Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

Zusatzskript MANIT1

INHALTSVERZEICHNIS

3 Einführung in die Finanzmathematik 2

3.1 Zins- und Zinseszinsrechnung 2
3.1.1 Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik 2
3.1.2 Einfache Verzinsung 3
3.1.3 Zinseszinsrechnung 4
3.1.4 Gemischte Verzinsung 6
3.1.5 Stetige Verzinsung 6

3.2 Rentenrechnung 6
3.2.1 Nachschüssige, endliche Rente 7
3.2.2 Vorschüssige, endliche Rente 8
3.2.3 Ewige Rente 9

4 Aufgaben 11

4.1 Aufgaben 11

4.2 Lösungen 15

3 Einführung in die Finanzmathematik

3.1 Zins- und Zinseszinsrechnung

3.1.1 Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Bei der Lösung finanzmathematischer Aufgaben sind regelmässig Zahlungen (Engl.: Cash flows) oder Werte (Kontostände, Kapitalien) zu vergleichen oder zu saldieren, welche nicht zum gleichen Zeitpunkt stattfinden resp. vorherrschen. Aus finanzmathematischer Sicht ist dabei die Unterscheidung, ob es sich um Zahlungen oder Werte handelt irrelevant. Wir gehen in den folgenden Ausführungen stets davon aus, dass eine Zahlung in einen entsprechenden Wert resp. ein Wert in eine entsprechende Zahlung umgewandelt werden kann. Wichtig hingegen ist die konsequente zeitliche Unterscheidung, wann Zahlungen stattfinden.

Denn eine uns heute zufliessende Zahlung von CHF 1‘000 kann beispielsweise nicht den gleichen Wert wie eine Zahlung von CHF 1‘000 in einem Jahr haben. Der Grund liegt (ohne Beachtung von Kriterien wie Liquiditätsbedarf und Risiko) im Zeitwert des Geldes. Wir könnten nämlich die uns heute zufliessenden CHF 1‘000 zinstragend anlegen und uns in einem Jahr einen um den Zins erhöhten Betrag auszahlen lassen. Wenn uns aber in einem Jahr mehr als CHF 1‘000 ausbezahlt würden, wären wir unter Umständen bereit, auf die heutige Bezahlung von CHF 1‘000 zu verzichten. Die Frage nach diesem Mehrwert ist der eigentliche Gegenstand der Zinsrechnung.

Wir werden unten 2 Methoden der Zins(be-)rechnung behandeln: Einfache Verzinsung und Zinseszins. In der Praxis existiert eine dritte Methode, die sogenannte stetige Verzinsung.

Unabhängig von der Zinsberechnungsmethode sprechen wir von **Aufzinsen**, wenn wir den Wert einer Zahlung in die wirtschaftliche Zukunft verschieben, und wir verstehen unter **Abzinsen** das zeitliche Verschieben einer Zahlung in die wirtschaftliche Gegenwart.

Damit lässt sich das sogenannte **Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik** formulieren:

Satz:	Zwei oder beliebig viele Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitenpunkten anfallen, dürfen nur dann verglichen, addiert oder subtrahiert werden, wenn zuvor alle vorkommenden Zahlungen auf einen gemeinsamen Bezugstermin auf- oder abgezinst werden.

3.1.2 Einfache Verzinsung

In den nächsten 2 Teilkapiteln verwenden wir folgende Bezeichnungen:

K_0: Kapital zum Zeitpunkt $t = 0$ (Barwert)
n: Laufzeit, Anzahl Zinsperioden (meistens Jahre)
K_n: Kapital nach der Laufzeit n (Endwert)
p: Jahreszinsfuss oder nomineller Zinsfuss
i: Zinssatz mit $i = \frac{p}{100} = p\%$

Weiter vereinbaren wir folgende Usanzen (in der Praxis werden je nach finanzieller Anwendung und Land weitere verwendet):

- 1 Jahr = 12 Monate à 30 Tage = 360 Tage
- Valutatag = Tag der Einzahlung bzw. Abhebung von Kapital

Bei der einfachen Verzinsung wird der Zins **unabhängig von der Laufzeit** als Prozentsatz von $\boldsymbol{K_0}$ berechnet. Für eine Zinsperiode gilt:

$$\boxed{Zins = K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot i}$$

Am Ende einer Zinsperiode gilt dann die folgende Äquivalenz:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1 + i)$$

K_1 ist um den Zins $K_0 \cdot i$ grösser als K_0. Für K_2 gilt weiter:

$$K_2 = K_1 + K_0 \cdot i = K_0 + K_0 \cdot i + K_0 \cdot i = K_0(1 + 2 \cdot i)$$

$$\vdots$$

$$K_{n-1} = K_{n-2} + K_0 \cdot i = K_0 + K_0(n-2) \cdot i + K_0 \cdot i = K_0(1 + (n-1) \cdot i)$$

$$K_n = K_{n-1} + K_0 \cdot i = K_0 + K_0(n-1) \cdot i + K_0 \cdot i = K_0(1 + n \cdot i)$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{K_n = K_0(1 + n \cdot i)}$$

Bei der einfachen Verzinsung wächst das Kapital linear an, d.h. die periodisch ermittelten Kontostände K_n bilden eine arithmetische Folge (mit $d = K_0 i$).

Wichtig ist die Feststellung, dass n und i sich auf die gleiche Periode beziehen müssen. Ist i ein Jahreszinssatz, muss n ebenfalls in Jahren angesetzt werden.

Die einfache Verzinsung findet vor allem bei angebrochenen Verzinsungsperioden Anwendung oder dann, wenn keine Zinszuschlagstermine innerhalb der vereinbarten Laufzeit vereinbart sind.

Beispiel 1: Am 15. November erfolge die Einzahlung von 500 auf ein Sparkonto. Wie gross ist der Zins am Jahresende bei einem Zinsfuss von 2%?

$$Zins = K_0 \cdot n \cdot i = 500 \cdot \frac{45}{360} \cdot 0.02 = 1.25$$

Beispiel 2: Ein Bauer zahlt erstmals für die letzten 5 Jahre den Pachtzins von 3% auf das gepachtete Gut im Wert von CHF 1‘200‘000 bei vereinbarter einfacher Verzinsung. Wie gross ist diese Zahlung?

$$Zins = K_0 \cdot n \cdot i = 1'200'000 \cdot 5 \cdot 0.03 = 180'000.00$$

3.1.3 Zinseszinsrechnung

Bei der Zinseszinsrechnung wird der Zins jeweils als Prozentsatz vom Kapital, welches zu Beginn der Verzinsungsperiode vorhanden ist, berechnet. Am Ende der ersten Zinsperiode gilt wie bei der einfachen Verzinsung unverändert die Äquivalenz:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$$

Für die weitere Zinseszinsrechnung vergrössert sich das zu verzinsende Kapital wie folgt:

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$$
$$\vdots$$
$$K_{n-1} = K_{n-2} + K_{n-2} \cdot i = K_{n-2}(1+i) = K_0(1+i)^{n-1}$$
$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1}(1+i) = K_0(1+i)^n$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{K_n = K_0(1+i)^n = K_0 \cdot q^n}$$

Der Faktor

$$\boxed{q = 1 + i}$$

heisst **Aufzinsungsfaktor** für 1 Periode.

Kennen wir K_n und suchen den Barwert K_0, so müssen wir obige Formel nach K_0 auflösen.

Das ergibt:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{q^n} = K_n v^n$$

Der Faktor

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{q}$$

heisst **Abzinsungsfaktor** oder **Diskontierungsfaktor** für 1 Periode.

Im Gegensatz zur einfachen Verzinsung wächst das Kapital bei der Zinseszinsrechnung exponentiell an, d.h. die periodisch ermittelten Kontostände K_n bilden eine geometrische Folge mit dem konstanten Quotienten q.

