Dr. Jürg M. Stettbacher
Neugutstrasse 54
CH-8600 Dübendorf

Telefon: +41 43 299 57 23
Email: dsp@stettbacher.ch

Übung

Kanalcodierung: Block Codes

1. Repetition-Code R^3

   (a) Zeigen Sie, dass ein Repetition-Code R^3 linear und systematisch ist.

   (b) Wie lautet die Generator-Matrix G des R^3 Codes?

   (c) Wie lautet die Parity-Check-Matrix H zur Generator-Matrix G?

   (d) Erstellen sie für den R^3 Code eine Tabelle, die jedem Syndromen $\underline{s}$ den entsprechenden Fehlervektor $\underline{e}$ gegenüber stellt.

   (e) Überprüfen Sie das Bitmuster $\underline{\widetilde{c}} = [110]$ mit der Syndromtabelle und decodieren Sie die Schätzung $\underline{\widehat{u}}$ für $\underline{u}$.

2. Fehlerkorrektur
   Gegeben ist der folgende lineare Code:

$$C = \{\, (00000000)\,,\ (11010110)\,,\ (10111001)\,,\ (01101111)\}$$

   (a) Geben Sie für diesen Code die Generator-Matrix G an, so dass der Code systematisch wird. Überlegen Sie zuerst, welche Dimensionen K und N die Matrix haben muss.

   (b) Wieviele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrekt erkannt werden?

   (c) Wieviele Bitfehler können mit dem Code sicher richtig korrigiert werden?

   (d) Wieviele verschiedene Syndrome $\underline{s}$ (resp. Syndromwerte) gibt es mit diesem Code?

   (e) Wieviele Syndrome (resp. Syndromwerte) sind notwendig, um alle Fehler bis zur oben berechneten Anzahl zu korrigieren?

3. Einfluss der Blockgrösse
   Wir betrachten einen BSC mit BER $\varepsilon = 0.01$. Dann wollen wir zwei Block Codes mit derselben Coderate $R = 4/7$ miteinander vergleichen.

   (a) Erfüllen diese Codes das Kanalcodierungs-Theorem?

   (b) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, in der jede Zeile für einen der beiden Codes steht. t ist dabei die Anzahl Bitfehler, die der Code sicher korrigieren kann, P_N bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort mit N Bits korrekt übertragen wird und P_{1200} sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 1200 Nutzbits korrekt übertragen werden. Achten Sie darauf, dass Sie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit genügend Nachkommastellen durchführen.

N	K	t	P_N	P_{1200}
7		1		
21		2		

   (c) Welches Fazit ziehen Sie?

1. Repetition-Code R^3

   (a) Zeigen Sie, dass ein Repetition-Code R^3 linear und systematisch ist.

   (b) Wie lautet die Generator-Matrix G des R^3 Codes?

   (c) Wie lautet die Parity-Check-Matrix H zur Generator-Matrix G?

   (d) Erstellen sie für den R^3 Code eine Tabelle, die jedem Syndromen $\underline{s}$ den entsprechenden Fehlervektor $\underline{e}$ gegenüber stellt.

   (e) Überprüfen Sie das Bitmuster $\underline{\tilde{c}} = [110]$ mit der Syndromtabelle und decodieren Sie die Schätzung $\underline{\hat{u}}$ für $\underline{u}$.

a) $\mathbb{R}^3$ = [000] & [111] wären zulässig

linear: Summe von 2 Codewörtern ergibt wieder ein Codewort.

$$\begin{array}{c} [111] \\ [000] \\ \hline [111] \end{array} \checkmark$$

systematisch: falls die Informationsbits (Informationswort $\underline{u}$) 'en bloc' in Codewort $\underline{c}$ ersichtlich ist, ist der Block-Code systematisch

Parity-Bits check	Informationswort

b) $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) (3,1) Blockcode

I = 1

P = 2

Generatormatrix = $\begin{array}{cc} I & P \\ \end{array}$ $[1\ 1\ 1]$ $\longrightarrow$ $H = [P^T\ I]$

$$\boxed{H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

d)

Anzahl Syndrome $= 2^{N-K} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

Syndrome	e
[0 0]	000
[1 1]	100
[1 0]	010
[0 1]	001

$\underbrace{c \cdot H^T}_{0} + e \cdot H^T$

e)

$\underline{c} = [1\,1\,0] \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{01}$

$\Rightarrow$ Syndrom 4

$\Rightarrow$ e = 001

$\Rightarrow$ gesendet = [1 1 1]

1-Bit-Arithmetik

Bei der 1-Bit-Arithmetik gilt:

$1 \cdot 1 = 1$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

$1 + 1 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$0 + 0 = 0$

2. Fehlerkorrektur

Gegeben ist der folgende lineare Code:

$$C = \{\, (00000000)\,,\ (11010110)\,,\ (10111001)\,,\ (01101111)\}$$

(a) Geben Sie für diesen Code die Generator-Matrix G an, so dass der Code systematisch wird. Überlegen Sie zuerst, welche Dimensionen K und N die Matrix haben muss.

(b) Wieviele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrekt erkannt werden?

