Übungsserie 10

1. a) $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ Diagonal-Dominant:

$8 \geq 5+2$ ✓
$9 \geq 5+1$ ✓
$7 \geq 4+2$ ✓

Das Jacobi-Verfahren konvergiert.

b) $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R) \cdot x^{(k)} + D^{-1} b}$ $b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{32}{7} \end{pmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{121}{84} \\ -\frac{101}{84} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$ $x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{495}{224} \\ -\frac{493}{756} \\ \frac{429}{98} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,21 \\ -0,65 \\ 4,38 \end{pmatrix}$

c) $\|x^{(n)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty$

$B = -D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$

$\|x^{(n)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{517}{96} \approx 5,3854$

d) $\|x^{(n)} - \overline{x}\|_\infty \leq 10^{-4} \leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

$$\frac{10^{-4}}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \cdot (1 - \|B\|) \leq \|B\|^n \Rightarrow \log_{\|B\|}\left(\frac{10^{-4}}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \cdot (1 - \|B\|)\right) \leq n$$

$\|x^{(n)} - \overline{x}\|_\infty \leq 87{,}9326 \leq n$

Es sind 88 Schritte nötig.

e) $\log_{\|B\|}\left(\frac{10^{-4}}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \cdot (1 - \|B\|)\right) \leq n \Rightarrow 83{,}798 \leq n$

Es wurden 84 Schritte benötigt.