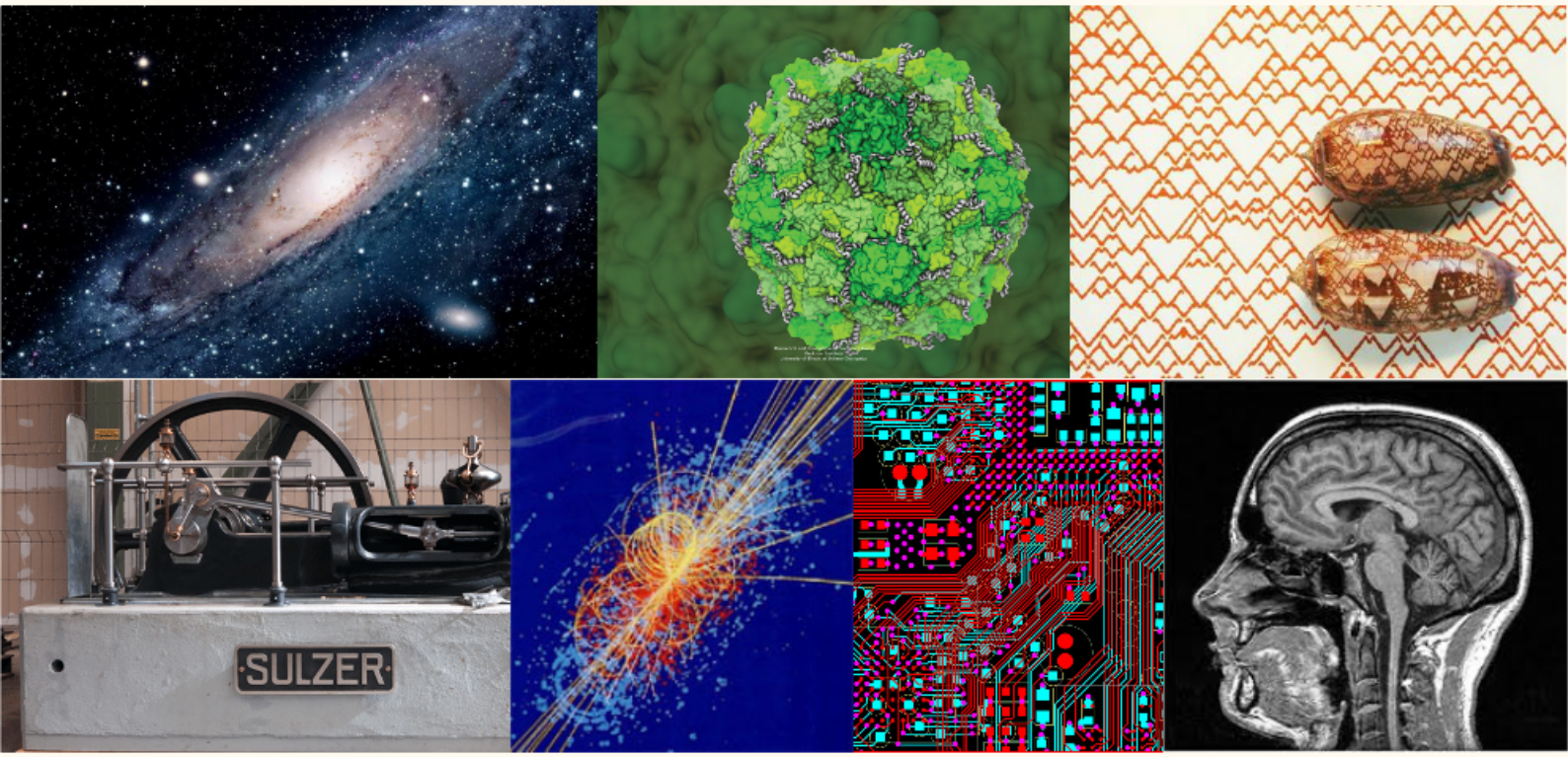
Physics

Prof. Dr. Rudolf M. Füchslin
Prof. Dr. Stephan Scheidegger



Zurich University of Applied Sciences
zh aw
School of Engineering
ZAMP Center for Applied Mathematics and Physics

Copyright © 2013 Rudolf M. Füchslin and Stephan Scheidegger

PUBLISHED AS ZHAW SCRIPT

The book uses a modified version of a LateX template created by Mathias Legrand.
The original template can be downloaded from HTTP://WWW.LATEXTEMPLATES.COM/TEMPLATE/T
LEGRAND-ORANGE-BOOK.
First printing, September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort 11

1.1 Was ist dieses Dokument? 12

1.2 Um was geht es in dieser Vorlesung? 12

2 Kinematik 15

2.1 Wie beschreibt man die Welt? 16

2.2 Massenpunkte 16

2.2.1 Geschwindigkeit 17

2.2.2 Beschleunigung 18

2.3 Berechnung von Bahnkurven 20

2.3.1 Ort-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme 23

2.4 Worüber wir nicht geredet haben 29

2.4.1 Kinematik ausgedehnter Objekte 29

2.4.2 Nicht - kartesische Koordinaten 29

3 Kräfte 31

3.1 Kräfte und Kinematik 32

3.2 Massenpunkte 33

3.3 Die Newton'schen Gesetze 35
3.4 Statik 37
3.5 Einfache Maschinen 38
3.5.1 Seile 38
3.5.2 Rollen 38
3.5.3 Flaschenzug 39
3.6 Physikalische Kräfte 42
3.6.1 Fundamentale Kräfte 42
3.6.2 Nicht - fundamentale Kräfte 43
3.7 Gravitation und Elektromagnetismus 43
3.7.1 Gravitation 44
3.7.2 Elektromagnetische Wechselwirkung 45
3.8 Nicht - fundamentale Kräfte 50
3.8.1 Federkräfte 50
3.8.2 Der Luftwiderstand 53
3.8.3 Bodenkräfte 54
3.8.4 Coulombreibung 55
3.8.5 Hydrodynamischer Widerstand (BI) 58
3.8.6 Auftrieb (BI) 61
3.9 Fallstudie: Das Federpendel 61

4 Impuls und Energie 65
4.1 Impuls und Impulserhaltung 66
4.1.1 Impuls und Kraft 67
4.2 Energie 69
4.2.1 Mechanische Arbeit 69
4.2.2 Andere Energieformen 70
4.2.3 Energieerhaltung 70
4.3 Fallstudie: Kollisionen 71

5 Potentiale 73
5.1 Potentielle Energie 77
5.1.1 Potentielle Energie allgemein 77
5.1.2 Potentielle Energie im Gravitationsfeld 78
5.1.3 Beispiel Satellitenabschuss 80

5.2 Potentiale **80**
5.2.1 Gravitationspotential 80
5.2.2 Potentiale im Allgemeinen 81
5.3 Leistung **81**
5.3.1 Leistung und Ströme 82

6 Ausgedehnte Körper 85
6.1 Kinematik starrer Körpers **86**
6.2 Der Schwerpunkt **90**
6.2.1 Definition 90
6.2.2 Schwerpunktsatz 90
6.2.3 Schwerpunktskoordinaten 91
6.3 Weitere Eigenschaften starrer Körper **93**
6.3.1 Die Lageenergie starrer Körper 93

7 Rotierende starre Körper 95
7.1 Kinematik rotierender starrer Körper **96**
7.2 Energie eines rotierenden starren Körpers **99**
7.2.1 Rotationsenergie bei fixierter Drehachse 100
7.2.2 Der Satz von Steiner 102
7.2.3 Rollende Körper 104
7.2.4 Rotationsenergie bei freier Drehachse 106
7.3 Der Drehimpuls **108**
7.3.1 Definition des Drehimpulses 108
7.3.2 Dynamik des Drehimpulses 110

8 Elektrische Felder 115
8.1 Das Elektrische Feld **116**
8.2 Bestimmung des elektrischen Feldes **117**
8.2.1 Ladungen als Quellen des Feldes 117
8.3 Das elektrische Feld in Metallen **121**
8.4 Potentielle Energie, Potential und Spannung **122**
8.5 Zusammenhang zwischen Potential und elektrischem Feld **123**
8.6 Beispiel: Kondensatoren **124**

9 Magnetismus 127

9.1 Elektromagnetische Kräfte 131

9.1.1 Die Lorentzkraft 131

9.1.2 Totale elektromagnetische Kraft 134

9.2 Das Prinzip des Elektromotors und des Generators 134

9.2.1 Generatoren 134

9.2.2 Motoren 135

9.3 Ströme und Magnetfelder 136

9.3.1 Das Magnetfeld eines Leiters 137

9.4 Das Faraday'sche Induktionsgesetz 137

9.4.1 Der Fluss eines Feldes 138

9.4.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz 139

10 Elektronische Schaltungen 143

10.1 Strom 145

10.2 Ladungserhaltung 146

10.2.1 Energetische Aspekte 146

10.3 Analoge Schaltungen 146

10.3.1 Struktur einer Schaltung 147

10.3.2 Kirchhoff'sche Regeln 150

10.4 Bauelemente 151

10.4.1 Widerstände 151

10.4.2 Kondensatoren 152

10.4.3 Spulen 153

10.5 Dynamik von Schaltungen 154

11 Wechselspannung 155

11.1 Transformatoren 156

12 Schwingungen 159

12.1 Wieso Schwingungen? 160

12.2 Ungedämpfte Schwingungen 161

12.3 Termnologie: Periodische Funktionen 163

12.4 Energie einer Schwingung 164

12.5 Gedämpfte Schwingungen 165

12.5.1 Dämpfung durch viskose Reibung 166
12.5.2 (BI) Dämpfung durch Coulomb - Reibung 168
12.5.3 (BI) Hysteretische Dämpfung 169

12.6 Resonanz 169

12.7 (IT) Zusammenhang mechanischer und elektrischer Systeme 170

13 Mechanische Wellen 173

13.1 Gekoppelte Oszillatoren 174

13.2 Seilwellen 174

13.3 Allgemeinere Wellen 176

13.4 Wasserwellen 178

13.5 Interferenz 179

14 Temperatur und Entropie 181

14.1 Warnende Einleitung 182

14.2 Temperatur - Nullter Hauptsatz 183

14.3 Thermodynamik - Einige grundlegende Feststellungen 185

14.3.1 Übersicht 185
14.3.2 Eine etwas mathematischere Darstellung 186
14.3.3 Mikroskopische Interpretation 187

14.4 Energieaustausch mit der Umgebung 190

14.4.1 Reversible und irreversible Prozesse 190
14.4.2 Arbeit und Wärme 194

14.5 Der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Erste Formulierung 194

14.5.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik 194
14.5.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Alltagsformulierung 195
14.5.3 Entropie - Der zweite Hauptsatz formal 195

14.6 Thermische Maschinen 198

14.7 Wirkungsgrad und Carnot - Limit 200

14.7.1 Carnot - Limit 200

14.7.2 Alternativen zur Definitionen des Wirkungsgrads 202
14.8 Wärmekapazität und Entropiekapazität 204

15 Thermische Maschinen 207
15.1 Allgemeines Lösungsverfahren 208
15.2 Anwendung auf Spezialfälle 210
15.2.1 Wasserkocher 210
15.2.2 Wärmepumpe und Tauchsieder - Ein Vergrleich 214
15.3 Wärmeleitung 216
15.3.1 Grundlagen 216
15.3.2 Reale Wände 221
15.3.3 Räumlich heterogene Systeme 221

16 Thermische Phänomene 225
16.0.1 Längenausdehnung 226
16.0.2 Flächen- und Volumenausdehnung 227
16.0.3 Temperaturausdehnung von Wasser 230
16.1 Das ideale Gas 232
16.1.1 Zustandsgleichung des idealen Gases 234
16.1.2 Die barometrische Höhenformel 234
16.1.3 Wärmekapazitäten des idealen Gases 238
16.1.4 Die Adiabatengleichung 241
16.2 Phasenübergänge 243
16.2.1 Schmelzen und Verdampfen 244
16.2.2 Koexistenz von Phasen 247
16.2.3 Luftfeuchtigkeit 248

17 Elektromagnetische Wellen 251
17.1 Die Maxwellgleichungen 252
17.1.1 Die grundlegenden Gleichungen 252
17.1.2 Elektromagnetische Wellen 254
17.1.3 Allgemeinere Lösungen 256
17.1.4 Linearität der Wellengleichung 258
17.2 Antennen: Senden und Empfangen 258
17.3 Interferenz 260

17.4 Arten von elektromagnetischen Wellen 262
17.4.1 Radiowellen 264
17.4.2 Infrarot 264
17.4.3 Sichtbares Licht 264
17.4.4 Ultrviolett 264
17.4.5 Röntgenstrahlung 264
17.4.6 Gammastrahlung 264

18 Thermische Strahlung 267

18.1 Absorption, Reflexion 268

18.2 Schwarzkörperstrahlung 269
18.2.1 Schwarzkörperstrahlung 269

18.3 Emission 275

18.4 Graue Strahler 276

18.5 Treibhauseffekt 277
18.5.1 Planetentemperatur 278
18.5.2 Absorption von elektromagnetischer Strahlung in Gasen 280
18.5.3 Ein vereinfachtes Modell des Treibhauseffekts 281
18.5.4 Ein realistischeres Modell des Treibhauseffekts 282
18.5.5 Treibhauseffekt: Was wir nicht diskutiert haben 283

19 Optik 289

19.1 Brechungsindex 291

19.2 Das Brechungsgesetz 291

19.3 Totalreflexion 293

20 Quantenmechanik 297

20.1 Die quantenmechanische Wellenfunktion als Datenstruktur299

20.2 Das eigenartigeste Experiment der Welt 300

20.3 Interpretation der Wellenfunktion 301
20.3.1 Aufenthaltsort eines Teilchens 301
20.3.2 Physikalische Grössen 302
20.3.3 Impuls eines Teilchens 302
20.3.4 Ort eines Teilchens 303
20.3.5 Kinetische Energie eines Teilchens 303

20.3.6 Potentielle Energie eines Teilchens 304
20.3.7 Totale Energie eines Teilchens 304

20.4 Wie bekommt man die Wellenfunktion? 304

20.5 Materiewellen 305

20.6 Unschärferelation 305

20.7 Metalle und Halbleiter 306

21 Mathematik 309

21.1 Vektoren 310

21.1.1 Skalarprodukt 310
21.1.2 Betrag eines Vektors 312
21.1.3 Winkel zwischen zwei Vektoren 312
21.1.4 Einheitsvektor 312
21.1.5 Das Kreuzprodukt von Vektoren 313

21.2 Matrizen 313

21.2.1 Symmetrische Matrizen 314

21.3 Partielle Ableitung 314

21.4 Vektoranalysis 315

21.5 Numerische und analytische Verfahren 316

21.6 Differentialgleichungen 317

21.6.1 Systeme von Differentialgleichungen 317
21.6.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung 318

21.7 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 320

21.8 Numerisches Integrieren 323

Bibliography 327

Books 327

Articles 327

Index 329

Was ist dieses Dokument?
Um was geht es in dieser Vorlesung?

1 — Vorwort

1.1 Was ist dieses Dokument?

Dieses Dokument kann als eine Art ausgedehnte und illustrierte Zusammenfassung zur Physikvorlesung für IT oder einer entsprechenden Veranstaltung für BauingenieurInnen verstanden werden. Die beiden Vorlesungen sind nicht ganz deckungsgleich; Kapitel, die ausschliesslich für InformatikerInnen wichtige (d.h. prüfungsrelevant sind, sind mit (IT) gekennzeichnet. Solche, die nur für die BauingenieurInnen in der Prüfung vorkommen, mit (BI). Kapitel, die Zusatzinformation enthalten, welche nicht geprüft werden, enthalten auf der ersten Zeile den Vermerk (ZI).

Dieses Dokument (ich scheue mich, von Skript zu reden), ersetzt weder den Vorlesungsbesuch (und schon gar nicht den Besuch der Übungen!) stellt aber ein Kondensat des Stoffes, welcher in der Prüfung relevant ist, dar. Sie sollten mit dem hier dargebotenen Stoff die Prüfung bestehen können. Beachten Sie aber: In der Physik geht es nicht nur darum, etwas zu wissen, sondern auch darum, etwas berechnen zu können. Die Slides (welche Sie ja auch an die Prüfung mitnehmen dürfen) enthalten viele zusätzliche Beispiele und Erklärungen. Allerdings bringe ich auf den Slides manchmal auch Informationen, die Sie nicht kennen müssen (dies ist entweder ausdrücklich gekennzeichnet oder sollte aus dem Kontext klar werden. Wenn ich eine Sternkarte zeige, müssen Sie natürlich nicht die Sternbilder lernen!). Falls ich mich an einer diesbezüglich Stelle nicht klar genug ausdrücke, bitte ich Sie, mich zu fragen.

1.2 Um was geht es in dieser Vorlesung?

Dies ist eine Übersichtsvorlesung. Dies bedeutet:

- Dies ist eine Vorlesung für Studierende der Ingenieurwissenschaften. Soweit dies möglich ist, wurde dies in der Wahl der Beispiele berücksichtigt.
- Es liegt in der Natur einer Übersichtsveranstaltung, dass wir nicht in die

Tiefe gehen können. Jedes besprochene Thema könnte leicht Gegenstand einer einsemestrigen Vorlesungen werden.Wenn Sie also den Eindruck haben, dass wir nur an der Oberfläche kratzen, haben sie bereits recht viel begriffen. Wir müssen aber, um eine angemessen breite Themenpalette besprechen zu können, einen Kompromiss zwischen Breite und Tiefe machen. Wie jeder Kompromiss ist auch dieser nicht in jeder Hinsicht befriedigend.

- Dies ist keine Vorlesung für MathematikerInnen. Mathematik spielt in der Physik eine sehr wesentliche Rolle, es geht uns aber nicht darum, dass sie bestimmte Rechentricks anwenden können. Wenn wir etwas berechnen, berechnen wir dies normalerweise numerisch; Selbstverständlich sind einfache Formelumformungen nicht zu vermeiden. Es ist Ihnen jederzeit gestattet, ein Computeralgebrasystem zu verwenden. (CAS).

Es gibt verschiedene Arten und Weisen, wie man Physik lehren und lernen kann. Man kann sich an Phänomenen orientieren oder an Methoden. In dieser Vorlesung haben wir nicht genügend Zeit, um Phänomene im Detail zu besprechen. Auch in Phänomene, wenn sie dann in einem für ein Ingenieure nützlichen Zusammenhang betrachtet werden, in der Regel recht kompliziert. Wir versuchen, Ihnen Methoden zu vermitteln. Dies auch mit der Idee, dass sie wissen dass es diese Methoden gibt. Auch wenn sie sie vielleicht selber in 20 Jahren nicht mehr anwenden können, so ist es doch wertvoll, wenn Sie wissen, es Leute gibt, die ihre Probleme lösen können. Der an Phänomenen orientierte Zugang zu Physik nennt man normalerweise den experimentellen Zugang. Der mehr an methodenorientierte Approach ist derjenige der theoretischen oder der computerbasierten Physik. Da für sie Computer Zukunft eine immer grössere Rolle spielen werden, wählen wir den zweiten Zugang.

Dieses Skript enthält natürlich keine neuartige Physik. Alles was Sie hier lesen, finden Sie auch in Büchern. Wir haben Ihnen auf den Folien einige Empfehlungen angegeben. Die Auswahl des für Sie geeigneten Buches können Sie aber nur selber treffen.

Ziemlich oft fragen uns die Studierenden nach einer Formelsammlung. Wir können Ihnen hier keine Empfehlung geben; die für sie geeignete Formelsammlung müssen selber finden. Wir empfehlen Ihnen aber dringend, selber eine Formelsammlung zusammenzustellen.

Zuguterletzt: dieses Skript wird relativ viele Tippfehler und sicherlich einige ernsthafte inhaltliche Fehler enthalten. Dies ist ärgerlich für Sie, aber leider nur sehr schwer zu vermeiden. Wir sind Ihnen für jeden Hinweis dankbar. Dies gilt selbstverständlich für Fehler, aber auch für Stellen, die Ihnen unklar erscheinen. Wir werden uns bemühen, Verbesserungen sofort anzubringen. Wir empfehlen Ihnen, den Skript regelmässig wieder herunterzuladen. Wir verbessern den Text dauernd. Die für die Prüfung gültige Version ist erst ab dem 6. Januar erhältlich (d. h. die Version, von der wir hoffen dass wir die meisten Fehler korrigiert haben.).

Ganz zum Schluss: ich verwende ein Diktierprogramm. Das bedeutet, dass manchmal etwas eigenartige Worte im Text stehen können. Dies ist darauf zurückzuführen, dass auch die besten Diktierprogramme nicht perfekt sind. Bitte machen Sie mich auf „eigenartige Sätzeäufmerksam.

Wie beschreibt man die Welt?

Massenpunkte

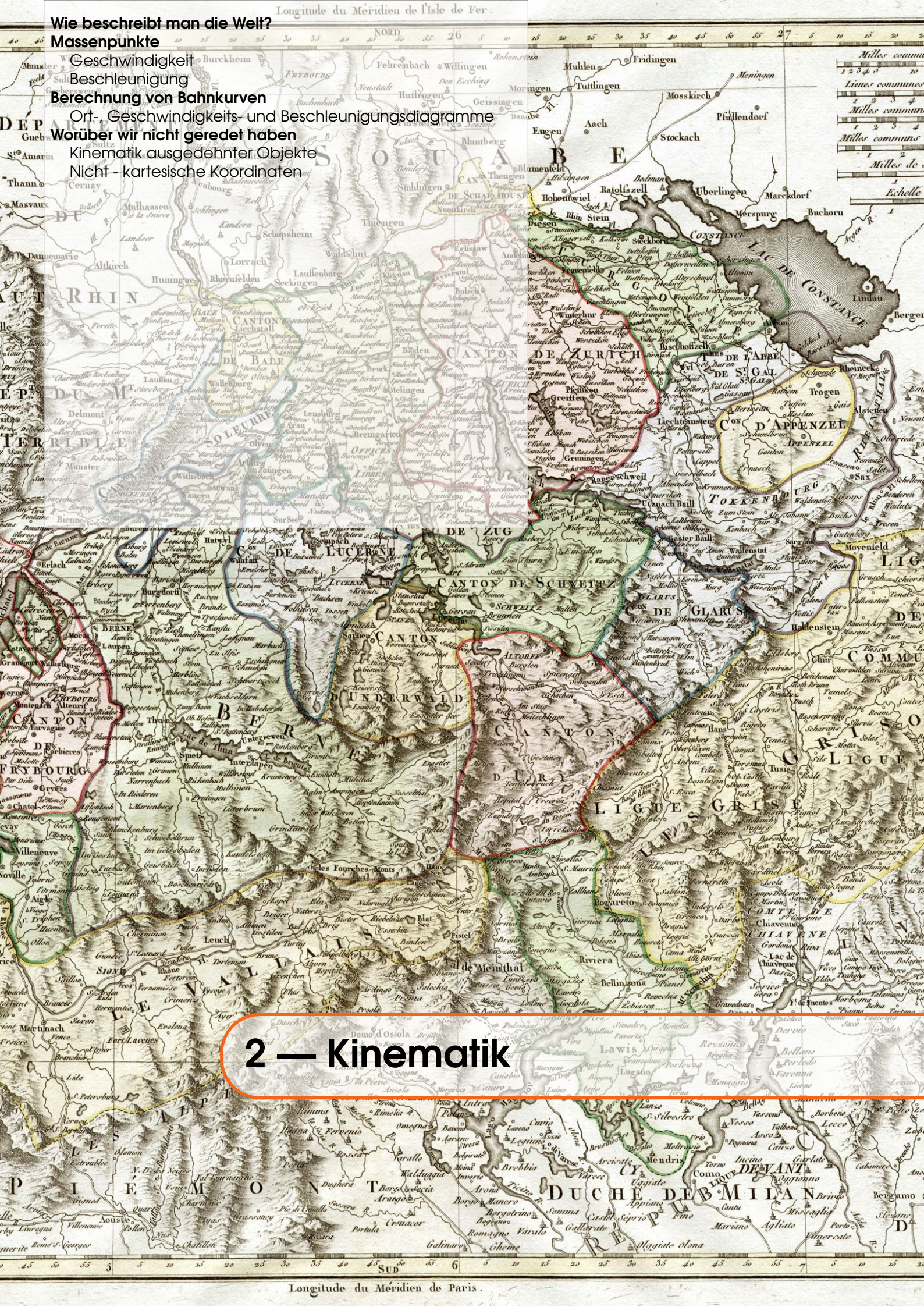
- Geschwindigkeit
- Beschleunigung

Berechnung von Bahnkurven

- Ort-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme

Worüber wir nicht geredet haben

- Kinematik ausgedehnter Objekte
- Nicht - kartesische Koordinaten



2 — Kinematik

2.1 Wie beschreibt man die Welt?

Das Schöne an Computern ist, dass sie genau das tun, was man ihnen sagt. Der Nachteil dabei ist: Man muss genau sagen, was man will. Und dies auch selber wissen. Will man die Bewegung eines Objekts darstellen, z.B. in einer Animation, muss man für jeden Zeitpunkt sagen, wo das Objekt ist und was es tut. **Kinematik** ist derjenige Teil der Physik, welche sich mit der Frage beschäftigt, welche Datenstruktur zur Beschreibung der Bewegung eines Objekts notwendig ist.

Die Kinematik sagt Ihnen nicht, wieso sich ein Objekt bewegt und woher man weiss, wie diese Bewegung aussieht. Die Kinematik sagt Ihnen aber, wie man eine Bewegung formal beschreibt; sie gibt Ihnen sozusagen die Syntax der Bewegung.

Eine Bemerkung zu den Einheiten: Wir verwenden durchgängig SI - Einheiten (also Meter, Sekunde, Kilogramm, Coulomb, Ampere, Volt, Watt, Newton und noch einige andere, die Sie auch Ihrer Formelsammlung oder Ihren Büchern entnehmen können).

2.2 Massenpunkte

Das einfachste physikalische Objekt ist ein **Massenpunkt** . Ein Massenpunkt hat eine Position im Raum und eine Masse, aber keine weiter Struktur und auch keine Ausdehnung. Selbstverständlich ist das Konzept des Massenpunkts eine Abstraktion[1]; reale Objekte sind niemals Punkte. Es ist einfach so, dass Massenpunkte häufig eine gute Annäherung an die Realität darstellen[2]

[1] Auch wenn das sog. Standardmodell der Teilchenphysik Elementarteilchen als Punkte ohne Ausdehnung betrachtet. Allerdings (ohne das dies hier ausgeführt wird) ergeben sich aus dieser Annahme weitreichende Probleme.

[2] Pixelgraphiken sind häufig auch eine gute Annäherung an die Realität, auch wenn die Welt nicht gepixelt ist.

Definition 2.1 In kartesischen Koordinaten wird die Bewegung eines Massenpunktes durch eine Datenstruktur, welche die (meist konstante) Masse m und drei Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ beinhaltet, gegeben. Dabei bezeichnen x, y, z die Koordinaten und t steht für die Zeit. Wir verwenden für die **Position** oft die Vektorschreibweise:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Je nach Situation unterdrücken wir den Parameter t in der Notation und schreiben einfach $\vec{r}$. Die Einheit der Position und ihrer Komponenten ist Meter. Wir nennen die vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ die Ortskurve oder Trajektorie des Massenpunktes.

Wir verwenden praktisch ausschliesslich **kartesische Koordinaten**, s. Fig. 2.1. Im Falle dreidimensionaler Situationen gebrauchen wir die Buchstaben x, y, z. Als Konvention vereinbaren wir, dass die vertikale Achse mit dem Buchstaben z gekennzeichnet wird und nach oben zeigt[3]. Bei zweidimensionalen Systemen verwendet man meist x, y oder x, z. x bezeichnet dabei die horizontal Achse. Wir werden versuchen, in Skizzen die Achsen anzugeben.

2.2.1 Geschwindigkeit

Gegeben sei die Position $\vec{r}(t)$ eines Massenpunkts. Die **Geschwindigkeit** $\vec{v}(t)$ eines Objekts ist definiert als die zeitliche Ableitung von $\vec{r}(t)$, also die Veränderungsrate der Position.

Definition 2.2 Die Geschwindigkeit eines Massenpunkts ist definiert als die zeitliche Ableitung von $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ y_z(t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Diese Definition zeigt verschiedene, aber vom Gehalt her identische Notationen für die Ableitung.

In der Physik ist die Geschwindigkeit ein Vektor; der umgangssprachliche Begriff

[3] Natürlich ist der Begriff “oben” nur auf der Erde sinnvoll. Im Weltraum gibt es kein “unten” oder “oben”.

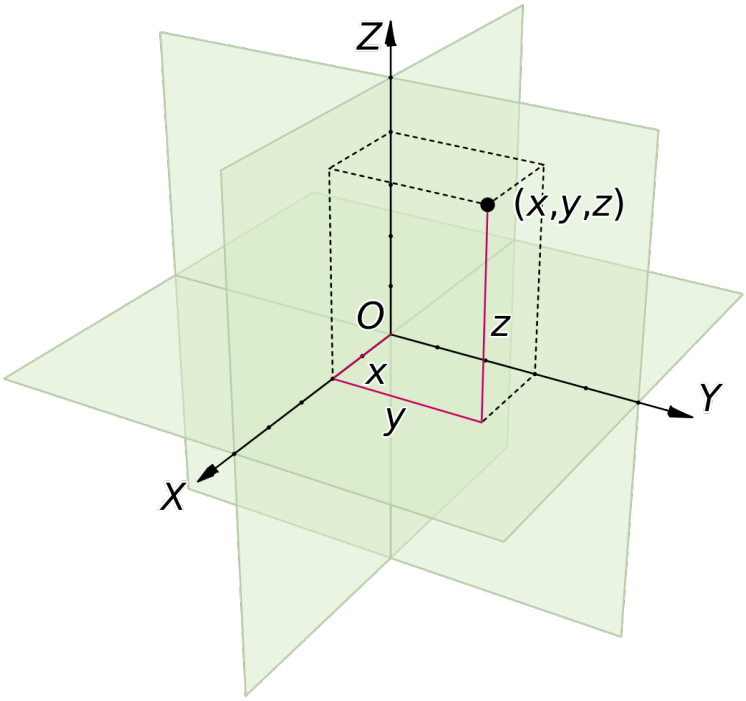


Abbildung 2.1: Kartesische Koordinaten.

der Geschwindigkeit nennt man in der Physik **Schnelligkeit**. Die Einheit der Geschwindigkeit, bzw. der Schnelligkeit ist Meter pro Sekunden ms^{-1}.

Definition 2.3 Die Schnelligkeit v (ohne Vektorpfeil!) ist definiert als Betrag der Geschwindigkeit:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.3}$$

!!! Die angegebene Definition der Geschwindigkeit als komponentenweise zeitliche Ableitung der Position gilt nur in kartesischen Koordinaten. Falls Sie in anderen Koordinaten arbeiten wollen, fragen Sie eine Fachperson, wie Geschwindigkeiten zu berechnen sind.

2.2.2 Beschleunigung

Gegeben sei die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Massenpunkts. Die **Beschleunigung** $\vec{a}(t)$ eines Objekts ist definiert als die zeitliche Ableitung von $\vec{v}(t)$, also die Veränderungsrate der Geschwindigkeit.

Definition 2.4 Die Beschleunigung eines Massenpunkts ist definiert als die zeitliche Ableitung von $\vec{v}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Die Einheit der Beschleunigung ist ms^{-2}.

!!! Die angegebene Definition der Beschleunigung als komponentenweise zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit gilt nur in kartesischen Koordinaten.

■ **Example 2.1** Gleichförmige Bewegung eines Massenpunkts mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ und $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ (Das heisst: zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet der Massenpunkt in (x_0, y_0, z_0)). Die Bahnkurve ist dann beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t = \begin{pmatrix} x_0 + tv_x \\ y_0 + tv_y \\ z_0 + tv_z \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Beachten Sie, dass die obige Beziehung nur für konstante Geschwdindigkeiten gilt!

Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_0 + tv_x \\ y_0 + tv_y \\ z_0 + tv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(x_0 + tv_x) \\ \frac{d}{dt}(y_0 + tv_y) \\ \frac{d}{dt}(z_0 + tv_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Für die Beschleunigung erhalten wir:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

■ **Example 2.2** Kreisförmige Bewegung eines Massenpunkts in der xy - Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (Einheit s^{-s}) ω um den Ursprung und

Radius r. Weiter soll gelten: $\vec{r}(0) = (r, 0, 0)$. Die Bahnkurve ist dann beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\omega t) \\ \omega r\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Für die Beschleunigung erhalten wir:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\cos(\omega t) \\ -\omega^2 r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Beachten Sie, dass für Beträge der Position, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t)| &= r \\ |\vec{v}(t)| &= \omega r \\ |\vec{a}(t)| &= \omega^2 r \end{aligned} \tag{2.11}$$

Für die gleichförmige Kreisbewegung sind diese Grössen konstant. Beachten Sie auch die Richtungen der Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren in Fig. 2.2.

2.3 Berechnung von Bahnkurven

Im letzten Abschnitt haben wir Ihnen gezeigt, wie Sie aus einer gegebenen Bahnkurve durch zweifaches Ableiten die Beschleunigung eines Objekts berechnen können. Aus der Analysis wissen Sie (s. auch Sec. 21), dass die Integration in gewissem Sinn die Umkehrung der Ableitung bedeutet.

Sie wissen:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v} \tag{2.12}$$

$$d\dot{\vec{v}} = \vec{a} \tag{2.13}$$

Wir haben hier die Punktnotation für die Ableitung nach der Zeit verwendet.

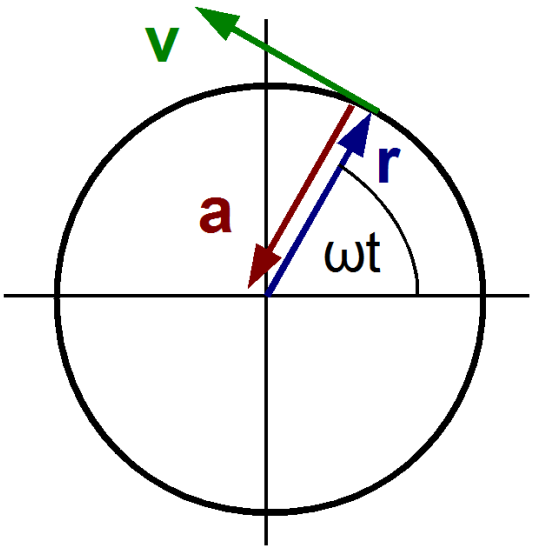


Abbildung 2.2: Gleichförmige Kreisbewegung

Dies bedeutet aber (Hauptsatz der Integralrechnung, s. Sec. 21):

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{v}}(t')dt', \\ &= \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

Beachten Sie die Wahl von t' als Integrationsvariable. Dies muss so gemacht werden, da t die Integrationsgrenze bildet.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{r}}(t')dt', \\ &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'. \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\tag{2.17}$$

Zwei Bemerkungen zu den Integralen:

- Diese Integrale können manchmal analytisch durchgeführt werden, häufig aber integriert man numerisch (Wie das mit Berkeley Madonna gemacht werden kann, wird in Sec. 21 dargestellt).

- Integrale über Vektoren können kompoenentenweise durchgeführt werden. Das heisst (dreidimensionaler Raum, kartesische Koordinaten):

$$\int \vec{r}(t)dt = \begin{pmatrix} \int x(t)dt \\ \int y(t)dt \\ \int z(t)dt \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

■ **Example 2.3** Wir analysieren eine eindimensionale Bewegung, d.h. es geht uns nur um die Funktion $x(t)$. Wir betrachten den Fall einer konstanten Beschleunigung $a(t) = a$. Weiter setzen wir $t_0 = 0, v(0) = 0, x(0) = 0$.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a dt', \\ &= v(0) + at, && (2.19) \\ &= at. && (2.20) \\ & && (2.21) \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(0) + at dt', \\ &= r(0) + v(0)t + a\frac{t^2}{2}, && (2.22) \\ &= a\frac{t^2}{2}. && (2.23) \end{aligned}$$

Diese beiden Beziehungen sind die Grundlage der Berufsmittelschulphysik. **Beachten Sie, dass diese Formeln nur und ausschliesslich für den Fall konstanter Beschleunigung und den angegebenen Anfangsbedingungen gelten!**

Da die Situation einer konstanten Beschleunigung häufig vorliegt und noch häufiger eine gute Näherung darstellt, geben wir Ihnen eine tabellarische Zusammenfassung der relevanten Formeln für eindimensionale Bewegungen. Wie in der BMS üblich, bezeichnen wir die Ortskoordinate mit s. Beachten Sie, dass diese Beziehungen nur gelten, wenn $v(0) = s(0) = 0$!

Beziehungen zwischen t, v, a:

$$v = at, \qquad a = \frac{v}{t}, \qquad t = \frac{v}{a} \tag{2.24}$$

Beziehungen zwischen s, t, a:

$$s = a\frac{t^2}{2}, \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \qquad a = \frac{2s}{t^2} \tag{2.25}$$

Beziehungen zwischen s, v, a:

$$s = \frac{v^2}{2a}, \qquad v = \sqrt{2as}, \qquad a = \frac{v^2}{2s} \tag{2.26}$$

Beziehungen zwischen s, v, t:

$$s = \frac{vt}{2}, \qquad t = \frac{2s}{v}, \qquad v = \frac{2s}{t} \tag{2.27}$$

■ **Example 2.4** Wir analysieren den berüchtigten schiefen Wurf und arbeiten dabei vektoriell. Strenggenommen wissen Sie noch nicht, woher die auftretende Beschleunigung kommt (sie resultiert aus der Gravitationskraft). Wir betrachten die Fragestellung hier rein kinematisch.

Wir nehmen einfach einmal an, dass auf der Erde auf ein Objekt die konstante Beschleunigung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

wirkt ($g = 9.81 m/s^2$). Komponentenweises Integrieren liefert:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ v_{z,0} - gt \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Nochmaliges Integrieren liefert:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_{x,0} + v_{x,0}t \\ r_{y,0} + v_{y,0}t \\ r_{z,0} + v_{z,0}t - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

2.3.1 Ort-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme

Häufig sind im Falle eindimensionaler Bewegungen Orte, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen in Diagrammen als Funktion der Zeit angegeben. Diese

Diagramme sind in der Praxis recht wichtig. Das Arbeiten mit solchen Diagrammen erfordert die Fähigkeit, graphisch ableiten und integieren zu können. Beachten Sie:

- Ableiten bedeutet graphisch: Steigungen bestimmen. Das sollten Sie aus der Mathematik können. In der Physik ist es zusätzlich wichtig, die Einheiten in einer Graphik richtig zu benützen. Ein "Strichlein" auf den Achsen bedeutet nicht immer "1", sondern kann irgendeiner Masseinheit (z.B. $20m$) entsprechen. Dies ist bei der Bestimmung des numerischen Werts eines Quotienten natürlich wichtig.

- Integrieren bedeutet graphisch: Häuschen zählen. Auch hier gilt wieder: Machen Sie sich aus den Einheiten an den Achsen immer klar, was ein Häuschen nur wirklich numerisch bedeutet!

Im Folgenden arbeiten wir in einer Dimension und lassen deshalb Vektorpfeile weg [4]. Es gilt: $s(t)$ bezeichnet den Ort als Funktion der Zeit, $v(t), a(t)$ die zugehörige Geschwindigkeit respektive Beschleunigung. Wir besprechen drei Beispiele.

Zuerst betrachten wir eine konstante Beschleunigung, gegeben durch Fig. 2.3. Nehmen Sie an, Ihre Anfangsposition sei $s(0) = 0$ und Ihre Anfangsgeschwindig-

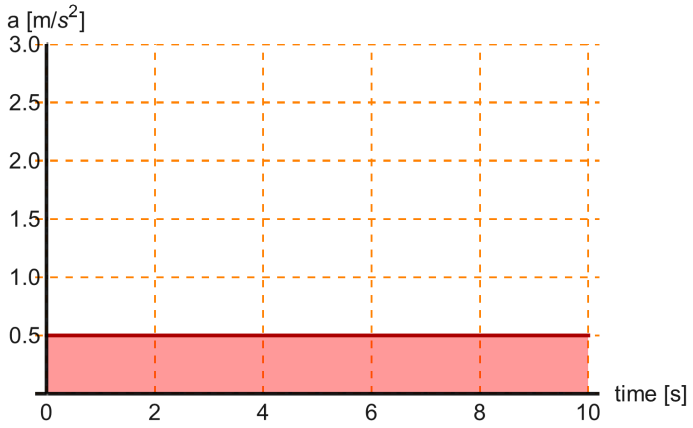


Abbildung 2.3: Beschleunigung als Funktion der Zeit.

keit $v(0) = 0$. Wir ermitteln die Graphen für $v(t)$ und $s(t)$. Es gelten die Zusammenhänge:

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{2.31}$$

$$\frac{dv}{dt} = a. \tag{2.32}$$

[4] Es gibt keinen wesentlichen Unterschied mehr zwischen Geschwindigkeit und Schnelligkeit. Beide Grössen sind Zahlen, allerdings kann die Geschwindigkeit negativ sein, die Schnelligkeit nicht

Dies ist eine Formulierung mit Ableitungen. Völlig äquivalent ist eine Formulierung mit Integralen:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')dt' \tag{2.33}$$

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{2.34}$$

Wir werden nun graphisch zu integrieren, also "Häuschen zu zählen". Dann erhalten wir die Geschwindigkeits- und Ortskurven in Fig. 2.4 und Fig. 2.5.

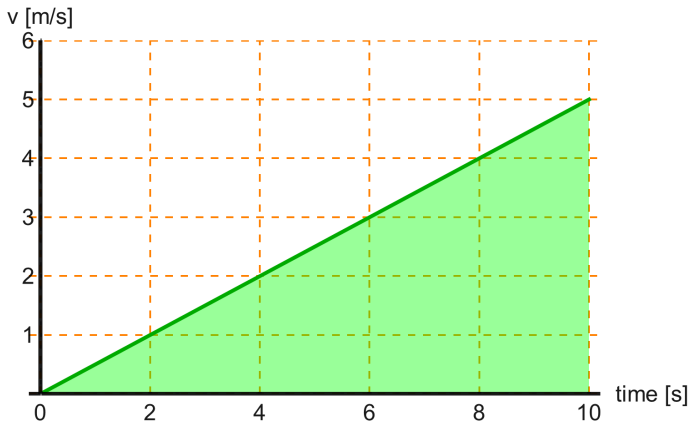


Abbildung 2.4: Geschwindigkeit zur Beschleunigung der Fig. 2.3.

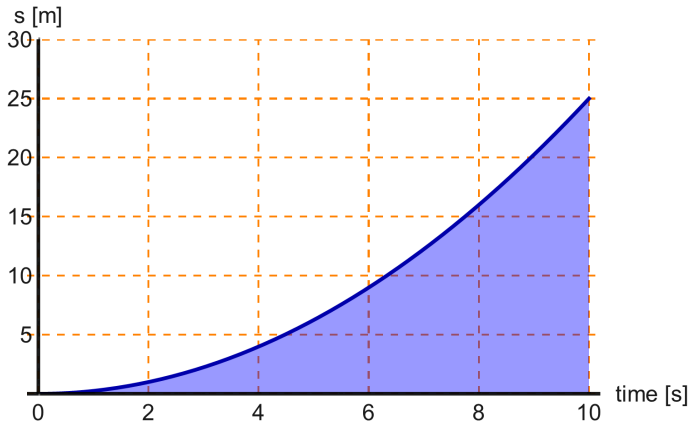


Abbildung 2.5: Ortskoordinate zur Geschwindigkeit der Fig. 2.4, bzw. der Beschleunigung in Fig. 2.3.

Bemerkungen:

- Die Beschleunigung ist konstant. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit durch eine Gerade dargestellt wird. Die Steigung dieser Geraden ist gleich der Beschleunigung. Da die Geschwindigkeit bei $t = 0$ selber gleich null ist, geht die Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

- Der Ort als Funktion der Zeit ist eine Parabel, da ja die Geschwindikgeit linear wächst. Die Steigung der Parabel zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist gleich der Geschwindigkeit zu dieser Zeit. Das bedeutet: Diese Parabel hat im Nullpunkt die Steigung null (da $v(0) = 0$)). Weiter geht sie durch den Ursprung (da $s(0) = 0$).

Wir machen nun dasselbe unter der Annahme $s(0) = 2m$ und $v(0) = 1m/s$. Mit Anfangsort und insbesondere Anfangsgeschwindigkeit erhalten wir die Geschwindigkeits- und Ortskurven in Fig. 2.6 und Fig. 2.7. Bemerkungen:

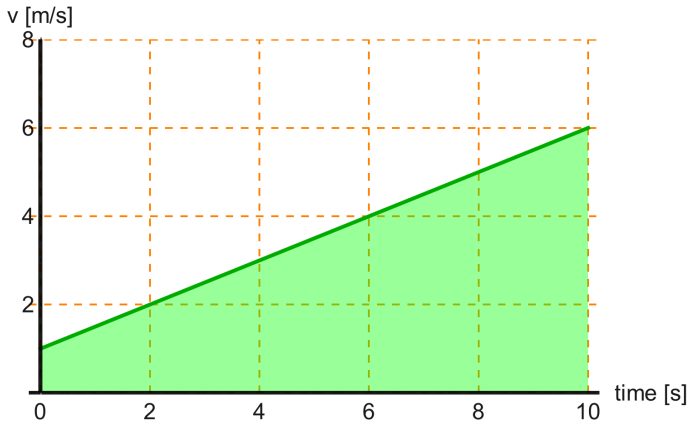


Abbildung 2.6:

- Die Beschleunigung ist immer noch konstant. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit durch eine Gerade dargestellt wird. Die Steigung dieser Geraden ist gleich der Beschleunigung. Da die Geschwindigkeit bei $t = 0$ nicht gleich null ist, geht die Gerade durch den Punkt $v(0) = 1m/s$.

- Der Ort als Funktion der Zeit ist wieder eine Parabel da ja die Geschwindikgeit immer noch linear wächst. Die Steigung der Parabel zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist gleich der Geschwindigkeit zu dieser Zeit. Das bedeutet: Diese Parabel hat im Nullpunkt die Steigung $v(0) = 1m/s$. Weiter geht die Parabel nicht durch den Ursprung (da $s(0) = 2m$).

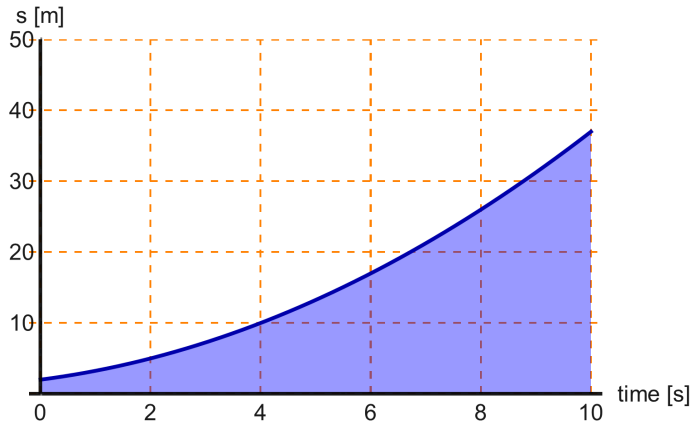


Abbildung 2.7:

Versuchen Sie wirklich, die Steigungen und Achsenabschnitte zu verstehen. In diesen stecken die Anfangspositionen und - geschwindigkeiten.

Zuletzt ermitteln wir die $v(t)-$ und $s(t)-$ Plots für die Beschleunigung gegeben in Fig. 2.8. Für nichtkonstante Beschleunigungen ergeben sich die Geschwindigkeits-

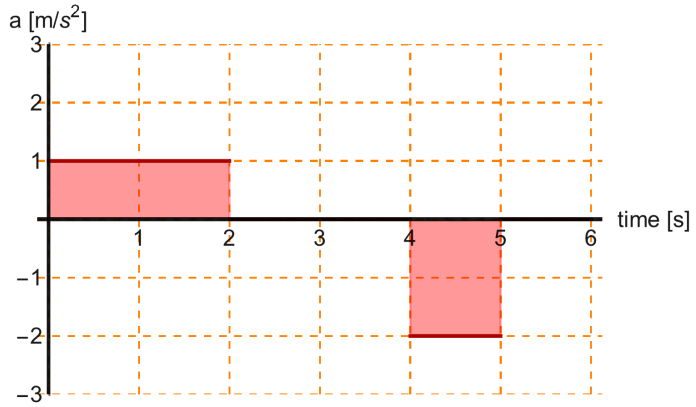


Abbildung 2.8: Beschleunigung als Funktion der Zeit.

und Ortskurven in Fig. 2.9 und Fig. 2.10. Bemerkungen:

- Die Beschleunigung ist nicht mehr konstant. Von $t = 0s$ bis $t = 2s$ haben wir eine konstante positive Beschleunigung. In diesem Zeitintervall wächst die Geschwindigkeit linear an. Die Steigung der entsprechenden Gerade entspricht der Beschleunigung. Die Funktion des Ortes ist eine nach oben gebogene Parabel.

- Im Intervall $2s < t < 4s$ ist die Beschleunigung null. Die Geschwindigkeit bleibt konstant. Die Ortsfunktion in diesem Zeitintervall ist durch eine Ge-

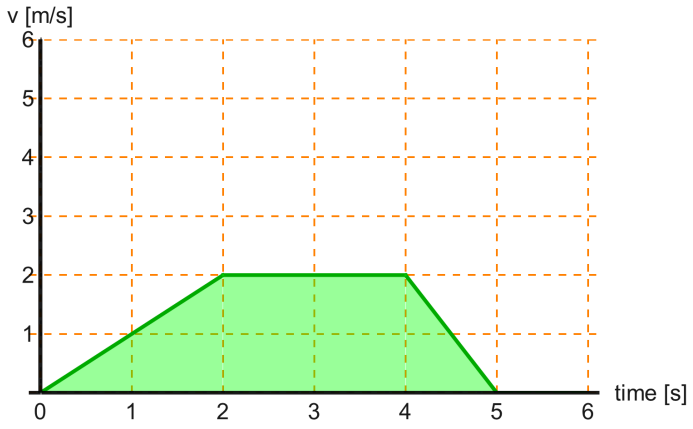


Abbildung 2.9:

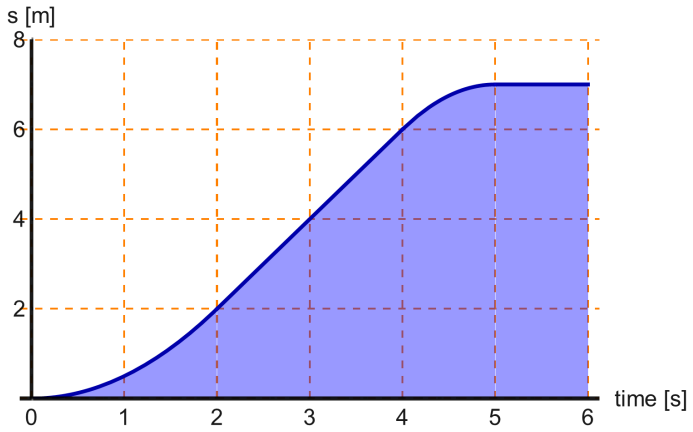


Abbildung 2.10:

rade gegeben (mit einer Steigung, die der nun konstanten Geschwindigkeit entspricht).

- Im Intervall $4s < t < 5s$ ist die Beschleunigung negativ. Die Geschwindigkeit wird durch eine Gerade mit der Beschleunigung entsprechenden negativen Steigung gegeben. Die Ortskurve in diesem Intervall ist auch eine Parabel aber eine, die nach unten geöffnet ist.

- Da die Fläche unter der Beschleunigungskurve besteht aus zwei Stücken mit gleichem Flächeninhalt, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Daraus folgt, dass die Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit ist (hier also $0m/s$)!

- Das Zeichnen der Geschwindigkeitkurve ist hier relativ einfach; Sie müssen

lediglich Geradenstücke mit der richtigen Steigung zusammenhängen. Die jeweiligen "Endhöhen" der Parabelstücke müssen Sie berechnen.

Versuchen Sie, die Steigungen und Achsenabschnitte zu verstehen. In diesen stecken die Anfangspositionen und - geschwindigkeiten.

2.4 Worüber wir nicht geredet haben

2.4.1 Kinematik ausgedehnter Objekte

Ein ausgedehntes Objekt, z.B. ein Flugzeug, hat nicht nur eine Position, sondern auch eine Lage im Raum. Betrachtet man das Flugzeug als ein starres Objekt, muss diese Lage durch drei weitere Parameter (Winkel) spezifiziert werden (Yaw, pitch, roll), s. Fig. 2.11. Eine schöne Illustration findet sich unter `http://www.youtube.com/watch?v=UpSMNYTVqQI`. Beachten Sie:

- Es gibt mehrere Möglichkeiten, die drei Lagewinkel zu definieren.
- Noch schwieriger (und selbstverständlich nicht Teil dieser Vorlesung) ist die Kinematik deformierbarer Objekte

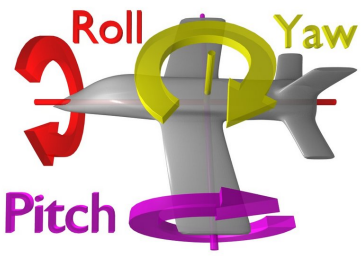


Abbildung 2.11: Yaw, pitch and roll

2.4.2 Nicht - kartesische Koordinaten

Beachten Sie, dass kartesische Koordinaten zwar sehr häufig Verwendung finden und einigermassen einfach zu gebrauchen sind, aber keineswegs die einzig mögliche Wahl darstellen. Eine Alternative sind z.B. sog. **sphärische Koordinaten** , s. Fig.2.12. Die Position eins Punktes wird durch drei Zahlen angegeben (r, ϕ, θ), der Abstand vom Nullpunkt r und zwei Winkel ϕ, θ.

Additional information 2.1 Es gibt einen ganzen "Zoo" von Koordinatensystemen. Je nach Anwendung können sind die einen besser geeignet (ergeben einfachere Gleichungen) als die anderen. Insbesondere wenn Sie an formalen

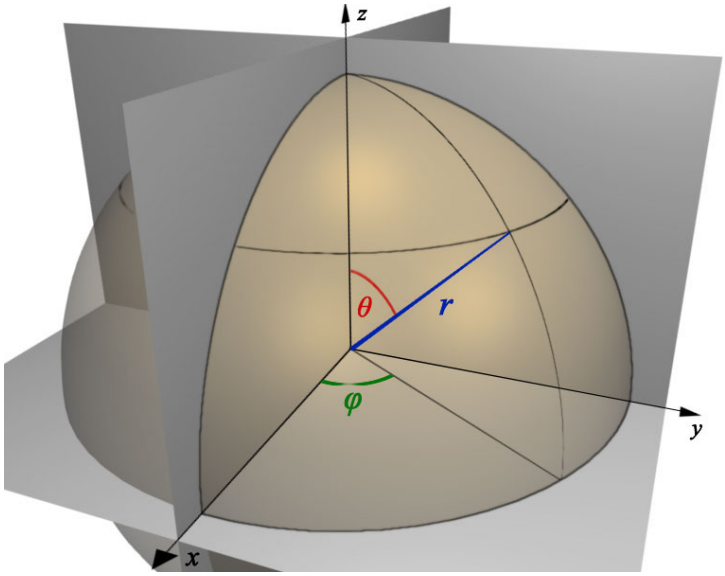


Abbildung 2.12: Sphärische Koordinaten.

Lösungen interessiert sind, kann die Wahl des Koordinatensystems entscheidend sein. Es gibt keine festen Regeln, welches System man wählen soll. Im Allgemeinen gilt aber: Das Koordinatensystem sollte die Symmetrie des betrachteten Problems wiederspiegeln. Was genau diese Aussage bedeutet, kann in diesem Kurs nur mit Beispielen illustriert werden: Wenn z.B. eine Kraft auf ein Objekt nur vom Abstand von einem anderen Objekt abhängt (Beispiel: Gravitation), dann sollte dieser Abstand eine Koordinate sein. Es empfiehlt sich dann die Verwendung sphärischer Koordinaten.

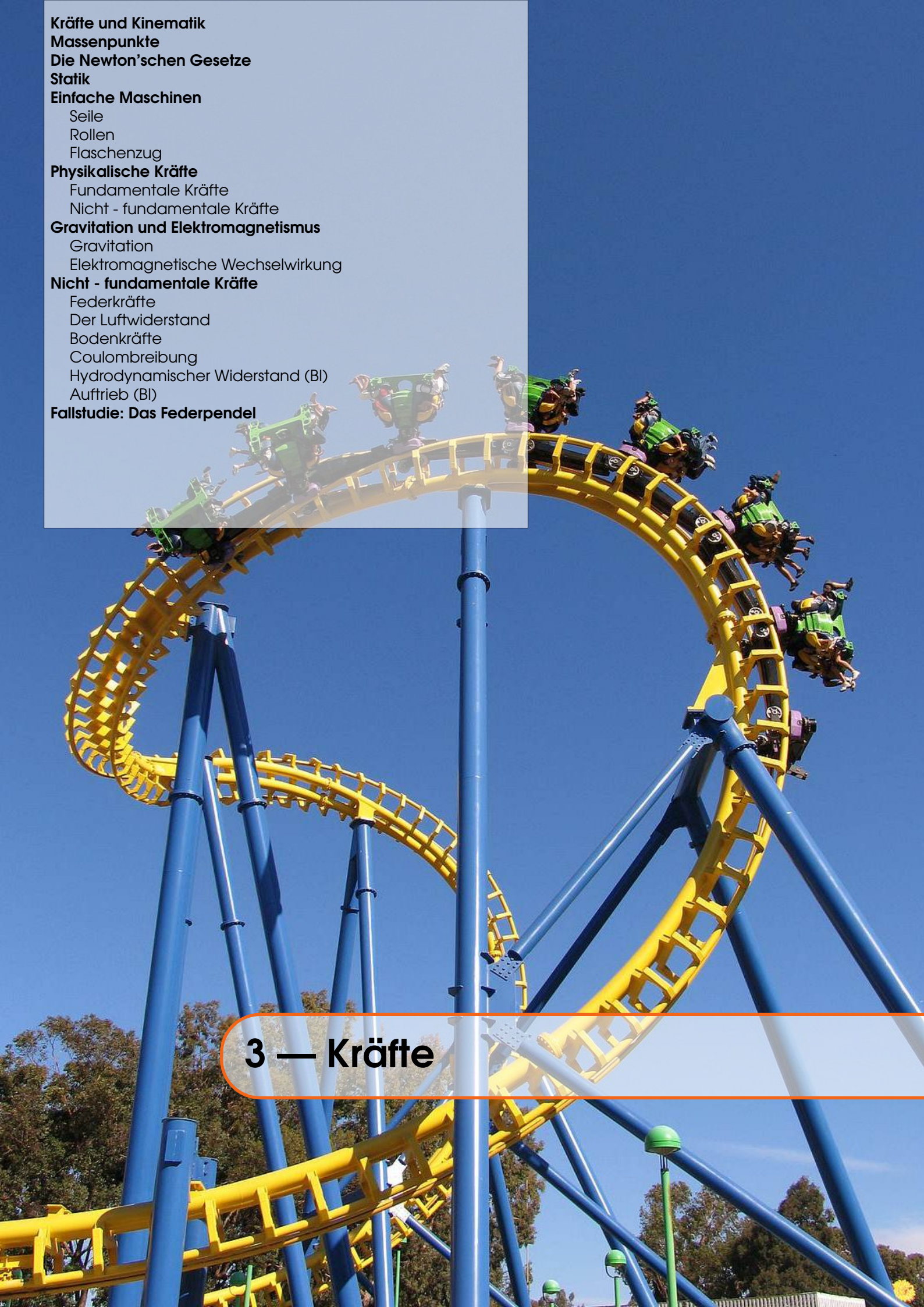
Kräfte und Kinematik
Massenpunkte
Die Newton'schen Gesetze
Statik
Einfache Maschinen
- Seile
- Rollen
- Flaschenzug

Physikalische Kräfte
- Fundamentale Kräfte
- Nicht - fundamentale Kräfte

Gravitation und Elektromagnetismus
- Gravitation
- Elektromagnetische Wechselwirkung

Nicht - fundamentale Kräfte
- Federkräfte
- Der Luftwiderstand
- Bodenkräfte
- Coulombreibung
- Hydrodynamischer Widerstand (BI)
- Auftrieb (BI)

Fallstudie: Das Federpendel



3 — Kräfte

3.1 Kräfte und Kinematik

Im Kapitel über Kinematik lernten wir, wie wir aus der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ eine Trajektorie $\vec{r}(t)$ gewinnen können. In diesem Kapitel lernen wir, woher wir $\vec{a}(t)$ haben. Dazu benötigen wir das Konzept der Kraft. Es gilt die fundamentale Beziehung:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet m die Masse. Es ist wichtig, dass Sie folgende Überlegung verstehen:

1. Die Physik sagt ihnen, wie gross die in irgendeiner Situation wirkenden Kräfte sind.
2. Aus der auf ein Massenpunkt (siehe Abschnitt 3.2) wirkenden Kraft können Sie dessen Beschleunigung $\vec{a}$ ermitteln.
3. Wenn Sie die Beschleunigung $\vec{a}$ haben, können Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes ermitteln.
4. Aus der Geschwindigkeit $\vec{v}$ können Sie den Ort $\vec{r}$ des Massenpunktes errechnen.

Physik spielt nur in Punkt 1 eine Rolle! Alles andere ist reine Kinematik! Unsere Aufgabe wird in diesem Kapitel darin bestehen, die in bestimmten Situationen wirkenden Kräfte anzugeben. Die Situation ist illustriert in Fig. 3.1. Zu dieser Figur noch einige Bemerkungen:

- Die Kraft kann von kinematischen Grössen wie dem Ort und der Geschwindigkeit abhängig sein.
- Häufig gibt es ein einem physikalischen Problem auch noch Parameter, z.B. Materialkonstanten zu berücksichtigen.

- Natürlich brauchen Sie neben $\vec{a}$ und $\vec{v}$ auch noch Anfangsbedingungen. Wenn Sie die zeitliche Entwicklung eines Massenpunktes berechnen wollen, brauchen Sie dessen Startort $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$) und die Startgeschwindigkeit $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$).

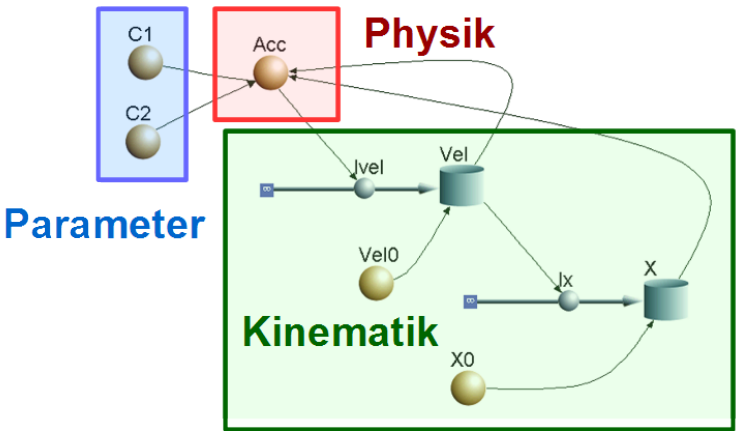


Abbildung 3.1: Ein mechanisches Problem besteht typischerweise aus drei Teilen: a) der Kinematik, welche aus Beschleunigungen und Anfangswerten Bahnkurven berechnet, b) der Physik, welche Kräfte angibt und damit die Berechnung von Beschleunigungen erlaubt und c) einer Parametrisierung freier Systemparameter (Massen, physikalische Konstanten und dergleichen). Beachten Sie: Im gezeigten Beispiel handelt es sich um ein eindimensionales Problem, in welchem die Kräfte sowohl vom Ort als auch von der Geschwindigkeit abhängen. Dies kann, muss aber nicht der Fall sein.

Letztendlich läuft das Lösen einer Bewegungsgleichung auf das Lösen eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinaus (ein eindimensionales System erfordert nur eine Gleichung, für höherdimensionale Systeme bekommen Sie für jede Koordinate eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.) Dies, weil die folgende Gleichung eigentlich (für einen dreidimensionalen Vektor) eigentlich drei Gleichungen umfasst:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{3.2}$$

Das Lösen solcher Systeme mit Berkeley Madonna ist im Kapitel 21.5 ausführlich diskutiert.

3.2 Massenpunkte

Unser Ziel ist, die Bewegung von physikalischen Körpern zu verstehen. Wenn man dieses Problem in aller Allgemeinheit lösen will, ergeben sich einige Herausforde-

rungen:

- Körper können sich nicht nur in eine Richtung bewegen, sie können auch noch rotieren.
- Körper können ihre Form verändern (elastisch oder plastisch).
- ...

Wir werden in dieser Vorlesung zumindest die erste Herausforderung, Rotation, auch noch anpacken. Wir beschränken uns aber immer auf sogenannt starre Körper, d.h. Körper, die ihre Form nicht ändern. Vorerst aber diskutieren wir den einfachsten aller Fälle, den sogenannten **Massenpunkt**. Ein Massenpunkt ist vollständig bestimmt durch folgende Grössen:

1. Ein reeller, positiver Parameter m, genannt **Masse**.
2. Sein Ortsvektor $\vec{r}(t)$ (oder Trajektorie), eine reelle Vektorfunktion der Zeit:
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$
3. Sein Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$, ebenfalls eine reelle Vektorfunktion der Zeit:
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Zumindest in der Welt unserer Anschauung, der makroskopischen Welt gibt es natürlich keine echten Massenpunkte. Das Konzept ist aber trotzdem sinnvoll, weil:

- Solange ausgedehnte Körper nicht rotieren, d.h. aus irgendwelchen Gründen in ihrer Lage fixiert sind, kann ihre Dynamik durch diejenige eines Massenpunktes dargestellt werden.
- Die Grundbausteine der Materie werden, zumindest im sog. Standardmodell, als Massenpunkte betrachtet[1]. Da, zumindest im Prinzip, jeder ausgedehnte Körper als Zusammensetzung elementarer Teilchen verstanden werden kann, können wir seine Dynamik verstehen, wenn wir wissen, wie Massenpunkte miteinander wechselwirken[2].

[1] Wobei die Sache hier kompliziert wird: Auch wenn z.B. Elektronen als Massenpunkte modelliert werden, haben sie, verwirrenderweise, trotzdem einen Drehimpuls (siehe später).

[2] Dieses Argument ist nicht sonderlich gut, da bei der Betrachtung von Elementarteilchen sowieso die Quantenmechanik benützt werden muss.

Wir beginnen mit der Darstellung der Newton'schen Gesetze für einen Massenpunkt.

3.3 Die Newton'schen Gesetze

Die **Newton'schen Gesetze** bilden das Herzstück der klassischen Mechanik. Sie geben Ihnen in gewissem Sinne ein Template, welches Ihnen sagt, wie Sie mit spezifischen Situation umgehen müssen und sie postulieren einige Beziehungen die für alle Arten von Kräften gelten. Beachten Sie, dass die Newtonschen Gesetze einige allgemeine Aussagen über Kräfte und deren Zusammenhang mit der Kinemathek machen, ohne auf die Herkunft der Kräfte einzugehen. Wir nehmen einfach an, es gäbe Kräfte. Welches die physikalischen Ursachen der Kräfte sind (und damit zum Beispiel die Grösse der Kräfte), diskutieren wir erst in den nächsten Abschnitten.

Zuerst geben wir Ihnen die Newton'schen Gesetze in ihrer originalen Form[3]:

1. Die Geschwindigkeit eines Körpers ändert sich nur, wenn eine Kraft auf ihn einwirkt. Falls keine Kraft wirkt, bewegt sich der Körper entweder gar nicht oder auf einer Geraden.

2. Die Beschleunigung eines Körpers ist gegeben durch die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte geteilt durch die Masse des Körpers.

3. Übt ein Körper A eine Kraft $\vec{F}_{BA}$ auf ein Teilchen B aus, wirkt auf Teichen B eine Kraft $\vec{F}_{AB}$ und es gilt:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{3.5}$$

Eine für unsere Zwecke äquivalente aber praktischere Formulierung lautet:

Law 3.1 Die Newton'schen Gesetze lauten:

1. Die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Massenpunkts mit Masse m nennen wir dessen Beschleunigung $\vec{a}$. Falls diese Beschleunigung gleich null ist, bewegt sich der Massenpunkt entweder gar nicht oder auf einer geraden Linie.

2. Die Beschleunigung eines Körpers ist gegeben durch die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte geteilt durch die Masse des Körpers:

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i. \tag{3.6}$$

[3] Allerdings vom Lateinischen ins Deutsche übersetzt.

3. Übt ein Körper A eine Kraft $\vec{F}_{BA}$ auf ein Teilchen B aus, wirkt auf Teichen B eine Kraft $\vec{F}_{AB}$ und es gilt:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{3.7}$$

Dies ist das bekannte Äctio = Reactio"Gesetz.

Die Newton'schen Gesetze besagen das Folgende:

- Das erste Newton'sche Gesetz führt die Geschwindigkeit ein, und erklärt, was mit der Geschwindigkeit und der zugehörigen Bahnkurve passiert, wenn keine Kräfte wirken. Die Aussage, dass kräftefreie Teilchen sich auf Geraden (und z.B. nicht auf, sagen wir, Spiralen) bewegen, ist eine Aussage über die Geometrie der Raumzeit.

- Das zweite Gesetz erklärt, wie die kinematische Grösse "Beschleunigungmit der physikalischen Grösse "Kraf" zusammenhängt.

- Das dritte Gesetz macht eine rein physikalische, aber in aller Allgemeinheit gültige Aussage, nämlich dass zu jeder Kraft eine Gegenkraft existiert. Zusätzlich wird die Grösse und Richtung dieser Kraft spezifiziert.

Folgende Bemerkungen sind relevant:

- Die Newton'schen Gesetze sagen Ihnen, was sich für Beschleunigungen ergeben, wenn Sie die wirkenden Kräfte kennen.

- Es wird Ihnen nicht gesagt, woher diese Kräfte kommen und wie gross sie sind.

- Die Newton'schen Gesetze bieten eine fundamentale, allgemeine Theorie der Mechanik. "Kräfte"werden dabei als noch näher zu bestimmende Templates behandelt.

- Es ist die Aufgabe der Physik, Ihnen zu sagen, welche Grössen die Kräfte im jeweils gegebenen Spezialfall haben.

Kräfte haben eine eigene Einheit. Sie heisst **Newton** . Die Beziehung $\vec{F} = m\vec{a}$ impliziert, dass die Einheit Newton auch in anderen Einheiten dargestellt werden kann:

$$[N] = [\frac{kg \quad m}{s^2}]. \tag{3.8}$$

3.4 Statik

Im Abschnitt 3.1 haben wir Ihnen gezeigt, wie sie ganz allgemein die Ortskurve eines Massenpunktes berechnen können, wenn sie die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte kennen. In diesem Abschnitt widmen wir uns einem wichtigen Spezialfall. Es geht um Situationen, in denen alle Komponenten eines Systems in Ruhe sind. Dies bedeutet, dass die Summe der auf die einzelnen Systemkomponenten wirkenden Kräfte für jede Systemkomponente gleich null ist. Diese Situation nennt man **statisch**.

Und präzise zu sein, muss man anfügen, dass aus der Tatsache, dass die wirkenden Kräfte gleich Null sind, nicht folgen kann, dass das System in Ruhe ist. Strikte gesehen bedeutet das Verschwinden der Kräfte das Verschwinden von Beschleunigungen; ein System, welches eine bestimmte Geschwindigkeit hat, behält diese bei.

Mathematisch ist die Behandlung von statischen Systemen wesentlich einfacher als diejenige sich bewegender Systeme. Der Grund liegt darin, dass wir keine Differentialgleichungen sondern nur noch gewöhnliche Gleichungen lösen müssen. Die Physik statischer Systeme nennt man **Statik** und sie spielt insbesondere bei der Konstruktion von Maschinen oder Gebäuden eine ganz wesentliche Rolle. Wenn wir sagen, dass die mathematische Behandlung der Statik einfacher als diejenige der Dynamik ist, dann ist das zwar wahr, das bedeutet aber nicht, dass die Statik einfach ist. In dieser Vorlesung behandeln wir in der Tat nur relativ einfache statische Systeme. Insbesondere berücksichtigen wir weder Deformation noch Elastizität. Sobald sich die Objekte, die wir untersuchen, deformieren können, wird die zugrunde liegende Mathematik wieder sehr anspruchsvoll. Diejenigen von Ihnen, die Baustatik haben werden, werden dies noch ausführlich lernen.

Definition 3.1 Formal gesehen bedeutet **Statik** nichts anderes, als dass wir verlangen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 0. \tag{3.9}$$

Wenn wir die Newtonschen Gesetze verwenden, sehen wir sofort, dass dies bedeutet:

$$\sum_j \vec{F}_{ij} = 0. \tag{3.10}$$

Dabei bezeichnet $\vec{F}_{ij}$ die j-te Kraft auf die Systemkomponente i.

3.5 Einfache Maschinen

In diesem Abschnitt werden wir sogenannte **einfache Maschinen** diskutieren. Der Begriff Maschine erscheint etwas hochgegriffen; es geht um Rollen, Seile und Stangen. Einfache Maschinen sind nichts anderes als Objekte, die den Ansatzpunkt und die Richtung von Kräften übertragen bzw. verändern können. Letztlich geht es darum, Apparate wie zum Beispiel Flaschenzüge verstehen zu können. Beachten Sie bitte, dass wir immer noch nicht darüber reden, wo hier die Kräfte kommen, die wir verwenden. Genau gleich wie bei den Newtonschen Gesetzen machen wir einige allgemeine Aussagen über Kräfte, ohne auf deren physikalische Herkunft einzugehen.

3.5.1 Seile

Seile können den Ansatzpunkt von Kräften verschieben. Die Situation ist illustriet in Fig. 3.2. Für Seile gilt:

- Die von Seilen ausgeübten Kräfte zeigen immer in Seilrichtung.
- Seile können nur ziehen, nicht aber stossen.
- Die blauen Kräfte $\vec{F}_{SA}$ und $\vec{F}_{SB}$ sind die Kräfte, welche auf das Seil ausgeübt werden.
- Die grünen Kräfte $\vec{F}_{AS}$ und $\vec{F}_{BS}$ sind die Kräfte, welche das Seil auf die Wände ausübt.
- Im statischen Fall (das heisst, wenn das System in Ruhe ist[4]) gilt $\vec{F}_{SA} + \vec{F}_{SB} = 0$. Dies bedeutet $\vec{F}_{SA} = -\vec{F}_{SB}$. Dies ist nicht wegen des 3. Newton'schen Gesetzes so, sondern weil wir fordern, dass das System in Ruhe ist! Würde sich das Seil bewegen, müsste die Beziehung nicht zwingend gelten.
- Aufgrund des 3. Newton'schen Gesetzes gilt immer (ob statisch oder dynamisch): $\vec{F}_{AS} = -\vec{F}_{SA}$ und $\vec{F}_{BS} = -\vec{F}_{SB}$

3.5.2 Rollen

In Fig. 3.3 beschreiben wir eine Rolle und die wirkenden Kräfte. Beachten Sie bitte, dass wir in dieser Figur nur die Kräfte, welche auf das Seil wirken, angegeben haben. Die Kräfte welche das Seil auf die Rolle und die Ansatzpunkte ausübt, erhalten Sie mit dem dritten Newtonschen Gesetz.

[4] Um ganz genau zu sein, müsste man sagen, dass die folgenden Beziehungen sogar dann gelten, wenn das System sich bewegt, aber nicht beschleunigt ist. Das ist aber ein für Ihre Zwecke kaum jemals relevanter Fall.

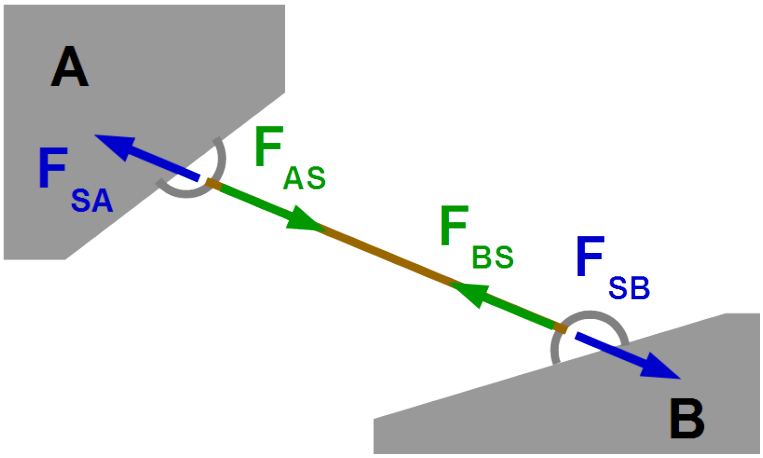


Abbildung 3.2: Die Wirkung eines Seiles zwischen zwei Ansatzpunkten. Seile ziehen immer in Seilrichtung. Im statischen Fall ist die Seilkraft, welche das Seil auf einen Ansatzpunkt ausübt vom Betrag her gleich gross, wie die Kraft, die es auf den anderen Ansatzpunkt ausübt. Wenn das Seil gerade gespannt ist, sind die beiden Kräfte einander entgegen gerichtet.

- Zusammen mit Seilen können Rollen Kräfte umlenken.
- Die rote Kraft $\vec{F}_R$ ergibt sich aus der Wirkung aller Kräfte, die die Rolle auf das Seil ausübt.
- Im statischen Fall gilt: $\vec{F}_1 + \vec{F}_R + \vec{F}_2 = 0$.
- Es gilt weiter (im statischen Fall!): $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$. Dies ist etwas weniger selbstverständlich, als es aussehen mag. Der Grund für die (intuitiv einleuchtende) Gleichheit der Grösse von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ liegt im Drehimpulssatz; diesen Satz diskutieren wir aber erst später.

3.5.3 Flaschenzug

Im Folgenden analysieren wir ein an sich wohlbekanntes, aber in einiger Hinsicht überraschendes Beispiel, nämlich den **Flaschenzug**. Grundsätzlich geht es um eine Situation, wie sie in Fig. 3.4 gegeben ist. Wir werden dieses System gestützt auf unsere Kenntnisse über Seile und Rollen vollständig analysieren. Dabei nehmen wir eine statische Situation an, d.h. alle Teile des Flaschenzugs sollen in Ruhe sein.

