Lernziele

1. Funktionen und ihre Graphen
   - Der Begriff der Funktion
   - Definitions- und Wertebereich
   - Graphen von Funktionen
   - Stückweise definierte Funktionen
   - Eigenschaften elementarer Funktionen
   - Beispiele für gebräuchliche Funktionen
2. Kombination, Verkettung und Verknüpfung von Funktionen
   - Rechnen mit Funktionen
   - Verkettung von Funktionen
   - Verschieben und Skalieren von Funktionsgraphen
   - Ellipsen
3. Trigonometrische Funktionen
   - Winkel und Winkelmaße
   - Definition der Funktionen am rechtwinkligen Dreieck
   - Erweiterung dieser Definition
   - Periodizität und Graphen von trigonometrischen Funktionen
   - Trigonometrische Identitäten
   - Kosinussatz

Funktionen

1

ÜBERBLICK

Übersicht

Funktionen sind für die Analysis fundamental. In diesem Kapitel behandeln wir, was Funktionen sind und wie sie grafisch dargestellt werden, wie man sie kombiniert und transformiert und auf welche Weise sie sich klassifizieren lassen. Das Kapitel schließt mit einer ausführlichen Diskussion der trigonometrischen Funktionen.

1.1 Funktionen und ihre Graphen

Funktionen sind ein Hilfsmittel zur Beschreibung der realen Welt mithilfe von mathematischen Begriffen. Eine Funktion lässt sich auf verschiedene Weise darstellen – durch eine Gleichung, einen Graphen, eine Wertetabelle oder eine sprachliche Beschreibung.

Funktionen; Definitions- und Wertebereich

Die Temperatur, bei der Wasser kocht, hängt von der Höhe über dem Meeresspiegel ab (der Siedepunkt sinkt mit zunehmender Höhe). Die auf eine Bareinlage gezahlten Zinsen hängen von der Dauer der Einlage ab. Der Flächeninhalt eines Kreises hängt vom Radius des Kreises ab. Die Entfernung, die ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden zurücklegt, hängt von der verstrichenen Zeit ab.

In jedem Fall hängt der Wert einer veränderlichen Größe, etwa y, vom Wert der anderen variablen Größe ab, die wir beispielsweise x nennen. Wir sagen, dass „y eine Funktion von x" ist und schreiben dies symbolisch als

$$x = f(x) \qquad (\text{„}x \text{ ist gleich } f \text{ von } y\text{"}).$$

In dieser Schreibweise steht das Symbol f für die Funktion, der Buchstabe x steht für die **unabhängige Variable**, das ist der Eingabewert von f, und y steht für die **abhängige Variable** oder den Ausgabewert von f an der Stelle x.

Eine **Funktion** f, die eine Menge D auf eine Menge Y abbildet, ist eine Regel, die jedem Element $x \in D$ *eindeutig* ein (einzelnes) Element $f(x) \in Y$ zuweist.

Definition

Die Menge D aller möglichen Eingabewerte heißt **Definitionsbereich** der Funktion. Die Menge der Werte von $f(x)$ für x aus D heißt **Wertebereich** der Funktion. Es kann sein, dass der Wertebereich nicht jedes Element aus der Menge Y umfasst. Definitionsbereich und Wertebereich einer Funktion können beliebige Mengen von Objekten sein, in der Analysis handelt es sich aber oft um Mengen reeller Zahlen, die wir als Punkte auf einer Koordinatenachse interpretieren.

Häufig ist eine Funktion durch eine Gleichung gegeben, die beschreibt, wie man den Ausgabewert aus der Eingabevariable berechnet. Die Gleichung $A = \pi r^2$ ist beispielsweise eine Vorschrift, mit der man den Flächeninhalt A eines Kreises aus seinem Radius r berechnet (sodass r, als Länge interpretiert, in dieser Gleichung nur positiv sein kann). Wenn wir eine Funktion $y = f(x)$ durch eine Gleichung definieren und der Definitionsbereich nicht explizit angegeben oder durch den Kontext eingeschränkt ist, so nehmen wir als Definitionsbereich die größte Menge reeller x-Werte an, für die die Gleichung reelle y-Werte liefert. Das ist der sogenannte **natürliche Definitionsbereich**. Wollen wir den Definitionsbereich in irgendeiner Weise einschränken, so müssen wir das angeben. Der Definitionsbereich von $y = x^2$ ist die gesamte Menge der reellen Zahlen. Um den Definitionsbereich der Funktion etwa auf positive Werte von x zu beschränken, würden wir „$y = x^2,\ x > 0$" schreiben.

Ändern wir den Definitionsbereich, auf den wir eine Gleichung anwenden, so ändert sich in der Regel auch der Wertebereich. Der Wertebereich von $y = x^2$ ist $[0, \infty)$. Der Wertebereich von $y = x^2,\ x \geq 2$ ist die Menge aller Zahlen, die sich ergibt, wenn man alle Zahlen größer oder gleich 2 quadriert. In Mengenschreibweise ist der Wertebereich $\{x^2 \mid x \geq 2\}$ oder $\{y \mid y \geq 4\}$ oder $[4, \infty)$.

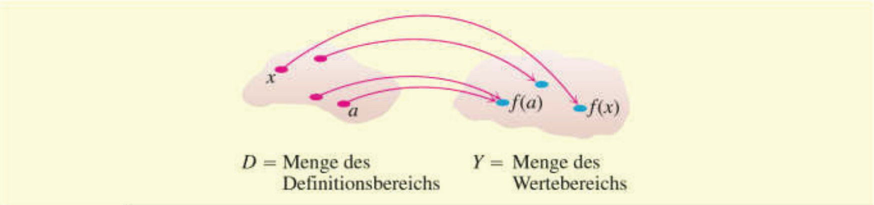


Abbildung 1.1 Eine Funktion von einer Menge D auf eine Menge Y weist jedem Element aus D eindeutig ein Element aus Y zu.

Ist der Wertebereich einer Funktion eine Menge der reellen Zahlen, so heißt die Funktion **reellwertig**. Die Definitionsbereiche und Wertebereiche vieler reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen sind Intervalle oder Kombinationen von Intervallen. Die Intervalle können offen, abgeschlossen oder halboffen sein, zudem endlich oder unendlich. Der Wertebereich einer Funktion ist nicht immer leicht zu bestimmen.

Eine Funktion kann auch in Form eines **Pfeildiagramms** dargestellt werden (▶Abbildung 1.1). Jeder Pfeil verbindet ein Element aus dem Wertebereich D mit einem eindeutigen oder einzelnen Element aus der Menge Y. In Abbildung 1.1 kennzeichnen die Pfeile, dass $f(a)$ mit a, $f(x)$ mit x usw. verbunden ist. Bedenken Sie, dass eine Funktion für zwei verschiedene Eingabewerte aus dem Definitionsbereich *denselben* Wert haben kann (was in Abbildung 1.1 bei $f(a)$ der Fall ist), aber jedem Eingabeelement x wird ein *einziger* Ausgabewert $f(x)$ zugewiesen.

Natürliche Definitions- und Wertebereiche einiger einfacher Funktionen

Beispiel 1.1 Sehen wir uns nun die natürlichen Definitionsbereiche und die entsprechenden Wertebereiche einiger einfacher Funktionen an. Die Definitionsbereiche sind immer die Werte von x, für die die Gleichung sinnvoll ist.

Funktion	Definitionsbereich (x)	Wertebereich (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Lösung Die Gleichung $y = x^2$ liefert für jede reelle Zahl x einen reellen y-Wert, der Definitionsbereich ist also $(-\infty, \infty)$. Der Wertebereich von $y = x^2$ ist $[0, \infty)$, weil das Quadrat jeder reellen Zahl nichtnegativ ist und jede nichtnegative Zahl y das Quadrat ihrer eigenen Quadratwurzel ist, also $y = \left(\sqrt{y}\right)^2$ für $y \geq 0$.

Die Gleichung $y = 1/x$ liefert für jedes x einen reellen y-Wert, außer für $x = 0$. In Übereinstimmung mit den Rechenregeln *können wir keine Zahl durch null dividieren*. Der Wertebereich von $y = 1/x$ ist also die Menge der Kehrwerte aller von null verschiedenen Zahlen, das ist die Menge aller von null verschiedenen Zahlen, weil $y = 1/(1/y)$ ist. Für $y \neq 0$ ist also die Zahl $x = 1/y$ die Eingabe zum Ausgabewert y.

Die Gleichung $y = \sqrt{x}$ liefert nur dann einen reellen y-Wert, wenn $x \geq 0$ ist. Der Wertebereich von $y = \sqrt{x}$ ist $[0, \infty)$, weil jede nichtnegative Zahl die Quadratwurzel einer Zahl ist (nämlich die Quadratwurzel ihres Quadrats).

Die Gleichung $y = \sqrt{1 - x^2}$ liefert für jedes x aus dem abgeschlossenen Intervall von -1 bis 1 einen reellen y-Wert. Außerhalb dieses Intervalls ist $1 - x^2$ negativ, und die

Quadratwurzel dieses Ausdrucks ist keine reelle Zahl. Die Werte von $1 - x^2$ variieren über dem gegebenen Definitionsbereich von 0 bis 1, und dasselbe gilt für die Quadratwurzeln dieser Werte. Der Wertebereich von $\sqrt{1-x^2}$ ist daher $[0,1)$. ■

Graphen von Funktionen

Ist f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D, so besteht ihr **Graph** aus den Punkten in der kartesischen Ebene, deren Koordinaten die Eingabe-Ausgabe-Paare von f sind. In Mengenschreibweise ist der Graph

$$\{(x,f(x)) \mid x \in D\} .$$

Der Graph der Funktion $f(x) = x + 2$ ist die Menge der Punkte mit den Koordinaten (x,y), für die $y = x + 2$ ist. Ihr Graph ist die Gerade aus ►Abbildung 1.2.

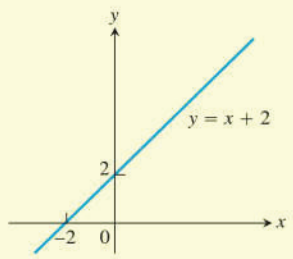


Abbildung 1.2 Der Graph von $f(x) = x + 2$ ist die Menge der Punkte (x,y), für die y den Wert $x + 2$ hat.

Der Graph einer Funktion f gibt einen nützlichen Überblick über ihr Verhalten. Ist (x,y) ein Punkt auf dem Graphen, so ist $y = f(x)$ die Höhe des Graphen über der Stelle x. Die Höhe kann je nach dem Vorzeichen von $f(x)$ positiv oder negativ sein (►Abbildung 1.3).

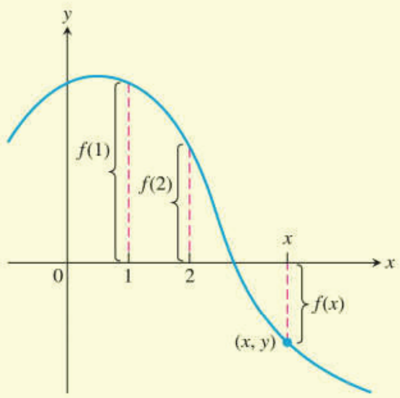


Abbildung 1.3 Liegt der Punkt (x,y) auf dem Graphen von f, so ist $y = f(x)$ die Höhe des Graphen an der Stelle x (oder seine Tiefe, wenn $f(x)$ negativ ist).

Beispiel 1.2 Stellen Sie die Funktion $y = x^2$ über dem Intervall $[-2,2]$ grafisch dar.