Beispiel: Beim Einführungsbeispiel Sparprozessfolge legten wir ein Anfangskapital von $K_0 = 100$ zu einem fixen Zinssatz von $i = 0.1$ an. Welche Auszahlung wäre nach 4 Jahren möglich?

Die jährlichen Kontostände bilden die nachstehende Folge

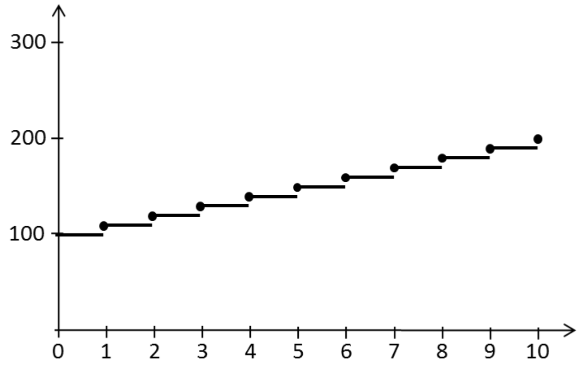
(100, 110, 121, 133.1, 146.41, …)

Mit $K_n = K_0(1+i)^n = K_0 \cdot q^n$ berechnen wir direkt

$$K_4 = 100 \cdot 1.1^4 = 146.41$$

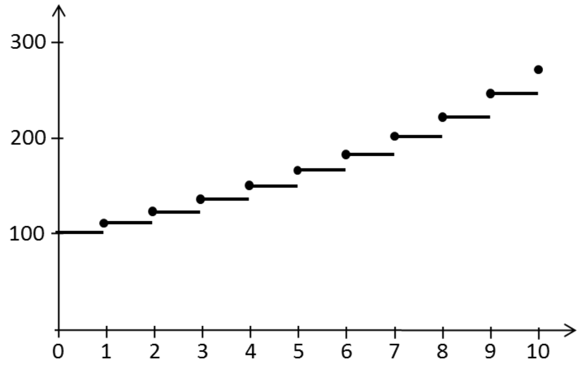
Für die Sparprozessfolge ist unten rechts die Entwicklung der Kontostände grafisch dargestellt. Die Wertentwicklung beim Zinseszins erfolgt exponentiell. Zum Vergleich ist links Entwicklung der Kontostände für den Fall der einfachen Verzinsung wiedergegeben. Dort erfolgt die Wertentwicklung linear. Für beide Fälle gilt $K_0 = 100, n = 10$ und $i = 0.1$.

Einfache Verzinsung



$K_{10} = 200.00$

Zinseszins



$K_{10} = 259.37$

3.1.4 Gemischte Verzinsung

Bei Geldanlagen gilt folgende Abmachung:

- Bruchteile eines Kalenderjahres werden einfach verzinst. Der einfache Zins wird am Jahresende zum Kapital geschlagen.
- Die Zinseszinsformel wird angewendet, falls das Kapital ein oder mehrere ganze Jahre angelegt wird.

3.1.5 Stetige Verzinsung

In der „Modern Finance" wird häufig die stetige Verzinsung verwendet. Diese wird hier weder erklärt noch gebraucht. Für ein Beispiel wird auf Teilkapitel 5.4.3 Exponentialfunktion verwiesen.

3.2 Rentenrechnung

Es liegt auf der Hand, Rente mit AHV-Rente oder BVG-Rente oder anderen (Sozial-)Versicherungsdienstleistungen in Verbindung zu bringen. Hier ist Rente aber ein finanzmathematischer Begriff, welcher in der Praxis sehr bedeutungsvoll ist. Die Rentenrechnung ist das wichtigste Werkzeug zur Bewertung von periodischen gleich hohen Zahlungen.

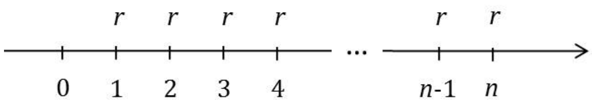
Definition. Eine n-malige Rente ist eine (geometrische) Zahlungsreihe, die aus n gleich hohen, periodischen Zahlungen, den sogenannten Raten besteht, welche stets entweder zu Beginn oder am Ende einer Verzinsungsperiode anfallen.

Ist n endlich, so sprechen wir von einer **endlichen**, andernfalls von einer **ewigen** Rente.

Da pro Verzinsungsperiode **eine** Zahlung erfolgt, ist n auch die Anzahl der Raten. In diesem Teilkapitel verwenden wir folgende Bezeichnungen:

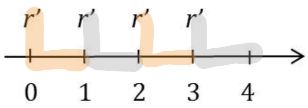
r:	Rate (gleich hohe periodische Zahlung)
n:	Laufzeit der Rente (meistens Jahre)
R_n, R'_n:	Renten<u>end</u>wert
R_0, R'_0:	Renten<u>bar</u>wert

Zur Analyse von Rentenrechnungsproblemen bietet sich der Zahlungsstrahl an. Skizziert wird zunächst die in Perioden unterteilte Zeitachse. Dann werden die Raten an den entsprechenden Zeitpunkten markiert:

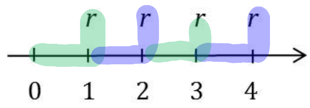


Die obige Definition der Rente ist nicht eindeutig. So kann eine Rente mit beispielsweise 4 Raten im Zahlungsstrahl auf zwei Arten eingezeichnet werden:

Raten jeweils **zu Beginn** einer Periode



Raten jeweils **am Ende** einer Periode

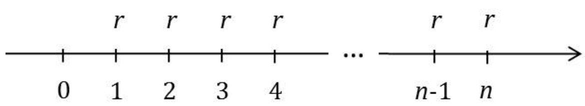


Wir werden die Fallunterscheidung vornehmen müssen, wann die gleich hohen periodischen Zahlungen anfallen.

3.2.1 Nachschüssige, endliche Rente

Definition. Eine Rente heisst **nachschüssig** (postnumerando), wenn die erste Rate am Ende der ersten Periode bezahlt wird und die letzte Ratenzahlung am Laufzeitende erfolgt.

Zahlungsstrahl der nachschüssigen Rente:

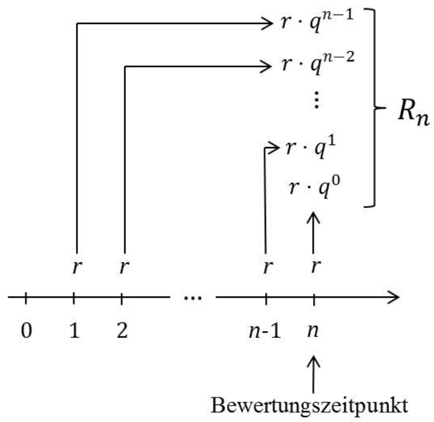


Als erstes wollen wir den Rentenendwert R_n einer nachschüssigen Rente bestimmen, also den Gesamtwert der n nachschüssigen Raten r inklusive den angesparten Zinsen.

$$\begin{array}{ll}
1.\ \text{Rate:} & r \cdot q^{n-1} \\
2.\ \text{Rate:} & r \cdot q^{n-2} \\
\vdots & \vdots \\
(n-1).\ \text{Rate:} & r \cdot q^{1} \\
n.\ \text{Rate:} & r \cdot q^{0}
\end{array}$$

Um R_n unter Verwendung des Äquivalenzprinzips der Finanzmathematik zu berechnen, müssen wir die aufgezinsten Raten addieren:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \cdots + r \cdot q^1 + r \cdot q^0 \\ &= r \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^1 + 1) \end{aligned}$$



In der Klammer steht aber gerade eine geometrische Summe, also erhalten wir:

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Um den Rentenbarwert R_0 aus dem Rentenendwert R_n zu bestimmen, müssen wir diesen abzinsen oder wie man auch sagt, diskontieren:

$$\boxed{R_0 = \frac{R_n}{q^n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)}}$$

Beispiel: Jemand zahle 20 mal jeweils per Ende Jahr CHF 5‘000 in die 3. Säule ein. Welches Kapital liegt unmittelbar nach der letzten Zahlung vor, wenn stets ein Zinsfuss von 3% verwendet wurde.