Leider werden in Lehrbüchern immer wieder Äbkürzunge"gemacht, d.h. man verwendet Annahmen und Beziehungen zwischen den wirkenden Kräften, "die ja klar sind'". In der Tat kann man damit einfache Beispiele sehr effizient behandeln.

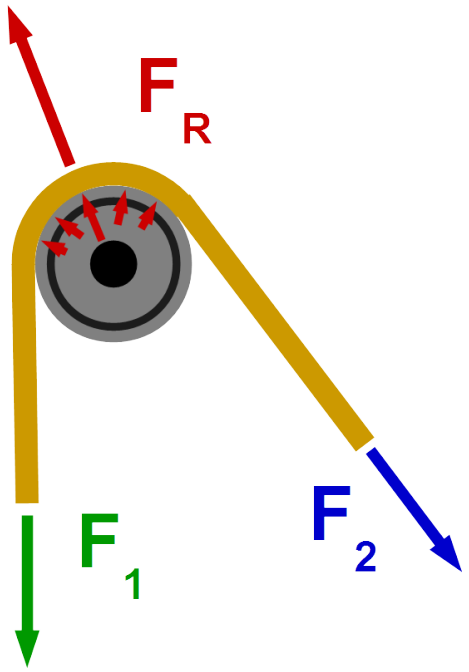


Abbildung 3.3: Die Wirkung einer Rolle. Angegeben sind die Kräfte, welche auf das Seil ausgeübt werden. Die Kräfte welche das Seil auf die Ansatzpunkte und die Rolle ausübt, ergeben sich aus den dritten Newtonschen Gesetz.

Das Problem ist, dass diese Abkürzungen für grössere Systeme nicht mehr funktionieren. Wir demonstrieren Ihnen hier einmal, wie man richtigerweise vorgehen würde, auch wenn wir, oberflächlich gesehen, mit Kanonen auf Spatzen schiessen. Bevor Sie in die Rechnung einsteigen, beantworten Sie für sich die Frage: Wie gross ist $\vec{F}_{W1}$ und $\vec{F}_{W2}$? Fig. 3.4 beinhaltet aber nur die halbe Wahrheit. Um wirklich voranzukommen, zerlegen wir das Seil in drei Teilstücke, und geben alle wirkenden Kräfte an (Fig. 3.4). In gilt folgendes:

- Wir zerschneiden das Seil virtuell in drei Stücke (1,2,3). Das sind die geraden, freihängenden Seilteile. Die um die Rollen gewickelten Seilteile betrachten wir als Teile der Rolle.

- Ausser bei der Kugel vernachlässigen wir alle Massen.

Da alle Objekte (Seilstücke, Kugel, Stangen und Rollen) in Ruhe sind, muss gelten:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 + \vec{F}_Z &= 0 \\
\vec{F}_3 + \vec{F}_4 &= 0 \\
\vec{F}_5 + \vec{F}_{W2} &= 0 \\
\vec{F}_{S2} + \vec{F}_{S3} + \vec{F}_{S1R} &= 0 \\
\vec{F}_{S4} + \vec{F}_{S5} + \vec{F}_{S2R} &= 0 \\
\vec{F}_G + \vec{F}_{S2K} &= 0 \\
\vec{F}_{R1} + \vec{F}_{W1} &= 0 \\
\vec{F}_G + \vec{F}_{R2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Das dritte Newton'sche Gesetz liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Z &= -\vec{F}_{S1} \\
\vec{F}_2 &= -\vec{F}_{S2} \\
\vec{F}_{R1} &= -\vec{F}_{S1R} \\
\vec{F}_{W1} &= -\vec{F}_{S1W} \\
\vec{F}_3 &= -\vec{F}_{S3} \\
\vec{F}_4 &= -\vec{F}_{S4} \\
\vec{F}_{R2} &= -\vec{F}_{S2R} \\
\vec{F}_{S2K} &= -\vec{F}_G \\
\vec{F}_5 &= -\vec{F}_{S5} \\
\vec{F}_{W2} &= -\vec{F}_{S6}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Unser Wissen über Seile ergibt:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S1} &= -\vec{F}_{S2} \\
\vec{F}_{S3} &= -\vec{F}_{S4} \\
\vec{F}_{S5} &= -\vec{F}_{S6}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Letztlich brauchen wir noch die Physik der Rollen:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S2} &= \vec{F}_{S3} \\
\vec{F}_{S4} &= \vec{F}_{S5}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Das sind jetzt 23 Gleichungen mit 19 Unbekannten. Wir wollen nicht in die Details gehen, aber einige der Gleichungen sind aus geometrischen Gründen voneinander abhängig (Beispiel: Wenn die untere Rolle und die Kugel in Ruhe sind, muss auch

die untere Stange in Ruhe sein). Auflösen der oberen Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Z &= \frac{\vec{F}_G}{2} \\
\vec{F}_{W1} &= -\vec{F}_G \\
\vec{F}_{W2} &= -\frac{\vec{F}_G}{2}
\end{aligned}$$

Es ist intuitiv nicht unbedingt ganz klar, dass die Kräfte auf die Wand nicht gleich sind. Die Rechnung zeigt das aber auf transparente Weise.

3.6 Physikalische Kräfte

Sie wissen jetzt, wie Sie Trajektorien erhalten, wenn Sie die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte kennen. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, welche Kräfte es denn in der Praxis gibt. Wir unterscheiden grundsätzlich zwei Arten von Kräften: Fundamentale und nicht - fuzndamentale Kräfte.

3.6.1 Fundamentale Kräfte

Das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik unterscheidet vier fundamentale Kräfte. Alle beobachteten Phänomene können auf diese Kräfte zurückgeführt werden:

- Gravitation
- Elektromagnetismus
- Die starke Kernkraft (hält die Atomkerne zusammen)
- Die schwache Kernkraft (ist für radioaktive Zerfälle mitverantwortlich).

Fundamentale Kräfte:

- Sind die Grundlage unseres Verständnisses der Dynamik.
- Können sehr exakt berechnet werden.
- Fluktuieren nicht im klassischen Sinne (Es gibt aber Quantenfluktuationen)

3.6.2 Nicht - fundamentale Kräfte

Beispiele für nicht - fundamentale Kräfte sind:

- Reibungskräfte
- Auftriebskräfte
- Hydrodynamischer Widerstand
- Luftwiderstand
- Oberflächenspannung
- Van-der-Waals Kräfte
- Entropische Kräfte
- ...

Nicht-fundamentale Kräfte:

- Treten als Mittelwerte aus dem Zusammenspiel der Fundamentalkräfte auf.
- Werden oft phänomenologisch beschrieben.
- Da sie Mittelwerte sind, fluktuieren sie.

3.7 Gravitation und Elektromagnetismus

In diesem Kurs können wir leider nur zwei der vier Fundamentalkräfte besprechen, nämlich die Gravitation und der Elektromagnetismus. In der klassischen Beschreibung sind beide Kräfte erstaunlich ähnlich (die Stärke der Kraft zwischen zwei Körpern hängt vom Inversen des Quadrat des Abstandes ab). Der Unterschied zwischen Gravitation und Elektromagnetismus besteht im wesentlichen darin, dass die Gravitation immer anziehend, die elektromagnetische Wechselwirkung aber sowohl anziehend als auch abstossend wirken kann. Dies äussert sich darin, dass die Masse eines Objektes immer positiv ist, seine Ladung aber sowohl negativ als auch positiv sein kann. Weiter, und auf den ersten Blick nicht so verwunderlich, die Tatsache, dass die Gravitation um viele Grössenordnungen schwächer ist als die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen. Aus Sicht der klassischen Physik ist dieser Unterschied der Stärke der beiden Wechselwirkungen in keiner Art und Weise beunruhigend. Kopfzerbrechen, oder sagen wir mathematische Schwierigkeiten, entstehen aus dieser Tatsache erst, wenn die Kräfte quantenmechanisch analysiert werden.

3.7.1 Gravitation

Wir geben Ihnen das **Gravitationsgesetz** wie es Newton formulierte.

Law 3.2 Nehmen Sie an , Sie hätten zwei Massen M_1 und M_2, siehe Fig. 3.6. Diese Massen ziehen sich gegenseitig an. Dabei wirkt folgende Kraft:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \vec{n}_{12}. \tag{3.15}$$

Dabei bedeutet: $\vec{F}_{12}$ Kraft auf die Masse M_1, verursacht durch die Masse M_2, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (Der Vektor, welcher von M_2 nach M_1 zeigt), $\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ (Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}_{12}$, sihe auch Kapitel 21.1.

Bemerkungen:

- Gravitationwechselwirkungen führen immer zu anziehenden Kräften.
- Gravitationskräfte können addiert werden (Superpositionsprinzip).

Context 3.1 Heute verstehen wir die Gravitation mit Hilfe der allgemeinen Relativitätstheorie. Aber auch diese Theorie ist, wie wir mit Sicherheit wissen, noch nicht die endgültige Antwort. Trotzdem möchten wir Ihnen zumindest eine Idee darüber vermitteln, was der Inhalt der allgemeinen Relativitätstheorie ist, und warum sie als besonders elegant betrachtet wird.

Machen Sie sich zuerst einmal klar, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz zwar die Anziehung zwischen zwei Massen beschreibt aber in keiner Art und Weise erklärt. Auch ist Gravitation erst vorhanden, wenn zwei Massen da sind. Es stellt sich die Frage, warum das newtonsche Gesetz gilt und was der Mechanismus ist, der zur Kraftwirkung zwischen zwei Massen führt.

Albert Einstein, ein ehemaliger Hilfsdozent am Technikum Winterthur, kam auf den Gedanken, zu sagen, dass Massen den sie umgebenden Raum krümmen. Wenn nun eine Masse, zum Beispiel die Sonne den sie umgebenden Raum krümmt und eine andere Masse, zum Beispiel die Erde, durch diesen gekrümmten Raum fliegt, dann beschreibt die Erde eine gekrümmte Bahn. Dies können Sie sich sehr einfach veranschaulichen, wenn Sie sich vorstellen, wie eine Billardkugel auf einer gekrümmten Fläche rollen wird. Was physikalisch so elegant an dieser Theorie der Raumkrümmung ist, ist, dass wir nicht mehr zwei Körper zur Erklärung der gravitationsbedingten Anziehung benötigen. Wir sagen, dass jeder einzelne Körper den ihn umgebenden Raum so krümmt, dass ein anderer Körper, der durch diesen Raum fliegt, eine gekrümmte Bahn beschreibt. Aus

einer Wechselwirkung zwischen zwei Körpern in einem statischen Raum wurde die Wechselwirkung eines Körpers mit dem ihn umgebenden Raum, wobei letzterer jetzt nicht mehr statisch sondern eben selber auch dynamisch ist.

3.7.2 Elektromagnetische Wechselwirkung

Die elektromagnetische Wechselwirkung wird durch Ladungen verursacht. Zwischen Ladung und Masse gibt es einige fundamentale Unterschiede:

- Im Gegensatz zu Massen können Ladungen auch negativ sein.
- Ladungen treten nur gequantelt auf. Das heisst: Es gibt eine kleinste mögliche Ladung, die wir mit e bezeichnen. Die Einheit der Ladung ist das Coulomb C. Ausgedrückt in Coulomb gilt $e = 1.602189 \cdot 10^{-19}$. Diese Quantelung ist aus klassischer Sicht nicht erklärbar, sondern eine Konsequenz aus gewissen Aspekten der Quantentheorie.
- Ein Elektron trägt eine Ladung von genau $-e$.

Das **Coulomb'sche Gesetz** beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen Q_1 iund Q_2.

Law 3.3 Nehemn Sie an , Sie hätten zwei Ladungen Q_1 und Q_2. Dabei wirkt folgende Kraft:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\vec{n}_{12}. \tag{3.16}$$

Dabei bedeutet: $\vec{F}_{12}$ Kraft auf die Masse Q_1, verursacht durch die Masse Q_2, $\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} C^2 s^2 kg^{-1} m^{-3}$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (Der Vektor, welcher von M_2 nach M_1 zeigt), $\vec{n}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ (Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}_{12}$, sihe auch Kapitel 21.1.

Bemerkungen:

- Elektromagnetische Wechselwirkungen können anziehend oder abstossend sein.
- Gravitationskräfte können addiert werden (Superpositionsprinzip).
- Die Ladung ist in allen (bekannten) physikalischen Prozessen erhalten.

Context 3.2 Die Elektrodynamik ist die am Besten verstandene Kraft, heute in der Form der sogenannten Quantenelektrodynamik. Bei hohen Energien vereinigen sich die elektrodynamische Kraft und die schwache Kernkraft zur

sogenannten“electroweak theory”.

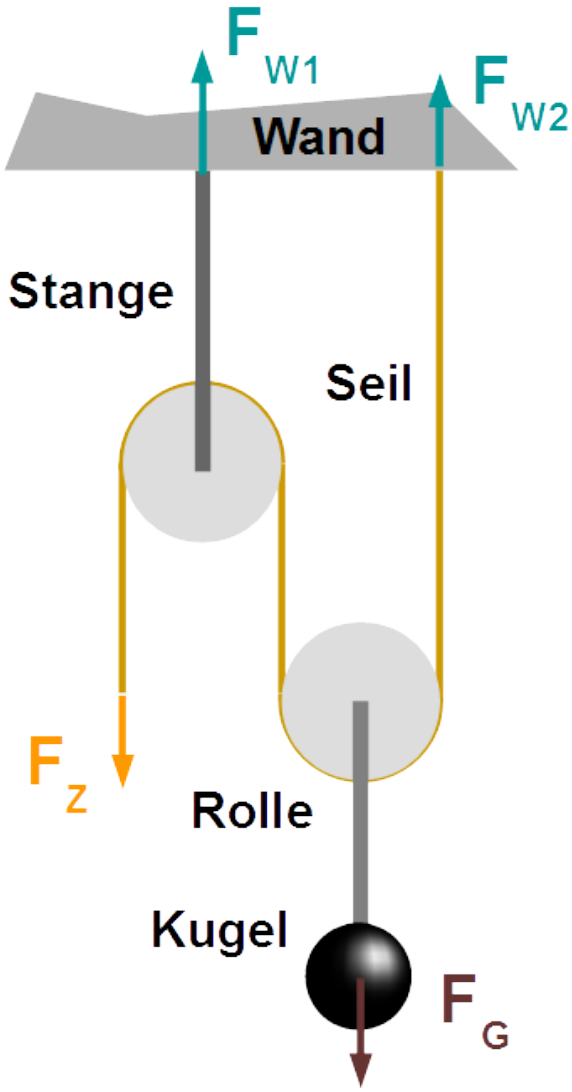


Abbildung 3.4: Der Flaschenzug. Die in den Lehrbüchern üblicherweise gebotene Darstellung.

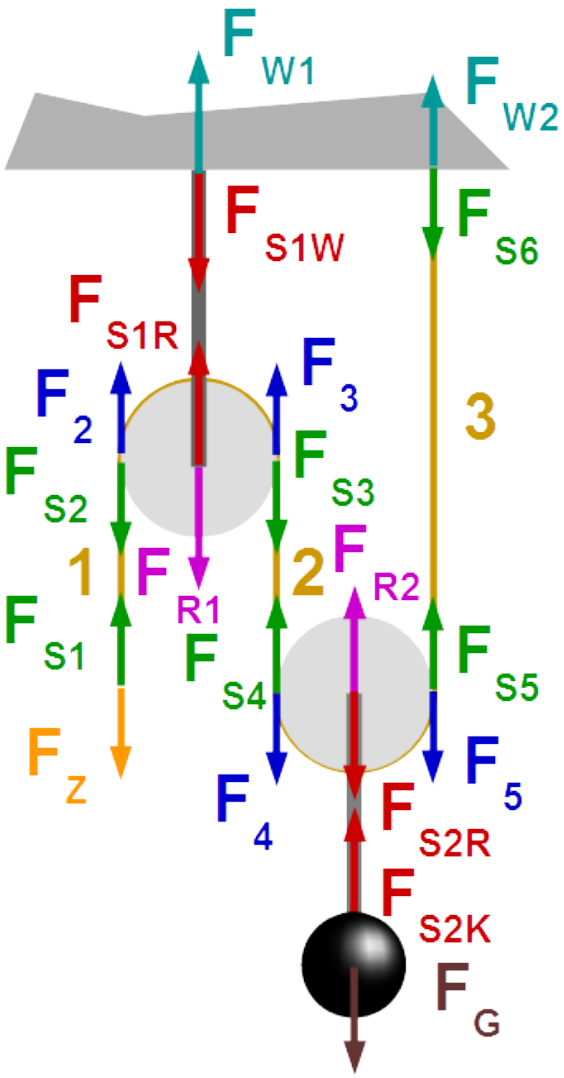


Abbildung 3.5: Ein Flaschenzug, aufgeteilt in Komponenten, mit allen wirkenden Kräften.

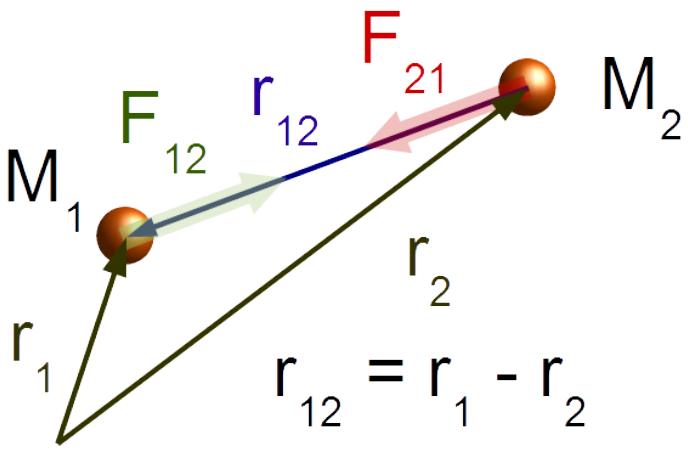


Abbildung 3.6: Illustration der Gravitationskraft zwischen zwei Massen M_1 und M_2. Aus technischen Gründen tragen die Vektornamen keine kleinen Pfeilchen.

3.8 Nicht - fundamentale Kräfte

3.8.1 Federkräfte

Wenn Sie eine Feder stauchen oder auseinanderziehen, erfahren Sie eine Kraft. Diese Kraft ergibt sich aus der Summe aller Kräfte, welche zwischen den Atomen wirken aus denen die Feder aufgebaut ist[5].

Wir nehmen an, die unbelastete Feder habe eine Ruhelänge L_0 und sei im Wesentlichen durch einen Vektor $\vec{r}$ (der Vektor, der die beiden Enden der Feder verbindet) charakterisiert. Häufig betrachtet man sogenannte **ungedämpfte Federn** üben auf ein sie berührendes Objekt die Kraft $\vec{F}_s$ aus:

$$\vec{F}_s = -k(|\vec{r}| - L_0)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{3.17}$$

Die Konstante k heisst Federkonstante und hat die Einheit $[N/m]$. Je grösser k, desto "härter" die Feder. Der Vektor $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ eigentlich nichts anderes als ein Vektor, "der in Richtung $\vec{r}$ zeigt, aber die Länge 1 ha". Federn ziehen nun halt mal in der Richtung, die sie selber einnehmen. Machen Sie sich die Vorzeichen klar: Wenn die Feder auf eine Länge gestaucht wird, die kleiner ist als die Ruhelänge L_0 wird $(|\vec{r}| - L_0)$ negativ und $-k(|\vec{r}| - L_0)$ positiv. Die Feder drückt dann nach aussen.

In einer Dimension kann man sich die Sache gut veranschaulichen, siehe Fig. 3.7. Die Gleichung 3.17 kann formal vereinfacht werden, wenn man die Koordi-

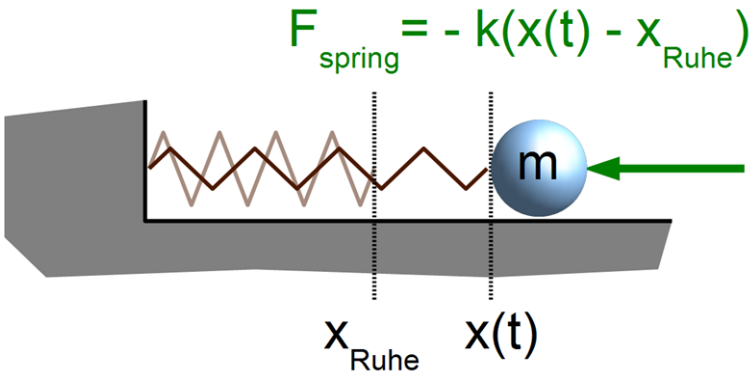


Abbildung 3.7: Eine lineare Feder mit Ruhelänge x_0.

naten so wählt, dass die Ruhelage gerade dem Ursprung des Koordinatensystems entspricht. Die Koordinaten geben dann im Wesentlichen die Abweichung von der Ruhelage an. Es gilt dann:

$$\vec{F}_s = -k\vec{r}. \tag{3.18}$$

[5] Damit ist die Federkraft letztlich die Konsequenz aus der, allerdings qunatenmechanisch zu rechnenden, elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Atomen.

und für eindimensionale Systeme:

$$F_s = -kx. \tag{3.19}$$

Häufig betrachtet man sogenannte **gedämpfte Federn** . Dabei tritt zur Federkraft ein Reibungsterm hinzu. Dieser wird oft als proportional zur Geschwindigkeit angenommen. Wir werden diese Sorte Federn in der Vorlesung über Oszillationen im Detail studieren. Hier nur die Bewegungsgleichung für eine gedämpfte Feder:

$$\vec{F}_s = -k(|\vec{r}| - L_0)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \gamma\vec{v}. \tag{3.20}$$

Die Konstante γ gibt die Grösse der Reibung an und hat die Einheit $[Ns/m]$.

Context 3.3 Lineare Federn spielen in der Physik eine kaum zu überschätzende Rolle. Dies aus drei Gründen:

- Wie Sie noch sehen werden, können lineare Federn vollständig durch analytische (das heisst: "mit Formeln") Methoden analysiert werden. Damit waren sie vor der Einführung der Computer eines der ganz wenigen Systeme, welche theoretisch vollständig behandelt werden konnten.
- Man kann sich fragen, ob alle Federn linear sind. Die Antwort ist: Natürlich nicht! Aber: Sie können jede Federkraft durch eine Taylorreihe annähern. Für kleine Auslenkungen ist die lineare Näherung meist sehr gut.
- Viele physikalische Systeme haben auf den ersten Blick gar nichts mit linearen Federn zu tun. Aber wenn Sie diese Systeme in linearer Näherung betrachten, bekommen Sie Gleichungen, die denen der linearen Feder exakt entsprechen.
- Quantensysteme und Quantenfelder zeigen interessanterweise häufig ein Verhalten, welches (allerdings in quantenmechanischer Formulierung) demjenigen der linearen Feder entspricht.

Den Punkt mit der Taylorreihe beinhaltet folgende Überlegung: Wir gehen davon aus, dass ein System eine Ruhekonfigurationäufweist, d. h. eine Konfiguration in welcher die Summe der auf die einzelnen Komponenten wirkenden Kräfte gleich null ist.Diese Ruhekonfiguration werde durch die Parameter $\vec{x}_0$ dargestellt. Für die Kraft auf die Komponente i gilt dann:

$$\vec{F}_i(\vec{x}_0) = 0. \tag{3.21}$$

Im folgenden arbeiten wir mit einem System, welches nur aus einer Komponente besteht und welches durch eine einzige Koordinate bestimmt ist. Weiter soll auch die Richtung der Kraft vorgegeben sein. Wir machen dies, um von der Vektor zur Zahlenschreibweise übergehen zu können. Alles was wir sagen kann aber ohne weiteres auf Vektoren übertragen werden. Für eindimensionale Systeme gilt dann:

$$F(x_0) = 0. \tag{3.22}$$

Wir können nun die wirkende Kraft als Funktion der Abweichung von der Ruhelage darstellen:

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} \Delta x + \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \ldots \tag{3.23}$$

Es hindert uns niemand daran, die Koordinaten gerade so zu legen, dass der Nullpunkt unserer Koordinaten in der Ruheposition unseres Systems zu liegen kommt, d.h. $x_0 = 0$ und in der Folge $F(0) = 0$. Weiter ist Δx, die Abweichung von der Ruhelage, gerade gleich x. Für kleine x können wir dann die Newton'sche Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = \frac{1}{m}F(x) \tag{3.24}$$

approximativ angeben mit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{3.25}$$

mit

$$k = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0}. \tag{3.26}$$

Die Gleichung 3.25 ist aber nichts anderes als die Federgleichung Gl. 3.19. Damit haben wir gezeigt: Auch nicht - lineare Systeme sind, für kleine Abweichungen aus der Ruhelage, im wesentlichen durch die Federgleichung beschreibbar. Konkret heisst das: die Kräfte zwischen den Atomen in einem Metall sind an sich nichtlinear. Da Metalle aber nur unter sehr grossem Kraftaufwand zu komprimieren sind, führen kleine Kräfte nur zu ganz geringen Auslenkung. Diese sehr geringen Auslenkungen führen zu einem dynamischen Verhalten, welches

im wesentlichen durch die Federgleichung beschrieben wird. Deswegen ist es durchaus sinnvoll, zu sagen, dass eine Stimmgabel schwingt. Dasselbe gilt auch für grosse Strukturen wie zum Beispiel Gebäude. Geringe Abweichungen von der Ruhelage führen zu einer Dynamik, welche im wesentlichen durch eine Schwingung beschrieben wird.

3.8.2 Der Luftwiderstand

Auf einen sich durch Luft bewegenden Körper wirkt (neben anderen Kräften wie der Gravitation) eine Widerstandskraft, der sog. **Luftwiderstand** $\vec{F}_w$. Der Luftwiderstand ist eine Kraft, damit also ein Vektor.

Law 3.4 Für den Luftwiderstand gilt:

$$\vec{F}_w = -c_w \frac{\rho A}{2} |\vec{v}|^2 \vec{n}_v. \tag{3.27}$$

Dabei bedeutet: c_w bezeichnet die von der Geometrie des Körpers gegebene Widerstandszahl, ρ die Luftdichte ($1.3 kg/m^3$), A die Querschnittsfläche in Bewegungsrichtung des Körpers und $\vec{n}_v$ den Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit (siehe auch Kapitel 21.1).

Bemerkungen:

- Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.
- Die obige Formel gilt nur in einem begrenzten Geschwindigkeitsbereich. Für praktische Zwecke (vom Velo bis zum Unterschallflugzeug) ist sie aber ziemlich gut.
- Fig. 3.8 gibt Ihnen einen Überblick über die Widerstandszahl einiger häufiger Formen. Sie können diese Werte für Abschätzungen verwenden. Die genauen Widerstandszahlen müssen sowieso experimentell bestimmt werden.

Auf ein Objekt welches sich frei in der Luft bewegt wirken neben dem Luftwiderstand auch die Gravitaionskraft. Die Bewegungsgleichungen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= -c_w \frac{\rho A}{2m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, v_x, \\
\frac{dv_y}{dt} &= -c_w \frac{\rho A}{2m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, v_y, \\
\frac{dv_z}{dt} &= -mg - c_w \frac{\rho A}{2m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, v_z.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Beachten Sie:

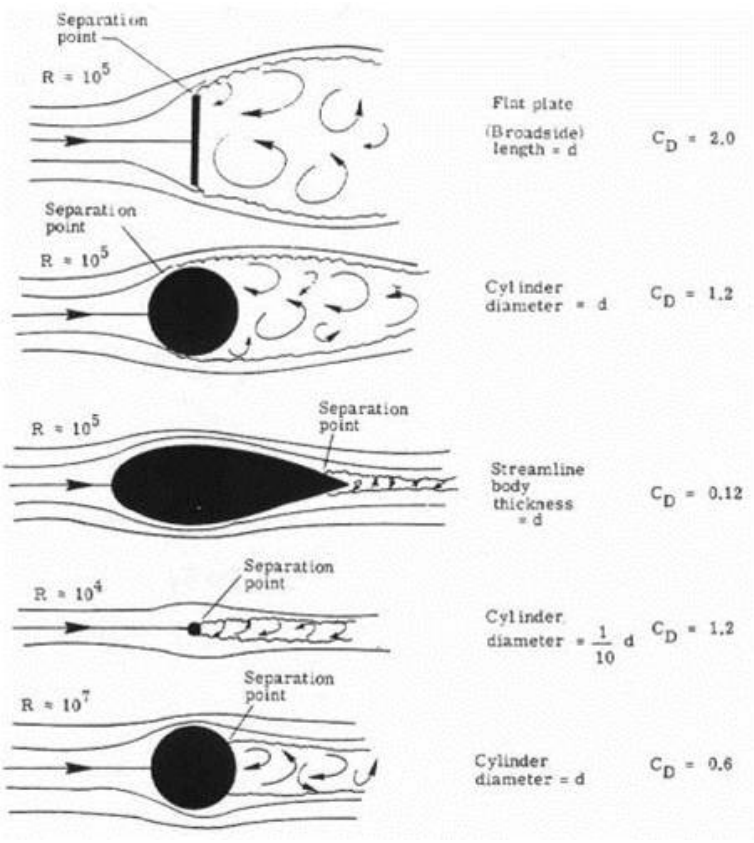


Abbildung 3.8: Widerstandszahl einiger typischer Formen.

- Die Wurzel ist gleich dem Betrag der Geschwindigkeit. An sich kommt dieser Betrag ja in Gleichung 3.27 als Quadrat vor. Da aber $|\vec{n}_v = \vec{v}/|\vec{v}|$ kommt der Betrag letztlich nur noch in linearer Form vor.
- Der Betrag führt dazu, dass die Bewegungsgleichungen gekoppelt sind.

3.8.3 Bodenkräfte

In Fig. 3.9 sehen Sie eine Klotz, der auf dem Boden ruht. Das bedeutet: neben der Gravitationskraft muss es noch eine zweite Kraft geben. Diese nennt man in den Schulbüchern **Bodenkraft**. Da der Klotz ruht, gilt für die beiden auf den Klotz wirkenden Kräfte:

$$\vec{F}_B + \vec{F}_G = 0. \tag{3.29}$$

Damit gilt: $\vec{F}_B = -\vec{F}_G$. Es gibt nun Leute, die sagen: "Die Bodenkraft ist nach dem dritten Newton'schen Gesetz die Gegenkraft zur Gravitionskraft." **Dies ist falsch!** Die Gegenkräfte nach Newton wirken nicht auf denselben Körper. Nach dem

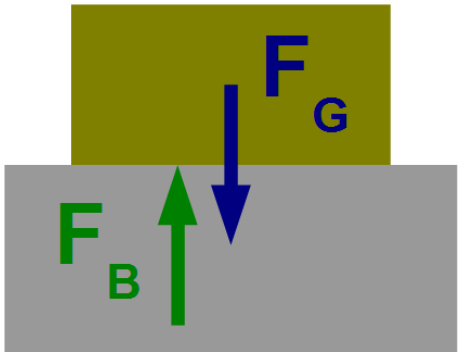


Abbildung 3.9: Ein Klotz ruht auf dem Boden

dritten Newton'schen Gesetz gilt, dass wenn ein Körper A eine Kraft $\vec{F}_{BA}$ auf einen Körper B ausübt, dann wirkt vom Körper B eine Gegenkraft $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ auf den Körper A. Die Gegenkraft zu $\vec{F}_G$ ist eine Kraft, die der Block auf die Erde ausübt. Die Kraft $\vec{F}_B$ ist keine Gravitationskraft, sondern in ihrer Natur elektromagnetisch. Die Situation ist illustriert in Fig. 3.10.

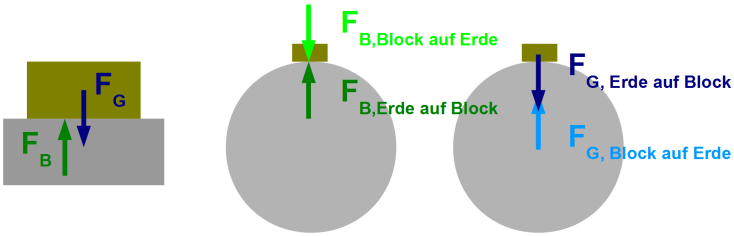


Abbildung 3.10: Die Gegenkraft zur Gravitationskraft der Erde auf den Klotz übt der Klotz auf die Erde aus. Die Bodenkraft kommt durch die Abstossung der Moleküle/Atome des Materials des Klotzes und des Bodens zustande.

3.8.4 Coulombreibung

Man unterscheidet verschiedene Formen von Reibung: Haft-, Gleit- und Rollreibung. Für alle diese Reibungstypen gelten genähert folgende, empirisch gefundene Regeln:

Law 3.5 Reibungsgesetze:

- **Amontons erstes Gesetz** Die Reibunskraft auf einen Klotz in einer Situation wie in Fig. 3.11 ist proportional zur Masse des Klotzes.
- **Amontons zweites Gesetz** Die Reibunskraft auf einen Klotz in einer Si-

tuation wie in Fig. 3.11 ist unabhängig von der Auflagefläche des Klotzes.

- **Coulombs Gesetz der Reibung** Die Reibunskraft auf einen Klotz in einer Situation wie in Fig. 3.11 ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Klotzes.

Natürlich gelten diese Gesetze nur approximativ. Für "normal" Situationen (d.h. Gewicht nicht zu gross, Auflagefläche nicht zu klein, usw.) gelten diese Gesetze aber erstaunlich genau. Zur Beschreibung der Reibung werden wir im Folgenden verschiedene Reibungskoeffizienten einführen. Deren Grösse hängt sowohl vom Material des rutschenden Körpers als auch von der Unterlage sowie eventueller Schmiermittel (das Material zwischen Körper und Unterlage) ab. Eine gute Quelle ist `http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html`.

Gleitreibung

Unter **Coulombreibung** versteht man das, was man in der Schule normalerweise als **Reibung** bezeichnet. Die Situation ist illustriert in Fig.

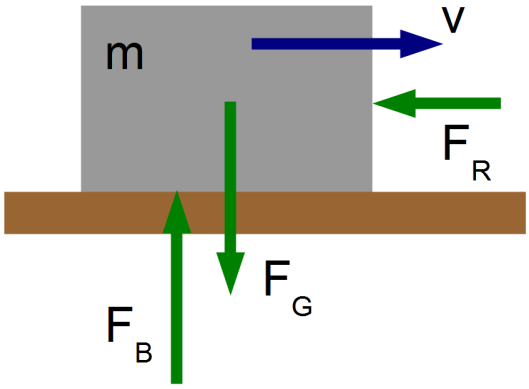


Abbildung 3.11: Gleitreibung: Ein Klotz mit Masse m gleitet auf einer Oberfläche. Auf den Klotz wirkt eine Gleitreibungskraft.

Die Kräfte in Fig. 3.11 sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -\vec{F}_G \\ \vec{F}_R &= -\mu_G m g \vec{n}_{\vec{v}} \\ \vec{n}_{\vec{v}} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei bezeichnet μ_G (meist einfach μ) den **Gleitreibungskoeffizienten**.

Haftreibung

Häufig braucht es mehr Kraft, eine Masse “anzuschiebe”, als sie in Bewegung zu halten. Dieses Phänomen wird durch die sogenannte Haftreibung erklärt. Ist die Zugkraft dem Betrag nach kleiner als eine bestimmte kritische Kraft F_c, kompensiert die Haftreibung die Zugkraft. Die Kräfte in Fig. 3.12 sind dann gegeben durch:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_G \tag{3.31}$$

$$F_C = \mu_H m g \vec{n}_{pull} \tag{3.32}$$

$$\vec{n}_p ull = \frac{\vec{F}_{pull}}{|\vec{F}_{pull}|} \tag{3.33}$$

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_{pull} \qquad \text{falls } |\vec{F}_{pull}| < F_C \text{ und } \vec{v} = 0 \tag{3.34}$$

Dabei bezeichnet μ_H den **Haftreibungskoeffizienten**.

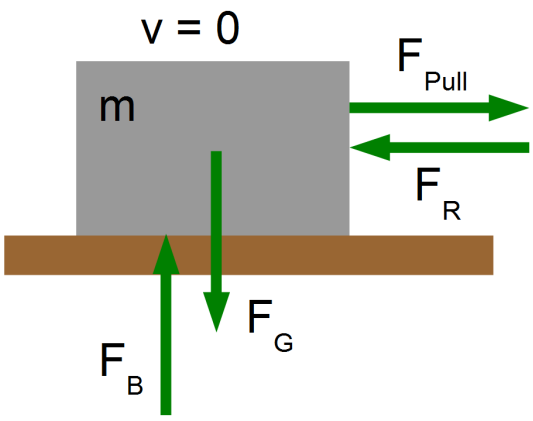


Abbildung 3.12: Haftreibung: Ein Klotz mit Masse *m* ruht auf einer Oberfläche und es wirkt eine Zugkraft. Unterhalb einer bestimmten Schwelle wird eine Zugkraft durch eine Haftreibungskraft kompensiert.

Rollreibung

Neben Gleit- und Haftreibung unterscheidet man diverse weitere Typen von Reibung, z.B. Rollreibung. Bei der Rollreibung spielt die Deformation des Rades eine Rolle (Reibung ist mit wenig Druck im Pneu grösser als bei prall gepumpten Pneus). Formal wird die Rollreibung genau gleich beschrieben wie die Gleitreibung.

3.8.5 Hydrodynamischer Widerstand (BI)

Die Hydrodynamik ist ein im Allgemeinen sehr schwieriges Thema und auch heute noch Gegenstand aktiver Forschung (sowohl in der Theorie als auch im Experiment). Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Kräfte auf eine sich im Wasser bewegende Kugel einwirken. Die Theorie kann auf nicht-sphärische Objekte ausgedehnt werden, wir machen das aber nicht. Ebenfalls muss darauf hingewiesen werden, dass die angegebenen Beziehungen nur für sogenannte Newton'sche Flüssigkeiten gelten (Wasser, Alkohol, Glycerin, Milch, etc.). Viele Flüssigkeiten, z.B. Blut, Ketchup, Beton, Dispersionsfarbe, verhalten sich wesentlich komplizierter.

Für nicht allzu grosse Geschwindigkeiten (s. später) gilt, dass

- die Reibungskraft (der "dra") der Geschwindigkeit entgegengerichtet ist,
- und die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wir betrachten den Fall einer im Wasser sinkenden Kugel, si. Fig. 3.13.

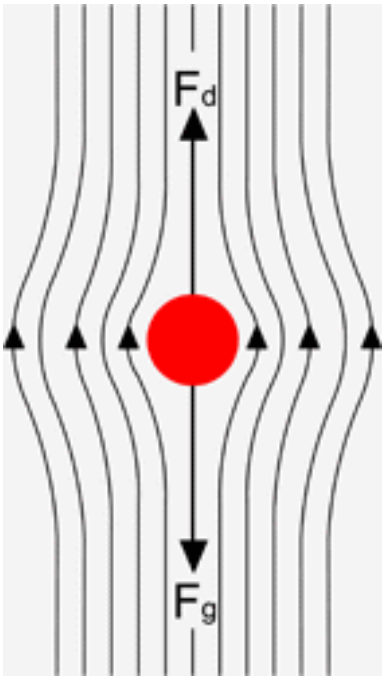


Abbildung 3.13: Eine Kugel sinkt in einer Flüssigkeit. Dabei muss sie die sie umgebende Flüssigkeit verdrängen und es tritt eine Reibungskraft $\vec{F}_d$ auf.

Law 3.6 Sir George Stokes gelang es, die auf die Kugel wirkende Reibungskraft aufgrund theoretischer Überlegungen zu berechnen. Er erhielt:

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta r\vec{v}. \tag{3.35}$$

Dabei bezeichnet η die **Viskostität**, eine von der Flüssigkeit abhängige Materialkonstante, r den Radius der Kugel und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Kugel.

Sie werden sich mit **Stokes'scher Reibung** noch ausführlich auseinandersetzen (aber nicht in dieser Vorlesung). Eine der sehr wichtigen Fragen ist, wann nun die Beziehung in Gl. 3.35 wirklich gilt. Wir nehmen an, ein Objekt bewege sich in einer Flüssigkeit (dass muss nun keine Kugel sein). Dazu muss man beim Strömungsverhalten zwischen laminarer (glatter) und turbulenter Strömung unterschieden (der Strömung um das Objekt). Stokes – Reibung gilt bei laminarer Strömung. Ob eine Strömung turbulent wird, ist im Detail sehr schwer vorauszusehen, aber eine gut fundierte Faustregel besagt (die natürlich nicht für Objekte mit kleinen Spitzen oder ähnlichen Schikanen gilt): Wenn die sog. **Reynoldszahl** Re kleiner als 1 ist,

ist die Strömung laminar. Dabei gilt für Re:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}. \tag{3.36}$$

Hierbei bedeutet ρ die Dichte der Flüssigkeit, in der ein Objekt sich bewegt, v der Betrag der Geschwindigkeit des Objekts relativ zur Flüssigkeit und L eine typische Grösse (z.B. den Durchmesser) des Objekts.

3.8.6 Auftrieb (BI)

Auf einen in eine Flüssigkeit mit Dicthe ρ_F eingetauchten Körper der Masse m und des Volumens V wirkt eine Auftriebskraft. Bereits im klassischen Griechenland war diese Kraft bekannt; Archimedes entdeckte das sogenannte Archimedische Prinzip: Ein Körper der ganz oder teilweise in Wasser eingetaucht wird, erfährt eine Auftriebskraft, welche der Gewichtskraft des verdrängten Wassers entspricht[6]

Formal gilt für die Auftriebskraft $\vec{F}_A$:

$$\vec{F}_A = -V\rho_F\vec{g}. \tag{3.37}$$

Dabei verwenden wir den Vektor der Erdbeschleunigung:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Die totale Kraft (Auftrieb plus Gewichtskraft) welche auf eine Körper wirkt, beträgt:

$$\vec{F}_A = -(V\rho_F - m)\vec{g}. \tag{3.39}$$

3.9 Fallstudie: Das Federpendel

Der Zweck dieses Abschnitts ist es, Ihnen zu zeigen, wie Sie Bewegungsgleichungen in einem nicht - trivialen Fall lösen. Gegeben sei eine Masse m, welche an einer Feder aufgehängt ist, siehe Fig. 3.14. Wir gehen davon aus, dass das System zweidimensional ist, d.h. die Masse darf sich nur in der xz - Ebene bewegen. Die Position der Masse sie gegeben durch den Vektor $\vec{r}(t)$. Wir nehmen an, es wirken nur zwei Kräfte, nämlich die Gravitationskraft und die "Federkraft" $\vec{F}_s$. Den Luftwiderstand berücksichtigen wir hier nicht. Für die Federkraft gilt:

$$\vec{F}_s = -k(|\vec{r}(t)| - L_0)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{3.40}$$

Dabei sind L_0 und k Konstanten (k ist die Federkonstante und L_0 die Länge der ungespannten Feder). In Fig. 3.15 sehen Sie die zugehörige BM - Flowchart. Dabei

[6] Ich habe meine Zweifel, dass Archimedes dies so gesagt hat. Weder kannten die Griechen das Konzept der Kraft in unserem Sinn, noch hatten sie eine präzise Idee über Gewichte. Die griechischen Philosophen waren allerdings schon sehr kluge Leute; ich vermute, dass Archimedes etwas gesagt hat, dass, ausgedrückt in unseren Begriffen, etwa dem entspricht, was ich Ihnen als Archimedisches Prinzip vorstelle.

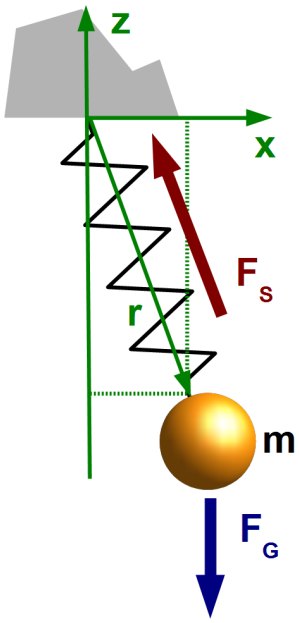


Abbildung 3.14: Federpendel.

wurden folgende Beziehungen verwendet:

$$
\begin{aligned}
\texttt{L} &= \texttt{\textbackslash sqrt\{x\^{}2 + z\^{}2\}} \\
\texttt{nx} &= \texttt{x/L} \\
\texttt{nz} &= \texttt{z/L} \\
\texttt{dxdt} &= \texttt{vx} \\
\texttt{dzdt} &= \texttt{vz} \\
\texttt{dvxdt} &= \texttt{ax} \\
\texttt{dvzdt} &= \texttt{az} \\
\texttt{ax} &= \texttt{Fx/m} \\
\texttt{az} &= \texttt{Fz/m} \\
\texttt{Fx} &= \texttt{-k*(L - L_0)*nx} \\
\texttt{Fz} &= \texttt{-k*(L - L_0)*nz-m*g} \\
\texttt{L0} &= 1.2 \\
\texttt{k} &= 2 \\
\texttt{x0} &= 1 \\
\texttt{z0} &= 1 \\
\texttt{vx0} &= 0 \\
\texttt{vz0} &= 0 \\
\texttt{g} &= 9.81
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Die Dynamik dieses Systems ist übrigens sehr kompliziert (sogar chaotisch). Ein

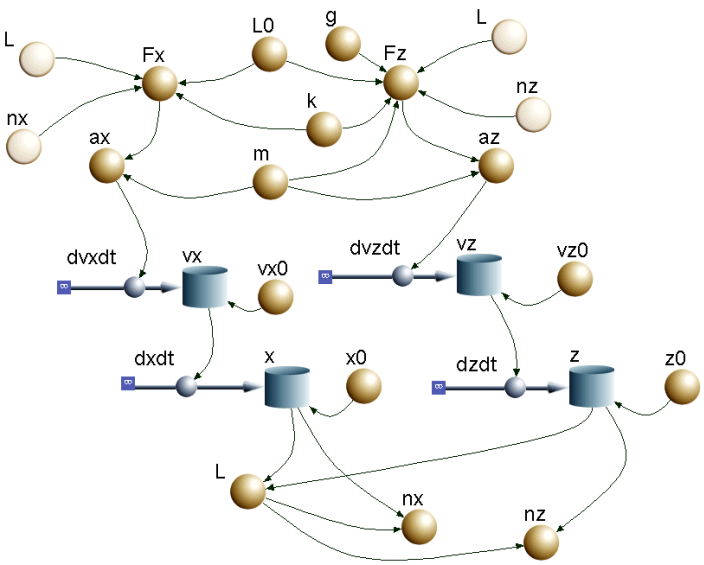


Abbildung 3.15: Flowchart zum Federpendel.

Eindruck vermittelt ein Plot der Zeitentwicklung von x und v_x in Fig. 3.16.

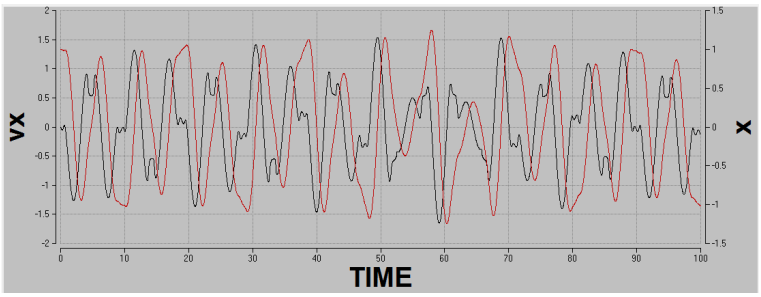


Abbildung 3.16: Zeitentwicklung der x-Koordinate und der zugehörigen Geschwindigkeit v_x.

Impuls und Impulserhaltung
Impuls und Kraft
Energie
Mechanische Arbeit
Andere Energieformen
Energieerhaltung
Fallstudie: Kollisionen

4 — Impuls und Energie

In diesem Kapitel lernen Sie zwei Erhaltungsgrössen, Energie und Impuls, kennen. Der Begriff "Erhaltungsgrösse" bedeutet: Während der gesamten Dauer eines Prozesses bleibt der Wert der Erhaltungsgrösse gemessen im Gesamtsystem konstant.

Erhaltungsgrössen sind für Sie praktisch: Sie können einige wesentliche Aussagen über die Dynamik eines Systems gewinnen, ohne die Trajektorien im Detail berechnen zu müssen. Wenn Sie sich nur für den Endzustand eines Prozesses, nicht aber für die Frage wie dieser erreicht wird, interessieren, können Erhaltungsgrössen helfen, Ihre Frage zu beantworten, ohne dass Sie eine numerische Simulation oder eine komplizierte Rechnung durchführen müssen.

Aus einer theoretischen Perspektive sind Erhaltungsgrössen interessant, weil Erhaltungsgrössen immer die Konsequenz einer sog. Symmetrie sind. Dieser Aspekt werden wir in dieser Vorlesung nicht behandeln.

4.1 Impuls und Impulserhaltung

Gegeben sei eine Pumktmasse m mit Geschwindigkeit $\vec{v}$. Dieser Punktmasse ordnen wir den Impuls $\vec{p}$ zu. Es gilt als Definition:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4.1}$$

Das sieht nun nicht gerade spektakulär aus. Weiter gilt aber: Für einem System von Massenpunkten m_i kann der Gesamtimpuls $\vec{p}_{tot}$ definiert werden. Es gilt:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i. \tag{4.2}$$

Es gilt nun das Gesetz der Impulserhaltung:

Law 4.1 In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

$$\vec{p}_{tot} = \text{const.}. \tag{4.3}$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0. \tag{4.4}$$

Bemerkungen:

- Der Impuls, bzw. Gesamtimpuls kann nicht nur für Massenpunkte sondern für viele anderen Typen von Strukturen (z.B. Felder) definiert werden. Auch dann gilt Impulserhaltung.
- Die angegebenen Formeln stimmen für Geschwindigkeiten, die im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit c klein sind. Für grosse Geschwindikgeiten muss (und kann) der Impuls relativistisch definiert werden.
- Impulserhaltung ist eine Konsequenz aus der sog. "Translationssymmetrie" des Raums. Diese Symmetrie bedeutet, dass die physikalischen Gesetze vom Ort unabhängig sind (Newton gilt im ganzen Universum, nicht nur hier).

4.1.1 Impuls und Kraft

Wir nehmen an, wir hätten ein Objekt konstanter Masse[1]. Zwischen dem Begriff des Impulses und demjenigen der Kraft gibt es einen fundamentalen Zusammenhang:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{md\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \tag{4.5}$$

Diese Beziehung erlaubt Ihnen z.B., die Kraft welche sich aus der Umlenkung von Massesträmen ergibt, zu berechnen oder zu verstehen, wie Raketen funktionieren.

■ Example 4.1 **Windkraft:** *Der Wind bläst mit der Geschwindigkeit v (um genau zu sein: mit der Schnelligkeit v) auf eine um 45 Grad geneigte Platte der Angriffsfläche A (s. Fig. 4.1. Welche Kraft $\vec{F}$ wirkt auf die Platte?*

Luftmoleküle werden von der Platte umgelenkt, wobei wir perfekt elastische Reflektion annehmen. Die abprallenden Luftmoleküle werden nach unten gestreut. Während eines Zeitintervalls Δt werden Teilchen mit der Gesamtmasse δm gestreut. Dies führt zu einer Impulsänderung $\Delta\vec{p}$. Diese wiederum bedeutet, dass auf die Teilchen eine Kraft wirken muss. Eine entsprechende Gegenkraft wirkt auf die Platte.

$$\vec{F}_{\text{roof - particles}} = -\vec{F}_{\text{particles - roof}} \tag{4.6}$$

[1] Das tönt trivial, aber wenn Sie z.B. eine Rakete betrachten, ist das nicht mehr so.

In einem Zeitintervall Δt prallen Luftmoleküle mit einer Masse $\Delta m = A\rho v \Delta t$ auf die Platte. Für die Impulsänderung gilt:

$$\vec{p}_{in} = \begin{pmatrix} -\Delta m v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta m v \end{pmatrix}, \Delta\vec{p} = \begin{pmatrix} A\rho v^2 \Delta t \\ 0 \\ -A\rho v^2 \Delta t \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

Das heisst dann:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{particle - roof}} = \begin{pmatrix} A\rho v^2 \\ 0 \\ -A\rho v^2 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

Der Betrag der Kraft ist dann

$$|\vec{F}_{\text{particle - roof}}| = \sqrt{2} A\rho v^2. \tag{4.9}$$

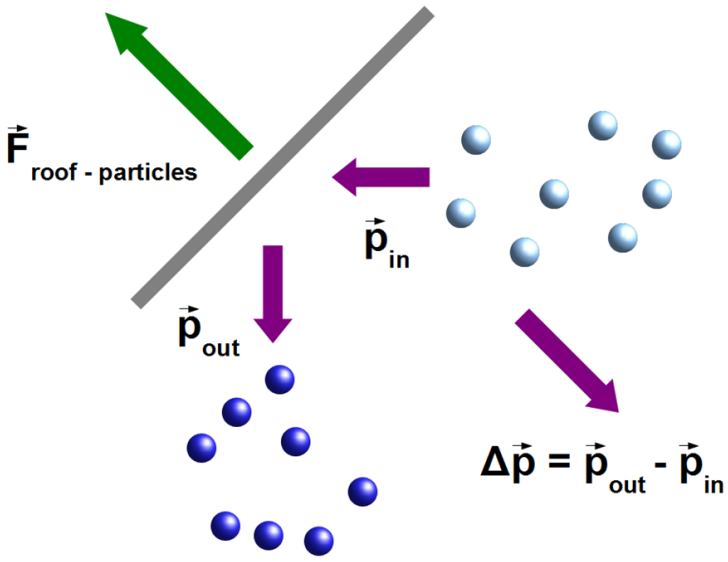


Abbildung 4.1: Gegeben sei eine um 45 Grad geneigte Platte, welche von einem horizontalen Wind angeblasen wird. Wir nehmen an, dass Luftteilchen von der Platte abprallen und dabei dem klassischen Reflexionsgesetz (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel) folgen.

4.2 Energie

Neben dem Impuls ist die Energie eine weitere, wichtige erhaltene Grösse. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Begriff der Energie zu definieren. Wir verwenden eine, in Anführungszeichen, naive Definition.

Wir starten von der Annahme, dass wir wissen, was mechanische Arbeit ist und gehen davon aus, dass mechanische Arbeit eine Form von Energie ist. Wir machen im Folgenden drei grundlegende Annahmen:

- Wir wissen, was mechanische Arbeit ist.
- Energieformen können beliebig ineinander umgewandelt werden (stimmt nicht immer, und muss speziell bei thermischen Energieformen, wo Entropie eine Rolle zu spielen beginnt, mit Vorsicht genossen werden).
- Systeme sind durch Parameter definiert, z.B. Ladung auf einer Platte, Höhe über Boden, Druck in einem Zylinder, ...

Um eine mit einem Systemparameter verbundene Form von Energie zu verstehen, müssen Sie sich fragen, wie viel mechanische Arbeit Sie aufwenden müssen, um diesen Parameter zu verändern. Anders gesagt: Sie fragen sich, wieviel mechanische Energie Sie aufbringen müssen, um ein System in einen bestimmten, durch die Systemparameter vorgegebenen Zustand zu bringen.

4.2.1 Mechanische Arbeit

Häufig liest man: "Energie ist Kraft mal Weg". Das ist nicht falsch, aber für unsere Zwecke zu ungenau. Wir definieren die mechanische Arbeit als ein Wegintegral:

$$E_{mech} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}. \tag{4.10}$$

Die nötigen Grössen, Kraft und Weg sind einfach zu bestimmen: Weg über Längenmessgeräte, Kräfte zum Beispiel mit Federn. Mechanische Energie haben wir damit verstanden.

Additional information 4.1 Wie können Wegintegrale berechnet werden? Zuerst muss der Weg, also die Kurve $\vec{r}(t)$ als Array von drei Funktionen $(r_x(t), r_y(t), r_z(t))$ vorliegen. Wenn dies möglich ist, benützen wir eine der Sub-

stitutionsregeln der Integration und schreiben:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \tag{4.11}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_x(\vec{r}(t))v_x(t) + F_y(\vec{r}(t))v_y(t) \tag{4.12}$$

$$+F_z(\vec{r}(t))v_z(t)dt. \tag{4.13}$$

4.2.2 Andere Energieformen

Es gibt sehr viele Energieformen, speziell wenn wir phänomenologisch reden. Hier sprechen wir nur über drei Typen: Kinetische Energie, Lageenergie und Federenergie.

Law 4.2 **Lagenergie:** Verändert man die Höhe eines Objekts mit Masse m um h erfordert dies die Lageenergie E_{pos}:

$$E_{pos} = mgh. \tag{4.14}$$

Dabei ist $g = 9.81 m/s^2$.

Law 4.3 **Kinetische Energie:** Ein Objekt mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$, resp. Schnelligkeit v hat die kinetische Energie E_{kin}:

$$E_{kin} = m\frac{|\vec{v}|^2}{2} = m\frac{v^2}{2}. \tag{4.15}$$

.

Law 4.4 **Federenergie:** Eine Feder mit Ruhelänge L_0 wird auf eine Länge L ausgedehnt/komprimiert. Um diese Deformation zu erreichen, muss die Energie E_{spring} aufgewendet werden:

$$E_{spring} = k\frac{(L-L_0)^2}{2}. \tag{4.16}$$

Dabei bezeichnet k die Federkonstante (Einhiet N/m).

4.2.3 Energieerhaltung

Law 4.5 **Energieerhaltungssatz:** In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie erhalten. Das heisst:

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i E_i\right) = 0. \tag{4.17}$$

Die Summe erfolgt dabei über alle Teilenergien, bzw. die Energien aller Teilkomponenten.

Wir betrachten als Illustration eine Masse m an einer Feder mit der Federkonstante k. Die Feder bewege sich in x - Richtung (also horizontal, die Lageenergie spielt also keine Rolle). Die Position der Masse wird durch die Koordinate $x(t)$ angegeben. Die Gesamtenergie des Systems setzt sich dann zusammen aus der Federenergie und der kinetischen Energie der Masse. Es gilt

$$E_{tot} = k\frac{(x(t)-L_0)^2}{2} + m\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2}. \tag{4.18}$$

Die zeitliche Ableitung ergibt dann

$$\frac{E_{tot}}{dt} = 0 = k(x(t)-L_0)\frac{dx}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \tag{4.19}$$

(Beachten Sie die Kettenregel!). Es ergibt sich

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x(t)-L_0). \tag{4.20}$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem Kraftgesetz der Feder aus dem letzten Kapitel.

4.3 Fallstudie: Kollisionen

Wir betrachten die Kollision zweier harter Körper mit Masse m_1, bzw. m_2. Dies bedeutet: Die Kollision verläuft so, dass sowohl Energie als auch Impuls erhalten bleiben. Man nennt dies auch eine elastische Kollision. Natürlich sind reale Kollisionen selten perfekt elastisch. Die Näherung ist aber in vielen Fällen recht gut.

Nehmen wir an, die beiden Massen bewegen sich in x - Richtung. Die Geschwindigkeiten vor der Kollision seien u_1, resp. u_2. Nach der Kollision haben die Massen die Geschwindigkeiten v_1, resp. v_2. Beachten Sie: Wir arbeiten zwar nur in einer Dimension, die Geschwindigkeiten können aber sowohl positiv als auch

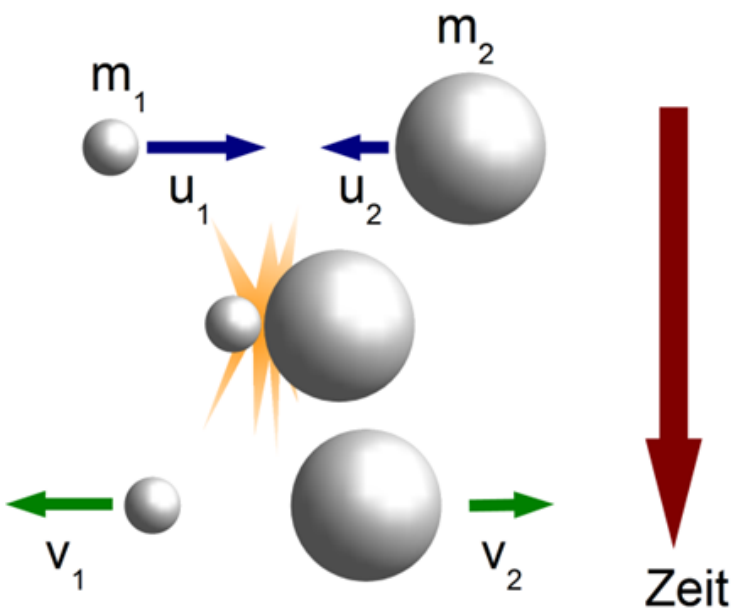


Abbildung 4.2: Kollision zweier Massen.

negativ sein, siehe Fig. 4.2. Aufgrund de Energie- und der Impulserhaltung muss gelten:

$$m_1\frac{u_1^2}{2}+m_2\frac{u_2^2}{2} = m_1\frac{v_1^2}{2}+m_2\frac{v_2^2}{2}, \tag{4.21}$$

$$m_1u_1+m_2u_2 = m_1v_1+m_2v_2. \tag{4.22}$$

Wenn u_1 und u_2 bekannt sind, kann man (mit einiger Mühe) nach v_1 und v_2 auflösen. Man erhält für die Geschwindigkeiten nach der Kollision:

$$v_1 = \frac{(m_1-m_2)u_1+2m_2u_2}{m_1+m_2} \tag{4.23}$$

$$v_2 = \frac{(m_2-m_1)u_2+2m_1u_1}{m_1+m_2} \tag{4.24}$$

Eine Bemerkung zu Energie und Impuls: Beide Grössen sind erhalten. Allerdings: Energien können ineinander verwandelt werden. Auch wenn die Gesamtenergie bei einer Kollision erhalten bleibt, so kann ein Teil der kinetischen Energie in z.B. Wärme oder Deformationsenergie verwandelt werden. Das heisst: Bei einer nicht - elastischen Kollision bleibt der Impuls, nicht aber die kinetische Energie erhalten.

Potentielle Energie
Potentielle Energie allgemein
Potentielle Energie im Gravitationsfeld
Beispiel Satellitenabschuss
Potentiale
Gravitationspotential
Potentiale im Allgemeinen
Leistung
Leistung und Ströme

5 — Potentiale

Im vorhergenden Abschnitt lernten wir das allgemeine Konzept der Energieerhaltung kennen. Nun ist die Erhaltung der Energie ein fundamentales Prinzip der Physik, welches es erlaubt, grundlegende Aussagen darüber zu machen, wie physikalische Theorien auszusehen haben. In der Praxis sind Erhaltungssätze besonders nützlich, wenn man sich nur für den Anfangs- und den Endzustand eines Prozesses, nicht aber unbedingt für die Art und Weise wie man von einem Zustand zum anderen kommt, interessiert.

■ **Example 5.1** Das typische Beispiel hier ist: Sie lassen ein Objekt aus einer bestimmten Höhe h fallen und wollen wissen, mit welches Geschwindigkeit v_{Aufprall} es aufschlägt. Natürlich könnten Sie zu Beantwortung dieser Frage die Bewegungsgleichung lösen; dabei würden Sie aber vielmehr Information erzeugen, als Sie zur Beantwortung der Frage nach der Aufprallgeschwindikgeit brauchen (z.B. wüssten Sie, wie lange der Fall dauert, wo genau das Objekt zu welchem Zeitpunkt ist, usw.). Im Beispiel des fallenden Objekts gehen Sie folgendermassen vor:

- Sie wissen, dass die kinetische Energie eines Objekts gleich $E_{kin} = m\frac{v^2}{2}$ ist.
- Sie wissen, dass die Lageenergie eines Objekts im Schwerefeld der Erde und für $h < 50km^a$ durch $E_{pot} = mgh$ angenähert wird.
- Sie wählen Ihre Koordinaten so, dass der Boden auf der Höhe $h_{Aufprall} = 0$ liegt. Ihre Starthöhe sei h_{start}. Die Anfangsgeschwindigkeit Ihres Objekts sei gleich v_{start}.
- Der Energieerhaltungssatz sagt, dass

$$E_{kin,start} + E_{pot,start} = E_{kin,Aufprall} + E_{pot,Aufprall} \tag{5.1}$$

Das heisst:

$$m\frac{v_{start}^2}{2} + mgh_{start} = m\frac{v_{Aufprall}^2}{2} + mgh_{Aufprall} \tag{5.2}$$

Diesen Ausdruck lösen Sie nach v_{Aufprall} auf. Sie erhalten:

$$v_{Aufprall} = \sqrt{2\left(\frac{v_{start}^2}{2} + g(h_{start} - h_{Aufprall})\right)}. \tag{5.3}$$

[a] Ob man 50 oder 10 km als Grenze für eine gute Näherung nimmt ist an sich egal. Hier wollen wir mit dieser Wahl zum Ausdruck bringen, dass die *mgh* - Formel für Höhenunterschiede auf der Erde anwendbar ist, aber nicht mehr gebraucht werden sollte, wenn Sie Satelliten o.ä. analysieren. Sie werden im Folgenden sehen, warum *mgh* eine gute Näherung darstellt, und dabei sehen, dass die Näherung erst für h deutlich grösser als 10 km schlecht wird.

Die im Beispiel dargestellte Methode funktioniert gut und erspart Ihnen das Lösen einer Differentialgleichung. Allerdings funktioniert sie nur deswegen, weil Sie genau wissen, welche Energien eine Rolle spielen, und wie diese Energien als Funktion kinematischer Grössen darstellbar sind. Sobald Sie Systeme betrachten, in denen Wärme, Deformationen oder chemische Energien eine Rolle spielen, wird die Anwendung des Energieerhaltungssatzes wesentlich schwieriger und häufig nicht praktisch durchführbar.

Dieses Kapitel konzentriert sich auf eine spezielle Sorte von Systemen, sogenannte **konservative** Systeme . Es gibt eine mathematisch strikte und sehr allgemeine Definition dieses Begriffs, die wir hier nicht verwenden. Wir benützen eine eingeschränkte Definition.

Definition 5.1 **Konservative Systeme (eingeschränkte PhIT - Variante)**: Wir nennen ein System konservativ, wenn

1. das System aus N Teilchen zusammengesetzt sind,
2. die Energie E_i jedes Teilchens vollständig beschrieben ist durch die Summe von zwei Energieformen, nämlich der kinetischen Energie $E_{kin,i}$ und der potentiellen Energie $E_{pot,i}$ jeweiligen Teilchen,
3. die Energie der Umwelt sich nicht ändert.

Dabei gilt für die kinetische Energie des Teilchens i:

$$E_{kin,i} = m_i\frac{|\vec{v}_i|^2}{2}. \tag{5.4}$$

Die potentielle Energie des Teilchens i ist eine von der Zeit unabhängige Funktion E_{pot} des Ortes und von Teilcheneigenschaften wie der Masse m_i oder der Ladung q_i:

$$E_{pot,i} = E_{pot}(\vec{r}_i, m_1, q_i). \tag{5.5}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}_i$ die Position und $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeit des Teilchens i. Systeme, die nicht konservativ sind, nennt man **dissipativ** . Allerdings sollte man dann nicht unsere eingeschränkte, sondern die allgemeine Definition des Begriffs "konservativ"verwenden.

Für die Gesamtenergie eines solchen konservativen Systems gilt dann:

$$E_{tot} = \sum_i^N E_{kin,i} + E_{pot,i} = \text{const.} \tag{5.6}$$

Einige Bemerkungen zu dieser Definition:

- Wir berücksichtigen keine Rotationsenergien oder ähnliches. In einer allgemeineren Definition von konservativen Systemen müssten und könnten wir diese berücksichtigen.
- Wir beschränken uns auf Teilchen und berücksichtigen keine Energien von Feldern.

Konservative Systeme sind, sobald wir die potentielle Energie kennen, relativ einfach zu behandeln. Die meisten von uns betrachteten Systeme sind allerdings strikte genommen, keine konservativen Systeme. Allerding lassen sich viele Systeme sehr gut durch konservative Systeme annähern:

- Ein typischer Anwendungsfall wird die potentielle Energie einer Masse m im Gravitationsfeld der Erde sein. Nun forderten wir, dass sich die Energie der Umwelt nicht ändern darf. Wenn man eine Kugel im Gravitationsfeld der Erde fallen lässt, wird ganz genau genommen natürlich nicht nur die Kugel von der Erde, sondern auch die Erde von der Kugel angezogen und damit beschleunigt. Das heisst: Die Erde gewinnt kinetische Energie. Die Wirkung der Kugel auf die Erde ist aber, solange die Kugel klein ist[1], verschwindend gering. Auch wenn es genau genommen nur eine Näherung ist, werden wir Objekte im Gravitationsfeld der Erde als konservative Systeme betrachten.
- Natürlich gibt es (fast) keine reibungsfreien makroskopischen Systeme. Allerdings macht es vielfach Sinn, den Grenzfall des reibungsfreien Systems zu betrachten. Meist ist das gar keine schlechte Näherung.

[1] Im Vergleich zur Erde ist das Matterhorn sehr klein.

- Sobald wir mit Ladungen operieren müssen wir vorsichtig sein. Beschleunigt man eine Ladung, beginnt diese Energie abzustrahlen. An sich sind unsere Überlegungen in diesem Kapitel sofern sie sich auf Ladungen beziehen, nur richtig, wenn Bewegungen langsam ausgeführt werden.

5.1 Potentielle Energie

Wenn Sie ein Objekt von A nach B bringen wollen, müssen Sie im Allgemeinen eine (ortsabhängige) Kraft $\vec{F}_{\text{mov}}$ aufbringen. Dabei steht movfür movement". Diese Kraft ist erforderlich, um andere Kräfte, z.B. die Gravitationskraft zu kompensieren. Wenn Sie nicht mindestens so stark auf eine Hantel drücken, wie die Erde an der Hantel zieht, wird sich die Hantel niemals aufwärtsbewegen!

Das Aufbringen einer Kraft bedeutet, dass Sie eine Arbeit W leisten:

$$W = \int_A^B \vec{F}_{\text{mov}} \cdot d\vec{r}. \tag{5.7}$$

In einem konservativen System können Sie keine Energie an die Umgebung abgeben. Das heisst dann aber[2]: Alle Energie, die Sie aufbringen, geht ins System. Wenn die Energie des Systems nur durch die Lage bestimmt ist, heisst dies dann: Es ist egal (zumindest vom Standpunkt der Energie her), auf welchem Weg Sie die Masse von A nach B gebracht haben.

Dies hat Vorteile. Anstelle des komplizierten Wegintegrals in Gl. 5.7 müssen Sie nur die Differenz der potentiellen Energie zwischen Anfangs- und Endpunkt des Pfades, auf dem Sie das Objekt bewegen kennen. Diese Differenz gibt Ihnen die minimal zu leistende Arbeit an, welche sie aufbringen müssen[3]

5.1.1 Potentielle Energie allgemein

Auch wenn wir immer so tun, als ob die potentielle Energie eine Systemeigenschaft sei gilt doch die Tatsache, dass es eigentlich immer nur um Differenzen von potentiellen Energien geht. In der Tat gibt es "diepotentielle Energie nicht. Physikalisch gibt es nur die Differenz zwischen den potentiellen Energien zweier Punkte. Das tönt kompliziert, ist es aber nicht. Sie alle wissen, dass die Höhe eines Berges eigentlich nicht definiert ist. Was definiert ist, ist die Höhendifferenz zum Meeresspiegel. Wenn man die Höhendifferenz zu irgendeinem anderen Level (z.B. der Höhe des Bahnhofs Brugg) nehmen würde, wäre nichts verändert. Der Mount Everest wäre immer noch der höchste Berg, und es erforderte immer noch genau gleich viel Arbeit, eine Flasche Wasser auf das Matterhorn zu bringen.

[2] Nehmen Sie an, Ihr System bestünde nur aus einer Masse

[3] Minimal", weil wir stillschweigend voraussetzen, die Masse würde mit einer Geschwindigkeit von null starten und sei am Ende der Bewegung wieder in Ruhe. Das heisst: Die Masse gewinnt durch die Bewegung keine kinetische Energie.

Definition 5.2 Wir definieren die Differenz der potentiellen Energie eines Objekts zwischen zwei Punkten A und B als die Arbeit, die man aufwenden muss, um das Objekt von A nach B zu bringen. Für eine Illustration, siehe Fig. 5.1.

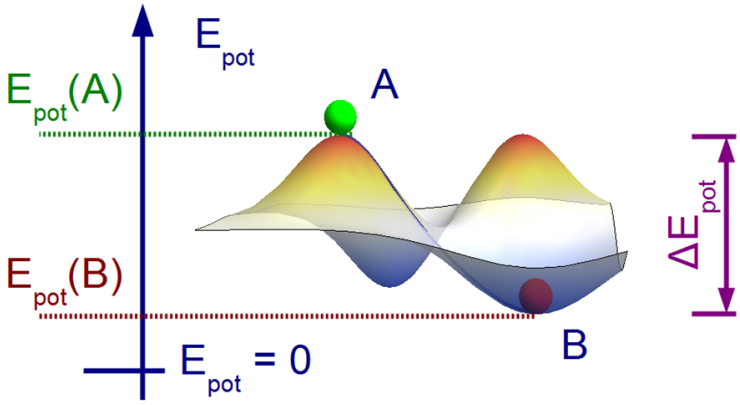


Abbildung 5.1: Potnetielle Energie

5.1.2 Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Wir wollen in diesem Abschnitt die potentielle Energie von Objekten im Gravitationsfeld angeben. Natürlich geht es dabei vor Allem um Himmelskörper. Ohne irgendwelche Beweise[4] geben wir gleich zu Beginn ein Theorem bekannt:

Theorem 5.1 Gegeben seien kugelförmige Massen m_i mit Radien r_i. Solange die Massen nicht kollidieren, sind die gegenseitig ausgeübten Kräfte, die potentiellen Energien und die später zu definierenden Gravitationspotentiale von Kugeln identisch zu den Kräften, Energien und Potentialen von Punktmassen mit Radius $r_i = 0$. Mit anderen Worten: Solange Sie sich ausserhalb einer Kugel befinden, dürfen Sie so tun, als ob die Kugel eine Punktmasse wäre.

Gegeben sei eine ruhende Punktmasse M. Weiter haben wir eine Masse m, die wir aus dem Unendlichen bis auf einen Abstand r_{mM} an M heranbringen. Wir nehmen an, M bewege sich gar nicht (z.B. weil M viel grösser als m ist) und m habe am Schluss ebenfalls eine Geschwindigkeit von null. Wir müssen die Arbeit W aufbringen:

$$W = -\frac{\gamma M m}{r_{mM}}. \tag{5.8}$$

[4] Nicht, dass es keine gäbe, aber in dieser Vorlesung soll es nicht um Rechnungen gehen!

(Für die Berechnung konsultieren Sie die Slides!) Dabei bezeichnet γ die Newton'sche Gravitationskonstante. Diese Arbeit W ist negativ. Das ist auch kein Wunder, schliesslich zieht M die Masse m an (und umgekehrt). Die Tatsache, dass $W < 0$ bedeutet eigentlich nur, dass Sie negative Arbeit aufbringen müssen, also Energie gewinnen können.

Man benützt nun W zur Definition der potentiellen Energie $E_{pot}(r_{mM})$ einer Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M:

$$E_{pot}(r_{mM}) = -\frac{\gamma M m}{r_{mM}}. \tag{5.9}$$

Dabei bezeichnet r_{mM} den Abstand der Masse m vom Zentrum der Masse M.

Sie haben nun wahrscheinlich den Eindruck, diese Sache sei etwas verdächtig, da

- wir grössten Wert auf die Feststellung legen, dass Geschwindigkeiten keine Rolle spielen (bzw. gleich null sind) obwohl wir ja Dinge bewegen müssen.
- wir Arbeit (die jemand leisten muss) zu potentieller Energie (welche eine Systemeigenschaft ist) machen,
- wir Massen aus dem Unendlichen holen,

Dieses Misstrauen ist verständlich, aber hier nicht nötig. Folgende Argumente sollten Sie beachten:

- Natürlich müssen Massen, um von A nach B bewegt zu werden, irgendeine Geschwindigkeit haben. Wir können aber, um eine rein energetische Überlegung anzustellen, diese Geschwindigkeit sehr klein wählen. Der Prozess dauert dann lange, aber das muss uns nicht kümmern. Wir können uns einfach fragen: Wie gross ist die Arbeit im Grenzfall einer beliebig langsamen Prozessführung, bei welcher der Anteil der kinetischen Energie immer kleiner wird (Beachten Sie: Eine Halbierung der Geschwindigkeit führt zu einer Verdoppelung der Zeit, und zu einer Viertelung der kinetischen Energie.)
- Es ist entspricht unserer Definition der Energie eines Systems, uns zu überlegen, welche Arbeit zum Aufbau des Systems verwendet werden muss und diese dann als Ënergiegehalt des Systemsßu bezeichnen.
- Wenn wir uns schon überlegen, wieviel Energie wir zum Zusammenbau eines Systems aufwenden müssen, sollten wir uns fragen, woher wir die Bestandteile haben. Die Bestandteile aus dem Unendlichen zu holen und zu sagen, dort sei die potentielle Energie null, ist zumindest mathematisch absolut legitim.

5.1.3 Beispiel Satellitenabschuss

Nehmen Sie an, Sie schiessen auf der Erde einen Satelliten mit Masse m ab. Ihr Abstand vom Erdmittelpunkt beträgt dabei $r_E = 6365km$. Die Startgeschwindigkeit (ok, Schnelligkeit) sei v_0; Sie schiessen den Satelliten senkrecht nach oben. Sie möchten, dass der Satellit beliebig weit weg fliegt, d.h. nicht wieder auf die Erde zurückfällt. Wie gross muss amn v_0 mindestens wählen?

Mit unseren Energiebetrachtungen ist dieses Problem einfach zu lösen. Damit der Satellit beliebig weit weg fliegt, darf seine Geschwindigkeit nie null werden. Etwas salopp gesagt: In der Unendlichkeit ($r = \infty$) sollte die Geschwindigkeit des Satelliten immer ein ganz klein wenig grösser als null sein, also mindestens null. Der Energiesatz liefert:

$$m\frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_E} = m\frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{\infty}. \tag{5.10}$$

Beide Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung sind gleich null. Das heisst:

$$m\frac{v_0^2}{2} = \frac{\gamma Mm}{r_E}. \tag{5.11}$$

Die Masse des Satelliten kürzt sich weg, und mit der Erdmasse $M = 5.97 \cdot 10^{24}kg$ und $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}Nm^2kg^{-2}$ ergibt sich:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_E}} = 11.2km/s. \tag{5.12}$$

5.2 Potentiale

5.2.1 Gravitationspotential

Wenn wir sagen, die potentielle Energie einer Masse m im Schwerefeld einer Masse M und mit Abstand r_{mM} vom Zentrum von M sei gleich

$$E_{pot}(r_{mM}) = -\frac{\gamma Mm}{r_{mM}}. \tag{5.13}$$

haben wir zwar etwas Interessantes ausgesagt, aber das Problem ist, dass diese potentielle nicht eine Eigenschaft von m oder M alleine ist (schliesslich kommen beide Massen in der Gl. 5.13 vor). Wir beobachten nun, dass m in Gl. 5.13 als Faktor auftritt; die potentielle Energie von $m = 4kg$ ist also viermal grösser als diejenige von $m = 1kg$. Das motiviert uns, eine Ënergie pro Masseëinzuführen. Genau diese ist das Gravitationspotential.