Grafische Darstellung einer Funktion

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

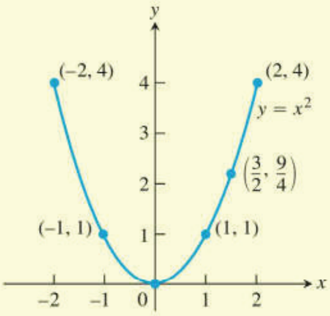


Abbildung 1.4 Graph der Funktion aus Beispiel 1.2.

Lösung Fertigen Sie eine Tabelle von xy-Paaren an, die Gleichung $y = x^2$ erfüllen. Zeichnen Sie die Punkte (x, y) aus der Tabelle in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie die eingezeichneten Punkte durch eine *glatte* Kurve, die sie mit ihrer Gleichung beschriften (▶Abbildung 1.4). ■

Senkrechtentest

Nicht jede Kurve im Koordinatensystem kann der Graph einer Funktion sein. Eine Funktion f kann nur einen Wert $f(x)$ für jedes x aus ihrem Definitionsbereich haben, sodass *keine Senkrechte* den Graphen einer Funktion mehr als einmal schneiden kann. Liegt a im Definitionsbereich der Funktion f, so schneidet die Senkrechte $x = a$ den Graphen von f nur im Punkt $(a, f(a))$.

Ein Kreis kann nicht der Graph einer Funktion sein, weil einige Senkrechten den Kreis zweimal schneiden. Der Kreis aus ▶Abbildung 1.5a auf dieser Seite enthält jedoch die Graphen *zweier* Funktionen von x: Und zwar den oberen Halbkreis, durch die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definiert, und den unteren Halbkreis, durch die Funktion $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ definiert (▶Abbildungen 1.5b und 1.5c).

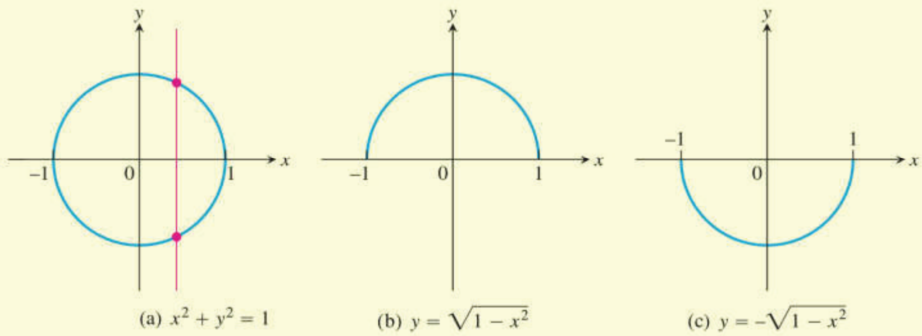


Abbildung 1.5 (a) Der Kreis ist nicht der Graph einer Funktion; er fällt beim Senkrechtentest durch. (b) Der obere Halbkreis ist der Graph einer Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (c) Der untere Halbkreis ist der Graph einer Funktion $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Stückweise definierte Funktionen

Manchmal wird eine Funktion über verschiedenen Teilen ihres Definitionsbereichs durch verschiedene Gleichungen beschrieben. Ein Beispiel ist die **Betragsfunktion**

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0, \end{cases}$$

deren Graph ►Abbildung 1.6 zeigt. Die rechte Seite der Gleichung besagt, dass die Funktion für $x \geq 0$ gleich x ist, für $x < 0$ ist sie $-x$. Es folgt ein weiteres Beispiel.

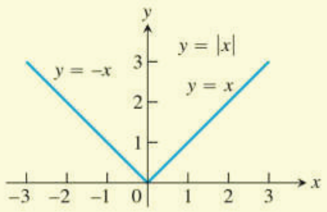


Abbildung 1.6 Die Betragsfunktion hat den Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ und den Wertebereich $[0, \infty)$.

Beispiel 1.3 Die Funktion

Beispiel für eine stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

ist über der gesamten reellen Achse definiert, ihre Werte sind aber in Abhängigkeit von der Stelle x durch verschiedene Gleichungen gegeben. Die Werte von f sind für $x < 0$ durch $y = -x$ gegeben, für $0 \leq x \leq 1$ durch $y = x^2$ und für $x > 1$ durch $y = 1$. Es handelt sich jedoch *um eine einzige Funktion*, deren Definitionsbereich die gesamte Menge der reellen Zahlen ist (►Abbildung 1.7).

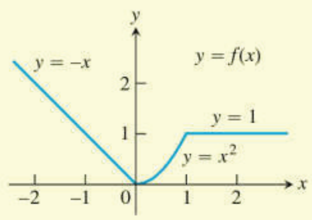


Abbildung 1.7 Zur Darstellung der hier gezeigten Funktion $y = f(x)$ verwenden wir für verschiedene Bereiche des Definitionsbereichs verschiedene Gleichungen (Beispiel 1.3).

Wachsende und fallende Funktionen

Steigt oder *wächst* der Graph einer Funktion beim Durchlaufen von links nach rechts, so nennen wir die Funktion *wachsend*. *Fällt* oder *sinkt* der Graph beim Durchlaufen von links nach rechts, so nennen wir die Funktion *fallend*.

Definition

Sei f eine auf dem Intervall I definierte Funktion, und seien x_1 und x_2 zwei beliebige Stellen in I.

1. Gilt $f(x_2) > f(x_1)$ für alle $x_1 < x_2$, so heißt f **wachsend** auf I.
2. Gilt $f(x_2) < f(x_1)$ für alle $x_1 < x_2$, so heißt f **fallend** auf I.

Es ist wichtig sich klarzumachen, dass die Definitionen von wachsenden und fallenden Funktionen für *jedes* Paar x_1 und x_2 in I mit $x_1 < x_2$ erfüllt sein müssen. Da wir beim Vergleich der Funktionswerte das Relationszeichen $<$ und nicht $\leq$ verwenden, sagen wir mitunter, dass f auf I *streng* wachsend oder fallend ist. Das Intervall I kann endlich (beschränkt) oder unendlich (unbeschränkt) sein, und es besteht per Definition nie aus nur einem Element.

Gerade und ungerade Funktionen: Symmetrie

Die Graphen von *geraden* und *ungeraden* Funktionen haben charakteristische Symmetrieeigenschaften.

Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine

gerade Funktion von x,
wenn für alle x im Definitionsbereich der Funktion $f(-x) = f(x)$ ist,

ungerade Funktion von x,
wenn für alle x im Definitionsbereich der Funktion $f(-x) = -f(x)$ ist.

Die Begriffe *gerade* und *ungerade* hängen mit den Potenzen von x zusammen. Ist y eine gerade Potenz von x, wie in $y = x^2$ oder $y = x^4$, so ist y eine gerade Funktion in x, weil $(-x)^2 = x^2$ und $(-x)^4 = x^4$ ist. Ist y eine ungerade Potenz von x, wie in $y = x$ oder $y = x^3$, ist y eine ungerade Funktion von x, weil $(-x)^1 = -x$ und $(-x)^3 = -x^3$ ist.

Der Graph einer geraden Funktion ist **symmetrisch bezüglich der y-Achse**. Weil $f(-x) = f(x)$ ist, liegt ein Punkt (x, y) genau dann auf dem Graphen, wenn der Punkt $(-x, y)$ auf dem Graphen liegt (▶Abbildung 1.8a). Eine Spiegelung an der y-Achse lässt den Graphen unverändert.

Der Graph einer ungeraden Funktion ist **symmetrisch bezüglich des Ursprungs**. Weil $f(-x) = -f(x)$ ist, liegt ein Punkt (x, y) genau dann auf dem Graphen, wenn der Punkt $(-x, -y)$ auf dem Graphen liegt (▶Abbildung 1.8b). Entsprechend ist ein Graph sym-

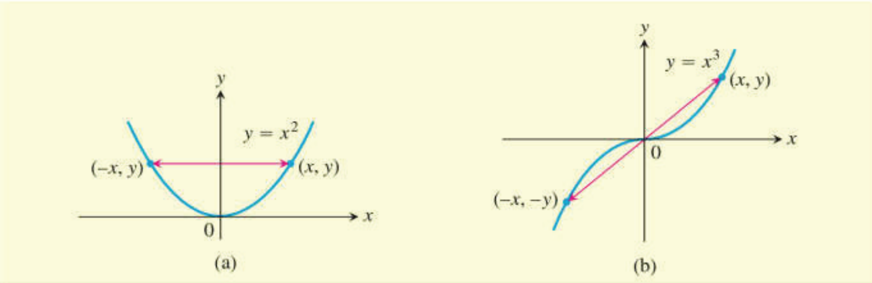


Abbildung 1.8 (a) Der Graph von $y = x^2$ (eine gerade Funktion) ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.
(b) Der Graph $y = x^3$ (eine ungerade Funktion) ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

metrisch bezüglich des Ursprungs, wenn eine Drehung um 180° den Graphen unverändert lässt. Vergegenwärtigen Sie sich, dass die Definitionen voraussetzen, dass sowohl x als auch $-x$ zum Definitionsbereich von f gehört.

Beispiel 1.4

Addition einer Konstanten bei geraden und ungeraden Funktionen

$f(x) = x^2$	Gerade: $(-x)^2 = x^2$ für alle x; Symmetrie bezüglich der y-Achse.
$f(x) = x^2 + 1$	Gerade: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ für alle x; Symmetrie bezüglich der y-Achse (▶Abbildung 1.9a).
$f(x) = x$	Ungerade: $(-x) = -x$ für alle x; Symmetrie bezüglich des Ursprungs.
$f(x) = x + 1$	Nicht ungerade: $f(-x) = -x + 1$, aber $-f(x) = -x - 1$. Die beiden Ergebnisse sind nicht gleich.
	Nicht gerade: $(-x) + 1 \neq x + 1$ für alle $x \neq 0$ (▶Abbildung 1.9b).

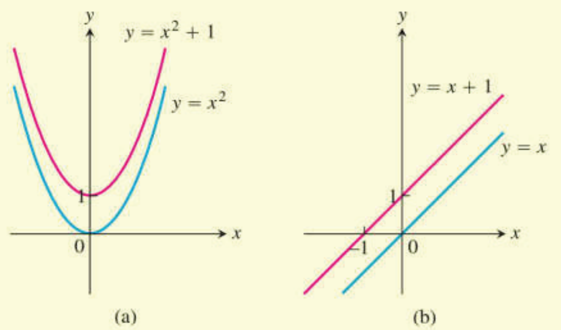


Abbildung 1.9 (a) Addieren wir die Konstante 1 zur Funktion $y = x^2$, so ist die entstehende Funktion $f(x) = x^2 + 1$ immer noch gerade, und ihr Graph ist weiterhin symmetrisch bezüglich der y-Achse. (b) Addieren wir die Konstante 1 zur Funktion $y = x$, so ist die entstehende Funktion $y = x + 1$ nicht mehr ungerade. Die Symmetrie bezüglich des Ursprungs ist verlorengegangen.

Gebräuchliche Funktionen

Eine Vielzahl wichtiger Funktionentypen begegnet uns in der Analysis immer wieder. Hier wollen wir sie nennen und kurz beschreiben.

Lineare Funktionen Eine Funktion der Form $f(x) = mx + b$ mit den Konstanten m und b nennt man **lineare Funktion**. ▶Abbildung 1.10a auf der nächsten Seite zeigt eine Reihe von Geraden $f(x) = mx$ mit $b = 0$, sodass diese Geraden durch den Ursprung verlaufen. Die Funktion $f(x) = x$ mit $m = 1$ und $b = 0$ heißt **identische Funktion**. Konstante Funktionen ergeben sich, wenn die Steigung m gleich null ist (▶Abbildung 1.10b). Eine lineare Funktion mit positiver Steigung, deren Graph durch den Ursprung verläuft, bezeichnet man als *proportionale* Beziehung.