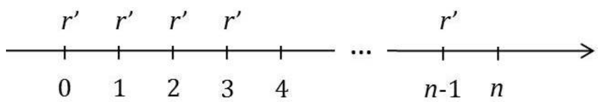
$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 5'000 \cdot \frac{1.03^{20} - 1}{1.03 - 1} = 134'351.87$$

3.2.2 Vorschüssige, endliche Rente

Definition. Eine Rente heisst **vorschüssig** (pränumerando), wenn die erste Rate bei Laufzeitbeginn bezahlt wird und die letzte Ratenzahlung zu Beginn der letzten Periode erfolgt.

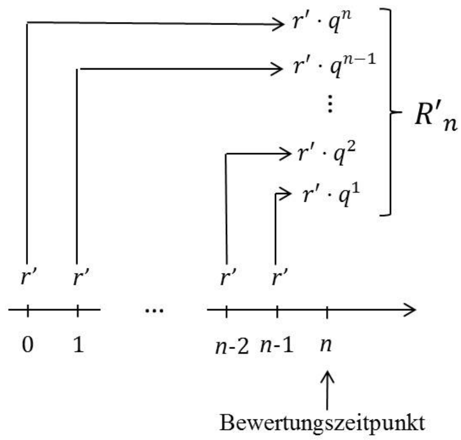
Zwecks Unterscheidung zur nachschüssigen Rente verwenden wir bei der vorschüssigen Rente den Apostroph „′“.

Zahlungsstrahl der vorschüssigen Rente:



Wie im vorherigen Abschnitt bestimmen wir zuerst den Rentenendwert R'_n der vorschüssigen Rente, also den Gesamtwert, der n vorschüssigen Raten r' inklusive den angesparten Zinsen.

1. Rate:	$r' \cdot q^n$
2. Rate:	$r' \cdot q^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)$. Rate:	$r' \cdot q^2$
n. Rate:	$r' \cdot q^1$



Addition der aufgezinsten Raten ergibt:

$$\begin{aligned} R'_n &= r' \cdot q^n + r' \cdot q^{n-1} + \dots + r' \cdot q^2 + r' \cdot q^1 \\ &= r'q \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^1 + 1) \end{aligned}$$

Wiederum finden wir in der Klammer eine geometrische Summe und somit folgt für den vorschüssigen Rentenendwert:

$$\boxed{R'_n = r'q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Ganz analog wie bei den nachschüssigen Renten bestimmen wir den Rentenbarwert R'_0 aus dem Rentenendwert R'_n, indem wir diesen diskontieren:

$$\boxed{R'_0 = \frac{R'_n}{q^n} = r'q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1} \cdot (q-1)}}$$

Beispiel: Jemand zahle 20 mal jeweils anfangs Jahr CHF 5‘000 auf ein Konto ein. Welches Kapital liegt am Ende des letzten Jahres vor, wenn stets ein Zinsfuss von 3% verwendet wurde.

$$R'_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 5'000 \cdot 1.03 \cdot \frac{1.03^{20} - 1}{1.03 - 1} = 138'382.43$$

3.2.3 Ewige Rente

Definition: Eine Rente wird als ewige Rente bezeichnet, wenn die Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt ist, n also beliebig gross wird.

Eine ewige Rente, gleichgültig ob vor- oder nachschüssig, hat einen unendlichen Rentenendwert. Von Interesse ist daher nur der Barwert der ewigen Rente.

Um von einer nachschüssigen, ewigen Rente den Barwert B zu bestimmen, verwenden wir die Barwertformel für eine n-jährige, nachschüssige Rente und formen sie wie folgt um:

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \left(\frac{q^n}{q^n \cdot (q-1)} - \frac{1}{q^n \cdot (q-1)}\right)$$
$$= r \cdot \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q^n \cdot (q-1)}\right)$$

Der Barwert ergibt sich nun für $n \to \infty$ und sofern $q > 1$

$$B = \lim_{n\to\infty} r \cdot \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q^n \cdot (q-1)}\right)$$
$$= r \cdot \left(\frac{1}{q-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n \cdot (q-1)}\right) = \frac{r}{q-1}$$

$$\boxed{B = \frac{r}{q-1}}$$

Natürlich bilden die Barwerte der nachschüssigen Raten $(rq^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit dem Faktor q^{-1} und dem Anfangsglied rq^{-1}. Damit hätten wir den Barwert einer ewigen, nachschüssigen Rente B auch aus der Formel für die unendliche geometrische Reihe gewinnen können.

Die Vorgehensweise bei der Bestimmung des Barwerts einer vorschüssigen, ewigen Rente kann analog zum nachschüssigen Fall erfolgen. Alternativ ergibt sich aus der Überlegung, dass der Unterschied zwischen der vorschüssigen und der nachschüssigen Berechnung in einer Verzinsung jeder einzelnen Rate liegt:

$$\boxed{B' = B \cdot q = \frac{r'q}{q-1}}$$

Der Barwert der vorschüssigen ewigen Rente ergibt sich durch Multiplikation des nachschüssig gerechneten Barwerts mit dem Aufzinsungsfaktor q.

Beispiel: Eine wohlhabende Person gründet anfangs Jahr ein Stiftung und zahlt CHF 5‘000‘000 ein. Angenommen das Stiftungsvermögen verzinst sich jedes Jahr mit 2.5%, welcher Betrag kann jeweils am Jahresende für wohltätige Zwecke verwendet werden, ohne dass sich das Stiftungsvermögen reduziert?

$$B = \frac{r}{q-1} = 5'000'000 = \frac{r}{1.025-1}$$
$$\to r = 0.025 \cdot 5'000'000 = 125'000.00$$

4 Aufgaben

4.1 Aufgaben

4.1 Ergänzen Sie die fehlende Werte (EZ = Einfache Verzinsung, ZZ = Zinseszins):

	Anfangskapital K_0 [CHF]	Zinsfuss p [%]	Laufzeit n [Jahre]	Endkapital K_n [CHF]	Verzinsungsmodus
a)	32'000.-	4.75		50'240.-	EZ
b)	22'450.-		7	27'950.25	EZ
c)	5'860.-	5.25		9'287.45	ZZ
d)		8.5	6	104'750.-	ZZ
e)	12'700.-		14	24'319.80	ZZ

4.2 Einfache Verzinsung (1 Jahr = 360 Tage, 1 Monat = 30 Tage):

a) Ein Privatperson verspricht einem Liegenschaftsbesitzer für die Einräumung eines Wegrechts nach Ablauf von 5 Jahren und 7 Monaten einen Betrag von CHF 10'000.- zu zahlen. Welchem Barwert entspricht diese Zahlung bei einfa cher Verzinsung von 5%?

b) Welcher Betrag an einfachen Zinsen (p = 8.5) ist bei der Rückzahlung eines für 2 Jahre, 9 Monate und 22 Tage ausgeliehenen Privatkredits von CHF 25'000.-aufzubringen?

c) Ein Sparer zahlt auf sein neu eröffnetes Bankkonto am 12. Mai CHF 5600.-, am 22. August CHF 3550.- und am 28. November CHF 1800.- ein. Die Einlagen werden mit 4,5% einfach verzinst (Zinsperiodengrenze: 31.12.). Welches ist sein Guthaben am 31. März des darauffolgenden Jahres?