Definition 5.3 **Gravitationspotential**: Wir definieren das Gravitationspotential einer Punktmasse M als:

$$\phi_{grav} = -\frac{\gamma M}{r} \tag{5.14}$$

Eine Masse m hat in diesem Gravitationspotential im Abstand r von M die potentielle Energie:

$$E_{pot}(r) = m\phi_{grav} = -\frac{\gamma m M}{r} \tag{5.15}$$

5.2.2 Potentiale im Allgemeinen

Allgemein verstehen wir unter einem Potential die potentielle Energie pro Eigenschaft", wobei Ëigenschaft"Masse, Ladung, usw. sein kann. Sei nun X ein Mass für so eine Eigenschaft. Eine Frage, die uns in der Physik häufig beschäftigt ist: Wie ändert sich die potentielle Energie eines Objekts (eines Ënergieträgers"), X Einheiten irgendeiner Eigenschaft hat, wenn wir dieses Objekt von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ transportieren? Wenn wir ein geeignetes Potential $\phi_X(\vec{r})$ zur Verfügung haben, ist die Frage einfach zu beantworten:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = X(\phi_X(\vec{r}_B) - \phi_X(\vec{r}_A)) \tag{5.16}$$

Dies sieht nun wirklich nicht nach einer grossen Sache aus (ist es auch nicht), aber es gibt ein äergerliches Detail. Die Gl. 5.16 gibt Ihnen die Energie ΔE_{pot} an, die Sie aufbringen müssen, um das Objekt von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ zu bringen. Vielfach (z.B. in der Elektrizitätslehre) definiert man nun die (verallgemeinerte) Spannung U als die Energie pro X, die Sie gewinnen können, wenn ein Objekt von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ fällt". Es gilt also:

$$U = X(\phi_X(\vec{r}_A) - \phi_X(\vec{r}_B)). \tag{5.17}$$

Das Vorzeichen ist also genau umgekehrt wie in Gl. 5.16. Sie können sich vorstellen, dass dies immer wieder zu Problemen führt, speziell wenn X dann auch noch eine negative Ladung bezeichnet! Doch damit nicht genug der Verwirrung: Der Buchstabe U wird in der Elektrizitätslehre gerne als Spannung (Energie pro Ladung) bezeichnet. In der theoretischen Physik bedeutet U aber meist eine potentielle Energie.

5.3 Leistung

An sich ist die Definition der Leistung keine grosse Sache:

Definition 5.4 **Leistung:** Gegeben sei ein System mit Energiegehalt $E(t)$, dh. die Energie des Systems kann sich mit der Zeit ändern. Die vom System aufgenommene Leistung P ist definiert als Veränderungsrate der Energie $E(t)$:

$$P(t) = \frac{dE}{dt}. \tag{5.18}$$

Pßteht für Poweründ darf nicht mit dem Impuls verwechselt werden (welcher übrigens ein Vektor ist)! Die Einheit der Leistung ist Watt $[Js^{-1}]$.

An sich ist diese Definition unproblematisch, aber es gibt wieder ein Detail zu beachten: Bei konkreten Angeben ist immer zu unterscheiden zwischen der Leistung des Systems und der Leistung am System. Der Unterschied liegt im Vorzeichen. Nehmen Sie an, Sie hätten einen Wasserkocher mit einem kW Leisutng. Was heisst das nun? Der Wasserkocher erhitzt ja das Wasser, das bedeutet, er gibt Energie ab. Seine Leistung wäre dann negativ! Die positive Leistungsangabe bezieht sich aber auf die Energie, die Sie pro Zeit vermittels eines elektrischen Anschlusses in den Wasserkocher transportieren.

5.3.1 Leistung und Ströme

Energie wird normalerweise durch irgendwelche Ströme transportiert. Diese Ströme fliessen, weil sie ein Potentialgefälle "hinunterfallen". Die Ströme bestehen meist aus Energieträgern und werden angegeben als Ënergieträger pro Zeit". Beispiele sind etwa:

- Elektrischer Strom: Elektronen (Ladungsträger), welche eine elektrisches Potentialgefälle hinunterfallen.
- Volumenströme: Wasservolumen strömt in einer Leitung von einem Stausee zu einer Turbine.
- Massenströme I: Wasservolumen entspricht Wassermasse.
- Massenströme II: Benzin transportiert chemische Energie vom Tank in den Motor. Bei der Verbrennung fällt"das Benzin in einem chemischen Potential.

Es gilt nun folgender Zusammenhang:

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Energieträger}} \cdot \frac{\text{Energieträger}}{\text{Zeit}} = \text{Potentialdifferenz} \cdot \text{Strom} \tag{5.19}$$

Dies bedeutet in einem elektrischen System:

$$P = UI. \tag{5.20}$$

Dabei ist P die elektrische Leistung, I die Stromstärke und U die Spannung (Potentialdifferenz).

In Gravitationsfeld haben wir für fallendes Wasser:

$$P = ghI_m = \rho ghI_V \tag{5.21}$$

Dabei ist P die Leistung, I_m der Massenstrom (Anzahl Kilo Wasser pro Sekunde), I_V der Volumenstrom (Anzahl Kubikmeter Wasser pro Sekunde), ρ die Dichte des Wassers, und h die Höhendifferenz.

In einem hydraulischen System haben wir:

$$P = (p_{high} - p_{low})I_V. \tag{5.22}$$

Dabei ist P die hydraulische Leistung, I_V der Volumenstrom (Anzahl Kubikmeter Wasser pro Sekunde) und $p_{high} - p_{low}$ die Druckdifferenz.

Kinematik starrer Körpers
Der Schwerpunkt
Definition
Schwerpunktsatz
Schwerpunktskoordinaten
Weitere Eigenschaften starrer Körper
Die Lageenergie starrer Körper

6 — Ausgedehnte Körper

6.1 Kinematik starrer Körpers

Bis anhin behandelten wir physikalische Objekte als Massenpunkte[1]. Dies bedeutet: die Angabe der Position und der Geschwindigkeit des Objektes reichten völlig aus, um seinen physikalischen Zustand zu charakterisieren.

Die nächst kompliziertere Sorte von Objekten sind sogenannte starre Körper. Starre Körper haben eine fixierte Form; zu ihrer Beschreibung sind weitere Parameter erforderlich. Ein starrer Körper hat nicht nur einen Ort, sondern eben auch eine **Lage im Raum**. Dabei verstehen wir unter Lage im Raum die **Orientierung** des Objektes. Die Situation ist verdeutlicht in Fig. 6.1, In welcher die Orientierung eines Flugzeugs beschrieben wird. Zusätzlich zu den drei Ortskoordinaten brauchen wir drei weitere Koordinaten, üblicherweise Winkel, um auch die Lage des Objektes im Raum zu erfassen.Wir betonen, dass es verschiedene Möglichkeiten für die Definition dieser drei Lageparameter gibt. Yaw, Pitch und Roll sind in der Luftfahrt gebräuchlich, in der Physik arbeitet man aber oft auch mit den sogenannten **Eulerwinkeln** und viele andere Definitionen sind denkbar. Wir gehen im Rahmen dieser Vorlesung nicht auf weitere Details ein, betonen aber, dass wir zur Beschreibung der Lage eines Objektes im dreidimensionalen Raum immer drei Winkel, im zweidimensionalen Raum einen Winkel (und nicht etwa zwei!) und in einer Dimension lediglich eine Richtung[2], vorwärts oder rückwärts, brauchen. Beachten Sie, dass neben den Winkeln auch die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten eine Rolle spielen. Um die Trajektorie eines Punktes bestimmen zu können, brauchen Sie einen Startort und eine Startgeschwindigkeit; analoges

[1] Manchmal hatten wir es tatsächlich mit Massenpunkten zu tun, manchmal hatten wir an sich ausgedehnte Objekte vor uns, die sich aber wie Massenpunkte behandeln liessen. Ein Beispiel ist die Kiste, auf welche Reibungskräfte wirken. Ein anderes Beispiel war die Kugel, auf welche ein aerodynamischer Widerstand (Luftreibung) einwirkte. Zur Berechnung des aerodynamischen Widerstandes braucht man ausdrücklich eine Querschnittsfläche, und Querschnittsflächen haben nur ausgedehnte Objekte. Da wir aber Rotationsbewegungen vernachlässigt haben, konnten wir auch eine ausgedehnte Kugel als Massenpunkt behandeln

[2] Diese kann durch eine binäre Variable, üblicherweise 1 und - 1, beschrieben werden.

wird gelten für die Winkel, die die Orientierung eines Objekts bestimmen. Auch hier spielt in einer Bewegungsgleichung sowohl der Anfangswinkel als auch die Anfangswinkelgeschwindigkeit eine Rolle.

!!! Wir werden in dieser Vorlesung kein grosses Gewicht auf die allgemeine Kinematik der Rotation legen. Wir werden in dem Kapitel über Kreisel ein allgemeines Verfahren präsentieren, welches dank heutiger Computer einfach zu implementieren ist und keiner komplizierten Definitionen bedarf. Im allgemeinen aber, z.B. wenn Sie Computergrafik betreiben, ist die Darstellung rotierender Objekte eine Herausforderung.

Wir werden im folgenden den Begriff "**starrer Körper**" präzise definieren. Bevor wir dies tun, weisen wir darauf hin, dass es noch kompliziertere Objekte gibt. Eine weitere Stufe ist erreicht, wenn die zu untersuchenden Objekte deformierbar sind. Die einfachste Form deformierbarer Objekte sind die sogenannten **elastischen Körper**. Diesen Objekte, welche ohne Krafteinwirkung einen bestimmte Grundform einnehmen und unter äusseren Kräften ihre Form verändern. Nach Wegfall dieser äusseren Kräfte wird die Grundform wieder angenommen. Unter denen ganz besonders einfach sind die linear - elastischen Körper, welche sie in der Festigkeitslehre kennenlernen werden.Eine weitere wichtige Kategorie deformierbarer Körper sind Flüssigkeiten. Die Form einer Flüssigkeit kann praktisch beliebig verändert werden, allerdings kann ihr Volumen als praktisch konstant betrachtet werden. Diverse weitere Stufen der Komplikation sind denkbar, allerdings wird die zur Beschreibung nötige Mathematik immer anspruchsvoller und ist teilweise noch nicht einmal bekannt.

Bevor wir eine mathematische Definition des Begriffes starrer Körper geben, machen wir auf eine mathematische Vereinfachung aufmerksam, welche wir im folgenden immer verwenden werden. Wir betrachten ausgedehnte Objekte als Zusammensetzung einzelner Massenpunkte. Dies ermöglicht uns, über die einzelnen Massenpunkte zu summieren (Sie werden in Beispielen sehen, was wir damit meinen.). Eine Alternative wäre es, Körper durch ortsabhängige Dichten zu beschreiben, und anstelle der Summen Integrale zu verwenden. Dabei treten aber mathematische Schwierigkeiten auf die wir gerne vermeiden möchten. Machen Sie sich klar, dass Summation über Massenpunkte und Integrale über Massendichten im wesentlichen dasselbe sind:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \cong \int_\Omega \rho(\vec{r}) dV. \tag{6.1}$$

Dabei bedeutet: m_i Masse des Massenpunktes i, $\vec{r}_i$: Position des Massenpunktes i, Ω Raumbereich, welche das zu untersuchende Objekt einnimmt, $\rho(\vec{r})$ Massen-

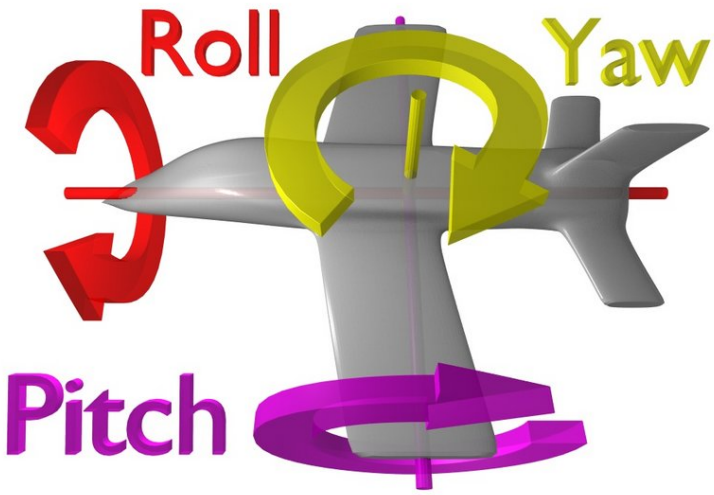


Abbildung 6.1: Die drei Winkel zur Beschreibung der Lage eines Flugzeuges im Raum.

dichte am Punkt $\vec{r}$ innerhalb von Ω. Das Integral auf der rechten Seite ist ein Volumenintegral.

Definition 6.1 Ein allgemeiner **ausgedehnter Körper** ist gegeben durch eine Menge von Massenpunkten $\{P_i\}$, welche durch ihre Ortsvektoren $\{\vec{r}_i\}$ zusammen mit den zugehörigen Massen $\{m_i\}$ bestimmt sind.

Beachten Sie: Die vorangehende Definition ist eine Möglichkeit, ausgedehnte Körper in einer mathematisch einfach zu handhabenden Form zu beschreiben. Für kontinuierliche Körper handelt es sich aber um eine Näherung. Für unsere Zwecke ist diese Näherung völlig ausreichend.

Definition 6.2 Ein **starrer Körper** ist ein spezieller ausgedehnter Körper; die Eigenschaft der Starrheit findet ihren Niederschlag in der Forderung, dass die Distanz zwischen zwei beliebigen Punkten P_i und P_j des starren Körpers konstant ist. Mit anderen Worten: Für zwei Massenpunkte P_i und P_j des ausgedehnten Körpers gilt zu allen Zeiten

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}| = c_{ij}, \tag{6.2}$$

wobei c_{ij} eine nur von den Massenpunkten P_i, P_j abhängige Konstante ist.

Context 6.1 Die Kinematik, d. h. die zur Beschreibung eines Objekts notwendigen mathematischen Strukturen, können sehr anspruchsvoll werden, selbst für scheinbar einfache Objekte. So ist es zum Beispiel nach wie vor eine grosse Herausforderung, das dynamische Verhalten von nicht kugelförmigen Kies vorauszusagen. Auch stellen zähe Flüssigkeiten, zum Beispiel Blut oder Dispersionsfarbe, grosse Herausforderungen an die physikalische Beschreibung. Noch anspruchsvoller sind Materialien wie Schäume, amorphe Materialien oder Materialien mit komplexer Mikrostruktur. Zu letzteren zählen zum Beispiel biologische Materialien wie Körpergewebe oder Holz.

6.2 Der Schwerpunkt

6.2.1 Definition

Nehmen Sie an, Sie haben einen ausgedehnten Körper, definiert durch eine Menge von Massenpunkten mit Ortsvektoren $\{\vec{r}_i\}$ und Massen $\{m_i\}$. Wir werden nun einen Punkt, den sogenannten Schwerpunkt definieren. Wie sich zeigen wird, können verschieden Eigenschaften des starren Körpers elegant ausgedrückt werden, wenn die Ortsvektoren, welche den ausgedehnten Körper beschreiben, bezüglich dieses Schwerpunkts angegeben werden.

Definition 6.3 Der **Schwerpunkt** $\vec{r}_S$ (engl.: center of mass, center of gravity) eines ausgedehnten Körpers ist gegeben durch:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{6.3}$$

Üblicherweise bezeichnet man die Gesamtmasse eines ausgedehnten Körpers mit $M = \sum_i m_i$.

Aus dieser Defintion ergeben sich sofort Beziehungen für die **Schwerpunktsgeschwindigkeit** $\vec{v}_S$ und die **Schwerpunktsbeschleunigung** $\vec{a}_S$. Einfaches Ableiten liefert die folgenden Beziehungen:

$$\vec{v}_S = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i \tag{6.4}$$

und

$$\vec{a}_S = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i. \tag{6.5}$$

6.2.2 Schwerpunktsatz

Aus der Definition des Schwerpunkts ergibt sich sofort eine interessante Konsequenz, der sogenannte Schwerpunktsatz. Wir untersuchen die Wirkung innerer und äusserer Kräfte auf die Beschleunigung des Schwerpunkts eines ausgedehnten Körpers. Dabei verstehen wir unter einer **inneren Kraft** $\vec{F}_{ij}^{int}$ die Kraft zwischen zwischen zwei Massenpunkten P_i und P_j des ausgedehnten Körpers. Eine **äussere Kraft** $\vec{F}_{ik}^{ext}$ bezeichnet die k-te Kraft welche durch eine äussere (d.h. nicht durch die Massenpunkte des ausgedehnten Körpers induzierte) Ursache auf den Punkt P_i ausgeübt wird. Für die Beschleunigung des Punktes P_i gilt dann:

$$\vec{a}_i = \frac{1}{m_i}\left(\sum_j \vec{F}_{ij}^{int} + \sum_k \vec{F}_{ik}^{ext}\right). \tag{6.6}$$

Aufgrund des dritten Newton'schen Gesetzes gilt $\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}$ (Die erste Kraft ist diejenige, welche vom Punkt P_j auf den Punkt P_i ausgeübt wird. Die zweite Kraft ist die Kraft, welche vom Punkt P_i auf den Punkt P_j wirkt.) Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{a}_S &= \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} \\ &= \frac{\sum_i \left(\sum_j \vec{F}_{ij}^{int} + \sum_k \vec{F}_{ik}^{ext}\right)}{\sum_i m_i} \\ &= \frac{\sum_i \sum_k \vec{F}_{ik}^{ext}}{\sum_i m_i}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wenn wir nun $\sum_i m_i = M$ setzen, bekommen wir den Schwerpunktsatz.

Law 6.1 Schwerpunktsatz:

$$M\vec{a}_S = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik}^{ext}. \tag{6.8}$$

In Worten: Die Beschleunigung des Schwerpunktes ist gleich der Summe aller angreifenden externen Kräfte geteilt durch die Summe aller Massen der einzelnen Massenpunkte. Wenn wir den Effekt von äusseren Kräften auf eine Ansammlung von Massenpunkten untersuchen wollen und dabei nicht wissen wollen, wie im Einzelnen diese Massenpunkte verteilt sind, können wir einfach so tun, wie wenn es nur eine Masse im Schwerpunkt gäbe und auf diese lassen wir alle Kräfte wirken.

!!! Der Schwerpunktsatz macht nur eine Aussage über die Beschleunigung des Schwerpunktes! Wie sich einzelne Massenpunkte verhalten kann aus dem Schwerpunktsatz nicht geschlossen werden. Für starre Körper liefert der Schwerpunktsatz intuitiv recht einleuchtende Ergebnisse. Der Satz gilt aber auch für z.B. Gaswolken, in welchen die Teilchen keinen wesentlichen Zusammenhalt haben. Auch für solche Objekte stimmt er, aber die Ergebnisse müssen mit Vorsicht interpretiert werden.

6.2.3 Schwerpunktskoordinaten

Um einen ausgedehnten Körper zu beschreiben, müssen wir die Ortsvektoren seiner Massenpunkte angeben. Diese Ortsvektoren geben die Lage der Massenpunkte bezüglich des Nullpunktes des Koordinatensystems an. Eine Alternative hierzu ist, die Lage des Schwerpunktes anzugeben und die Massenpunkte des ausgedehnten

Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt zu definieren (s. Fig. 6.2). Formal bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_S + (\vec{r}_i - \vec{r}_S) \\ &= \vec{r}_S + \vec{r}_{Si}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Definition 6.4 Die Koordinaten $\vec{r}_{Si} = \vec{i} - \vec{S}$ der Massenpunkte P_i eines ausgedehnten Körpers in Bezug auf den Schwerpunkt $\vec{r}_S$ nennt man **Schwerpunktskoordinaten**.

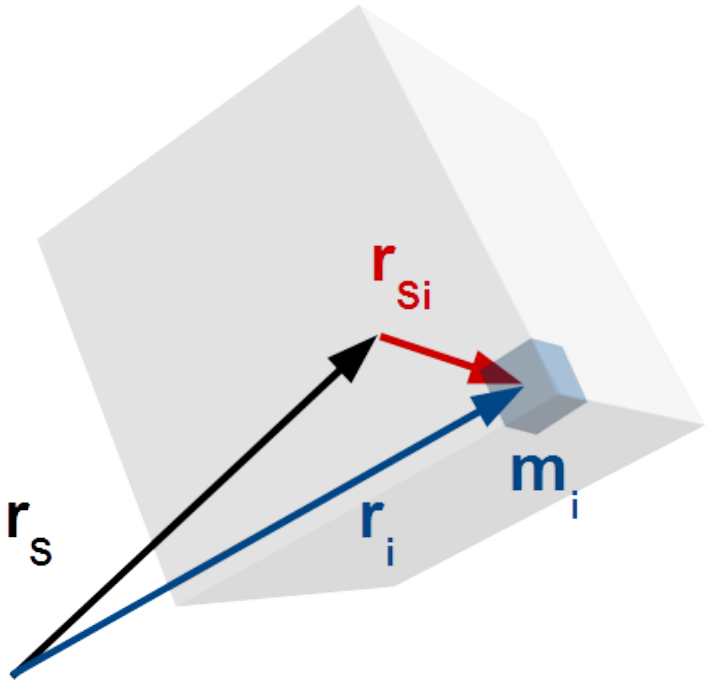


Abbildung 6.2: Ortsvektor eines Massenpunkts P_i bezüglich des Schwerpunkts.

Da der Schwerpunkt der Nullpunkt des Schwerpunktskoordinatensystem ist,

gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \vec{r}_{Si} &= \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_S) \\
&= \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_S) \\
&= \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) - \left(\sum_i m_i \vec{r}_S\right) \\
&= M\vec{r}_S - M\vec{r}_S \\
&= 0 \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Diese Beziehung werden wir noch öfters brauchen. Aus ihr folgt durch Ableiten sofort:

$$\sum_i m_i \vec{v}_{Si} = 0. \qquad (6.11)$$

6.3 Weitere Eigenschaften starrer Körper

6.3.1 Die Lageenergie starrer Körper

Die Beziehung in Gl. 6.10 erlaubt eine nützliche Aussage über die Lageenerie eines starren Körpers. Wir geben hier die vollständige Rechnung wieder; bei späteren Berechnungen verweisen wir auf die Herleitungen, wie Sie sie den Slides entnehmen können. Wenn wir annehmen, dass die z-Kooridnate die Höhe bezeichnet (s. Fig. 6.3, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= \sum_i m_i g r_{i,z} \\
&= \sum_i m_i g (r_{S,z} + r_{Si,z}) \\
&= \sum_i m_i g r_{S,z} \\
&= M g r_{S,z} \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Law 6.2 Die Lageenergie eines ausgedehnten Körpers [a] ist gleich der Lageenergie eines Massenpunktes mit der Gesamtmasse M des ausgedehnten Körpers auf der Höhe des Schwerpunktes des ausgedehnten Körpers.

$$E_{pot} = M g r_{S,z}. \qquad (6.13)$$

[a] Und damit natürlich eines starren Körpers, denn alle starren Körper gehören zur (viel

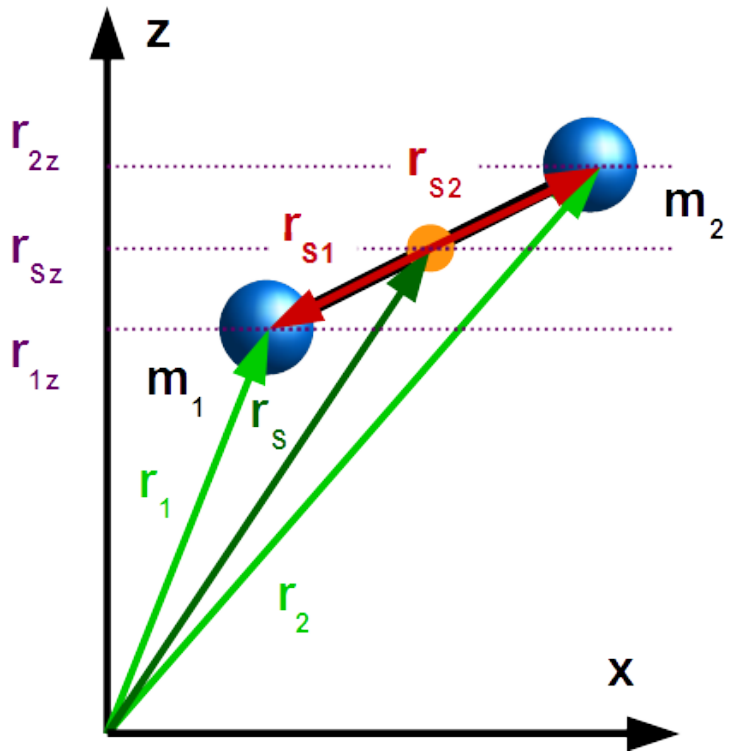


Abbildung 6.3: Berechnung der Lageenergie eines ausgedehnten Körpers.

grösseren) Klasse der ausgedehnten Körper.

Kinematik rotierender starrer Körper
Energie eines rotierenden starren Körpers
Rotationsenergie bei fixierter Drehachse
Der Satz von Steiner
Rollende Körper
Rotationsenergie bei freier Drehachse
Der Drehimpuls
Definition des Drehimpulses
Dynamik des Drehimpulses

7 — Rotierende starre Körper

7.1 Kinematik rotierender starrer Körper

In diesem Kapitel und in allen seinen Abschnitten nehmen wir immer an, wir hätten es mit einem starren Körper zu tun. Ohne dies zu beweisen, nehmen wir das nun folgende Theorem als Grundlage für die weitere Diskussion.

Theorem 7.1 Die Bewegung eines starren Körpers kann verstanden werden als die Bewegung eines einzelnen Punktes P dieses Körpers plus der Rotation um eine Achse durch P.

Wir werden die Konsequenzen dieses Theorem im weiteren erforschen und ausnützen. Es ist allerdings nötig, sich vor einigen Missverständnissen in Acht zu nehmen:

- Der im Theorem erwähnte Punkt P kann der Schwerpunkt sein, muss aber nicht. Falls es sich bei P um den Schwerpunkt handelt, werden einige Formeln ganz besonders einfach.
- Die Rotationsachse muss nicht fest sein. Wir werden zu Beginn unserer Untersuchungen mit einer fixierten Rotationsachse arbeiten, diese Bedingung im weiteren Verlauf aber aufheben. Dabei werden wir sehen, dass die Rotationsachse eine komplizierte Bewegung ausführen kann und sich sowohl bezüglich eines äusseren Koordinatensystems als auch bezüglich des starren Körpers ändern kann.
- Wie wir sehen werden, gilt dies auch in Situationen, wo der sogenannte Drehimpuls konstant ist. Wir werden sehen dass die Drehachse nicht unbedingt mit der Richtung des Drehimpulses (wir werden diesen Begriff in diesem Abschnitt definieren) zusammenfallen muss.

Die Situation ist für den zweidimensionalen Fall veranschaulicht in Fig. 7.1. Eine Veranschaulichung in drei Dimensionen ist gegeben in Fig. 7.2 Die beiden Figuren

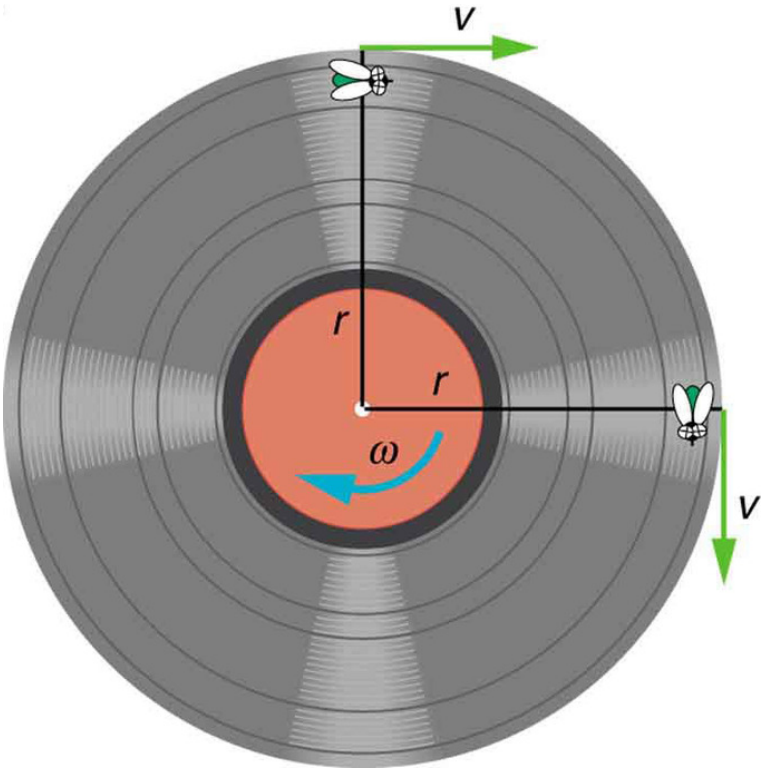


Abbildung 7.1: Veranschaulichung der Rotation um eine feste Drehachse für ein zweidimensionales System.

7.1 und 7.2 verdeutlichen mehrere Aspekte der Kinematik rotierender Körper. Zum einen wird das Konzept des Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ eingeführt.

Definition 7.1 Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ ist definiert durch folgende Eigenschaften:

- $\vec{\omega}$ ist parallel zur Drehachse des rotierenden starren Körpers.
- Die Länge von $\vec{\omega}$, also $|\vec{\omega}|$, entspricht der Winkelgeschwindigkeit der Rotation.
- Die Drehachse ist so ausgerichtet, dass die Drehung "von oben betrachtet" (also so, dass der Spitz des Winkelgeschwindigkeitsvektors ins Auge sticht), im Gegenuhrzeigersinn verläuft!

Wir verwenden hier den Begriff der Winkelgeschwindigkeit. Hierzu einige Bemerkungen:

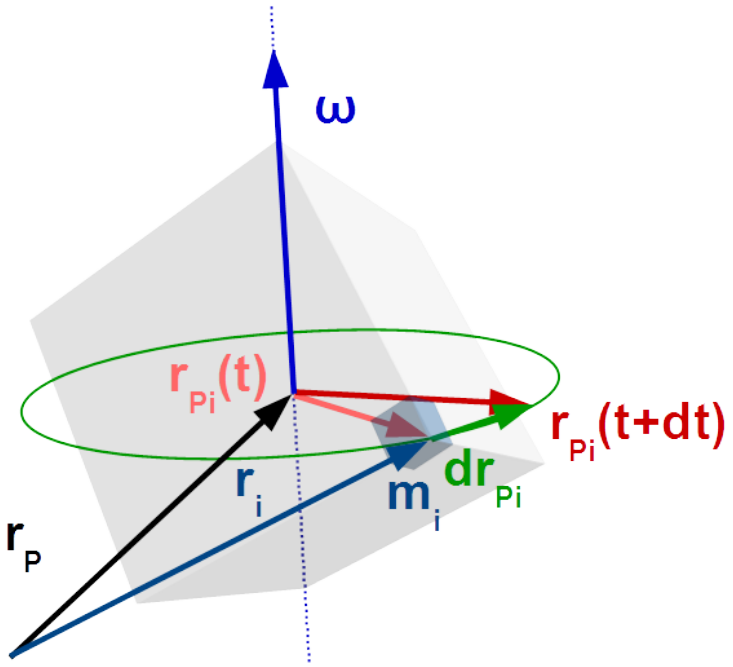


Abbildung 7.2: Veranschaulichung der Rotation um eine feste Drehachse für ein dreidimensionales System.

- Die Winkelgeschwindigkeit sagt Ihnen, wie viel Winkel Sie pro Sekunde machen.
- Es wird immer in Radian gerechnet.
- Radian hat keine Einheit, bzw. die Einheit 1.
- Ein Kreis hat 360° oder, für uns viel wichtiger hier, 2π.
- Wenn Sie sich einmal pro Sekunde drehen, haben Sie eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 2\pi s^{-1}$.
- Die Grösse s^{-1} bedeutet "pro Sekunde".
- Wenn Sie sich 20 mal pro Sekunde drehen, haben Sie eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 40\pi s^{-1}$.

Für die Geschwindigkeit irgendeines Punktes P_i des starren Körpers gilt dann das folgende Gesetz:

Law 7.1 Die Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ eines Punktes eines starren Körpers kann dargestellt werden als Summe der Geschwindigkeit irgendeines Punktes P des starren Körpers plus einer Rotation um eine Achse durch P:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi}. \tag{7.1}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}_{Pi} = \vec{r}_i - \vec{r}_P$ und "$\times$" das Kreuzprodukt zweier Vektoren.

7.2 Energie eines rotierenden starren Körpers

Stellen Sie sich eine rotierende Kugel vor. Auch wenn sich der Mittelpunkt der Kugel nicht bewegt, so ist doch klar, dass es Energie brauchte, um die Kugel in Rotation zu versetzen[1].

Zum Beginn unserer Analysen nehmen wir an, die Drehachse des starren Körpers sei sowohl bezüglich des Körpers als auch bezüglich der Umgebung des Körpers fixiert. Stellen Sie sich einfach vor der starre Körper sei von einer Stange durchdrungen und rotieren um dieselbe. Beispiele sind. z.B. alle Arten von Schwungrädern. Der Sinn der Annahme einer fixierten Drehachse liegt darin, das Konzept des Trägheitsmoments einzuführen. Später, wenn die Drehachse nicht mehr fixiert ist, wird die Zahl "Trägheitsmoment" durch eine Matrix ersetzt[2].

Gefühlsmässig wissen wir, dass es bei der Rotation um eine feste Achse zwei Situationen gibt:

1. Der starre Körper dreht sich rund", d.h. es treten keine Lagerkräfte im Sinne von Unwuchten auf.

2. Die Rotation hat eine Unwucht, d.h. es treten zeitlich veränderliche Lagerkräfte auf. Diese führen zu asymmetrischen Belastungen der Drehlager und sind oft unerwünscht.

Die Tatsache, dass bei Unwuchten Lagerkräfte auftreten, lässt uns bereits vermuten, dass sich ohne Fixierung die Drehachse verändern wird. Wir werden dies in einem späteren Kapitel auch noch formal verstehen.

!!! Öfters hört oder liest man das Missverständnis, dass Unwuchten bereits vermieden werden können, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt eines starren Körpers geht. Dies ist nicht wahr!

[1] Bei einem rotierenden Zylinder können Sie sich gut vorstellen, wie sich ein Seil um den Zylinder wickeln kann und damit eine Last angehoben werden kann. Rotationsenergie kann in Lageenergie (und umgekehrt) verwandelt werden.

[2] Ohne auf die mathematischen Details eingehen zu wollen: es handelt sich bei dieser Matrix um einen sogenannten Tensor; in der Literatur liest man deshalb oft das Wort "Trägheitsmomentetensor"

Die Rotation ist eine Bewegung; jeder einzelne Massenpunkt eines rotierenden Körpers hat damit eine kinetische Energie. Gestützt auf die Gl. 7.1 können wir schreiben:

$$E_{kin} = \sum_i m_i \frac{(\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Pi})^2}{2}. \tag{7.2}$$

In dieser Form ist die kinetische Energie zwar allgemein beschrieben, aber noch nicht besonders nützlich.

7.2.1 Rotationsenergie bei fixierter Drehachse

Wir untersuchen nun einen wichtigen Spezialfall:

- Der Schwerpunkt sei in Ruhe: $\vec{v}_S = 0$.
- Die Drehachse ist fixiert und geht durch den Schwerpunkt.
- Die Rotationsgeschwindigkeit ist konstant.

Die beiden letzten Forderungen bedeuten, dass $\vec{\omega}$ eine Konstante ist. Damit ergibt sich für die kinetische Energie der Rotation (s. Fig. 7.3):

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_i m_i \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2}{2} \\ &= \sum_i m_i \frac{|\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}|^2}{2} \\ &= \sum_i m_i \frac{|\vec{\omega}|^2 \left|\vec{r}_{Si,\perp}\right|^2}{2} \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{Si,\perp}^2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Dabei bedeutet $\omega = |\vec{\omega}|, r_{Si,\perp} = \vec{r}_{Si,\perp}$. Wir benutzten dabei die Beziehung $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin(\phi)| = |\vec{a}|b_\perp$ mit ϕ als Zwischenwinkel (Für eine detaillierte Erklärung, s. Abschnitt 21.1.5).

Die oben gewonnene Beziehung

$$E_{kin} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{Si,\perp}^2. \tag{7.4}$$

rechtfertigt die Definition des Trägheitsmomentes.

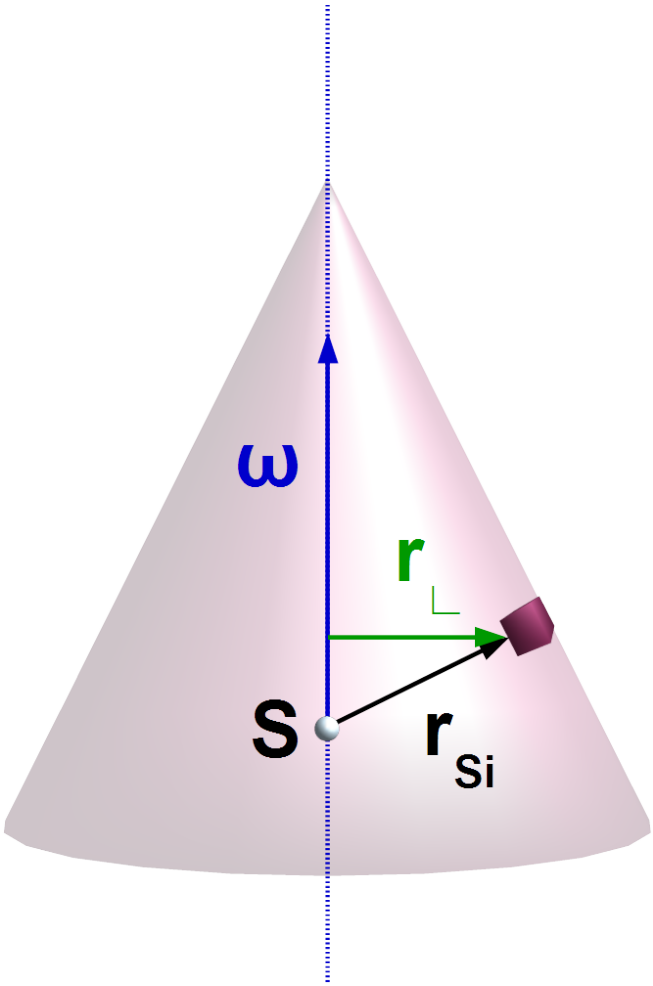


Abbildung 7.3: Rotierender Körper mit fixierter Drehachse.

Definition 7.2 Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer fixierten Drehachse durch den Punkt P entspricht der Zahl

$$J = \sum_i m_i r_{Pi,\perp}^2 . \tag{7.5}$$

Dabei bezeichnet $r_{Pi,\perp}$ den Abstand der Massenpunkte des starren Körpers von der Drehachse.

Law 7.2 Die kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers lässt sich

unter Verwendung des für die Drehachse spezifischen Trägheitsmomentes J schreiben als:

$$E_{rot} = J\frac{\omega^2}{2}. \tag{7.6}$$

Die Situation ist nicht ganz einfach: Der Schwerpunkt ist bei einer Drehachse natürlich nicht in Ruhe. Ohne in die Details gehen zu wollen, sagen wir, dass Gl. 7.6 genau dann gilt, wenn die Drehachse fest mit dem Körper verbunden ist und sich selber nicht bewegt.

!!! Das Trägheitsmoment hängt von der Wahl der Drehachse ab. Es ist falsch zu sagen, ein starrer Körper habe ein bestimmtes Trägheitsmoment. Der Körper hat dies immer nur bezüglich einer bestimmten Achse[3].

Eine Übersicht über einige wichtige Trägheitsmomente ist gegeben in Fig. 7.4.

7.2.2 Der Satz von Steiner

In Fig. 7.4 sind verschiedene Drehmomente meist in Bezug auf Drehachsen durch den Schwerpunkt gegeben. Zwischen dem Trägheitsmoment für eine Drehachse durch den Schwerpunkt und dem Trägheitsmoment für eine parallele Drehachse, die nicht durch den Schwerpunkt geht gibt es eine einfache Beziehung:

Law 7.3 **Satz von Steiner**: Gegeben seien zwei parallele Drehachsen, eine davon gehe durch den Schwerpunkt eines starren Körpers (s. Fig. 7.5). Der Abstand der beiden Drehachsen sei a, die Gesamtmasse des starren Körpers M. Wenn das Trägheitsmoment für die Achse durch den Schwerpunkt durch J_S gegeben ist, gilt für das Trägheitsmoment J für die andere Achse:

$$J = J_S + Ma^2. \tag{7.7}$$

[3] Der einzige Fall, wo man sagen kann, ein Körper habe ein Trägheitsmoment ohne die Achse anzugeben ist die Kugel, dies schlicht deshalb, weil alle Achsen zum gleichen Trägheitsmoment führen.

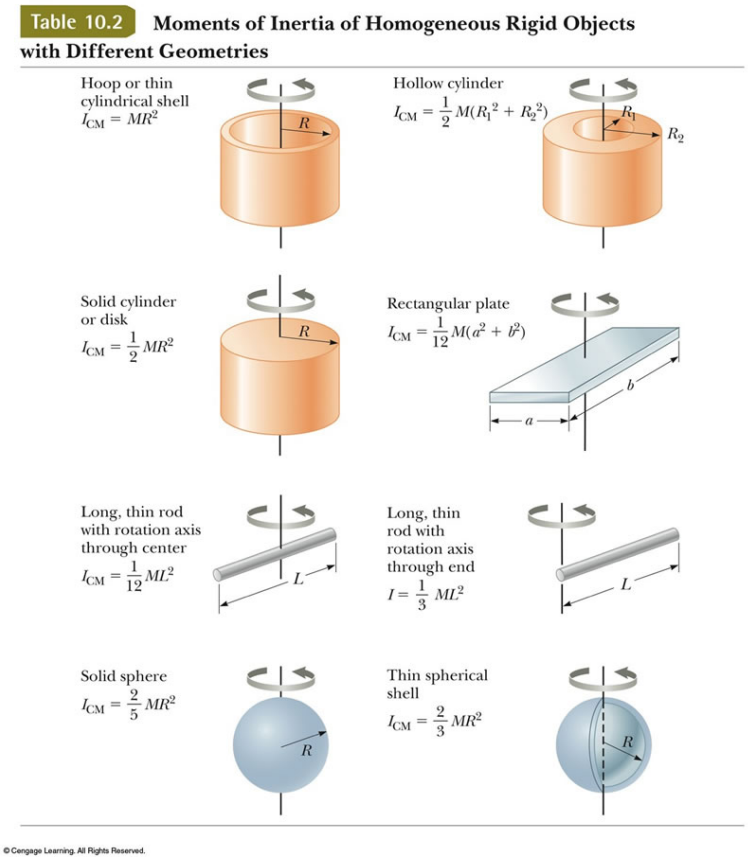


Abbildung 7.4: Liste einiger starrer Körper und Trägheitsmomente in Bezug auf spezielle Achsen.

Der Beweis für den Satz von Steiner ergibt sich durch:

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{Pi})^2 = \sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{\omega}\times(\vec{r}_{Si}-\vec{a}))^2 \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{Si}-\vec{\omega}\times\vec{a})^2 \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2}\left((\vec{\omega}\times\vec{r}_{Si})^2 - 2(\vec{\omega}\times\vec{r}_{Si})(\vec{\omega}\times\vec{a}) + (\vec{\omega}\times\vec{a})^2\right) \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r}_{Si})^2 - (\vec{\omega}\times\vec{a})\left(\vec{\omega}\times\sum_i m_i\vec{r}_{Si}\right) + \sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{\omega}\times\vec{a})^2 \\
&= J\frac{|\vec{\omega}|^2}{2} + M|\vec{a}|^2\frac{|\vec{\omega}|^2}{2} \\
&= \left(J + M|\vec{a}|^2\right)\frac{|\vec{\omega}|^2}{2}
\end{aligned}
$$

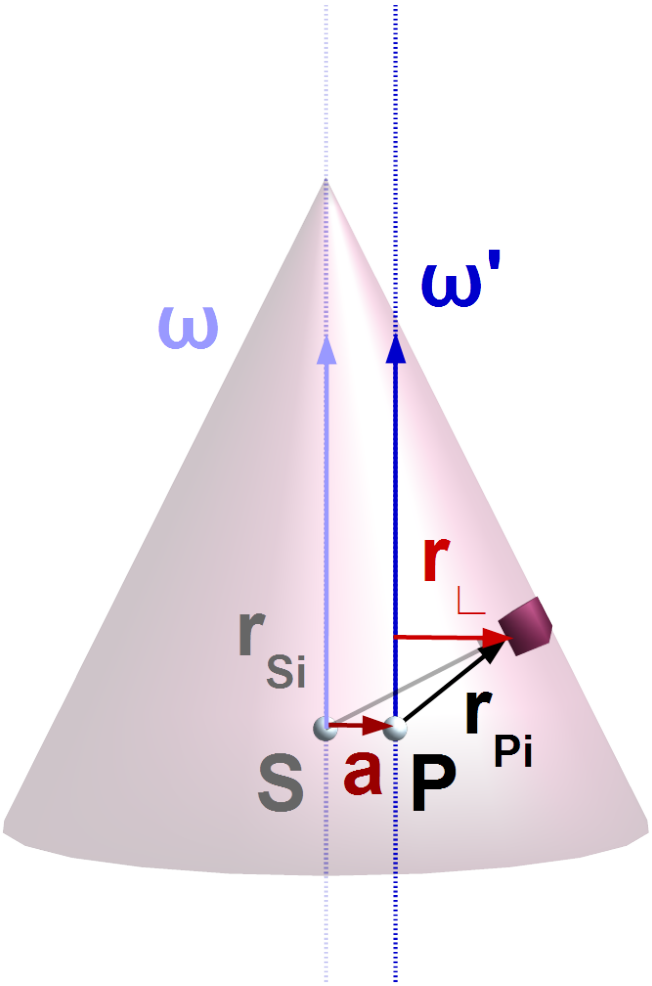


Abbildung 7.5: Illustration zum Satz von Steiner.

7.2.3 Rollende Körper

In diesem Abschnitt analysieren wir die Situation eines rollenden Körpers. Wir nehmen dabei an, die Drehachse gehe durch den Schwerpunkt des Körpers und ändere ihre Richtung im Verlauf der Zeit nicht. Da sich der Schwerpunkt des Körpers aber bewegt, bewegt sich auch die Drehachse.

Was bedeutet es nun, wenn ein Körper rollt? Die Situation ist illustriert in Fig. 7.6. Damit ein Körper rollt, muss der Berührungspunkt des Körpers mit dem Boden dieselbe Geschwindigkeit wie der Boden haben, also in der Regel null. Wenn wir von einem ruhenden Boden ausgehen, muss also gelten (Gl. 7.1):

$$\vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si} = 0. \tag{7.8}$$

Ausgehend von Fig. 7.6 erhalten wir für die Vektoren in Gl. 7.8:

$$\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ v_S \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{Si} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

(Beachten Sie das negative Vorzeichen im Vektor der Winkelgeschwindigkeit! Falls Sie nicht verstehen, woher das kommt, fragen Sie den Dozierenden!) Aus Gl. 7.8 erhalten Sie dann die sogenannte **Rollbedingung** :

$$v_S = \omega r. \tag{7.10}$$

Dabei bedeutet ω den Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Rotation.

Für die totale kinetische Energie eines rollenden Objekts erhält man:

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \sum_i m_i \frac{\vec{v}_i^2}{2} \\
&= \sum_i m_i \frac{(\vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2}{2} \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\vec{v}_S^2 + 2\vec{v}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2\right) \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_S^2 + \vec{v}_S \cdot (\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_{Si}) + \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2 \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_S^2 + \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2 \\
&= M \frac{\vec{v}_S^2}{2} + J \frac{\vec{\omega}^2}{2} \\
&= E_{kin,S} + E_{rot}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

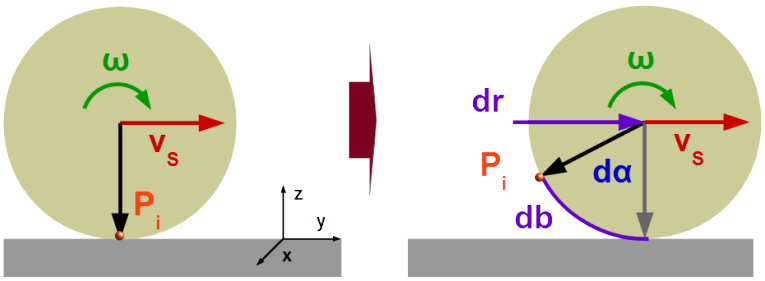


Abbildung 7.6: Illustration zur Rollbedingung.

7.2.4 Rotationsenergie bei freier Drehachse

Sobald die Drehachse nicht mehr durch eine, dank einer Lagerung, fixierten Drehachse vermittelt wird, wird die Berechnung der kinetischen Energie eines starren Körpers etwas schwieriger. Grundsätzlich geht es um die Evaluation des Ausdrucks:

$$E_{kin} = \sum_i m_i \frac{\vec{v}_S + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})^2}{2}. \tag{7.12}$$

Eine an sich einfache aber längere Rechnung (welche auf den Slides in allen Details durchgeführt wurde) liefert folgende kompakte Formulierung:

$$E_{kin} = M\frac{\vec{v}_S^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (I\vec{\omega}). \tag{7.13}$$

Dabei ist I eine Matrix, der sogenannte Trägheitstensor.

Definition 7.3 Der **Trägheitstensor** I ist gegeben durch:

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(r_{Si,y}^2 + r_{Si,z}^2) & -\sum_i m_i r_{Si,x} r_{Si,y} & -\sum_i m_i r_{Si,x} r_{Si,z} \\ -\sum_i m_i r_{Si,x} r_{Si,y} & \sum_i m_i(r_{Si,x}^2 + r_{Si,z}^2) & -\sum_i m_i r_{Si,y} r_{Si,z} \\ -\sum_i m_i r_{Si,x} r_{Si,z} & -\sum_i m_i r_{Si,y} r_{Si,z} & \sum_i m_i(r_{Si,x}^2 + r_{Si,y}^2) \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

Dabei bezeichnet $r_{Si,x}$ die x-Komponente der Schwerpunktskoordinaten des Massenpunkts i im starren Körper und $M = \sum_i m_i$.

!!! Beachten Sie: Der Trägheitstensor I ist eine zeitabhängige Grösse, da sich die Koordinaten der Massenpunkte, aus denen der starre Körper zusammengesetzt ist, Funktionen der Zeit sind.

Gl. 7.13 motiviert die folgende Schreibweise:

$$E_{kin} = E_{kin,S} + E_{rot} \tag{7.15}$$

mit

$$E_{kin,S} = M\frac{\vec{v}_S^2}{2} \tag{7.16}$$

und

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (I\vec{\omega}). \tag{7.17}$$

In Worten bedeutet dies: Die kinetische Energie eines starren Körpers ist gleich der kinetischen Energie, die ein Massenpunkt mit der Masse des starren Körpers hätte, wenn er sich auf der Ortskurve des Schwerpunkts des starren Körpers bewegen würde (mit der entsprechenden Geschwindigkeit) plus einem Term, der die Rotation des starren Körpers berücksichtigt.

Auch wenn der Ausdruck in Gl. 7.17 einfach aussieht, hat er es in sich:

- Die Berechnung der Rotationsenergie eines starren Körpers erfordert im Allgmeinen die Ausführung einer Matrixmultiplikation.
- Die Matrix, mit der multipliziert wird, hängt von der Zeit ab.

Wir werden entsprechende Rechnungen nur in einfachen Fällen durchführen.

Der Trägheitstensor I bildet eine sogenannte symmetrische Matrix.Wie Sie aus der linearen Algebra wissen (siehe auch Abschnitt 21.2.1), kann man symmetrische Matrizen durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in eine diagonale Form bringen[4].Die Werte auf der Diagonalen entsprechend dabei den Eigenwerten des Trägheitssensors. Diese Eigenwerte werden auch **Hauptträgheitsmomente** genannt. Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren liegen auf den sogennanten **Hauptachsen** des starren Körpers. Physikalisch sind die Hauptachsen meist einfach zu finden; wenn der Körper z.B. rotationssymmetrisch ist, ist die Rotationsachse eine Hauptachse.

[4]Wenn Sie noch keine lineare Algebra hatten, überlesen Sie diesen Abschnitt.

7.3 Der Drehimpuls

Beim Impuls, wie wir ihn in den letzten Kapiteln kennengelernt haben, haben wir eine gewisse, auch sprachlich repräsentierte Intuition: der Impuls entspricht der Wucht oder dem Schwung eines Objekts. Etwas Ähnliches gilt auch für rotierende Objekte; nicht umsonst spricht man von einem Schwungrad.

7.3.1 Definition des Drehimpulses

Die Definition des Drehimpulses ist allerdings in ihrer formalen Gestalt weniger intuitiv als diejenige des gewöhnlichen Impulses.Zum einen ist der Drehimpuls eine Grösse, welche immer in Bezug auf einen Bezugspunkt angegeben werden muss und nicht nur vom betrachteten Objekt abhängt. Zum anderen werden wir den Drehimpuls so definieren, dass auch ein Massenpunkt Drehimpuls haben kann. Dies ist auf den ersten Blick verwunderlich, kann ein Massenpunkt doch selber nicht rotieren.

Definition 7.4 Der Drehimpuls einer Punktmasse m bezüglich des Nullpunktes irgendeines Koordinatensystems ist gegeben durch:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{7.18}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Massenpunkts. Bezüglich eines beliebigen Punktes $\vec{R}$ des Koordinatensystems beträgt der Drehimpuls:

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{R}) \times m\vec{v}. \tag{7.19}$$

Für einen starren Körper berechnen wir den Drehimpuls als Summe der Drehimpulse der Massenpunkte, aus denen er zusammengesetzt ist.

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \tag{7.20}$$

Weiter benützen wir wieder Schwerpunktskoordinaten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i m_i (\vec{r}_S + \vec{r}_{Si}) \times (\vec{v}_S + \vec{v}_{Si}) \\
&= \sum_i m_i (\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_S \vec{r}_S \times \vec{v}_{Si} + \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{Si}) \\
&= \sum_i m_i (\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{Si}) \\
&= M\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_i m_i (\vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{Si})
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Die letzte Beziehung gilt, weil die Gl. 6.10 und 6.11 gelten. Die Gl. 7.21 motiiviert die Definition:

$$\vec{L} = \vec{L}^{Bahn} + \vec{L}^{Spin} \tag{7.22}$$

mit

$$\vec{L}^{Bahn} = M\vec{r}_S \times \vec{v}_S \tag{7.23}$$

und

$$\vec{L}^{Spin} = \sum_i m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_{Si}. \tag{7.24}$$

Der Drehimpuls zerfällt in zwei Teile:

1. Der **Bahndrehimpuls**. Er beschreibt den Drehimpuls eines starren Körpers bezüglich eines festen Punktes im Raum. Gefühlsmässig hat der Bahndrehimpuls wenig mit Drehungen zu tun; er wird uns aber beim Hebelgesetz wieder begegnen.

2. Der **Eigendrehimpuls**: Dieser Teil des Drehimpulses beschreibt das, was wir normalerweise unter "Schwung" verstehen.

In unseren Anwendungen sind diese beiden Teile des Drehimpulses in der Regel unabhängig voneinander. Beachten Sie aber: Die Drehimpulserhaltung (s. später) bezieht sich auf den Gesamtdrehimpuls (Summe von Bahn- und Eigendrehimpuls). Viele physikalische "Paradoxien" beruhen darauf, dass in den betrachteten Systemen die beiden Drehimpulse gekoppelt sind.

7.3.2 Dynamik des Drehimpulses

Wenn wir den Drehimpuls eines starren Körpers in Gl. 7.20 ableiten, erhalten wir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) \tag{7.25}$$

$$= \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \tag{7.26}$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{a}_i\right) \tag{7.27}$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i \tag{7.28}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}^{int}\right) \tag{7.29}$$

Dabei bezeichnet $\vec{F}_i^{ext}$ die Summe der äusseren Kräfte auf Massenpunkt i und $\vec{F}_{ij}^{int}$ die Kraft von Massenpunkt j auf Massenpunkt i. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn wir annehmen, dass die Kräfte $\vec{F}_{ij}^{int}$ sogenannte Zentralkräfte sind:

Definition 7.5 Die Kraft zwischen zwei Massenpunkten i und j bezeichnet durch $\vec{F}_{ij}^{int}$ ist eine **Zentralkraft** wenn gilt:

$$\vec{F}_{ij}^{int} = F(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{7.30}$$

In Worten bedeutet dies, dass die Kraft zwischen den Massenpunkten parallel zu Verbindungslinie der beiden Punkte liegt[a].

[a] Die Tatsache, dass wir in der Summe keine Kräfte des Teilchens auf sich selber zulassen, ist aus der Newton'schen Perspektive kein Problem. In einer quantenmechanischen Behandlung des Problems ergeben sich bei sogenannten "Selbswechselwirkungen" mathematisch und konzeptuell anspruchsvolle Fragestellungen.

Law 7.4 Falls alle internen Kräfte zwischen den Massenpunkten eines starren Körpers Zentralkräfte sind, gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}. \tag{7.31}$$

Die Voraussetzung der Zentralkräfte ist für starre Körper immer erfüllt, es sei denn, wir erwähnen explizit, dass sie nicht gilt. Eine weitere Analyse unter Benützung von $\vec{r}_i = \vec{r}_S + \vec{r}_{Si}$ gibt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_S \times \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i^{ext}. \tag{7.32}$$

Definition 7.6 Die Grösse

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \tag{7.33}$$

nennt man **Drehmoment** der angreifenden Kräfte auf einen ausgedehnten Körper bezüglich Ursprungs des Koordinatensystems. Unter Benützung von Gl. 7.32 rechtfertigt die in der Literatur häufig verwendete Definition

$$\vec{D} = \sum_i \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i^{ext}, \tag{7.34}$$

also des Drehmoments bezüglich des Schwerpunkts.

Aus der Gl. 7.31 ergibt sich sofort die Drehimpulserhaltung:

Law 7.5 Falls keine äusseren Kräfte wirken, gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \tag{7.35}$$

Das bedeutet aber, dass der Drehimpuls eines starren Körpers ohne die Einwirkung äusserer Kräfte konstant erhalten ist.

Aus der Kinematik der Rotation wissen wir, dass (Gl. 7.1):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}. \tag{7.36}$$

Damit bekommen wir für den Drehimpuls mit Hilfe von Gl. 7.21:

$$\vec{L} = M\vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}). \tag{7.37}$$

Eine ziemlich aufwendige Rechnung liefert nun einen Zusammenhang mit dem Trägheitstensor:

$$\vec{L} = M\vec{r}_S \times \vec{v}_S + I\vec{\omega}. \tag{7.38}$$

Wir wiederholen, dass der erste Teil der rechten Seite der Gl. 7.38 dem Bahndrehimpuls und der zweite Teil dem Eigendrehimpuls entspricht. Für den Eigendrehimpuls $\vec{L}^{spin}$ ergibt sich:

$$\vec{L}^{spin} = I\vec{\omega}. \tag{7.39}$$

Unter Benützung von Gl. 7.32 erhalten wir für die Dynamik:

$$\frac{d\vec{L}^{bahn}}{dt} = \vec{r}_S \times \sum_i \vec{F}_i^{ext} \tag{7.40}$$

und

$$\frac{d\vec{L}^{spin}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \sum_i \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i^{ext}. \tag{7.41}$$

Damit ergibt sich zusammen mit dem Schwerpunktsatz Gl. 6.8 die Dynamik des starren Körpers.

Theorem 7.2 Allgemeine Dynamik des starren Körpers mit freier Drehachse: Für den starren Körper gelten die beiden fundamentalen dynamischen Gesetze:

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \tag{7.42}$$

$$\frac{dI\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i^{ext}. \tag{7.43}$$

So wichtig die Gl. 7.44 sein mögen, direkt können Sie sie nicht verwenden, da der Trägheitstensor zeitabhängig ist. Eine Möglichkeit, die Dynamik des starren Körpers numerisch zu erfassen, ist gegeben auf der Folie “Numerische Lösung der Dynamik”.

Ist die Drehachse fixiert oder handelt es sich um eine Rollbewegung mit konstanter Ausrichtung der Drehachse vereinfacht sich die Dynamik soweit, dass wir wieder mit den uns bekannten Methoden arbeiten können:

Theorem 7.3 Dynamik des starren Körpers mit fixierter Drehachse oder Rollbewegungen mit konstanter Ausrichtung der Drehachse gelten die beiden

fundamentalen dynamischen Gesetze:

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \tag{7.44}$$

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i^{ext}. \tag{7.45}$$

R Man könnte jetzt glauben (Gl. 7.39), dass bei fixierter Drehachse ebenfalls gilt:

$$\vec{L}^{spin} = J\vec{\omega}. \tag{7.46}$$

Das würde bedeuten, dass der Drehimpuls parallel zur Drehachse ist. **Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall!** Wenn die Achse "eiert", also die Lager der Achse zeitlich variable Kräfte auf die Achse ausüben müssen, ist der Drehimpuls nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit und Gl. 7.46 ist falsch! Es gibt aber für jedes Objekt drei ganz bestimmte Achsen[5], für welche Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit immer zusammenfallen. Natürlich wird man bei einem rotierenden Objekt mit fixierter Achse darauf achten, dass die Drehachse auf einer dieser Hauptachsen liegt, um die Belastung der Drehlager zu minimieren.

Aus der Gl. 7.39 ergibt sich eine Konsequenz für die Formulierung der Rotationsenergie:

Law 7.6 Die Rotationsenergie eines starren Körpers kann geschrieben werden als:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega}. \tag{7.47}$$

[5] Die sogenannten Hauptachsen, welche durch die Eigenvektoren des Trägheitstensors gegeben sind.

Das Elektrische Feld
Bestimmung des elektrischen Feldes
Ladungen als Quellen des Feldes
Das elektrische Feld in Metallen
Potentielle Energie, Potential und Spannung
Zusammenhang zwischen Potential und elektrischem Feld
Beispiel: Kondensatoren

8 — Elektrische Felder

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

Bis anhin illustrierten wir unsere Überlegungen zum Thema potentielle Energie, Potentiale und Felder vor Allem am Beispiel des Gravitationsfeldes. Für die Elektrotechnik entscheidend ist aber eine andere Art von Feld, das elektrische Feld. Ganz analog wie beim Gravitationspotential werden wir ein elektrisches Potential definieren.

8.1 Das Elektrische Feld

Wir starten mit einer einfachen Überlegung: Bekanntlich üben Ladungen eine Kraft aufeinander aus. Für zwei Ladungen q in $\vec{r}_q$ und Q in $\vec{r}_Q$ gilt mit $\vec{r}_{qQ} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q$:

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{|\vec{r}_{qQ}|^2}\frac{\vec{r}_{qQ}}{|\vec{r}_{qQ}|}. \tag{8.1}$$

Dabei bezeichnet $\vec{F}_{qQ}$ die Kraft, welche die Ladung Q auf die Ladung q ausübt.

Wenn wir uns vorstellen, dass die Ladung Q fixiert ist, und wir die Ladung q an verschiedenen Orten im Raum platzieren um die auf sie wirkenden Kräfte zu messen, können wir auch sagen:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{qQ} &= q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_{qQ}|^2}\frac{\vec{r}_{qQ}}{|\vec{r}_{qQ}|}\right). \\ &= q\vec{E}\end{aligned} \tag{8.2}$$

Wir benützen dabei einfach, dass in der obigen Situation

$$\vec{E}(\vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|^2}\frac{\vec{r}_q - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|}. \tag{8.3}$$

ein völlig sauber definierter Vektor ist. Um die unterschiedliche Rolle der Positionen von q und Q herauszuarbeiten, haben wir beide Vektoren explizite in der Gl. 8.3 eingesetzt.

Die Gl. 8.3 zeigt eine spezielle Situation: Das elektrische Feld, erzeugt durch eine Punktladung. Dabei wird in jedem Punkt $\vec{r}_q$ des Raumes ein Feld $\vec{E}(\vec{r}_q)$ definiert. Dieses Feld ist im Beispiel Gl. 8.3 eine Funktion der Position $\vec{r}_Q$ einer Punktladung Q.

Im Allgemeinen ist das **elektrische Feld** definiert als eine allgemeine Vektorfunktion

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \\ E_z(\vec{r},t) \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Law 8.1 Auf eine Ladung g wirkt in einem Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ im Punkt $\vec{r}$ die Kraft $\vec{F}_q$:

$$\vec{F}_q(\vec{r},t) = q\vec{E}_q(\vec{r},t) \tag{8.5}$$

Damit hat das elektrische Feld $\vec{E}$ die Dimension einer Kraft pro Ladung, also $[N/C]$.

8.2 Bestimmung des elektrischen Feldes

Wir wissen nun, dass ein elektrisches Feld Kraft auf eine Ladung ausüben kann. Die Frage ist nun: Woher kommt dieses Feld? Wie können wir es berechnen? Dieses Kapitel gibt Ihnen eine Teilerklärung: Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes. Teilerklärung"deswegen, weil es neben den beschriebenen Wegen auch noch andere Möglichkeiten der Felderzeugung gibt. Wie wir später lernen werden, können elektrische und magnetische Felder sich gegenseitig erzeugen, ganz ohne die Präsenz von Ladungen.

!!! Alles, was Sie im weiteren lesen, stimmt nur dann, wenn sich die involvierten Ladungen nicht bewegen und die Felder zeitlich konstant sind! Im Folgenden treiben wir Elektrostatik.

8.2.1 Ladungen als Quellen des Feldes

In Gl. 8.3 haben Sie gesehen, wie das Feld erzeugt durch eine Punktladung Q aussieht. Für elektrische Felder gilt das Superpositionsprinzip.

Law 8.2 Das elektrische Feld mehrerer Ladungen ist gleich der Summe der Felder der Einzelladungen. Gegeben seien N Einzelladungen Q_i in den Punkten $\vec{r}_i$. Deren resultierendes Feld ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}. \tag{8.6}$$

In der Regel hat man es nicht mit einer Menge isolierter Einzelladungen, sondern mit Ladungsdichten zu tun (Ladung pro Volumen). Es gibt ausgefeilte Methoden[1] um aus Ladungsverteilungen elektrische Felder zu berechnen. Wir beschränken uns darauf, einige wichtige Fälle ohne Berechnung anzugeben.

Das elektrische Feld einer geladenen Kugel

Nehmen Sie an, Sie hätten eine Kugel mit Radius R, welche eine Ladung Q trägt[2]. Das von der Kugel erzeugte elektrische Feld $\vec{E}_K(\vec{r})$ ausserhalb der Kugel ($|\vec{r}| > R$) hat die Form:

$$\vec{E}_K(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{8.7}$$

Eine Visualisierung sehen Sie in Fig. 8.1.

R Beachten Sie: Wenn die Kugel positiv geladen ist, zeigt das elektrische Feld von der Kugel weg!

Das elektrische Feld eines geladenen Zylinders

Nehmen Sie an, Sie hätten einen Zylinder mit Radius R, welcher mit einer Längenladungsdichte λ versehen ist (λ: Ladung pro Länge). Das vom Zylinder erzeugte elektrische Feld $\vec{E}_Z(\vec{r})$ ausserhalb des Zylinders ($|\vec{r}| > R$) hat die Form:

$$\vec{E}_Z(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{|\vec{r}_\perp|} \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}. \tag{8.8}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}_\perp$ denjenigen Teil des Vektors $\vec{r}$, welcher senkrecht zum Zylinder steht. Eine Visualisierung sehen Sie in Fig. 8.2.

R Beachten Sie: Ein gerader Draht ist ein sehr dünner Zylinder.

[1] z.B. Anwendung des Satzes von Gauss oder in zweidimensionalen Situationen der Theorie der komplexen Funktionen.

[2] Bemerkenswerterweise kommt es nicht darauf an, ob diese Ladung im Zentrum der Kugel konzentriert ist oder gleichmässig über die Kugel verteilt ist.

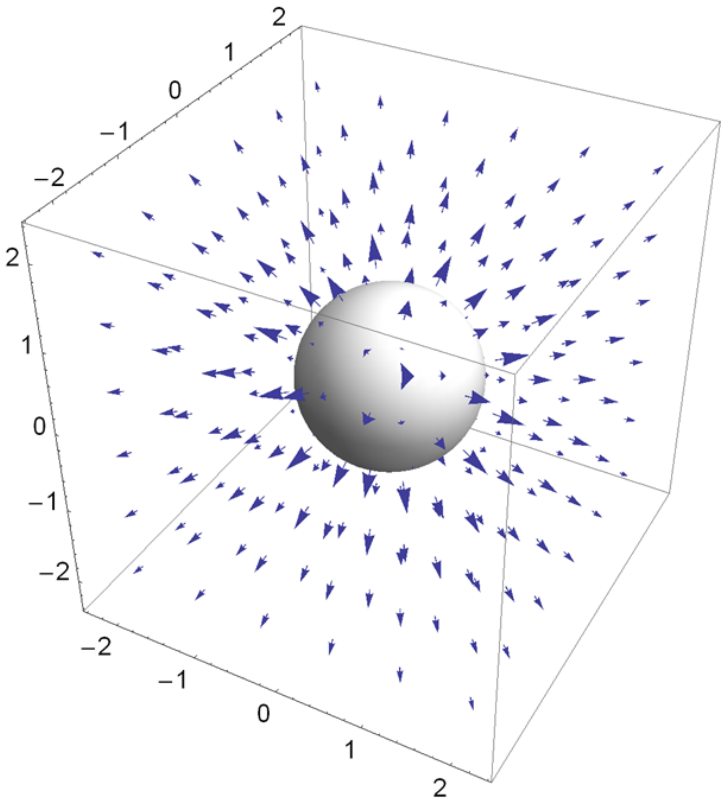


Abbildung 8.1: Elektrisches Feld einer geladenen Kugel.

R Streng genommen gilt Gl. 8.8 nur für unendlich lange Zylinder. Solche Zylinder gibt es natürlich nicht, unser Zylinder haben immer eine Länge L. Allerdings ist Gl. 8.8 eine recht gute Näherung für Punkte die nicht nahe an den Enden des Zylinders liegen und $|\vec{r}_\perp| \ll L$.

Das elektrische Feld einer geladenen Platte

Nehmen Sie an, Sie hätten eine dünne Platte welche mit einer Flächenladungsdichte σ belegt ist (σ: Ladung pro Länge). Das von der Platte erzeugte elektrische Feld $\vec{E}_P(\vec{r})$ hat die Form:

$$\vec{E}_P(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}. \tag{8.9}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}_\perp$ denjenigen Teil des Vektors $\vec{r}$, welcher senkrecht zur Platte steht. Eine Visualisierung sehen Sie in Fig. 8.3.

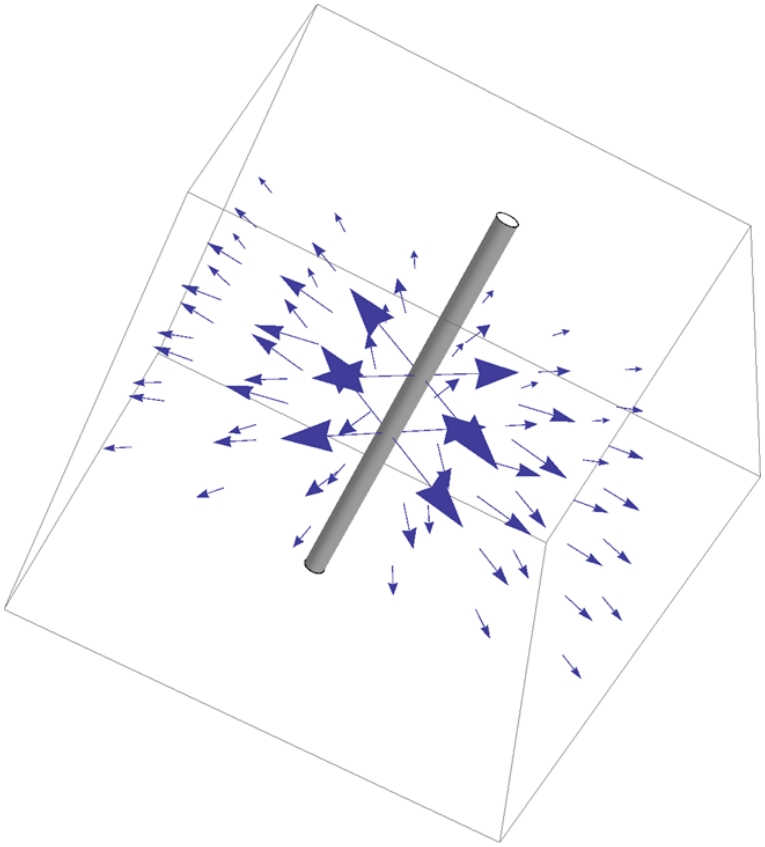


Abbildung 8.2: Elektrisches Feld eines geladenen Zylinders.

R Für eine unendlich grosse Platte würde das elektrische Feld auch für beliebigen Abstand nie schwächer als in unmittelbarer Nähe der Platte. Natürlich gibt es keine unendlich grossen Platten, aber wieder gilt, dass Gl. 8.9 eine gute Näherung darstellt, solange man nicht in der Nähe der Ränder und nicht zu weit weg von der Platte ist.

Context 8.1 In diesem Abschnitt war das Auftreten eines elektrischen Feldes immer mit Ladungsverteilungen verbunden. Das muss nicht sein. Zeitlich veränderliche Felder können ohne Ladungen existieren. Lichtwellen sind, zum Beispiel, das Ergebnis sich gegenseitig erzeugender elektrischer und magnetischer Felder.

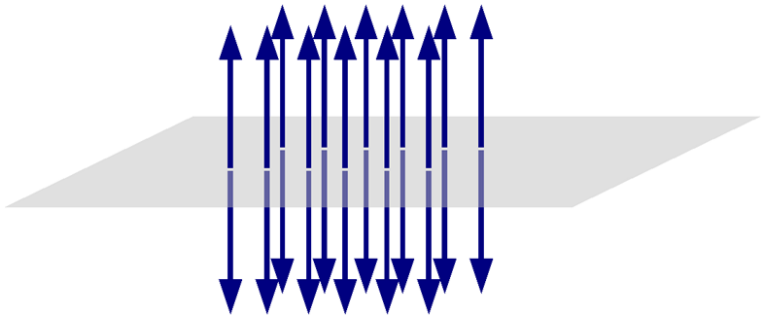


Abbildung 8.3: Elektrisches Feld eines geladenen Zylinders.

8.3 Das elektrische Feld in Metallen

Metalle sind, etwas grob gesagt, dadurch charakterisiert, dass in ihnen freie Ladungsträger vorkommen[3]. Normalerweise sind Metalle elektrisch neutral, das heisst, sie beherbergen genauso viele negative Ladungsträger wie positiv geladene Atomrümpfe, wobei einige der negativen Ladungsträger (Elektronen) frei beweglich sind. Metalle können aber einen Überschuss oder ein Defizit an freien Ladungsträger aufweisen und sind dann negativ, bzw. positiv geladen.

Nehmen Sie nun an, Sie hätten ein Stück Metall, welches mit einer Ladung Q geladen ist. Wir nehmen an, Q sei negativ, also hat es Überschusselektronen im Metall. Alles was wir sagen gilt aber auch für positive Ladungen. Folgende drei Tatsachen gelten (s. auch Fig. 8.4:

- Im Innern des Metalls ist das elektrische Feld null. Grund: hätte es ein Feld, würde auf die freien Elektronen eine Kraft wirken und diese bewegen. Da die Elektronen nicht ewig bewegt werden können (Energieerhaltungssatz, Elektronen geben durch Stösse im Metall Energie ab), muss das Feld null sein.

- Die überschüssigen freien Ladungsträger sammeln sich auf der Oberfläche des Metalls an. Der Grund dafür ist recht subtil und kann hier nicht im Detail besprochen werden.

- Das elektrische Feld dieser Oberflächenladungen steht senkrecht auf der Metalloberfläche. Das ist weider einfach einzusehen: Hätte das elektrische Feld eine Tangentialkomponente, würden eine Kraft auf die Ladungsträger an der Oberfläche wirken. Diese würden solange umverteilt, bis alle elektrischen Felder senkrecht auf der Oberfläche stehen.

[3] Wir werden dieses Thema noch detaillierter besprechen.

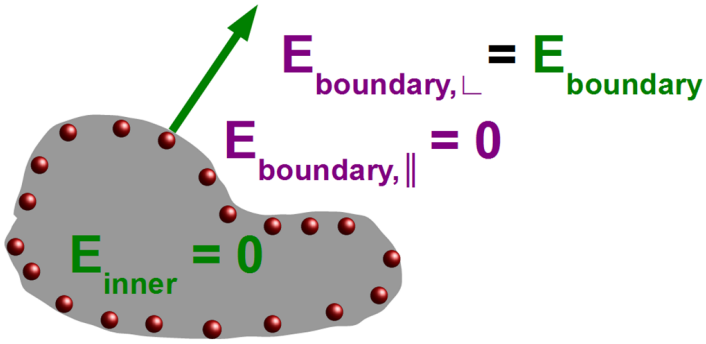


Abbildung 8.4: Elektrisches Feld im Metall.

!!! Die Aussagen in diesem Abschnitt gelten nur für stationäre Situationen (also zeitlich konstante Ladungen, Felder usw.).