Definition

> Zwei Variablen y und x sind (zueinander) **proportional**, wenn eine Variable immer ein konstantes Vielfaches der anderen ist, d. h., $y = kx$ für eine von null verschiedene Konstante k.

Ist die Variable y proportional zum Kehrwert $1/x$, so bezeichnet man sie mitunter als **umgekehrt proportional** zu x (weil $1/x$ der Kehrwert von x ist).

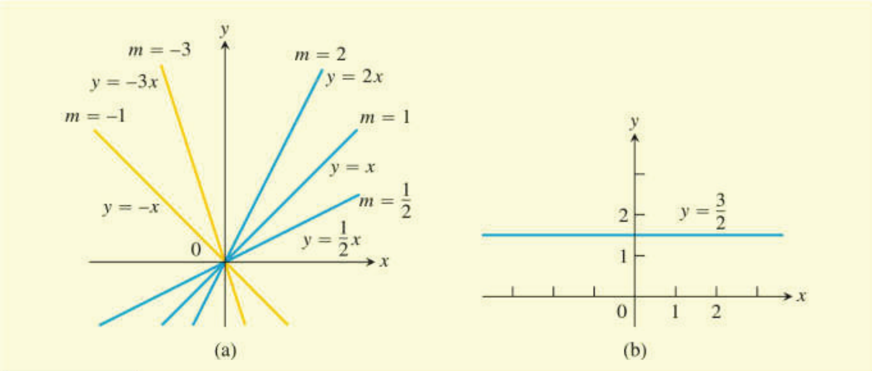


Abbildung 1.10 (a) Geraden durch den Ursprung mit der Steigung m. (b) Eine konstante Funktion mit der Steigung $m = 0$.

Potenzfunktionen Eine Funktion $f(x) = x^a$ mit einer Konstanten a nennt man **Potenzfunktion**. Es sind einige wichtige Fälle zu betrachten.

a $a = n$, a ist eine positive ganze Zahl.

Die Graphen von $f(x) = x^n$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ sind in ►Abbildung 1.11 dargestellt. Diese Funktionen sind für alle reellen Werte von x definiert. Vergegenwärtigen Sie sich, dass die Graphen mit zunehmender Potenz n auf dem Intervall $(-1, 1)$ immer flacher werden und außerdem für $|x| > 1$ immer steiler werden. Jeder Graph verläuft durch den Punkt $P(1, 1)$ und durch den Ursprung. Die Graphen der Funktionen mit geraden Potenzen sind symmetrisch bezüglich der y-Achse; diejenigen mit ungeraden Potenzen sind symmetrisch bezüglich des Ursprungs. Die geradzahligen Potenzen sind auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ fallend und auf dem Intervall $[0, \infty)$ wachsend; die ungeradzahligen Potenzen sind auf dem gesamten Intervall $(-\infty, \infty)$ wachsend.

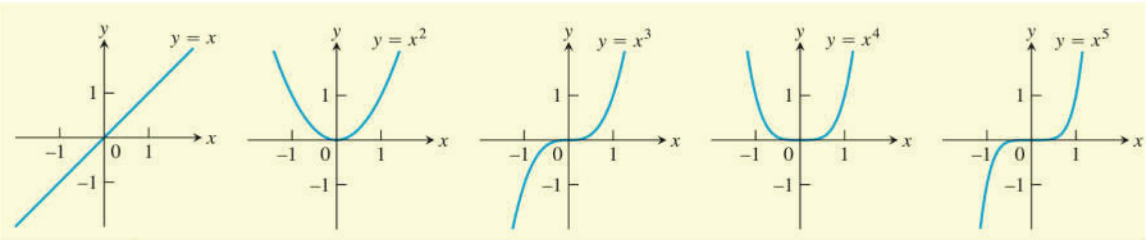


Abbildung 1.11 Graphen von $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, definiert für $-\infty < x < \infty$.

b $a = -1$ oder $a = -2$.

Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^{-1}$ und $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ sind in ►Abbildung 1.12 dargestellt. Beide Funktionen sind für alle $x \neq 0$ definiert (Division durch null ist verboten). Der Graph von $y = 1/x$ ist die Hyperbel $xy = 1$, die sich weit vom Ursprung an die Koordinatenachsen schmiegt. Der Graph der Funktion f ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs; f ist auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ fallend. Der Graph der Funktion g ist symmetrisch bezüglich der y-Achse; g ist auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ wachsend und auf dem Intervall $(0, \infty)$ fallend.

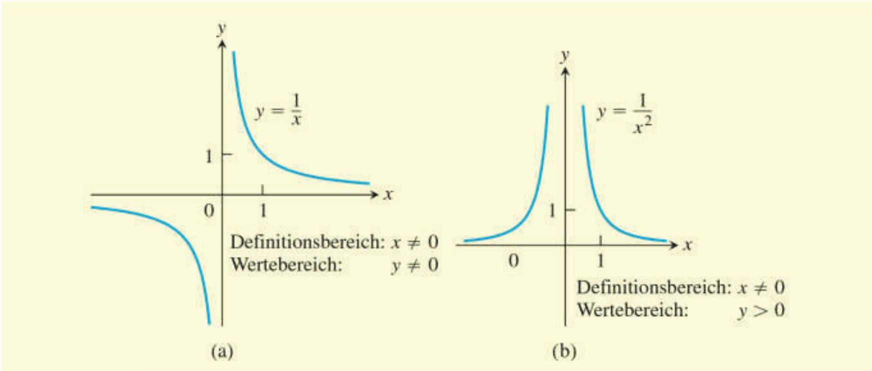


Abbildung 1.12 Graphen der Potenzfunktionen $f(x) = x^a$: (a) $a = -1$ und (b) $a = -2$.

c $a = \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{3}{2}$ und $\frac{2}{3}$.

Die Funktionen $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ heißen **Quadratwurzel** beziehungsweise **kubische Wurzel**. Der Definitionsbereich der Quadratwurzelfunktion ist $[0, \infty)$, die kubische Wurzel ist hingegen für alle reellen x definiert. Die Graphen dieser beiden Funktionen sind zusammen mit den Graphen $y = x^{3/2}$ und $y = x^{2/3}$ in ▶Abbildung 1.13 dargestellt. (Denken Sie daran, dass $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ und $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$ ist.)

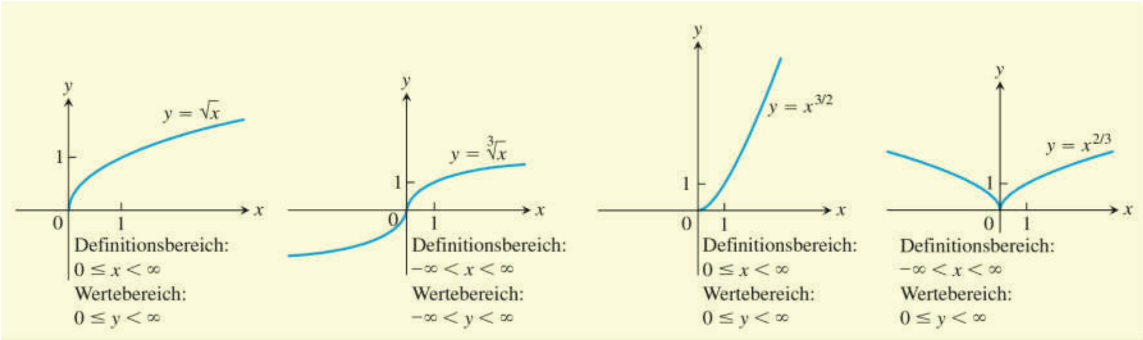


Abbildung 1.13 Graphen der Potenzfunktionen $f(x) = x^a$ für $a = \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{3}{2}$ und $\frac{2}{3}$.

Polynome Eine Funktion p ist ein **Polynom**, wenn

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ist. Dabei ist n eine nichtnegative ganze Zahl, und die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind reelle Konstanten (die sogenannten **Koeffizienten** des Polynoms). Alle Polynome haben den Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$. Ist der führende Koeffizient $a_n \neq 0$ und $n > 0$, so bezeichnen wir n als **Grad** des Polynoms. Lineare Funktionen mit $m \neq 0$ sind Polynome vom Grad 1. Polynome vom Grad 2, üblicherweise in der Form $p(x) = ax^2 + bx + c$, nennt man **quadratische Funktionen**. Analog sind **kubische Funktionen** Polynome $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vom Grad 3. ▶Abbildung 1.14 auf der nächsten Seite zeigt die Graphen der drei Polynome. Techniken zum Zeichnen von Polynomen werden in Kapitel 4 behandelt.

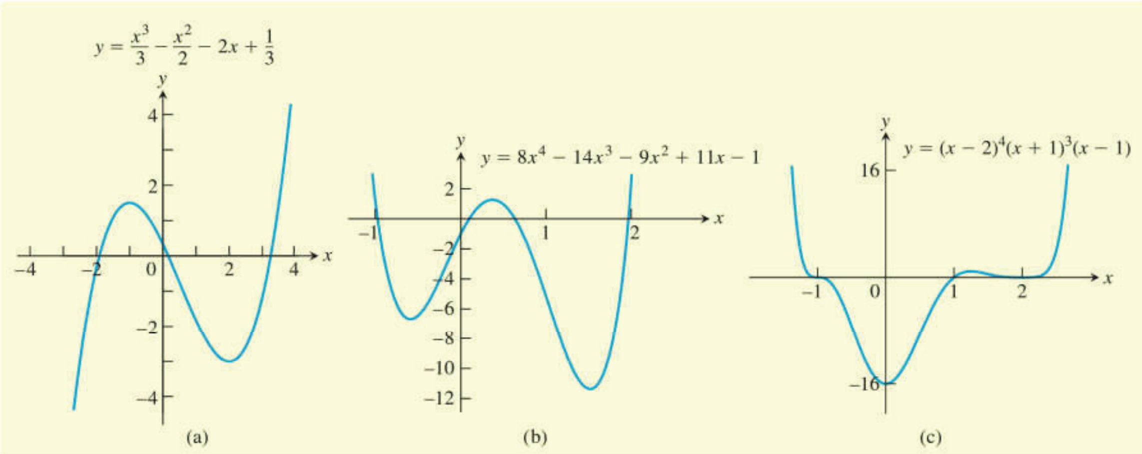


Abbildung 1.14 Graphen dreier Polynome.

Rationale Funktionen Eine **rationale Funktion** ist ein Quotient $f(x) = p(x)/q(x)$ aus den Polynomen p und q. Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die $q(x) \neq 0$ ist. In ▶Abbildung 1.15 sind die Graphen einiger rationaler Funktionen dargestellt.

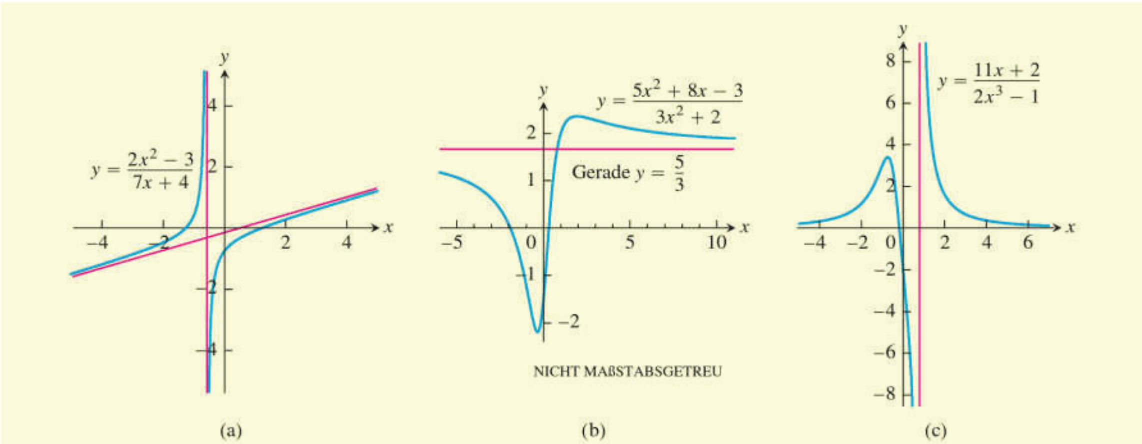


Abbildung 1.15 Graphen dreier rationaler Funktionen. Die roten Geraden nennt man *Asymptoten*. Sie sind nicht Teil des Graphen.