4.3 Gemischte Verzinsung: Zinseszinsen werden in der Bankpraxis üblicherweise nur für vollständig abgelaufene Zinsperioden (volle Jahre, vom 1.1. - 31.12.) verrechnet. Für "angebrochene" Zinsperioden [< 1 Jahr] wird nur einfache Verzinsung vorgenommen (1 Jahr = 360 Tage, 1 Monat = 30 Tage).

a) Ein Anleger überlässt am 31.12. eines Jahres seiner Bank CHF 5000.- zu 8% jährlichen Zinseszinsen. Nach 5 Jahren, 4 Monaten und 17 Tagen hebt er sein gesamtes Guthaben ab. Wie gross ist dieses?

b) Frau X.Y. eröffnet am 20. Mai 2011 ein Konto mit einer Einlage von CHF 72'500.-. Es werden darauf keine weiteren Transaktionen vorgenommen. Welchen Betrag kann sie am 5. April 2016 abheben, wenn mit einer durchschnittlichen Verzinsung von 3.5% gerechnet wird?

4.4 Eine Schuldrückzahlung von CHF 30'000.- ist in 10 Jahren fällig. Der Schuldner bezahlt jedoch schon nach 2 Jahren CHF 10'000.-, nach 5 Jahren CHF 8'000.- und den Rest x nach 9 Jahren zurück. Wie gross ist dieser Restbetrag, wenn mit Zinseszinsen von 4% gerechnet wird?

4.5 Geometrisch-degressive Abschreibung: Bei der geometrisch-degressiven Abschreibung wird in jedem Jahr p% vom jeweiligen Restwert (Buchwert) aus dem Vorjahr abgeschrieben.

Eine Produktionsanlage (Neuwert: CHF 120'000.-) soll geometrisch-degressiv mit jährlich 12% abgeschrieben werden (Schrottwert: CHF 30'000.-):

a) Wie gross ist ihr Buchwert nach der 5. Abschreibung?

b) Nach wie vielen Jahren gilt Buchwert ≤ Schrottwert?

4.6 Ergänzen Sie die fehlenden Werte: Typ: Vorschüssig: V, Nachschüssig: N

	Typ:	Rate: r [CHF]	Zinsfuss: p	Laufzeit: n [Jahre]	Rentenendwert: R_n bzw. R'_n [CHF]	Rentenbarwert: R_o bzw. R'_o [CHF]
a)	N	2'400.-	4,75	24		
b)	N		6, 5	7	27'950,25	
c)	V		5,25	12		42'750.-
d)	V	8650.-	4,5		111'076.20	
e)	N	2'000.-		3	6243,20	

4.7 Eine Leasinggesellschaft benutzt bei ihren Geschäften einen jährlichen Zinssatz von 9%. Ein Auto soll finanziert werden. Der Leasingvertrag sieht folgende Bedingungen vor:

- Barzahlung zu Vertragsbeginn EUR 9'000
- Während 4 Jahren nachschüssige Zahlungen von je EUR 6'500
- Erwerb des Autos durch den Klienten am Ende des 5. Jahres für EUR 12'000

Wie hoch ist der ursprüngliche Preis dieses Autos?

4.8 Herr Meier zahlt während 35 Jahren bis zu seiner Pensionierung CHF 6‘682.- jeweils am Ende des Jahres auf sein Sparkonto 3a ein. Welcher Betrag steht ihm nach der letzten Einzahlung (31.12) zur Verfügung? (i=2% p.a.)

4.9 Ein zu verkaufendes Grundstück wird zu folgenden Zahlungsmodi angeboten:

a) sofortige Zahlung von CHF 118'500.-, oder

b) Zahlung einer jährlichen Rate von CHF 45'000.- während drei Jahren, beginnend ab Ende des ersten Jahres, oder

c) Zahlung einer ersten Rate von CHF 95'000.- nach Ablauf von 2 Jahren und einer zweiten Rate von CHF 48'000.- am Ende des vierten Jahres.

Welcher Zahlungsmodus ist für den Käufer der günstigste (p=8)?

4.10 Der Erwerb einer Eigentumswohnung zum Preis von CHF 1'400'000.- soll nach folgendem Plan finanziert werden: 15% des Preises durch Eigenkapital, 50% des Preises mit einer 1. Hypothek zu 6,75% p.a. und 35% des Preises mit einer 2. Hypothek zu 7,5% p.a. Die 2. Hypothek soll innerhalb von 20 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung des Eigenkapitals wird vernachlässigt.

a) Wie gross ist die durchschnittliche jährliche Belastung des Eigentümers?

b) Am Ende des 8. Jahres, nach Bezahlung der für das 8. Jahr fälligen Hypothekarrate, hat der Käufer die Gelegenheit CHF 120'000.- seines Pensionskassenvermögens für die Rückzahlung der 2. Hypothek einzusetzen. Wie gross ist seine jährliche Belastung ab jetzt?

4.11 Jemand zahlt während 6 Jahren je per Jahresende CHF 2000.- auf ein Sparkonto ein. Dann setzt er mit den Einzahlungen aus. Beginnend mit dem Ende des 11. Jahres zahlt er weiterhin jährlich CHF 2000.- ein. Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 15. Jahres bei einer Verzinsung von 6% p.a.?

4.12 Eine nachschüsssige Jahresrente von CHF 3600.-, deren erste Zahlung in 5 Jahren erfolgt und die 10 Jahre lang gezahlt werden soll, ist in eine 12-jährige vorschüssige Jahresrente, deren Laufzeit sofort beginnt, umzuwandeln. Wie hoch ist die neue Rate, wenn mit 6% p.a. verzinst wird?

4.13 Ein bei einer Bank eröffnetes Konto (p=4 p.a.) weist folgende Buchungen auf:

- CHF 1000.- Einzahlung bei Eröffnung,
- je CHF 800.- Einzahlung postnumerando 8 Jahre lang, Zahlungen beginnend mit dem Ende des 2. Jahres,
- CHF 4000.- Auszahlung nach 10 Jahren,
- je CHF 1200.- Einzahlung postnumerando 4 Jahre lang, Zahlungen beginnend mit dem Ende des 12. Jahres.

a) Wie hoch ist der Kontostand nach Ablauf von 15 Jahren?

b) Welche Rate kann man, Auszahlungen nach Ablauf von 18 Jahren beginnend, 4 mal postnumerando abheben, wenn nach dem letzten Bezug der Kontostand Null erreicht werden soll?

4.14 K. zahlt bis zu seiner Pensionierung mit 65 Jahren jährlich nachschüssig während 20 Jahren CHF 6192.- auf sein steuerbegünstigtes Vorsorgekonto der 3. Säule ein, das zu 3.25% verzinst wird. Die letzte dieser Einzahlungen leistet er an seinem 64. Geburtstag. Mit diesem Altersguthaben der dritten Säule finanziert K. seine Bildungsreisen. Zu diesem Zweck hebt er während seiner Pensionierung zu Beginn jedes Jahres CHF 9000.- ab. Wie gross ist K's Restguthaben unmittelbar nach der Abhebung an seinem 80. Geburtstag?

Lösungen Pascal Brunner

4.4 Eine Schuldrückzahlung von CHF 30'000.- ist in 10 Jahren fällig. Der Schuldner bezahlt jedoch schon nach 2 Jahren CHF 10'000.-, nach 5 Jahren CHF 8'000.- und den Rest x nach 9 Jahren zurück. Wie gross ist dieser Restbetrag, wenn mit Zinseszinsen von 4% gerechnet wird?