8.4 Potentielle Energie, Potential und Spannung

Ähnlich wie im Falle der Gravitation können wir die potentielle Energie einer Ladung Q im $\vec{E}$-Feld bestimmen. Wenn Sie bedenken das das elektrische Feld die Kraft pro Ladung angibt, dann sehen Sie, dass die folgende Definition sinnvoll ist (völlig analog zum Gravitationsfeld):

$$E_{pot,el}(\vec{r}_0) = -\int_{\infty}^{\vec{r}_0} Q\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}. \tag{8.10}$$

Das Integral beginnt im Unendlichen. Der Gedanke dabei ist: Weiviel Energie pro Ladung braucht es, um eine Ladung aus dem Unendlichen zum Punkt $\vec{r}_0$ zu bringen?

Wir definieren nun das elektrische Potential.

Definition 8.1 Das **elektrische Potential** ist definiert als:

$$\phi_{el}(\vec{r}_0) = -\int_{\infty}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}. \tag{8.11}$$

Genau wie im Falle der Gravitation kommt es nicht auf den gewählten Integrationsweg an, es geht nur um Anfangs- und Endpunkte. Dies ermöglicht es uns nun, die elektrische Spannung U zu definieren.

Definition 8.2 Die **elektrische Spannung** zwischen zwei Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist definiert als:

$$U = \phi_{el}(\vec{r}_1) - \phi_{el}(\vec{r}_2) \tag{8.12}$$

Sie gibt im Wesentlichen die Energie an, die wir pro Ladung gewinnen, wenn die Ladung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ bewegt wird. Die Einheit der Spannung ist Volt.

Eine direkte Konsequenz dieser Definition ist:

$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{8.13}$$

Wir können die Spannung wie folgt interpretieren: Wenn eine Ladung $Q > 0$ von einem hohen Potentialwert im Punkt A auf einen tieferen Potentialwert im Punkt B fällt"gewinnt diese Ladung die Energie E_{gain}:

$$E_{gain} = E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B) = Q(\phi_{el}(\vec{r}_A) - \phi_{el}(\vec{r}_B)) = QU \tag{8.14}$$

Dabei ist U die Spannung zwischen A und B. Im leeren Raum bedeutet dies ein Zugewinn an kinetischer Energie, in einem Draht wird diese Energie zur Überwindung des Widerstandes verbraucht.

!!! Im Kommenden werden wir in der Regel die elektrische Spannung mit einem Buchstaben U bezeichnen. Leider werden Sie in der Literatur (auch im weiteren der Vorlesung) manchmal einen U begegnen, dass eine potentielle Energie bezeichnet. Dies ist ärgerlich, aber so ist das Leben.

■ **Example 8.1** Das elektrische Potential einer Punktladung Q ist:

$$\phi_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|}. \tag{8.15}$$

Im Gegensatz zum Gravitationspotential kann das elektrische Potential sowohl negativ als auch positiv sein. Dies ist illustriert in den Figuren 8.5 und 8.6.

8.5 Zusammenhang zwischen Potential und elektrischem Feld

(Kein Prüfungsstoff!) Bis jetzt haben wir immer das elektrische Feld genommen und mittels eines Integrals ein Potential berechnet. Man kann (ohne dass wir das

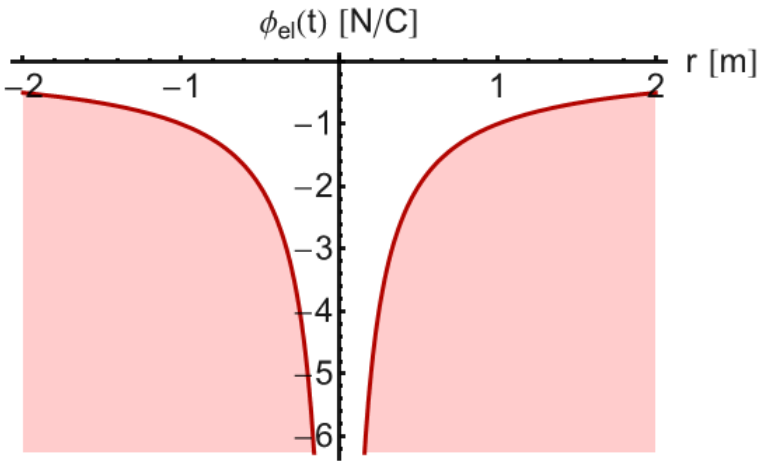


Abbildung 8.5: Elektrisches Potential einer negativen Ladung.

hier im Detail begründen) auch den umgekehrten Weg gehen. Formal gilt

$$\vec{E} = \nabla \phi_{el}. \tag{8.16}$$

Dabei bezeichnet ∇ den sogenannten Nabla - Operator oder die Divergenz . Der Nabla - Operator macht aus einer Funktion im Raum einen Vektor, und zwar via

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

8.6 Beispiel: Kondensatoren

Wir betrachten zwei gegensätzlich geladene Platten, siehe Fig. 8.7. Die obere Platte trägt die Flächenladungsdichte σ, die untere die Flächenladungsdichte $-\sigma$. Beide Platten erzeugen ein elektrisches Feld. Im Zwischenraum der Platten addieren sich die Felder, ausserhalb der Platten heben sie sich auf. Die Feldstärke im Zwischenraum beträgt:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{8.18}$$

(Wegen der Addition zweier Felder fällt die 2 im Nenner im Vergleich zu Gl. 8.9 weg!) Im folgenden werden wir die Feldstärke $E = |\vec{E}|$ in unseren Formeln benützen.

Das Feld ist zwischen den Platten überall gleich stark. Nehmen Sie an, der Abstand der Platten sei L. Wenn Sie sich auf geradem Weg von der oberen zur

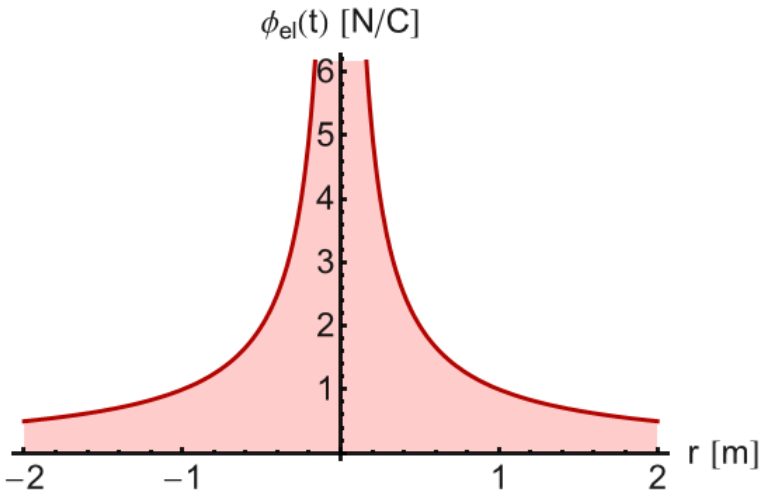


Abbildung 8.6: Elektrisches Potential einer positiven Ladung.

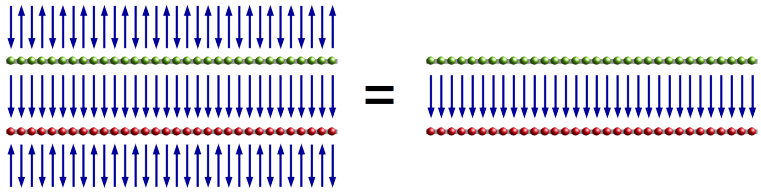


Abbildung 8.7: Elektrisches Potential einer positiven Ladung.

unteren Platte bewegen, ist das Integral in Gl. 8.13 einfach auszurechnen und die Spannung U wird zu

$$U = LE. \tag{8.19}$$

Das bedeutet

$$U = L\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{8.20}$$

Wenn die obere Platte die Ladung Q trägt und die Fläche A hat, wird daraus (σ ist die Ladung pro Fläche!)

$$U = L\frac{Q}{A\varepsilon_0}. \tag{8.21}$$

Dies können wir schreiben als

$$CU = Q. \tag{8.22}$$

Die konstante C heisst die Kapazität des Kondensators und wird in Farad angegeben. Für Plattenkondensatoren mit Fläche A und Abstand L gilt:

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{L}. \tag{8.23}$$

Selbstverständlich brauchen Sie Energie, um die beiden Platten aufzuladen. Auf den Slides ist gezeigt, das diese Energie gleich

$$E_{cond} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{8.24}$$

ist.

Elektromagnetische Kräfte
Die Lorentzkraft
Totale elektromagnetische Kraft
Das Prinzip des Elektromotors und des Generators
Generatoren
Motoren
Ströme und Magnetfelder
Das Magnetfeld eines Leiters
Das Faraday'sche Induktionsgesetz
Der Fluss eines Feldes
Das Faraday'sche Induktionsgesetz

9 — Magnetismus

Dieses Kapitel ist nur für BI erst im zweiten Semester relevant.

Magnetische Phänomene kennen wir alle, in gewissem Sinne sogar besser als elektrostatische Phänomene. Dies, weil wir alle Kühlschrankmagnete aus der Alltagserfahrung kennen. Die Kraft elektrisch geladener Objekte ist uns weniger vertraut, speziell wenn wir dem Wissenszweig des Abstaubens wenig Bedeutung zumessen. Magnetische Phänomene spielen aber an vielen Orten eine Rolle:

- Viele Speichermedien basieren auf magnetischen Phänomnen
- Das Erdmagnetfeld richtet nicht nur Kompassnadeln aus sondern schirmt auch Strahlung von der Sonne ab.
- Viele Analysemethoden und bildgebende Verfahren beruhen auf magnetischer Resonanz.
- Elektromagnetische Strahlung breitet sich aus aufgrund des komplexen Wechselspiels zwischen elektrischen und magnetischen Feldern.

Diese Liste liesse sich weiter fortsetzen.

Von unserem klassischen Standpunkt aus gesehen ist Magnetismus wesentlich schwerer zu verstehen als die elektrostatische Wechselwirkung. Insbesondere ist die Mathematik komplizierter. Dies ist allerdings zum Teil ein Problem unserer Betrachtungsweise:

- Viele Schwierigkeiten der Beschreibung magnetischer Phänomene verschwinden, wenn man eine relativistische Betrachtungsweise einnimmt. In der Tat wird die Elektrodynamik durch Hinzunahme der speziellen Relativitätstheorie viel einfacher und nicht etwa schwieriger[1].

[1] Es ist natürlich kein Zufall, dass eine der ganz wesentlichen Arbeiten des ehemaligen Techdozenten A. Einstein über die spezielle Relativitätstheorie den Titel SZur Elektrodynamik bewegter Körperträgt.

- Das magnetische Verhalten von Festkörpern kann nur durch Hinzunahme der Quantenmechanik verstanden werden. Viele elektrische Phänomene können ganz gut ohne Quantenmechanik verstanden werden.

Die Datenstruktur zur Beschreibung magnetischer Phänomene ist wieder ein Vektorfeld[2], das **magntische Feld** $\vec{B}$. Häufig spricht man auch vom magnetischen Fluss. Die Einheit des Magnetfeldes ist Tesla T (nach N. Tesla). Eine ältere Einheit lautet Gauss G. Es gilt $1T = 10^4 G$.

Unglücklicherweise spielt in der Theorie der Magnetfelder noch eine weitere Grösse eine Rolle, das Feld $\vec{H}$. Auch dieses Feld, welches vor Allem wenn es um magnetische Felder in Materialien geht eine Rolle spielt, nennt man magnetisches Feld[3]. Wir nennen hier beide Felder Magnetfelder, seien Sie aber nicht verwirrt, wenn Sie dies in einem Buch etwas anders lesen.

Grundsätzlich ist das $\vec{B}$-Feld vom Nordpol eines Magneten hin zum Südpol gerichtet, s. Fig.9.1.

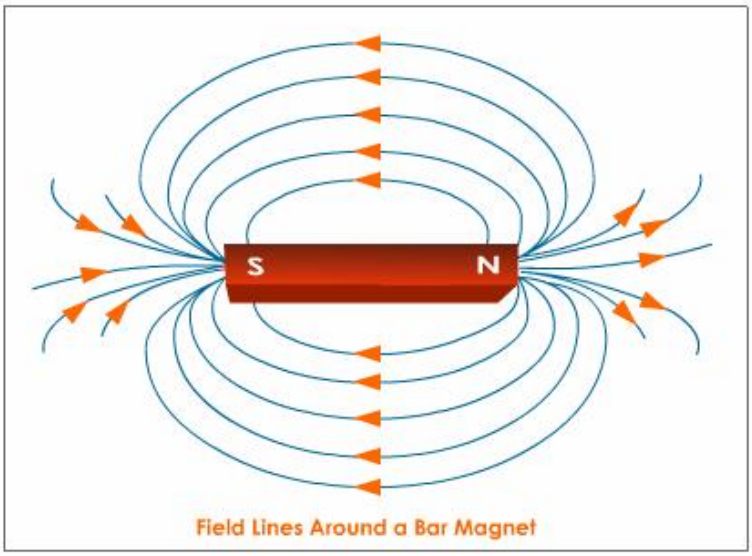


Abbildung 9.1: Magnetfeld eines Stabmagneten.

[2]Um gnaz genau zu sein: Das magnetische Feld wird durch einen sogenannten axialen oder Pseudovektor beschrieben, aber kümmern uns nicht um diese Tatsache. Von Zeit zu Zeit wundern wir uns über etwas eigenartige Vorzeichen, aber wir lassen es dabei bewenden. Das Problem ist: Eigentlich beschreiben die drei Komponenten des magnetischen Feldes die drei Off-diagonal - Komponenten eines Tensors.

[3]Fairerweise muss man sagen, dass $\vec{H}$ schon immer Magnetfeld hiess, das Feld $\vec{B}$ hiess früher magnetischer Fluss.

Context 9.1 Es wird Sie schon nicht mehr gross überraschen, dass selbstverständlich der Südpol des Erdmagnetfelds nicht etwa nahe am geographischen Südpol sondern selbstverständlich nahe des geographischen Nordpols liegt, s. Fig. 9.2.

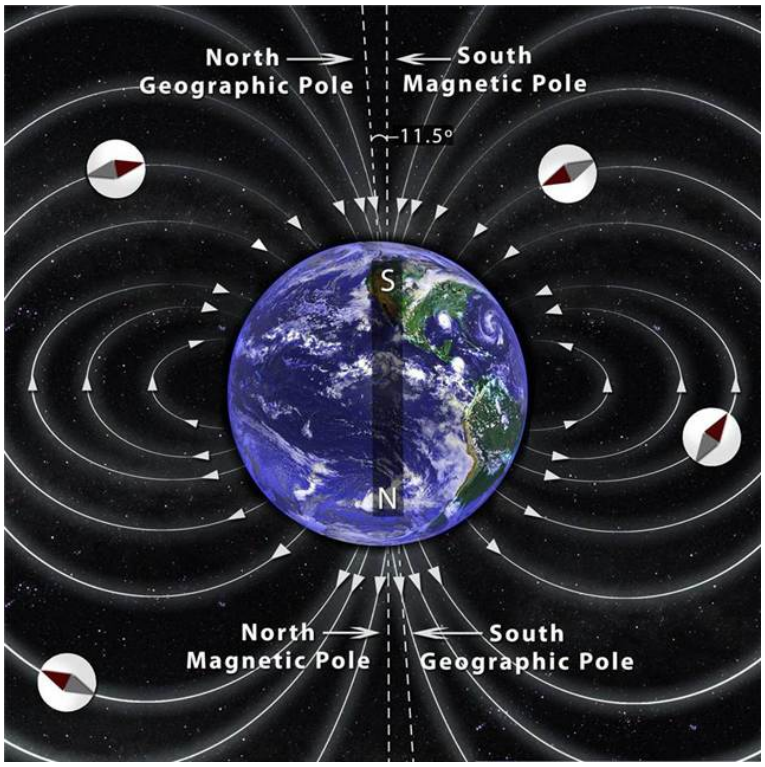


Abbildung 9.2: Magnetfeld der Erde (Image Credit: UC Berkeley).

Magnete haben "bekanntlichïmmer einen Nord- und einen Südpol. Dies bedeutet nichts anderes, als dass es keine magnetischen Ladungen gibt[4]. Etwas technischer ausgedrückt Es gibt magnetische Dipole, Quadrupole, Oktupole, ... aber keine Monopole.

Law 9.1 Es gibt keine magnetischen Ladungen, bzw. man hat sich Magnete immer als Anordnung von gleichviel positiven wie negativen magnetischen Ladungen vorzustellen.

[4] Allerdings wird immer wieder über deren Existenz spekuliert.

9.1 Elektromagnetische Kräfte

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Kräfte auf ein Punktteilchen mit Ladung q bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ und eines magnetischen Feldes $\vec{B}$. Die Felder können im Raum variieren; damit ist auch die wirkende Kraft nicht überall gleich.

Grundsätzlich gilt[5], dass die elektrostatische und die magnetische Kraft unabhängig voneinander berechnet und dann addiert werden können. Zur Erinnerung: In einem elektrischen Feld $\vec{E}$ wirkt die Kraft $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ auf ein Teilchen mit Ladung q.

9.1.1 Die Lorentzkraft

Eine der eigenartigsten Tatsachen über Magnetismus ist die Art und Weise, wie Magnetfelder auf Ladungen wirken. Dabei gilt die fundamentale Beobachtung:

Observation 9.1 Magnetfelder haben auf ruhende (Punkt-) Ladungen keinen Einfluss! Magnetfelder üben nur Kräfte auf bewegte Ladungen aus.

Diese Kräfte können wir quantifizieren. Magnetfelder führen zur sogenannten **Lorentztkraft** $\vec{F}_L$. Diese hat die Form:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{9.1}$$

Dabei bezeichnet $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens, q dessen Ladung, und $\vec{B}$ das herrschende Magnetfeld. Das Zeichen $\times$ bedeutet das Kreuzprodukt und ist definiert in Abschnitt 21.1.5.

Wir wissen, dass das Resultat des Kreuzprodukts immer senkrecht auf den Vektoren steht, aus denen es gebildet wird. Das bedeutet: Die Lorenzkraft steht sowohl senkrecht zum Magnetfeld $\vec{B}$ als auch senkrecht auf der Geschwindigkeit des Teilchens. Wenn Sie sich an das Kapitel über Mechanik erinnern, sehen Sie, dass die magnetische kraft also immer senkrecht zur Teilchenbahn steht. Das bedeutet dann:

Corollary 9.1 Die magnetische Kraft ändert die Richtung der Bewegung eines Teilchens, nicht aber dessen Schnelligkeit (und damit kinetische Energie. Magnetische Kräfte leisten, im Gegensatz zu elektrischen Kräften keine Arbeit. So etwas wie magnetische Spannung oder ein magnetisches Potential gibt es nicht.

[5] Und dies ist nicht trivial!

Context 9.2 Bemerkung: Wenn Sie die Elektrodynamik relativistisch aufschreiben, können Sie allerdings ein Potential formulieren, welches elektrische und magnetische Felder gleichzeitig beschreibt, das sogenannte Viererpotential[a].

[a] Natürlich müssen Sie das für die Prüfung nicht wissen.

■ **Example 9.1** **Zyklotronradius:** In teilchenphysikalischen Experimenten sehen Sie häufig Bilder wie in Fig. 9.3. Diese entstehen dadurch dass geladene Elementarteilchen mit einem Geschwindigkeitsvektor in der xy - Ebene in eine Kammer mit einer gesättigten Atmosphäre geschossen werden. In der Kammer herrscht ein Magnetfeld in z - Richtung. Das bedeutet: Die auf das Teilchen wirkende Kraft steht senkrecht auf der Geschwindigkeit und dem Magentfeld. Die Kraft liegt also auch wieder in der xy - Ebene. Gäbe es keine Reibung, würde das Teilchen eine Kraft erfahren, welche konstant in der Grösse und immer senkrecht zu seiner Bahn steht. Das würde bedeuten (s. Kapitel über Kinematik und Mechanik!) dass das Teilchen eine Kreisbahn beschreiben würde. Da es nun aber zu Stössen mit den Molekülen aus denen die Atmosphäre in der Kammer besteht, kommt, wird das Teilchen gebremst. Seine Trajektorie ist eine Spirale.

Wir vernachlässigen nun die Reibung und entnehmen der obigen Überlegung, dass die Bahn des Teilchens eine Kreisbahn ist. Wir überlegen uns, welchen Radius die Kreisbahn eines Elektrons mit Ladung $-e$ und Schnelligkeit v in einem zur Bahn senkrechten Magnetfeld der Stärke B hat. Wir nehmen dabei an, die Geschwindigkeit des Elektrons liege in der xy-Ebene und das $\vec{B}$ - Feld stehe senkrecht dazu. Die Situation ist illustriert in Fig. 9.4.

Aus der Kinematik wissen wir, dass ein Teilchen mit konstanter Schnelligkeit auf einer Kreisbahn in der xy - Ebene die Trajektorie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

beschreibt. Die Geschwindigkeit des Teilchens wird sein:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\omega t) \\ \omega r\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Die Beschleunigung des Teilchens ergibt sich zu:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\cos(\omega t) \\ -\omega^2 r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

(Dies haben Sie alles schon in der Kinematik gesehen, wir repetieren es hier). Das heisst also: Damit sich ein Teilchen mit einer Schnelligkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, muss eine radial nach innen gerichtete Kraft $\vec{F}_r = m\vec{a}$ mit dem Betrag

$$|\vec{F}_r| = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \tag{9.5}$$

wirken (S. die Beziehungen in Gls. 2.11). Nehmen Sie an, wir hätten ein Magnetfeld der Form

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

Nun haben wir

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = -e \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\omega t) \\ \omega r\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} \omega rB\cos(\omega t) \\ \omega rB\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

Es braucht aus kinematischen Gründen die Kraft $\vec{F}_r$, wir haben aus physikalischen Gründen die Kraft $\vec{F}_L$. Gleichsetzen ergibt:

$$m \begin{pmatrix} -\omega^2 r\cos(\omega t) \\ -\omega^2 r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} \omega rB\cos(\omega t) \\ \omega rB\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

Dies ist erfüllt, wenn

$$m\omega^2 r = e\omega rB. \tag{9.9}$$

Diese Gleichung ist interessant. Erstens bedeutet sie, wenn wir für die Schnelligkeit $v = \omega r$ einsetzen,

$$m\frac{v^2}{r} = evB. \tag{9.10}$$

Das bedeutet

$$r = \frac{mv}{eB}. \tag{9.11}$$

Wir können also bei gegebener Schnelligkeit, Feldstärke und Ladung eine einfache Beziehung zwischen schwer zu messender Masse eines Teilchens und leicht zu messendem Radius einer Teilchenbahn herstellen! Das ist natürlich wichtig für die Experimentalphysik und eine Möglichkeit, die Masse geladener Teichen zu bestimmen. Weiter können wir feststellen, dass die Kreisfrequenz ω folgende Beziehung erfüllt:

$$\omega = \frac{eB}{m}. \tag{9.12}$$

Die Zyklotronfrequenz ist also unabhängig von der Teilchenschnelligkeit und damit von der kinetischen Energie des Teilchens.

9.1.2 Totale elektromagnetische Kraft

Bei gleichzeitiger Anwesenheit von elektrischen und magnetischen Feldern wirkt auf ein Punktteilchen mit Ladung q folgende Kraft $\vec{F}_{elmag}$:

$$\vec{F}_{elmag} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{9.13}$$

9.2 Das Prinzip des Elektromotors und des Generators

Die Idee hinter Elektromotoren und Generatoren ist eigentlich relativ einfach: Wenn Sie ein magnetisches Feld haben und darin Ladungsträger bewegen, wirkt auf diese Ladungsträger eine Kraft. Der entscheidende Punkt ist: Drähte beinhalten freie Ladungsträger. Wenn auf die Ladungsträger eine Kraft parallel zum Draht wirkt, beginnt ein Strom zu fliessen (Prinzip Generator). Wenn auf die Ladungsträger eine Kraft senkrecht zum Draht wirkt, stossen die Elektronen an den Rand des Drahtes[6]. Damit übertragen sie Impuls auf den Draht und es wirkt eine Kraft.

9.2.1 Generatoren

Am besten veranschaulicht man sich die Sache anhand von Fig. 9.5. Wenn man den Draht senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur Ausrichtung des Drahtes bewegt, erhalten die freien Ladungsträger im Draht eine Geschwindigkeit senkrecht zum Draht. Die Lorentzkraft treibt die Ladungsträger dann in Richtung des Drahtes.

Etwas anders funktioniert der Generator in Fig. 9.6. Das Drehen der Leiter-

[6] Die Sache ist komplizierter, aber hier reicht dieses Bild.

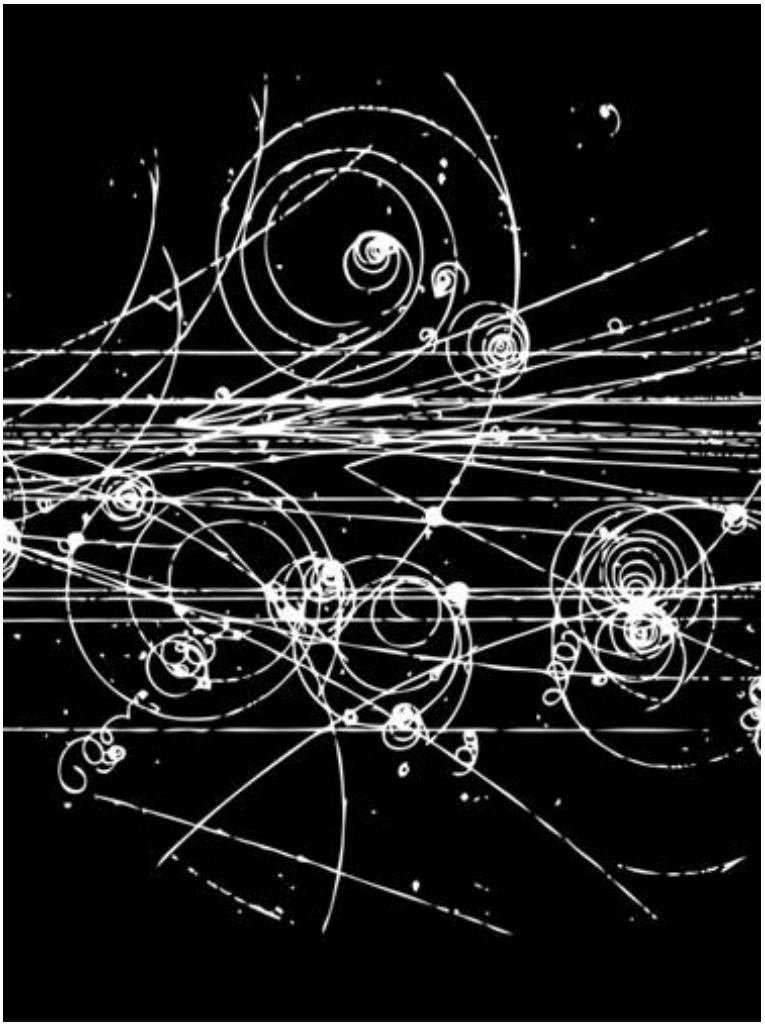


Abbildung 9.3: Teilchenspuren in einer Nebelkammer.

schlaufe bewegt die Elektronen senkrecht zur Drahtrichtung. In einem homogenen Magnetfeld entsteht ein Wechselstrom.

9.2.2 Motoren

Motoren kehren das Prinzip des Generators um. Eine Spannung treibt die Elektronen entlang des Drahtes. Ein Magnetfeld senkrecht zum Draht führt zu einer Kraft auf die Elektronen, welche senkrecht zum Draht steht. Da die Elektronen den Draht nicht verlassen können, übertragen sie durch Stösse Impuls auf den Draht. Dieser beginnt, sich zu bewegen. Man könnte hier viel rechnen. Wir möchten, dass Sie das Prinzip verstehen.

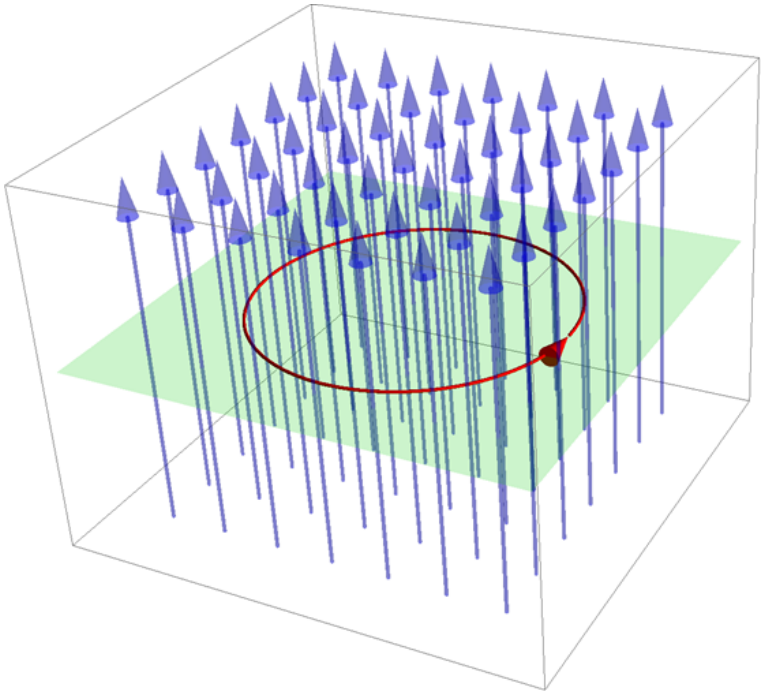


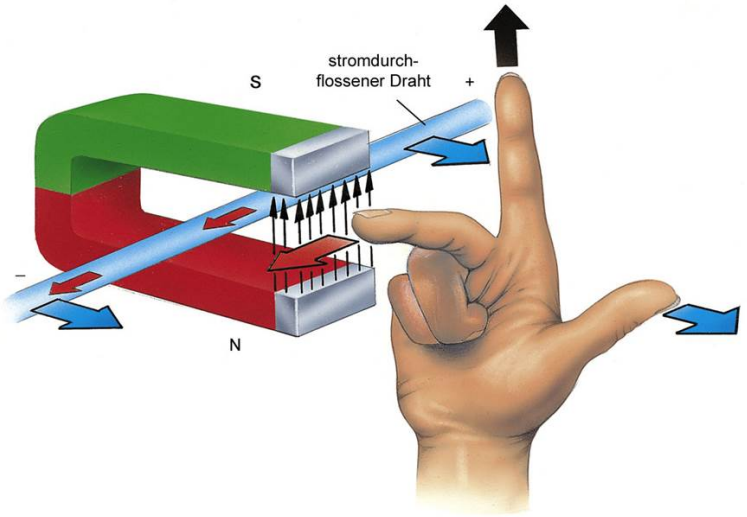
Abbildung 9.4: Teilchenspuren in einer Nebelkammer.

R Sie bekommen durch die gezeigten Beispiele einen Eindruck, warum es soviel einfacher ist, Wechselstrom zu erzeugen als Gleichstrom. Motoren kann man durch einen Trick einfach mit Gleichstrom betreiben. Achten Sie auf den Schleifer in Fig. 9.7!

9.3 Ströme und Magnetfelder

Magnetfelder können nicht nur durch die Platzierung magnetischer Materialien erzeugt werden. In der Tat erzeugen Ströme Magnetfelder. Man kann das durch einen Strom erzeugte Magnetfeld durch das Gesetz von Biot - Savart berechnen, das machen wir aber nicht, weil Sie wieder Linienintegrale berechnen müssten. Wir begnügen uns mit folgender Argumentation: Wir lernen, das Magnetfeld eines geraden, von einem Strom durchflossenen Leiters kennen. Wir (das heisst konkret: Sie) glauben (weil wir es Ihnen sagen), dass die Magnetfelder verschiedener Drähte sich addieren[7]. Wir glauben weiter, dass wir die Magnetfelder gebogener Drähte mehr oder weniger erahnen können.

[7] Hier würde es recht subtil, wenn wir genau hinschauen würden.



Die Rechte-Hand-Regel zeigt, wie Magnetfeld, Bewegungsrichtung eines stromdurchflossenen Leiters und Fließrichtung des Stroms zusammenhängen: Zeigt der Zeigefinger in Richtung der Magnetlinien (also zum Südpol) und der Daumen in die Bewegungsrichtung des Leiters, so zeigt der Mittelfinger an, wie der Strom fließt (technische Stromrichtung).

Aus: WAS IST WAS, Band 24, Elektrizität, Tessloff Verlag

Abbildung 9.5: Lineargenerator.

9.3.1 Das Magnetfeld eines Leiters

Ein gerader Draht ist von einem ringförmigen Magnetfeld umgeben, s. Fig. 9.8. Die Feldstärke (der Betrag von $\vec{B}$) nimmt mit zunehmender Entfernung $r_\perp$ vom Draht ab. Es gilt für einen Strom I (Illustration in Fig. 9.9)

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp}. \tag{9.14}$$

Dabei bezeichnet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}[Vs/Am]$ die sogenannte Vakuumpermeabilität, eine Naturkonstante. Für einen ringförmigen Strom ergibt sich dann ein Feld der Gestalt wie es in Fig. 9.10 dargestellt ist. Das Feld einer Spule kann man sich vorstellen als die Zusammensetzung der Felder vieler Ringströme, s. Fig. 9.11.

9.4 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Das Faraday'sche Induktionsgesetz zeigt Ihnen, warum bzw. wie zeitlich veränderliche Magnetfelder in einer Drahtschlaufe eine Spannung erzeugen können. Wir

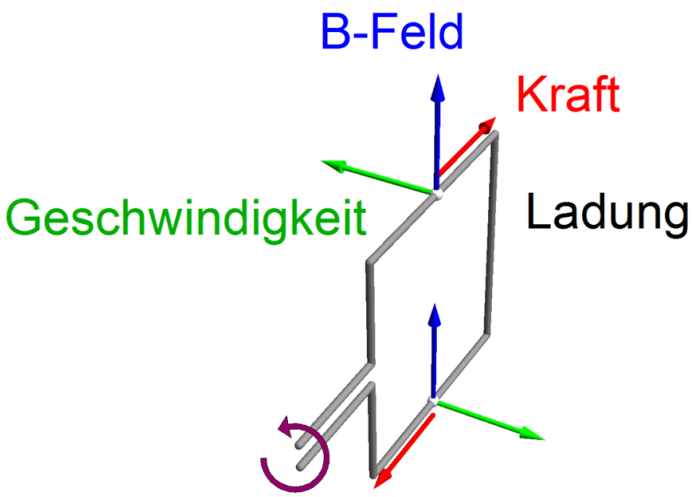


Abbildung 9.6: Generator.

brauchen, um es formulieren zu können, das Konzept des Flusses eines Feldes durch eine Schlaufe.

9.4.1 Der Fluss eines Feldes

An sich ist die Sache viel einfacher als sie aussieht.

Wir beginnen mit einer einfachen Frage. Nehmen Sie an, ein Feld, welches wir ohne jeden Hintergedanken $\vec{B}$ nennen, gebe die Fliessgeschwindigkeit von Wasser an. Weiter haben wir eine Schlaufe S der Fläche A. Die Frage ist: Wieviel Wasser wird durch die Schlaufe hindurchfliessen? Die Situation ist illustriert in Fig. 9.12. Falls die Fläche A senkrecht zum Feld der Grösse B steht, würde in einer Sekunde ein Volumen von AB durch die Schleife S fliessen. Falls S in einem Winkel θ zu $\vec{B}$ steht, wird ein Volumen von $AB\cos(\theta)$ durch S fliessen.

Nun charakteriesieren wir Schleifen auf eine besondere Art: Wir ordnen jeder Schleife einen Vektor $\vec{A}$. Dabei hat $\vec{A}$ zwei Eigenschaften:

- $\vec{A}$ steht senkrecht auf S.
- Der Betrag $|\vec{A}|$ entspricht der Fläche von S.

Wir definieren nun den Fluss Φ durch S durch die Beziehung:

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}. \tag{9.15}$$

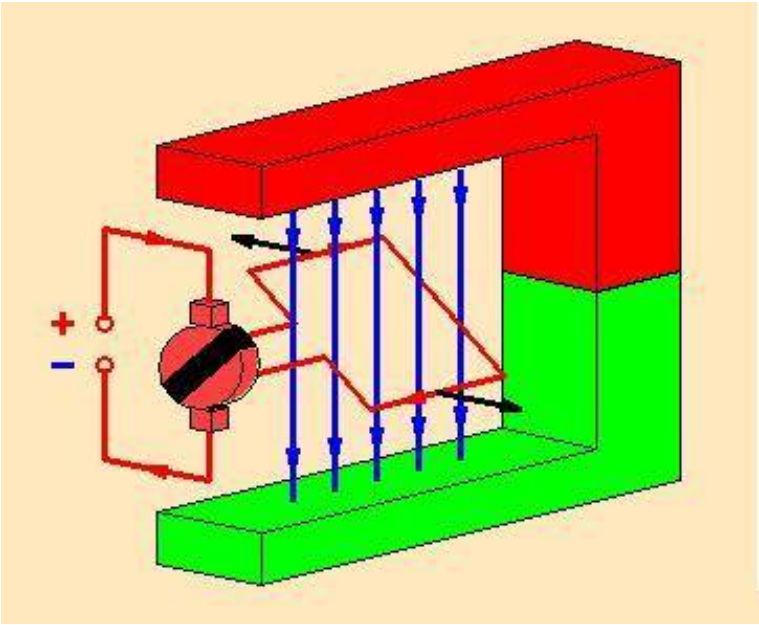


Abbildung 9.7: Elektromotor.

Ab jetzt hat das Feld $\vec{B}$ natürlich nichts mehr mit dem Fliessen von Wasser zu tun, sondern ist ganz einfach das Magnetfeld.

9.4.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Faraday beobachtete, dass wenn sich der magnetische Fluss durch eine Schlaufe ändert, eine Spannung U_{ind} induziert wird.

Law 9.2 **Faraday'sches Induktionsgesetz**: Für den durch einen wechselnden Fluss induzierte Spannung gilt:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.16}$$

Bei der Anwendung dieses Gesetzes ist es sehr wichtig zu sehen, dass der Fluss durch eine Fläche auf verschiedene Art und Weise geändert werden kann:

- Das Magnetfeld $\vec{B}$ kann sich in seiner Stärke ändern.
- Das Magnetfeld $\vec{B}$ kann seinen Winkel relativ zur Schlaufe ändern. Dadurch ändert sich Φ auch.
- Die Schlaufe kann gedreht werden und damit ihre Ausrichtung relativ zum Magnetfeld ändern.

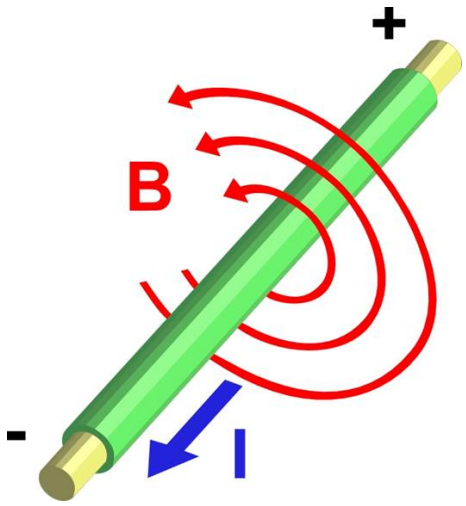


Abbildung 9.8: Gerader Draht mit Magnetfeld.

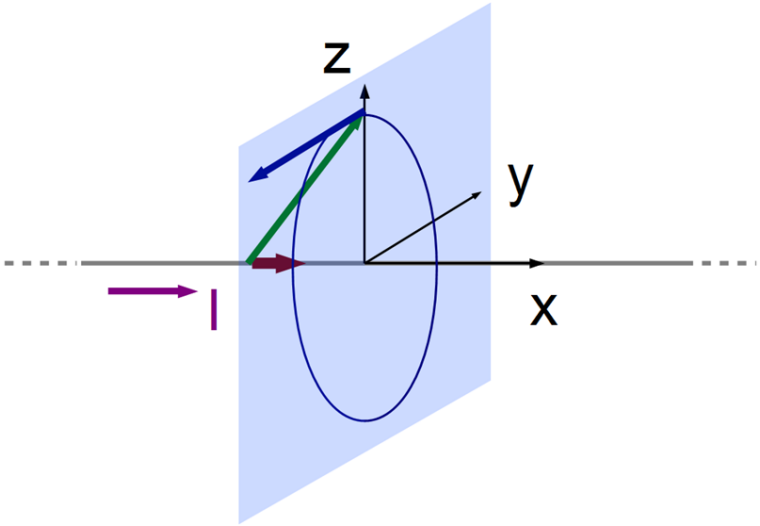


Abbildung 9.9: Anwendung des Gesetzes von Biot - Savart.

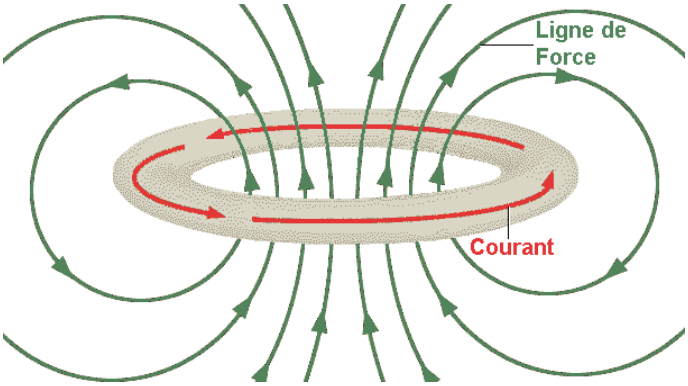


Abbildung 9.10: Feld eines Ringstroms.

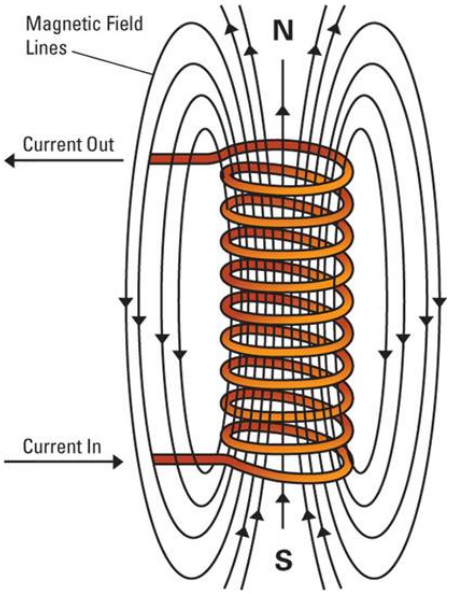


Abbildung 9.11: Feld einer Spule.

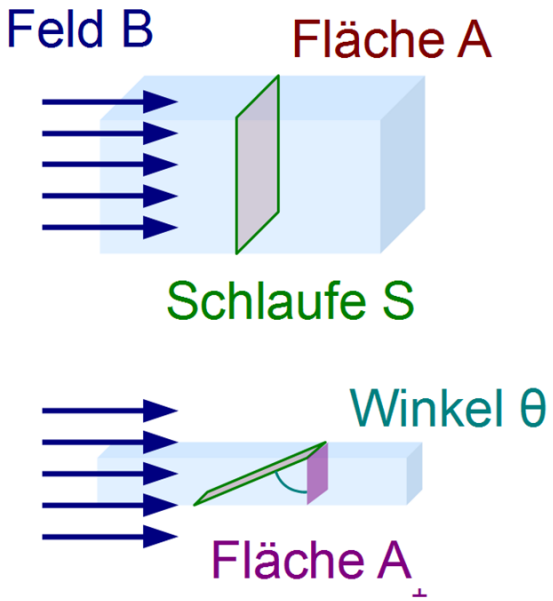
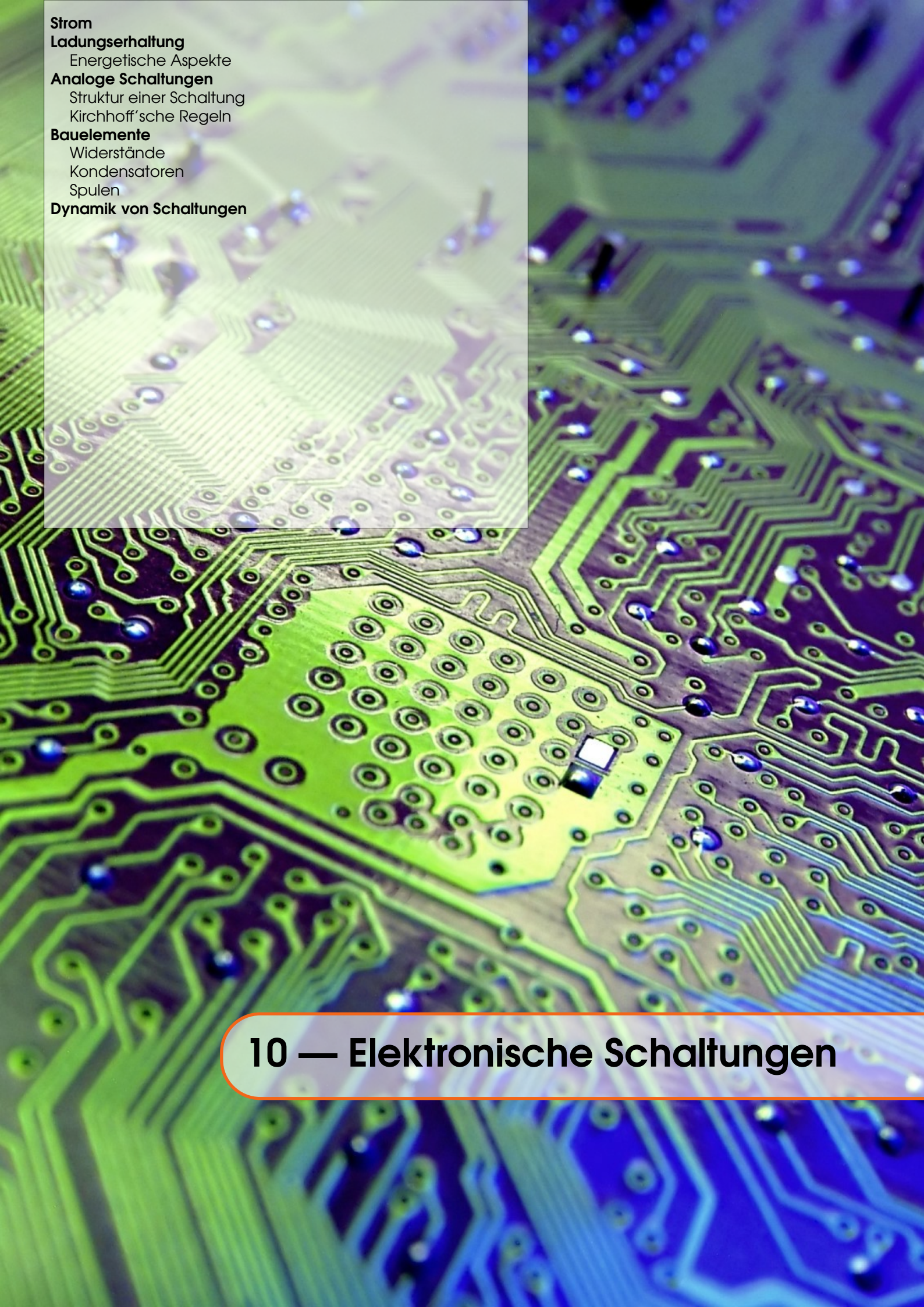


Abbildung 9.12: Fluss durch eine Fläche.

Strom
Ladungserhaltung
Energetische Aspekte
Analoge Schaltungen
Struktur einer Schaltung
Kirchhoff'sche Regeln
Bauelemente
Widerstände
Kondensatoren
Spulen
Dynamik von Schaltungen



10 — Elektronische Schaltungen

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

Konventionelle elektronische Schaltungen können aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden:

- **Die funktionale Perspektive:** Schaltungen werden als Systeme verstanden, welche Input in Outputsignale verwandeln.
  - Logische Schaltungen: Input ist eine Bitsequenz, welche auf eine Outputsequenz abgebildet wird.
  - Analoge Schaltung: Ein dynamisches Signal wird in ein Outputsignal transformiert.
- **Die dynamisch - physikalische Perspektive:** Schaltungen bestehen aus miteinander verbundenen physikalischen Elementen, welche, angeregt durch Spannungen und Ströme, ein bestimmtes dynamisches Verhalten zeigen. Dieses Verhalten kann zur Generierung eines Outputs verwendet werden.
- **Die energetische Perspektive:** Schaltungselemente sind immer auch Verbraucher, dh. Widerstände. Wieviel Leistung ein Gerät bezieht, das heisst, wie seine Strom – Spannungscharakteristik aussieht, ist weniger trivial, als es aussieht.Allgemein ist ein Grundverständnis von Schaltungen wichtig, um Geräte energetisch effizient designen zu können.

Die physikalische Perspektive offeriert noch keine Semantik, zeigt aber, wie ein System gebaut werden kann. **Sie brauchen die physikalische Perspektive, um eine funktionale Perspektive, einen Computer, Verstärker, usw. bauen zu können.**

Einige Bemerkungen:

- Digitale Schaltungen:

  - Computer sind meist als digitale Schaltungen realisiert.
  - Signale sind Bit-Sequenzen mit klar definierten Spannungswerten. Es gibt keinen (direkten) Noise, oder 0.8 – Bits.
  - Die Dynamik ist in der Zeit diskretisiert: Computer sind getaktet und (meist) synchronisiert.

- Analoge Schaltungen:
  - Die ersten Rechner waren Analogrechner.
  - Noch heute werden gewisse Steuerungen analog realisiert.
  - Signale sind Zeitreihen mit beliebigen (z.B. Spannungs-) Werten. Das Rauschen auf den Signalen spielt eine Rolle.
  - Die Dynamik der Schaltung ist kontinuierlich in der Zeit.

10.1 Strom

Zur Analyse elektronischer Schaltungen brauchen wir zwei Grössen: Spannung und Strom. Die erste kennen wir bereits, die zweite führen wir jetzt ein.

Definition 10.1 Unter einem (Ladungs-) Strom verstehen wir einen gerichteten Transport von Ladungsträgern. Im Falle eines Drahtes geben wir an, wieviele Ladungsträger pro Sekunde durch eine (virtuelle) Querschnittsfläche im Draht hindurch treten. Die Einheit des Stroms ist Ampere $[A] = [C/s]$. Beachten Sie: Das C in dieser Beziehung steht für Coulomb", der Einheit der Ladung, und hat mit der Kapazität nichts zu tun.

Leider ergeben sich bei dieser Definition aus historischen Gründen zwei Schwierigkeiten:

1. Die technische Stromrichtung beschreibt den Stromfluss positiver Ladungsträger. Erst nachdem sich diese Festlegung eingebürgert hat, stellte man fest, dass die Ladungen, welche in Leitern transportiert werden, (meist) negativ geladen sind. Das heisst: Die physikalische Stromrichtung verstanden als Fliessrichtung der Ladungsträger ist der technischen Stromrichtung entgegengesetzt. **Wenn wir von Stromrichtungen reden, reden wir immer von der technischen Stromrichtung.**

2. Gerne stellt man sich einen Strom als Fluss von Kügelchen vor. Dies ist nicht ganz falsch, stimmt aber auch nicht ganz. Elektronen in Metallen sind keine Kügelchen, auch wenn sie sich manchmal wie solche verhalten.

10.2 Ladungserhaltung

Eines der fundamentalen Gesetze der Physik besagt, dass die Gesamtladung in physikalischen Prozessen erhalten ist[1]. Nehmen wir an, wir hätten ein Raumvolumen V und geben die Ladung darin mit einer Funktion $Q(t)$ an. Der Strom I gibt den Ladungsfluss in das Volumen V an, beschreibt also die Veränderungsrate von Q (natürlich kann I auch negativ sein, dann beschreibt I den Ladungsabfluss). Es gilt also:

$$\frac{dQ}{dt} = I. \tag{10.1}$$

Beachten Sie: I ist hier ein Gesamtstrom, welcher aus diversen Teilströmen zusammengesetzt werden kann. Ladungserhaltung sagt Ihnen im Wesentlichen, dass die Veränderung des Ladungsinhalts eines Volumens V nur durch Zu- oder Abflüsse geschehen kann, nie aber durch Ladungserzeugung. Ströme werden durch Spannungen angetrieben.

10.2.1 Energetische Aspekte

Wir haben im letzten Kapitel dargelegt, dass wenn eine Ladung Q ein Potential U "hinunterfällt"die potentielle Energie $E_{pot} = UQ = E_{\text{freigesetzt}}$ freigesetzt wird. Damit ergibt sich nun für Diesen Ausdruck können wir nun nach der Zeit ableiten und erhalten (wenn wir U als konstant ansehen):

$$\frac{dE_{\text{freigesetzt}}}{dt} = \frac{d}{dt}(UQ) = \frac{dU}{dt}Q + U\frac{dQ}{dt} = UI \tag{10.2}$$

Da die freigesetzt Energie pro Zeit gleich der Leistung P ist ergibt sich (wieder einmal):

$$P = UI. \tag{10.3}$$

10.3 Analoge Schaltungen

Zuerst untersuchen wir Schaltungen ohne digitale Elemente. Spannungen und Ströme können (im Prinzip) beliebige Werte annehmen, und unsere Hauptfrage ist immer, wie gross die Spannung über, bzw. der Strom durch irgendein Element der Schaltung ist. Technisch gesehen haben wir meist ein zeitlich moduliertes Antriebssignal (die SSpannungsquelleöder das Inputsignal) und greifen irgendwo in der Schaltung ein Outputsignal ab. Zuerst werden wir uns mit sehr einfachen, d.h.

[1] Dies schliesst nicht aus, dass in einem Teilchenbeschleuniger geladene Teilchen erzeugt oder vernichtet werden. Dies muss einfach immer paarweise geschehen. Für jede positive erzeugte Ladung muss auch eine negative entstehen.

konstanten Inputsignalen beschäftigen. Wenn wir verstehen, wie eine Schaltung auf solche Signale reagiert, können wir auch kompliziertere Situationen erfassen.

Im Folgenden werden wir Widerstände, Kondensatoren, Drähte und Spulen untersuchen. Dabei werden wir ïdeale"Bauelemente voraussetzen. Das heisst: Drähte haben keinen Innenwiderstand, Widerstände keine Kapazität usw. Natürlich gibt es in der Realität keine wirklich idealen Bauelemente; allerdings gelingt der heutigen Fertigungstechnik, nahezu ideale Elemente zu herzustellen. Dies gilt nicht ganz einfach; selbstverständlich soll ein Kondensator einen möglichst geringen Innenwiderstand haben. Aber auch Eigenschaften wie z.B. dass ein Widerstand dem Ohm'schen Gesetz gehorcht, also für einen möglichst breiten Parameterbereich eine lineare Strom - Spannungscharakteristik aufweist, ist das Resultat ausgereifter Produktionsverfahren.

10.3.1 Struktur einer Schaltung

Die von uns untersuchten Analogschaltungen haben alle eine Struktur wie die Schaltung abgebildet in Fig. 10.1. Dabei repräsentieren die hellblauen Kästchen Bauelemente (Konkret: Widerstände, Kondensatoren, Spulen und Dioden). Die schwarzen Linien stehen sind als Drähte zu interpretieren. Dabei gilt:

- Drähte sind widerstandsfrei.
- Alle Bauelemente haben einen Ein- und einen Ausgang (Das muss nicht so sein, wir beschränken uns aber vorerst auf solche Bauteile).

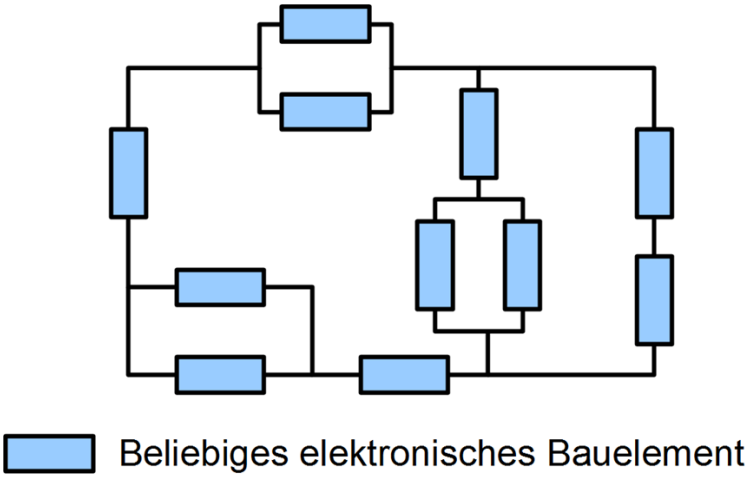


Abbildung 10.1: Struktur einer Analogschaltung.

Über allen Bauteilen fällt eine Spannung ab. Dies ist illustriert in Fig. 10.2. Die Richtungen der Spannungspfeile geben die Referenzrichtung der Spannung an.

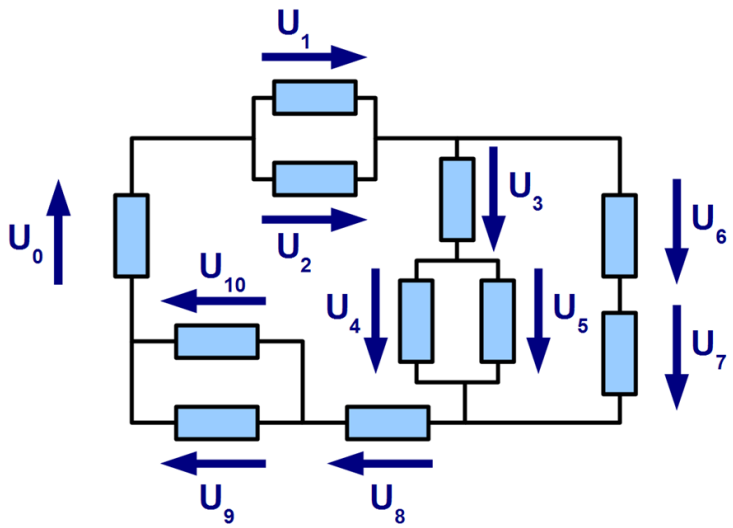


Abbildung 10.2: Spannungen in einer Analogschaltung.

Selbstverständlich sind negative Spannungen möglich. Beachten Sie: Da wir Drähte als widerstandsfrei annehmen, fällt über den Drähten keine Spannung ab[2]

Durch alle Bauteile und durch alle Drähte fliesst ein Strom. Dies ist illustriert in Fig. 10.3. Entscheidend dabei ist folgende Tatsache: Jedes Stück Draht trägt einen bestimmten Strom. Dabei bedeutet SStück Drahtëin Draht ohne Knoten, d.h. ein Stück im Netzwerk in Fig. 10.1, welches entweder zwei Kreuzungspunkte, ein Bauelement und einen Kreuzungspunkt oder zwei Bauelemente miteinander verbindet und selber nicht durch einen Kreuzungspunkt oder ein Bauelement unterbrochen wird.

R Wenn Sie eine Schaltung analysieren, besteht der erste Schritt darin, alle Spannungen und Ströme einzuzeichnen.

Wir werden in dieser Vorlesung folgende Konventionen verwenden (s. Fig. 10.4):

- Es ist sinnvoll (aber nicht zwingend), die Richtung des Stroms in Richtung des Spannungsgefälles zu legen. Wir werden das in Zukunft für alle Schaltelemente ausser Spannungsquellen wenn immer möglich so machen[3]. Nur dann gilt z.B. das Ohm'sche Gesetz in der Form $U = RI$.

[2]Wir nehmen, als Näherung, an, es brauche keine Energie, Ladungsträger durch Drähte zu transportieren.

[3]Leider kann man Situationen konstruieren, wo das nicht geht

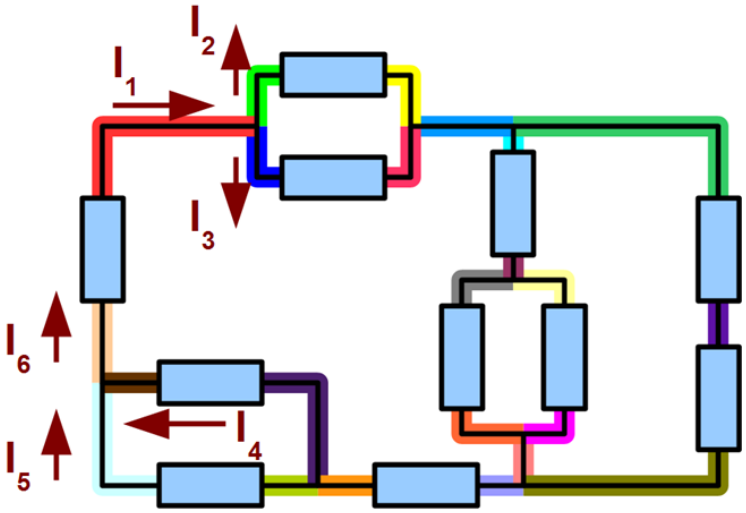


Abbildung 10.3: Ströme in einer Analogschaltung.

- Alle Komponenten haben einen Inputstrom und einen Outputstrom. Beide zeigen (bezüglich der Komponente) in dieselbe Richtung.
- Für Spannungsquellen ist die Spannungsrichtung der Stromrichtung entgegengesetzt, für alle anderen Komponenten setzen wir die Spannungsrichtung gleich der Stromrichtung, wenn immer dies möglich ist.
- In den von uns untersuchten Schaltungen ist der Inputstrom immer gleich gross wie der Outputstrom.

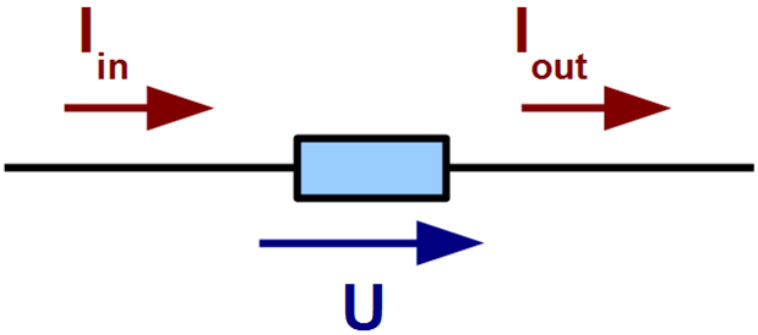


Abbildung 10.4: Konventionen über Referenzrichtungen.

10.3.2 Kirchhoff'sche Regeln

Ein Punkt, in welchem mehrere Drähte zusammenkommen, heisst ein Knoten, siehe Fig. 10.5 . Wegen der Ladungserhaltung muss die Summe der eingehenden Ströme minus der Summe der wegfliessenden Ströme gleich null sein. Unter

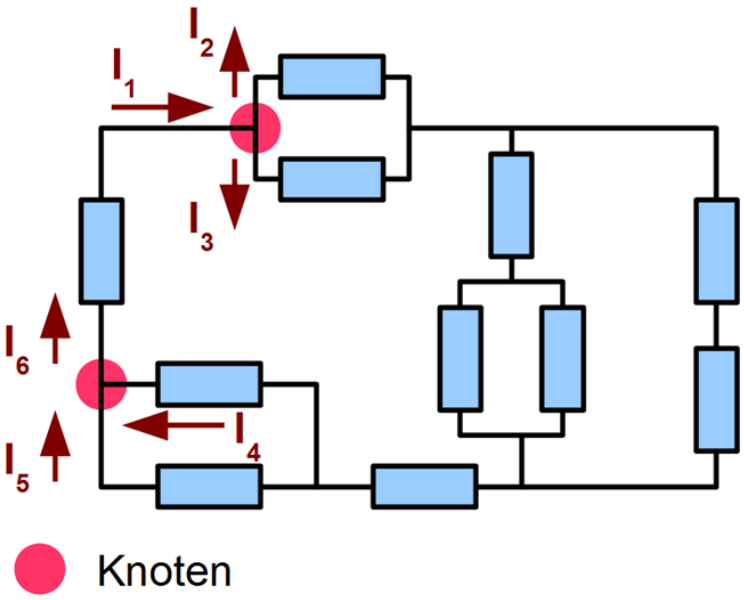


Abbildung 10.5: Illustration zur Knotenregel.

Berücksichtigung der Fliessrichtung gilt die Knotenregel:

$$\sum_{incoming} I_i - \sum_{outgoing} I_k = 0. \tag{10.4}$$

Neben der Knotenregel gilt die Schleifenregel (s. Fig. 10.6):

$$\sum_{parallel} U_i - \sum_{antiparallel} U_k = 0. \tag{10.5}$$

Diese Regel besagt im Wesentlichen, dass die Summe der Spannungen entlang einer beliebigen Schlaufe in einer Schaltung gleich null ist, wobei eine Spannung positiv zu zählen ist, wenn man sich entlang des Spannungspfeils bewegt, sonst negativ. Bemerkungen:

- Die Knotenregel basiert auf der Ladungserhaltung und gilt strikte immer.
- Die Maschenregel basiert auf der Energieerhaltung. Zwar ist die Energie immer erhalten; sie kann aber vermittels elektromagnetischer Felder ab- und zugeführt werden. Die Maschenregel gilt nur, solange keine zeitlich veränderlichen äusseren Felder auftreten (bzw. eine wichtige Rolle spielen)!

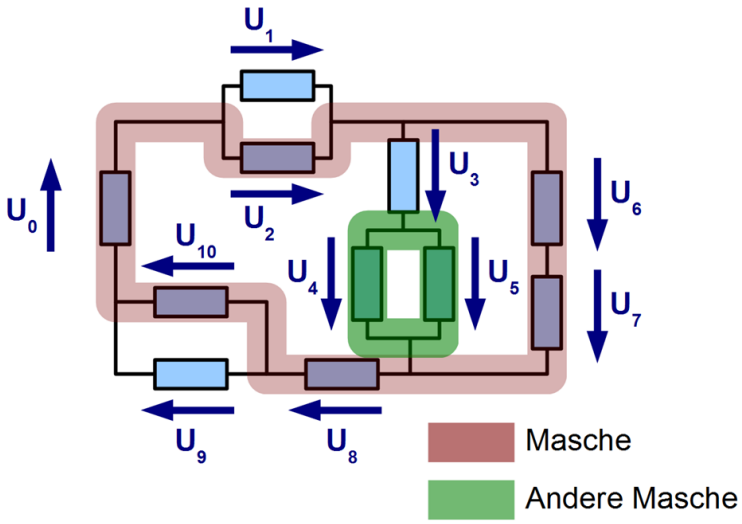


Abbildung 10.6: Illustration zur Schleifenregel.

10.4 Bauelemente

10.4.1 Widerstände

Über einem Widerstand fällt eine Spannung ab. Die Energie, die die Ladungsträger durch das Durchlaufen einer Spannung gewinnen ($E_{\text{freigesetzt}} = QU$) wird im Widerstand entweder in Wärme oder in Nutzleistung verwandelt.

R Sie kennen Widertände als kleine Bauelemente. Elektrotechnisch gesehen sind aber auch Motoren, Waschmaschinen, Kaffeemaschinen, Laptops etc. in erster Linie Widerstände.

Widerstände in elektronischen Schaltungen sind so konstruiert, dass sie in einem sehr breiten Bereich von Spannungen und Stromstärken dem Ohm'schen Gesetz folgen.

Law 10.1 Für technische Widerstände gilt zumindest in guter Näherung:

$$U = RI \tag{10.6}$$

Dabei bezeichnet I den Strom durch den Widerstand, U die Spannung über dem Widerstand, und R ist eine konstante Grösse, der sogenannte Widerstand. Der Widerstand R hat eine eigene Einheit, das Ohm Ω.

Bemerkungen:

- Widerstände sind in der Regel temperaturabhängig. Speziell für den Innenwiderstand leitender Materialien (den wir ja vernachlässigen) gilt, dass er mit steigender Temperatur ansteigt.
- Der Widerstand von Halbleitern sinkt mit steigender Temperatur.
- Es gibt Materialien, welche gar keinen Widerstand aufweisen (Supraleiter).

10.4.2 Kondensatoren

Kondensatoren, als Systeme bestehend aus nahe beieinander liegenden Leiterplatten, haben wir bereits kennengelernt. Wenn die eine Platte mit einer Ladung Q bestückt ist und ihr Gegenüber die Ladung $-Q$ trägt, dann gilt für die Spannung U:

$$CU = Q \tag{10.7}$$

Dies ist illustriert in Fig. 10.7. Kondensatoren können verstanden werden als zwei

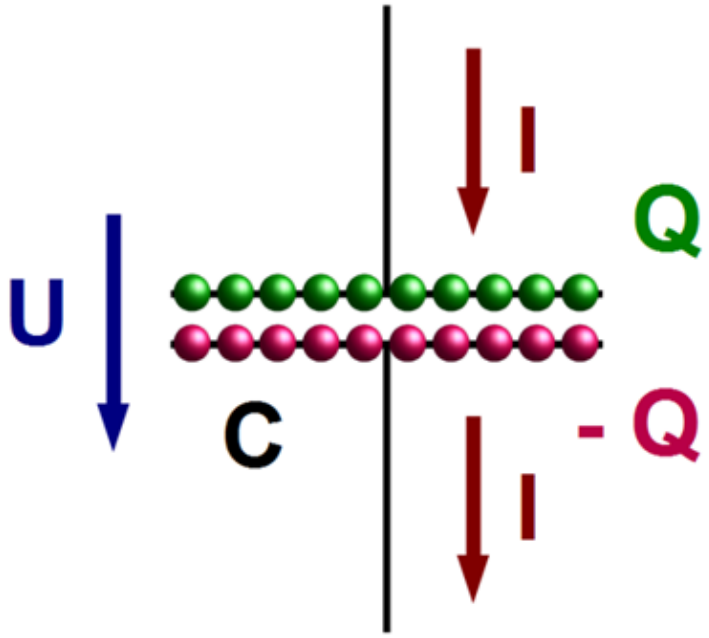


Abbildung 10.7: Kondensator.

gekoppelte Ladungsspeicher. Eine Platte trägt die Ladung Q, die andere Platte die Ladung $-Q$. Deshalb tut man gerne so, als wie wenn ein Kondensator nur eine Sorte Ladung speichern würde und beschränkt sich in der Beschreibung auf diese.

Für Kondensatoren gibt es einen Zusammenhang zwischen der Ladung auf der Platte, zu welcher ein Strom hinführt und der Ladung in dieser Platte:

$$\frac{dQ}{dt} = I \tag{10.8}$$

Diese Beziehung gilt, wenn die Referenzrichtung der Ladung gleich derjenigen des Strom ist. Sind die Referenzrichtungen von Strom und Spannung antiparallel, ist die Veränderungsrate der Ladung gleich dem negativen des Stroms.

10.4.3 Spulen

Im Abschnitt 9.3 haben wir gesehen, dass stromdurchflossene Leiter von Magnetfeldern umgeben sind. Nehmen Sie nun an, Sie hätten einen Leiter ohne Strom und würden den Strom zum Zeitpunkt $t = 0$ einschalten. Für $t < 0$ haben Sie kein Magnetfeld. Nun verhält es sich so, dass der Aufbau des zum stromdurchflossenen Leiters gehörenden Magnetfeldes eine gewisse Zeit vergeht. Mit anderen Worten: Wenn Strom durch eine Spule fliesst, kann der Strom nicht einfach in beliebig kurzer Zeit von null auf einen Zielwert springen, sondern man braucht eine gewisse Änlaufzeit". Stellen Sie sich das vor wie eine Autokolonne vor einem Rotlicht. Wenn die Ampel auf Grün schaltet, fahren die Autos auch nicht sofort mit der maximal erlaubten Geschwindigkeit, sondern die Kolonne setzt sich langsam in Bewegung.

Physikalisch bedeutet dies, dass die Spule einem **sich ändernden** Strom einen (nicht - ohmschen) Widerstand entgegensetzt.[4] Über idealen Spulen fällt eine Spannung U_L ab:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} \tag{10.9}$$

Dabei bezeichnet I den durch die Spule fliessenden Strom und L die **Induktivität**. Die Induktivität einer Spule betrachten wir als Konstante, welche in der Einheit **Henry** angegeben wird.

R Beachten Sie: Wenn Sie den Strom durch eine Spule erhöhen, wirkt die Spule als (nicht - ohmscher) Widerstand. Wird der Strom allerdings reduziert, wirkt die Spule als Spannungsquelle. Man kann dieses Verhalten energetisch verstehen. Die Erhöhung des Stroms durch eine Spule führt zu einer Verstärkung des Magnetfeldes der Spule. Das

[4] Natürlich hat eine reale Spule, als sehr langer Draht, auch einen ganz gewöhnlichen Ohm'schen Widerstand. Da wir aber mit idealen Schaltelementen arbeiten, berücksichtigen wir diesen nicht. Oder besser gesagt: Wenn wir eine reale Spule behandeln, betrachten wir diese als Serieschaltung eines idealen Widerstands und einer idealen Spule.

braucht Energie; daher wirkt die Spule während des Aufbaus des Feldes (also während der Zeit, in welcher der Strom erhöht wird) als Widerstand. Umgekehrt gilt: Wenn Sie den Strom senken, wird das die Spule umgebende Magnetfeld schwächer. Dadurch wird Energie freigesetzt; die Spule wirkt (während der Strom sinkt) als Spannungsquelle.

10.5 Dynamik von Schaltungen

Ein sehr wichtiges Ziel der gesamten Vorlesung ist es, Ihnen die Fähigkeit zu vermitteln, nicht nur Zustände, sondern Prozesse berechnen zu können. Das heisst zum Beispiel: Sie sollen in der Lage sein, den zeitlichen Verlauf der Spannung $U_C(t)$ über einem Kondensator berechnen zu können, wenn Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung über einer Spannungsquelle $U_S(t)$ kennen. Eine Möglichkeit, Schaltungen zu betrachten, ist, sie als SSignalwander", welche ein Signal $U_S(t)$ in ein Signal $U_C(t)$ verwandeln zu verstehen.

In den File `How\_to\_solve\_electronics\_problems.pdf` ist ausführlich dargelegt, wie man Schaltungen analysiert. Irgendwann werde ich dieses File hier integrieren. Der Inhalt dieses Files sollten Sie kennen bis auf den Teil über Zeitkonstanten.

11 — Wechselspannung

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

Bis anhin konzentrierten uns auf Schaltungen, welche meist durch eine konstante Gleichspannung versorgt wurden. Technisch ebenso wichtig sind Wechselspannungen[1]

Eine Wechselspannung $U(t)$ ist definiert als Spannung der Form:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi). \tag{11.1}$$

Dabei bezeichnet U_0 die Amplitude, ω die (Kreis-)frequenz und ϕ die Phase der Spannung. Diese Begriffe werden im Kapitel über Schwingungen noch ausführlicher diskutiert.

Nun liest man ja oft, man habe es mit einer Wechselspannung von 230 V zu tun. Die Spannung in Gl. 11.1 variiert aber. Man könnte nun einfach die Amplitude U_0 angeben. Leider wählte man einen schwierigeren Weg und verwendet bei Spannungsangaben den sog. root - mean - square - Wert. Konkret heisst dies: Die Nennspannung U_N, also das, was Sie auf der Gerätebeschreibung lesen, verhält sich zur Amplitude U_0 wie folgt:

$$U_N = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \tag{11.2}$$

Letztendlich ist das ein technisches Detail ohne wirkliche Relevanz aber als Konvention wichtig.

11.1 Transformatoren

Einer der wesentlichen Vorteile von Wechselstrom ist, dass er gut transformiert"werden kann. Dabei geht es darum, eine Wechselspannung der Amplitude U_1 und der Strom-

[1] Es ist sinnvoll, die Terminologie auch auf Englisch zu kennen. Wechselstrom heisst auf Englisch älternating currentünd wird mit ÄCäbgekürzt. Gleichstrom heisst "direct current", die zugehörige Abkürzung ist "DC".

stärke I_1 in eine Spannung der der Amplitude U_2 und der Stärke I_2 zu verwandeln. Das Prinzip dieser Transformation ist erläutert in Fig. 11.1. Auf der linken Seite durchfliesst ein Wechselstrom[2] eine Spule mit N_1 Windungen. Wir wissen, dass die Spule dadurch von einem Magnetfeld umgeben wird, dessen Stärke vom Strom und der Anzahl Windungen abhängt. Aus Gründen, die wir in dieser Vorlesung nicht diskutiert haben, konzentrieren sich die Magnetfeldlinien fast ausschliesslich im Eisenkern. Die Magnetfeldlinien durchdringen also auf der rechten Seite eine Spule mit N_2 Windungen. Der Punkt ist nun: Da es sich um einen Wechselstrom handelt, ändert sich das auf der linken Seite erzeugte Magnetfeld. Auf der rechten Seite haben wir dann einen zeitlich variablen magnetischen Fluss durch eine Spule und damit nach dem Faraday'schen Gesetz eine induzierte Spannung.

Wenn wir annehmen (dies ist nur näherungsweise wahr), dass die Leistung $P = UI$ auf beiden Seiten gleich gross ist erhalten wir für das Verhältnis der Inputspannung U_1 zur Outputspannung U_2:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{11.3}$$

Für die Ströme gilt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{11.4}$$

[2] "Wechselstromünd "Wechselspannung"werden oft synonym gebraucht. Hier verstehen wir unter einem Wechselstrom den zu einer Wechselspannung gehörenden Strom.