Algebraische Funktionen Jede Funktion, die mithilfe von algebraischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Wurzelziehen) aus Polynomen hervorgegangen ist, liegt in der Klasse der **algebraischen Funktionen**. Alle rationalen Funktion sind algebraisch, ▶Abbildung 1.16 zeigt die Graphen dreier algebraischer Funktionen.

Trigonometrische Funktionen Die sechs grundlegenden trigonometrischen Funktionen werden in Abschnitt 1.3 behandelt. Die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion sind in ▶Abbildung 1.17 dargestellt.

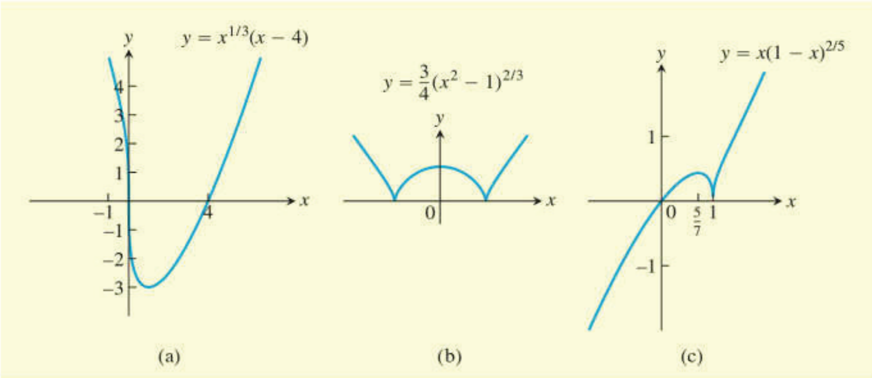


Abbildung 1.16 Graphen dreier algebraischer Funktionen.

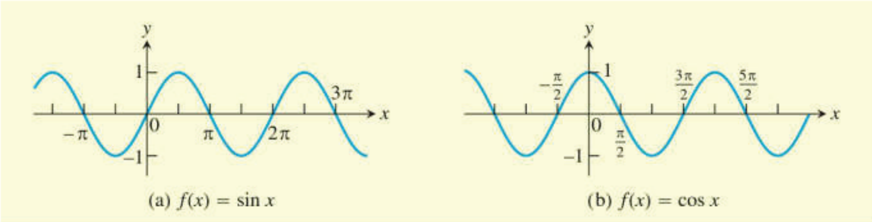


Abbildung 1.17 Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion.

Exponentialfunktionen Funktionen der Form $f(x) = a^x$ mit der Basis $a > 0$ und $a \neq 1$ nennt man **Exponentialfunktionen**. Alle Exponentialfunktionen haben den Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ und den Wertebereich $(0, \infty)$, sodass eine Exponentialfunktion nie den Wert 0 annimmt. Die Graphen einiger Exponentialfunktionen sind in ▶Abbildung 1.18 dargestellt.

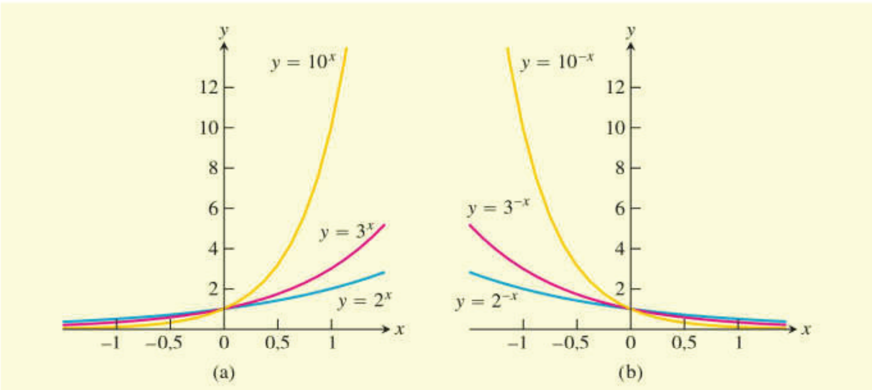


Abbildung 1.18 Graphen von Exponentialfunktionen.

Logarithmische Funktionen Funktionen der Form $f(x) = \log_a x$ mit der positiven konstanten Basis $a \neq 1$ werden als **logarithmische Funktionen** bezeichnet. Sie sind die *inversen Funktionen* der Exponentialfunktionen. ▶Abbildung 1.19 zeigt die Graphen von vier logarithmischen Funktionen mit unterschiedlichen Basen. In allen Fällen ist der Definitionsbereich $(0, \infty)$, und der Wertebereich ist $(-\infty, \infty)$.

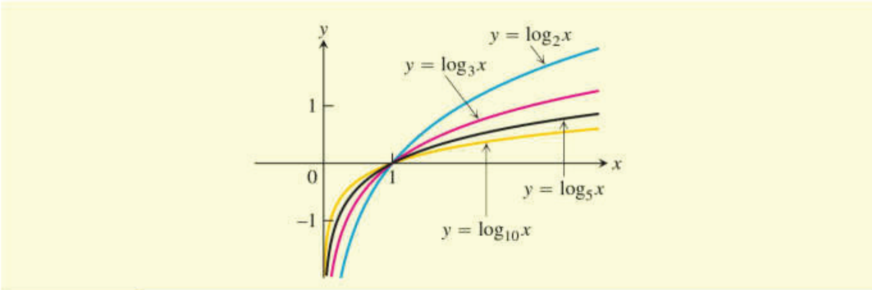


Abbildung 1.19 Graphen von vier logarithmischen Funktionen.

Transzendente Funktionen Das sind Funktionen, die nicht algebraisch sind. Dazu gehören die trigonometrischen, invers trigonometrischen, exponentiellen und logarithmischen Funktionen sowie viele andere Funktionen.

Aufgaben zum Abschnitt 1.1

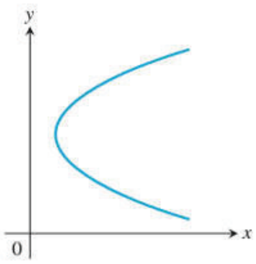
Funktionen Bestimmen Sie in den Aufgaben 1 – 3 den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion.

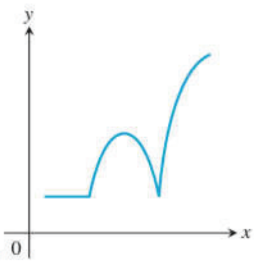
1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

3. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

4. Welcher der beiden Graphen ist eine Funktion von x? Begründen Sie Ihre Antwort.

a. 

b. 

Funktionsgleichungen bestimmen

5. Drücken Sie den Flächeninhalt und den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks als Funktion der Seitenlänge x des Dreiecks aus.

6. Betrachten Sie den Punkt (x, y), der auf dem Graphen der Geraden $2x + 4y = 5$ liegt. Sei L der Abstand des Punktes (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$. Schreiben Sie L als eine Funktion von x.

Funktionen und Graphen Bestimmen Sie den Definitionsbereich und zeichnen Sie die Funktionen aus den Aufgaben 7 – 9.

7. $f(x) = 5 - 2x$

8. $g(x) = \sqrt{|x|}$

9. $F(t) = t/|t|$

10. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von

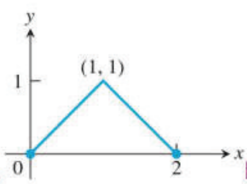
$$y = \frac{x+3}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}.$$

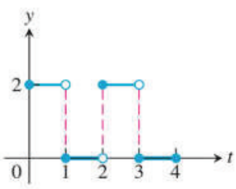
Stückweise definierte Funktionen Zeichnen Sie die Funktionen aus den Aufgaben 11 und 12.

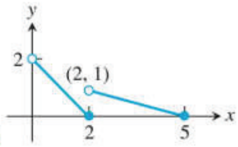
11. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

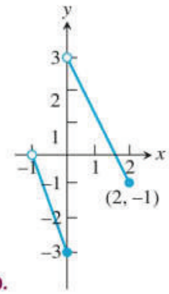
12. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

Geben Sie für die in den Aufgaben 13 und 14 gezeichneten Funktionen jeweils eine Gleichung an.

13. a. 

b. 

14. **a.**


b.


Wachsende und fallende Funktionen Zeichnen Sie die Funktionen aus den Aufgaben 15 – 19. Welche Symmetrien weisen die Graphen gegebenenfalls auf? Geben Sie die Intervalle an, auf denen die Funktion wächst und auf denen sie fällt.

15. $y = -x^3$

16. $y = -\dfrac{1}{x}$

17. $y = \sqrt{|x|}$

18. $y = x^3/8$

19. $y = -x^{3/2}$

Gerade und ungerade Funktionen Entscheiden Sie in den Aufgaben 20 – 25, ob die Funktion gerade, ungerade oder keines von beiden ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

20. $f(x) = 3$

21. $f(x) = x^2 + 1$

22. $g(x) = x^3 + x$

23. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

24. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$

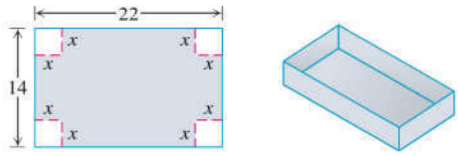
25. $h(t) = 2t + 1$

Theorie und Beispiele

26. Die Variable s ist proportional zu t, und s ist gleich 25, wenn t gleich 75 ist. Bestimmen Sie t für $s = 60$.

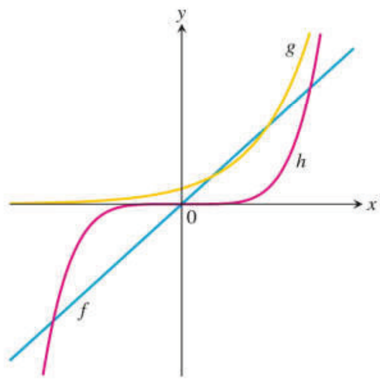
27. **Kinetische Energie** Die kinetische Energie E_{kin} einer Masse ist proportional zum Quadrat ihrer Geschwindigkeit v. Sei $E_{\text{kin}} = 12\,960$ Joule für $v = 18$ m/s. Wie groß ist E_{kin} für $v = 10$ m/s?

28. Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 35 cm × 35 cm soll eine offene Schachtel konstruiert werden, indem man Quadrate der Seitenlänge x an jeder Ecke herausschneidet und anschließend die Seiten hochfaltet wie in der Abbildung dargestellt. Drücken Sie das Volumen V der Schachtel als Funktion von x aus.



Ordnen Sie die Gleichungen den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu. Verwenden Sie kein grafisches Hilfsmittel und begründen Sie Ihre Antwort.

29. **a.** $y = 5x$ **b.** $y = 5^x$ **c.** $y = x^5$



30. **a.** Stellen Sie die Funktionen $f(x) = x/2$ und $g(x) = 1 + (4/x)$ in einem Koordinatensystem grafisch dar, um zu bestimmen, für welche x

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x} \quad \text{ist.}$$

b. Bestätigen Sie Ihre Ergebnisse aus Teil **a.** algebraisch.