$n = 10$

$K_{10} = 30'000$

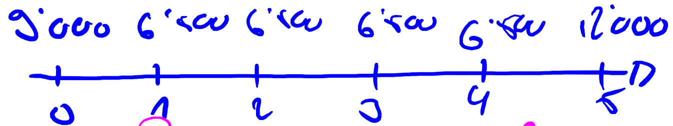
$i = 4\%$

$$10'000 \cdot (1+1.04)^8 + 8'000 \cdot (1+1.04)^5 + x \cdot (1+1.04)^1 = 30'000$$

$$30'000 - 10'000 \cdot 1.04^8 - 8'000 \cdot 1.04^5 = 6'581.08$$

4.7 Eine Leasinggesellschaft benutzt bei ihren Geschäften einen jährlichen Zinssatz von 9%. Ein Auto soll finanziert werden. Der Leasingvertrag sieht folgende Bedingungen vor: - Barzahlung zu Vertragsbeginn EUR 9'000 - Während 4 Jahren nachschüssige Zahlungen von je EUR 6'500 - Erwerb des Autos durch den Klienten am Ende des 5. Jahres für EUR 12'000 Wie hoch ist der ursprüngliche Preis dieses Autos?

$i = 9\%$



$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)}$$

$$9'000 + 6'500 \cdot \frac{1.09^4 - 1}{1.09^4 (1.09-1)} + 12'000 \cdot \frac{1}{\cancel{1.09^5 - 1}\ 1.09^5} = \cancel{52'337.17}\ 37857.35$$

r_n Darstellt

4.8 Herr Meier zahlt während 35 Jahren bis zu seiner Pensionierung CHF 6'682.- jeweils am Ende des Jahres auf sein Sparkonto 3a ein. Welcher Betrag steht ihm
nach der letzten Einzahlung (31.12) zur Verfügung? (i=2% p.a.)

$n = 35$

$i = 2\%$

$r = 6'682$

$q = 1.02$

$$r_{35} = 6'682 \cdot \frac{1.02^{35} - 1}{1.02 - 1}$$

$$= 334'063.0955$$

4.11 Jemand zahlt während 6 Jahren je per Jahresende CHF 2000.- auf ein Sparkonto ein. Dann setzt er mit den Einzahlungen aus. Beginnend mit dem Ende des 11. Jahres zahlt er weiterhin jährlich CHF 2000.- ein. Wie hoch ist das Guthaben am
Ende des 15. Jahres bei einer Verzinsung von 6% p.a.?

? $n = 15$ nachschüssig

$i = 6\%$

$r_{15} = ?$

$$r_6 = 2000 \cdot \frac{1.06^6 - 1}{1.06 - 1} = 13950.6$$

$$K_5 = K_0 \cdot q^n = 13950.65 \cdot 1.06^5$$

$$= 18669.10$$

$$r_4 = 2000 \cdot \frac{1.06^4 - 1}{1.06 - 1} = 8749.2$$

4.12 Eine nachschüsssige Jahresrente von CHF 3600.-, deren erste Zahlung in 5 Jahren erfolgt und die 10 Jahre lang gezahlt werden soll, ist in eine 12-jährige vorschüssige Jahresrente, deren Laufzeit sofort beginnt, umzuwandeln. Wie hoch ist die neue Rate, wenn mit 6% p.a. verzinst wird?

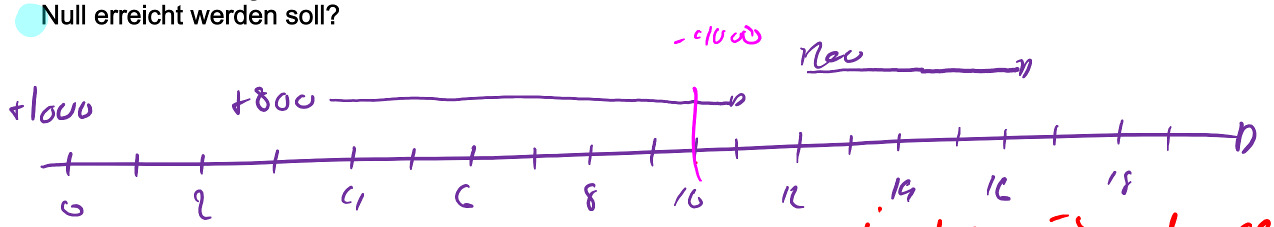
$i = 6$

$$r_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{\cancel{q^n} \cdot (q-1)} = 3600 \cdot \frac{1.06^{10} - 1}{\cancel{1.06^{10}} \cdot (1.06 - 1)} = 47450.862 \overset{!}{=} K_{14}$$

$$K_0 = \frac{47450.862}{1.06^{14}} = 20987.56$$

$$r' = \frac{20987.562 \cdot 1.06^{12}(1.06-1)}{1.06\,(1.06^{12}-1)} = 2361.646 \quad ?$$

4.13 Ein bei einer Bank eröffnetes Konto (p=4 p.a.) weist folgende Buchungen auf:
1 - CHF 1000.- Einzahlung bei Eröffnung,
2 - je CHF 800.- Einzahlung postnumerando 8 Jahre lang, Zahlungen beginnend mit dem Ende des 2. Jahres,
3 - CHF 4000.- Auszahlung nach 10 Jahren,
4 - je CHF 1200.- Einzahlung postnumerando 4 Jahre lang, Zahlungen beginnend mit dem Ende des 12. Jahres.
a) Wie hoch ist der Kontostand nach Ablauf von 15 Jahren?
b) Welche Rate kann man, Auszahlungen nach Ablauf von 18 Jahren beginnend, 4 mal postnumerando abheben, wenn nach dem letzten Bezug der Kontostand
Null erreicht werden soll?



→ 15, da die 1000.- über den gesamten Zeitraum sparen stehen

(1) $K_0 = 1000$

$K_{15} = 1000 \cdot (1+0.04)^{15} = \cancel{1081.60}$ $\underline{1800.9435}$

(2) $r_{0,1} = 800 \cdot \frac{1.04^8 - 1}{\cancel{1.04^8}(1.04-1)} = \cancel{7371.581}$ 5386.1959

→ Zeitpunkt Jahr 15: $5386.1959 \cdot 1.04^{14} = \underline{9327.1486}$

→ Ausgangspunkt 10 Jahre ~~→ 15 Jahre → 5~~

(3) $-4000 \cdot 1.04^5 = \underline{-4866.611}$

(4) $1200 \cdot \frac{1.04^4 - 1}{\cancel{1.04}(1.04-1)} = \underline{5095.7568}$

a) $1800.95 + 9327.15 - 4866.60 + 5095.75 = \underline{\underline{11357.25}}$

4.14 K. zahlt bis zu seiner Pensionierung mit 65 Jahren jährlich nachschüssig während 20 Jahren CHF 6192.- auf sein steuerbegünstigtes Vorsorgekonto der 3. Säule ein, das zu 3.25% verzinst wird. Die letzte dieser Einzahlungen leistet er an seinem 64. Geburtstag. Mit diesem Altersguthaben der dritten Säule finanziert K. seine Bildungsreisen. Zu diesem Zweck hebt er während seiner Pensionierung zu Beginn jedes Jahres CHF 9000.- ab. Wie gross ist K's Restguthaben unmittelbar nach der Abhebung an seinem 80. Geburtstag?

nachschüssig

$n = 20$

$r = 6192.-$

$i = 3.25$

$r_{20} = ?$

$$r_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$r_{20} = 6192 \cdot \frac{1.0325^{20} - 1}{1.0325 - 1} = \underline{170677.7977}$$

vorschüssig

$n = 16$

$i = 3.25$

$$W_{80}: 170677.80 \cdot 1.0325^{16} = 284720.00$$

$$R_{16}: 9000 \cdot \frac{1.0325^{16} - 1}{1.0325 - 1} = 185032.40$$

$$W_{80} - R_{16}: 284720.00 - 185032.40 = \underline{99687.60}$$

4.16 Eine kulturelle Stiftung mit einem Stiftungskapital von CHF 1'000'000.- verwendet die Zinsen zur Unterstützung eines Theaters, dem sie jährlich vorschüssig CHF 40'000.- zuweist. Zu welchem Zinssatz ist das Stiftungskapital angelegt?