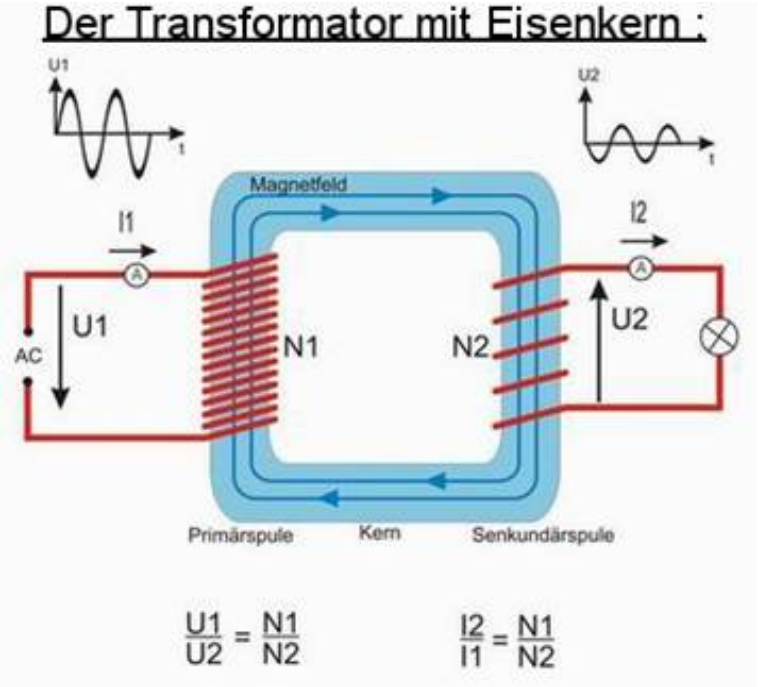
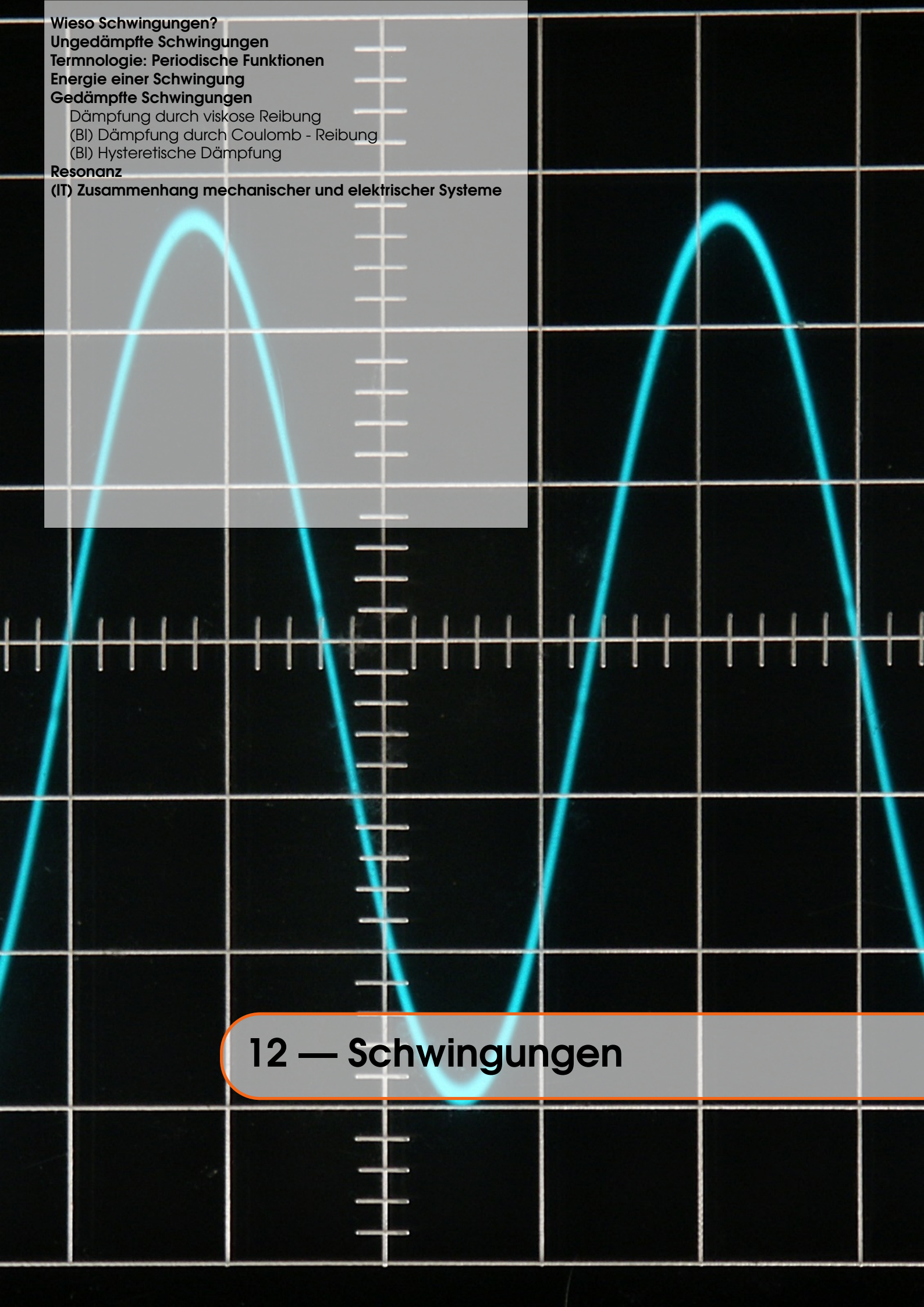


Abbildung 11.1: Transformator.

Wieso Schwingungen?
Ungedämpfte Schwingungen
Termnologie: Periodische Funktionen
Energie einer Schwingung
Gedämpfte Schwingungen
Dämpfung durch viskose Reibung
(BI) Dämpfung durch Coulomb - Reibung
(BI) Hysteretische Dämpfung
Resonanz
(IT) Zusammenhang mechanischer und elektrischer Systeme



12 — Schwingungen

12.1 Wieso Schwingungen?

Schwingungsvorgänge sind in Natur und Technik weitverbreitet. Der Grund dafür ist relativ allgemein. Wir illustrieren und diskutieren diesen im Folgenden für eindimensionale Systeme weil diese mathematisch einfacher zu erfassen sind. Alles, was wir hier zeigen, lässt sich aber auf mehrdimensionale Systeme verallgemeinern.

Der entscheidende Punkt ist: Systeme können durch Potentiale, bzw. potentielle Energien beschrieben werden. Dabei wird die potentielle Energie als Funktion der jeweiligen Freiheitsgrade (z.B. Ortskoordinaten) des Systems angegeben. Der Zustand mit der tiefsten potentiellen Energie ist ein Gleichgewichtszustand des Systems, also derjenige Zustand, den das System annehmen wird[1]. Nun sind Systeme wie z.B. Festkörper meist im Gleichgewicht, und wir interessieren uns nicht so sehr für deren allgemeines Verhalten sondern dafür, was passiert, wenn wir sie ein wenig aus dem Gleichgewicht bringen. Ein Beispiel ist: Was passiert, wenn wir einen Festkörper ein bisschen zusammendrücken oder durch elektromagnetische Felder (z.B. Licht) die Ladungsverteilungen ein bisschen verschieben? Das genaue Verhalten vorherzusagen ist schwierig, aber die potentielle Energie kann um die Gleichgewichtslage herum durch eine Parabel angenähert werden, siehe Fig. 12.1. Etwas mathematischer ausgedrückt: Sei x_{Ruhe} ein Minimum der potentiellen Energie $U(x)$. Dann kann man $U(x)$ um x_{Ruhe} in einer Taylorreihe entwickeln und erhält:

$$U(x) \approx U(x_{\text{Ruhe}}) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{\text{Ruhe}}} (x - x_{\text{Ruhe}}) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{Ruhe}}} (x - x_{\text{Ruhe}})^2. \quad (12.1)$$

Da wir annehmen, $U(x)$ habe bei x_{Ruhe} ein Minimum, gilt dass die Tangente an U in x_{Ruhe} horizontal ist, also $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{\text{Ruhe}}} = 0$. Um die Notation zu vereinfachen,

[1] Die Berücksichtigung thermischer Fluktuationen macht die Sache etwas komplizierter, ändert aber an den Grundaussagen nicht viel (und nichts, das Sie wissen müssen. Strenggenommen gilt die Aussage aber nur für makroskopische Systeme oder Systeme, die sich wie solche verhalten.

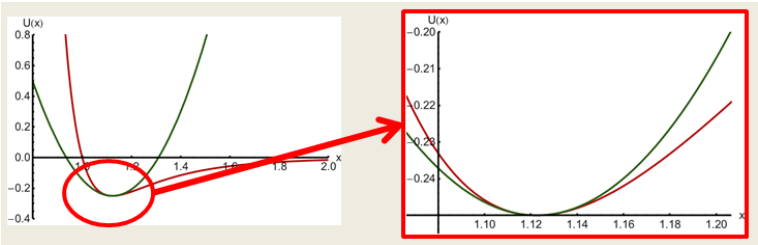


Abbildung 12.1: Approximation eines allgemeinen Potentials (rot) durch eine Parabel (grün).

nennen wir $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{Ruhe}}} = k$. Damit wird Gl. 12.1 zu:

$$U(x) \approx U(x_{\text{Ruhe}}) + \frac{k}{2}(x - x_{\text{Ruhe}})^2. \tag{12.2}$$

Aus der Mechanik wissen wir, dass die Kraft in einem eindimensionalen mechanischen System gegeben ist durch:

$$F = -\frac{dU}{dx}. \tag{12.3}$$

Für die angenäherte potentielle Energie in Gl. 12.2 gilt dann:

$$F \approx -k(x - x_{\text{Ruhe}}). \tag{12.4}$$

Im Weiteren werden wir so tun, als wie wenn die Approximation schon die ganze Realität wiedergeben würde. In der Tat sind z.B. Federn so konstruiert, dass sie über einen möglichst grossen Bereich eine Kraft ausüben, welche proportional zu ihrer jeweiligen Ausdehnung ist. Der Punkt aller unserer bisherigen Überlegungen ist: Die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{\text{Ruhe}}) \tag{12.5}$$

beschreibt bis zur zweiten Näherung das Verhalten eines Systems, welches sich in einem durch ein Potential/einer potentiellen Energie definierten Gleichgewicht befindet. Egal, wie kompliziert die potentielle Energie ist: In der Näherung ist das Verhalten des Systems nur über den Parameter $k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{Ruhe}}}$ bestimmt.

12.2 Ungedämpfte Schwingungen

Ein ungedämpftes mechanisches System[2], das heisst ein System in welchem keine Energie z.B. durch Reibung verloren geht, ist bestimmt durch die Bewegungsgleichung Gl. 12.5. Wir können nun die Koordinaten immer so wählen, dass $x_{\text{Ruhe}} = 0$

[2] Solche Systeme gibt es nur im Sinne einer Näherung!

(das heisst: Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im Gleichgewichtspunkt des Potentials) und erhalten die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{12.6}$$

Diese Gleichung hat sogar eine formale Lösung. Für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, v(0) = \dot{x}(0) = v(0)$ gilt

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t). \tag{12.7}$$

Dabei gilt

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12.8}$$

Diese Frequenz ω nennt man auch die **Eigenfrequenz** oder **natürliche Frequenz** der Schwingung. Diese Terminologie ist sehr unglücklich, besonders der Begriff natürliche Frequenz". Die Grundidee ist, dass Federsysteme für sich genommen", also quasi in ihrem natürlichen Rohzustand, ungedämpft sind und nur eine äussere Beeinflussung zu einer Dämpfung führt. Dieses Bild ist falsch. Jede Schwingung makroskopischer Objekte ist gedämpft und somit steht die Idee der natürlichen Frequenz für rein abstrakte Systeme.

Die Lösung Gl. 12.7 kann man auch in einer anderen Form angeben (welche aber identische Zahlwerte liefert):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{12.9}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \\ \phi &= \arccos\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}\right). \end{aligned} \tag{12.10}$$

Die Darstellung in Gl. 12.7 hat den Vorteil, dass sie die Anfangsbedingungen in einer einfachen Form enthält aber den Nachteil, das sie sowohl einen Cosinus- als auch einen Sinusterm enthält. Die Form in Gl. 12.9 wiederum hat den Vorteil, nur aus einem Cosinusterm zu bestehen, enthält dafür aber eine Phase. Welche Form vorzuziehen ist, hängt von der Anwendung ab. Normalerweise benützt man in einem Experiment Gl. 12.9, weil man die Anfangsbedingungen sowieso nicht kennt und die Amplitude sehr einfach messen kann.

Für eine lineare Feder (siehe Fig. 12.2) ergibt sich ein wichtiger Spezialfall, nämlich die Situation, dass ein Masse an einer Position x_0 losgelassen wird aber bei $t = 0$ noch keine Geschwindigkeit hat. Es gilt dann:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \tag{12.11}$$

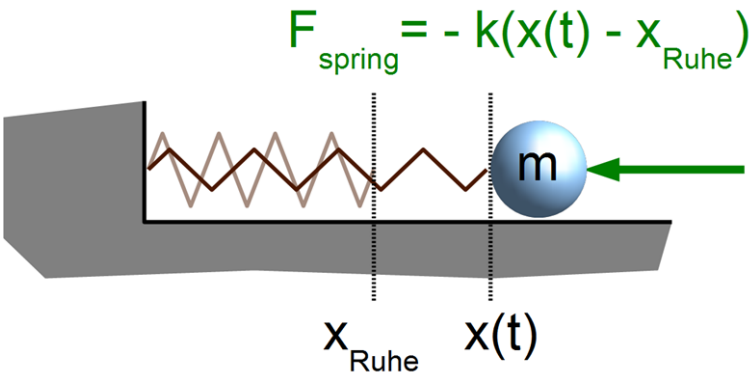


Abbildung 12.2: Ungedämpfte Feder mit Federkonstante k und Masse m.

12.3 Termnologie: Periodische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ergibt eine ungedämpfte Feder ein Schwingungsverhalten, welches durch eine Cosinusfunktion dargestellt werden kann. Der Cosinus ist eine periodische Funktion. Im Allgemeinen nennt man eine Funktion $f(t)$ **periodisch mit Periode** T, falls für alle Werte von t gilt:

$$f(t+T) = f(t). \tag{12.12}$$

Eine periodische Funktion ist dargestellt in Fig. 12.3. Wir verwenden das Beispiel:

$$f(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + P) = A\sin(\omega t + P) = A\sin(2\pi\nu t + P). \tag{12.13}$$

Dabei gelten die Definitionen: T: **Periode**, A: **Amplitude**, P: **Phasenkonstante** (diese Phasenkonstante wird gerne als Winkel verstanden und dann z.B. mit ϕ angegeben). Zwei weitere wichtige Begriffe sind die **Kreisfrequenz** ω und die **Frequenz** ν. Letztere hat die Einheit Hertz Hz. Das Argument der periodischen Funktion, also hier $\omega t + P$ nennt man die **Phase**. Es gilt:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{12.14}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{12.15}$$

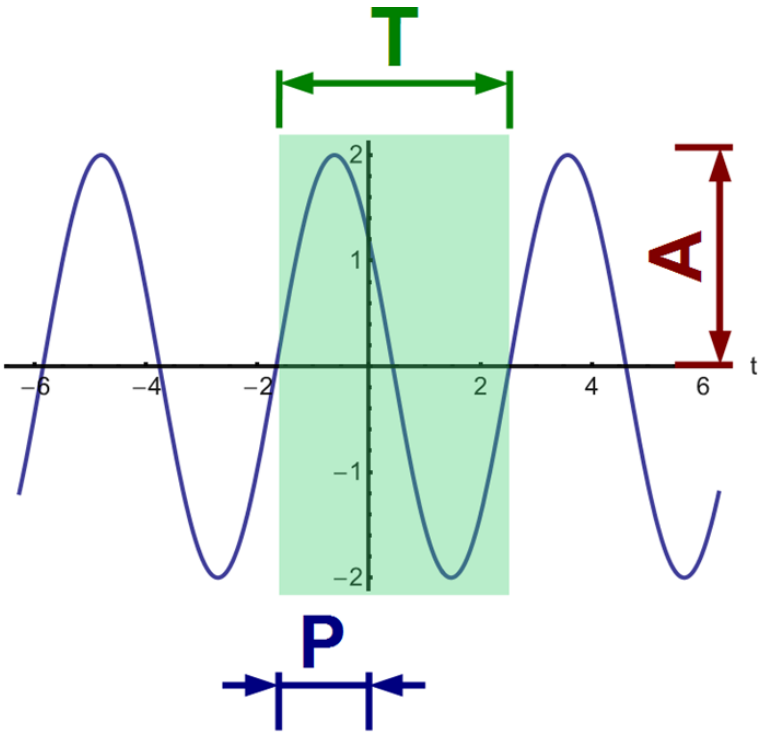


Abbildung 12.3: Periodische Funktion.

12.4 Energie einer Schwingung

Energetisch gesehen bedeutet eine Schwingung einen andauernden Austauschprozess zwischen kinetischer und potentieller Energie. Wenn wir die Gesamtenergie in einem schwingenden System zu einem bestimmten Zeitpunkt t berechnen wollen, müssen wir also die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie in t berechnen. In einem ungedämpften System (in welchem ja keine Energie an die Umwelt abgegeben wird) erwarten wir, dass diese Summe eine Konstante ist.

Im Kapitel über Energie haben wir in der Gl. 4.16 gesehen, dass die potentielle Energie in einer Feder im wesentlichen proportional zur Federkonstante k und zum Quadrat der Auslenkung ist. Es gilt:

$$E_{pot} = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}A^2\cos(\omega t + \phi) \tag{12.16}$$

wobei wir hier mit x die Auslenkung und mit ϕ die Phasenkonstante bezeichnen, dabei die Trajektorie der schwingenden Masse durch Gl. 12.9 beschreiben und annehmen, der Nullpunkt des Koordinatensystems falle mit der Ruhelage der Feder zusammen.

Wir erhalten für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{12.17}$$

Wenn man nun beachtet, dass

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{12.18}$$

erhält man

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \tag{12.19}$$

Die totale Energie einer schwingenden Feder ist also:

- proportional zur Federkonstante
- proportional zum Quadrat der Frequenz
- proportional zum Quadrat der Amplitude

der Schwingung.

12.5 Gedämpfte Schwingungen

In der Realität sind die meisten Schwingungsprozesse in irgendeiner Form gedämpft, das heisst, sie geben Energie in From von Reibung ab[3]. Je nach Art der Reibung wird die Dynamik der Schwingung anders aussehen. Wir unterscheiden dabei:

- Viskose Reibung, auch hydrodynamische oder Stokes- Reibung genannt,
- Coulomb-Reibung,
- Hystereische Reibung,
- Aerodynamische Reibung.

Wir werden im folgenden vor allem die viskose Reibung illustrieren. Dies, weil viskose Reibung mathematisch besonders einfach zu erfassen ist. Sämtliche gezeigten Phänomene und Prozesse spielen auch bei allen anderen Reibungsarten eine mehr oder weniger wichtige Rolle, auch wenn sie quantitativ natürlich zu

[3] Allenfalls atomare, bzw. quantenmechanisch zu beschreibende Systeme sind in einem echten Sinne vollständig reibungsfrei.

anderen Resultaten führen.In der Praxis müssen Sie sich immer klarmachen, dass Reibungsphänomene normalerweise durch ein Zusammenspiel verschiedener Reibungstypen entstehen. Die von uns angegebene Liste ist keinesfalls vollständig und die detaillierte Beschreibung von Reibungsphänomenen erfordert genaue Einsicht in die systemspezifischen physikalischen Prozesse. Unabhängig davon nennen wir aber jede Schwingung gedämpft, bei der während der Bewegung in irgendeiner Form Energie verloren geht (bzw. an die Aussenwelt, zum Beispiel in Form von Wärme, abgegeben wird).

12.5.1 Dämpfung durch viskose Reibung

Dämpfung durch viskose Reibung entsteht durch eine Reibungskraft der Form:

$$F_r = -\gamma \frac{dx}{dt} = -\gamma \dot{x}. \tag{12.20}$$

Dies bedeutet: Die Reibung ist der Geschwindigkeit entgegengesetzt und proportional zu dieser, siehe Fig. 12.4. Viskose Reibung kann z.B. durch einen hydraulischen Stossdämpfer erreicht werden (wobei das Verhalten realer Stossdämpfer durch viskose Reibung nur genähert wird). Die Bewegungsgleichung einer gedämpften

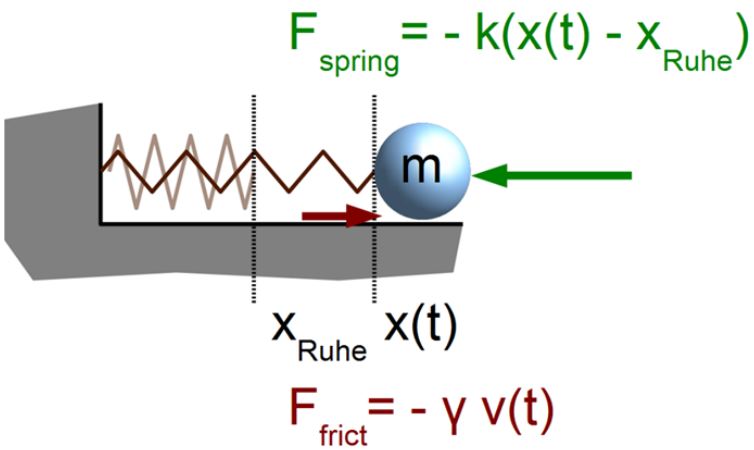


Abbildung 12.4: Gedämpfte Feder.

Feder lautet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}. \tag{12.21}$$

Auch diese Gleichung kann man formal lösen. Wir beschränken uns hier auf einen einzigen Spezialfall, nämlich auf denjenigen der sog. **schwachen Dämpfung**. Falls es gilt dass:

$$\gamma < 2\sqrt{km} \tag{12.22}$$

hat die Gl. 12.31 die Lösung:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi). \tag{12.23}$$

Dabei gilt:

$$\delta = \frac{\gamma}{2m} \tag{12.24}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \tag{12.25}$$

Die Parameter A und ϕ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Für uns ist nur folgende Feststellung wichtig: Eine gedämpfte Schwingung kann verstanden werden als eine Cosinuskurve, deren Amplitude exponentiell schrumpft.Dabei repräsentiert die Grösse

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \tag{12.26}$$

die sogenannte Zeitkonstante der Schwingung. Allgemein gilt für einen Prozess, der zum exponentiellen Abfall einer beliebigen Grösse X gemäss der Gesetzmässigkeit

$$X(t) = X_0 e^{-\alpha t} \tag{12.27}$$

führt, dass dessen Zeitkonstante durch $\tau = 1/\alpha$ definiert ist. Die Zeit τ entspricht der Zeitdauer, die es braucht bis X auf $1/e \approx 0.33$ des Startwertes X_0 abgesunken ist.

Eine weitere, in der Technik oft verwendete Grösse ist der sogenannte Q - Faktor Q. Die Idee des Q - Faktors ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$Q = \frac{\textbf{Totale Energie im Oszillator am Anfang einer Periode}}{2\pi \cdot \text{Energieverlust während einer Periode}} \tag{12.28}$$

Je grösser der Q - Faktor, desto weniger Energie geht während eines Schwingungszyklus verloren. Falls eine Schwinung exponentiell abklingt, kann man Q berechnen und es ergibt sich genähert:

$$Q = \frac{m\omega_0}{\gamma}, \tag{12.29}$$

wobei m die Masse, γ die Dämpfungskonstante, und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ repräsentiert (k Federkonstante).

12.5.2 (BI) Dämpfung durch Coulomb - Reibung

Dämpfung kann auch durch ganz gewöhnliche Gleitreibung zustande kommen. Die Reibungskraft ergibt sich dann zu:

$$\vec{F}_R = -\mu mg \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{12.30}$$

Dabei entspricht μ dem Gleitreibungskoeffizienten (dimensionslos). Die Gleitreibung ist in guter Näherung unabhängig vom Betrag der Geschwindigkeit, aber deren Richtung immer entgegengesetzt. Die Bewegungsgleichung einer mit Coulombreibung gedämpften Feder lautet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu mg \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \tag{12.31}$$

Eine Simulation ergibt eine Dynamik wie in Fig. 12.5. Zwei Aspekte stechen ins

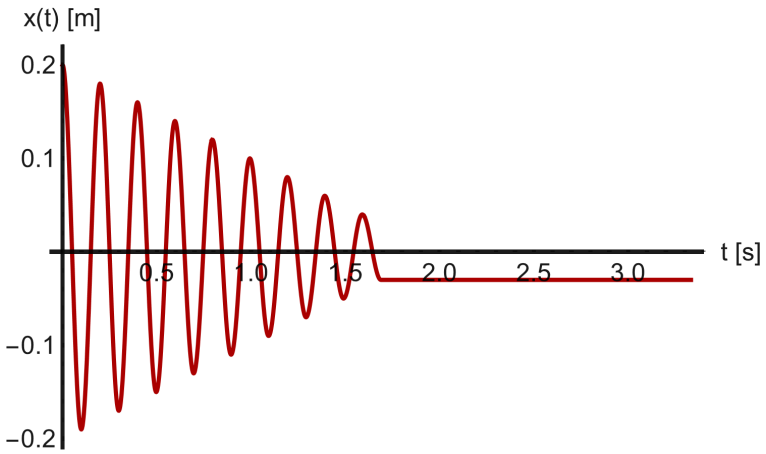


Abbildung 12.5: Auslenkung einer mit herkömmlicher Gleitreibung gedämpften Feder.

Auge:

- Die Amplitude sinkt linear.
- Die Bewegung kommt nach endlicher Zeit zum Stehen.

Der zweite Aspekt ist relativ einfach zu verstehen: Der Haftreibungskoeffizient ist grösser als der Gleitreibungskoeffizient. Es liegt im Wesen von Oszillationen, dass die bewegte Masse regelmässig ihre Bewegungsrichtung ändert, also mithin während jeder Periode mindestens zweimal die Geschwindigkeit null hat. Falls die Haftreibungskraft am Umkehrpunkt der Bewegung grösser ist als die Federkraft, bleibt die Masse stehen.

12.5.3 (BI) Hysteretische Dämpfung

Formal ist die Reibungskraft bei **hysteretischer Dämpfung** gegeben durch

$$\vec{F}_{hyst} = -(k+ih)(|\vec{r}| - L_0)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{12.32}$$

Dabei bedeutet L_0 die Ruhelänge der Feder und $\vec{r}$ ist der Vektor, welcher vom Anfangs- zum Endpunkt der Feder zeigt. Wichtit ist aber der Term $(k+ih)$. Dabei ist k die gewöhnliche Federkonstante, h eine Konstante, welche die hysteretische Dämpfung beschreibt und i die sog. imaginäre Einheit. Mit anderen Worten: Mathematisch ergibt sich hysteretische Dämpfung durch Einführung einer komplexen Federkonstante! Da wir in dieser Vorlesung nicht mit komplexen Zahlen arbeiten, berechnen wir hier nichts, weisen aber darauf hin, dass hysteretische Dämpfung in der **Baudynamik** eine wesentliche Rolle spielt.

12.6 Resonanz

Resonanz ist eines der wichtigsten Phänomene im Zusammenhang mit Schwingungen. Wir nehmen eine gedämpfte Schwingung, treiben diese aber noch zusätzlich durch eine äussere Kraft an, siehe Fig. 12.6. Wir arbeiten hier mit viskoser Dämpfung; der Grund dafür ist, dass im Falle der viskosen Dämpfung eine formale Lösung für die Bewegungsgleichung existiert. Das Phänomen der Resonanz tritt aber auch bei anderen Formen von Reibung auf. Die Bewegungsgleichung lautet:

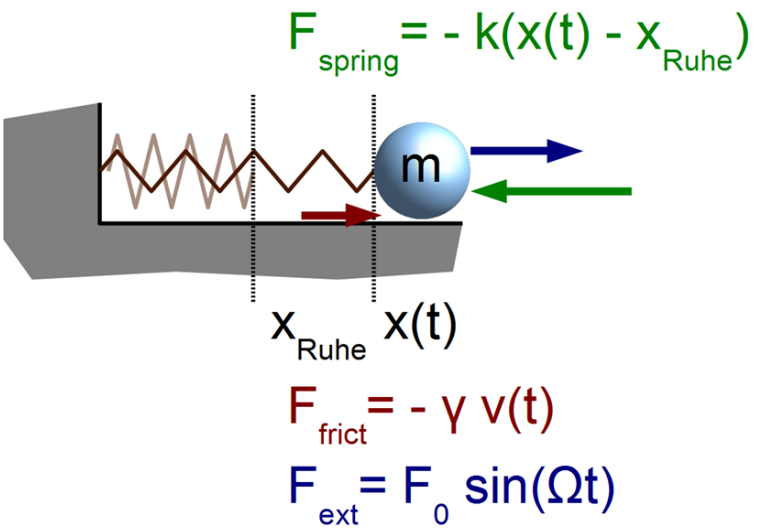


Abbildung 12.6: Angetriebene, gedämpfte Feder.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\sin(\Omega t). \tag{12.33}$$

Das heisst: Die Masse an der Feder wird zusätzlich noch durch eine periodische Kraft $F_0 \sin(\Omega t)$ angetrieben. Diese Gleichung formal zu lösen ist nur noch unter Mühen möglich. Es ergibt sich für das Verhalten nach langer Zeit[4]:

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi). \tag{12.34}$$

Die Phase ϕ ist für uns nicht von Belang; uns interessieren zwei Fakten. Erstens schwingt das System mit der Frequenz Ω der Anregung. Und zweitens hat die Amplitude eine von Ω abhängige Form. Dies ist nun entscheidend. Zuerst einmal beobachten wir, dass für $\gamma = 0$ der Nenner der Amplitude in Gl. 12.34 gleich null werden kann. Die Amplitude würde dann über alles wachsen. Wir betrachten in Fig. 12.7 die Amplitude als Funktion der Anregungsfrequenz Ω für verschiedene Werte von γ. Wir beobachten, dass die Amplitude für einen bestimmten Wert von Ω

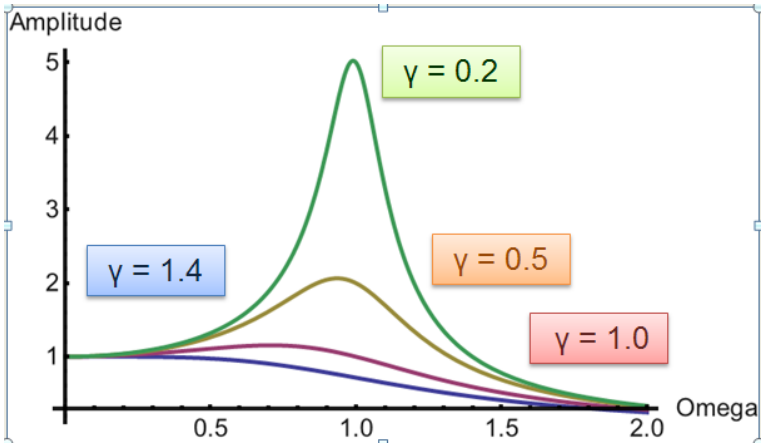


Abbildung 12.7: Amplitude einer angetriebenen Schwingung.

ein Maximum annimmt. Dieses Maximum Ω_R nennt man die **Resonanzfrequenz**. Man kann diese Frequenz genau berechnen, wir machen dies hier aber nicht. Als Näherung für kleine Werte von γ gilt:

$$\Omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12.35}$$

12.7 (IT) Zusammenhang mechanischer und elektrischer Systeme

Bis jetzt illustrierten wir unsere Überlegungen an Federn, also mechanischen Systemen. Wenn wir den Ladungsgehalt eines Kondensators anstelle der Positi-

[4] Also nicht für den Einschwingvorgang.

onskoordinate der Masse an einer Feder setzen, können wir LRC - Schaltungen und Federsysteme ineinander überführen. Beachten Sie dabei immer, dass für den Strom I in einen Kondensator mit Ladung Q gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = I. \tag{12.36}$$

Die "Übersetzung"von der Mechanik in die Elektrik ist gegeben durch die Tabelle in Fig. 12.8.

	Allg. Formulierung	Mechanik	Elektrodynamik
Gesucht:	f(t)	Position x(t)	Ladung Q(t)
Herkunft der Gl.	Mathematik	Newton	Maschen/Knotenregel
	a	Masse m	Induktivitöt L
	b	Reibung γ	Widerstand R
	c	Fedekonstante k	Inverse Kapazität 1/C
	F_{ext}	Externe Kraft	Externe Spannung

$$a\frac{d^2}{dt^2}f(t) + b\frac{d}{dt}f(t) + cf(t) = F_{ext}(t) \quad \text{(Allgemeine Formulierung)}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma\frac{d}{dt}x(t) + kx(t) = F_{ext}(t) \quad \text{(Mechanische Formulierung)}$$

$$L\frac{d^2}{dt^2}Q(t) + R\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{1}{C}Q(t) = U_{ext}(t) \quad \text{(Elektrische Formulierung)}$$

Abbildung 12.8: Übersetzungstabelle für mechanische und elektrische Systeme.

Gekoppelte Oszillatoren
Seilwellen
Allgemeinere Wellen
Wasserwellen
Interferenz

13 — Mechanische Wellen

Das Kapitel ist nur für BI prüfungsrelevant.

13.1 Gekoppelte Oszillatoren

Sehr grob gesagt entstehen mechanische Wellen dann, wenn man es mit vielen, räumlich verteilten schwingungsfähigen Systemen (Oszillatoren) zu tun hat und benachbarte Oszillatoren gekoppelt sind. Das klassische Beispiel für ein solche System ist ein gespanntes Seil. Man betrachtet ein gespanntes Seil dabei als zusammengesetzt aus vielen kleinen Seilstücken. In der Ruhelage ist das Seil gerade. Wenn auf das Seil eine senkrechte Kraft wirkt, wird das Seil aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Diese Auslenkung kann für jedes einzelne Seilstückchen angegeben werden. Für diese Auslenkung ist eine bestimmte Energie erforderlich. Von Oszillatoren reden wir, weil diese Energie für kleine Auslenkungen durch ein quadratisches Potential angenähert werden kann, woraus sich eine lineare Federkraft ergibt. Da das Seil nicht reisst, werden benachbarte Seilstückchen in ähnlich ausgelenkt; die Seilstückchen sind also gekoppelt.

13.2 Seilwellen

Gegeben sei ein in x - Richtung gespanntes Seil, siehe Fig. 13.1. Wir nehmen an, dass wir das Seil ausschliesslich in y-Richtung auslenken. In der Ruhelage gilt: $y(x) = 0$. Wie wir aus Erfahrung wissen, führt eine Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ und anschliessendes Loslassen, dass das Seil sich bewegt; die Auslenkung des Seils ist also somit eine Funktion des Ortes x als der Zeit t: $y(x,t)$.

Wenn die Auslenkungen nicht allzu gross sind, lässt sich die Dynamik des Seils durch eine partielle Differentialgleichung, die Wellengleichung beschreiben:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{13.1}$$

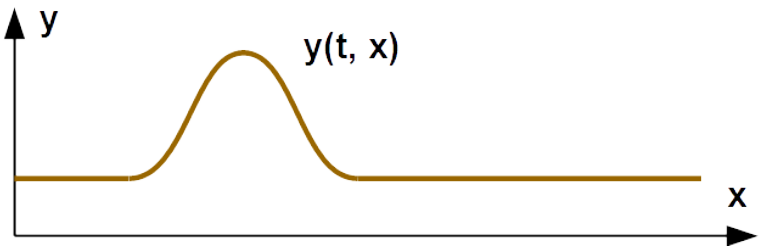


Abbildung 13.1: Ein gespanntes Seil mit einer Auslenkung.

Dabei bedeutet F_S die Zugkraft im Seil und μ die Massenbelegungsdicht, d.h. das Gewicht des Seils pro Meter[1]. Wir wollen hier gar nicht weiter in die Details gehen, aber partielle Differentialgleichungen (Abhängigkeit und Ableitung nach verschiedenen Variablen) unterscheiden sich doch recht wesentlich von sogenannten gewöhnlichen Differentialgleichungen (Abhängigkeit und Ableitung nach nur einer Variablen, in der Physik meist aber nicht immer die Zeit). Eine gewöhnliche Differentialgleichung hat eine Funktion als Lösung, während partielle Differentialgleichungen ganze Familien von Funktion als Lösung haben. Für die Wellengleichung gilt nun, dass jede Funktion der Form

$$y(x,t) = y(vt \pm x) \tag{13.2}$$

($\pm$ bedeutet plus oder minus) eine Lösung der Wellengleichung 13.1 ist, wobei

$$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}}. \tag{13.3}$$

Machen Sie sich klar, dass dies heisst: Die Lösungen der Wellengleichung sind Funktionen, die nicht von zwei sondern von einer Variablen u abhängen. Diese Variable u ist selber eine Funktion von Ort x, Zeit t und einem Parameter v: $u = vt \pm x$. Es geht nun im Folgenden um die Interpretation dieser Tatsache.

Wir diskutieren den Fall $u = vt - x$. Nehmen wir an, die Funktion $y(u) = y(vt - x)$ habe zum Zeitpunkt t_0 bei x_0 einen Buckel, s. Fig. 13.2. Der Buckel der Funktion $y(u)$ liegt immer bei u_0; wenn die Zeit voranschreitet (t_0 geht über in das grössere $t_1 = t_0 + \Delta t$), muss das x grösser werden (x_0 geht über in $x_1 = x_0 + \Delta x$), um denselben Wert u zu generieren. Formal gilt:

$$\begin{aligned} y(vt_0 - x_0) &= y(vt_1 - x_1), && (13.4)\\ &= y(v(t_0 + \Delta t) - (x_0 + \Delta x)). && (13.5) \end{aligned}$$

[1] Nur, damit das auch noch gesagt ist: Umgangssprachlich redet man von Gewicht pro Meter, physikalisch handelt es sich aber um Masse pro Meter.

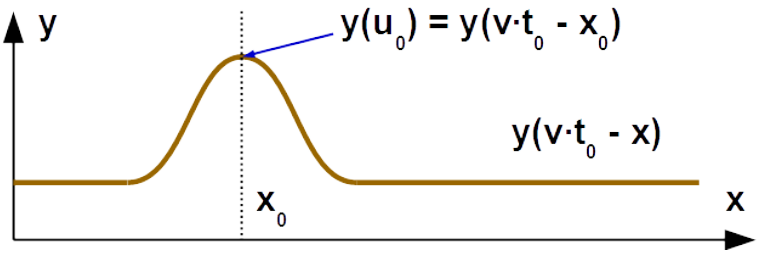


Abbildung 13.2: Auslenkung des Seils als Funktion von x zum Zeitpunkt t_0.

Daraus ergibt sich:

$$\Delta x = v\Delta t \tag{13.6}$$

oder anders gesagt:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{13.7}$$

Das bedeutet, dass sich der Ort, an dem die Funktion $y(vt - x)$ einen Buckel hat, mit der Geschwindigkeit v nach rechts verschiebt, s. Fig. 13.3. Wir weisen ausdrücklich

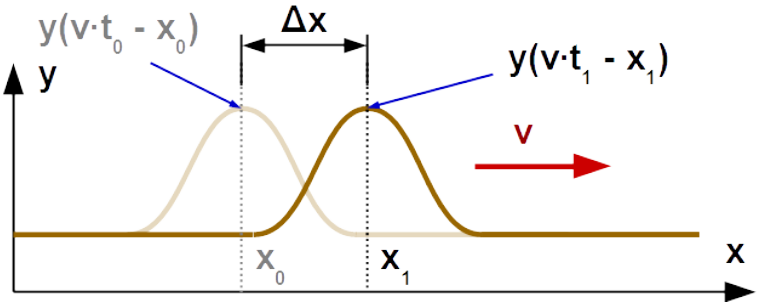


Abbildung 13.3: Ausbreitung einer Seilwelle.

darauf hin, dass die Lösung $y(vt - x)$ zu einer nach rechts laufenden Seilwelle führt. Die genau gleich berechtigte Lösung $y(vt + x)$ führt zu einer nach links laufenden Welle, also einer Auslenkung mit Geschwindigkeit $-v$.

13.3 Allgemeinere Wellen

Wellen treten nicht nur Seilen auf, sondern sind ein sehr generelles Phänomen. Bei Seilen ist die Auslenkung senkrecht zur Seilrichtung. Bei Federn oder allgemein elastischen Medien können Auslenknungen aber auch in Richtung des Mediums

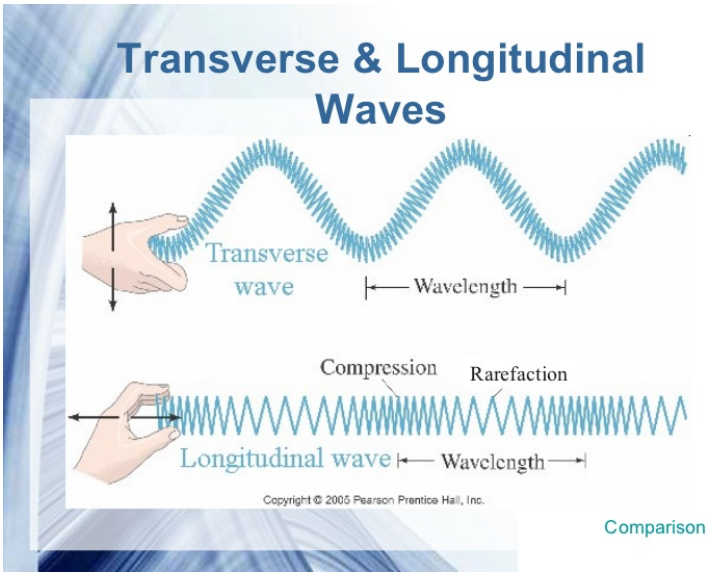


Abbildung 13.4: Longitudinale und transversale Wellen.

geschehen, s. Fig. 13.4. Man unterscheidet dabei **longitudinale Wellen** (Auslenkung entlang des Mediums) und **transversale Wellen** (Auslenkung senkrecht zum Medium). Wir weisen aber ausdrücklich darauf hin, dass in Realität die meisten Wellen Mischformen darstellen.

Wellen breiten sich mit einer bestimmten, systemtypischen Geschwindigkeit aus. Für Seile gilt dabei £(s. oben):

$$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}}. \tag{13.8}$$

Für longitudinale Wellen in elastischen Medien gilt:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{13.9}$$

wobei E den Elastizitätsmodul und ρ die Massendichte des Mediums wiedergibt. Für transversale Wellen in elastischen Medien gilt analog:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{13.10}$$

Hier bezeichnet G den Schubmodul.

!!! Die oben angegebenen Beziehungen für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind lediglich Näherung! Bei realen Wellen tritt noch ein zusätzliches Phänomen auf: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt häufig von der Wellenlänge der Welle ab. Dieses Phänomen nennt man **Dispersion**.

13.4 Wasserwellen

Ein ganz wichtiger Typ von nicht - einfachen Wellen sind Wasserwellen. Die zugehörige Theorie ist recht kompliziert. Grob gesagt unterscheidet man drei Typen von Wellen (und kann für diese einigermassen gute Näherungen angeben):

- Tiefwasserwellen: Wellenlänge kleiner als doppelte Wassertiefe und grösser als 0.3m.
- Flachwasserwellen: Wellenlänge grösser als 20-fache Wassertiefe und grösser als 0.3m.
- Kapillarwellen: elastische Kräfte sind dominiert durch Oberflächenspannung. Ihre Wellenlänge ist kleiner als 1.5 cm.

Wie man sofort merkt, sind damit nicht alle möglichen Wellenlängen- und Wassertiefenbereiche abgedeckt. In diesen nicht abgedeckten Zwischenbereichen verfügen wir nicht über gute Näherungen.

Für das Verständnis von Wasserwellen ist es wichtig zu wissen, dass bei einer Wasserwelle die einzelnen Wasserteilchen eine Rollbewegung durchführen, s. Fig. 13.5, wobei die Rollbewegung in grösserer Tiefe kleinere Radien aufweist.

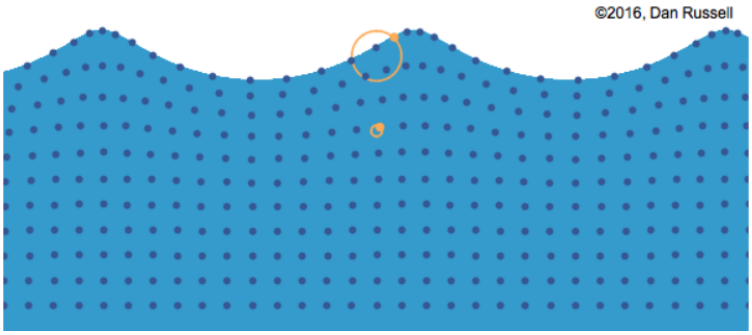


Abbildung 13.5: Wasserwellen, Autor: Dan Russell, Penn State University.

Noch komplizierter als Wasserwellen sind Erdbebenwellen. Hierbei ist wichtig, dass der Typ der auftretenden Schäden vom Typ der Erdbebenwelle abhängt, s. Fig. 13.6, wobei die Rollbewegung in grösserer Tiefe kleinere Radien aufweist.

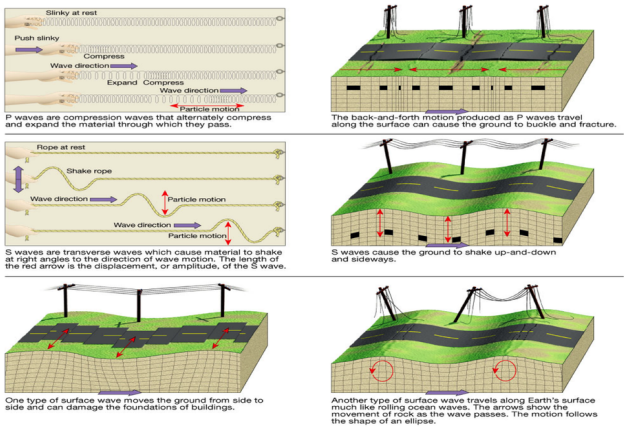
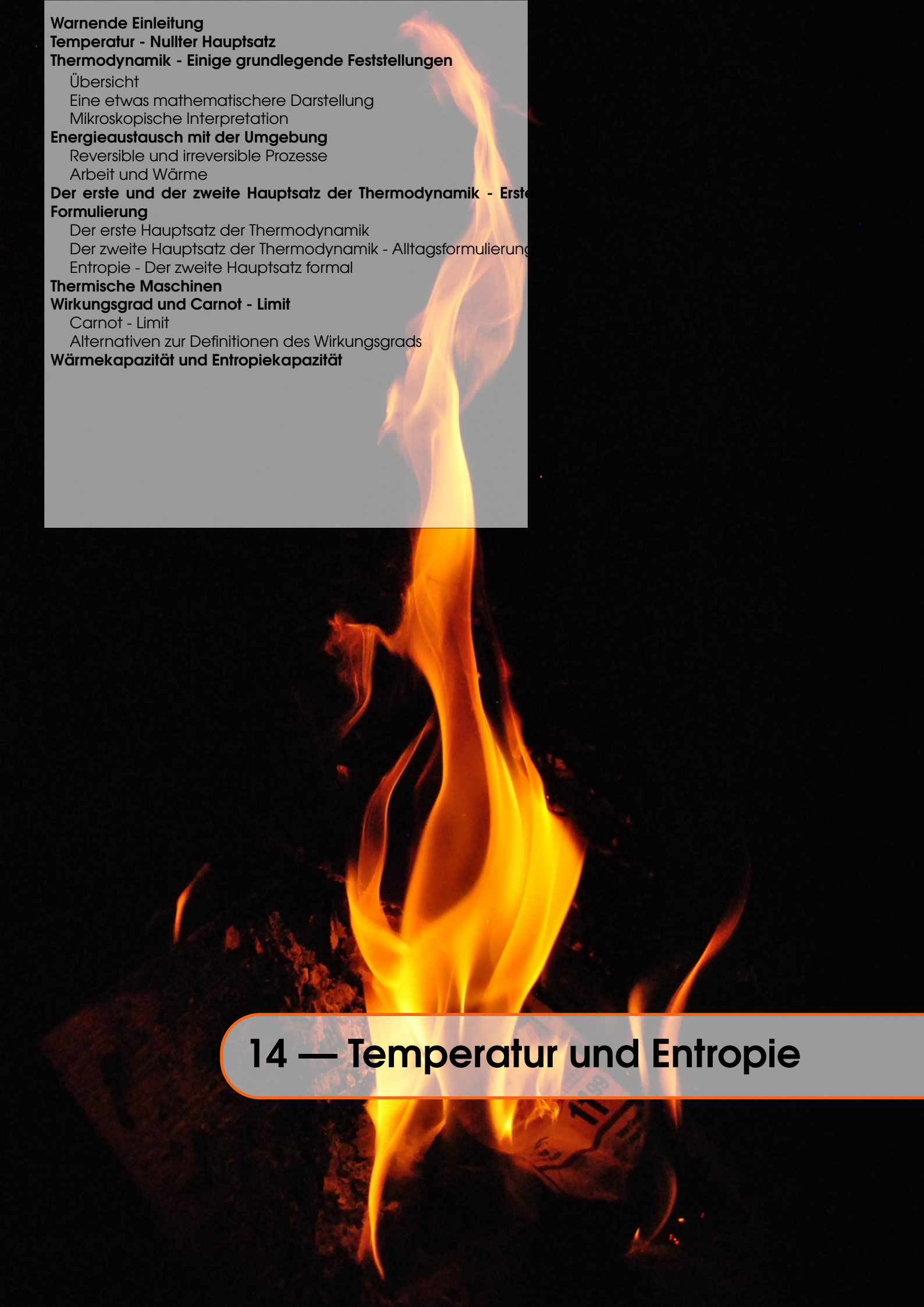


Abbildung 13.6: Verschiedene Typen von Erdbebenwellen

13.5 Interferenz

Die Gleichung 13.1 ist eine sogenannte lineare partielle Differentialgleichung. Praktisch bedeutet dies: Wenn man zwei Lösungen, z.B. zwei Wellen als Lösung der Wellengleichung hat ist die Summe dieser Lösungen wieder eine Lösung der Wellengleichung. Anders gesagt: Wellen dürfen addiert werden. Wir werden dieses Thema, Interferenz beim Schall noch ausführlich diskutieren.

Warnende Einleitung
Temperatur - Nullter Hauptsatz
Thermodynamik - Einige grundlegende Feststellungen
Übersicht
Eine etwas mathematischere Darstellung
Mikroskopische Interpretation
Energieaustausch mit der Umgebung
Reversible und irreversible Prozesse
Arbeit und Wärme
Der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Erste Formulierung
Der erste Hauptsatz der Thermodynamik
Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Alltagsformulierung
Entropie - Der zweite Hauptsatz formal
Thermische Maschinen
Wirkungsgrad und Carnot - Limit
Carnot - Limit
Alternativen zur Definitionen des Wirkungsgrads
Wärmekapazität und Entropiekapazität



14 — Temperatur und Entropie

Das Kapitel ist nur für BI prüfungsrelevant.

14.1 Warnende Einleitung

(Alle verwendeten Begriffe werden später noch im Detail erklärt). Wärmelehre oder Thermodynamik gilt als ein schwieriges Gebiet. Die hierfür von Studierenden angegebenen Gründe umfassen (neben vielen anderen):

- Entropie ist ein unverständliches Konzept.
- Es geht um die Veränderungsraten von Funktionen mit mehreren Variablen. Das ist mathematisch mühsam.
- Immer, wenn man glaubt, die Thermodynamik verstanden zu haben, realisiert man, das dies nicht der Fall ist.

Leider sind einige dieser Vorbehalte nicht ganz unberechtigt. Das Grundproblem liegt darin, dass Thermodynamik in der Tat keine einfache Wissenschaft ist. Dies hat mehrere Gründe:

- Wir haben einen Temperatursinn und haben deshalb das Gefühl, Temperatur sei ein einfaches Konzept.
- "Wärme", bzw. "Wärmeenergie" ist ein uns aus der Alltagssprache sehr vertrauter Begriff. In der Tat ist er aber konzeptuell recht kompliziert und wurde auch erst in der Mitte des vorletzten Jahrhunderts verstanden.
- Thermodynamik handelt von der Art und Weise, wie grosse Objekte Energie mit ihrer Umgebung austauschen. "Gross"heisst hier: Die Objekte bestehen aus sehr vielen Einzelteilchen, welche sich bewegen können. Die Einzelteilchen haben sowohl kinetische als auch potentielle Energie. Die Antwort auf

die Frage, was *sehr viel* heisst, ist: 10^{23} Teilchen. Machen Sie sich keine allzu grossen Gedanken, woher diese Zahl kommt. Es ist ungefähr die Anzahl Gasmoleküle in einem Kinderballon bein Zimmerbedingungen. Natürlich funktioniert die Thermodynamik auch noch bei kleinen Ballonen. Aber: Wenn Sie nur noch 100 Gasmoleküle haben, gilt die Thermodynamik nur noch eingeschränkt. Zu sagen, ein einzelnes Sauerstoffmolekül habe eine bestimmte Temperatur macht physikalisch keinen Sinn mehr.

- Manchmal tut man so, als ob Wärme gleich der inneren Energie (Definition siehe später) eines Objekts sei. Dies ist falsch. In der Tat macht es keinen Sinn zu sagen, ein Körper beinhalte einen bestimmten Betrag an Wärme. Wie wir sehen werden, macht der Begriff Wärme nur im Zusammenhang mit dem Austausch von Energie eines Objekts mit seiner Umgebung Sinn.

- Man kann die Thermodynamik zurückführen auf die sog. statistische Mechanik (das heisst statistische Aussagen über die Eigenschaften der 10^{23} Teilchen). Die statistische Mechanik ist mathematisch aber ausserordentlich anspruchsvoll.

- Begriffe wie z.B. "Wärmekapazitätïmplizieren, dass ein Körper eine bestimmte Menge Wärme enthält. Wie oben erwähnt, ist dies irreführend.

Wir werden im Folgenden eine begrifflich einigermassen saubere Begründung der Thermodynamik aufziehen. Dabei sind wir in einer Hinsicht etwas nachlässig: Wir gehen davon aus, dass Sie ein intuitives Verständnis für den Begriff der Temperatur haben. Man kann den Begriff der Temperatur sehr exakt definieren, diese Definitionen sind allerdings erstaunlich subtil. Wir sind der Meinung, dass Ihr intuitives Verständnis völlig ausreicht; sollten Sie aber irgendwann einmal feststellen, dass der vermittelte Temperaturbegriff für Sie unbefriedigend ist, dann verweisen wir Sie erstens auf die entsprechende Fachliteratur (die Bücher von Richard P. Feynman sind hier massgebend) und gratulieren Ihnen zweitens zu ihrem physikalischen Verständnis.

14.2 Temperatur - Nullter Hauptsatz

Die Messung der Temperatur sützt sich auf mit einer Temperaturändreung verbundene physikalische Phänomene. Dazu gehören unter anderem:

- Längenausdehnung,

- Änderung des elektrischen Widerstandes,

- Änderung des Spektrums der thermischen Strahlung,

- ...

Eine wirklich saubere Definition des Temperaturbegriffs erfordert eine begrifflich einwandfreie Definition des Begriffs der Wärme und stützt sich dann auf die Eigenschaften des Energieflusses zwischen Objekten, welche Wärme aber keine andere Energieform austauschen können (durch einen sog. **Wärmekontakt** miteinander verbunden sind). Man sagt, dass zwei Objekte dieselbe Temperatur haben, wenn zwischen ihnen trotz bestehendem Wärmekontakt netto keine Energie ausgetauscht wird.

Wenn wir die Gleichheit der Temperaturen von zwei Objekten über den Wärmefluss zwischen den Objekten defnieren, brauchen wir eine Annahme, die nicht ganz so selbstverständlich ist wie sie aussieht. Sie liegt zwar allen weiteren Überlegungen zugrunde, wurde aber erst spät als Annahme identifiziert und verstanden.

Theorem 14.1 — Nullter Hauptsatz. Wenn zwischen zwei Systemen A und B trozt Wärmekontakt keine Energie fliesst (A und B also dieselbe Temperatur haben) und zwischen System B und C ebenfalls keine Wärmeübertragung stattfindet, dann wird auch zwischen A und C keine Wärme fliessen (immer vorausgesetzt, dass ein Wärmekontakt vorhanden ist).

Diese Annahme ist insofern nicht ganz selbstverständlich, als dass dass man aus der Tatsache, dass Maria gut mit Hans auskommt und Hans gut mit Verena auskommt nicht schliessen kann, dass Maria und Verena das Heu auf derselben Bühne haben.

R Der nullte Hauptsatz ist die Grundvoraussetzung dafür, dass wir die Temperatur durch eine einfache Zahl beschreiben können.

Es gibt verschiedene Temperaturskalen. Im Alltag und Technik wird die Celsius - Skala besonders häufig verwendet. Sie basierte früher auf der Quantifizierung der Volumenausdehnung von Wasser, wobei 0 °C den Gefrier- und 100 °C den Siedepunkt von Wasser unter Normaldruck. Dabei versteht man unter Normalbedingungen [1] eine Temperatur von 20 °C und ein Druck von 101.325 Kilopascal. In der Physik verwendet man normalerweise die Kelvin - Skala. Ein Temperaturunterschied von 1 Kelvin entspricht dabei einem Temperaturunterschied von einem Grad Celsius. Die Umrechnung zwischen Grad Celsius und Grad Kelvin ergibt sich durch folgende Formel:

$$T^{\circ}C + 273.15 = T[K]. \tag{14.1}$$

Beachten Sie, dass bei der Angabe einer Temperatur in Kelvin kein °- Zeichen verwendet wird.

[1] Neben den Normalbedingungen verwendet man öfters die sog. Standardbedingungen. Unter thermischen Standardbedingungen verstand man bis 1982 eine Temperatur von 0 °C und ein Druck von 101.325 kPa, nach 1982 ein Druck von 100 kPa.

14.3 Thermodynamik - Einige grundlegende Feststellungen

14.3.1 Übersicht

Die Thermodynamik handelt von "grossen Objekten mit vielen inneren Freiheitsgraden". Unter einem grossen Objekt verstehen wir dabei ein System, welches aus sehr vielen Teilchen zusammengesetzt ist. Diese einzelnen Teilchen haben eine kinetische und eine potentielle Energie. Diese Teilchen können sich bewegen, entweder als fast freie Gasteilchen, als Bestandteile ein Flüssigkeit oder eingebunden in ein Kristallgitter (wo die Teilchen um ihre Ruhelage schwingen können). Es bleibt die Frage, wie viel *sehr viel* ist. Die Standard - Antwort auf diese Frage in der Physik ist: 10^{23} ist sehr viel. Dies entspricht ungefähr der Anzahl Gasteilchen in einem Geburtstagsballon an einem Kindergeburtstag. Beachten Sie, dass die Physik hier sehr grosszügig ist. Auch 10^{20} ist sehr viel. Aus Faustregel gilt: wenn ein System so gross ist, dass sie es von blossem Auge sehen, dann ist es ein thermodynamischen System[2].

Context 14.1 Natürlich ist auch ein wesentlich kleineres System bereits ein thermodynamischen System. Der Punkt dabei ist: die thermodynamischen Eigenschaften eines Objekts ergeben sich aus den Mittelwerten der Eigenschaften der Bestandteile. Wie Sie in der Statistik lernen werden ist dieser Mittelwert umso besser definiert, je mehr Einzelteile Sie für die Mittelwertbildung zur Verfügung haben. Bei einem System mit 1000 Teilchen können diese Mittelwerte schwanken und bei einem einzelnen Teilchen macht der Begriff Mittelwert keinen Sinn. Wir werden nur Systeme untersuchen, die so gross sind, dass Fluktuationen der Mittelwerte vernachlässigt werden können.

Wenn wir den genauen Zustand eines Gases mit 10^{23} Teilchen angeben wollten, bräuchten wir $6 \cdot 10^{23}$ Variablen (pro Teilchen je drei Orts- und drei Geschwindigkeitskomponenten). In der Praxis zeigte sich nun aber, dass viele Objekte, zum Beispiel Gase, durch eine ganz kleine Anzahl Variablen hinreichend beschrieben werden können. Dies sind physikalische Grössen wie zum Beispiel Volumen, Masse, Anzahl/Teilchen, Druck und Temperatur. Es gelingt in der Physik häufig, diese Grössen durch Gleichungen miteinander in Beziehung zu setzen und damit eine geschlossene Beschreibung des untersuchten Objekts anzugeben[3]. Diese Beziehungen, ausgedrückt durch Gleichungen, können das Resultat der Analyse von Experimenten sein. Manchmal ist es möglich solche Beziehungen, zum Beispiel das ideale Gasgesetz (s. später), durch komplizierte Mittelwertbildungsprozesse

[2] Es ist uns natürlich klar, dass Sie 3 l Luft nicht im engeren Sinne sehen können. Es geht um das Volumen, dass diese Luft einnehmen würde, wenn sie in einem Ballon eingeschlossen wäre

[3] Häufig ist diese Beschreibung zwar nur eine sehr gute Näherung, die aber für die meisten Zwecke völlig ausreichend ist.

aus den Eigenschaften der Interaktion der Bestandteile des betrachteten Objekts zu bestimmen. Der Zweig der Physik, der dieses leistet, nennt man statistische Physik.

Die Thermodynamik handelt von Situationen, in denen sich diese grossen Objekte im Gleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden. D. h., wir fragen uns welches Volumen ein geschlossener Ballon, der eine bestimmte Anzahl Gasteilchen enthält bei einer gegebenen Aussentemperatur und gegebenen Aussendruck einnimmt. Die Thermodynamik behandelt nicht Situationen, in denen wir den Ballon geöffnet loslassen, sodass er durch das Zimmer fliegt und dabei Gas ausstösst, damit also seinen Zustand permanent ändert. Ob ein Zustand ein Gleichgewichtszustand ist oder nicht, ist eine recht heikle Frage. Würde man den Begriff strikt anwenden, könnte die Thermodynamik keine Maschinen untersuchen, denn diese bewegen sich ja dauernd und ändern ihren Zustand. In der Thermodynamik geht man davon aus, dass die Zustandsänderungen, welche wir analysieren,unendlich langsam ablaufen. Die realen Prozesse, in welchen diese Prozesse in endlicher Zeit ablaufen, werden durch die Thermodynamik zumindest angenähert beschrieben.

Das Ziel der Thermodynamik besteht darin, für bestimmte Systeme die Beziehungen zwischen den thermodynamischen Variablen anzugeben, und die für unsere Zwecke relevanten Schlussfolgerungen aus diesen Beziehungen zu ziehen. Fragestellungen, die uns dabei begegnen werden sind zum Beispiel:

- Wie Ist der maximale Wirkungsgrad einer Maschine, welche thermische Energie in mechanische Energie verwandelt?
- Wie verändert sich das Volumen eines Ballons, wenn er in der Atmosphäre aufsteigt?
- Wie viel Energie brauchen wir, um Wasser zum Kochen zu bringen?
- ...

14.3.2 Eine etwas mathematischere Darstellung

Wir können wichtige physikalische Eigenschaften grosser Objekte oft durch einige wenige Grössen hinreichend beschreiben. Diese Grössen sind zum Beispiel das Volumen V, die Masse m, den Druck p, die Temperatur T oder die Stoffmenge n (Anzahl Teilchen in Mol) [4].

[4] Weitere Grössen wären z.B. die Magnetisierung, bei Lösungen von Stoffen in Flüssigkeiten die Verhältnisse der dichten der jeweiligen Stoffe, bei chemischen Reaktionen die Konzentrationen der Reduktionsprodukte, bei Phasengemischen die Anteile der jeweiligen Phasen, usw.. In dieser Vorlesung beschränken wir uns aber im wesentlichen auf Volumentemperatur und Druck.

Definition 14.1 Die **innere Energie** E eines thermodynamischen Systems ist die Summe aller kinetischen und potentiellen Energien seiner Bestandteile.

!!! Häufig wird die innere Energie E in der Literatur mit dem Buchstaben U bezeichnet.

Ein wichtiges Ziel der Thermodynamik ist es, die innere Energie E als Funktion der verwendeten thermodynamischen Variablen anzugeben:

$$E = E(T,V,n). \tag{14.2}$$

Eine thermodynamischen Betrachtung eines Systems ist dann möglich, wenn es eine Menge von thermodynamischen Variablen gibt, sodass deren Kenntnis die innere Energie des Systems vollständig festlegt. Wenn die Teilchenanzahl n konstant ist (also das System keine Teilchen mit seiner Umgebung austauscht) lässt man die Teilchenanzahl häufig weg und spricht einfach von $E(T,V)$.

Hierzu einige Bemerkungen:

- Wir gehen davon aus, dass das Objekt welches wir betrachten, innerlich homogen ist. Das bedeutet: im Innern hat das Objekt überall dieselbe Temperatur. Falls dies nicht der Fall ist, muss man sich fragen ob das Objekt in kleinere Objekte zerteilt werden kann, in denen dann die Bedingungen der Homogenität sozusagen stückweise erfüllt ist. Falls dies der Fall ist, können die kleineren Stücke thermodynamisch analysiert werden.

- Wenn wir sagen, dass die thermodynamischen Variablen die innere Energie eines Systems festlegen dann meinen wir eigentlich den Mittelwert dieser inneren Energie. Da die einzelnen Teilchen des Objekts immer Energie mit der Umwelt austauschen, kommt es natürlich zu kleinen Fluktuationen.

14.3.3 Mikroskopische Interpretation

Für ein Gas kann man sich diese innere Energie gut veranschaulichen. Ziemlich vereinfacht aber im Wesentlichen korrekt kann man sich ein Gas vorstellen als wild durcheinander fliegende Kügelchen, die sich selten treffen und dann wie elastische Billardbälle mit einander wechselwirken. Diese Kügelchen haben eine Geschwindigkeit, wobei nicht alle Kügelchen dieselbe Schnelligkeit und natürlich schon gar nicht dieselbe Flugrichtung haben. Wie sich nun zeigt (und das ist eine subtile Sache) haben diese Geschwindigkeiten (zu denen immer auch eine kinetische Energie gehört) eine ganz bestimmte Verteilung und es gilt, dass die

mittlere kinetische Energie der Gasteilchen proportional zur Temperatur ist[5]. Die Situation ist illustriert in Fig. 14.1.

Man spricht von makroskopischen und mikroskopischen Grössen. Dabei sind makroskopische Grössen solche, die wir in einem Labor um das Jahr 1900 hätten messen können (Temperatur, Druck, Volumen, ...), mikroskopische Grössen sind z.B. die Geschwindigkeiten einzelner Atome, welche man nicht so einfach messen kann.

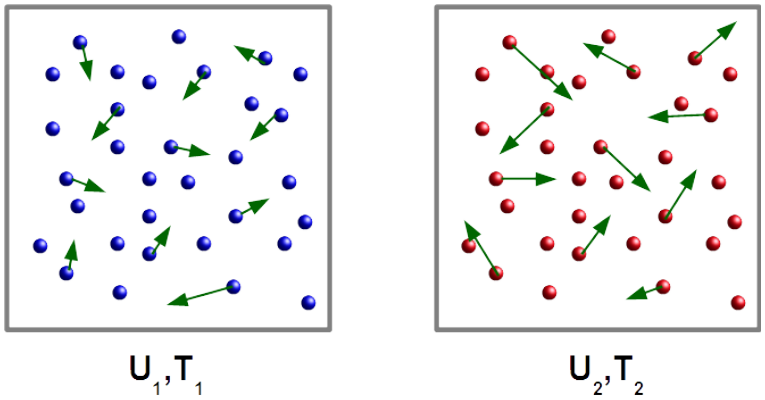
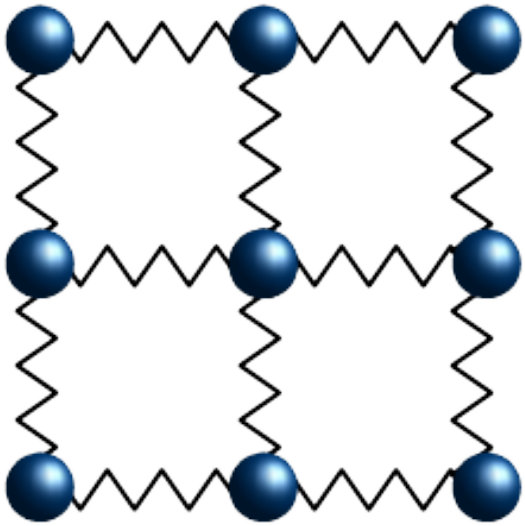


Abbildung 14.1: Gasteilchen bei verschiedenen Temperaturen. Je höher die Temperatur des Gases, desto grösser die mittlere kinetische Energie der Gasteilchen. Wir weisen darauf hin, dass die Gasteilchen nicht alle dieselbe Schnelligkeit haben müssen.

Während man Gase relativ gut mit klassischen Ideen ("kollidierende Bälle") verstehen kann, erfordert ein quantitatives Verständnis des thermischen Verhaltens von Festkörpern bereits quantenmechanische Konzepte. Ein nicht mehr allzu gutes Bild sind die sogenannten Federmodelle der Festkörper. Dabei stellt man sich Festkörper als bestehend aus durch Federn aneinander gebundene Kügelchen vor. In einem klassischen Bild bewegen sich die Kügelchen bei $T = 0$ nicht (Fig. 14.2). Bei Temperaturen ungleich null oszillieren die Kügelchen um die Ruhelage; je höher die Temperatur, desto stärker die Oszillationen (s. Fig. 14.3). Wärmeübertragung von der Wand ins Gas (oder umgekehrt) kann man sich so vorstellen, dass Gaskügelchen elastische Stösse mit Wandkügelchen ausführen; trifft ein schnelles Gaskügelchen auf ein langsames Wandkügelchen, wird kinetische Energie vom Gas in die Wand übertragen.

[5]Dieser Zusammenhang und auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten wird in der sogenannten statistischen Mechanik herausgearbeitet. Die statistische Mechanik stellt auch einen Zusammenhang zwischen der mikroskopischen Betrachtungsweise und der sich auf makroskopische Grössen stützenden Thermodynamik her.



$U_0, T = 0$

Abbildung 14.2: Klassische (nicht quantenmechanische) Betrachtung eines Kristalls. Bei $T = 0K$ sind die Bestandteile des Kristalls in Ruhe.

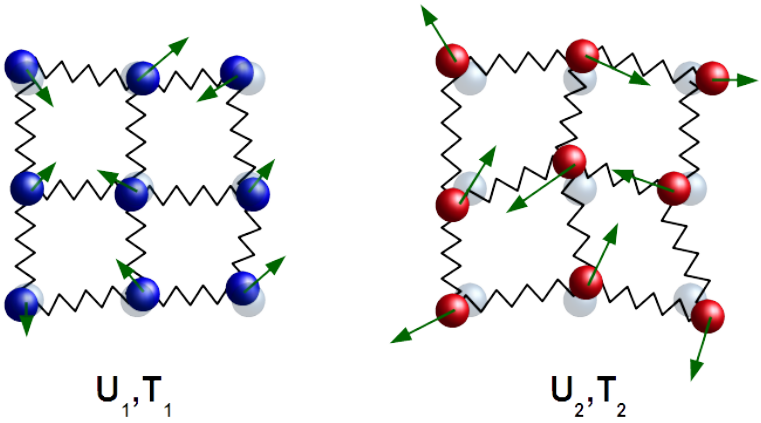


Abbildung 14.3: Bei $T \neq 0$ oszillieren die Bestandteile des Festkörpers um ihre Ruhelage; je höher die Temperatur, desto heftiger die Oszillation. Der Begriff "Bestandteilemeint hier die Atome oder Moleküle des Kristallgitters. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, das das präsentierte Kügelchenmodell eine Näherung im Sinne der klassischen Theorie ist und nicht ausreicht, das thermische Verhalten von Festkörpern zu verstehen.

14.4 Energieaustausch mit der Umgebung

In der Thermodynamik interessiert uns insbesondere, wie ein System mit seiner Umgebung Energie austauscht. Für das Verständnis dieses Kapitels ist es wichtig, dass sie sich vergegenwärtigen, dass wir nicht über die Art und Weise reden, wie Energie in einem System gespeichert ist, sondern darüber, wie Austauschprozesse stattfinden.

14.4.1 Reversible und irreversible Prozesse

Wir definieren jetzt einen wichtigen Begriff, den des reversiblen Prozesses. Perfekt reversible Prozesse gibt es eigentlich in der makroskopischen Realität nicht[6]. Wir können uns einen reversiblen Prozess aber als eine Art Grenzwert vorstellen; auch wenn wir einen reversiblen Prozess im strikten Sinne nicht realisieren können, können wir einem solchen Prozess durch geschicktes Design doch immer näher kommen.

Definition 14.2 Ein Prozess heisst reversibel, wenn er so durchgeführt wird, dass man ihn rückgängig machen kann, ohne eine Veränderung am System oder an der Umwelt zurückzulassen. Falls dies nicht möglich ist, spricht man von einem irreversiblen Prozess.

Reversible und irreversible Prozesse sind illustriert in Fig. 14.4 und Fig. 14.5. Zuerst diskutieren wir einen mechanischen Prozess, bei dem das Volumen eines Gases verändert wird. Wenn wir einen Behälter mit einer Trennwand haben, und das Gas sich auf der einen Seite des Behälters befindet, führt das Öffnen der Trennwand zu einem irreversiblen Überströmen des Gases in den leeren Bereich des Behälters (Fig. 14.4). Natürlich ist es möglich, dass Gas wieder vollständig auf die linke Seite des Behälters zu bringen; dafür ist aber Energie erforderlich und somit eine Veränderung der Umwelt. Wenn die Trennwand keine Öffnung hat, sondern beweglich ist, dann kann der Druck des Gases dazu verwendet werden, eine Feder zu spannen. Die Energie, die in der Feder gespeichert ist, kann wieder dazu verwendet werden, das Gas zu komprimieren. Geschieht dieser Prozess vollständig reibungsfrei, kommt es weder im Gas noch in der Umgebung zu einer Änderung und damit ist dieser Prozess reversibel. Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass die Details eines solchen Prozesses recht kompliziert sind. Der reversible Prozess als solcher existiert nicht; wir können höchstens versuchen, eine Realisierung zu implementieren, welche einem solchen Prozess möglichst nahekommen. Ein Detail: bei der irreversiblen Realisierung auf der linken Seite verändert sich die innere Energie des Gases nicht. Die kinetische Energie der Gasteilchen bleibt gleich. Bei einer reversiblen Implementierung prallen die Gasteilchen auf eine

[6] Prozesse auf subatomarer Ebene sind in der Tat perfekt reversibel

sich bewegende Kolbenwand. Dabei wird Impuls und Energie auf die Kolbenwand übertragen. Das Gas kühlt sich ab. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, denn die Energie im Gas wurde dazu verwendet, die Feder zu spannen. Als letzte Bemerkung weisen wir darauf hin, dass das Spannen für einen reversiblen Prozess beliebig langsam durchgeführt werden müsste. Wenn die Gasteilchen auf die Kolbenwand prallen und die Kolbenwand sich nach rechts bewegt, kommt es zu einem Dichteungleichgewicht im Kolbeninnern. Damit diese Ungleichgewichte möglichst klein bleiben Musterprozess langsam durchgeführt werden. In Fig. 14.5 Sehen Sie Beispiele für irreversible und (möglichst) reversible Wärmeübertragung. Wenn Sie einen heissen Klotz Metall auf eine kühle Unterlage legen, wird Wärme vom Klotz in die Umgebung abfliessen. Dieser Prozess ist ohne Energieaufwendung nicht umkehrbar. Eine möglichst gute Näherung an einen umkehrbaren Prozess bestünde darin, den Klotz mit einem Wärmereservoir in Berührung zu bringen, dessen Temperatur T_1 kleiner als diejenige des Klotzes T_{start} aber grösser als die Emdtemperatru T_{final} ist. Es kommt dann zu einem Wärmefluss vom Klotz in das Wärmereservoir. Wenn sich die Temperaturen des Klotzes und des Wärmereservoirs angeglichen haben, nimmt man ein weiteres Wärmereservoir dessen Temperatur T_2 kleiner als die bereits reduzierte Temperatur des Klotzes ist. Wenn der Klotz auf die Endtemperatur T_{final} abgekühlt ist, können Sie ihn via Wärmetransport wieder erwärmen. Dies geschieht, indem sie den Klotz, der die Temperatur T_{final} hat, mit einem Wärmereservoir der Temperatur T_2 in Berührung bringen. Dabei wird genau jene Energiemenge durch Wärmetransport vom Reservoir in den Klotz übertragen, welche vorhin vom Klotz in das Wärmereservoir geflossen ist (Dies, weil wir annehmen, dass die innere Energie des Klotzes nur durch dessen Volumen und Temperatur gegeben ist. Wenn sich das Volumen des Klotzes nicht ändert, dann muss beim Aufheizen des Klotzes von T_{final} auf T_2 genau jene Energie aufgewendet werden, welche beim Abkühlen in das umgebende Reservoir geflossen ist). Wenn der Klotz dann die Temperatur T_2 erreicht hat, bringen Sie ihn mit einem Reservoir der Temperatur T_1 in Kontakt. Die Energie, welche Sie brauchen, um den Klotz von T_1 auf T_{start} zu erwärmen, investieren. Wenn Sie die Unterteilung des Temperaturintervalls vonT_{start} in T_{final} immer feiner wählen, dann wird diese zu investierende Energie immer geringer und Sie nähern sich einem reversiblen Prozess.

Wenn Sie nun Probleme haben, sich reversible Prozesse vorzustellen und immer wieder ein kleine Schwierigkeiten in Ihrer Vorstellung der Realisierung eines solchen Prozesses auftreten, dann spricht dies für Ihre physikalische Intuition. Wir wiederholen noch einmal: reversible Prozesse gibt es nicht, Sie können sich höchstens einem solchen Prozess nähern. Gerade bei der reversiblen Wärmeübertragung wird auch klar, dass ein Prozess, wenn er denn reversibel wäre, unendlich lange dauert. Wie sie noch lernen werden, hängt der Energiestrom zwischen zwei Objekten unterschiedlicher Temperatur von der Temperaturdifferenz ab. Je kleiner dieser

Temperaturdifferenz ist desto geringer ist die Stärke des Energiestroms und desto länger dauert es, bis eine endliche Energiemenge geflossen ist. Für das weitere nehmen wir als Idealisierung an, es gäbe reversible und irreversible Prozesse.

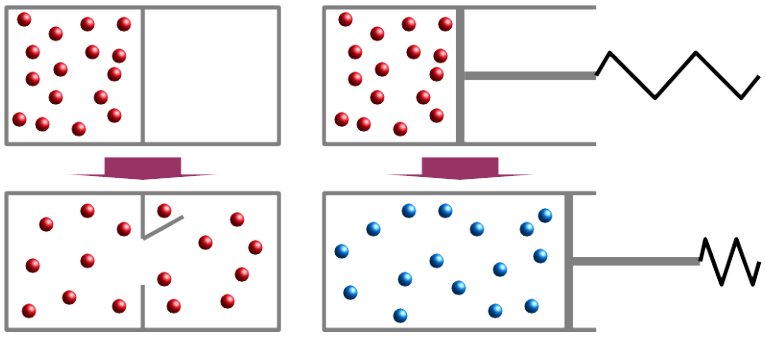


Abbildung 14.4: Die Veränderung des Volumens eines Gases kann reversibel oder irreversibel geschehen (s. Text).