31. Es soll ein Pferch in Form eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks mit der Schenkellänge x m und der Hypotenuse y m gebaut werden. Angenommen, die Umzäunung kostet für die Schenkel 10 Euro/m und für die Hypotenuse 15 Euro/m. Schreiben Sie die Gesamtkosten C für die Konstruktion als Funktion von h.

1.2 Funktionen kombinieren; Graphen verschieben und skalieren

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit den wesentlichen Arten, wie Funktionen zu neuen Funktionen kombiniert oder transformiert werden.

Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten

Wie Zahlen können auch Funktionen addiert, subtrahiert, multipliziert und (sofern der Nenner nicht null ist) dividiert werden, um neue Funktionen zu erhalten. Sind f und g Funktionen, so definieren wir für alle x, die sowohl zum Definitionsbereich von f als auch zum Definitionsbereich von g gehören (also für $x \in D(f) \cap D(g)$), die Funktionen $f+g$, $f-g$ und fg durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x),\\ (fg)(x) &= f(x)\,g(x).\end{aligned}$$

Vergegenwärtigen Sie sich, dass das $+$-Zeichen auf der linken Seite der ersten Gleichung die Operation der Addition von *Funktionen* kennzeichnet, während das $+$-Zeichen auf der rechten Seite der Gleichung für die Addition der reellen Zahlen $f(x)$ und $g(x)$ steht.

An jeder Stelle von $D(f) \cap D(g)$, an der $g(x) \neq 0$ ist, können wir auch die Funktion f/g durch die folgende Gleichung definieren:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{für } g(x) \neq 0)\,.$$

Funktionen können auch mit Konstanten multipliziert werden: Ist c eine reelle Zahl, so ist die Funktion cf für alle x durch die folgende Gleichung definiert:

$$(cf)(x) = cf(x)\,.$$

Algebraische Kombinationen zweier Funktionen

Beispiel 1.5 Die durch die Gleichungen

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

definierten Funktionen haben die Definitionsbereiche $D(f) = [0,\infty)$ und $D(g) = (-\infty, 1]$.

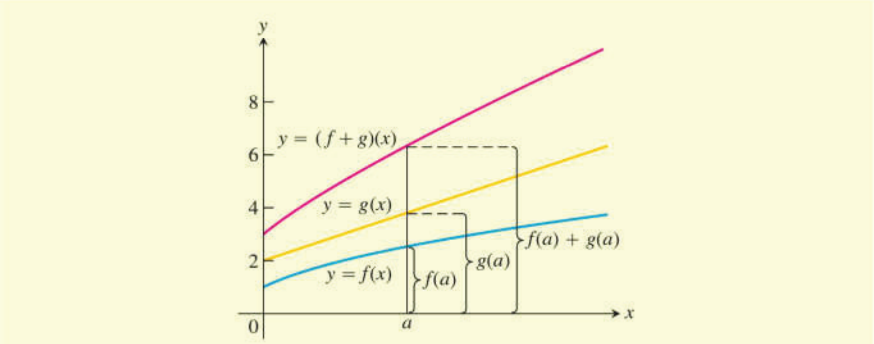


Abbildung 1.20 Grafische Addition zweier Funktionen.

Diese Definitionsbereiche haben folgende Punkte gemeinsam:

$$[0,\infty) \cap (-\infty,1] = [0,1] .$$

Die nachfolgende Tabelle fasst die Gleichungen und Definitionsbereiche für die verschiedenen algebraischen Kombinationen der beiden Funktionen zusammen. Wir schreiben auch $f \cdot g$ für die Produktfunktion fg.

Funktion	Gleichung	Definitionsbereich
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0,1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0,1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ ($x = 1$ ausgenommen)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ ($x = 0$ ausgenommen)

Den Graphen der Funktion $f+g$ erhält man aus den Graphen von f und g, indem man die entsprechenden y-Koordinaten $f(x)$ und $g(x)$ an jeder Stelle $x \in D(f) \cap D(g)$ addiert, wie in ▶Abbildung 1.20 auf der vorherigen Seite dargestellt. Die Graphen $f+g$ und $f \cdot g$ aus Beispiel 1.5 sind in ▶Abbildung 1.21 dargestellt.

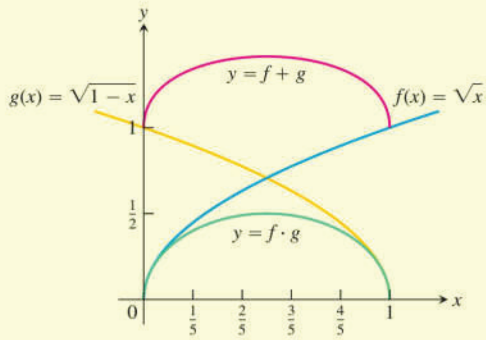


Abbildung 1.21 Der Definitionsbereich der Funktion $f+g$ ist die Schnittmenge der Definitionsbereiche von f und g, nämlich das Intervall $[0,1]$ auf der x-Achse, wo sich diese Definitionsbereiche überlappen. Dieses Intervall ist zugleich der Definitionsbereich der Funktion $f \cdot g$ (Beispiel 1.5).

Verkettete Funktionen

Verkettung (Zusammensetzung) ist eine weitere Methode, Funktionen zu kombinieren.

Definition

Sind f und g Funktionen, so ist die **verkettete** Funktion $f \circ g$ („f mit g verkettet“) durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

definiert. Der Definitionsbereich von $f \circ g$ besteht aus den Zahlen x aus dem Definitionsbereich von g, für die $g(x)$ im Definitionsbereich von f liegt.

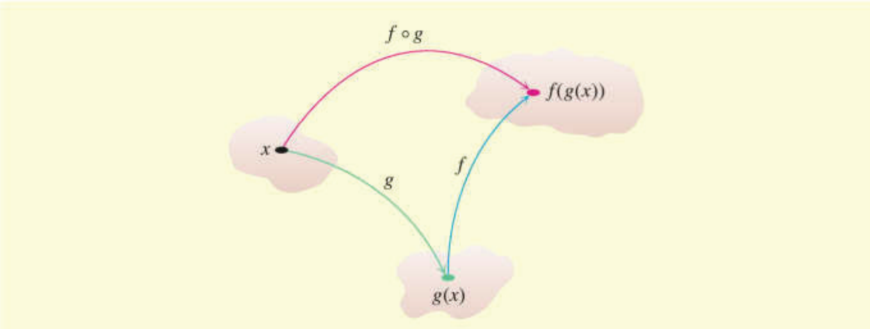


Abbildung 1.22 Pfeildiagramm für $f \circ g$.

Die Definition besagt, dass $f \circ g$ gebildet werden kann, wenn der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f liegt. Um $(f \circ g)(x)$ zu bestimmen, bestimmt man *zuerst* $g(x)$ und *dann* $f(g(x))$, das heißt, man geht von „innen nach außen" vor.

Um die verkettete Funktion $g \circ f$ (wo sie definiert ist) zu berechnen, bestimmen wir zunächst $f(x)$ und dann $g(f(x))$ (►Abbildung 1.22). Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist die Menge der Zahlen x im Definitionsbereich von f, sodass $f(x)$ im Definitionsbereich von g liegt.

Die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ sind in der Regel sehr verschieden.

Verschiedene Verkettungen zweier Funktionen

Beispiel 1.6 Bestimmen Sie für $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x + 1$ folgende Verkettungen:

a $(f \circ g)(x)$ b $(g \circ f)(x)$ c $(f \circ f)(x)$ d $(g \circ g)(x)$

Lösung

	Verkettung	Definitionsbereich
a	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
b	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
c	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
d	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Um nachzuvollziehen, warum der Definitionsbereich von $f \circ g$ gleich $[-1, \infty)$ ist, vergegenwärtigen Sie sich, dass $g(x) = x + 1$ zwar für alle reellen x definiert ist, aber nur zum Definitionsbereich von f gehört, wenn $x + 1 \geq 0$ ist, also für $x \leq -1$. ■

Bedenken Sie, dass für $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ die Verkettung $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ ist. Der Definitionsbereich von $f \circ g$ ist jedoch nicht $(-\infty, \infty)$, sondern $[0, \infty)$, weil $\sqrt{x}$ als Definitionsbereich $x \geq 0$ fordert.

Den Graphen einer Funktion verschieben

Ein üblicher Weg, eine neue Funktion aus einer existierenden Funktion zu erhalten, besteht darin, zu jeder Ausgabe oder jeder Eingabe der existierenden Funktion eine Konstante zu addieren. Der Graph der neuen Funktion ist der Graph der ursprünglichen Funktion, nur vertikal oder horizontal verschoben, und zwar folgendermaßen:

Verschiebung

Vertikale Verschiebungen

$y = f(x) + k$ verschiebt Graph von f für $k > 0$ um k Einheiten nach *oben*
verschiebt Graph von f für $k < 0$ um $|k|$ Einheiten nach *unten*

Horizontale Verschiebungen

$y = f(x + h)$ verschiebt Graph von f für $h > 0$ um h Einheiten nach *links*
verschiebt Graph von f für $h < 0$ um h Einheiten nach *rechts*

Beispiel 1.7

Verschiebung einer quadratischen Funktion

a Addieren wir zur rechten Seite der Gleichung $y = x^2$ die Konstante 1, so erhalten wir $y = x^2 + 1$, der Graph wird um 1 Einheit nach oben verschoben (►Abbildung 1.23).

b Addieren wir zur rechten Seite der Gleichung $y = x^2$ die Konstante -2, so erhalten wir $y = x^2 - 2$, der Graph wird um 2 Einheiten nach unten verschoben (Abbildung 1.23).

c Addieren wir zu x in der Gleichung $y = x^2$ die Konstante 3, so erhalten wir $y = (x + 3)^2$, der Graph wird um 3 Einheiten nach links verschoben (►Abbildung 1.24).

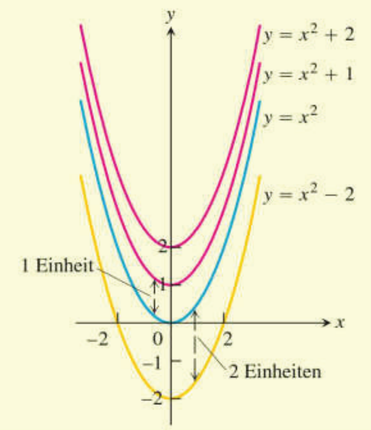


Abbildung 1.23 Um den Graphen von $f(x) = x^2$ nach oben (oder unten) zu verschieben, addieren wir positive (oder negative) Konstanten zur Funktionsgleichung (Beispiel 1.7a und b).

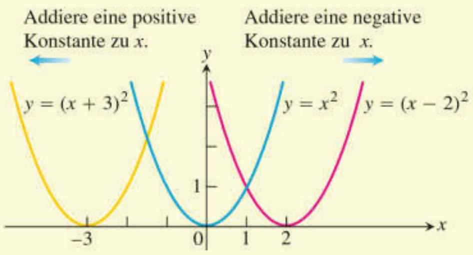


Abbildung 1.24 Um den Graphen $y = x^2$ nach links zu verschieben, addieren wir eine positive Konstante zu x (Beispiel 1.7c). Um den Graphen nach rechts zu verschieben, addieren wir zu x eine negative Konstante.

Den Graphen einer Funktion skalieren und spiegeln

Den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ zu skalieren bedeutet, ihn vertikal oder horizontal zu strecken oder zu stauchen. Dazu multipliziert man die Funktion f oder die unabhängige Variable x mit einer geeigneten Konstante c. Spiegelungen an den Koordinatenachsen sind Spezialfälle mit $c = -1$.

