdot P(s_k) = 11 \cdot \frac{1}{16} + 12 \cdot \frac{1}{8} + 13 \cdot \frac{1}{8} + 14 \cdot \frac{1}{8} + 22 \cdot \frac{1}{16} + 23 \cdot \frac{1}{8} + 24 \cdot \frac{1}{8} + 33 \cdot \frac{1}{16} + 34 \cdot \frac{1}{8} + 44 \cdot \frac{1}{16} = \underline{\underline{21.875}}$

4) $I(22) = \log_2\left(\frac{1}{1/16}\right) = 4$ $\times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$I(34) = \log_2\left(\frac{1}{1/8}\right) = 3$ $\times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

5) $H = 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{8} = \underline{\underline{3.25}}$

6) wenn $H_{max} \Rightarrow P(x)$ ist für alle Ereignisse gleich
in diesem Bsp.: $\frac{1}{10} \Rightarrow I = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{10}}\right) = 3.32192...$

7) 11011001_b

217_d

1ner Ziffer $= 7d = 0111_b$

10ner " $= 1d = 0001_b$

100er " $= 2d = 0010_b$

$\Rightarrow$ BCD: $0010'0001'0111_{BCD}$

BCD-Bsp. ←

$P(x) \cdot l(x) + P(x_2) \cdot l(x_2)$

Redundant $= L - H$

$11 = 0001'0001_{BCD}$ $22 = 0010'0010_{BCD}$ $33 = 0011'0011_{BCD}$

$12 = 0001'0010_{BCD}$ $23 = 0010'0011_{BCD}$ $34 = 0011'0100_{BCD}$

$13 = 0001'0011_{BCD}$ $24 = 0010'0100_{BCD}$ $44 = 0100'0100_{BCD}$

$14 = 0001'0100_{BCD}$

L für $11, 22, 33, 44$ $= \left(\frac{1}{16} \cdot 8\right) 4 = 2$

für andere $= \left(\frac{1}{8} \cdot 8\right) 6 = 6$ $\Big\} = 8$

$H = 3.25 \Rightarrow R = 8 - 3.25 = 4.75$

$\Rightarrow R > 0$, d.h. viel mehr Zeichen als notwendig