$K_0 = 1'000'000$

$n = 1$

$i = ?$

$K_1 = 40'000$

ewige Rente

~~$\frac{40'000}{1'000'000} = 0.04$~~

~~$i = 4\%$~~

$$q = \frac{B'}{B' - r'} = \frac{1'000'000}{1'000'000 - 40'000} = \frac{25}{24} = 1.0416$$

$i = 4\frac{1}{6}\%$

$$B' = \frac{r' q}{q - 1}$$

$1'000'000(q-1) = 40'000 q \quad | -40'000q \; +1'000'000$

$960'000 q = 1'000'000$

$q = 4.$

4.17 Ein Industrieller hat für ein Waisenhaus CHF 200'000.- gestiftet und bestimmt, dass dieses Kapital solange auf Zinseszinsen gelegt werden soll, bis es bei jährlicher Verzinsung von 5% auf mindestens CHF 300'000.- angewachsen ist. Ab dann soll der jährliche Zinsertrag für die Kinder des Waisenhauses verwendet werden.
a) Wie viele volle Jahre dauert es, bis die Jahreszinsen zum ersten Mal ausgezahlt werden?
b) Welcher Zinsbetrag kann ab dann jährlich ausbezahlt werden?

$K_0 = 200'000$

$n = ?$

$K_n = 300'000$

$i = 5\%$

$\log_q\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n$

$\log_{1.05}\left(\frac{300'000}{200'000}\right) = 8.3 \Rightarrow 9$ Jahre

a) nach 9 Jahren kann zum ersten Mal etwas ausbezahlt werden

$\Rightarrow 200'000 \cdot 1.05^9 = 310'265.64$

b) $310'265.64 \cdot 0.05 = 15'513.28$

Grundsätzliches Vorgehen:

① Überblick verschaffen

② gemeinsamer Zeitpunkt bestimmen

③ Äquivalenz

4.10 Der Erwerb einer Eigentumswohnung zum Preis von CHF 1'400'000.- soll nach folgendem Plan finanziert werden: 15% des Preises durch Eigenkapital, 50% des Preises mit einer 1. Hypothek zu 6,75% p.a. und 35% des Preises mit einer 2. Hypothek zu 7,5% p.a. Die 2. Hypothek soll innerhalb von 20 Jahren getilgt werden. Die Verzinsung des Eigenkapitals wird vernachlässigt.

a) Wie gross ist die durchschnittliche jährliche Belastung des Eigentümers?

b) Am Ende des 8. Jahres, nach Bezahlung der für das 8. Jahr fälligen Hypothekarrate, hat der Käufer die Gelegenheit CHF 120'000.- seines Pensionskassenvermögens für die Rückzahlung der 2. Hypothek einzusetzen.
Wie gross ist seine jährliche Belastung ab jetzt?

4.11

$$R_6 = 2000 \cdot \frac{1.06^6 - 1}{1.06 - 1}$$

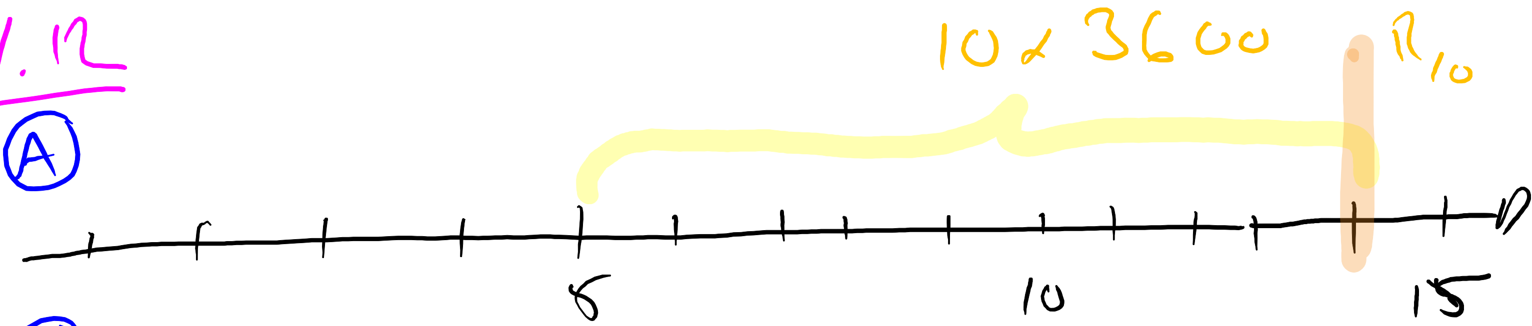
$$R_5 = 2000 \cdot \frac{1.06^5 - 1}{1.06 - 1}$$

$$R = R_5 + R_6 \cdot 1.06^9$$

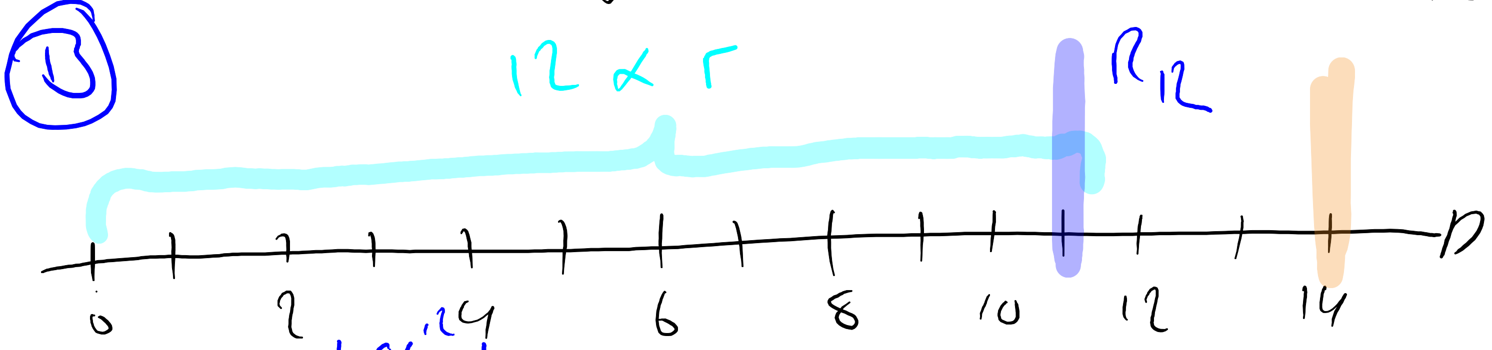
↳ zum Zeitpunkt R aufzinsen

4.12

A



B



$$R_{12} = x \cdot \frac{1.06^{12} - 1}{1.06 - 1}$$

$$R_{10} = 3600 \cdot \frac{1.06^{10} - 1}{1.06 - 1}$$

$$14: \; R_{10} = R_{12} \cdot 1.06^3$$

4.15 A eröffnet am 1.1.2005 ein Sparkonto mit einer Ersteinlage von CHF 50´000.-. Zusätzlich zahlt er an jedem Jahresende einen fixen Betrag r ein, erstmals am 31.12.2005. Nachdem er 4 Jahre lang regelmässig einbezahlt hat, lässt A liquiditätsbedingt 3 Zahlungen aus und nimmt diese dann wieder auf. Ende 2016, nach der letzten Einzahlung, weist das Konto einen Saldo von CHF 147´571.27 auf. In den ersten 4 Jahren wird das Konto mit 3.25% p.a., für den Rest der Laufzeit mit 2% p.a. verzinst. Wie gross ist A's jährliche Einzahlung r?