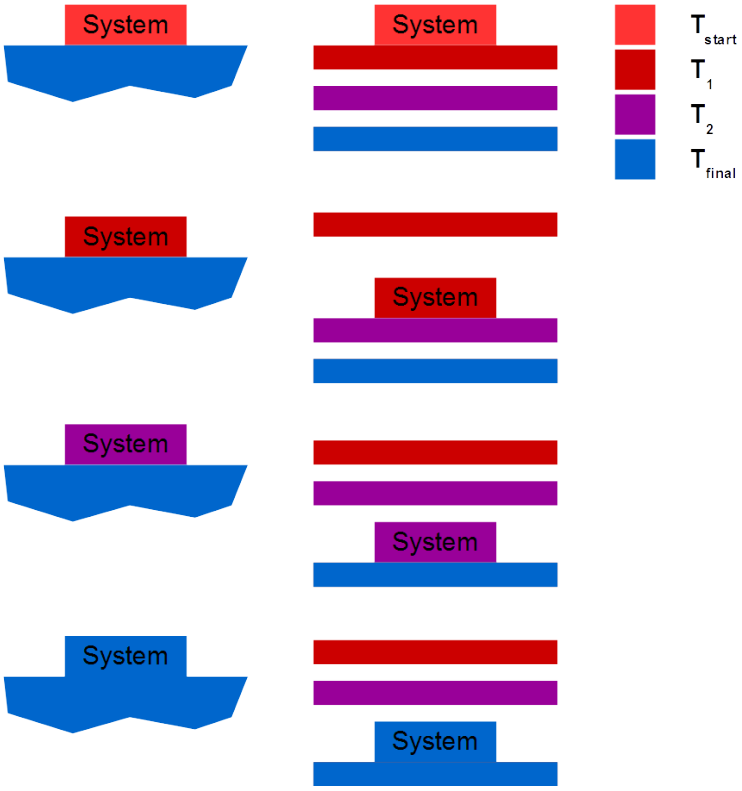


Abbildung 14.5: Die Veränderung der Temperatur eines Systems kann reversibel oder irreversibel geschehen (s. Text).

14.4.2 Arbeit und Wärme

Dies ist leider ein schwieriger Abschnitt. Das Schwierigste zuerst: **Arbeit** und **Wärme** beschreiben den Energieaustausch eines Systems mit seiner Umgebung. Dabei geht es nicht darum, wie die ausgetauschte Energie im System selber gespeichert war, sondern wie der Austausch stattfindet. Speziell geht es um die Frage, ob die Austauschprozesse reversibel oder irreversibel sind. Wie sie im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, können Sie ein System auf reversible oder irreversible Art und Weise abkühlen. Für das System ist es völlig gleichgültig, wie sie das tun. Es geht hierbei vielmehr um die Art und Weise, wie sie die durch Wärmekontakt übertragene Energie in der Umgebung speichern. Analoges gilt für die mechanische Energie; Sie können die Änderung des Volumens eines Gases dazu verwenden, eine Feder zu komprimieren. Die innere Energie des Gases wird dann in innere Energie der Feder verwandelt. Sie können das Volumen aber auch vergrössern ohne dass die Umgebung Energie aufnimmt.

Als wichtige Konsequenz aus diesen Erläuterungen muss sich ergeben, dass ein System keinen Arbeits- oder Wärmegehalt hat. Die innere Energie eines Systems besteht nicht aus einem Arbeits- und einem Wärmeanteil, sondern einfach aus potentieller und kinetischer Energie der Bestandteile, aus denen das System aufgebaut ist. Ob Sie aus dem System Wärme oder mechanische Leistung beziehen, hängt davon ab, wie Sie das System an die Umwelt koppeln.

14.5 Der erste und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Erste Formulierung

Die Thermodynamik wird durch vier Hauptsätze bestimmt; den nullten kennen wir bereits, hier diskutieren wir den ersten und den zweiten Hauptsatz.

14.5.1 Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

Theorem 14.2 — Erster Hauptsatz. Die Änderung der inneren Energie eines Systems ist gleich der Summe der an ihm verrichteten Arbeit (zugeführte Energie in jedweder Form ausser Wärme) und der zugeführten Wärme. Formal:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta Q. \tag{14.3}$$

Dabei steht ΔW für die zugeführte Arbeit und ΔQ für die zugeführte Wärme. ΔE bezeichnet die Änderung der inneren Energie dies Systems.

Etwas handlicher ist eine Formulierung mit Hilfe von Energieströmen:

$$\frac{dE}{dt} = I_{E,nontherm} + I_{E,term}. \tag{14.4}$$

Die wichtigste Interpretation des ersten Hauptsatzes bezieht sich auf die Erhaltung der Energie. Verändert sich die innere Energie eines Systems nicht, impliziert dies, dass sich die Summe der zugeführten und abgeleiteten Energien gerade aufheben müssen.

14.5.2 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik - Alltagsformulierung

Theorem 14.3 — Zweiter Hauptsatz (Alltagsformulierung)(Erster Hauptsatz.] Wenn zwei Systeme miteinander in Wärmekontakt stehen (also thermische Energie austauschen können) aber keine andere Form von Energie ausgetauscht wird, fliesst die Energie immer vom System mit der höheren zum System mit der tieferen Temperatur.

Diese Formulierung des zweiten Hauptsatzes beruft sich auf Ihr intuitives Verständnis des Begriffs der Temperatur. Wie eingangs erwähnt, berufen wir uns hier nicht auf eine physikalisch gut begründete Definition, sondern auf ein Konzept, welches sich auf Ihre Sinneswahrnehmung stützt. Eine physikalisch gut begründete Definition würde Wärme und Arbeit als Grundgrössen nehmen, und aus diesen die Temperatur konstruieren. Für unsere Zwecke ist ein intuitives Verständnis von Temperatur aber ausreichend.

14.5.3 Entropie - Der zweite Hauptsatz formal

Wir führen nun den Begriff der Entropie ein. Kann man sich unter Entropie etwas vorstellen? Ja, man kann. Es erfordert allerdings ein Verständnis des Zusammenhangs zwischen den mikroskopischen Eigenschaften eines Systems und dessen makroskopischen Grössen. Für diese Vorlesung macht es am meisten Sinn, wenn sie Entropie als reine Verrechnungsgrösse betrachten. Sie werden im folgenden sehen, warum wir sie einführen; in unserer Darstellung ist sie aber nichts anderes, als eine bequeme Möglichkeit, den zweiten Hauptsatz auf formale Art und Weise wiederzugeben. Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die Entropie als Zustandsgrösse (ähnlich wie das Volumen oder die Teilchenanzahl) strikte begründet werden kann. Wir führen dies hier allerdings nicht durch. Für eine schöne Darstellung des Begriffs der Entropie empfehlen wir folgende Science Slam Poetry: `https://www.youtube.com/watch?v=z64PJwXy--8`. Zumindest konzeptuell wird innerhalb von 12 Minuten alles Wichtige gesagt.

Definition 14.3 — Entropie:. Wir nehmen an, ein System tausche mit seiner Umgebung einen thermischen Energiestrom $I_{E,therm}$ aus. Dann definieren wir den Entropiestrom I_S durch:

$$I_S = \frac{I_{E,therm}}{T} \tag{14.5}$$

wobei T die Temperatur des Systems, aus welchem die thermische Energie strömt, bedeutet.

Die Entropieänderung ΔS in einem System können wir nun einfach durch eine Integration über die Zeit erhalten:

$$\Delta S = \int_{t_{start}}^{t_{end}} I_S dt. \tag{14.6}$$

Auf den ersten Blick könnte man meinen, diese Grösse *Energie pro Zeit und Kelvin* sei doch recht willkürlich gewählt. Wenn nun aber thermische Energie von einem System mit Temperatur T_1 in ein System mit Temperatur T_2 fliesst ($T_1 > T_2$) machen wir eine interessante Beobachtung. Der Energiestrom I_{E1}, der aus dem ersten System fliesst, ist gleich den negativen des Energiestroms I_{E2}, der in das zweite System hineinfliesst. Dies gilt wegen der Energieerhaltung. Damit haben wir:

$$-I_{E1} = I_{E2} \tag{14.7}$$

$$-T_1 I_{S1} = T_2 I_{S2} \tag{14.8}$$

$$-\frac{T_1}{T_2} I_{S1} = I_{S2} \tag{14.9}$$

(Beachten Sie, dass wenn Wärme aus dem ersten System in das zweite System fliesst, der Energiestrom aus dem ersten System negativ, derjenige in das zweite System positiv ist.) Da $T_1 > T_2$ folgt sofort, dass $I_{S2} > I_{S1}$. Aus unserer Definition ergibt sich also ganz automatisch, dass bei einem Wärmeaustausch zwischen zwei Systemen unterschiedlicher Temperatur die Summe der Entropien der beiden beteiligten Systeme insgesamt anwächst.

Mit Hilfe der Entropie können wir den zweiten Hauptsatz formal definieren:

Theorem 14.4 — Zweiter Hauptsatz (formal).] Zu jedem Wärmestrom $I_{E,therm}$ gehörten Entropiestrom I_S und es gilt $I_E = TI_S$. Dabei gibt T die Temperatur des Systems an, aus welchem/in welches die Ströme heraus/hineinfliessen.

Für ein einzelnes System gilt:

$$\frac{dS}{dt} = \sum I_{S,i} + \Pi_S \tag{14.10}$$

Dabei bezeichnet $\sum I_{S,i}$ die Summe aller in Verbindung mit Wärmeflüssen ins System / aus dem System fliessenden Entropieströme und Π_S ist die Rate der im System produzierte Entropie. Es gilt immer $\Pi_S \geq 0$.

Sind mehrere Systeme an einem Prozess beteiligt, gilt für die Gesamtbilanz der Entropieveränderung:

$$\sum_i \frac{dS_i}{dt} \geq 0. \tag{14.11}$$

Wir machen ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die Entropie keine Erhaltungsgrösse ist. Sie kann im Laufe der Zeit anwachsen. Bezogen auf ein System und seine Umgebung kann Entropie niemals absinken.

Hierzu einige Bemerkungen:

- Selbstverständlich kann die Entropie in einem einzelnen System absinken; es gibt schliesslich Kühlschränke. Allerdings kann ein Kühlschrank nicht ohne Energiezufuhr betrieben werden.
- Das vom zweiten Hauptsatz geforderte Anwachsen der Entropie bezieht sich immer auf die Gesamtbilanz der Entropie, also die Entropie in einem System und die Entropie seiner gesamten Umgebung (das gesamte Universum).
- Das Anwachsen der Entropie ist eine weniger abstrakte Vorstellung als Sie eventuell auf den ersten Blick meinen könnten. Viele PhysikerInnen bringen das Anwachsen der Entropie mit dem Vergehen der Zeit (oder zumindest unserem Gefühl des Vorwärtsschreitens der Zeit) in Verbindung. In der Tat sehen Sie bei Filmen, welche Prozesse im Alltag beschreiben, in der Regel sofort, ob der Film vorwärts oder rückwärts läuft. Dies ist eigentlich verwunderlicher, als es auf den ersten Blick aussieht. Die grundlegenden physikalischen Gesetze (Newton'sche Mechanik) lassen jede Bewegung, die vorwärts laufen kann, auch rückwärts zu. Das Anwachsen der Entropie ist eine Formalisierung der Tatsache, dass wir zwar sehen können, wie eine Tasse zu Boden fällt und dann zerbricht, das Gegenteil aber in Realität nie passiert. Zwei Körper unterschiedlicher Temperatur werden, wenn sie thermischen Kontakt stehen, allmählich ihre Temperatur angleichen. Das Gegenteil ist nie der Fall, es sei denn, Sie führen den Körpern Energie zu. Diese Überlegungen sind übrigens sehr schön illustriert im oben erwähnten Science Slam Poetry Clip.

Ohne dass wir diesem Detail diskutieren, gilt die entscheidende Feststellung, dass es zwischen der produzierten Entropie in einem Prozess unter Frage, ob dieser Prozess reversibel oder irreversibel ist, einen Zusammenhang gibt.

Law 14.1 Bei einem reversiblen Prozess wird keine Entropie produziert. Bei einem irreversiblen Prozess ist die Produktionsrate der Entropie immer grösser als null. Ebenso gelten die Umkehrung: wenn die Entropieproduktionsrate bei einem Prozess null ist, dann ist der Prozess reversibel; falls die Entropieproduktionsrate positiv ist handelt es sich um einen irreversiblen Prozess.

14.6 Thermische Maschinen

Im Folgenden werden wir thermische Maschinen studieren. Dabei wird unser Begriff der thermischen Maschine sehr weit gefasst sein. Wir werden so weit gehen, sogar Wände die Wärme leiten als Maschinen zu interpretieren. Dies machen wir, damit wir einen einheitlichen Formalismus verwenden können.

In ihrer allgemeinen Form wird eine thermische Maschine durch Fig. 14.6 repräsentiert. Eine allgemeine thermische Maschine nimmt Energie auf, gibt Energie

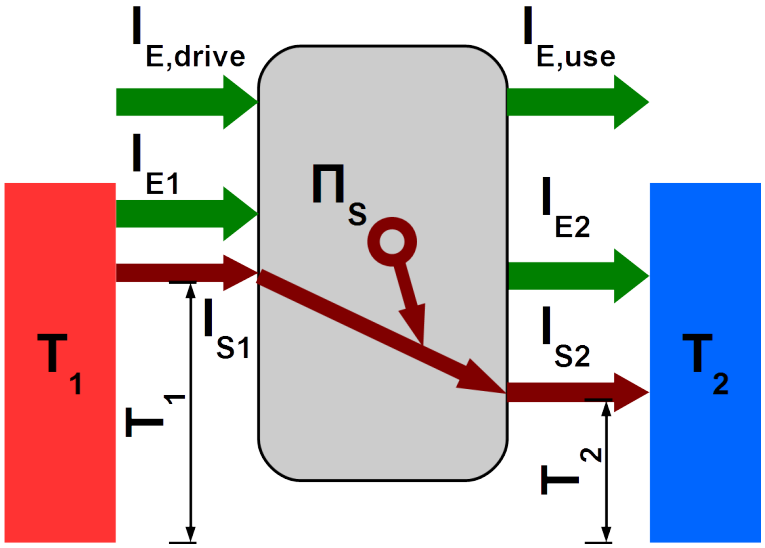


Abbildung 14.6: Prozessdiagramm einer allgemeinen thermischen Maschine.

ab und produziert Entropie. Dabei bedeuten die einzelnen Ströme und Produktionsraten in Fig. 14.6 folgendes:

- I_{E1} bezeichnet die thermische Energie (Wärme), welche von einem Reservoir mit Temperatur T_1 in die Maschine einströmt.

- $I_{S1} = \frac{I_{E1}}{T_1}$ gibt den zu I_{E1} gehörenden Entropiestrom.

- $I_{E,drive}$ bezeichnet die nicht - thermische Antriebsenergie der Maschine, zum Beispiel elektrische oder mechanische Energie.

- I_{E2} bezeichnet die thermische Energie (Wärme), welche von der Maschine in ein Reservoir mit Temperatur T_2 abgegeben wird.

- $I_{S2} = \frac{I_{E2}}{T_2}$ gibt den zu I_{E2} gehörenden Entropiestrom.

- $I_{E,use}$ bezeichnet die nicht - thermische Nutzenergie der Maschine, zum Beispiel also die abgegebene mechanische Leistung. Wir betonen hier, dass die Nutzenergie sich ausschliesslich auf nicht - thermische Energien bezieht. Leicht inkonsequent analysieren wir auch zum Beispiel Öfen mit diesem Formalismus; wir sind uns dabei bewusst, dass bei einem Ofen $I_{E,use} = 0$ ist und die eigentliche Nutzenergie eines Ofens die abgegebene thermische Energie ist.

Für eine thermische Maschine, wie sie in 14.6 gegeben ist, gelten folgende Beziehungen allgemein:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= I_{E1} + I_{E,drive} - I_{E2} - I_{E,use} \\
\frac{dS}{dt} &= I_{S1} - I_{S2} + \Pi_S \\
I_{E1} &= T_1 I_{S1} \\
I_{E2} &= T_2 I_{S2}
\end{aligned} \tag{14.12}$$

Dabei bezeichnet E die innere Energie der Maschine und S die Entropie in der Maschine. Der Term Π_S beschreibt die Energieproduktion in der Maschine. Die Grössen I_{S1}, I_{S2} und Π_S haben die Einheit Watt / Kelvin.

Die Gleichungen in Gls. 14.12 gelten immer; für eine spezielle Situation müssen diese Gleichungen durch weitere Beziehungen ergänzt werden. Dabei gibt es zwei besonders wichtige Fälle zu beachten:

- Wenn wir wissen, dass die betrachtete Maschine reversibel läuft, bzw. **ideal** ist, dann gilt $\Pi_S = 0$. Im Betrieb der Maschine wird also keine Entropie produziert.

- Meist betrachten wir Maschinen im stationären Zustand; dies bedeutet, dass die Maschine ihren Energiegehalt und speziell ihre Temperatur nicht ändert. Dies bedeutet dann $\frac{dE}{dt} = 0$ und $\frac{dS}{dt} = 0$.

14.7 Wirkungsgrad und Carnot - Limit

In Bezug auf thermische Maschinen können wir den Wirkungsgrad η sehr präzise definieren:

$$\eta = \left| \frac{I_{E,use}}{I_{E1}} \right| . \tag{14.13}$$

Wir betonen ausdrücklich, dass diese Definition des Wirkungsgrades, also das Verhältnis zwischen abgegebenen Nutzenergie und aufgenommener Wärmeenergie sich an klassischen thermischen Maschinen wie zum Beispiel Dampfmaschinen orientiert. Wenn man den Wirkungsgrad einer Wärmepumpe oder eines Kühlschranks angeben will, dann braucht man andere und von der detaillierten Fragestellung abhängige Definitionen des Wirkungsgrades. Die Betragszeichen stehen um zu garantieren, dass der Wirkungsgrad eine positive Zahl ist[7]. Um Sie nicht zu verwirren beschränken wir uns in dieser Vorlesung auf diese Definition, beschreiben aber am Ende des Abschnitts eine Reihe von situationsspezifischen Alternativen.

14.7.1 Carnot - Limit

Erstaunlicherweise können wir bereits unter diesen sehr allgemeinen Annahmen etwas ganz Interessantes aussagen. Für die folgende Berechnung gehen wir davon aus, dass eine Maschine nur thermische Energie bei T_1 aufnimmt ($T_1 > T_2$), d.h. $I_{E,drive} = 0$. Die Maschine kann thermische Energie bei T_2 abgeben, zusätzlich liefert die Maschine Nutzenergie. Wenn wir davon ausgehen, dass die Maschine im stationären Zustand läuft, bekommen wir als spezielle Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 0, \\ \frac{dS}{dt} &= 0, \\ I_{E,drive} &= 0. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Das bedeutet dann mit den Gls. 14.12:

$$\begin{aligned} I_{E1} - I_{E2} - I_{E,use} &= 0, \\ I_{S1} - I_{S2} + \Pi_S &= 0. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Einsetzen für den Wirkungsgrad ergibt (Wir lassen hier die Betragszeichen weg, da es klar ist, dass die Nutzenergie nicht grösser sein kann als die aufgenommene

[7] Nicht bei einfachen Systemen, aber bei komplizierteren Systemen können sich manchmal Probleme bei der Wahl der Referenzrichtung der Energieströme ergeben. Die Benützung der Betragszeichen umgeht diese.

thermische Energie.):

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{I_{E,use}}{I_{E1}} \\
&= \frac{I_{E1} - I_{E2}}{I_{E1}} \\
&= \frac{T1 I_{S1} - T_2 I_{S2}}{T_1 I_{S1}} \\
&= \frac{T1 I_{S1} - T_2 I_{S2}}{T_1 I_{S1}} \\
&= \frac{T1 I_{S1} - T_2 (I_{S1} + \Pi_S)}{T_1 I_{S1}} \qquad (14.16)
\end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass $\Pi_S \geq 0$. Damit wird der maximal mögliche Wirkungsgrad einer thermischen Maschine gerade dann erreicht, wenn $\Pi_S = 0$, die Maschine also ideal läuft.

Eine reversible/ideale thermische Maschine erreicht also den maximalen, sogenannten **Carnot - Wirkungsgrad**(Das Carnot - Limit) η_C:

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (14.17)$$

Diese Aussage ist in gewissem Sinne recht erstaunlich; bedeutet sie doch das eine reversible thermische Maschine einen Wirkungsgrad hat, der gänzlich unabhängig von ihrer Konstruktion ist und nur von den Temperaturen ihrer beiden Wärmereservoirs abhängt. Wenn Sie davon ausgehen, dass das Wärmereservoir, in welches Wärme abgegeben wird, eine Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunkts hat ($T_2 > 0$), dann sehen Sie, dass auch eine ideale Maschine immer einen Wirkungsgrad kleiner als eins hat. Mit anderen Worten: thermische Energie kann niemals vollständig in Nutzenergie verwandelt werden. Die Kühltürme eines Heizkraftwerks sind somit also eine Notwendigkeit und nicht etwa auf ungenügende Planung zurückzuführen.

Sie werden sich nun unter Umständen sagen, dass die meisten Maschinen, die Sie verwenden keine thermischen Maschinen sind. Machen Sie sich dabei aber klar, dass auch ein Benzinmotor letztlich deswegen funktioniert, weil Brennstoff verbrannt wird der dann Gase erhitzt. Auch sämtliche erneuerbaren Energien (Sonne, Wind, Wasser) werden letztlich durch Temperaturunterschiede angetrieben, welche sich durch die Einstrahlung der Sonne ergeben.

!!! Beachten Sie, das bei der Berechnung des Carnot - Wirkungsgrades (und auch bei allen anderen Rechnungen in der Thermodynamik) sämtliche Berechnungen immer in Kelvin durchgeführt werden müssen! Die Verwendung von Grad Celsius ist eigentlich nur statthaft, wenn Sie mit Temperaturdifferenzen rechnen.

Context 14.2 Häufig liest man, dass das Ziel der technischen Entwicklung darin besteht, Maschinen immer effizienter zu machen. Dagegen ist grundsätzlich nichts einzuwenden. Es gibt allerdings einen wichtigen Punkt zu beachten: eine Steigerung der Effizienz, speziell einer Wärmekraftmaschine, bedeutet in der Regel eine Reduktion der Outputleistung. Dies ist bei Wärmekraftmaschinen relativ einfach zu verstehen: um Wärme in eine Maschine hinein zu bekommen, brauchen Sie ein Temperaturgefälle. Wie sie noch sehen werden, bedeutet ein Temperaturgefälle, das Entropie produziert wird. Wenn eine Effizienzsteigerung bedeutet, dass die Entropieproduktion möglichst klein gehalten werden muss, heisst das, dass Sie Temperaturgefälle möglichst klein halten sollten. Das wiederum bedeutet aber (bis im folgenden noch sehen werden), dass die thermischen Energieströme klein werden. Damit reduziert sich natürlich auch die Outputleistung.

Wir illustrieren das mit einer Analogie. Stellen Sie sich vor, sie würden einen Pommes - Frites - Stand betreiben. Nun können Sie die Kartoffeln schnell und damit wohl auch nachlässig schälen. Sie werden dadurch relativ viel Abfall produzieren. Sie brauchen also relativ viele Kartoffeln pro Schale Pommes Frites. Natürlich können Sie die Kartoffeln auch sehr vorsichtig und mit einer Rasierklinge schälen. Dadurch wird die Abfallmenge reduziert. Pro Schale Pommes Frites brauchen Sie weniger Kartoffeln. Das ist an sich gut, nur wird das vorsichtige Schälen mehr Zeit brauchen. Der Gesamtausstoss an Pommes Frites dürfte so gering werden, dass sie trotz hoher Effizienz ihren Stand nicht rentabel betreiben können. Effizienz und Effektivität sind im täglichen Leben manchmal nicht gleichzeitig zu erreichen.Nun könnte man sagen, dass man halt dann einfach mehr Maschinen braucht. Gerade wenn es um Fragen der Energieeffizienz geht, ist dies aber nicht unbedingt die beste Lösung. Gerade wenn man Umweltbilanzen erstellt, ist es wichtig, nicht nur auf die Energiebilanz im Betrieb sondern auch auf die zur Herstellung einer Maschine verwendete Energie zu achten. Eine im Betrieb effiziente Lösung, welche aber zu ihrer Herstellung viel Energie erfordert ist aus ökologischer Sicht nicht immer die beste Lösung.

14.7.2 Alternativen zur Definitionen des Wirkungsgrads

Will man zum Beispiel Wärmepumpen diskutieren, interessiert man sich natürlich nicht für die abgegebene Nutzleistung. In gewissem Sinne interessiert einem bei einer Wärmepumpe die produzierte Abwärme. Konsequenterweise definiert man dann auch den sogenannten coefficient of performance" cop . Dieser ist definiert durch:

$$cop = \frac{|I_{E2}|}{I_{E,drive}}. \tag{14.18}$$

Der cop sagt Ihnen also, wie viel Watt thermische Leistung Sie pro Watt Antriebsleistung erhalten. Natürlich sollte der $cop > 1$ sein, andernfalls könnten Sie ja auch die Antriebsleistung direkt in Heizenergie verwandeln!

Die Situation der Wärmepumpe ist illustriert in Fig. 14.7. Eine einfache Rechnung zeigt, das für eine reversibel arbeitende Wärmepumpe gilt (reversibel heisst ja, dass in der Wärmepumpe keine Entropie produziert wird, d.h. $I_{S1} = I_{S2}$):

$$\begin{aligned} cop_{rev} &= \frac{|I_{E2}|}{I_{E,drive}}, \\ &= \frac{T_2 I_{S2}}{I_{E2} - I_{E1}}, \\ &= \frac{T_2 I_{S2}}{T_2 I_{S2} - T_1 I_{S1}}, \\ &= \frac{T_2 I_{S1}}{T_2 I_{S1} - T_1 I_{S1}}, \\ &= \frac{T_2}{T_2 - T_1}. \end{aligned} \tag{14.19}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile verwendet, das im stationären Betrieb gilt: $I_{E1} + I_{E,drive} - I_{E2} = 0$.In der vierten Zeile verwenden wir dann die Tatsache, dass für reversible Maschinen gleich viel Entropie in die Maschine hineinfliesst wie wieder herausfliesst.

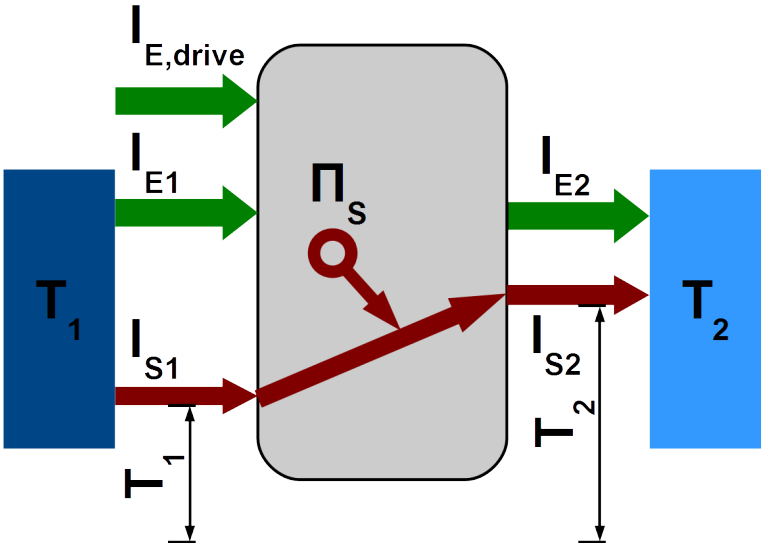


Abbildung 14.7: Prozessdiagramm einer Wärmepumpe.

Für Kühlschränke definiert man:

$$\eta_{fridge} = \frac{|I_{E1}|}{I_{E,drive}}. \tag{14.20}$$

Dies macht Sinn, weil η_{fridge} Ihnen sagt, wie viel Watt thermische Leistung Sie aus dem Kühlgut pro aufgewendete Watt Antriebsleistung abführen.

14.8 Wärmekapazität und Entropiekapazität

Hinweis: In der Vorlesung wurde der Begriff der Entropiekapazität eingeführt. Ich habe mich entschlossen, auf diesen Begriff zu verzichten; er ist also nicht prüfungsrelevant und wird nicht weiter diskutiert.

Bis jetzt haben wir zwar mehrmals gesagt, dass die Erhöhung der inneren Energie E eines Körpers zu einer Erhöhung von dessen Temperatur T führt, wir haben dies aber nie quantifiziert. Grundsätzlich ist der Zusammenhang relativ einfach; der Energiestrom in ein System führt zu einer Veränderung der Temperatur des Systems. Dies kann wie folgt formalisiert werden:

$$\frac{dE}{dt} = C(T)\frac{dT}{dt}. \tag{14.21}$$

Dabei ist $C(T)$ eine vom System und eventuell der Temperatur abhängige Funktion, die **Wärmekapazität**. Häufig hängt $C(T)$ in den uns interessierenden Temperaturbereichen nur sehr schwach von der Temperatur ab und wird dann als Konstante angenommen. Unter dieser Annahme kann man dann sagen:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= C(T)\frac{dT}{dt}, \\
\Rightarrow \Delta E &= E(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} C(T)\frac{dT}{dt}dt, \\
\Rightarrow &= E(t_0) + \int_{T(t_0)}^{T(t_1)} C(T)dT, \\
\Rightarrow &\approx E(t_0) + C(T)(T_1 - T_0).
\end{aligned}$$

Dabei machen wir in der letzten Zeile von der Annahme Gebrauch, dass wir die Wärmekapazität als konstant betrachten können. Weiter benützen wir die Schreibweisen $T(t_0) = T_0, T(t_1) = T_1$; In der Praxis müssen wir uns über die Grösse der Zeiten t_0, t_1 in der Regel keine Gedanken machen; wir heizen einfach so lange, bis wir die Temperatur T_1 erreicht haben.

Die Gl. 14.21 ist eine grobe Vereinfachung, welche eine zentrale Fragestellungen der Thermodynamik nicht wiedergibt. Wir unterlassen es gänzlich, in Gl.

14.21 zu diskutieren, unter welchen Randbedingungen die Energiezufuhr stattfindet. Für viele Systeme, z.B. Gase, müssen wir das aber tun (und werden es im entsprechenden Kapitel auch machen). Der Grund ist illustriert in Fig. 14.8. In der oberen Bildhälfte sehen Sie ein Gas welches bei konstantem Volumen erwärmt wird. Die zugeführte Energie führt zu einer Erhöhung der mittleren kinetischen Energie der Gasteilchen. In der unteren Bildhälfte geschieht die Erwärmung unter Beibehaltung des Druckers. Wir gehen nun davon aus, dass so viel Energie zugeführt wird das das erwärmte Gas dieselbe Temperatur (D. h. die Gasteilchen haben dieselbe kinetische Energie) hat wie in der oberen Bildhälfte. Die Erhöhung der kinetischen Energie führt zu einer Erhöhung des bei Kollisionen mit der Wand ausgetauschten Impulses. Damit steigt der Druck im Gefäss und der Kolben steigt nach oben. Wir müssen also bei einer Erwärmung nicht nur die kinetische Energie der Teilchen erhöhen, sondern zusätzlich auf ein Gewicht anheben. Um dieselbe Temperaturerhöhung zu erreichen braucht es also mehr Energie. Die beiden Fälle verlangen nach einer unterschiedlichen Wärmekapazität. Es hat sich eingebürgert, die Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit C_V und die Wärmekapazität bei konstantem Druck mit C_p zu bezeichnen.

Gl. 14.21 gibt den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur eines beliebigen Körpers an. Natürlich braucht es zur Erwärmung einer doppelten Menge Wasser auf eine bestimmte Temperatur die doppelte Menge Energie. Da man nicht für jeden Körper oder jede Wassermenge eine eigene Wärmekapazität definieren möchte, führt man die sogenannte **spezifische Wärmekapazität** ein. Sie wird in der Regel durch ein kleines c bezeichnet und gibt an wie viel Energie Sie pro Kilogramm aufbringen müssen um die Temperatur einer Substanz um 1 K zu erhöhen. Wir können den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur dann auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{dE}{dt} = mc\frac{dT}{dt} \tag{14.22}$$

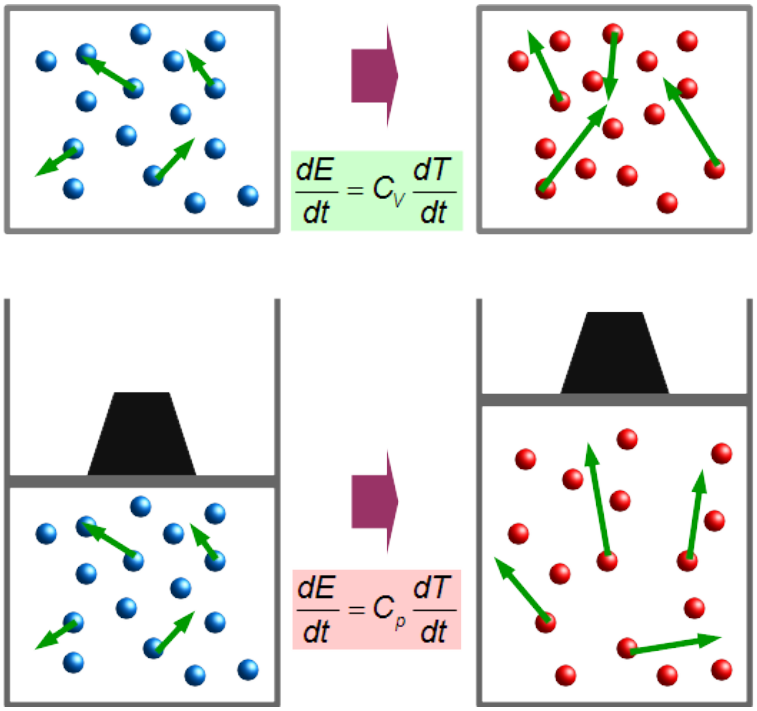


Abbildung 14.8: Aufheizen eines Gases unter verschiedenen Bedingungen. Im obigen Bild wird das Volumen konstant gehalten und die Erwärmung bedeutet im wesentlichen, dass die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle steigt. In der unteren Bildhälfte wird der Druck konstant gehalten. Dabei steigt nicht nur die mittlere kinetische Energie der Teilchen sondern auch ein Gewicht wird angehoben.

Allgemeines Lösungsverfahren
Anwendung auf Spezialfälle
Wasserkocher
Wärmepumpe und Tauchsieder - Ein Vergrleich
Wärmeleitung
Grundlagen
Reale Wände
Räumlich heterogene Systeme

15 — Thermische Maschinen

Das Kapitel ist nur für BI prüfungsrelevant.

Im letzten Kapitel haben wir das Konzept des Prozessdiagramms eingeführt. Wir werden in diesem Kapitel einige konkrete Anwendungen studieren; dabei werden wir soweit gehen, sogar eine Wand, welche Wärme leitet, als thermische Maschine zu verstehen. Sie werden sehen, dass der von uns verwendete Formalismus es Ihnen ermöglicht, eine Vielzahl von Phänomenen mit demselben Apparat zu behandeln.

15.1 Allgemeines Lösungsverfahren

(Wir fassen hier noch einmal einige Definitionen und Formulierungen aus dem vorangehenden Kapitel zusammen. Dies, um Ihnen das Blättern zu ersparen.) Eine allgemeine thermische Maschine ist in Fig. 15.1 gezeigt. Sie nimmt Energie auf, gibt Energie ab und produziert Entropie. Dabei bedeuten die einzelnen Ströme und Produktionsraten in Fig. 15.1 folgendes:

- I_{E1} bezeichnet die thermische Energie (Wärme), welche von einem Reservoir mit Temperatur T_1 in die Maschine einströmt.
- $I_{S1} = \frac{I_{E1}}{T_1}$ gibt den zu I_{E1} gehörenden Entropiestrom.
- $I_{E,drive}$ bezeichnet die nicht - thermische Antriebsenergie der Maschine, zum Beispiel elektrische oder mechanische Energie.
- I_{E2} bezeichnet die thermische Energie (Wärme), welche von der Maschine in ein Reservoir mit Temperatur T_2 abgegeben wird.
- $I_{S2} = \frac{I_{E2}}{T_2}$ gibt den zu I_{E2} gehörenden Entropiestrom.

- $I_{E,use}$ bezeichnet die nicht - thermische Nutzenergie der Maschine, zum Beispiel also die abgegebene mechanische Leistung. Wir betonen hier, dass die Nutzenergie sich ausschliesslich auf nicht - thermische Energien bezieht. Leicht inkonsequent analysieren wir auch zum Beispiel Öfen mit diesem Formalismus; wir sind uns dabei bewusst, dass die Nutzenergie eines Ofens eigentlich die abgegebene thermische Energie ist.

Für eine thermische Maschine, wie sie in 15.1 gegeben ist, gelten folgende Beziehungen allgemein:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= I_{E1} + I_{E,drive} - I_{E2} - I_{E,use} \\
\frac{dS}{dt} &= I_{S1} - I_{S2} + \Pi_S \\
I_{E1} &= T_1 I_{S1} \\
I_{E2} &= T_2 I_{S2} \\
\frac{dE}{dt} &= mc\frac{dT}{dt}
\end{aligned} \tag{15.1}$$

Dabei bezeichnet E die innere Energie der Maschine und S die Entropie in der Maschine. Die Einheit von Energieströmen immer Watt W. Der Term Π_S beschreibt die Energieproduktion in der Maschine. Die Grössen I_{S1}, I_{S2} und Π_S haben die Einheit Watt / Kelvin. Wir weisen noch einmal ausdrücklich darauf hin, dass wir in der letzten Gleichung mit c die spezifische Wärmekapazität bezeichnen; diese ist in der Regel eine Materialkonstante (zumindest über begrenzte Temperaturbereiche) und hängt einerseits von den Eigenschaften des betrachteten Körpers und andererseits von den Details der Prozessführung (z.B. konstantes Volumen oder konstanter Druck) ab. Es wird nun im folgenden darum gehen, für die Analyse spezifischer Vorgänge weitere Bedingungen an die fliessenden Energie und Entropieströme zu stellen. Zwei ganz wichtige Fälle sind hierbei:

- Für ein System im stationären Zustand, d. h. bei konstanten Energie- und Entropieflüssen und einer konstanten Systemtemperatur gilt:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0. \tag{15.2}$$

- Falls es sich beim betrachtenden System um eine ideale oder reversible Maschine handelt, wird im System selber keine Entropie produziert. Das bedeutet, die Entropie Produktionsrate ist gleich null:

$$\Pi_S = 0. \tag{15.3}$$

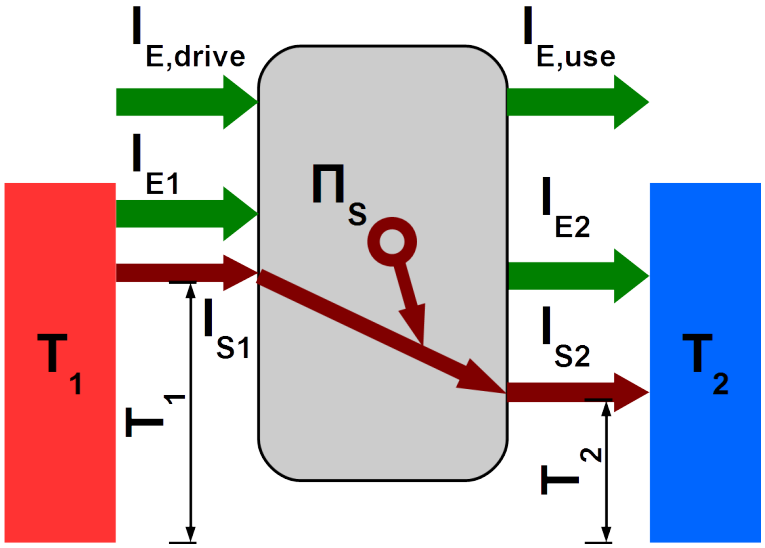


Abbildung 15.1: Allgemeine thermische Maschine. Auch wenn in der Figur $T_1 > T_2$ und dieser meist auch Sinn macht, ist der dargestellte Formalismus selbverständlich auch dann anwendbar, wenn $T_1 < T_2$.

15.2 Anwendung auf Spezialfälle

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Beispielprobleme. Es soll darum gehen, die Analyse von thermischen Systemen mithilfe der Gls. 15.1 zu illustrieren.

15.2.1 Wasserkocher

Fragestellung: Ein Wasserkocher braucht eine Inputleistung von 330W. Die Wassertemperatur betrage 20 °C und es wird keine Entropie an die Umgebung abgegeben (Isoliergefäss). Wie gross ist die Entropieproduktionsrate?

Das erste Problem, welches wir zu lösen haben ist: wir müssen bestimmen was wir als System betrachten. Im Gegensatz zur Vorlesung wo wir das etwas anders gemacht haben, ist unser System hier nur der Wasserkocher und nicht sein Inhalt, also das Wasser. Wir betrachten das Wasser als Reservoir, in welches der Wasserkocher thermische Energie abgibt (s. Fig. 15.2). Zusätzlich zu den Gls. 15.1 wird gelten:

$$I_{E1} = I_{S1} = 0. \tag{15.4}$$

Diese Gleichung gilt, weil keine thermische Energie ins System hineinfliesst. Für den Wasserkocher selber gelten die Stationaritätsannahmen:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0. \tag{15.5}$$

Hierbei bezeichnet E und S die innere Energie, bzw. Entropie des Wasserkocher, nicht aber des Wassers (diese werden mit E_W, S_W bezeichnet). Damit ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{E,drive} - I_{E2} \\ 0 &= \Pi_S - I_{S2} \end{aligned} \tag{15.6}$$

Zusammen mit $I_{E2} = T_2 I_{S2}$ folgt nun sofort:

$$\Pi_S = \frac{I_{E,drive}}{T_2}. \tag{15.7}$$

Fragestellung: Die Wassertemperatur betrage anfänglich 20 °C. Das Wasser (Masse m) erwärmt sich während 10 s linear auf 22 °C. Wir gehen davon aus, dass das Wasser keine Entropie an die Umgebung abgibt (Isoliertes Gefäss). Wie gross ist die in dieser Zeit vom Tauchsieder abgegebene Entropie?

Wichtig ist jetzt zu verstehen, dass das System, welches wir untersuchen, das Wasser und nicht mehr der Wasserkocher ist. Grundsätzlich gilt für die innere Energie des Wassers:

$$\frac{dE_W}{dt} = mc\frac{dT_2}{dt} \tag{15.8}$$

Dabei bezeichnet $c = 4185 Jkg^{-1}K^{-1}$ die spezifische Wärmekapazität des Wassers. Die lineare Erwärmung des Wassers bedeutet, dass sich das Wasser mit einer konstanten Rate erwärmt:

$$\frac{dT_2}{dt} = 0.2Ks^{-1}. \tag{15.9}$$

Wasser als thermisches System nimmt weder eine Antriebsleistung auf noch gibt es eine Nutzenergie ab. Für das Wasser gelten damit die Gleichungen:

$$\frac{dE_W}{dt} = I_{E2} - I_{E3} \tag{15.10}$$

$$\frac{dS_W}{dt} = I_{S2} + \Pi_{SW} - I_{S3} \tag{15.11}$$

Da sich das Wasser in einem Isoliergefäss befindet, gilt weiter:

$$I_{E3} = I_{S3} = 0. \tag{15.12}$$

Die Fragestellung ist eigentlich recht einfach: wir müssen berechnen, wie gross die Menge der durch I_{S2} ins Wasser transportierten Entropie ist. Der vorhergehenden

Aufgabe entnehmen wir, dass für den vom Wasserkocher ins Wasser fliessenden Entropiestrom gilt:

$$I_{S2} = \frac{I_{E,drive}}{T_2(t)}. \tag{15.13}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Temperatur T_2 sich mit der Zeit ändert (in der Aufgabenstellung erfahren wir genau, wie). Das bedeutet, wir müssen folgendes Integral berechnen:

$$\Delta S = \int_0^{10s} I_{S2} dt. \tag{15.14}$$

Wir halten damit:

$$\Delta S = \int_0^{10s} \frac{I_{E,drive}}{T_2(0) + \frac{2K}{10s}t} dt. \tag{15.15}$$

Dieses Integral kann formal berechnet werden (es gibt eine Stammfunktion). Wir erhalten:

$$\Delta S = I_{E,drive} \frac{2K}{10s} \log\left(\frac{T_2(0) + 2K}{T_2(0)}\right) = 11.2JK^{-1}. \tag{15.16}$$

Dabei bezeichnet log den Logarithmus zur Basis e (den natürlichen Logarithmus).

Es bliebe nur noch zu diskutieren, was mit der Entropieproduktion im Wasser Π_{SW} geschieht. An den aufmerksamen Studierenden wird kaum entgangen sein, dass sich der Dozent zu diesen Fragen immer aus geschwiegen hat. Die Situation ist die folgende: im Wasser selber wird in der Tat Entropie produziert. Dies geschieht, wie Sie im folgenden Abschnitt sehen werden, aufgrund von Wärmetransporten. Mit unseren Methoden können wir dieses Phänomen aber nicht beschreiben. Wir gehen immer davon aus, dass das Wasser gut gemischt ist und überall dieselbe Temperatur hat. Diese Näherung ist im Übrigen nicht allzu schlecht.

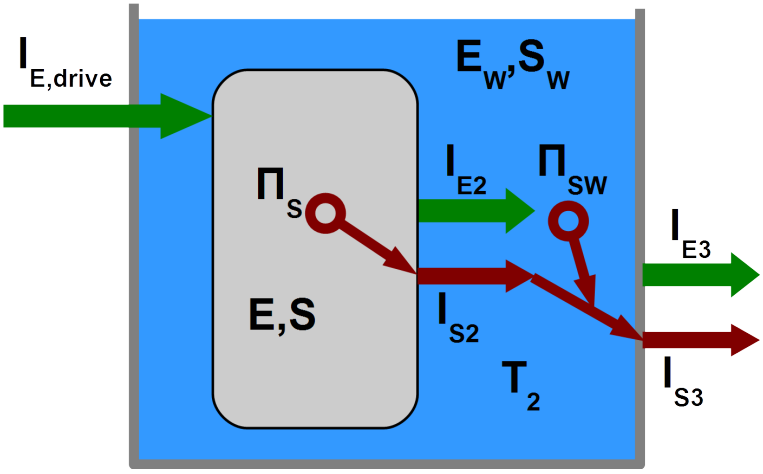


Abbildung 15.2: Wasserkocher. Wir haben zwei gekoppelte Systeme; einerseits der Wasserkocher mit Energie E und Entropie S. Andererseits das Wasser mit Energie E_W und Entropie S_W.

15.2.2 Wärmepumpe und Tauchsieder - Ein Vergrleich

Fragestellung: Gegeben seien eine ideale Wärmepumpe und ein Tauchsieder, beide mit derselben nicht – thermischen Antriebsleistung von 1 kW. Beide erwärmen je 5 Liter Wasser von $T_{2,start} = 5°C$ auf $T_{2,final} = 25°C$. Die Wärmepumpe bezieht ihre thermische Energie aus der Umgebung, welche die Temperatur $T_1 = 0°C$ (bleibt konstant) hat. Welches Gerät ist schneller?

Hinweis: man könnte dieses Problem tatsächlich formal lösen. Dies ist allerdings nicht unsere Absicht. Wir leiten eine Differentialgleichungen her, welche sie mithilfe einer entsprechenden Numerik - Software lösen können.

Zuerst betrachten wir die Wärmepumpe. Neben den Gl. 15.1gelten noch die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Pi_S &= 0, \\ \frac{dE}{dt} &= 0, \\ \frac{dS}{dt} &= 0, \\ I_{E2} &= mc\frac{dT_2}{dt}. \end{aligned} \tag{15.17}$$

Die ersten drei Gleichungen ergeben sich aus unserer Forderung, dass die Wärmepumpe ideal betrieben wird und im stationären Zustand ist. Die vierte Gleichung trägt der Tatsache Rechnung, dass sich das Wasser im Reservoir durch Wärmezufuhr erwärmt. Unser Formalismus ist ohne weiteres in der Lage, auch mit einer solchen Situation umzugehen! Wir erhalten:

$$\begin{aligned} I_{S1} - I_{S2} &= 0, \\ I_{E1} + I_{E,drive} - I_{E2} &= 0. \end{aligned} \tag{15.18}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{I_{E1}}{T_1} - \frac{I_{E2}}{T_2} &= 0, \\ I_{E1} + I_{E,drive} - I_{E2} &= 0. \end{aligned} \tag{15.19}$$

Die Benützung der zweiten Gleichung erlaubt es, die erste umzuformen:

$$\frac{I_{E2} - I_{E,drive}}{T_1} - \frac{I_{E2}}{T_2} = 0. \tag{15.20}$$

Die letzte Gleichung in den Gls. 15.17 erlaubt es nun, eine Gleichung für die Veränderungsrate der Temperatur T_2 aufzustellen. Wir ersetzen I_{E2} durch $mc\frac{dT_2}{dt}$ und lösen nach $\frac{dT_2}{dt}$ auf:

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{I_{E,drive}}{mc}\frac{T_2(t)}{T_2(t) - T_1}. \tag{15.21}$$

Diese Differentialgleichungen kann man numerisch lösen. Es zeigt sich, dass man ungefähr 22 Sekunden braucht um von der Start auf die Endtemperatur gemäss Aufgabenstellung zu kommen. Die Zeit, welche der Tauchsieder braucht, um das

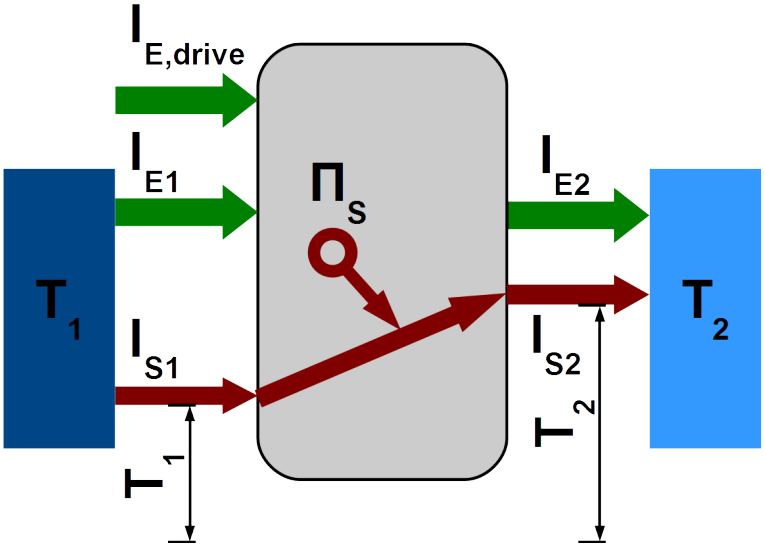


Abbildung 15.3: Energie- und Entropieströme im Falle einer Wärmepumpe. Dabei ist bereits berücksichtigt, dass eine Wärmepumpe keine nicht - thermische Nutzleistung abgibt.

Wasser aufzuheizen, berechnen wir unter Zuhilfenahme von Fig. 15.2. Wieder gehen wir davon aus, dass sich der Tauchsieder im stationären Zustand befindet und keine thermische Energie aufnimmt. Damit bekommen wir:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_{E,drive} - I_{E2}. \tag{15.22}$$

Die vom Tauchsieder abgegebene thermische Energie erwärmt das Wasser:

$$I_{E2} = \frac{dE_W}{dt} = mc\frac{dT_2}{dt}. \tag{15.23}$$

Damit bekommen wir:

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{I_{E,drive}}{mc}. \tag{15.24}$$

Dies bedeutet, dass sich das Wasser mit einer konstanten Veränderungsrate aufheizt. Damit können wir die Temperatur des Wassers natürlich sofort angeben[1], und

[1] Wenn Sie das nicht verstehen, fragen Sie unbedingt den Dozenten oder eine Betreuungsperson in den Übungen.

dadurch die Aufheizzeit berechnen:

$$T_2(t) = T_{2,start} + \frac{I_{E,drive}}{mc}t. \tag{15.25}$$

Das ergibt:

$$T_{2,final} = T_{2,start} + \frac{I_{E,drive}}{mc}t_{heiz}. \tag{15.26}$$

Damit erhalten wir fpür die totale Aufheizzeit t_{heiz}:

$$\frac{mc(T_{2,final} - T_{2,start})}{I_{E,drive}} = t_{heiz} = 418s. \tag{15.27}$$

Damit ist die Wärmepumpe deutlich schneller als der Tauchsieder! Der Grund ist, dass eine ideale Wärmepumpe natürlich mit der Antriebsleistung einen wesentlich grösseren Wärmestrom äntreibt", während der Tauchsieder nur die Antriebsleistung in Wärme verwandeln kann.

15.3 Wärmeleitung

(Bemerkung: Ich habe in der Vorlesung den Begriff der Entropieleitfähigkeit eingeführt. Nun habe ich mich entschlossen, ganz auf diesen Begriff zu verzichten.)

15.3.1 Grundlagen

Wenn wir ein Objekt, z.B. ein Stück Metall haben, welches an einem Ende heiss und am anderen Ende kalt ist, kommt es zu einem thermischen Energiefluss. Mechanisch scheint es, als sei dies einfach zu verstehen. Wenn man sich einen Festkörper als zusammengesetzt aus durch Federn verbundene Kügelchen vorstellt und eine hohe Temperatur eine hohe mittlere kinetische Energie der Kügelchen bedeutet, dann wird sich die kinetische Energie durch Stösse und Federwechselwirkungen gleichmässig im Körper verteilen (S. Fig. 15.4). Leider ist die Sache nicht ganz

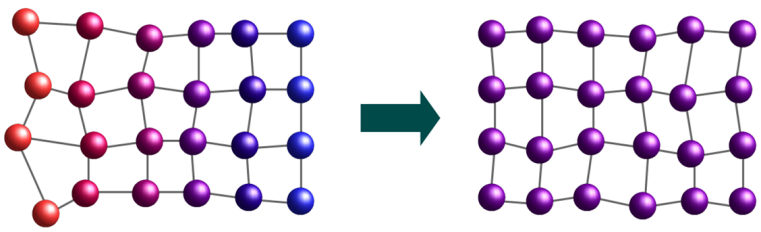


Abbildung 15.4: Temperaturausgleich in einem Festkörper im Federmodell.

so einfach. Was wir mit unseren Mitteln nicht gut können, ist das Studium von

Systemen mit räumlich inhomogener Temperaturverteilung. Wenn zwei Objekte mit unterschiedlicher Temperatur in Kontakt gebracht werden, wird sich eine Überganszone mit veränderlicher Temperatur ausbilden (s. Fig. 15.5). Den Prozess auf der rechten Seite von Fig. 15.5 können wir nicht rechnen[2]. Was wir aber können, ist eine Modellannahme zu machen: Die sich berührenden Objekte sollen je für sich genommen eine homogene Temperaturverteilung aufweisen, aber durch die Berührung gleichen sich die beiden Temperaturen an (Fig. 15.5, linke Seite). Die Aufgabe besteht nun darin, für dieses, nur näherungsweise gültige, Modell die richtigen Beziehungen für den Wärmefluss anzugeben. Im Folgenden benützen

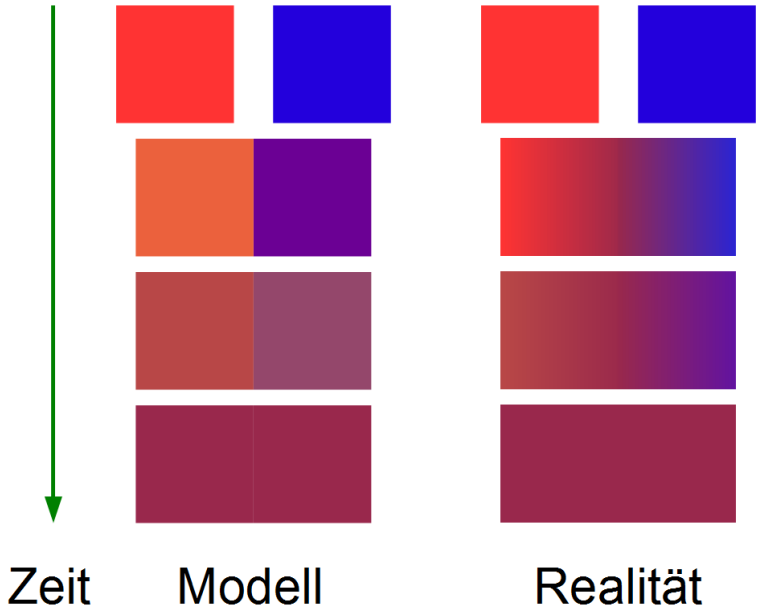


Abbildung 15.5: Temperaturausgleich, Modell und Realität.

wir unser thermisches Maschinenmodell zur Beschreibung des Wärmeflusses, s. Fig. 15.6. Das betrachtete System ist die Wand. Natürlich braucht eine Wand keine Antriebsenergie und gibt auch keine nicht - thermische Nutzenergie ab ($I_{E,drive} = I_{E,use} = 0$). Damit erhalten wir für den stationären Zustand $\frac{dE}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$ folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{E1} - I_{E2}, \\ 0 &= I_{S1} + \Pi_S - I_{S2}. \end{aligned} \tag{15.28}$$

[2]Dazu bräuchte man sogenannte partielle Differentialgleichungen, und deren Numerik ist sehr anspruchsvoll.

Mit $I_{Ex} = T_x I_{Sx}$ erhalten wir für die Entropieproduktionsrate:

$$\Pi_S = \frac{I_{E1}}{T_2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \tag{15.29}$$

Damit sehen wir: Wärmeleitung führt immer zu Entropieproduktion! Das Problem ist nun: Wir kennen I_{E1} ja gar nicht! Grundsätzlich wird die Grösse des

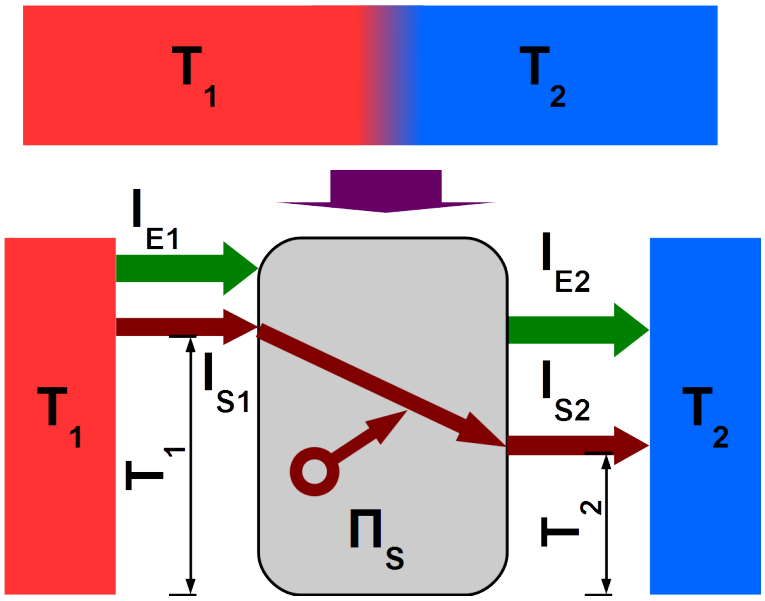


Abbildung 15.6: Temperaturausgleich beschrieben durch eine thermische Maschine.

Wärmestroms von einigen Faktoren abhängen:

- Den Materialeigenschaften der Wand.
- Der Fläche A und der Dicke d der Wand.
- Den beiden Temperaturen T_1, T_2.

Wir erwarten also eine Beziehung der Form:

$$I_{E1} = f(T_1, T_2, A, d, \text{Materialtyp}) \tag{15.30}$$

für eine zu bestimmende Funktion f. An sich kann diese Funktion natürlich recht kompliziert sein; in der Praxis zeigt es sich aber, dass I_{E1} recht gut durch eine lineare Funktion der Temperaturdifferenz beschrieben werden kann. Das ist nicht ganz selbstverständlich, aber auch nicht sehr verwunderlich; falls $T_1 = T_2$ sollte

keine thermische Energie fliessen. Eine Taylorreihe von f um die Punkte $T_1 = T_2$ kann dann als Differenz ausgedrückt werden. Deren erster Term ist linear und auf jeden Fall eine Näherung. Wie die Praxis zeigt, ist diese Näherung relativ gut.

Law 15.1 — Wärmeleitung. Der thermische Energiefluss durch eine Wand wird durch folgende Beschreibung gut angenähert:

$$I_{E1} = G_E(T_1 - T_2). \tag{15.31}$$

Dabei betrachten wir G_E, die thermische Energieleitfähigkeit als konstant, aber vom System abhänig.

Es ist plausibel, dass eine doppelt so grosse Wand doppelt so viel thermische Energie hindurchlassen wird (s. Fig. 15.7). Fig. 15.8 macht klar, dass dickere Wände

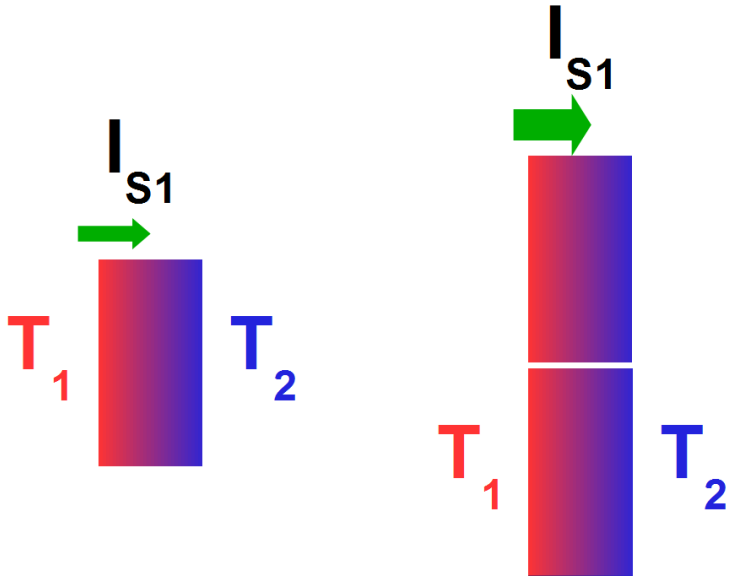


Abbildung 15.7: Flächenabhägigkeit der Wärmeleitung.

zu einem kleineren Temperaturgefälle und damit zu einem kleineren thermischen Energiestrom führen. Als gute Näherung gilt:

$$G_E = k_E \frac{A}{d} \tag{15.32}$$

mit A als Fläche und d als Dicke der Wand. Die Konstante k_E, häufig auch mit dem Buchstaben λ angegeben, ist die **spezifische Wärmeleitfähigkeit**, manchmal

auch als **spezifische Energieleitfähigkeit** beziechnet. Gerade im Bauwesen haben Fenster, Wandelemente und dergleichen feste Dicken, aber variable Flächen. Der **k - Wert** (früher), **U - Wert** (heute) oder auch **Energietransferkoeffizient** ist trägt dem Rechnung und ist definiert durch:

$$h_E = \frac{k_E}{d}. \tag{15.33}$$

Für den Energiefluss gilt dann:

$$I_{E1} = h_E A_(T_1 - T_2). \tag{15.34}$$

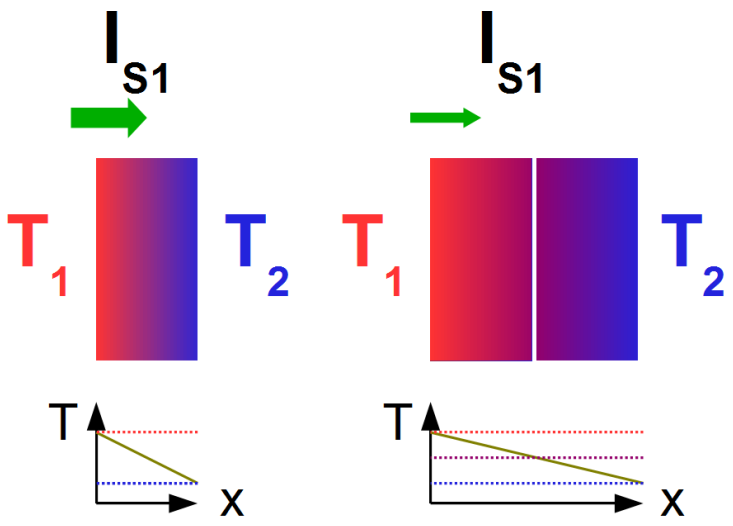


Abbildung 15.8: Dickenabhägigkeit der Wärmeleitung.

15.3.2 Reale Wände

Wenn Sie im Winter eine Wand berühren, ist diese deutlich kühler, als die Lufttemperatur im Raum. Dies entspricht nicht unseren bisherigen Modellvorstellungen (s. Fig. 15.9. Gemäss den bis anhin entwickelten Vorstellungen müsste die Wand Zimmertemperatur haben (s. Fig. 15.9 linke Seite). In der Tat bildet sich aber eine sogenannte Konvektionszone aus, eine dünne Luftschicht zwischen Wand und Innenraum. In dieser Luftschicht kommt es aus Gründen, die wir in dieser Vorlesung nicht besprechen, zu einem starken Temperaturgefälle (s. Fig. 15.9 rechte Seite). Der Energiestrom durch diese Konvektionszone wird mit einem neuen

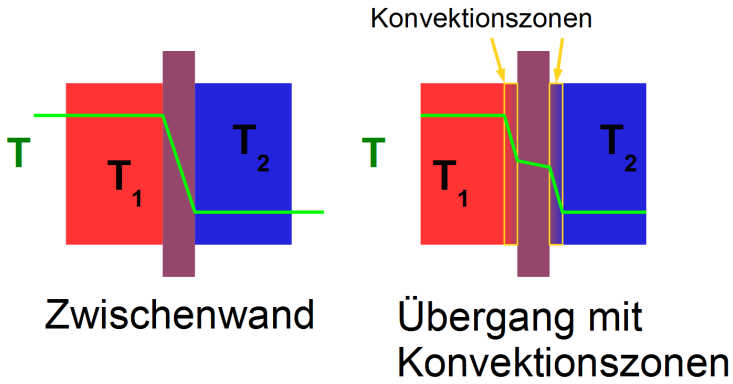


Abbildung 15.9: Reale Wände haben eine Konvektionszone.

Parameter, dem konvektiven Energietransferkoeffizienten $h_{E,conv}$ beschrieben. Die Situation wird beschrieben durch Fig. 15.10. Zur mathematischen Beschreibung der Situation in Fig. 15.10 ist es wichtig zu verstehen, dass die Energieströme in und aus einem Layer gleich gross sind (sonst würde der Layer seine Temperatur ändern). Wegen der Energieerhaltung gilt:

$$I_{E1} = I_{Ea} = I_{Eb} = I_{E2}. \tag{15.35}$$

Für die einzelnen Energieströme gilt weiter:

$$I_{E1} = Ah_{E,conv,innen}(T_1 - T_a), \tag{15.36}$$
$$I_{EA} = Ah_E(T_a - T_b), \tag{15.37}$$
$$I_{EB} = Ah_{E,conv,aussen}(T_b - T_2), \tag{15.38}$$

wobei A die Fläche der Wand ist.

15.3.3 Räumlich heterogene Systeme

Wände sind oft aus verschiedenen Materialien zusammengesetzt oder haben variable Materialeigenschaften (z.B. weil sie Korrosionsprozessen ausgesetzt sind).

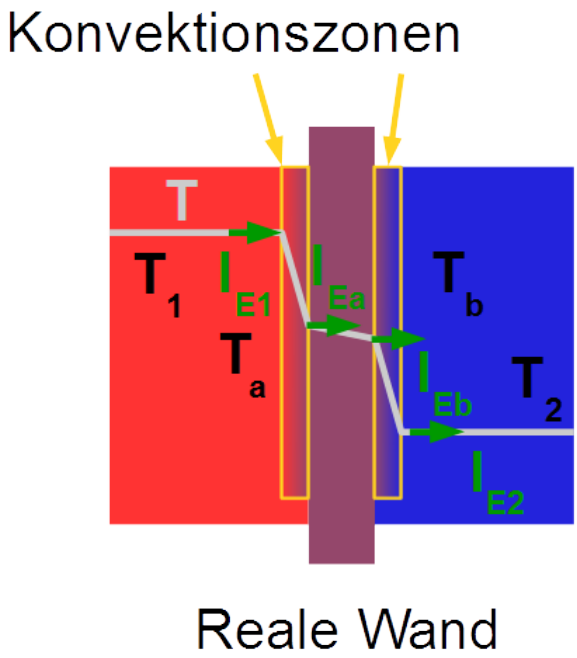


Abbildung 15.10: Reale Wände haben eine Konvektionszone.

Dies kann sich in einer räumlich veränderlichen spezifischen Wärmeleitfähigkeit äussern. Eine Möglichkeit, solche Systeme zu modellieren besteht darin, sie als zusammengesetzt aus verschiedenen Schichten zu betrachten (s. Fig. 15.11). Dies funktioniert bei Wänden ziemlich gut, da wir annehmen können, dass die Veränderung der Wärmeleitfähigkeit durch irgendwelche Korrosionsprozesse eine Funktion der Tiefe in der Wand ist. Systeme, bei denen die spezifische Wärmeleitfähigkeit eine Funktion aller drei Raumkoordinaten ist sind wesentlich schwieriger zu simulieren. Es gibt allerdings dafür spezialisierte Software.

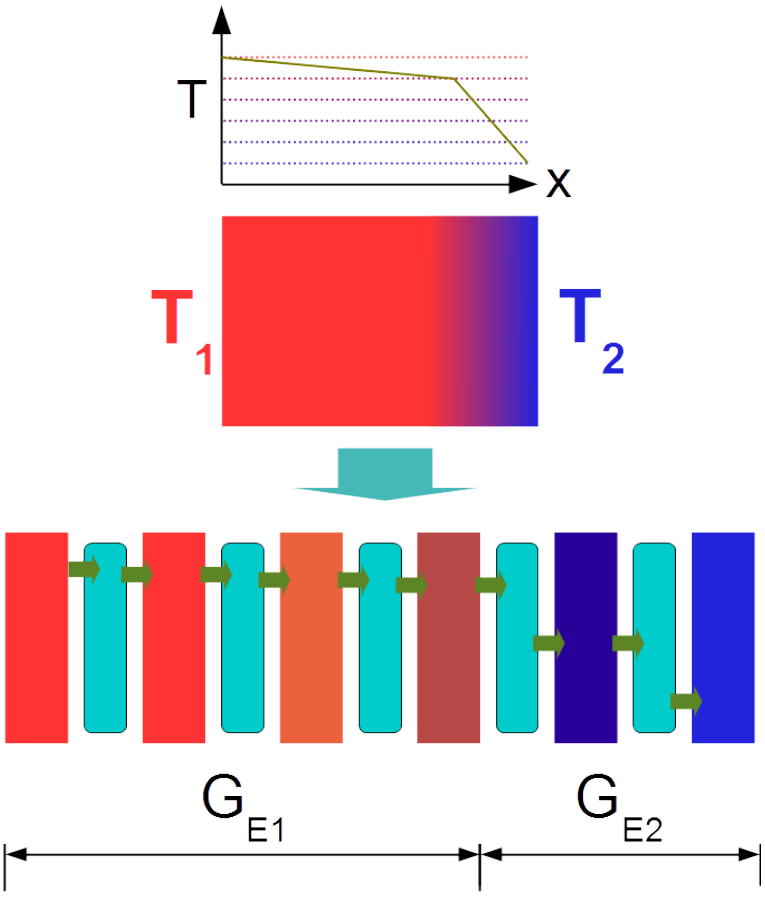
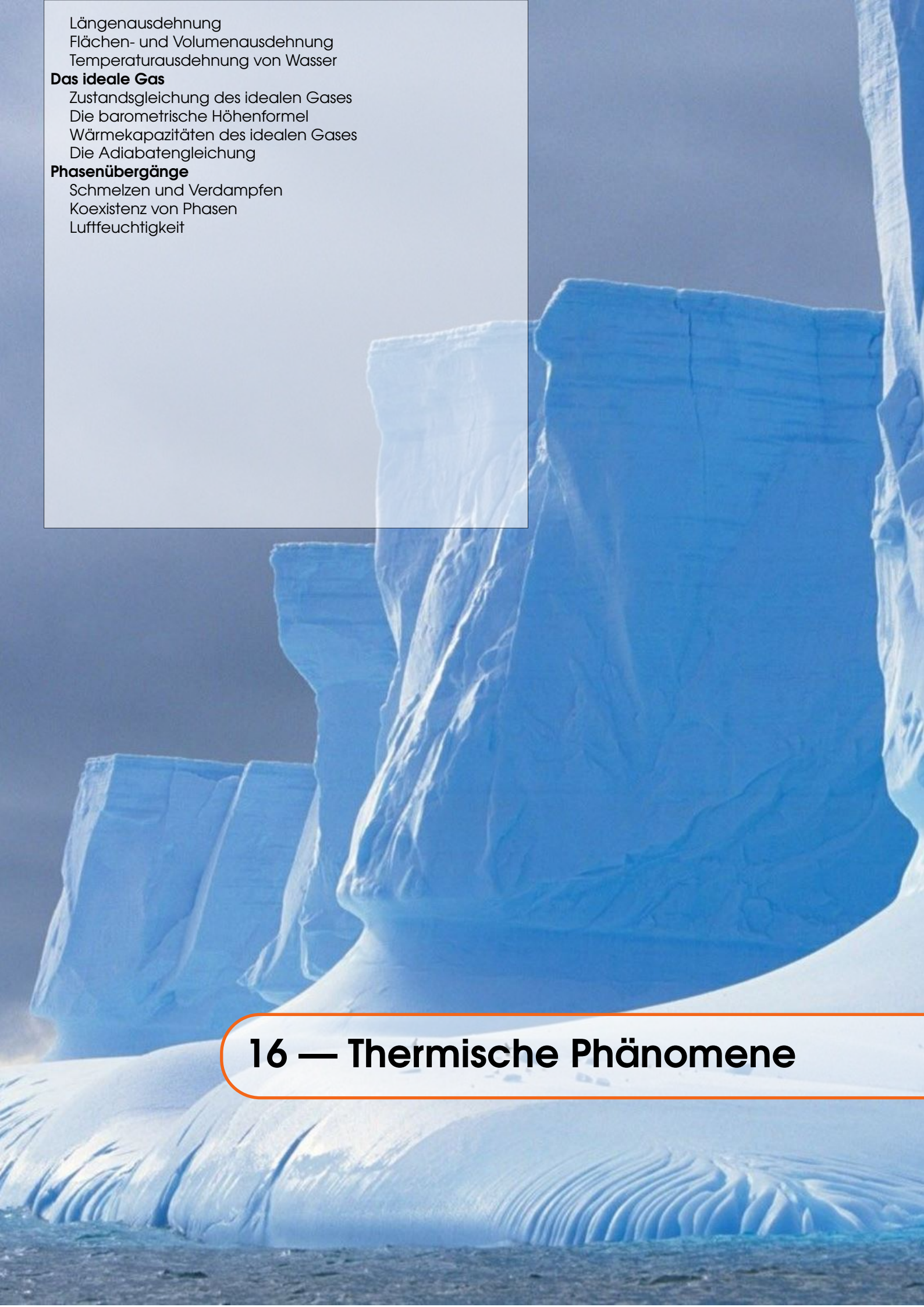


Abbildung 15.11: Eine Wand mit räumlich heterogener spezifischer Wärmeleitfähigkeit kann durch eine Reihe dünner Schichten simuliert werden. Jede einzelne Schicht hat ihre eigene Wärmeleitfähigkeit..

Längenausdehnung
Flächen- und Volumenausdehnung
Temperaturausdehnung von Wasser
Das ideale Gas
Zustandsgleichung des idealen Gases
Die barometrische Höhenformel
Wärmekapazitäten des idealen Gases
Die Adiabatengleichung
Phasenübergänge
Schmelzen und Verdampfen
Koexistenz von Phasen
Luftfeuchtigkeit



16 — Thermische Phänomene

Das Kapitel ist nur für BI prüfungsrelevant.

Wir präsentieren in diesem Kapitel einige praktisch relevante Phänomene, welche sich der Mann dynamisch erklären lassen.

16.0.1 Längenausdehnung

Wir wissen aus der Praxis, dass die meisten Substanzen (nicht alle!) sich bei Erwärmung ausdehnen. Auch wenn diese Ausdehnung in der Regel nur sehr gering ist, spielt sie doch beim Design technische Systeme eine ganz wesentliche Rolle. Wir werden im Folgenden nun die Längenausdehnung diskutieren. Wie immer werden wir Näherungen verwenden und wir gehen davon aus, dass die betrachteten Materialien während der Erwärmung nicht schmelzen (dies diskutieren wir in einem nächsten Abschnitt). In Fig. 16.1 sehen Sie die typische Situation.In guter Näherung gilt dabei für die meisten Materialien:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T. \tag{16.1}$$

Dabei bezeichnet ΔT die Temperaturdifferenz, L die Länge des Stabes, ΔL die Längenausdehnung und α der thermische Expansionskoeffizient oder thermischer Längenausdehnungskoeffizient. Die Proportionalität zur Länge des Stabes ist klar: Sie können sich einen Stab immer als zusammengesetzt aus zwei Stäben der halben Länge vorstellen. Jeder einzelne dieser Stäbe dehnt sich aus (und zwar um denselben Betrag da ja beide Stäbe identisch sind). Also muss ein halb so langer Stab sich lediglich um die Hälfte der Länge ausdehnen. Weniger klar ist die Proportionalität zur Temperaturdifferenz. Diese ist eigentlich auch nur wieder eine lineare Näherung an das reale Ausdehnungsverhalten. Thermische Expansionskoeffizienten werden typischerweise mit der Einheit $10^{-6}K^{-1}$ angegeben. Machen Sie sich klar, dass für z.B. Stahl gilt: $\alpha = 13.0 \cdot 10^{-6}K^{-1}$. Damit erhalten wir für die Längenausdehnung eines Stahlträgers der Länge $L = 10m$ bei einer Erwärmung

um $5K$:

$$\Delta L = 13 \cdot 10^{-6} 10m5K = 0.00065m = 0.65mm. \tag{16.2}$$

Diese Längenausdehnung [1] macht es notwendig, sogenannte ëxpansion jointsïn

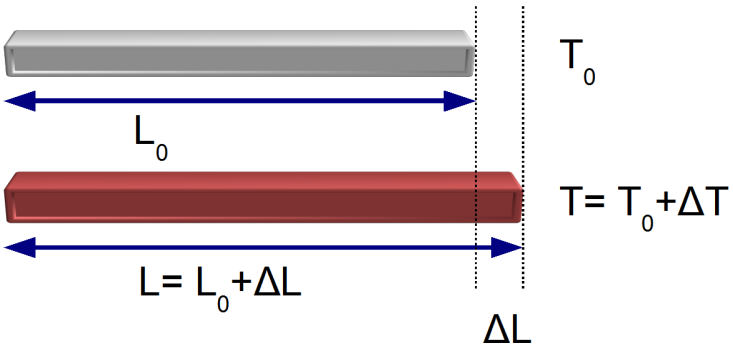


Abbildung 16.1: Längenausdehnung eines Stabes (zum Beispiel Eisen).

die Konstruktion einzufügen (s. Fig. 16.2).