(c) Wieviele Bitfehler können mit dem Code sicher richtig korrigiert werden?

(d) Wieviele verschiedene Syndrome $\underline{s}$ (resp. Syndromwerte) gibt es mit diesem Code?

(e) Wieviele Syndrome (resp. Syndromwerte) sind notwendig, um alle Fehler bis zur oben berechneten Anzahl zu korrigieren?

a)

$N = 8$

$K = 2$, da 2^K gleich die Anzahl der Codewörter ist

$2^k = 4 \rightarrow k = 2$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$G = [\, I_{k.k} \text{ Parity Bits} \,]$

$I = \text{Dim } k.k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da durch das durch die Einheitsmatrix jeweils die eine Zeile und die andere und bei der Summe (11) von sich aus erhält ein Codewort

2. Fehlerkorrektur

Gegeben ist der folgende lineare Code: $2^K =$ Anz. Codeworte

$$C = \{\,(00000000)\,,\ (11010110)\,,\ (10111001)\,,\ (01101111)\}$$

(a) Geben Sie für diesen Code die Generator-Matrix G an, so dass der Code systematisch wird. Überlegen Sie zuerst, welche Dimensionen K und N die Matrix haben muss.

(b) Wieviele Bitfehler können mit diesem Code sicher korrekt erkannt werden?

(c) Wieviele Bitfehler können mit dem Code sicher richtig korrigiert werden?

(d) Wieviele verschiedene Syndrome $\underline{s}$ (resp. Syndromwerte) gibt es mit diesem Code?

(e) Wieviele Syndrome (resp. Syndromwerte) sind notwendig, um alle Fehler bis zur oben berechneten Anzahl zu korrigieren? Jeder lineare Code hat eine Generatormatrix

b) $d_{min} =$ mind. Anz. 1 in Codewort $\Rightarrow 5$

Anzahl erkennte Fehler $\Rightarrow d_{min} - 1 = \underline{\underline{4}}$

c)

korrigierbare Fehler: $\dfrac{d_{min}-1}{2} = \underline{\underline{2}}$

d)

Paritycheck Matrix $H = P^T \cdot \underline{I}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2^{N-K} = 2^6 = \underline{\underline{64}}$ Syndrome

e)

0 Bit =

1 Bit =

2 Bit = $\binom{7}{2}$

$\underline{37 \text{ Bit}}$

3. Einfluss der Blockgrösse

Wir betrachten einen BSC mit BER $\varepsilon = 0.01$. Dann wollen wir zwei Block Codes mit derselben Coderate $R = 4/7$ miteinander vergleichen.

(a) Erfüllen diese Codes das Kanalcodierungs-Theorem?

(b) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, in der jede Zeile für einen der beiden Codes steht. t ist dabei die Anzahl Bitfehler, die der Code sicher korrigieren kann, P_N bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort mit N Bits korrekt übertragen wird und P_{1200} sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 1200 Nutzbits korrekt übertragen werden. Achten Sie darauf, dass Sie die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit genügend Nachkommastellen durchführen.

N	K	t	P_N	P_{1200}
7	4	1	~ 1	0.5322
21	12	2	~ 1	0.8168

(c) Welches Fazit ziehen Sie?

BER $\to$ Bit Error Rate $\varepsilon = 0.01$

$N = 7,\ K = 4,\ R = \frac{4}{7}$

Anzahl Codeworte $2^K = 2^4 = 16$

$C_{BSC} = 1 - h(\varepsilon)$

$h = 0.0808\ldots$ Bit/Symbol

$$h(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot \log_2 \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$C_{BSC} = 0.919$ Bit/Symbol

a)

$R = \frac{4}{7} = 0.571$ Bit/Symbol ; $C_{BSC} = 0.919$ Bit/Symbol

Weil $R < C \Rightarrow$ Es gibt mind. 1 Code mit dem die Fehlerwsk. beliebig klein wird. Deshalb erfüllt der Code das Theorem

b)

$$P_{(f)} = \sum_{i=0}^{f} \binom{N}{i} \cdot \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{N-i}$$ (f Fehler wenn N Bit gesendet)

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{1} \binom{7}{i} \cdot \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{7-i} \Rightarrow 0.9979$$

$R = \frac{4}{7} \Rightarrow$ Pro 4 Nutzbit, 7 codebits $\Rightarrow$ für 1200 Nutzbit $\to$ 2100 code bit

$\Rightarrow \frac{1200}{4} = 300$

$$\Rightarrow P = \sum_{i=0}^{1} \binom{300}{i} \cdot 0.01^i \cdot (1-0.01)^{300-i} = 1.5 \cdot 10^{-8}$$

$(P_N)^{\text{Anzahl Codewörter}} =$

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{N}{i} \cdot \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{N-i} = 0.9988...$$

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{2100}{i} \cdot \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{2100-i} = 1.69 \cdot 10^{-7}$$

d)

Je grösser f, desto grösser die Wsk, dass eine grosse Anzahl N Bit korrekt empfangen wird.

Bei gegebenem R muss man die Länge des Codes vergrössern, um die Wsk einer korrekten Übertragung zu steigern