Vertikale und horizontale Skalierung und Spiegelung

Für $c > 1$ wird der Graph skaliert:

$y = cf(x)$	Streckt den Graphen von f vertikal um einen Faktor c.
$y = \frac{1}{c}f(x)$	Staucht den Graphen von f vertikal um einen Faktor c.
$y = f(cx)$	Staucht den Graphen von f horizontal um einen Faktor c.
$y = f(x/c)$	Streckt den Graphen von f horizontal um einen Faktor c.

Für $c = -1$ wird der Graph gespiegelt:

$y = -f(x)$	Spiegelt den Graphen von f an der x-Achse.
$y = f(-x)$	Spiegelt den Graphen von f an der y-Achse.

Skalierung und Spiegelung von $\sqrt{x}$

Beispiel 1.8 Hier skalieren und spiegeln wir den Graphen von $y = \sqrt{x}$.

a **Vertikal:** Multiplizieren wir die rechte Seite von $y = \sqrt{x}$ mit 3, so erhalten wir $y = 3\sqrt{x}$, der Graph wird um einen Faktor 3 vertikal gestreckt, Multiplikation mit $1/3$ staucht den Graphen um einen Faktor 3 (▶Abbildung 1.25).

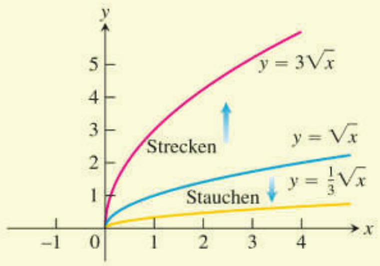


Abbildung 1.25 Vertikale Streckung und Stauchung des Graphen von $y = \sqrt{x}$ um einen Faktor 3 (Beispiel 1.8a).

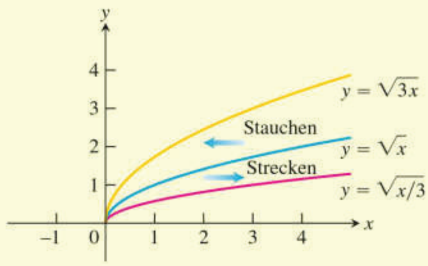


Abbildung 1.26 Horizontale Streckung und Stauchung des Graphen von $y = \sqrt{x}$ um einen Faktor 3 (Beispiel 1.8b).

b **Horizontal:** Der Graph von $y = \sqrt{3x}$ ist eine horizontale Stauchung des Graphen von $y = \sqrt{x}$ um einen Faktor 3, und $y = \sqrt{x/3}$ ist eine horizontale Streckung um einen Faktor 3 (▶Abbildung 1.26 auf der vorherigen Seite). Vergegenwärtigen Sie sich, dass $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ ist, sodass eine horizontale Stauchung einer vertikalen Streckung um einen anderen Skalierungsfaktor entsprechen *kann*. Genauso kann eine horizontale Streckung einer vertikalen Stauchung um einen anderen Skalierungsfaktor entsprechen.

c **Spiegelung:** Der Graph von $y = -\sqrt{x}$ ist eine Spiegelung von $y = \sqrt{x}$ an der x-Achse, und $y = \sqrt{-x}$ ist eine Spiegelung an der y-Achse (▶Abbildung 1.27).

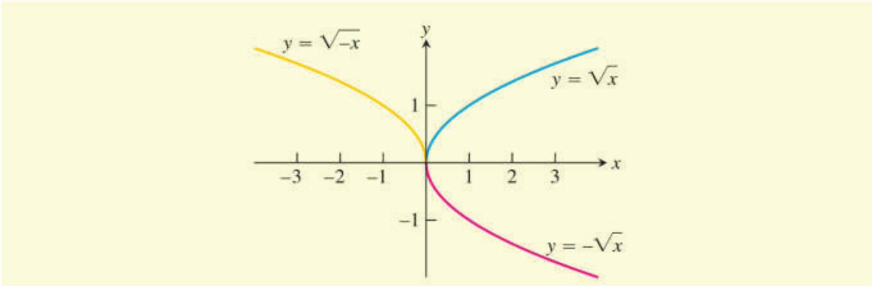


Abbildung 1.27 Spiegelung des Graphen von $y = \sqrt{x}$ an den Koordinatenachsen (Beispiel 1.8c).

Ellipsen

Obwohl sie keine Graphen von Funktionen sind, lassen sich Ellipsen genauso horizontal oder vertikal strecken wie die Graphen von Funktionen. Die Standardgleichung eines Kreises mit dem Radius r, der um den Ursprung zentriert ist, lautet

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Setzen wir in die Standardgleichung eines Kreises (▶Abbildung 1.28a) cx anstelle von x ein, so erhalten wir

$$c^2x^2 + y^2 = r^2 . \tag{1.1}$$

Für $0 < c < 1$ ist der Graph von Gleichung (1.1) ein horizontal gestreckter Kreis; für $c > 1$ ist der Kreis horizontal gestaucht. In beiden Fällen ist der Graph von Gleichung (1.1) eine Ellipse (▶Abbildung 1.28). Überzeugen Sie sich anhand von Abbildung 1.28,

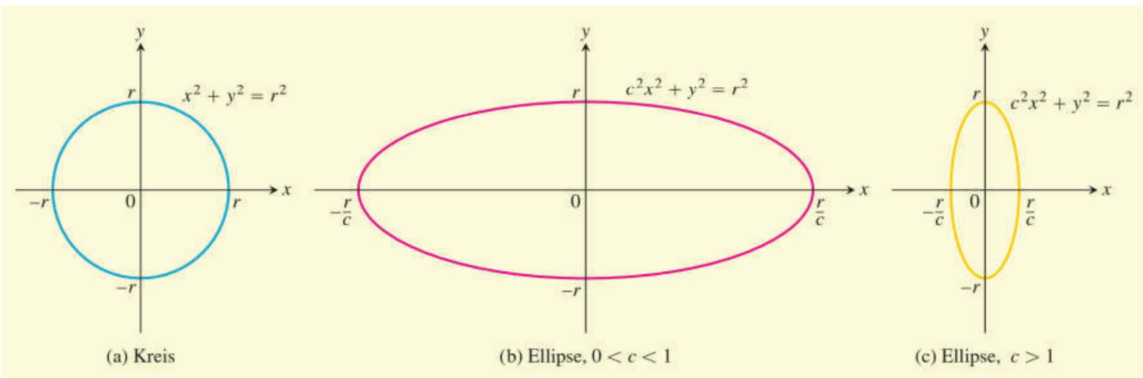


Abbildung 1.28 Horizontale Streckung und Stauchung eines Kreises erzeugt Graphen von Ellipsen.

dass die Schnittpunkte mit der y-Achse für alle drei Graphen $-r$ und r sind. In ▶Abbildung 1.28b heißt das Geradensegment zwischen den Punkten $(\pm r/c, 0)$ die **Hauptachse** der Ellipse; die **Nebenachse** ist das Geradensegment zwischen den Punkten $(0, \pm r)$. In ▶Abbildung 1.28c sind die Achsen der Ellipse vertauscht: Die Hauptachse ist das Geradensegment zwischen $(0, \pm r)$, und die Nebenachse ist das Geradensegment zwischen den Punkten $(\pm r/c, 0)$. In beiden Fällen ist die Hauptachse das längere Geradensegment.

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung (1.1) durch r^2, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2}$$

mit $a = r/c$ und $b = r$. Für $a > b$ ist die Hauptachse horizontal; für $a < b$ ist die Hauptachse vertikal. Der **Mittelpunkt** der durch Gleichung (1.2) gegebenen Ellipse ist der Ursprung.

Setzen wir $x - h$ und $y - k$ anstelle von x und y ein, so wird Gleichung (1.2) zu

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\,. \tag{1.3}$$

Gleichung (1.3) ist die **Standardgleichung einer Ellipse** mit dem Mittelpunkt (h, k).

Aufgaben zum Abschnitt 1.2

Algebraisch kombinieren Bestimmen Sie in den Aufgaben 1 und 2 Definitionsbereich und Wertebereich der Funktionen $f, g, f+g$ und $f \circ g$.

1. $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \sqrt{x-1}$

Funktionen verketten Geben Sie in den Aufgaben 3 und 4 eine Gleichung für $f \circ g \circ h$ an.

3. $f(x) = x+1,\ g(x) = 3x,\ h(x) = 4-x$

4. $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \frac{1}{x+4},\ h(x) = \frac{1}{x}$

5. Kopieren und ergänzen Sie die folgende Tabelle.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x-7$	$\sqrt{x}$	?
b.	$x+2$	$3x$	?
c.	?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	?
e.	?	$1+\frac{1}{x}$	x
f.	$\frac{1}{x}$	?	x

6. Berechnen Sie jeden Ausdruck mithilfe der Werte aus der nachfolgenden Tabelle.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

a. $f(g(-1))$ **c.** $f(f(-1))$ **e.** $g(f(-2))$
b. $g(f(0))$ **d.** $g(g(2))$ **f.** $f(g(1))$

7. Sei $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Bestimmen Sie eine Funktion $y = g(x)$, sodass $(f \circ g)(x) = x$ ist.

8. Sei $f(x) = 2x^3 - 4$. Bestimmen Sie eine Funktion $y = g(x)$, sodass $(f \circ g)(x) = x + 2$ ist.

Graphen verschieben

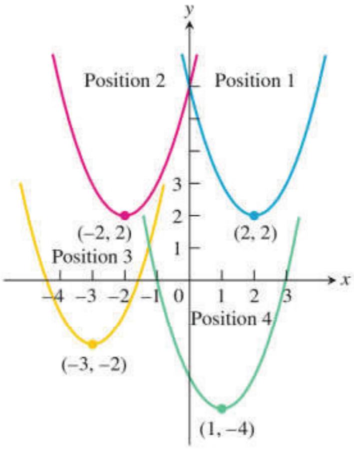
9. Ordnen Sie die Gleichungen aus den Teilen **a.** bis **d.** den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu.

a. $y = (x-1)^2 - 4$

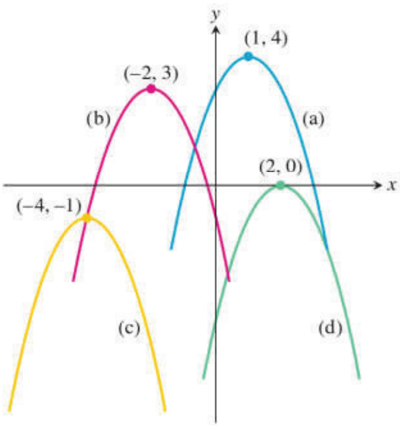
b. $y = (x-2)^2 + 2$

c. $y = (x+2)^2 + 2$

d. $y = (x+3)^2 - 2$



10. Die nachfolgende Abbildung zeigt den an vier neue Positionen verschobenen Graphen von $y = -x^2$. Schreiben Sie die Gleichung für jeden neuen Graphen auf.



Stellen Sie die Graphen aus den Aufgaben 11 – 20 grafisch dar.

11. $y = \sqrt{x+4}$

12. $y = |x-2|$

13. $1 + \sqrt{x-1}$

14. $y = (x+1)^{2/3}$

15. $y = 1 - x^{2/3}$

16. $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$

17. $y = \dfrac{1}{x-2}$

18. $y = \dfrac{1}{x} + 2$

19. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

20. $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$

Vertikal und horizontal skalieren In den Aufgaben 21 – 25 ist angegeben, um welchen Faktor und in welche Richtung die Graphen der gegebenen Funktionen gestreckt oder gestaucht werden sollen. Geben Sie eine Gleichung für den gestreckten oder gestauchten Graphen an.