4.16 Eine kulturelle Stiftung mit einem Stiftungskapital von CHF 1'000'000.- verwendet die Zinsen zur Unterstützung eines Theaters, dem sie jährlich vorschüssig CHF 40'000.- zuweist. Zu welchem Zinssatz ist das Stiftungskapital angelegt?

4.17 Ein Industrieller hat für ein Waisenhaus CHF 200'000.- gestiftet und bestimmt, dass dieses Kapital solange auf Zinseszinsen gelegt werden soll, bis es bei jährlicher Verzinsung von 5% auf mindestens CHF 300'000.- angewachsen ist. Ab dann soll der jährliche Zinsertrag für die Kinder des Waisenhauses verwendet werden.

a) Wie viele volle Jahre dauert es, bis die Jahreszinsen zum ersten Mal ausgezahlt werden?

b) Welcher Zinsbetrag kann ab dann jährlich ausbezahlt werden?

4.2 Lösungen

4.1 a) aus $K_n = K_0(1 + n \cdot i)$ folgt $n \cdot i = \frac{K_n}{K_0} - 1 = \frac{50'240}{32'000} - 1 = 0.57 \Rightarrow n = \frac{0.57}{0.0475} = 12$

b) aus $K_n = K_0(1 + n \cdot i)$ folgt $n \cdot i = \frac{K_n}{K_0} - 1 = \frac{27'950.25}{22'450} - 1 = 0.245 \Rightarrow i = 0.035 = 3.5\%$

c) aus $K_n = K_0(1 + i)^n$ folgt $\frac{K_n}{K_0} = (1 + i)^n$ und $n = \log_{1+i}\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \log_{1.0525}(1.5849) = 9$

d) aus $K_n = K_0(1 + i)^n$ folgt $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{104'750}{1.631468} = 64'206$

e) aus $K_n = K_0(1 + i)^n$ folgt $\frac{K_n}{K_0} = (1 + i)^n$ und $1 + i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1.0475$

$\Rightarrow i = 0.0475 = 4.75\%$

4.2 a) $10'000 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 360 + 7 \cdot 30}{360} \cdot 0.05\right) \Rightarrow K_0 = \text{CHF } 7'817.59$

b) $Zinsen = K_n - K_0 = K_0 \cdot n \cdot i = 25000 \cdot \frac{360+360+292}{360} \cdot 0.085 = \text{CHF } 5'973.61$

c) $K_{30.12} = 5'600 \cdot \left(1 + \frac{18+7\cdot 30}{360} \cdot 0.045\right) + 3'550 \cdot \left(1 + \frac{8+4\cdot 30}{360} \cdot 0.045\right)$

$$+1'800 \cdot \left(1 + \frac{2+30}{360} \cdot 0.045\right) = \text{CHF } 11'173.60$$

und $K_{30.03} = K_{30.12} \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0.045\right) = \text{CHF } 11'299.30$

4.3 a) $K_5 = 5'000 \cdot 1.08^5 \; und \; K = K_5 \cdot \left(1 + \frac{17+4\cdot 30}{360} \cdot 0.08\right) = \text{CHF } 7'570.30$

b) $K_{31.12.2011} = 72'500 \cdot \left(1 + \frac{10+7\cdot 30}{360} \cdot 0.035\right) = 74'050.6944$

$K_{31.12.2015} = 74'050.6944 \cdot (1 + 0.035)^4 = 84'974.8751$

$K_{05.04.2016} = 84'974.8751 \cdot \left(1 + \frac{5+3\cdot 30}{360} \cdot 0.035\right) = \text{CHF } 85'759.71$

4.4 Aus: $10'000 \cdot (1 + 0.04)^8 + 8'000 \cdot (1 + 0.04)^5 + x \cdot (1 + 0.04)^1 = 30'000$ folgt:

$$x = \frac{30'000 - 10'000 \cdot 1.04^8 - 8'000 \cdot 1.04^5}{1.04} = \text{CHF } 6'327.97$$

4.5 Der geschilderte Sachverhalt kann als geometrische Folge interpretiert werden. $a_0 = 120'000$; $a_1 = 120'000 \cdot 0.88$; $a_2 = 120'000 \cdot 0.88^2$; und $a_n = 120'000 \cdot 0.88^n$ mit n Anzahl Jahre.

a) $a_5 = 120'000 \cdot 0.88^5 = \text{CHF } 63'327.83$

b) $a_n = 120'000 \cdot 0.88^n = 30'000 \Leftrightarrow 0.88^n = \frac{1}{4}$

$n = \log_{0.88}\left(\frac{1}{4}\right) = 10.84 \Longrightarrow n = 11$ Jahre

4.6 a) $R_{24} = 2'400 \cdot \frac{1.0475^{24}-1}{1.0475-1} = 103'365.10$ und $R_0 = \frac{R_{24}}{1.0475^{24}} = 33'937.29$

b) $r = \frac{27'950.25}{\frac{1.065^7-1}{1.065-1}} = 3'279.44$ und $R_0 = \frac{27'950.25}{1.065^7} = 17'986.16$

c) $R'_{12} = 42'750 \cdot 1.0525^{12} = 78'995.32$ und $r = \frac{78'995.32}{1.0525 \cdot \frac{1.0525^{12}-1}{1.0525-1}} = 4'647.54$

d) aus $R'_n = r'q \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ folgt $q^n = \frac{R'_n(q-1)}{r'q} + 1 = \frac{111'076.20 \cdot 0.045}{8'650 \cdot 1.045} + 1 = 1.55297$

$n = \log_{1.045}(1.55297) = 10$ und $R'_0 = \frac{R'_n}{q^n} = \frac{111'076.20}{1.55297} = 71'525.04$

e) Auflösen der Rentenformeln nach q ist nicht möglich. Ansatz mit Äquivalenzprinzip
führt auf eine quadratische Gleichung:

$6'243.20 = 2'000 + 2'000q + 2'000q^2 \Longrightarrow q_1 = 1.04$ und $q_2 = -2.04$

Ausschliessen $q_2 = -2.04$, da ökonomisch nicht sinnvoll. $\Rightarrow p = 4 \Leftrightarrow i =$ 4%

$R_0 = \frac{R_3}{1.04^3} = \frac{6'243.20}{1.04^3} = 5'550.18$

4.7 Alle Zahlungen sind auf den Zeitpunkt 0 zu bewerten: $P_0 = 9'000 + 6'500 \cdot \frac{1.09^4 - 1}{1.09^4 \cdot 0.09} + 12'000 \cdot \frac{1}{1.09^5} =$ EUR 37'857.36

4.8 $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 6'682 \cdot \frac{1.02^{35}-1}{1.02-1} =$ CHF 334'063.10

4.9 Um Vergleichen zu können, müssen die drei Zahlungsvarianten auf einen gemeinsamen Zeitpunkt bezogen werden. (Hier Zeitpunkt 0 $\Rightarrow$ Barwert (BW).)

a) $BW = CHF$ 118'500 (hier muss nichts gerechnet werden)

b) $BW = 45'000 \cdot \frac{1.08^3-1}{1.08^3(1.08-1)} =$ CHF 115'969.36 (günstigster Modus)

c) $BW = \frac{95'000}{1.08^2} + \frac{48'000}{1.08^4} =$ CHF 116'728.62

4.10 a) Der Kaufpreis beträgt CHF 1'400'000. Die Finanzierung ist folgendermassen geregelt:

15% Eigenkapital	CHF 210'000
50% 1. Hypothek	CHF 700'000
35% 2. Hypothek	CHF 490'000

Annuitätentilgung der zweiten Hypothek: $490'000 = r \cdot \frac{1.075^{20}-1}{1.075^{20}(1.075-1)}$