16.0.2 Flächen- und Volumenausdehnung

Wenn wir den thermischen Expansionskoeffizienten kennen, können wir auch die Flächenausdehnung eines Quadrats oder die Volumenausdehnung eines Würfels zumindest abschätzen. Für ein Quadrat mit Fläche A_0 und Seitenlänge L_0 gilt bei Erwärmung:

$$\begin{aligned} A &= L^2, && (16.3)\\ &= (L_0 + \Delta L)^2, \\ &= (L_0 + \alpha L_0 \Delta T)^2, \\ &= (L_0^2 + 2L_0 \alpha L_0 \Delta T + \alpha^2 L_0^2 (\Delta T)^2), \\ &= L_0^2 (1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 (\Delta T)^2)). && (16.4) \end{aligned}$$

Wenn wir nun bedenken, dass α eine sehr kleine Zahl und ΔT nicht grösser als $100K$ ist, dann sehen wir, dass der Term, der quadratisch in α ist, vernachlässigt werden kann. Damit erhalten wir:

$$A = A_0 (1 + 2\alpha \Delta T). \tag{16.5}$$

Die Abschätzung ist auch illustriert in Fig. 16.3. Analog erhält man für die Ände-

[1] Beachten Sie, dass sie bei der Planung eines Baus grosse Temperaturbereiche abdecken müssen, insbesondere auch deswegen, weil sich Elemente einer Konstruktion durch Sonneneinstrahlung stark erhitzen können

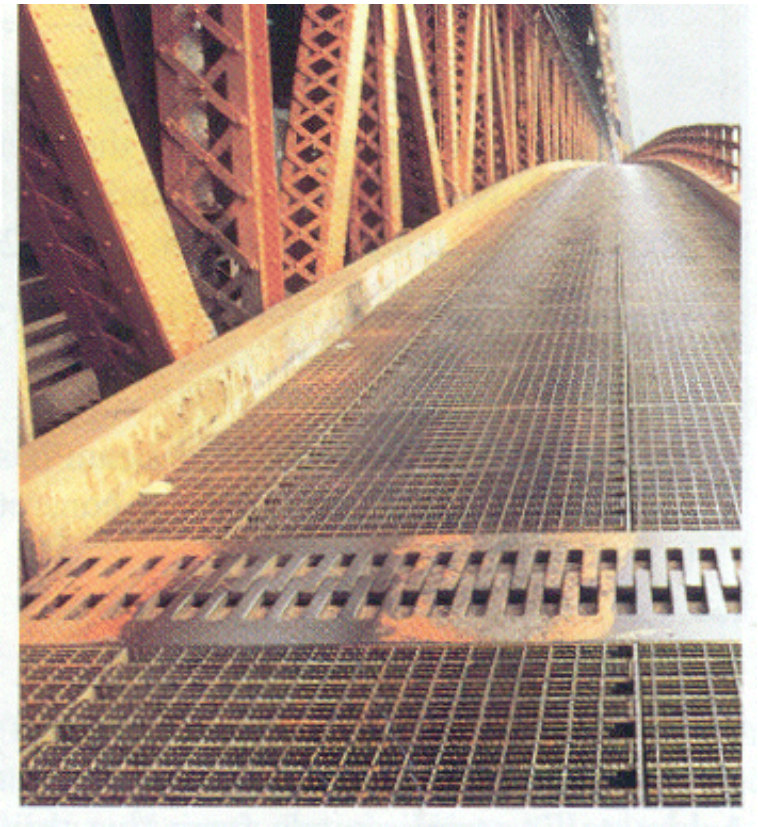


Abbildung 16.2: Expansion Joint.

rung des Volumens eines Würfels bei thermischer Expansion:

$$V = V_0(1 + 3\alpha\Delta T). \tag{16.6}$$

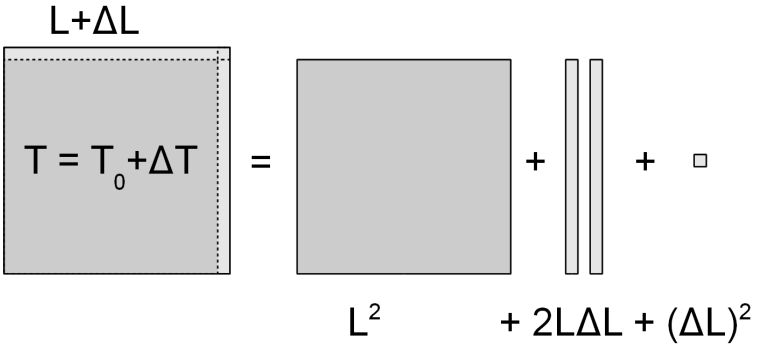


Abbildung 16.3: Illustration der Näherung in der Berechnung des Flächenexpansionskoeffizienten.

16.0.3 Temperaturausdehnung von Wasser

Wir sagten in der Einleitung, dass sich die meisten Substanzen bei Erwärmung ausdehnen. Dies gilt für eine ganz wichtige Substanz nicht: Wasser. In Fig. 16.4 sehen Sie das spezifische Volumen von Wasser (Das Volumen, welches 1 g Wasser einnimmt) als Funktion der Temperatur. Dabei sehen zwei sehr spezielle Eigenschaften von Wasser:

- Das spezifische Volumen von Eis ist deutlich grösser als dasjenige von Wasser. Das ist der Grund warum Eis auf Wasser schwimmt.
- Das spezifische Volumen von Wasser sinkt zwischen 0-4 °C. Das bedeutet, ein Wasserwürfel zieht sich zusammen wenn man ihn z. B. von einem Grad Celsius auf 2 °C erwärmt.

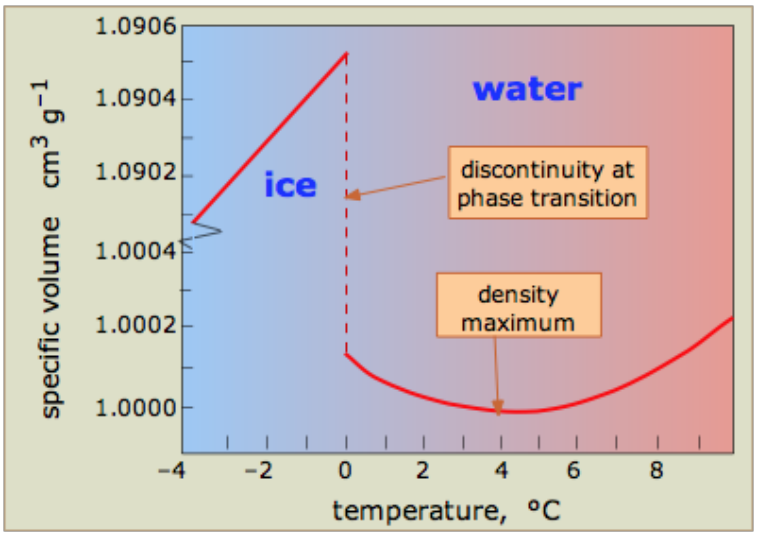


Abbildung 16.4: Dichte von Wasser als Funktion der Temperatur (unter Normaldruck).

Context 16.1 Hätte Wasser nicht dieses sehr eigenartige Temperatur- Volumen - Verhalten, wäre wohl kein Leben auf der Erde möglich. Wäre Eis schwerer als Wasser, wären sicher die meisten Seen und wahrscheinlich auch die Ozeane grösstenteils gefroren. Dies, weil Eis auf den Grund absinken und sich dort ansammeln würde. Die Tatsache, dass die Dichte von Wasser bei 4 °C maximal ist führt dazu, dass das Wasser am Grund eines Sees nie gefriert. Das viergrädige Wasser sinkt ab, und das Eis bildet eine isolierende Decke über dem See.

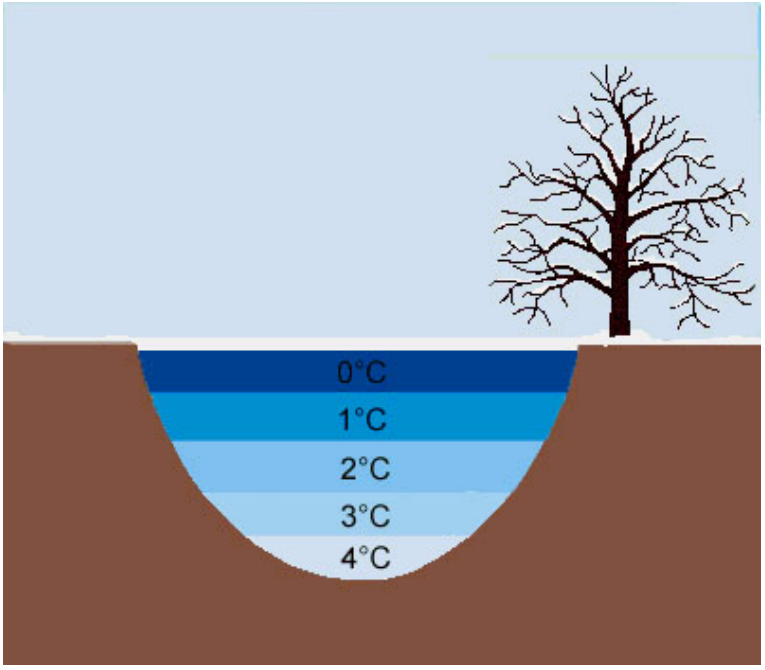


Abbildung 16.5: Temperatur in einem See als Funktion der Tiefe.

16.1 Das ideale Gas

Hinweis: In der Vorlesung wurden viele, insbesondere auch entropische Aspekte des idealen Gases besprochen. Ich sehe ein, dass dies nicht sehr geeignet war. Wie bereits angekündigt, habe ich das Kapitel stark gekürzt.

Bei der Analyse der thermischen Eigenschaften von Gasen hat sich eine Näherung als ganz besonders wertvoll erwiesen, nämlich diejenige des **idealen Gases**. Gase sind meist aus relativ einfachen Molekülen zusammengesetzt (Luft: 78% N_2, 21 % O_2, 1 % Argon, div. Spurengase) und das ideale Gas nähert die Dynamik und die statistischen Eigenschaften eines solchen Systems relativ gut an.

Definition 16.1 — Ideales Gas:. Gase bestehen aus Gasteilchen, meist Atome oder Moleküle. Für ideale Gase gilt:

- Die Gasteilchen wechselwirken nicht miteinander.
- Die Gasteilchen können als Punktmassen betrachtet werden.
- Die Gasteilchen vollführen vollkommen elastische Stösse mit den Behälterwänden.

Speziell der letzte Punkt bedarf einiger Erklärung. Wir gehen davon aus dass die Teilchen so klein sind, dass sie nicht (oder nur ausserordentlich selten) miteinander kollidieren. Aber selbst verständlich kollidieren sie mit den Behälter wenden. Diese Behälterwände wiederum sind aber auch aus Teilchen zusammengesetzt. Man darf sie sich nicht als starre Wände vorstellen. Zwar kollidieren die Teilchen des Gases ideal elastisch mit den Teilchen der Wände; diese Teilchen vibrieren aber selber (je höher die Temperatur der Wand, desto schneller) und deswegen kann von der Wand Energie ins Gas oder umgekehrt übertragen werden (s. Fig. 16.6). Wäre die Wand einfach eine ideal harte Fläche, würden Teilchen an der Wand reflektiert, ohne dass die kinetische Energie des Teilchens sich ändern würde.

Context 16.2 Wie bereits erwähnt, sind viele reale Gase nahezu ideal. Ideale Gase sind mathematisch einfach behandelbar. Sie geben uns exakte Lösungen in idealisierten Situationen. Ein wichtiges, allgemeines Prinzip im Engineering und in der Physik besteht nun darin, fastïdeale Systeme zu behandeln als ideale Systeme mit einer kleinen Korrektur. Als BauingenieurInnen arbeiten Sie häufig mit Idealisierungen. Sie bilden ein Modell und behandeln die Realität als Abweichung von dieser idealen Welt.

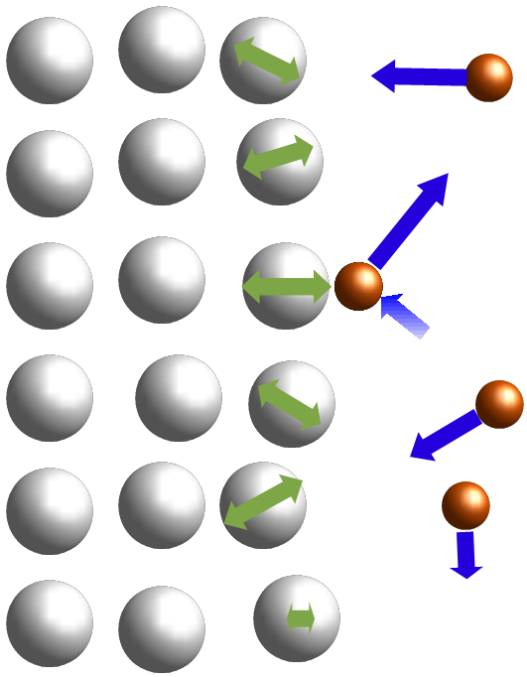


Abbildung 16.6: Wechselwirkung von Gasteilchen mit Behälterwänden.

16.1.1 Zustandsgleichung des idealen Gases

Bevor wir die Zustandsgleichung des idealen Gases besprechen, müssen wir noch eine für die Chemie und statistische Physik geeignete Mengengrösse einführen. In 1 l Gas hat es zumindest bei Zimmertemperatur sehr viele Teilchen; wenn wir anstelle von einzelnen Teilchen die Anzahl Dutzend von Teilchen angeben würden wäre nicht viel gewonnen. Deswegen führt man das Mol ein.

Definition 16.2 — Mol:. Ein **Mol** Teilchen (Atome, Moleküle, usw.) entsprechen $6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Ein Mol ist so etwas wie ein ganz grosses Dutzend. Häufig sagt man auch: ein Mol Teilchen entsprechen N_A Teilchen, wobei $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ und nennt N_A die Avogadro - Konstante.

Für ideale Gase gilt die **Zustandsgleichung des idealen Gases**:

Law 16.1 Für ein ideales Gas bestehend aus n Molen Teilchen, Volumen V, Temperatur T und Druck p gilt:

$$pV = nRT. \tag{16.7}$$

Dabei bezeichnet $R = 8.314 Jmol^{-1}K^{-1}$ die **universelle Gaskonstante**. Eine alternative Formulierung lautet:

$$pV = Nk_BT. \tag{16.8}$$

Hier bezeichnet N die Anzahl Teilchen im Gas (also eine sehr grosse Zahl) und die **Boltzmann - Konstante** $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ (Verwechseln Sie nicht die Boltzmannkonstante und die Stefan - Boltzmannkonstante; letztere spielt bei der thermischen Strahlung eine Rolle.

16.1.2 Die barometrische Höhenformel

Bekanntlich sinkt ja mit steigender Höhe der Luftdruck. Mithilfe der idealen Gasgleichung kann dies verstanden werden. Wir analysieren die Höhenabhängigkeit des Druckers in einer Atmosphäre, wobei wir allerdings die Annahme machen, dass diese Atmosphäre überall dieselbe Temperatur habe. Diese Annahme ist natürlich nicht realistisch; trotzdem erlaubt sie uns, zu verstehen, weshalb der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt. Wir orientieren uns an Fig. 16.7, und überlegen uns, welche totale Kraft auf ein dünnes, in der Figur rot gekennzeichnetes Luftpaket wirkt. Die totale Kraft muss in der stationären Situation gleich null sein, andernfalls würde das Luftpaket bewegt. Im gesamten Wirken drei Kräfte auf das Luftpaket:

- Die durch den Luftdruck verursachte Kraft von unten,

- die durch den Luftdruck verursachte Kraft von oben,
- und die Gewichtskraft.

Wir nehmen an, das Luftpaket habe die Grundfläche A und die Höhe dh. Entscheidend ist nun einzusehen, dass wir nicht annehmen dürfen, dass der Druck auf der Oberseite des Luftpaketes gleich den Druck auf der Unterseite ist. Die z - Komponente der durch den Luftdruck verursachten Kraft nach oben lautet:

$$F_{z,unten} = Ap(h), \tag{16.9}$$

wobei $p(h)$ den Luftdruck auf Höhe h bezeichnet. Wie so oft in der Physik nehmen wir aber an, dass für ein kleines dh wir den Druck lokal durch eine Taylor-Approximation beschreiben können. Mit anderen Worten:

$$p(h+dh) \approx p(h) + \frac{dp}{dh}dh. \tag{16.10}$$

Die z - Komponente der durch den Luftdruck verursachten Kraft lautet:

$$F_{z,oben} = -A(p(h) + \frac{dp}{dh}dh) \tag{16.11}$$

Die z - Komponente der Gewichtskraft ergibt sich aus der Luftdichte (Massendichte) ρ_m und dem Volumen des Luftpakets:

$$F_{z,G} = -Adh\rho_m(h). \tag{16.12}$$

Nun sieht das auf den ersten Blick aus, als wenn wir nicht sehr viel gewonnen hätten; schliesslich kennen wir die Luftdichte ja nicht. Hier hilft nun die ideale Gasgleichung. Für die Teilchendichte ρ_n (also die Anzahl Mol Teilchen pro Kubikmeter) erhalten wir:

$$\frac{n}{V} = \rho_n = \frac{p}{RT}. \tag{16.13}$$

Der Nenner dieser Gleichung ist bei konstanter Temperatur eine Konstante. Damit gilt dann:

$$\frac{\rho_n(h)}{p(h)} = \frac{1}{RT} = \frac{\rho_n(0)}{p(0)} \tag{16.14}$$

wobei $p(0), \rho(0)$ den Druck am Boden, zum Beispiel auf Meereshöhe, angeben.

Für die Massendichte ρ_m (Also die Anzahl Kilogramm pro Kubikmeter) erhalten wir:

$$\rho_m = m_{Luft}\frac{p}{RT}. \tag{16.15}$$

wobei $m_{Luft} = 28.95 g/mol$ die Masse von einem Mol Luft angibt[2]. Die z - Komponente der Summe der Kräfte aus Gls. 16.9, 16.11 und 16.12 ergibt dann (nach Division durch A und dh):

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho_m(h). \tag{16.16}$$

Wenn wir nun die Gl. 16.14 verwenden, erhalten wir:

$$\frac{dp}{dh} = -g\frac{\rho_m(0)}{p(0)}p(h). \tag{16.17}$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit folgender Lösung:

$$p(h) = p(0)\exp(-\frac{g\rho_m(0)}{p(0)}h). \tag{16.18}$$

Das ist die sogenannte **barometrische Höhenformel**. Sie besagt, dass in einer Atmosphäre mit konstanter Temperatur der Luftdruck exponentiell mit der Höhe abnehmen würde.

[2]Daraus ergibt sich, dass $1m^3$ Luft bei Normalbedingungen ungefähr 1.3 kg wiegt.

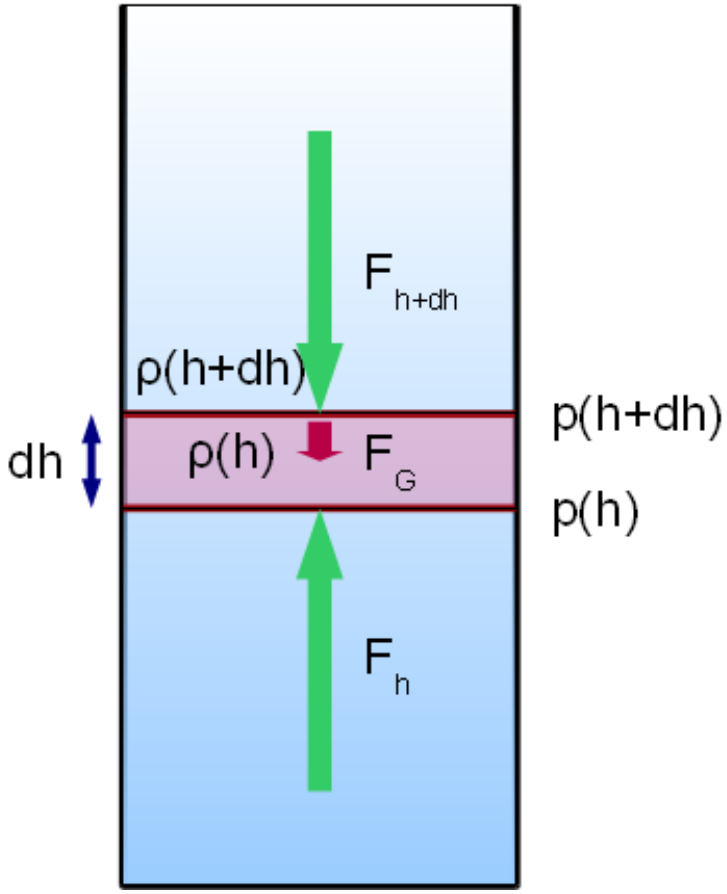


Abbildung 16.7: Herleitung der parametrischen Höhenformel.

16.1.3 Wärmekapazitäten des idealen Gases

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, müssen wir bei Gasen darauf achten, unter welchen Bedingungen Temperaturerhöhung stattfinden. Wenn wir das Volumen konstant halten bedeutet eine Erwärmung nichts anderes, als eine Erhöhung der mittleren kinetischen Energie der einzelnen Gasteilchen. Dabei steigt der Druck auf die Behälterwände. Wenn wir den Druck konstant halten (zum Beispiel dadurch, dass wir das Gas in einem Behälter mit beweglicher Wand auf die wir eine konstante Kraft ausüben einschliessen) führt die Erwärmung des Gases nicht nur zur Erhöhung der Temperatur sondern auch zum Verrichten von mechanischer Arbeit, s. Fig. 16.8.

Für ideale Gase kann man den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur sehr genau angeben. Dies, weil die Statistik, d. h. die Geschwindigkeitsverteilung der einzelnen Bestandteile eines Gases als Funktion der inneren Energie mathematisch verstanden werden kann. Damit ist es möglich, eine direkte Verbindung zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Eigenschaften eines idealen Gases herzustellen.Wir führen dies in dieser Vorlesung nicht durch; wir weisen aber darauf hin, dass eine der Möglichkeiten, den Begriff Temperatur wirklich physikalisch solide zu definieren darin besteht, ihn in Bezug zur mittleren kinetischen Energie der Teilchen in einem idealen Gas zu setzen[3]

Für Gase, welche aus einzelnen Atomen bestehen (zum Beispiel Helium, Argon oder Neon) gilt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dE}{dt}\right|_{\text{V=const.}} &= \bar{c}_v nT = \frac{3R}{2}nT, \\ \left.\frac{dE}{dt}\right|_{\text{p=const.}} &= \bar{c}_p nT = \frac{5R}{2}nT. \end{aligned} \tag{16.19}$$

Dabei gibt $\bar{c}_V$ die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen und $\bar{c}_p$ diejenige bei konstantem Druck an. Der Ausdruck **molare Wärmekapazität** bedeutet dabei nichts anderes als Wärmekapazität pro Mol und R ist die universelle Gaskonstante.

Aufgrund eines sehr allgemeinen Theorem der statistischen Physik können wir nun für Gase, welche aus zweiatomigen Molekülen bestehen (also z.B. Luft), folgendes schliessen:

$$\begin{aligned} \bar{c}_v &= \frac{5R}{2}, \\ \bar{c}_p &= \frac{7R}{2}. \end{aligned} \tag{16.20}$$

[3]Definiert man die Temperatur über die Eigenschaften des idealen Gases, dann sind die nachfolgenden Gleichungen natürlich nicht Resultate, sondern Definitionsgleichungen für die Temperatur.

Die Tatsache, dass die Wärmekapazitäten des idealen Gases durch eine Konstante angegeben werden können ermöglicht es, einen direkten Zusammenhang zwischen innerer Energie und Temperatur anzugeben:

$$E_{\text{id. Gas}}(T) = \bar{c}_v nT. \tag{16.21}$$

Beachten Sie, dass wir hier die Wärmekapazität bei konstantem Volumen verwenden müssen. Dies ist auf den ersten Blick nicht ganz einsichtig; in diesem Zusammenhang zu verstehen, müssen wir uns mehr Gedanken darüber machen, wie die mittlere Energie eines Gasteilchens mit seiner Temperatur zusammenhängt. Dies ist aber, wie bereits gesagt, die Aufgabe der statistischen Physik.

Wir weisen auch darauf hin, das in der Literatur der Unterschied zwischen spezifischer Wärmekapazität (also Wärmekapazität pro Kilogramm) und modular Wärmekapazität (also Wärmekapazität pro Mol) für Gase nicht immer durch einen Balken über dem c angegeben wird und meist aus dem Kontext ermittelt werden muss.

Context 16.3 Die Tatsache, dass wir für ein ideales Gas so einen direkten Zusammenhang zwischen innerer Energie und Temperatur angeben können, ist aus theoretischer Sicht sehr wichtig. Damit ergibt sich eine Brücke zwischen mikroskopischer makroskopischer Betrachtungsweise. Letztlich können wir damit auch die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Entropie rechtfertigen. Die zugehörige Theorie ist allerdings recht kompliziert und wird in dieser Vorlesung nicht besprochen.

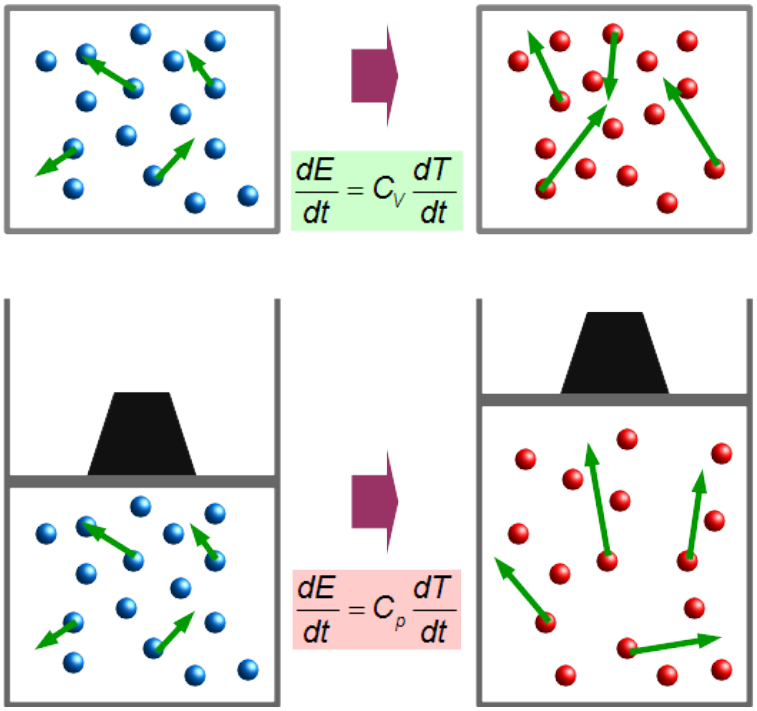


Abbildung 16.8: Wärmekapazität des idealen Gases bei konstantem Volumen und konstantem Druck.

16.1.4 Die Adiabatengleichung

Wir haben in der Einleitung zwischen Arbeit und Wärme unterschieden. Dabei haben wir grosses Gewicht auf die Tatsache gelegt, dass die Ausdrücke Arbeit und Wärme nicht unbedingt etwas über das System wohl aber etwas darüber aussagen, wie die Prozesse welche zum Energieaustausch führen ausgeführt werden.Wir betrachten nun einen ganz speziellen Prozess, einen sogenannten **adiabatischen Prozess**. Bei einem adiabatischen Prozess geschieht die Prozessführung so, das nur Arbeit, aber keine Wärme ausgetauscht wird. Konkret bedeutet dies meist, dass solche Prozesse schnell durchgeführt werden; zwar so schnell, dass es eben nicht zu Wärmeaustausch kommen kann. Wir studieren diese Prozesse, weil sie technisch von einiger Relevanz sind. In einem Verbrennungsmotor wird Gas so schnell komprimiert bzw. ausgedehnt, dass kein nennenswerter Wärmefluss in oder aus der Umgebung geschehen kann. Die Thermodynamik stellt sich die Frage, wie genau sich die innere Energie eines Gases bei einem adiabatischen Prozess verändert. Wie sich zeigen wird, können wir dies für den Fall eines idealen Gases (und das ist immer eine sehr gute Näherung an reale Gase) recht gut berechnen.

Zuerst einmal müssen wir uns darüber im klaren sein, dass das Hineinstossen eines Kolbens in ein Gas bedeutet, dass die Teilchen des Gases mit einer sich bewegenden Wand kollidieren. Das bedeutet, dass Impuls von der Wand auf die Teilchen übertragen wird und deren kinetische Energie im Mittel vergrössert wird.Nehmen wir nun also an, dass ein Kolben der Fläche A um eine Strecke dx Bewegt wird, und dabei ein Gas komprimiert, s. Fig. 16.9. Die Arbeit dW, die dabei geleistet wird, ist gleich:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = -pAdx = -pdV. \tag{16.22}$$

Die Vektorzeichen können wir weglassen, da die Kraft parallel zur Bewegungsrichtung des Kolbens gerichtet ist. Das Minuszeichen ergibt sich dadurch, dass eine Verkleinerung des Volumens eine positive Arbeitsleistung erfordert (machen Sie sich klar, dass das Volumen des Kolben um dV verkleinert wird). Da keine Wärme ausgetauscht wird, bedeutet dies das eine Änderung der inneren Energie des Gases gänzlich durch die aufgebrachte Arbeit zustande kommt.Zusammen mit Gl. 16.19 erhalten wir:

$$c_v ndT = -pdV. \tag{16.23}$$

Hinweis: wenn wir ganz genau arbeiten wollten, dann müssten wir mit den Veränderungsraten der Temperatur und der Veränderungsraten des Volumens arbeiten. Wir benützen jetzt aber, dass die Veränderung der Temperatur in einem Zeitintervall dt gleich $c_v dT$ ist (wenn Sie das nicht verstehen, kontaktieren Sie unbedingt den produzierenden oder die Übungsbetreuenden). Nun ersetzen wir den Druck gemäss

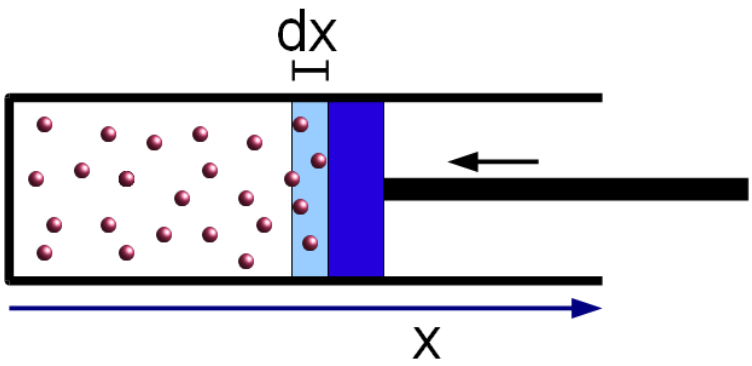


Abbildung 16.9: Arbeit, die während der Kompression eines Gases verrichtet wird.

der Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$c_v n dT = -\frac{nRT}{V} dV. \tag{16.24}$$

Mit dem Ausdruck für die molare Wärmekapazität $c_v = \frac{3R}{2}$ (einatomiges Gas) erhalten wir:

$$dT = -\frac{2}{3}\frac{T}{V} dV. \tag{16.25}$$

Wir machen jetzt wieder etwas, dass sie mathematisch etwas erschrecken wird: wir dividieren durch dV:

$$\frac{dT}{dV} = -\frac{2}{3}\frac{T}{V}. \tag{16.26}$$

Das ist eine Differentialgleichung, welche folgende Lösung hat:

$$T(V) = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{16.27}$$

T_0 und V_0 sind dabei Temperatur und Volumen vor der Kompression.Die physikalisch auf den ersten Blick etwas verblüffende Schlussfolgerung ist: ideale Gase können ohne Wärmezufuhr, nur durch das leisten von Arbeit, erwärmt werden. Dann können Sie die Temperatur wieder unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung des idealen Gases durch den Druck ersetzen. Dadurch erhalten Sie (immer noch einatomiges Gas):

$$p(V) = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{16.28}$$

Allgemein können wir folgendes sagen:

$$\begin{aligned} T(V) &= T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}, \\ p(V) &= p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma}. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Für einatomige Gase haben wir $\gamma = \frac{5}{3}$ und für zweiatomgie Gase (also Luft) gilt $\gamma = \frac{7}{5}$.

16.2 Phasenübergänge

Aus unserer Alltagserfahrung ist uns bekannt, dass viele Substanzen in einer Reihe von physikalischen Formen vorliegen können. Das bekannteste Beispiel hierfür ist sicher Wasser; Wasser kann fest, flüssig oder gasförmig sein[4]. Die Tatsache, dass dieselbe Sorte Moleküle in gänzlich verschiedenen Zuständen vorliegen können, ist eigentlich recht erstaunlich. Auch die zugehörige Physik ist ein aktuelles Forschungsgebiet auf welchem noch viele Fragen offen sind. Wir interessieren uns vor allem für einige thermodynamischen Aspekte dieser Zustände (auch Phasen oder Aggregatszustände genannt).

Grundsätzlich gilt: Systeme, welche aus vielen Einzelteilen zusammengesetzt sind, können verschiedene Aggregatszustände einnehmen. Häufig spricht man auch von Phasen. Diese Verwendung des Wortes Phase hat überhaupt nichts mit den Phasen von Schwingungen zu tun.

Genaugenommen sind Phasen und Aggregatszustände nicht genau das Gleiche: Ein Aggregat kann aus mehreren Phasen bestehen. In welcher Phase/Aggregatszustand ein Stoff vorliegt, hängt von thermodynamischen Variablen wie Temperatur, Druck usw. ab. Phasen sind charakterisiert durch (thermodynamische) Materialeigenschaften wie Wärmekapazität, Kompressibilität usw.. Bei einem Übergang von einer zu einer anderen Phase ändern sich diese Eigenschaften schlagartig (um präzise zu sein: Manchmal ändern sich auch nur die Ableitungen dieser Eigenschaften sprungartig. Z.B. die Ableitung nach der Temperatur).

Wichtig ist, dass Sie sich darüber im klaren sind, das es nicht nur die Aggregatszustände fest", flüssigöder "gasförmig"gibt, sondern, abhängig vom Material oder dem betrachtenden System im allgemeinen, sehr viele mehr. Zum Beispiel ist es heutzutage üblich geworden, die Bildung von Verkehrsstaus und insbesondere deren Auflösung aus der physikalischen Perspektive der Phasenübergänge zu betrachten. Ähnliches gilt übrigens auch für das Verhalten von Fussgängern.

[4] In der Tat zeigte sich, dass es nicht nur eine, sondern mindestens 15 verschiedene Formen von Eis gibt. Welche Form angenommen wird hängt von der Temperatur und vom Aussendruck ab.

Von ganz besonderen physikalischen Interesse (speziell, weil hier theoretische Studien sehr weit getrieben werden können) ist die Betrachtung von magnetischen Systemen. Letztlich sind auch Phänomene wie Supraleitung oder Supraflüssigkeit in der Sprache der Phasenübergänge formulierbar.

16.2.1 Schmelzen und Verdampfen

Die für uns wichtigsten Phasenübergänge sind sicherlich das Schmelzen und das Verdampfen. Eine wichtige Erkenntnis ist dabei, dass der Übergang vom festen in den flüssigen oder vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand Energie erfordert. Dies kann man in einem sehr einfachen Experiment sehen. Stellt man einem Becher Eis auf eine Heizplatte dann erwärmt sich das Eis bis zu dem Moment, wo es zu schmelzen beginnt. Danach ändert sich die Temperatur des Eis - Wassergemischs so lange nicht, bis alles Eis geschmolzen ist. Erst danach steigt die Temperatur des Wassers an, s. Fig. 16.10. Der Prozess des Schmelzen

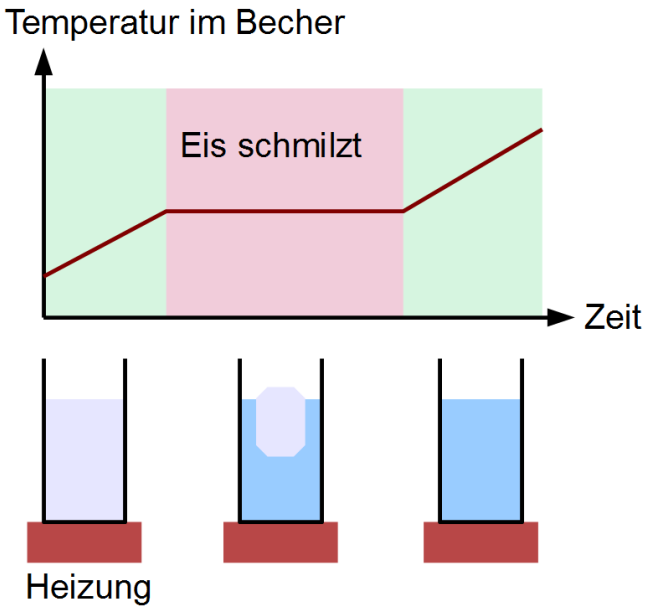


Abbildung 16.10: Das Schmelzen von Eis erfordert Energie. Die Zuführung dieser Energie führt nicht zu einer Temperaturerhöhung.

(und ganz analog der Prozess des Verdampfens) kann durch Massenänderungsraten beschrieben werden. Illustriert ist dies in Fig. 16.11. Die Ausdrücke Π_{ice} und Π_{H20} geben dabei an, wie viele Kilogramm Eis und Wasser pro Sekunde verschwinden bzw. entstehen. Natürlich wird gelten:

$$\Pi_{ice} = -\Pi_{H2O}, \tag{16.30}$$

denn jedes Kilogramm Eis, dass durch Schmelzen verschwindet, Kommt als geschmolzenes Wasser hinzu. Für die Leistung (Energiestrom) $I_{E,melt}$, welchen man zum Schmelzen des Eises braucht gilt:

$$I_{E,melt} = \lambda_S \Pi_{H2O}. \tag{16.31}$$

Die Grösse λ_S nennt man die **spezifische latente Schmelzwärme**. Sie gibt an, wie viele Joule Energie man braucht um 1 kg Eis mit einer Temperatur von 0 °C in 1 kg Wasser mit derselben Temperatur überzuführen (Wir gehen stillschweigend davon aus, immer unter Atmosphärendruck zu arbeiten). Wir können die Gl. 16.34 etwas anders formulieren:

$$I_{E,melt} = \lambda_S \frac{dm_{H20}}{dt}. \tag{16.32}$$

Damit wird klar, dass wir hier angeben wie viel Wasser als Funktion der zugeführten Heizleistung entsteht. Da λ_S eine Konstante ist, ergibt sich für die Gesamtmenge thermische Energie Q_S, welche nötig ist um eine vorgegebene Masse m_{Eis} Eis zu schmelzen:

$$Q_S = \lambda_S m_{Eis}. \tag{16.33}$$

Der Formalismus für das Verdampfen ist vollständig analog:

$$I_{E,vapor} = \lambda_D \frac{dm_{Dampf}}{dt}. \tag{16.34}$$

Hierbei bezeichnet λ_D die **spezifische latente Verdampfungswärme**. Wieder ist die Menge Energie Q_D, welche man braucht um eine Masse Wasser m_{H2O} zu verdampfen gleich:

$$Q_D = \lambda_D m_{Dampf}. \tag{16.35}$$

Beachten Sie, dass die Schmelzwärme deutlich geringer ist als die Verdampfungswärme. Für Wasser gilt: $\lambda_S = 333.5 kJ/kg, \lambda_D = 2257 kJ/kg$.

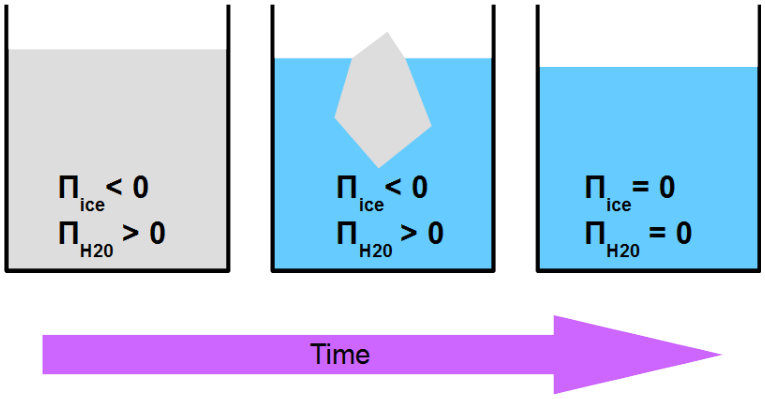


Abbildung 16.11: Das Schmelzen von Eis erfordert Energie. Die Zuführung dieser Energie führt nicht zu einer Temperaturerhöhung.

16.2.2 Koexistenz von Phasen

Wir betrachten einen Behälter, welcher Wasser aber keine Luft enthält. Wir gehen weiter davon aus, dass der Behälter nicht ganz gefüllt ist. Nun verlassen einige Wassermoleküle das Wasser und bilden einen Dampf (gasförmiges Wasser) oberhalb der Wasseroberfläche. Es können auch wieder Wassermoleküle vom Dampf ins Wasser gelangen. Nach einer gewissen Zeit bildet sich ein Gleichgewicht aus, gleich viele Wassermoleküle verlassen die Flüssigkeit und gelangen in die Dampfphase wie umgekehrt. In dieser Dampfphase herrscht ein Druck. Der Druck, bei welchem gleiche viele Teilchen das Gas wie die Flüssigkeit verlassen, heisst Sättigungsdampfdruck. Wie sich zeigt, hängt dieser Sättigungsdampfdruck exponentiell

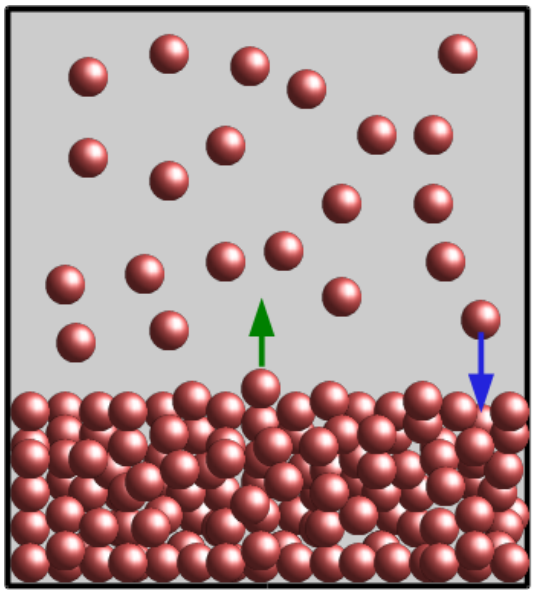


Abbildung 16.12: Verdunsten von Wasser: wenn Wasser in ein Gefäss eingeschlossen wird, sodass das Wasser den Behälter nicht ganz fühlt, dann verlassen einige Wassermoleküle die Flüssigkeit. Diese Wassermoleküle können auch wieder zurück in die Flüssigkeit gelangen. Es etabliert sich ein Gleichgewicht, unter Druck, welcher die Wassermoleküle oberhalb der Wasseroberfläche ausbilden nennt man den Dampfdruck.

von der Temperatur ab (man kann das verstehen, wir diskutieren das hier aber nicht). Wir betrachten nun eine Flüssigkeit, welche in einem offenen Gefäss in einer Atmosphäre mit einem gegebenen Aussendruck steht, s. Fig. 16.13. Wir erhitzen nun das Wasser. Wenn die Temperatur des Wassers so weit gestiegen ist das der Sättigungsdampfdruck des Wassers grösser ist als der Aussendruck beginnen sich im Wasserdampfblasen zu bilden: das Wasser beginnt zu kochen. Da der Aussendruck auf Meereshöhe grösser ist als zum Beispiel im Hochgebirge (parametrische

Höhenformel!) wird einem sofort klar, warum Wasser im Hochgebirge bei weniger als 100 °C zu kochen beginnt.

Das Prinzip liegt auch dem Dampfkochtopf zugrunde. Ein Dampfkochtopf hat einen Überdruck von ungefähr 0.8 bar. Das bedeutet: die Siedetemperatur des Wassers wird auf etwa 116 °C erhöht. Beim gewöhnlichen Kochvorgang sind die Speisen in einer Umgebung mit 100 °C (das gilt natürlich weder beim Backen noch beim Braten, wir reden hier ausdrücklich vom Kochen in Wasser). Diese Erhöhung der Bearbeitungstemperatur scheint nicht besonders dramatisch zu sein; für biochemische Reaktionen gilt aber, dass eine Erhöhung der Temperatur um 10 °C etwa zu einer Verdoppelung bis Verdreifachung Geschwindigkeit der ablaufenden Reaktionen führt. Deswegen garen Speisen in einem Dampfkochtopf deutlich schneller; das Garen ist nichts anderes als eine komplizierte Abfolge chemischer Reaktionen.

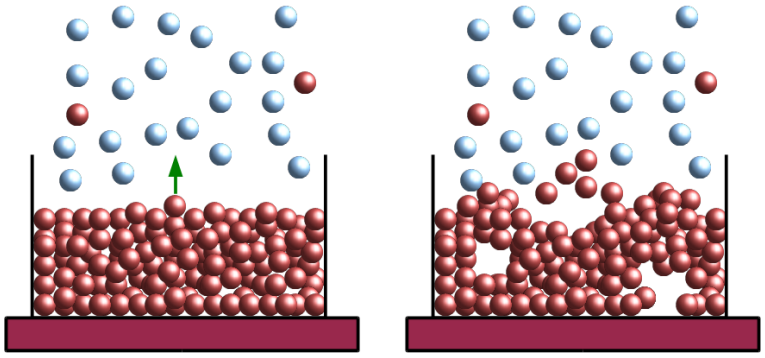


Abbildung 16.13: Ist der Dampfdruck grösser als der Aussendruck, kommt es zum Sieden einer Flüssigkeit.

16.2.3 Luftfeuchtigkeit

Wenn wir in einer Atmosphäre verschiedene Gase haben, dann kann man jeder Gassorte einen eigenen Druck zuordnen. Beachten Sie, dass der Druck eines Gasgemisches sich durch die Impulsänderungen ergeben, welche die Teilchen erfahren, wenn sie von den Wänden des Behälters in welchem sich das Gas befindet abprallen. Nun können Sie diese Impulsänderungen natürlich pro Gassorte ermitteln. Der Druck welcher von einer speziellen Gassorte auf eine Wand ausgeübt wird nennt man dann den **Partialdruck** dieses Gases.

Für gasförmiges Wasser (Dampf) ist dieser Partialdruck von besonderer Wichtigkeit. Falls dieser Partialdruck bei einer bestimmten Temperatur grösser ist als der zugehörige Sättigungsdampfdruck von Wasser kommt es zur **Kondensation**.

Etwas formaler definieren wir die **relative Luftfeuchtigkeit** $\phi_W(T)$ durch:

$$\phi_W(T) = \frac{p_W}{p_{\text{W,Sättigung}}(T)} \cdot 100\%. \tag{16.36}$$

Dabei bezeichnet p_W den Partialdruck des Dampfs und $p_{\text{W,Sättigung}}(T)$ den Sättigungsdampfdruck bei Temperatur T. Die relative Luftfeuchtigkeit wird in Prozent angegeben und ist eine Funktion der Temperatur.

Für Berechnungen brauchen wir den Sättigungsdampfdruck. Dieser ist in Tabelle 16.1 gegeben. Zur Illustrationen führen wir ein konkretes Rechnungsbeispiel

Tabelle 16.1: Sättigungsdampfdruck von Wasser bei Normalbedingugnen.

Temperatur (C)	Dampfdruck (bar)
0.01	0.00612
5	0.00873
10	0.01228
15	0.01706
20	0.02339
25	0.03169
30	0.04246
35	0.05627
80	0.7373
100	1.01322
120	1.98483
200	15.53650

durch.

Fragestellung: Bei 30°C und Standardbedingungen betrage die relative Luftfeuchitgkeit 75%. Bei welcher Temperatur begänne es zu regnen?

Bei 30°C beträgt der Sättigungsdampfdruck 4246 Pa (0.04246 bar). 75% relative Luftfeuchtigkeit heisst, dass der Dampfdruck 3085 Pa beträgt. Gemäss Tabelle würde dies bedeuten, dass es zu regnen beginnt, wenn die Temperatur auf ein bisschen unter 25°C (Sättigungsdampfdruck 3169 Pa) fällt.

Die Maxwellgleichungen
- Die grundlegenden Gleichungen
- Elektromagnetische Wellen
- Allgemeinere Lösungen
- Linearität der Wellengleichung

Antennen: Senden und Empfangen

Interferenz

Arten von elektromagnetischen Wellen
- Radiowellen
- Infrarot
- Sichtbares Licht
- Ultrviolett
- Röntgenstrahlung
- Gammastrahlung

17 — Elektromagnetische Wellen

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

Dass Licht eine ëlektromagnetische Schwingungïst, haben wahrscheinlich die meisten schon einmal gehört. In diesem und den folgenden Kapiteln werden wir Ihnen etwas genauer zeigen, was dies bedeutet. Weiter werden wir Ihnen zeigen, welche thermischen Eigenschaften sogenannte ßchwarze Strahler"haben. Sie werden lernen, wieviel thermische Leistung ein Objekt mit einer Temperatur T und einer Oberfläche A abstrahlt.

Wir werden Mathematik verwenden, die teilweise ausserhalb der Analysis ist, die Sie kennengelernt haben. Wir erwarten nicht, dass Sie die gezeigte Mathematik im Detail verstehen, gehen aber davon aus, dass Sie die gezeigten Herleitungen nachvollziehen können und nach Lektüre dieses Kapitels wissen, was eine partielle Ableitung ist. Konkret bedeutet dies:

- Sie sollten in der Lage sein, eine gegebene Funktion in eine Gleichung mit partiellen Ableitungen einzusetzen und zu überprüfen, ob die Gleichung aufgeht.
- Wir werden Ihnen die Maxwellgleichung zeigen und dabei Linienintegrale und Vektoranalysis verwenden. Diesen Teil der Mathematik müssen Sie weder aktiv noch passiv beherrschen. Dieses Kapitel zeigt Ihnen die allgemeinste Form der elektromagnetischen Gleichungen. Sie müssen diese Gleichungen nicht lösen können. Sie sollten aber wissen, dass elektromagnetische Wellen eine Lösung dieser Gleichungen darstellen.

17.1 Die Maxwellgleichungen

17.1.1 Die grundlegenden Gleichungen

James Clerk Maxwell fand um 1860 eine Reihe von Gleichungen, welche elektrische, magnetische und optische Phänomene gleichzeitig beschreiben können.

Law 17.1 In ihrer üblichen, sogenannt differentiellen Form lauten die **Maxwellgleichungen** :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{17.2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{17.3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{17.4}$$

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \text{elektrisches Feld in } [V/m] = [kgms^{-3}A^{-1}]\\
\vec{B} &= \text{magnetisches Feld in } [T] = [Nm^{-1}A^{-1}]\\
\rho &= \text{Ladungsdichte in } [Cm^{-3}]\\
\vec{j} &= \text{Stromdichte in } [Am^{-2}]\\
c &= \text{Lichtgeschwindigkeit } 2.99792458\cdot 10^8[ms^{-1}]\\
\varepsilon_0 &= \text{Permittivität des Vakuums } 8.85\cdot 10^{-12}[AsV^{-1}m^{-1}]
\end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Dreiecke mit Vektorpfeil $\vec{\nabla}$ bezeichnen den sogenannten Nabla - Operator; seine Eigenschaften sind in den Kapiteln 21.3 und 21.4 definiert.

Die Maxwell - Gleichungen können einzeln interpretiert werden, obwohl ihre wahre Aussage erst durch ihr Zusammenspiel sichtbar wird. Die Gleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17.5}$$

steht im Wesentlichen für das Coulomb - Gesetz.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{17.6}$$

besagt, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{17.7}$$

repräsentiert das Faraday'sche Induktionsgesetz und

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{17.8}$$

beinhaltet unter anderem das Gesetz von Biot - Savart (aber noch Effekte, die wir nicht besprochen haben).

17.1.2 Elektromagnetische Wellen

Aus den Maxwell - Gleichungen können durch einigermassen komplizierte Umformulierungen sechs Gleichungen für die Komponenten des $\vec{E}$- und des $\vec{B}$-Feldes gewonnen werden. Sie lauten:

$$\frac{\partial^2 E_i(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i(x,y,z,t)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 E_i(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i(x,y,z,t)}{\partial t^2} \quad (17.9)$$

$$\frac{\partial^2 B_i(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_i(x,y,z,t)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 B_i(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_i(x,y,z,t)}{\partial t^2} \quad (17.10)$$

Der index i steht für x, y, z. Zusätzlich ergibt sich als Bedingung, dass das elektrische Feld senkrecht auf dem magnetischen Feld steht: $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Context 17.1 Eine Gleichung der Form:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (17.11)$$

für eine Funktion $f(x,y,z,t)$ nennt man eine **Wellengleichung** .

Die Wellengleichung ist eine sogenannte **partielle Differentialgleichung** (partial differential equation, PDE).. Rein äusserlich sind solche Gleichungen dadurch charakterisiert, dass in ihnen Ableitungen nach verschiedenen Variablen vorkommen. Die Theorie der PDE ist viel anspruchsvoller als diejenige gewöhnlicher Differentialgleichungen (ordinary differential equation, ODE). Auch gibt es für PDEs kein Berkeley Madonna. Wie man ODEs numerisch löst ist heutzutage weitgehend bekannt. Die Numerik von PDEs ist viel komplizierter.

Sehr vereinfacht gesagt (und auch viele Aspekte unterschlagend) kann man sagen: Algebraische Gleichungen haben Zahlen als Lösung, ODEs einzelne Funktionen und PDEs ganze Klassen (Mengen) von Funktionen. Im Allgemeinen weiss man recht wenig über PDEs; die meisten wichtigen PDE der Physik (Wellengleichung, Laplacegleichung, Diffusionsgleichung, Schrödingergleichung) sind aber sogenannte lineare PDEs, und deren Verhalten ist sehr intensiv studiert worden.

Die Wellengleichung hat eine grosse Anzahl von Lösungen: Ebene Wellen, zirkulär polarisierte Wellen, Kugelwellen, usw. usf. Wir diskutieren hier nur einen einzigen Typ von Lösung, die ebenen Wellen in x-Richtung (und auch da nur einen Spezialfall). Dieses Vorgehen ist aber gerechtfertigt durch die Tatsache, dass in diesem Spezialfall schon recht viel an wesentlichen Phänomenen steckt und

eine ausgedehntere Diskussion eine massiv vertiefte mathematische Diskussion erfordern würde.

Die Wellengleichung 17.10 beinhaltet alle drei Raumdimensionen. Grundsätzlich lassen sich Wellengleichungen in beliebig vielen Raumdimensionen formulieren. Da man häufig Wellen mit einer vorgegebenen Ausbreitungsrichtung betrachtet, setzt man diese Richtung gleich der x-Richtung, und muss dann nur die eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{17.12}$$

lösen.

Wir halten fest: Eine der vielen Lösungen der Gleichung 17.10 ist gegeben durch:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17.13}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} \tag{17.14}$$

Diese Lösung beschreibt eine **ebene elektromagnetische Welle** , welche sich positiver x-Richtung ausbreitet. Eine Illustration ist gegeben in Fig. 17.1. Beachten Sie: Das elektrische und das magnetische Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Weiter steht das elektrische Feld auch senkrecht auf dem magnetischen Feld. Die beiden Grössen ω und k haben eine physikalische Interpretation und eine der beiden Zahlen kann frei gewählt werden[1]. Diese Interpreationen sind:

- Für einen fixen Punkt im Raum steht die **Kreisfrequenz** ω in Beziehung zur Anzahl der Wellenbuckel, die pro Sekunde durch diesen Punkt hindurchgehen. Diese Änzahl Buckel pro Sekundeëntspricht der **Frequenz** ν der Welle. Die Periode T gibt an, wieviel Zeit zwischen der Ankunft zweier aufeinanderfolgenden Wellenbuckel vergeht. Es gelten die Beziehungen:

  $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{17.15}$$

  Die Einheit der Frequenz ν heisst Hertz und entspricht dem inversen einer Sekunde: $1Hz = 1/s = s^{-1}$.

[1] Wie oben erwähnt ist die Wellengleichung eine partielle Differentialgleichung, welche ganze Klassen von Funktion zur Lösung hat. Diese Funktionen unterschieden sich nicht nur durch irgendwelche Vorfaktoren, sondern können eine unterschiedliche Gestalt haben; ω und k beeinflussen die Form der Wellenfunktion, nicht nur deren Grösse.

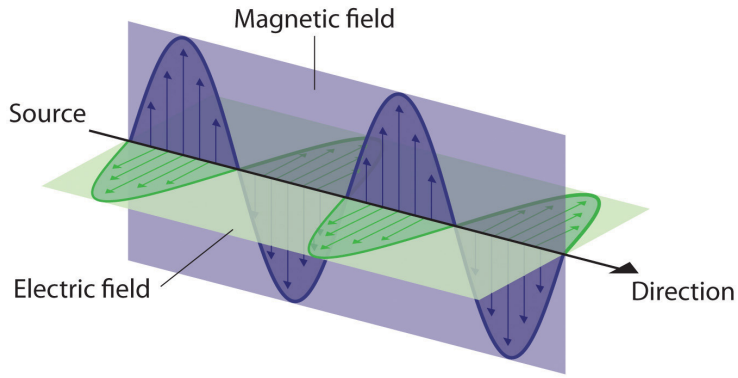


Abbildung 17.1: Illustration einer ebenen Welle. Beachten Sie, dass das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander stehen. Seien Sie sich darüber im Klaren, dass die ebene Welle nur eine von vielen denkbaren Lösungen der Wellengleichung ist.

- Die **Wellenzahl** k steht in Beziehung zur Anzahl n der Wellenbuckel pro Meter. Wenn die Distanz zwischen zwei Wellenbuckeln durch die **Wellenlänge** λ gegeben ist, dann gilt:

  $$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{17.16}$$

  Die Einheit der Wellenzahl k entspricht einer inversen Länge und ist gegeben durch $1/m = m^{-1}$ (m steht hier für Meter).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenbuckel, die sogenannte **Phasengeschwindigkeit** v_p beträgt:

$$v_p = c = \frac{\omega}{k}. \tag{17.17}$$

Im Vakuum ist c eine Konstante und beträgt $c = 299792458 m/s$. Durch Einsetzen finden wir die Beziehungen:

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu. \tag{17.18}$$

17.1.3 Allgemeinere Lösungen

Sinuswellen in beliebige Richtungen

Bis jetzt haben wir der Einfachheit halber immer Wellen in x-Richtugn untersucht. Natürlich kann man Wellen in beliebige Richtungen laufen lassen. Wir definieren den Wellenzahlvektor $\vec{k}$. Dann gilt

$$E(\vec{r},t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{17.19}$$

ist eine Lösung der Wellengleichung 17.10 falls der Betrag von $\vec{k}$ folgende Bedingung erfüllt:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}. \tag{17.20}$$

Die Richtung von $\vec{k}$ entspricht der Ausbreitungsrichtung der Welle.

Noch allgemeinere Lösungen

(Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die eindimensionale Wellengleichung, um die Notation einfach zu halten. Alle Resultate können auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden).

Für die eindimensionale Wellengleichung (nur eine Raumdimension) gilt, dass jede Funktion der Form $f(x,t) = g(kx - \omega t)$ mit $\omega/k = c$ eine Lösung der Wellengleichung ist (Wir machen hier einen Unterschied zwischen f und g, weil f eine Funktion mit zwei Variablen, g aber eine mit einer Variable ist). Die Mathematik hier müssen Sie nicht verstehen, wir zeigen sie aber der Vollständigkeit halber.

Um die Kettenregel sauber anwenden zu können, definieren wir $h(x,t) = kx - \omega t$ und erhalten dadurch $f(x,t) = g(h(x,t))$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(h(x,t)) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(h(x,t)). \end{aligned} \tag{17.21}$$

Nun müssen wir die Kettenregel zweimal anwenden. Dazu brauchen wir die Regel von di Bruno:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(h(x,t)) = \frac{\partial^2 g(h)}{\partial h^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \tag{17.22}$$

(und entsprechend für die Ableitung nach t). Nun verwenden wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= k \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\omega \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{17.23}$$

Wir erhalten damit aus Gl. 17.21:

$$k^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} g(h(x,t)) = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial h^2} g(h(x,t)). \tag{17.24}$$

Falls $\omega^2/k^2 = c^2$ ist diese Gleichung erfüllt und damit ist gezeigt, dass jede Funktion der Form $g(kx - \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist.

17.1.4 Linearität der Wellengleichung

Eine wichtige Eigenschaft elektromagnetischer Wellen möchten wir ganz besonders hervorheben. Hat man zwei Lösungen der Wellengleichung, also zum Beispiel zwei ebene Wellen mit unterschiedlicher Frequenz, dann ist auch deren Summe eine Lösung der Wellengleichung. Dies ist nichts anderes als dass immer wieder hervorgehobene Superpositionsprinzip, welches für elektrische und magnetische Felder gilt. Wie wir im Abschnitt über die Fouriertransformation zeigen werden, bedeutet dies, dass nicht nur ebene Wellen sondern fast beliebige Signale, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten, Lösungen der Wellengleichung sind. Diese Tatsache ist ganz entscheidend für das Senden und empfangen von Signalen.

Theorem 17.1 Sind $f(x,y,z,t$ und $g(x,y,z,t)$ beides Lösungen der Wellengleichung 17.10, dann ist auch ihre Summe $h(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) + g(x,y,z,t)$ eine Lösung von 17.10.

Man kann diese Aussage mit dem Resultat aus dem Kapitel 17.21 sehr einfach zeigen: Die Summe zweier Funktion $f(kx - \omega t)$ und $g(kx - \omega t)$, ist ja wieder eine Funktion von $kx - \omega t$, und eine Lösung der Wellengleichung ist. Eine weniger abstrakte, explizite Rechnung finden Sie in den Slides.

17.2 Antennen: Senden und Empfangen

Law 17.2 Wenn eine Ladung beschleunigt wird, strahlt sie Energie ab. Dies geschieht durch die Erzeugung von $\vec{E}-$ und $\vec{B}-$Feldern.

Die Tatsache, dass eine beschleunigte Ladung zu strahlen beginnt, kann nun zur Konstruktion eines Senders benutzt werden. Das Prinzip funktioniert wie folgt:

1. Wenn an einem Ort Ladungen beschleunigt werden (also ein zeitlich veränderlicher Strom erzeugt wird), werden elektrische und magnetische Felder erzeugt.

2. Diese Felder stehen nicht still, sondern breiten sich aus (im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit).

3. Ruhende Ladungen an einem anderen Ort werden nun, mit kleinen Zeitverzögerungen, zeitlich veränderlichen Feldern ausgesetzt, wobei die Modulation dieser Felder am zweiten Ort der Beschleunigung der Ladungen am ersten Ort entspricht.

4. Die Felder am zweiten Ort üben eine Kraft auf eine dort platzierte Ladungen aus.

5. Diese Kraft beschleunigt diese Ladungen und führen zu einem Strom. Dieser Strom kann gemessen und verstärkt werden.

Dazu einige Bemerkungen:

- Natürlich sind die Felder am Ort des Empfangs nicht genau gleich wie Absendeort. Da zu jedem Feld eine Energie gehört, Energie erhalten ist und die Felder sich ausbreiten wird die Feldstärke mit zunehmender Distanz zum Sender schwächer. Wichtig ist aber: Zumindest im Vakuum (aber in sehr guter Näherung auch in der Atmosphäre) bleibt die Frequenz eines Signals gleich.

- Nur beschleunigte Ladungen strahlen! Eine Ladung, dies sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, strahlt nicht!

- Eine kreisförmige Bewegung ist eine beschleunigte Bewegung! Elektronen auf einer Kreisbahn strahlen.

- Manchmal sieht man Atomodelle, bei denen ein negativ geladenes Elektron einen positiv geladenen Atomkern umkreist. Diese Modelle sind insofern irreführend, als dass bei einer realen Kreisbewegung die Elektronen Energie abstrahlen müssten. Das würde in der Folge bedeuten, dass die Elektronen in den Kern stürzen würden. Da die Materie aber stabil ist, kann dieses Bild nicht stimmen. In der Tat müssen Atome quantenmechanisch betrachtet werden.

Zur Illustration (und ohne Berechnungen) betrachten wir die sogenannte Helmholtzsche Stabantenne. Vereinfacht ist diese illustriert in Fig. 17.2. In Fig. 17.3 sehen Sie eine Momentaufnahme der durch eine Ausziehen notorische Schwingung der Elektronen in der Stabantenne erzeugten Felder.

Ohne das wir hier allzu sehr in die Details gehen, wollen wir auf einen wichtigen Aspekt aufmerksam machen. Wie effizient Energie von einer Antenne abgestrahlt werden kann, hängt stark von der Frequenz des abgestrahlten Signals ab. Dabei gilt: Je höher die Frequenz, desto effizienter der Sender. Damit ergibt sich nun aber ein Problem. Wenn wir sprechen, verwenden wir Signale (Schallwellen), welche mit einer Frequenz von etwa 1000 Hz schwingen. Würde man die Schallschwingung direkt in eine Spannungsschwingung übersetzen, und mit dieser Spannung dann elektromagnetische Wellen erzeugen könnte man nur sehr geringe Sendereichweiten erreichen. Um dieses Problem zu umgehen codiert man die zu übertragenden Signale durch Veränderung eines hochfrequenten Trägersignals. Dabei stehen zwei

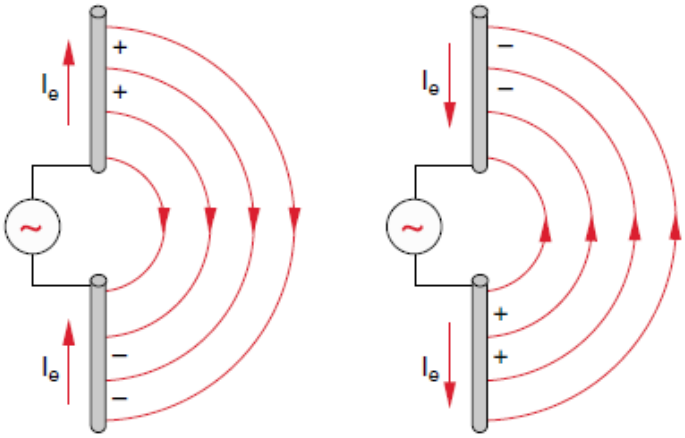


Abb. 6.16. Schematische Darstellung der Erzeugung eines hochfrequenten Wechselstroms in einer Stabantenne. Gezeigt ist der Elektronenstrom I_e und ein ebener Schnitt durch die elektrischen Feldlinien während zweier um 180° verschobenen Phasen des Wechselspannungsgenerators. Die Feldlinien sind rotationssymmetrisch um die Antenne

Abbildung 17.2: Skizze einer Stabantenne. Durch Anlegen einer oszillierenden Spannung werden, bildlich gesprochen, Elektronen in die Stabantenne hineingedrückt und dann wieder herausgezogen. Diese Bewegung bedeutet eine Beschleunigung der Elektronen und damit eine Abstrahlung elektrischer und magnetischer Felder.

Ansätze im Vordergrund: erstens die sogenannte **Phasenmodulation** , zweitens die **Amplitudenmodulation** . Bei der Phasenmodulation wird die Frequenz eines an sich hochfrequenten Signals durch ein Signal mit tiefer Frequenz verändert, siehe Fig. 17.4, bei der Amplitudenmodulation geschieht das entsprechende mit der Amplitude des Trägersignals, siehe Fig. 17.5.

17.3 Interferenz

Bei der Einführung elektrischer und magnetischer Felder wurde darauf hingewiesen, dass für diese Felder dsa Superpositionsprinzip gilt. Das bedeutet für elektromagnetische Wellen: Wenn wir zwei Strahlungsquellen haben, sind die Felder an einem beliebigen Punkt gegeben durch die Summe der Felder der beiden Strahlungsquellen in diesem Punkt[2]. Das bedeutet z.B. nichts anderes, als das

[2]Die Sache ist schon etwas komplizierter. Wenn die Felder, welche ene Strahlungsquelle erzeugt, bei der anderen Strahlungsquelle schon sehr weit abgeschwächt sind, gilt die Annahme in guter Näherung. Sonst wird die Sache komplizierter.

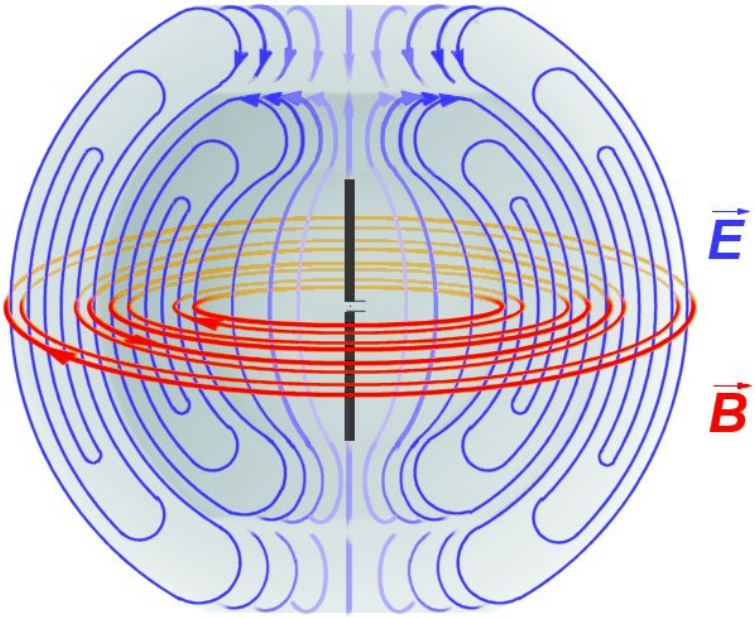


Abbildung 17.3: Strahlungsfeld einer Stabantenne. Beachten Sie: die Antenne strahlt nicht gleichförmig in alle Richtungen. In der Tat wird der grösste Teil der Energie horizontal abgestrahlt. Die Form einer Antenne bestimmt ganz wesentlich die Errichtung und Fokussierung eines abgestrahlten Signals. Eine Radioantenne sollte nach Möglichkeit horizontal in alle Richtungen gleich stark strahlen, bei Richtfunk möchte man an einen ganz bestimmten Ort hin senden.

z.B. Lichtstrahlen sich einfach durchdringen, man also nicht mit einem Lichtstrahl einen anderen Lichtstrahl ablenken kann.

Generell gilt: Wenn wir zwei Felder $\vec{E}_1(x,y,z,t)$ und $\vec{E}_2(x,y,z,t)$ (analoges gilt für $\vec{B}$-Felder haben, dann gilt für das resultierende Feld $\vec{E}(x,y,z,t)$ ganz einfach:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_1(x,y,z,t) + \vec{E}_2(x,y,z,t). \tag{17.25}$$

Nehmen wir nun an, wir hätten zwei durch ebene Wellen gegebene Felder (Wir nehmen an, die Wellen breiten sich in x-Richtung aus und das E- Feld zeige in z-Richtung):

$$\begin{aligned} E_{1,z}(x,y,z,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t + \phi_1) \\ E_{2,z}(x,y,z,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \tag{17.26}$$

Die Grössen ϕ_1 und ϕ_2 bedeuten dabei Phasen. Wir berechnen nun die Summe der

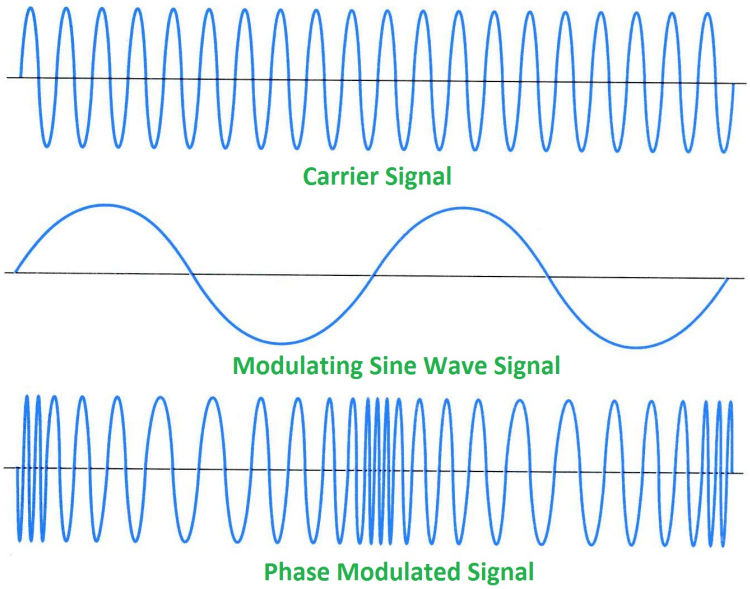


Abbildung 17.4: Modulation der Frequenz eines hochfrequenten Trägersignals durch ein niederfrequentes informationstragendes Signal.

beiden Felder[3]. Dazu brauchen wir Additionstheorem der Trigonometrie:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}). \tag{17.27}$$

Damit erahlten wir:

$$E_{1,z}(x,y,z,t)+E_{1,z}(x,y,z,t)=2E_0\sin(kx-\omega t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2})\cos(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}). \tag{17.28}$$

Entscheidend ist hier der Faktor $\cos(\frac{\phi_1-\phi_2}{2})$. In Abhängigkeit der Phasen kann er, dem Betrag nach, zwischen null und eins liegen. Falls die Differenz $\phi_1-\phi_2=\pi$ ist[4], heben sich die beiden Wellen exakt auf. Es kommt zu sogenannter destruktiver Intereferenz. Falls die Phasendifferenz gleich null ist, verstärken sich die beiden Wellen und es kommt zu konstruktiver Interferenz.

17.4 Arten von elektromagnetischen Wellen

Elektromagnetische Strahlung hat je nach Frequenz der Wellen erstaunlich unterschiedliche Eigenschaften. Meistens tritt elektromagnetische Strahlung als Gemisch verschiedener verschiedener Frequenzen auf. Je nachdem aus welchem

[3] Wir verwenden hier die Additionstheoreme der Trigonometrie. Sie müssen diese Herleitung nicht verstehen, wir geben sie nur der Vollständigkeit halber an.

[4] Wir rechnen natürlich immer in Radian!

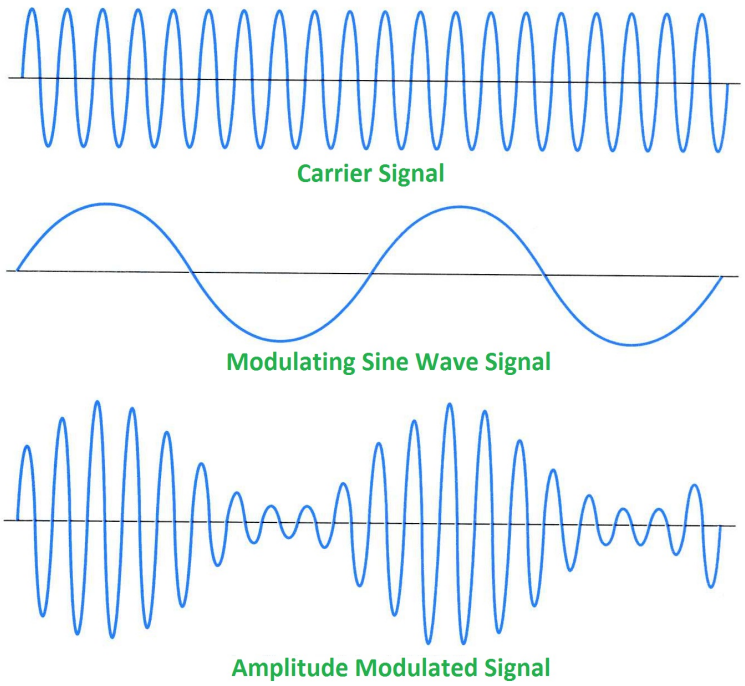


Abbildung 17.5: Modulation der Amplitude eines hochfrequenten Trägersignals durch ein niederfrequentes informationstragendes Signal.

Frequenzbereich die Komponenten dieser Gemische stimmen, hat die resultierende Strahlung unterschiedliche physikalische und technische Eigenschaften, siehe Fig. 17.6.

Die drei wichtigsten Aspekte (die auf sehr grundsätzliche Art miteinander verbunden sind), welche zu diesen Unterschieden führen, sind

- Grundsätzlich kann man mit elektromagnetischer Strahlung "Dinge sehen". Dabei gilt: Mit Strahlung der Wellenlänge λ sind nur Objekte, die grösser als λ sind, sichtbar.

- Je kleiner die Wellenlänge der Strahlung, desto energiereicher ist sie.

- Je nach Wellenlänge können bestimmte physikalische Systeme durch Resonanz angeregt werden.Alle Arten von Bindungen (chemische Bindung von Atomen aneinander, Bindung von Elektronen an den Atomkern und letzlich die Bindung der Bestandteile des Atomkerns aneinander) können durch Strahlung mit geeigneter Frequenz aufgebrochen werden. Von der Frequenz der ultravioletten Strahlung her aufwärts (das heisst Strahlung mit Wellenlängen kürzer als 400 nm) können biologisch relevante Molekü-

le irreparabel beschädigt werden. Dies kann bei Schädigung der DNA zu lebensgefährlichen Erkrankungen (Krebs) führen.

17.4.1 Radiowellen

Frequenzbereich: 300 GHz - 3 kHz. Dabei bedeutet GHz Gigahertz ($10^9 1/s$) und kHz Kilohertz ($10^3 1/s$). Dies entspricht (gemäss der Beziehung $c = \lambda \nu$) Wellenlängen von 1 mm bis zu 100 km.

Tritt eine Radiowelle mit Wellenlänge λ auf eine Antenne der ungefähren Länge $\lambda/4$ wird in der Antenne ein Strom induziert. Dies, weil zur Welle elektrische Felder gehören. Sind diese Felder am einen Ende der Antenne anders als am anderen Ende wird eine Spannung induziert. Diese Spannung kann gemessen werden.