21. $y = x^2 - 1$, vertikal um einen Faktor 3 strecken

22. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, vertikal um einen Faktor 2 stauchen

23. $y = \sqrt{x+1}$, horizontal um einen Faktor 4 stauchen

24. $y = \sqrt{4-x^2}$, vertikal um einen Faktor 4 stauchen

25. $y = 1 - x^3$, horizontal um einen Faktor 2 strecken

Ellipsen beschreiben In den Aufgaben 26 – 28 sind Gleichungen von Ellipsen gegeben. Bringen Sie alle Gleichungen in Standardform und zeichnen Sie die Ellipsen.

26. $9x^2 + 25y^2 = 225$

27. $3x^2 + (y-2)^2 = 3$

28. $3(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 6$

29. Geben Sie eine Gleichung für die Ellipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ an, die um 4 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach oben verschoben wurde. Zeichnen Sie diese Ellipse und kennzeichnen Sie ihren Mittelpunkt und die Hauptachse.

Funktionen kombinieren

30. Nehmen Sie an, dass f eine gerade und g eine ungerade Funktion ist und dass beide Funktionen auf der gesamten reellen Achse $\mathbb{R}$ definiert sind. Welche der folgenden (wo definierten) Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a. fg **d.** $f^2 = ff$ **g.** $g \circ f$
b. f/g **e.** $g^2 = gg$ **h.** $f \circ f$
c. g/f **f.** $f \circ g$ **i.** $g \circ g$

31. *(Fortsetzung von Beispiel 1.5 auf Seite 28)* Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{1-x}$ zusammen mit **a.** ihrer Summe, **b.** ihrem Produkt, **c.** ihren beiden Differenzen und **d.** ihren beiden Quotienten.

1.3 Trigonometrische Funktionen

Dieser Abschnitt behandelt Winkelmaße und die grundlegenden trigonometrischen Funktionen.

Winkel

Winkel werden im Gradmaß (Einheit Grad, Formelzeichen °) oder im Bogenmaß (Einheit Radiant, Formelzeichen rad) gemessen. Die Zahl der **Radianten** im Mittelpunktswinkel $A'CB'$ in einem Kreis vom Radius r ist definiert als die Zahl der „Radiuseinheiten" im Kreisbogen s, der diesem Winkel gegenüberliegt. Bezeichnen wir diesen in Radiant gemessenen Mittelpunktswinkel mit θ, so ist $\theta = s/r$ (▶Abbildung 1.29) oder

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ in Radiant}). \tag{1.4}$$

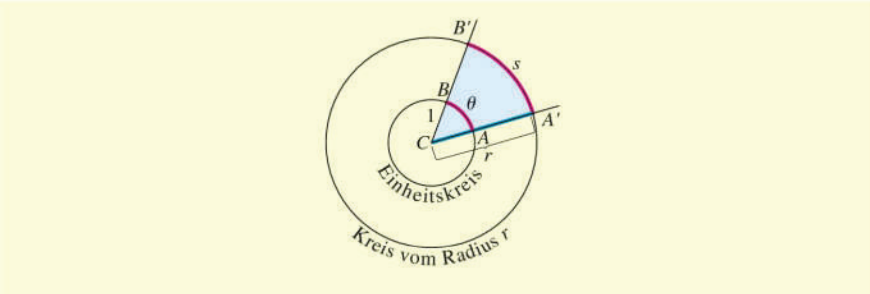


Abbildung 1.29 Der Radiant des Mittelpunktswinkels $A'CB'$ ist die Zahl $\theta = s/r$. Für einen Einheitskreis vom Radius $r = 1$ ist θ die Länge des Kreisbogens AB, den der Mittelpunktswinkel ACB aus dem Einheitskreis schneidet.

Haben wir einen Einheitskreis (Kreis mit dem Radius $r = 1$), so erkennen wir aus Abbildung 1.29 und Gleichung (1.4), dass der Mittelpunktswinkel θ, in Radiant gemessen, einfach die Länge des Kreisbogen ist, den der Winkel aus dem Einheitskreis schneidet. Da ein vollständiger Umlauf des Einheitskreises 360° oder 2π ist, erhalten wir

$$\pi \text{ Radiant} = 180° \tag{1.5}$$

und

$$1 \text{ Radiant} = \frac{180}{\pi} (\approx 57{,}3) \text{ Grad} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ Grad} = \frac{\pi}{180} (\approx 0{,}017) \text{ Radiant}.$$

Tabelle 1.1 führt die Winkelmaße in Grad und Radiant für einige grundlegende Winkel auf.

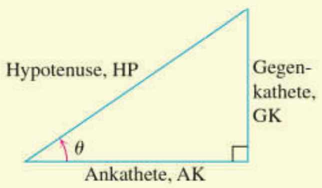
Tabelle 1.1: Winkel, in Grad und Radiant gemessen.

Grad	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (Radiant)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Winkelkonvention: Wir verwenden Radiant Von nun an gehen wir in diesem Buch davon aus, dass alle Winkel in Radiant gemessen werden, wenn nicht Grad oder eine andere Einheit explizit angegeben ist. Wenn wir über den Winkel $\pi/3$ sprechen, meinen wir $\pi/3$ Radiant (das sind 60°) und nicht $\pi/3$ Grad.

Die sechs grundlegenden trigonometrischen Funktionen

Vermutlich ist Ihnen die Definition der trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels durch die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks vertraut (▶Abbildung 1.30).



$$\sin\theta = \frac{\text{GK}}{\text{HP}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{HP}}{\text{GK}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{AK}}{\text{HP}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{HP}}{\text{AK}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{AK}}{\text{GK}}$$

Abbildung 1.30 Trigonometrische Verhältnisse an einem spitzen Winkel.

Wir erweitern diese Definition auf stumpfe und negative Winkel, indem wir den Winkel zuerst in einen Kreis vom Radius r legen. Dann definieren wir die trigonometrischen Funktionen als Funktionen der Koordinaten des Punktes $P(x, y)$, in dem der freie Schenkel des Winkels den Kreis schneidet (▶Abbildung 1.31).

Sinusfunktion:	$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$	**Kosekansfunktion:**	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{r}{y}$
Kosinusfunktion:	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	**Sekansfunktion:**	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
Tangensfunktion:	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	**Kotangensfunktion:**	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Diese erweiterten Definitionen stimmen mit den Definitionen im rechtwinkligen Dreieck mit spitzem Winkel überein.

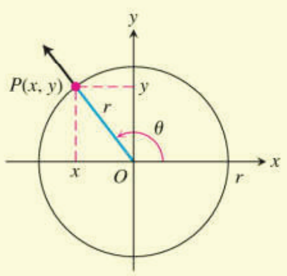


Abbildung 1.31 Die trigonometrischen Funktionen eines allgemeinen Winkels θ sind als Funktionen von x, y und r definiert.

Sofern auch der Quotient definiert ist, gilt zudem

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Wie Sie sehen, sind $\tan\theta$ und $\sec\theta$ nicht definiert, wenn $x = \cos\theta = 0$ ist. Das bedeutet, dass sie für θ gleich $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ nicht definiert sind. Genauso sind $\cot\theta$ und $\operatorname{cosec}\theta$ für Werte von θ nicht definiert, für die $y = 0$ ist, also $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

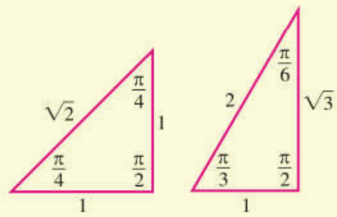


Abbildung 1.32 Die trigonometrischen Funktionen eines allgemeinen Winkels θ sind als Funktionen von x, y und r definiert.

Die genauen Werte dieser trigonometrischen Verhältnisse können für einige Winkel an den Dreiecken aus ▶Abbildung 1.32 abgelesen werden, beispielsweise sind das

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$
$$\tan\frac{\pi}{4} = 1, \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Die CAST-Regel (▶Abbildung 1.33) ist hilfreich, um sich zu merken, wann die grundlegenden trigonometrischen Funktionen positiv oder negativ sind. Am Dreieck aus ▶Abbildung 1.34 auf der nächsten Seite können wir beispielsweise folgende Beziehungen ablesen:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Mithilfe eines ähnlichen Verfahrens bestimmen wir die Werte von $\sin\theta$, $\cos\theta$ und $\tan\theta$ aus Tabelle 1.2 auf der nächsten Seite.

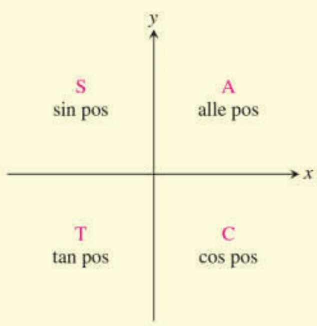


Abbildung 1.33 Die CAST-Regel besagt, welche trigonometrischen Funktionen in welchem Quadranten positiv sind.

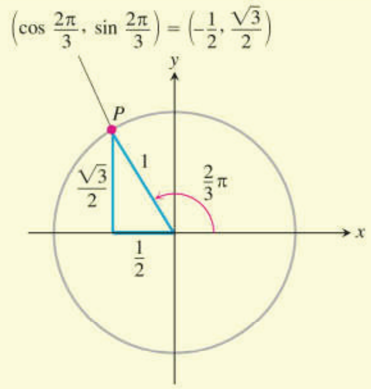


Abbildung 1.34 Das Dreieck zur Berechnung des Sinus und des Kosinus für den Winkel $2\pi/3$ rad. Die Seitenlängen ergeben sich aus der Geometrie von rechtwinkligen Dreiecken.

Tabelle 1.2: Werte von $\sin\theta$, $\cos\theta$ und $\tan\theta$ für ausgewählte Werte von θ.

Grad	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (Radiant)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\theta$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\tan\theta$	0	1		−1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Periodizität und Graphen der trigonometrischen Funktionen

Die Winkel θ und $\theta + 2\pi$ haben dieselben trigonometrischen Funktionswerte: $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, $\tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$ usw. Analog gilt $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$ usw. Wir beschreiben dieses Verhalten, indem wir sagen, dass die sechs grundlegenden trigonometrischen Funktionen *periodisch* sind.

Perioden trigonometrischer Funktionen
Periode π:
$\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

> Eine Funktion $f(x)$ ist **periodisch**, wenn es eine positive Zahl p gibt, sodass $f(x + p) = f(x)$ für alle x ist. Der kleinste Wert p dieser Art ist die **Periode** von f.

Definition

Periode 2π:
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$
$\mathrm{cosec}(x + 2\pi) = \mathrm{cosec}\, x$

Beim Zeichnen trigonometrischer Funktionen im Koordinatensystem bezeichnen wir die unabhängige Variable in der Regel mit x und nicht mit θ. ▶Abbildung 1.35 zeigt, dass die Tangens- und Kotangensfunktionen die Periode $p = \pi$ und die vier anderen Funktionen die Periode 2π haben. Außerdem lassen die Symmetrien in diesen Graphen erkennen, dass die Kosinus- und die Sekansfunktion gerade sind und die anderen vier Funktionen ungerade sind (obwohl dies kein Beweis ist).