$r = \frac{490'000}{10.1945} =$ CHF $48'065.17$

Zinsendienst auf 1. Hypothek : $700'000 \cdot 6.75\% = CHF\ 47'250$

Belastung: $48'065.17 + 47'250 = CHF$ 95'315.17

b) Restschuld nach 8 Jahren: $S = 490'000 \cdot 1.075^8 - 48'065.17 \cdot \frac{1.075^8-1}{1.075-1} - 120'000$

$= 251'797.50 = r_{neu} \cdot \frac{1.075^{12}-1}{1.075^{12} \cdot 0.075} \Rightarrow r_{neu} = 32'551.83$

Belastung: $47'250 + r_{neu} =$ CHF 79'801.83

4.11 $R_6 = 2'000 \cdot \frac{1.06^6-1}{1.06-1} = 13'950.64$

Aufzinsen auf Zeitpunkt 15: $W_{15} = 13'950.64 \cdot 1.06^9 = 23'569.31$

zweite Rente: $R_5 = 2'000 \cdot \frac{1.06^5-1}{1.06-1} = 11'274.19$, Wert Zeitpunkt 15

Guthaben zum Zeitpunkt 15: $23'569.31 + 11'274.19 = \text{CHF } 34'843.49$

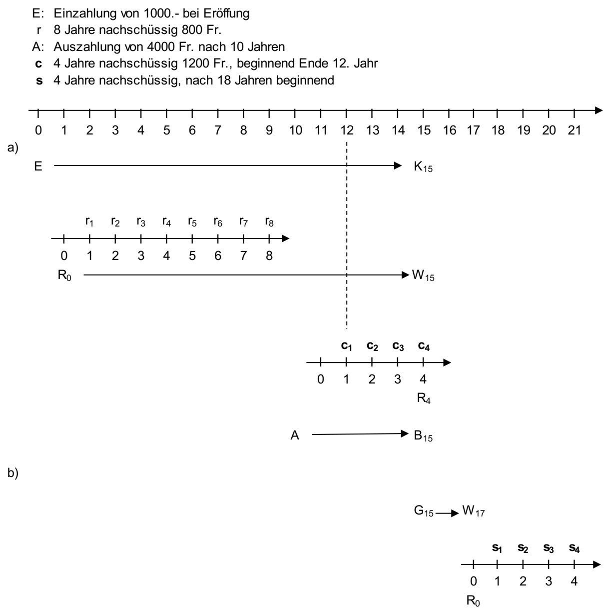
4.12 Endwert der Rente zum Zeitpunkt 14: $R_{10,14} = 3'600 \cdot \frac{1.06^{10}-1}{1.06-1} = 47'450.8618$

Barwert zum Zeitpunkt 0: $K_0 = \frac{47'450.8618}{1.06^{14}} = 20987.562$

K_0 ist zugleich der Barwert der vorschüssigen Rente : $R_0' = \frac{R_n'}{q^n} = r'q \cdot \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$

$r' = \frac{R_0' \cdot q^n \cdot (q-1)}{q \cdot (q^n-1)} = \frac{20987.562 \cdot 1.06^{12} \cdot (1.06-1)}{1.06 \cdot (1.06^{12}-1)} = 2'361.64$

4.13 In der nachstehenden Übersicht sehen wir, wann was passiert:



a) Kontostand ist das Resultat von 4 Finanzierungen

1) Wert der 1000 CHF im Zeitpunkt 15: $K_{15} = 1'000 \cdot 1.04^{15} = 1'800.94$

2) Barwert der 800er Rente im Zeitpunkt 1: $R_{0,1} = 800 \cdot \frac{1.04^8-1}{1.04^8(1.04-1)}$

$= 5'386.196$

$\Rightarrow$ aufgezinst auf Zeitpunkt 15: $W_{15} = 5'386.196 \cdot 1.04^{14} = 9'327.15$

3) Wert derAuszahlung im Zeitpunkt 15: $B_{15} = -4'000 \cdot 1.04^5 = -4'866.61$

4) Wert der 1200er Rente im Zeitpunkt 15: $R_4 = 1'200 \cdot \frac{1.04^4-1}{1.04-1} = 5'095.757$

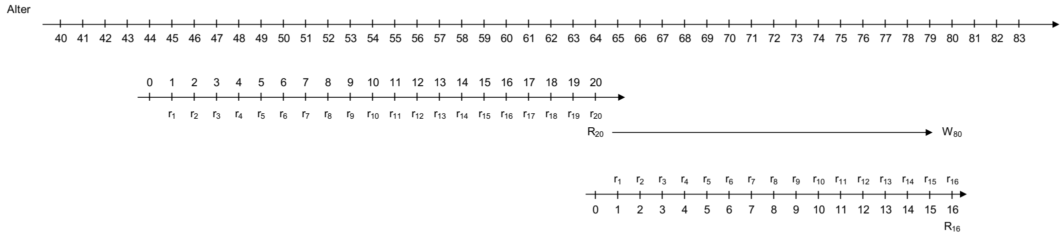
Gesamtwert im Zeitpunkt 15: $G_{15} = K_{15} + W_{15} + B_{15} + R_4 = 11'357.24$

b) Gesamtwert im Zeitpunkt 17: $W_{17} = 11'357.24 \cdot 1.04^2 = 12'283.99$

$W_{17} = R_0 = r \cdot \frac{1.04^4-1}{1.04^4(1.04-1)} = r \cdot 3.6299 = 12'283.99$

$\Rightarrow r = \frac{12'283.99}{3.6299} = 3'384.12$

4.14 In der nachstehenden Übersicht sehen wir, wann was passiert:



Wert der Einzahlungen mit Alter 64: $R_{20} = 6'192 \cdot \frac{1.0325^{20}-1}{1.0325-1} = 170'677.80$

Wert der Einzahlungen mit Alter 80: $W_{80} = 170'677.80 \cdot 1.0325^{16} = 284'720.01$

Endwert nachschüssig der Abhebungen: $R_{16} = 9000 \cdot \frac{1.0325^{16}-1}{1.0325-1} = 185'032.39$

Restguthaben als Differenz : $W_{80} - R_{16} = 284'720.01 - 185'032.39 = 99'687.62$

4.15 Zeitpunkt 0 ist am 31.12.2005. Kapital zum Zeitpunkt 12: $K_{12} = 147'571.27$

K_{12} ist die Summe von drei Finanzierungen:

1) Ersteinlage: $K_{0,12} = 50'000 \cdot 1.0325^4 \cdot 1.02^8 = 66'578.13$

2) Rente 1: $R_{4,12} = r \cdot \frac{1.0325^4-1}{1.0325-1} \cdot 1.02^8 = 4.9201 \cdot r$

3) Rente 2 $R_{5,12} = r \cdot \frac{1.02^5-1}{1.02-1} = 5.2040 \cdot r$

$\Rightarrow 147'571.27 = 66'578.13 + (4.9201 + 5.2040) \cdot r$

und $r = \frac{147'571.27 - 66'578.13}{10.1241} = 8'000$

4.16 Vorschüssige ewige Rente: $B' = \frac{r' \cdot q}{q-1}$

$B'(q-1) = r' \cdot q$ und $B'q - B' = r'q$ und $B'q - r'q = B'$ und $q(B' - r') = B'$

$\Rightarrow q = \frac{B'}{B'-r'} = \frac{1'000'000}{1'000'000-40'000} = \frac{25}{24} = 1.041\overline{6} \Rightarrow i = 4\frac{1}{6}\%$

4.17 a) $K_n = K_0(1+i)^n = 200'000 \cdot 1.05^n = 300'000$

$n = \log_{1.05}\left(\frac{3}{2}\right) = 8.31$, d.h. nach 9 Jahren.

Das Kapital beträgt: $K_9 = 200'000 \cdot 1.05^9 = 310'265.64$

b) Der Zins auf K_9 beträgt $K_9 \cdot 0.05 =$ CHF 15‘513.28