Gerade
$\cos(-x) = \cos x$
$\sec(-x) = \sec x$

Ungerade
$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\mathrm{cosec}(-x) = -\mathrm{cosec}\, x$
$\cot(-x) = -\cot x$

Trigonometrische Identitäten

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x, y)$ können als Funktion des Abstands r des Punktes vom Ursprung und des Winkels θ ausgedrückt werden, den der Schenkel OP mit der positiven x-Achse bildet (Abbildung 1.31). Wegen $x/r = \cos\theta$ und $y/r = \sin\theta$ gilt

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

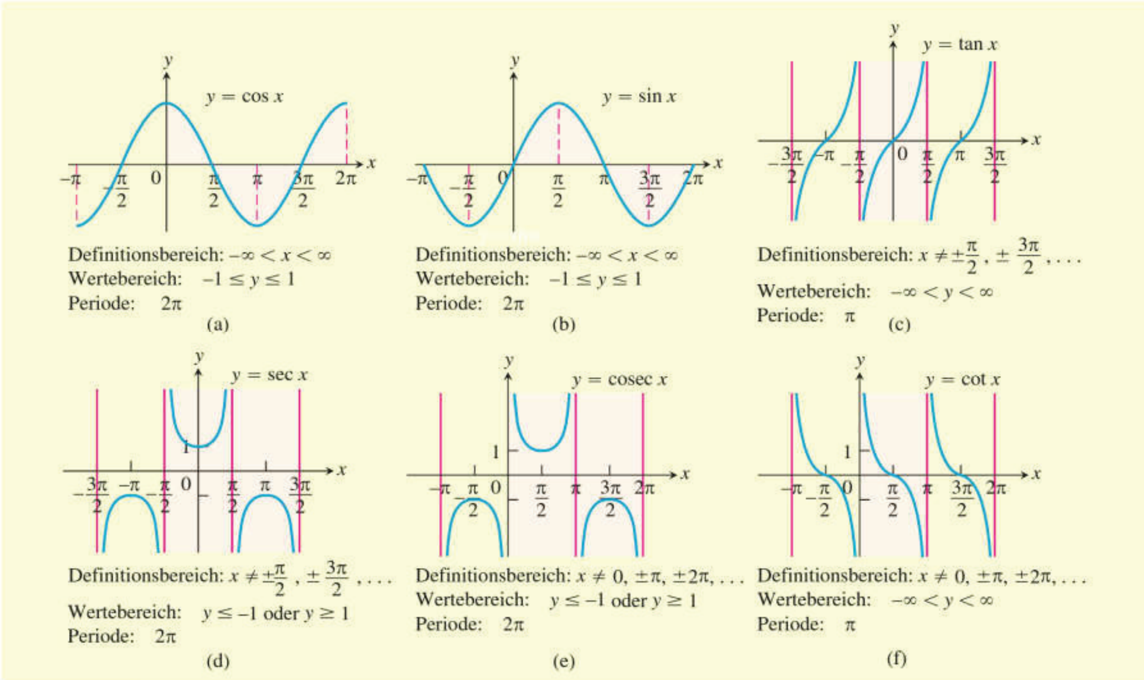


Abbildung 1.35 Graphen der sechs grundlegenden trigonometrischen Funktionen (das Argument wird in Radiant angegeben). Der schattierte Bereich kennzeichnet bei jeder trigonometrischen Funktion die Periodizität.

Im Fall $r = 1$ können wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Referenzdreieck aus ▶Abbildung 1.36 anwenden und erhalten die Gleichung

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\,. \tag{1.6}$$

Diese Gleichung, die für alle Werte von θ gilt, ist die am häufigsten verwendete Identität der Trigonometrie.

Die folgenden Gleichungen gelten für alle Winkel α und β.

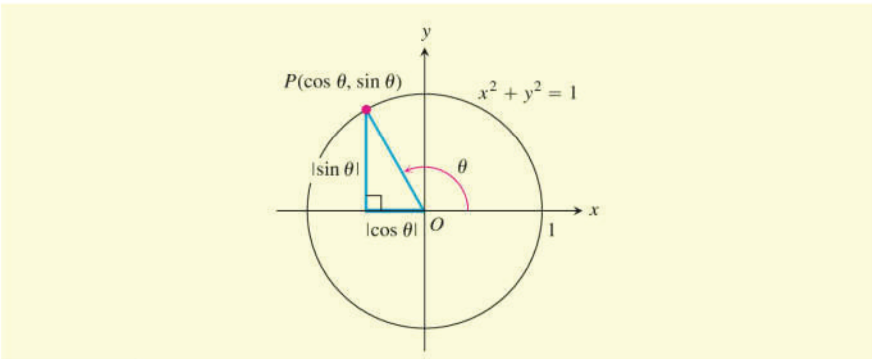


Abbildung 1.36 Das Referenzdreieck für einen allgemeinen Winkel θ.

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Es gibt ähnliche Formeln für $\cos(\alpha-\beta)$ und $\sin(\alpha-\beta)$. Alle in diesem Buch benötigten trigonometrischen Identitäten lassen sich aus den Gleichungen (1.6) und (1.7) herleiten. Setzen wir beispielsweise θ anstelle von α und β, so liefern die Additionstheoreme

Doppelwinkelgleichungen

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\,,\\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\,.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Weitere Gleichungen ergeben sich aus der Kombination der Gleichungen

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta\,.$$

Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$. Wir subtrahieren die erste Gleichung von der zweiten und erhalten $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$. Dies führt auf folgende Identitäten, die bei der Integralrechnung nützlich sind:

Halbwinkelgleichungen

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,, \tag{1.9}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,. \tag{1.10}$$

Der Kosinussatz

Seien a, b und c Seiten eines Dreiecks ABC und sei θ der Winkel gegenüber c, dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\,. \tag{1.11}$$

Diese Gleichung nennt man **Kosinussatz**.

Wir können verstehen, warum diese Gleichung gilt, wenn wir Koordinatenachsen mit dem Ursprung in C einführen und die positive x-Achse auf eine Seite des Dreiecks legen, wie in ▶Abbildung 1.37 auf der nächsten Seite dargestellt. Die Koordinaten von A sind $(b, 0)$; die Koordinaten von B sind $(a\cos\theta, a\sin\theta)$. Das Quadrat des Abstands zwischen A und B ist deshalb

$$\begin{aligned}c^2 = (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 &= a^2\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} + b^2 - 2ab\cos\theta\\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Der Kosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras. Im Fall $\theta = \pi/2$ ist $\cos\theta = 0$ und $c^2 = a^2 + b^2$.

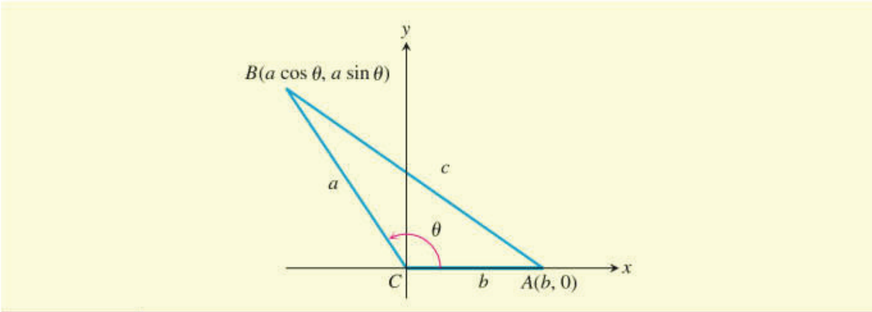


Abbildung 1.37 Das Quadrat des Abstands zwischen A und B ergibt den Kosinussatz.

Transformationen trigonometrischer Graphen

Die Regeln, um den Graphen einer Funktion zu verschieben, zu strecken, zu stauchen und zu spiegeln, die wir im folgenden Diagramm zusammenfassen, gelten auch für die trigonometrischen Funktionen aus diesem Abschnitt.

Vertikale Streckung oder Stauchung;
Spiegelung an der x-Achse, falls negativ

Vertikale Verschiebung

$$y = a f\big(b(x+c)\big) + d$$

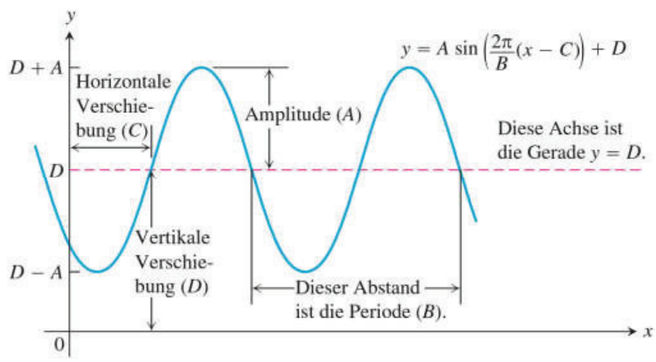
Horizontale Streckung oder Stauchung;
Spiegelung an der y-Achse, falls negativ

Horizontale Verschiebung

Wendet man die Transformationsregeln auf die Sinusfunktion an, so ergibt sich die **verallgemeinerte Sinusfunktion**

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

mit der *Amplitude* $|A|$, der *Periode* $|B|$, der *horizontalen Verschiebung* C und der *vertikalen Verschiebung* D. Eine grafische Interpretation der verschiedenen Terme ist aufschlussreich und nachfolgend dargestellt:



Aufgaben zum Abschnitt 1.3

Radiant und Grad

1. Wie lang ist ein Kreisbogen eines Kreises vom Radius 10 m, der einem Winkel von **a.** $4\pi/5$ Radiant, **b.** 110° gegenüberliegt?

Trigonometrische Funktionen berechnen

2. Kopieren und vervollständigen Sie die folgende Tabelle von Funktionswerten. Tragen Sie „n. d." ein, wenn die Funktion für einen gegebenen Winkel nicht definiert ist. Verwenden Sie weder Taschenrechner noch Tabellen.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\operatorname{cosec}\theta$					

In den Aufgaben 3–5 ist eine der Funktionen $\sin x, \cos x$ und $\tan x$ gegeben. Bestimmen Sie die beiden anderen, wenn x im angegebenen Intervall liegt.

3. $\sin x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

4. $\cos x = \frac{1}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

5. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Trigonometrische Funktionen zeichnen Zeichnen Sie die Funktionen aus den Aufgaben 6–10. Welche Perioden haben die einzelnen Funktionen?

6. $\sin 2x$ **7.** $\cos \pi x$ **8.** $-\sin\frac{\pi x}{3}$

9. $\cos\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ **10.** $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Additionstheoreme anwenden Leiten Sie mithilfe der Additionstheoreme die Gleichungen aus den Aufgaben 11–14 her.

11. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ 12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

13. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

14. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

15. Berechnen Sie $\sin\frac{7\pi}{12}$ als $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

16. Berechnen Sie $\cos\frac{\pi}{12}$.

Doppelwinkelgleichungen anwenden Bestimmen Sie in den Aufgaben 17 und 18 die Funktionswerte.

17. $\cos^2\frac{\pi}{8}$ **18.** $\sin^2\frac{\pi}{12}$

Trigonometrische Gleichungen lösen Lösen Sie in den Aufgaben 19 und 20 nach dem Winkel θ auf mit $0 \le \theta \le 2\pi$.

19. $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ **20.** $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

Theorie und Beispiele

21. **Additionstheorem für den Tangens** Die Standardgleichung für den Tangens der Summe zweier Winkel lautet

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

Leiten Sie diese Gleichung her.

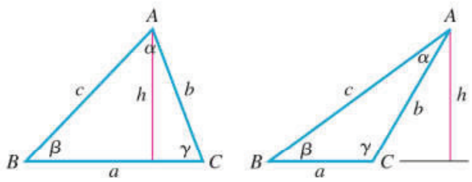
22. (*Fortsetzung von Aufgabe 21*) Leiten Sie eine Gleichung für $\tan(\alpha - \beta)$ her.

23. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 2$ und $b = 3$. Der eingeschlossene Winkel ist $\gamma = 60^\circ$. Bestimmen Sie die Länge der Seite c.

24. **Sinussatz** Nach dem *Sinussatz* gilt für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks und die ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b und c

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Verwenden Sie die nachfolgende Abbildung und, falls erforderlich, die Identität $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, um den Sinussatz herzuleiten.



Verallgemeinerte Sinuskurven Bestimmen Sie die Konstanten A, B, C und D in der Gleichung

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + C$$

für die Sinusfunktionen aus den Aufgaben 25 und 26 und zeichnen Sie ihre Graphen.

25. $y = 2\sin(x + \pi) - 1$ **26.** $y = -\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{\pi}$