Wellen im Frequenzbereich von 300 MHz 300 GHz heissen auch Mikrowellen . Mikrowellen werden von diversen wichtigen chemischen Verbindungen (speziell auch Wasser) absorbiert und können dadurch zum Aufheizen wasserhaltiger Substanzen (Pizza, Kaffee, ...) verwendet werden.

17.4.2 Infrarot

Frequenzbereich: 430 THz - 300 GHz, Wellenlängen von 700 Nanometer bis 1 mm.

17.4.3 Sichtbares Licht

Frequenzbereich: 750 THz - 430 THz, Wellenlängen von 400 Nanometer bis 700 Nanometer. Kurze Wellenlängen entsprechen blauem Licht, grosse Wellenlängen erscheinen uns als rotes Licht, siehe Fig. 17.7.

17.4.4 Ultrviolett

Frequenzbereich: 30 PHz - 750 THz, Wellenlänge 10 nm bis 400 nm.

17.4.5 Röntgenstrahlung

Frequenzbereich: $3 \cdot 10^{19}$ Hz bis $3 \cdot 10^{16}$ Hz, Wellenlänge 0.01 nm bis 10 nm.

17.4.6 Gammastrahlung

Frequenzbereich: $> 3 \cdot 10^{19}$ Hz, Wellenlänge 0.01 nm bis 10 nm.

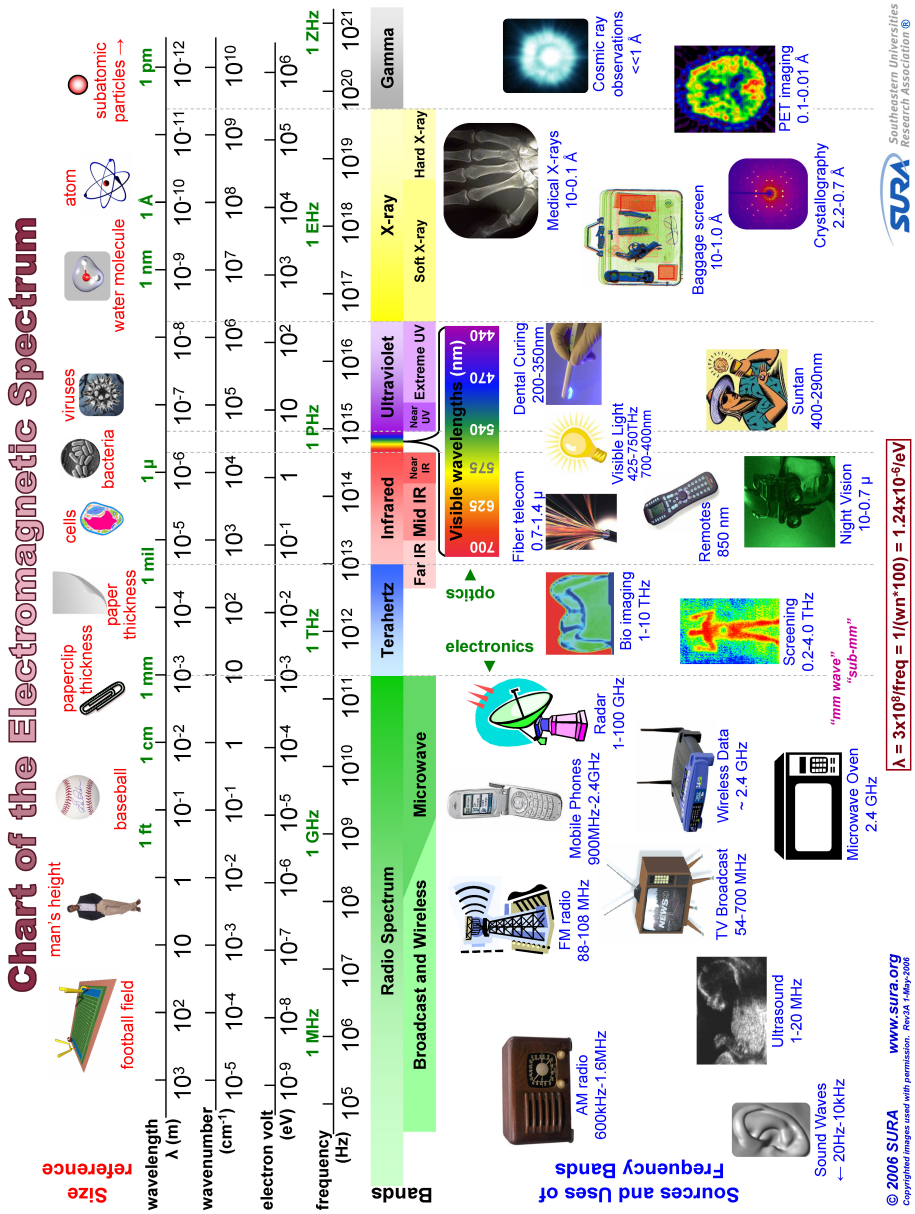


Abbildung 17.6: Das elektromagnetische Spektrum. Credits for image: Southeastern Universities Research Association (SURA)

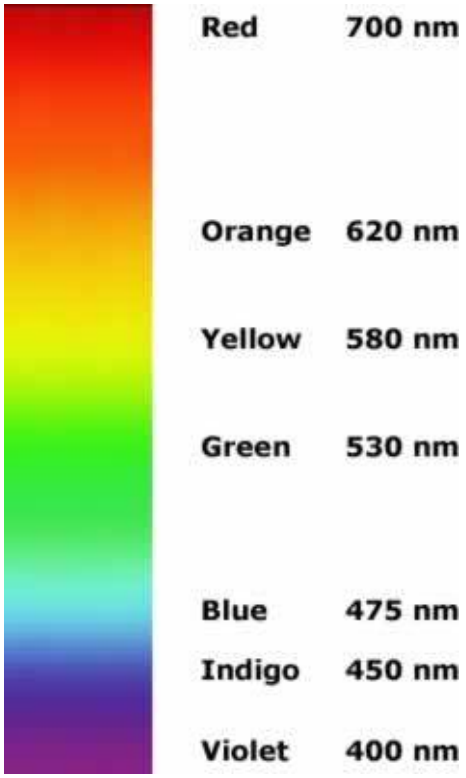
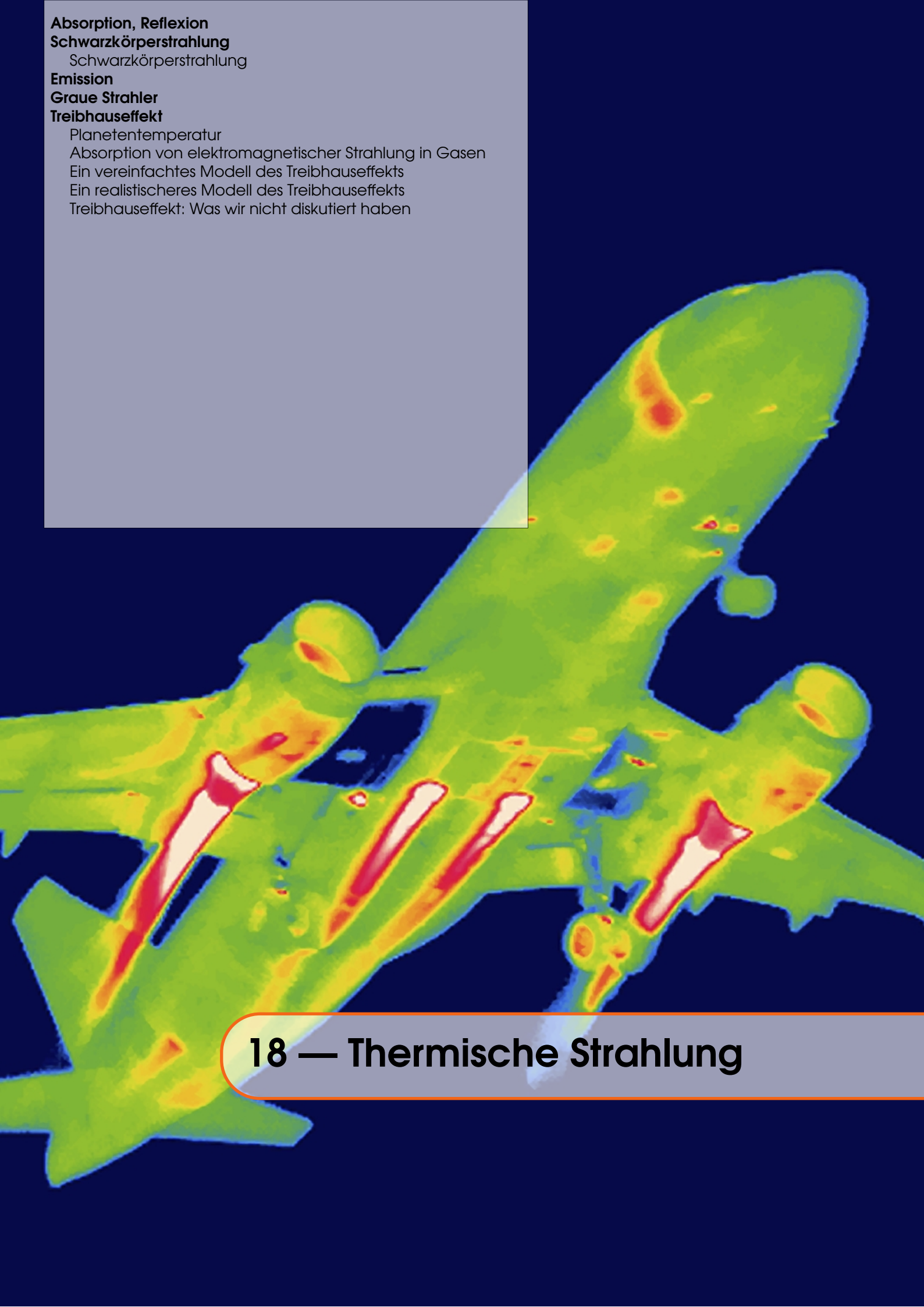


Abbildung 17.7: Wellenlängen des sichtbaren Lichts.

Absorption, Reflexion
Schwarzkörperstrahlung
Schwarzkörperstrahlung
Emission
Graue Strahler
Treibhauseffekt
Planetentemperatur
Absorption von elektromagnetischer Strahlung in Gasen
Ein vereinfachtes Modell des Treibhauseffekts
Ein realistischeres Modell des Treibhauseffekts
Treibhauseffekt: Was wir nicht diskutiert haben



18 — Thermische Strahlung

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

18.1 Absorption, Reflexion

Ohne das wir das im Detail diskutieren, stellen wir fest: Strahlung transportiert Energie. Die **Intensität** I der Strahlung gibt an, wieviel Energie pro Quadratmeter und Sekunde auf eine vertikal zur Strahlung aufgestellten Fläche auftreffen.

Wenn Strahlung auf ein Objekt trifft, können zwei verschiedene Prozesse auftreten:

- Strahlung kann absorbiert werden. Man definiert dabei den **Absorptionskoeffizienten** α der angibt, welcher Anteil der Strahlung vom Objekt aufgenommen wird. Die Grösse α ist eine Zahl zwischen 0 und 1 und gibt an, welcher Teil der Intensität αI der Strahlung "geschluckt"wird.

- Strahlung kann reflektiert werden (wobei wir hier nicht zwischen sogenannter Streuung und Reflexion im Sinne eins Spiegels unterscheiden). Man definiert dabei den **Reflexionskoeffizienten** ρ der angibt, welcher Anteil ρI der Strahlung beim Auftreffen auf ein Objekt in irgendeine Richtung zurückgestreut wird.

Da Energieerhaltung gilt, können wir schliessen:

$$I = \alpha I + \rho I. \tag{18.1}$$

Dies bedeutet $\alpha + \rho = 1$.

Wenn ein Objekt Strahlung absorbiert, nimmt das Objekt Energie auf. Wir beobachten, dass Strahlung, etwa Sonnenlicht, Objekte aufheizen kann, aber nicht auf beliebige Temperaturen. Wenn wir ein kaltes Objekt unter eine Wärmelampe legen,

wird die Temperatur des Objekts steigen. Diese Temperaturzunahme geschieht aber immer langsamer. Schliesslich überschreitet die Temperatur des Objekts auch bei beliebig langer Bestrahlung (mit konstanter Intensität) eine gewisse Temperatur nicht. Daraus schliessen wir: Ein Objekt mit einer Temperatur T strahlt Energie ab (mit einer Leistung P). Je höher die Temperatur, desto grösser ist die abgestrahlte Leistung. Diese Abstrahlung bezeichnet man als **Emission**.

!!! Der Begriff Äbsorptionskoeffizient"wird auf verschiedene Weise gebraucht und hat manchmal eine andere Bedeutung als die hier angegebene. Recht häufig wird in der Fachliteratur mit dem Absorptionskoeffizienten die Abschwächung von Licht, welches sich durch Materie bewegt, angegeben. In dieser Vorlesung bedeutet das Wort Äbsorptionskoeffizient"der Anteil der Intensität, der beim Auftreffen auf Materie von dieser absorbiert wird.

Reflexions- und Absorbtionskoeffizienten können von der Wellenlänge, dem Auftreffwinkel, der Temperatur und noch vielen anderen physikalischen Grössen abhängen. Wir diskutieren hier aber nur einfache Fälle.

18.2 Schwarzkörperstrahlung

Eine genaue, auf den Resultaten von Max Planck durchgeführte Analyse liefert einige wesentliche Einsichten. Planck analysierte Objekte mit Reflexionskoeffizient $\rho = 0$. Solche Objekte nennt man **schwarze Körper**. Die Terminologie ist unglücklich, z.B. ist die Sonne ein schwarzer Körper. Stellen Sie sich einen schwarzen Körper als ein Objekt vor, welches auftreffendes Licht komplett schluckt, dabei erwärmt wird und selber zu strahlen beginnt. Falls das angestrahlte Objekt so heiss ist, dass es glüht, zeigt sich, wie problematisch der Ausdruck ßchwarzer Körperïst.

18.2.1 Schwarzkörperstrahlung

Ein sehr wichtiges Resultat von Planck ist, dass ein schwarzer Körper der Temperatur T Strahlung in allen Frequenzen abgibt. Die emittierte Intensität als Funktion von Frequenz und Temperatur ist gegeben durch die Beziehung:

$$I(\nu, T) = \frac{2h\pi\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \tag{18.2}$$

Dabei ist $c = 3.0 \cdot 10^8 m/s$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ die sog. Boltzmannkonstante und $h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$ das Planck'sche

Wirkungsquantum oder Planck'sche Konstante. Man kann diese Beziehung auch als Funktion von Wellenlänge und Temperatur angeben:

$$I(\lambda,T) = \frac{2h\pi c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}. \tag{18.3}$$

In der Fig. 18.1 sind die Strahlungsintensitäten für verschiedene Temperaturen angegeben. Wichtig dabei sind zwei Feststellungen:

- Ein schwarzer Körper gibt Strahlung auf allen Wellenlängen ab.
- Das Maximum der Intensität hängt von der Temperatur ab. Je heisser ein Objekt, desto kürzer ist die Wellenlänge bei der das Strahlungsmaximum liegt. Aus dieser Betrachtung wird klar, warum eine glühende Herdplatte zuerst im Infraroten, dann im Tiefroten und bei wachsender Temperatur nicht nur immer heller sonder auch mit immer kürzeren Wellenlängen strahlt. Man sagt gerne "Je heisser, desto blauer!"Das stimmt nicht ganz oder zumindest nur im bildlichen Sinn. Natürlich wird für extrem heisse Objekte das Strahlungsmaximum jenseits der Frequenz, welche wir als "blau"wahrnehmen, liegen. Weitere Erhitzung würde das Strahlungsmaximum zu noch kürzeren Frequenzen sozusagen weg von blau verschieben!

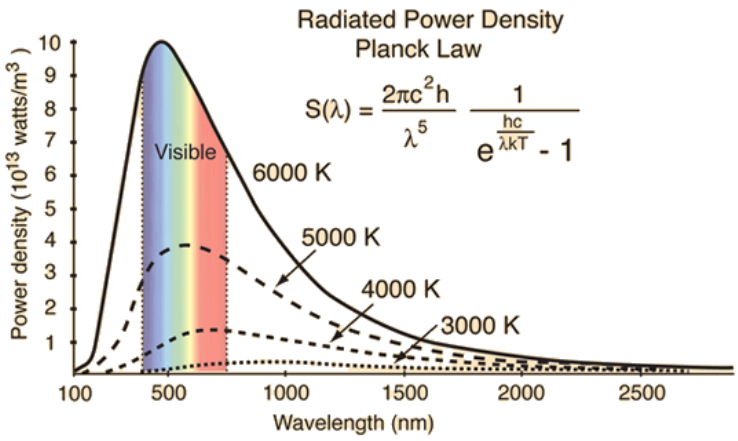


Abbildung 18.1: Intensität als Funktion der Wellenlänge und der Temperatur. Ein schwarzer Körper strahlt auf allen Wellenlängen, allerdings bestimmt die Temperatur, bei welcher Wellenlänge das Strahlungsmaximum liegt.

Aus dem Planck - Spektrum ergeben sich einige Schlussfolgerungen, die wir im folgenden diskutieren.

Prerequisite 18.1 Wenn wir im folgenden Temperaturen angeben, so geschieht dies immer in Kelvin. Die Kelvinskala hat ihren Nullpunkt bei - 273.15°C, und es gilt die Umrechnung:

$$T[K] = T[°C] + 273.15. \tag{18.4}$$

Spektrum einer Glühbirne

Die Betrachtung des Spektrums einer Glühbirne zeigt, warum wir heute Energiesparlampen einsetzen. In der Tat strahlt eine Glühbirne den grössten Teil der erzeugten Energie im Infrarotbereich ab. Da wir diesen Teil des Spektrums nicht sehen können ist diese Energie verschwendet. Hierzu allerdings eine Bemerkung: in der Tat erzeugen herkömmliche Glühbirnen viel Abwärme. Ersetzt man Glühbirnen durch Energiesparlampen, entfällt diese. Speziell im Winter gilt aber: solange wir den Thermostaten nicht runterdrehen sparen wir natürlich keine Energie! Wie Wärme, welche nicht durch Glühbirnen produziert wird, wird dann einfach von der Zentralheizung geliefert.

Wien'sches Verschiebungsgesetz

Das Planckspektrum hat ein klar identifizierbares Maximum. Obwohl die Plattform wohl relativ kompliziert aussieht, kann die Wellenlänge λ_{max}, bei welcher das Maximum auftritt, einfach berechnet werden. Es gilt das **Wien'sche Verschiebungsgesetz**:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}. \tag{18.5}$$

Dabei ist $b = 2.8978 \cdot 10^{-3} mK$ die sogenannte Wien'sche Verschiebungskonstante. Im wesentlichen besagt das Wien'sche Verschiebungsgesetz, dass die Wellenlänge, bei der ein schwarzer Körper der Temperatur T mit maximaler Intensität strahlt umgekehrt proportional zu T ist. Also: je heisser ein Objekt ist, desto blauer strahlt es (Wobei wir hier das Wort blau bildhaft verwenden. Wir meinen damit einfach kurze Wellenlängen.) Das Wiensche Verschiebungsgesetz erlaubt es uns durch Analyse des Spektrums eines schwarzen Körpers dessen Temperatur zu bestimmen. Zum Beispiel kann damit die Oberflächentemperatur eines Sterns bestimmt werden für unsere Sonne ergibt sich das deren Oberflächentemperatur ungefähr bei 5800 Kelvin liegt.

Eine detaillierte Analyse der Temperatur und Grösse verschiedener Sterne zeigt, dass die Sterngrösse und die Sternfarbe miteinander korreliert sind. Dies kommt im sogenannten Hertzsprung - Russell - Diagramm zum Ausdruck, siehe Fig. 18.3. Bei der Betrachtung dieses Diagramms kann man sich fragen, warum es eigentlich keine grünen Sterne gibt. Dies hat, wenn man so sagen will, physiologische Ursachen. Selbstverständlich gibt es Sterne, deren Temperatur ein

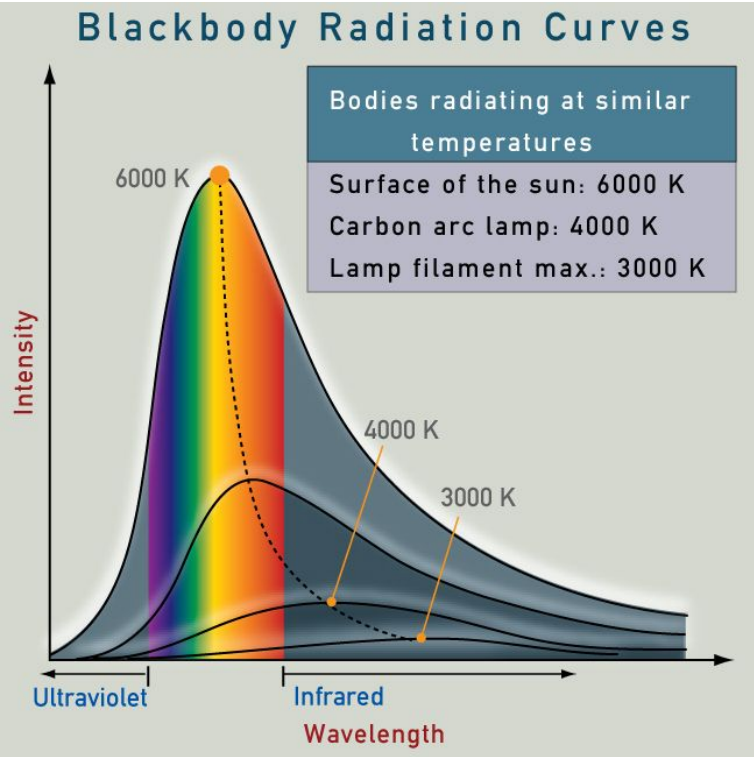


Abbildung 18.2: Intensität als Funktion der Wellenlänge und der Temperatur. Ein schwarzer Körper strahlt auf allen Wellenlängen, allerdings bestimmt die Temperatur, bei welcher Wellenlänge das Strahlungsmaximum liegt.

Strahlungsmaximum im grünen Wellenlängenbereich produziert. Unsere Augen nehmen das Licht dieser Sterne allerdings als weiss war. Seien Sie sich immer bewusst, dass ein Schwarzer Körper, welcher ein Strahlungsmaximum im grünen Bereich hat, natürlich in allen Wellenlängenbereichen strahlt. Unsere Augen interpretieren die resultierenden Frequenzgemische. Und Frequenzgemische, welche zu einem grünen Strahlungsmaximum gehören, interpretieren wir als weiss.

Stefan - Boltzmann Gesetz

Die Beziehung Gl. 18.3 gibt an, mit welcher Intensität ein Körper mit Temperatur T bei einer bestimmten Wellenlänge λ strahlt. Natürlich kann man alle diese Intensitäten zusammenzählen (integrieren) und erhält dann die totale Strahlungsleistung $P(T)$ eines schwarzen Körpers mit Temperatur T, das **Gesetz von Stefan - Boltzmann**:

$$P(T) = \sigma A T^4. \tag{18.6}$$

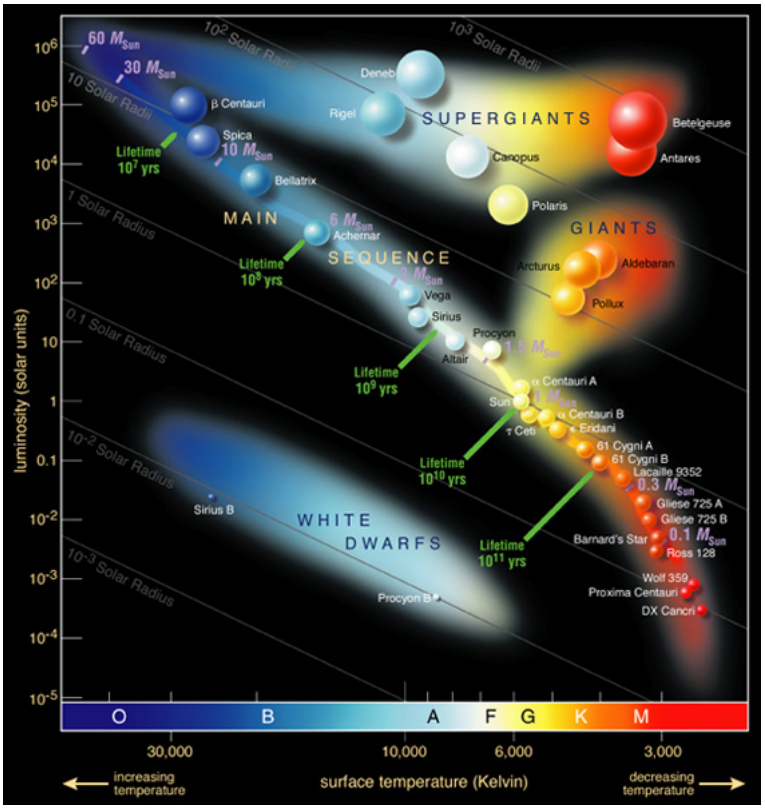


Abbildung 18.3: Hertzsprung - Russell Diagramm. Iamge by ESO, https://www.eso.org/public/images/eso0728c/

Dabei bezeichnet A die Oberfläche des Körpers, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ die Stefan - Boltzmann Konstante und T die Temperatur des schwarzen Strahlers in Kelvin.

Das Gesetz von Stefan - Boltzmann besagt unter anderem, dass eine Verdoppelung der Temperatur zu einer Versechzehnfachung der abgestrahlten Leistung führt. Bereits eine relativ kleine Erhöhung der Temperatur führt zu einer deutlichen Vergrösserung der abgestrahlten Leistung. **Beachten Sie dabei aber immer, dass wir in Grad Kelvin rechnen!**

Weiter gilt, dass ein Körper natürlich nicht nur Energie abstrahlt, sondern auch Energie aus der Umgebung aufnimmt. In guter Näherung nehmen wir dabei an, dass es sich bei der Umgebung um einen schwarzen Körper handelt. Wenn wir annehmen können dass die gesamte Umgebung dieselbe Temperatur T_{env} hat, ergibt sich für einen schwarzen Körper eine Energiebilanz der folgenden Form:

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma A (T^4 - T_{env}^4). \tag{18.7}$$

Dabei bezeichnet E den Energiegehalt des schwarzen Körpers, und T dessen Temperatur.

Dass die abgestrahlte Leistung proportional zur Oberfläche ist, ist nicht weiter verwunderlich. Natürlich strahlen zwei Heizkörper doppelt so viel Energie ab wie ein Heizkörper. Für biologische, aber auch für viele technische Systeme ergibt sich eine interessante Konsequenz. Bei biologischen Systemen, welche ja aus Zellen zusammengesetzt sind, kann man grob sagen, dass die Menge der produzierten Abwärme ungefähr proportional zur Menge der Zellen und damit zum Volumen des Körpers ist. Wenn man nun ein vorgegebenes biologisches System einfach aufzoomt, ergeben sich Probleme bei der Kühlung des Systems. Die totale Abstrahlungsfläche wächst bei einer Verdoppelung aller Längen um einen Faktor vier, während dem das Volumen um einen Faktor acht zulegt. Im Verhältnis muss die Oberfläche also doppelt so viel Energie abgeben. Dies bedeutet, dass je grösser ein biologisches System wird, desto schwieriger wird seine Kühlung.

Für nanotechnologische Anwendungen ist die Oberflächenabhängigkeit der Abstrahlung ein grosser Segen. Je kleiner ein Motor wird, desto weniger schwierig ist es, ihn zu kühlen. Dies bedeutet, dass wir bei nanotechnologischen Systemen, so schwierig diese auch immer zu implementieren sind, wenigstens bei der Kühlung keine allzu grossen Probleme zu erwarten haben.

Sehr zu Recht bringen nun einige Studierende den Einwand vor, dass Computer ja immer kleiner werden (zumindest deren CPU), die Kühlung aber ein immer grösseres Problem darstellt. Hierbei muss man folgendes beachten: Computer werden deswegen kleiner gemacht, weil kleinere Systeme schnellere Schaltzeiten und eine höhere Packungsdichte der Transistoren erlauben. Nun ist die Abwärme eines Computers im wesentlichen proportional zur Anzahl Schaltzyklen und zur Anzahl Schaltelemente, also umgekehrt proportional zur Frequenz und proportional zur Packungsdichte. Eine Verkleinerung bei gleichzeitiger Erhöhung der Schaltfrequenz und Packungsdichte führt also nicht zu einer automatischen Verbesserung der Kühlungssituation. Bei Computern kann man im Zuge der Miniaturisierung eben nicht sagen, dass die produzierte Abwärme proportional zum Volumen ist.

Ein weiterer Einwand betrifft direkt biologische Systeme. Warum, so kann man sich fragen, beobachtet man dann, dass zum Beispiel Insekten in kühleren Klimaregionen eher kleiner sind als in tropischen Gebieten? Der Grund hierfür ist einfach anzugeben. Die Evolution optimiert den Gesamtenergieverbrauch. In kühleren Regionen ist es schwierig, genügend Energie zum Betrieb eines biologischen Systems aufzutreiben. Wie sie aus der Mechanik wissen sind die Leistungen welche sie zur Bewegung eines Objekts aufbringen müssen, proportional zur Masse des Objekts. Zwar stimmt es, dass rein aus Strahlungsgründen grosse Systeme kleinen Systemen vorzuziehen wären, aber die Energie, welche sie brauchen, um grosse Objekte zu bewegen, macht diesen vermeintlichen Vorteil zunichte.

18.3 Emission

Bei der Diskussion von Absorption und Reflexion haben wir uns mit der Frage beschäftigt, was passiert, wenn Strahlung auf die Oberfläche eines Körpers trifft. Dabei definierten wir den Absorptions- und den Reflexionskoeffizienten (α und ρ). Letztlich ging es dabei darum, zu untersuchen was passiert, wenn Strahlung auf die Grenzfläche zwischen Vakuum und Materie trifft. Nun müssen wir uns vergegenwärtigen, dass Materie, zum Beispiel ein Stück Metall,“ fast leer“ ist. Zwischen den sehr kleinen Atomen und den noch kleineren Elektronen hat es eigentlich nichts. Das bedeutet, dass elektromagnetische Strahlung sich natürlich auch im Innern der Materie ausbreiten kann. In der Tat ist die Ausbreitung von Strahlung in Materie ein kompliziertes Gebiet; hier wollen wir uns fragen, was passiert wenn Strahlung auf die Grenzfläche zwischen Materie und Vakuum trifft, aber diesmal nicht von der Aussenseite sondern von der Innenseite her. Es zeigt sich, dass auch beim Auftreffen von Strahlung mit Intensität I auf die Grenzfläche von der Innenseite her Reflexion (diesmal zurück in den Körper) auftreten kann. Ohne dass wir das im Detail besprechen, zeigt es sich, dass der Reflexionskoeffizient nicht von der Richtung abhängt, mit der Strahlung auf eine Grenzfläche auftrifft[1]; der Anteil der reflektierten Strahlung ist also gegeben durch ρI. Die Strahlung, welche den Körper verlässt, also von der Aussenseite absorbiert wird, nennt man die emittierte Strahlung; sie wird durch den Emissionskoeffizienten ε charakterisiert (emittierte Strahlung: εI). Die Situation ist illustriert in Fig. 18.4

Wieder gilt, aufgrund der Energieerhaltung, dass die Summe der emittierten und der andere Grenzfläche in den Körper zurückgeworfenen, also reflektierten, Strahlung gleich der gesamthaft vorhandenen Strahlung ist. Das bedeutet: $\rho_{in} + \varepsilon = 1$. Bei allen von uns betrachteten Materialien gilt, wie oben erwähnt, dass der Reflexionskoeffizient unabhängig Von der Richtung ist, mit der Strahlung auf eine Grenzfläche auftrifft. Damit gilt aber sofort dass der Emissionskoeffizient gleich im Absorptionskoeffizienten ist:

$$\alpha = \varepsilon. \tag{18.8}$$

Diese Betrachtungen scheinen auf den ersten Blick etwas formal zu sein. Der Gedanke, dass sie elektromagnetische Strahlung im Innern der Materie ebenso ausbreitet wie im Vakuum scheint etwas verwunderlich zu sein.In der Tat ist die Ausbreitung elektromagnetischer Strahlung in Materie ein komplizierter Prozess. Wichtig für uns ist die Tatsache, dass Strahlung an der Grenzfläche Materie - Vakuum immer reflektiert wird, unabhängig von der Seite, von welcher die Strahlung herkommt. Eine direkte Konsequenz aus diesen Überlegungen ist zum Beispiel die Beantwortung Ein Gebäude in der Arktis eher schwarz oder weiss angemalt werden

[1] Zumindest nicht bei den von uns untersuchten Materialien

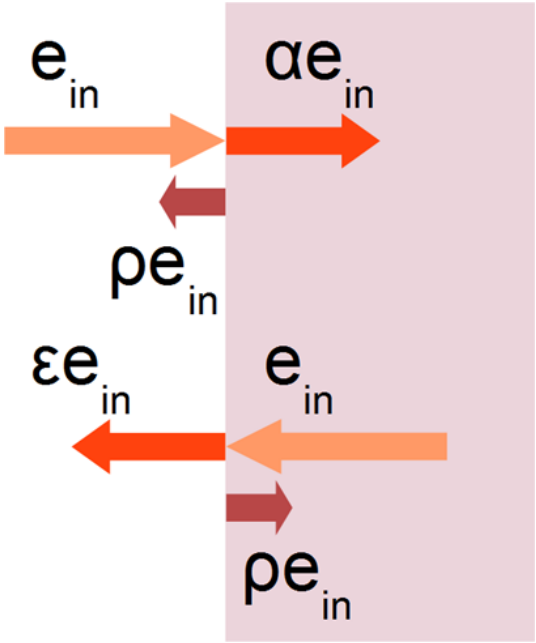


Abbildung 18.4: Absorption, Reflexion, Emission.

sollte. Man könnte auf die Idee kommen, Schwarz sei am besten geeignet. Dies aufgrund der Tatsache, dass die Sonne schwarz angestrichene Gebäude effizient aufheizt. Nun ist das Hauptproblem in der Arktis aber nicht das Aufheizen eines Gebäudes durch Sonneneinstrahlung sondern die Vermeidung von Abstrahlungsverlusten aus dem Innern. Am besten wäre es deshalb, wenn keine Strahlung die Mauern des Gebäudes verlassen könnte. Dies kann dann erreicht werden wenn von der Innenseite her kommende Strahlung perfekt reflektiert wird. Perfekte Reflexion gibt es natürlich nicht, aber ein weisser Anstrich reflektiert sowohl die von aussen als auch die von innen her kommende Strahlung. Damit ist ein weisser Anstrich energieeffizienter.

18.4 Graue Strahler

Bis jetzt haben wir uns vor allem auf schwarze Körper konzentriert (SSchwarzïm Sinne von $\rho = 0$). In der Tat haben natürlich nicht alle Objekte verschwindende Reflexionskoeffizienten. Reflexions-, Absorptions- und Emissionskoeffizienten können beliebige Werte zwischen null und eins annehmen und sogar von der Wellenlänge abhängig sein. Formal bedeutet dies eine Modifikation der Planck -

Formel 18.3 zu:

$$I(\lambda,T) = \varepsilon(\lambda)\frac{2h\pi c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}. \tag{18.9}$$

mit einer Funktion $\varepsilon(\lambda)$, welche auf den Wertebereich $[0,1]$ eingeschränkt ist.

18.5 Treibhauseffekt

Warum ist die Durchschnittstemperatur auf der Erde ungefähr $289K$? Diese Frage zu beantworten ist viel komplizierter, als es auf den ersten Blick aussieht. Auch ist diese Frage eng mit der sehr aktuellen Frage der Klimaerwärmung verbunden. Wir werden im folgenden einige Aspekte dieser Problematik diskutieren. Dabei möchten wir vorgängig einige Punkte klarstellen:

- Ich, Ruedi M. Füchslin, der Autor dieses Skripts, bin der festen Überzeugung, dass die Emission von Treibhausgasen eine Quelle grosser Probleme werden kann und unterstütze deshalb die Reduktion des Ausstosses solcher Gase auf Entschiedenste.

- Die Abkehr von fossilen Energieträgern ist ein wichtiger Schritt zur Erreichung dieses Ziels.

- Klimatologie ist eine sehr schwierige Wissenschaft, welche sich rasch weiterentwickelt. Viele Detailfragen sind noch offen und die Forschung ist sehr aktiv. Die präsentierten Theorien und Messresultate wiederspiegeln den Wissenstand von R. Füchslin im März 2017 nach bestem Wissen und Gewissen.

- Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass der präsentierte Wissenstand weiter entwickelt und einer Revision unterzogen werden wird.

- Im Folgenden erhalten Sie eine vereinfachte Erklärung des Treibhauseffekts, d.h. längst nicht alle Faktoren werden berücksichtigt.

Eine sehr gute Quelle für schnelle und zuverlässige Informationen ist die Website des IPCC. Speziell in Bezug auf den Treibhauseffekt verweisen wir auf: IPCC Fourth Assessment Report: Climate Change 2007 `http://www.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/faq-1-3.html`.

18.5.1 Planetentemperatur

Wir können die Temperatur eines Planeten, also auch der Erde, durch eine sehr einfache Bilanzierungsüberlegung ohne Berücksichtigung der Atmosphäre abschätzen. Wie sich zeigen wird, ergibt das zugrundeliegende einfache Modell einen Wert für die Durchschnittstemperatur, welcher um einiges zu niedrig ist. Das bedeutet: Der Einfluss der Atmosphäre führt führt zu einer Erhähung der Durschnittstemperatur. Wie wir dann in den folgenden Abschnitten zeigen werden, hängt der sog. Treibhauseffekt von der Zusammensetzung der Atmosphäre ab.

Albedo

Das Albedo a eines Planeten gibt an, welcher Anteil der Intensität der einfallenden Sonnenstrahlung (bzw. der Strahlung eines anderen Sterns für extrasolare Planeten) vom Planeten reflektiert wird. Das Albedo ist nicht ganz genau gleich dem Reflexionskoeffizienten, weil sich das Albedo auf ein ganz bestimmtes Spektrum bezieht.

Definition 18.1 — Albedo. Das Albedo a eines Planeten ist definiert durch:

$$a = \frac{\text{Gesamtintensität der reflektierten Strahlung}}{\text{Gesamtintensität der einfallenden Strahlung}} \tag{18.10}$$

Temperatur der Erde

Um die Tmeperatur der Erde abzuschätzen, brauchen wir einige Zahlwerte:

- Der Radius der Sonne beträgt $r_{sun} = 6.955 \cdot 10^8 m$.
- Der Radius der Erde beträgt $r_{earth} = 6.37 \cdot 10^6 m$.
- Die Temperatur der Sonne beträgt $T_{sun} = 5778K$.
- Der Radius der Erdbahn ist $R_{earth} = 1.496 \cdot 10^{11} m$.
- Das Albedo der Erde beträgt $a_{earth} = 0.34$.

Es wird im Folgenden darum gehen, die auf die Erde von der Sonne eingestrahlte mit der von der Erde thermisch abgestrahlten Leistung zu vergleichen.

Die Sonne ist (so komisch das tönt) ein schwarzer Strahler. Die gesamte Abstrahlungsleistung P_{sun} der Sonne ist damit

$$P_{sun} = 4\pi r_{sun}^2 \sigma T_{sun}^4. \tag{18.11}$$

Die Intensität I_{earth} der auf der Erde eintreffenden Strahlung ist gegeben durch:

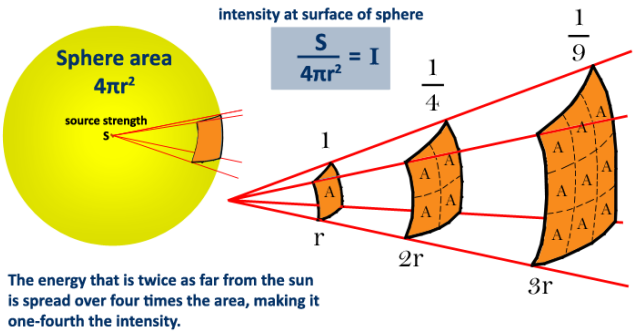


Abbildung 18.5: Die Sonne strahlt über ihre gesamte Oberfläche Schwarzkörperstrahlung ab. Diese Strahlung geht in den Weltraum und da die Energie erhalten ist schwächt sich die Intensität der Strahlung mit dem Quadrat des Abstandes von der Sonne ab.

$$I_{earth} = \frac{r_{sun}^2}{R_{earth}^2} \sigma T_{sun}^4. \tag{18.12}$$

Beachten Sie, dass R_{earth} der Erdbahnradius und nicht etwa der Radius der Erde ist. Die Abschwächung der Intensität ergibt sich dadurch, dass je weiter die Strahlung von der Sonne weggeht, die Energie der Strahlung über eine immer grössere Fläche verteilt werden muss. Die Formel ergibt sich aus der Überlegung, dass Intensität mal Fläche gleich totale Leistung ist, s. Fig. 18.5.

Nun kommt eine weitere geometrische Überlegung: Die Leistung, die die Erde aufnimmt ist gleich der Intensität I_{earth} mal der Querschnittsfläche der Erde, reduziert um die durch das Albedo gegebene Reflexion (s. Fig. 18.6):

$$P_{earth,in} = (1 - a_{earth}) \pi r_{earth}^2 \frac{r_{sun}^2}{R_{earth}^2} \sigma T_{sun}^4. \tag{18.13}$$

Der Faktor $(1 - a_{earth})$ Reduziert die aufgenommene Strahlung um den durch das Albedo der Erde gegebenen Reflexionsverlust. Wir machen nun eine Näherung Unternehmen an, die Erde habe überall dieselbe Temperatur. Die von der Erde ausgehende Strahlungsleistung (wieder nehmen wir an, dass die Erde ein schwarzer Strahler ist) ist dann gleich:

$$P_{earth,out} = 4\pi r_{earth}^2 \sigma T_{earth}^4. \tag{18.14}$$

Im Gleichgewicht muss gelten:

$$P_{earth,in} = P_{earth,out}. \tag{18.15}$$

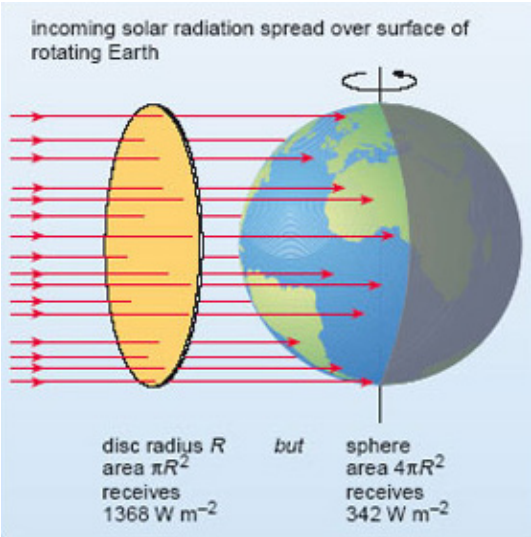


Abbildung 18.6: Die Erde nimmt eine Gesamtleistung auf, welche der Strahlungsintensität mal der Querschnittsfläche der Erde entspricht.

Diese Gleichung kann nun nach T_{earth} aufgelöst werden:

$$T_{earth} = \left((1 - a_{earth}) \frac{r_{sun}^2}{4R_{earth}^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 251K. \tag{18.16}$$

Obwohl unsere Rechnung keine allzu groben Näherungen enthält (in der Tat ist der Temperaturunterschied zwischen Tag und Nacht nicht allzu dramatisch) zeigte sich doch, dass wir mit unserer Abschätzung weit daneben liegen. Der Grund hierfür liegt im sogenannten Treibhauseffekt, den wir im nächsten Abschnitt besprechen werden.

18.5.2 Absorption von elektromagnetischer Strahlung in Gasen

Zuerst einmal müssen wir verstehen, was passiert, wenn ein Atom oder Molekül in einem Gas ein Lichtquant absorbiert[2]. Bis jetzt haben wir immer so getan, also wenn Licht eine Welle wäre. Dies ist durchaus richtig. Allerdings gibt es eine andere Betrachtungsweise, welche Licht als zusammengesetzt aus Lichtteilchen, sogenannte Photonen, darstellt. Beide Betrachtungsweisen sind richtig, das Teilchenbild ist allerdings für das Studium von Absorption und Emission wesentlich besser geeignet. Wenn nun ein Photon auf ein Molekül trifft, kann es zur sog. Absorption kommen, s. Fig. 18.7. Dies ist ein quantenmechanischer Prozess, denn

[2]Der Prozess ist in der Tat ausserordentlich kompliziert nur quantenmechanisch zu verstehen. Wir diskutieren hier nur einige zentrale Aspekte.

wir nicht im Detail diskutieren. Sein Resultat ist aber, dass sowohl der innere Energiezustand als auch die kinetische Energie des Moleküls sich ändern. Die Moleküle werden mit anderen Molekülen wechselwirken und irgendwann ein Photon abstrahlen (Emisssion). Für unsere Zwecke wichtig sind zwei Fakten:

- Die Emission kann in irgendeine Richtung geschehen.
- Die Absorptionswahrscheinlichkeit hängt vom Molekültyp und der Wellenlänge der Strahlung ab.

Die Situation ist illustriert in Fig. 18.8, wo eine Frequenzbereich (oranges und rotes Licht) besonders stark absorbiert wird. Das Gas emittiert natürlich auch Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung. Ganz abgesehen von der Tatsache, dass die Emission in alle Richtungen geschehen kann, müssen das Absorptionsspektrum und das Emissionsspektrum nicht unbedingt identisch sein. Ein Teil der emittierten Strahlung ist thermische Strahlung, s. Fig. 18.9.

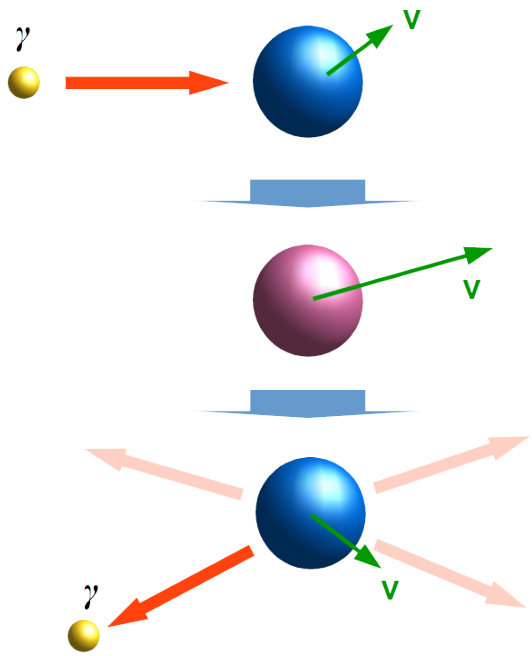


Abbildung 18.7: Ein Molekül in der Luft absorbiert ein Lichtteilchen und emittiert dies später wieder. Dabei ist es wichtig zu wissen, dass die Emission in irgend eine Richtung geschehen kann.

18.5.3 Ein vereinfachtes Modell des Treibhauseffekts

In diesem Abschnitt präsentieren wir Ihnen ein vereinfachtes Modell des Treibhauseffekts. Insbesondere die Zahlenwerte die wir verwenden, stimmen nicht mit

den realen Werten überein. Das Modell soll Ihnen den Mechanismus illustrieren. Eine realitätsnähere Betrachtung folgt im nächsten Abschnitt.

Zuerst nehmen wir an, wir hätten keine Atmosphäre (s. Fig. 18.10), zumindest keine mit Gasen, die Strahlung absorbieren. Von der Sonne kommt Strahlung mit einem Strahlungsspektrum, welches zu einer Temperatur von $T_{sun} = 5778K$ gehört. Die eingestrahlte Leistung P_{in} heizt die Erde auf T_{earth} auf (natürlich nicht auf die Oberflächentemperatur der Sonne). T_{earth} wird so gross sein, dass P_{out} gerade P_{in} kompensieren wird (Sechs Pfeile in, sechs Pfeile out). Jetzt geben wir ein Gas hinzu (s. Fig. 18.11, welches die Strahlung mit dem Spektrum der Sonnenstrahlung (fast) ungehindert durchlässt. die Strahlung mit dem Temperaturspektrum der Erde zu einem Drittel durchlässt und zu zwei Drittel absorbiert. Die Hälfte dieser zwei Drittel (also ein Drittel), wird wieder zur Erde zurückgestrahlt. Als Resultat haben wir, dass 8 Pfeile auf den Boden kommen, 6 Pfeile den Boden und vier Pfeile die Erde verlassen. Die Gesamtenergiebilanz der Erde (und ihrer unteren Atmosphäre) ist positiv und die Erde heizt sich auf. Wenn T_{earth} so gross wird (s. Fig. 18.12, dass neun Pfeile die Erde verlassen und in der Summe ein Drittel davon (also drei Pfeile) auf die Erde zurückgestrahlt werden, haben wir wieder eine ausgeglichene Strahlungsbilanz. Die Erde wird also durch die Präsenz eines Gases mit geeigneten Absorptionseigenschaften aufgeheizt! So ein Gas nennt man ein **Treibhausgas**.

18.5.4 Ein realistischeres Modell des Treibhauseffekts

Die Gesamtenergiebilanz der Erde zu erstellen ist eine sehr schwierige Aufgabe. Eine Übersicht über die wichtigsten Effekte sehen Sie in Fig. 18.13, Welche neben Strahlungseffekten auch den Einfluss der Wolken und kollektiver Effekte mitberücksichtigt. Total bekommt man eine Nettoleistungsaufnahme der Erde von ungefähr $0.9Wm^{-2}$[3]. In Fig. 18.14 sehen Sie das Schwarzkörperspektrum der Erde. Wie Sie sehen strahlt die Erde thermisch besonders stark im Bereich von 10 - 15 μm. Fig. 18.15 Illustriert nun das Problem mit dem Kohlendioxid. Die Figur zeigt (blau) das Absorptionsspektrum von Wasserdampf in der Erdatmosphäre. Dieses weist gerade im Bereich der thermischen Strahlung der Erde ein Fensteräuf, d. h. die thermische Strahlung kann fast ungehindert entweichen. Das Problem am Kohlendioxid (orange) ist nun, dass Kohlendioxid ein Absorptionsspektrum hat welches das Wasserdampffenster zum Teil schliesst. Dadurch kann weniger thermische Strahlung entweichen. Wie Sie aus Fig. 18.16 entnehmen können, gibt es neben dem bekannten Kohlendioxid auch noch andere Treibhausgase.

[3] Diese Zahl ist Gegenstand der laufenden Diskussion. Bitte beachten Sie, dass neuere Werte eventuell leicht von diesem Wert abweichen können.

18.5.5 Treibhauseffekt: Was wir nicht diskutiert haben

Der Treibhauseffekt ist ein ausserordentlich komplexes Problem diverse Punkte haben wir nicht diskutiert, so zum Beispiel:

- Die Rolle von Aerosolen
- Die Rolle der Wolken
- Die durch die Temperaturänderung verursachte Änderung von konvektiven Effekten (Golfstrom, etc.)
- Die Rolle der Variation der Sonnenstrahlung.
- ...

Viel wichtiger ist es allerdings zu verstehen, dass der Treibhauseffekt zu Rückkoppelungseffekten führen kann. Grundsätzlich gibt es verstärkende und abschwächende Feedbackeffekte. (Fast) Alle Resultate deuten darauf hin, dass die verstärkenden Effekte stärker sind als die abschwächenden.

Eins (von vielen) Beispielen für einen verstärkenden Effekt: Wenn das Eis in der Arktis schmilzt, wird eine weisse Fläche dunkelblau. Damit reflektiert sie weniger (Albedo sinkt) und die Wärmeaufnahme wird beschleunigt ⇒ Eis schmilzt noch schneller ⇒ noch mehr dunkelblau ⇒ Noch mehr Wärmeaufnahme ⇒ ....

Eins (von vielen) Beispielen für einen abschwächenden Effekt: Mehr CO2 ⇒ Mehr "Kohlensäureïm Ozean ⇒ Seesterne wachsen schneller und vermehren sich ⇒ noch mehr Kohlensäure wird gebraucht ⇒ ... (Leider ist der Effekt langsam und nicht so stark).

Zusammenfassend kann man sicher sagen, dass die Veränderung der Zusammensetzung der Erdatmosphäre eine sehr ernsthafte Bedrohung für das Klima unseres Planeten darstellt

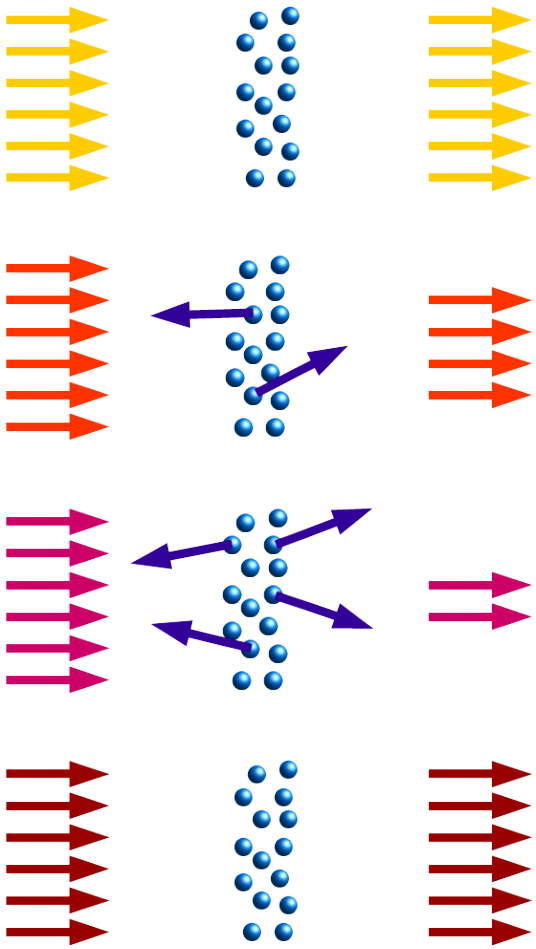


Abbildung 18.8: Die Absorptionswahrscheinlichkeit eines Photons kann von dessen Frequenz abhängen. Im Bild sehen Sie, dass gelbes und tiefrotes Licht eine Gasschicht praktisch ungehindert durchdringt während oranges und rotes Licht zu einem wesentlichen Teil absorbiert wird.

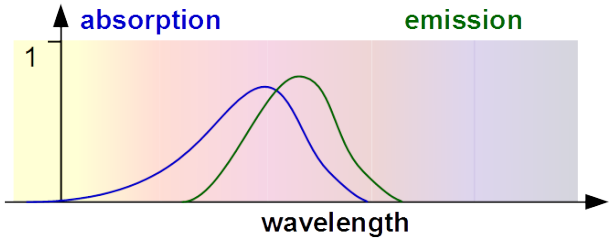


Abbildung 18.9: Die Absorptions- und Emissionsspektren eines Gases müssen nicht exakt übereinstimmen. Ganz abgesehen von der Tatsache, dass die Emission in alle Richtungen gleichmässig erfolgt, kann die Absorption sehr frequenzspezifisch geschehen, während dem ein Teil der vom Gas abgestrahlten Energie thermische Strahlung ist.

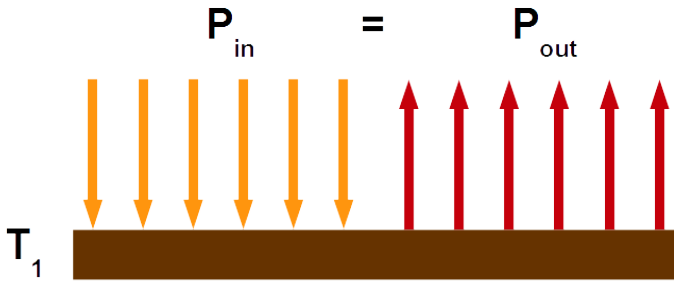


Abbildung 18.10: Ohne Atmosphäre wäre die Situation einfach zu verstehen. Die Sonne strahlt Leistung (illustriert durch sechs Pfeile) auf die Erde. Die Strahlung der Sonne Artenspektrum, welches demjenigen eines Körpers mit einer Temperatur von ungefähr 6000 Kelvin entspricht. Die Erde wird sich soweit erwärmen, dass sie im Gleichgewicht gleich viel Strahlungsleistung abgibt wie sie aufnimmt. Allerdings wird dabei die Erde mit einem Spektrum strahlen, welches ungefähr demjenigen eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von 300 Kelvin entspricht.

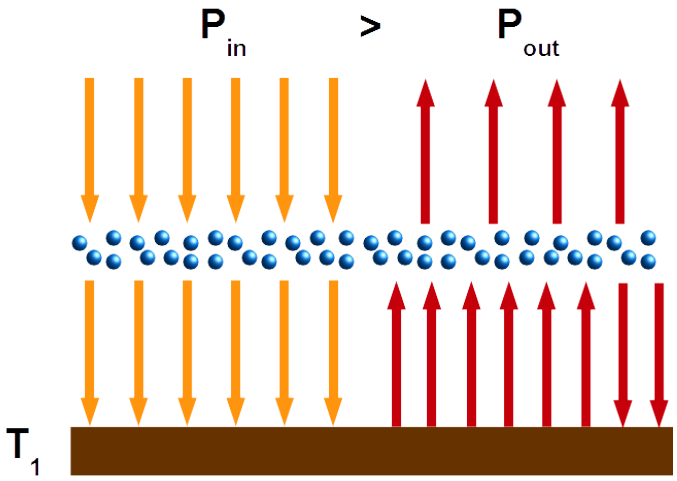


Abbildung 18.11: Das Hinzufügen von Gasen, welche die einfallende Strahlung von der Sonne nicht gleich stark absorbieren wie die von der Erde abgestrahlte thermische Strahlung verändert die Strahlungsbilanz der Erde.

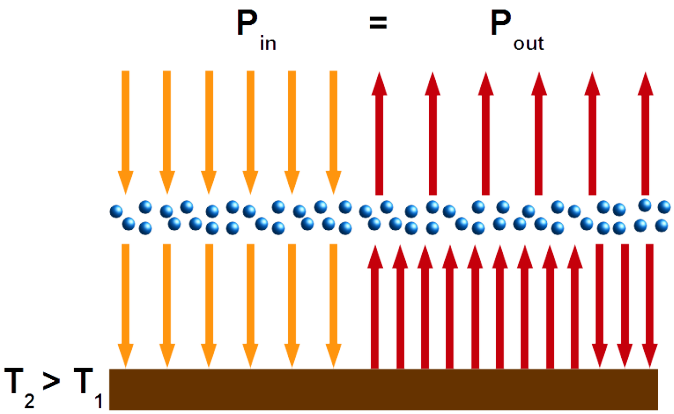


Abbildung 18.12: Das Hinzufügen von Gasen, welche die ein kommende Strahlung von der Sonne nicht gleich stark absorbieren wie die von der Erde abgestrahlte thermische Strahlung verändert die Strahlungsbilanz der Erde.

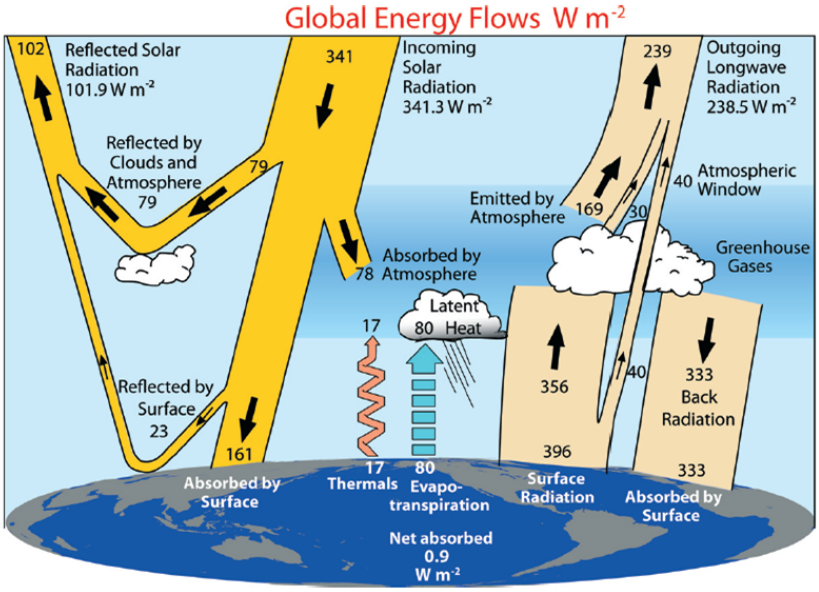


Fig. 1. The global annual mean Earth's energy budget for the Mar 2000 to May 2004 period (W m^{-2}). The broad arrows indicate the schematic flow of energy in proportion to their importance.

Abbildung 18.13: Quelle: Trenberth, K.E., J.T. Fasullo, and J. Kiehl, 2009: Earth's Global Energy Budget. Bull. Amer. Meteor. Soc., 90, 311–323, doi: 10.1175/2008BAMS2634.1

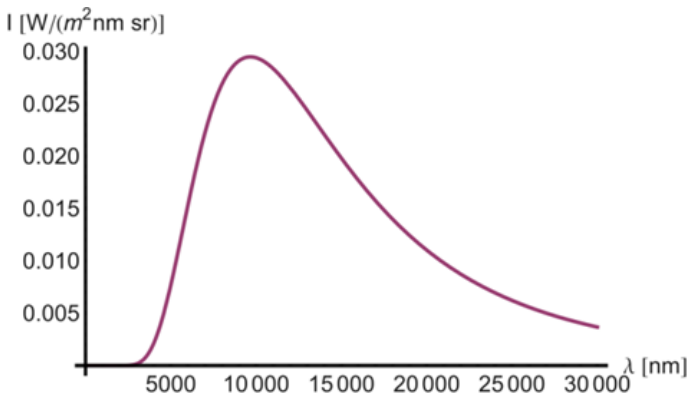


Abbildung 18.14: Schwarzkörperspektrum der Erde.

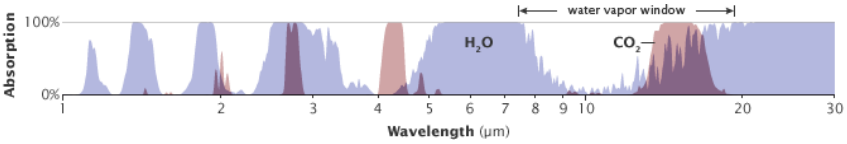


Abbildung 18.15: Atmospheric gases only absorb some wavelengths of energy but are transparent to others. The absorption patterns of water vapor (blue peaks) and carbon dioxide (pink peaks) overlap in some wavelengths. Carbon dioxide is not as strong a greenhouse gas as water vapor, but it absorbs energy in wavelengths (12-15 micrometers) that water vapor does not, partially closing the "windowthrough which heat radiated by the surface would normally escape to space. (Illustration NASA, Robert Rohde) NASA April 3, 2017, https://earthobservatory.nasa.gov/Features/EnergyBalance/page7.php

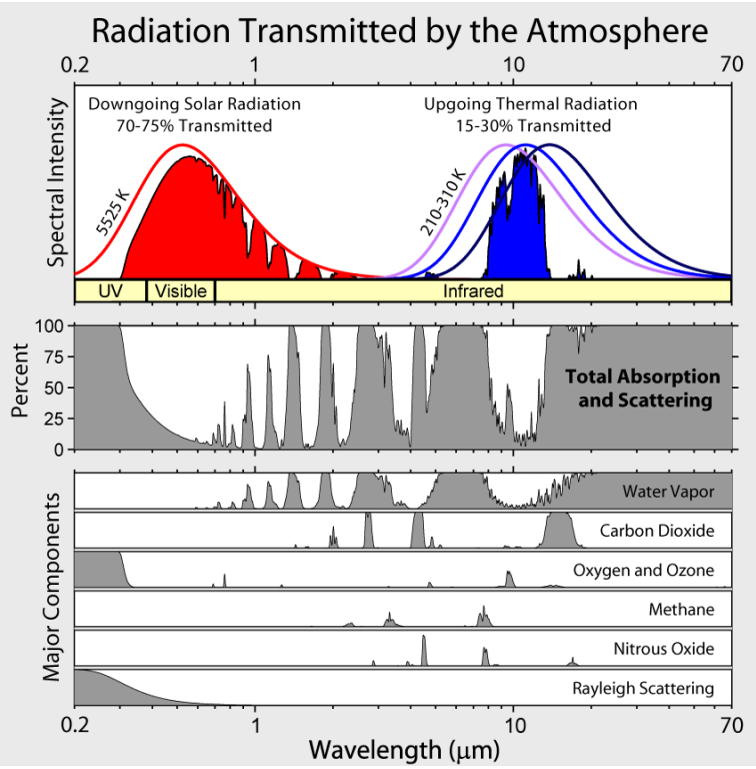
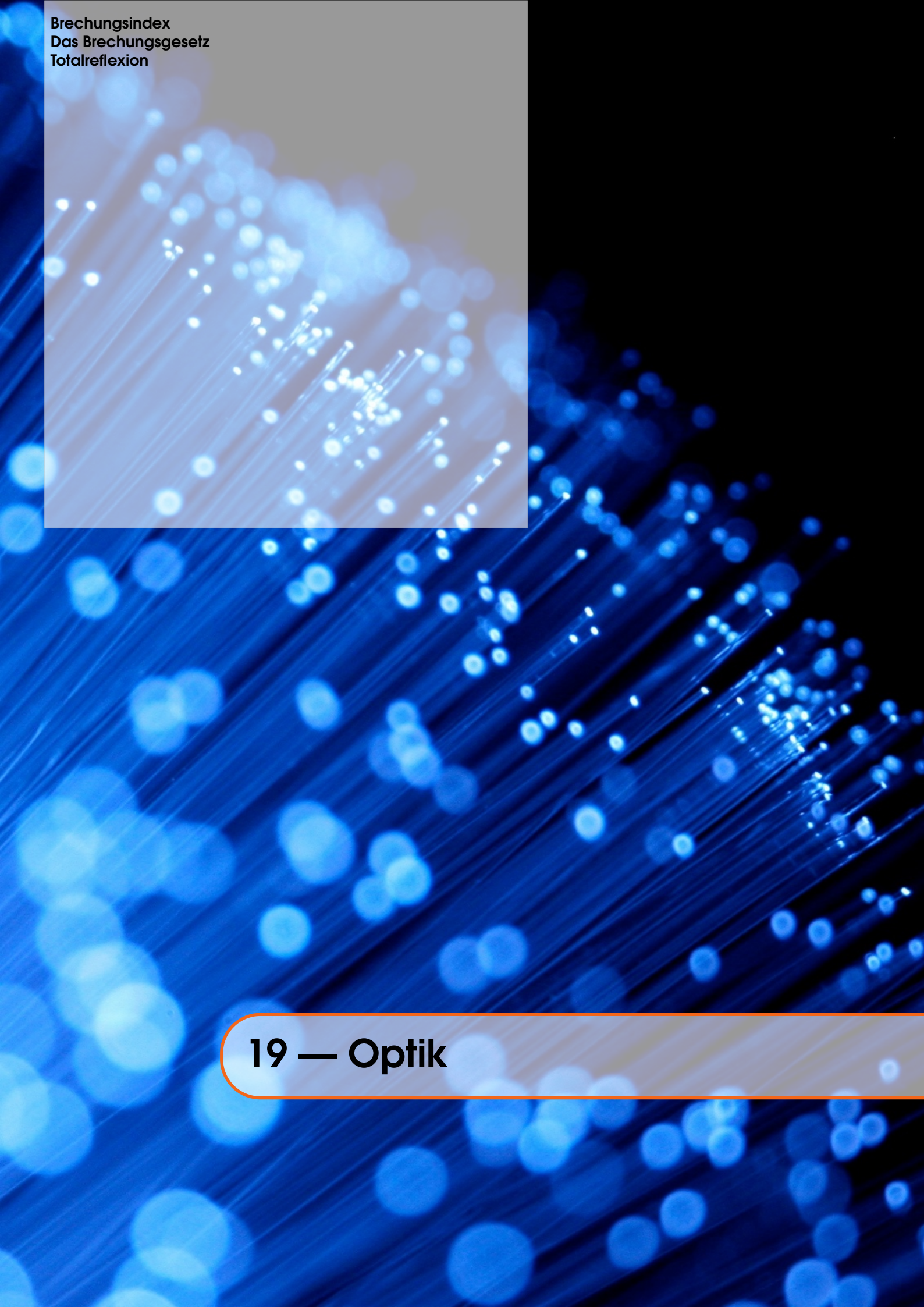


Abbildung 18.16: Die Absorptionsspektren verschiedener Treibhausgase.This figure was prepared by Robert A. Rohde for the Global Warming Art project.

Brechungsindex
Das Brechungsgesetz
Totalreflexion



19 — Optik

Dieses Kapitel ist für BI erst im zweiten Semester relevant.

Elektromagnetische Strahlung, zum Beispiel Licht, kann Materie durchdringen. Diese scheint auf den ersten Blick verwunderlich zu sein. Uns erscheint ein Stück Metall, ein Stein oder auch ein Stück Glas fest und undurchdringlich. In der Tat ist die Materie jedoch zum grössten Teil "leer". Kleine Atomkerne und noch wesentlich kleinere Elektronen sind durch Abstände voneinander getrennt, welche viel grösser als die Durchmesser der Atome sind. Stellt man sich Materie so vor, kann man den Eindruck bekommen, dass fast sämtliche Materie weitgehend durchsichtig sein müsste. Auch diese Vorstellung ist allerdings nicht ganz richtig. Beim Durchgang von Licht durch Materie treten im wesentlichen zwei Prozesse auf:

- Elektromagnetische Wellen regen Ladungsdipole zur Schwingung an. Diese schwingenden Dipole[1] wiederum erzeugen neue Wellen. Ähnlich wie beim Phänomen der Resonanz schwingen die die Pole mit der selben Frequenz wie die anregende Welle, es kommt aber zu Phasenverschiebungen und das Anregen eines Dipol welcher dann wiederum weitere Dipole anregt führt im Gesamten zu einer Verlangsamung der Lichtausbreitung.

- Lichtwellen können „geschluckt" und später auch wieder emittiert werden. Diese Prozesse sind rein quantenmechanisch und können in dieser Vorlesung nicht diskutiert werden.

Neben diesen zwei Hauptphänomenen gibt es noch weitere Prozesse. Diese führen zur sogenannten nicht linearen Optik. Die nicht lineare Optik spielt in der heutigen Technologie eine immer grössere Rolle und wird, so die Meinung von Experten, auch die Informationstechnologie revolutionieren. Noch ist es aber nicht so weit.

[1] Stellen Sie sich einen Dipol als zwei entgegengesetzte Ladungen vor, welche durch eine Feder verbunden sind.

19.1 Brechungsindex

Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf Phänomene, welche durch den sogenannten **Brechungsindex** n beschrieben werden können. Dabei geht es im wesentlichen um die Verlangsamung des Lichts in Materie. Der Brechungsindex n normalerMaterialien ist immer grösser als eins und die Lichtgeschwindigkeit in Materie v_L steht mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c in folgender Beziehung:

$$v_L = \frac{c}{n}. \tag{19.1}$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass heute sogenannte Metamaterialenmit negativem Brechungsindex hergestellt werden können.

Der Brechungsindex ist für die meisten Materialien eine Funktion der Wellenlänge. D.h.: Lichtwellen mit unterschiedlicher Wellenlänge haben einen unterschiedlichen Brechungsindex und damit eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit in Materie. Weiter ist der Brechungsindex natürlich für verschiedene Materialien unterschiedlich. Wir weisen darauf hin dass auch Luft, also ein Gas, einen Brechungsindex hat. Um Ihnen eine Vorstellung der Grössenordnungen zu geben: Wasser hat einen Brechungsindex von 1.33 (bei 20° C) und Luft einen von 1.0003 (bei 0° C).

Der Brechungsindex hat zwei für die Signalübermittlungstechnologie besonders wichtige Konsequenzen die erste betrifft das Auftreten von Totareflexion, einem für die Signalübermittlung in Glasfaserkabeln entscheidenden Prozess. Die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex, und damit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtwellen, hat eine weitere wichtige Konsequenz: Signale verändern während ihrer Ausbreitung ihre Gestalt. Im wesentlichen geht es darum, dass bei der Ausbreitung von anfänglich scharfen Pulsen es zu einer „Verschmierung“ der Signalform kommt.

19.2 Das Brechungsgesetz

In Europa seit dem 17. Jahrhundert (Willebrord Snellius) und in Bagdad seit 984 (Ibn Sahl) wusste man, dass für die Winkel mit denen Lichtstrahlen beim Auftreffen auf Wasser gebrochen werden, folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \text{const.} \tag{19.2}$$

Für die Erklärung der Winkel siehe Fig. 19.1. Heute wissen wir mehr; das Bre-

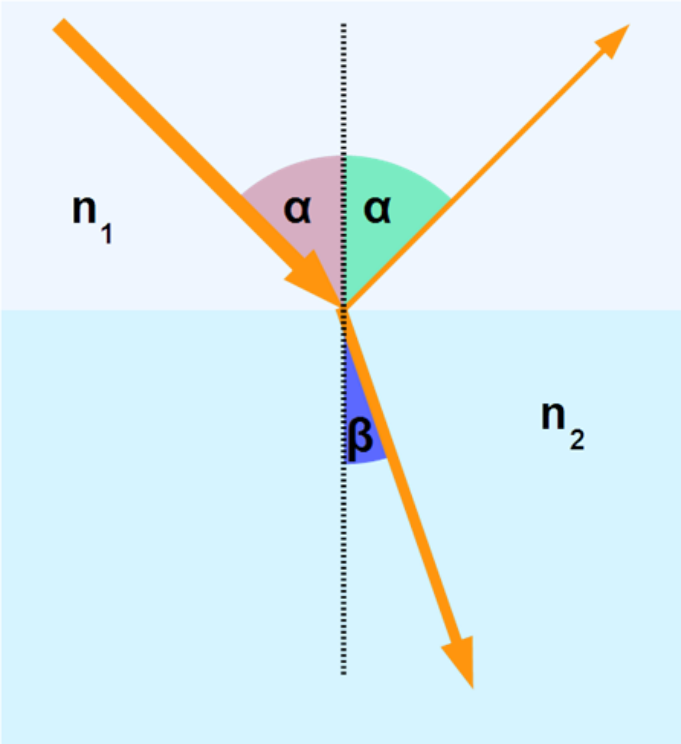


Abbildung 19.1: Brechung eines Lichtstrahls der aus einem Material mit Brechungsindex n_1 in ein Material mit Brechungsindex n_2 eindringt.

chungsgesetz hat die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} &= \frac{c_1}{c_2} \\ \frac{c_1}{c_2} &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \tag{19.3}$$

Das Gesetz beschreibt die Brechung eines Lichtstrahls der aus Material 1 aus- und in Material 2 eintritt. Der Winkel α bezeichnet man als Einfalls- den Winkel β als Ausfallswinkel. Weiter bezeichnet c_i die Lichtgeschwindigkeit und n_i den Brechungsindex in Material i. Was wir aus Fig. 19.1 auch noch entnehmen können, ist, dass der Einfallswinkel gleich dem Austrittswinkel des reflektierten Lichtstrahls ist. Falls $n_2 > n_1$ wird der Lichtstrahl ßum Lot hin"gebrochen ($\alpha > \beta$).

Wie bereits erwähnt, hängt der Brechungsindex meist von der Wellenlänge ab. Dies erklärt, warum ein Prisma einen aus verschiedenen Farben zusammengesetzten weissen Lichtstrahl in dessen Komponenten auffächern kann (siehe Fig. 19.2).

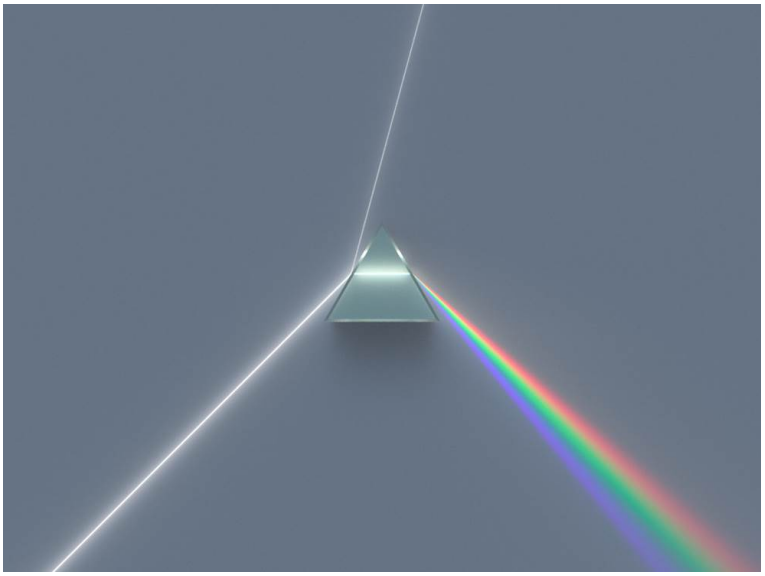


Abbildung 19.2: Ein weisser Lichtstrahl wird durch ein Prisma aufgefächert. Credit: Spigget (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0) or GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)], via Wikimedia Commons.

19.3 Totalreflexion

Selbstverständlich wird ein Lichtstrahl nicht nur beim Eindringen aus Luft in Wasser umgelenkt sondern auch umgekehrt. Die Verhältnisse beim Austritt eines Lichtstrahls aus Wasser in Luft kommt es zu einem auf den ersten Blick eigenartigen Phänomens: der Totalreflexion. Die Geometrie der Situation ist gegeben in Fig. 19.3. Der Punkt ist der folgende: Es gilt die Beziehung 19.3. Nun kann ja $\sin(\alpha)$ nicht grösser als eins sein. Dadurch gilt:

$$\frac{n_2}{n_1}\sin(\beta) \leq 1. \tag{19.4}$$

Dies bedeutet, dass

$$\beta \leq \arcsin(\frac{n_1}{n_2}). \tag{19.5}$$

Für Winkel $\beta > \arcsin(\frac{n_1}{n_2})$ gibt es keinen Winkel α, welcher die Beziehung 19.3 erfüllen kann. Dies bedeutet, dass der gesamte Lichtstrahl reflektiert wird; es kommt zur Totalreflexion. Dieses Phänomen wird eindrücklich dokumentiert in Fig. 19.4. Dass Signale durch Licht in **Lichtleitern** übertragen werden können, wird durch Totalreflexion ermöglicht, wie in Fig. 19.5 illustriert wird. Da Luft einen von der Temperatur abhängigen Brechungsindex hat, kann bei starker Variation

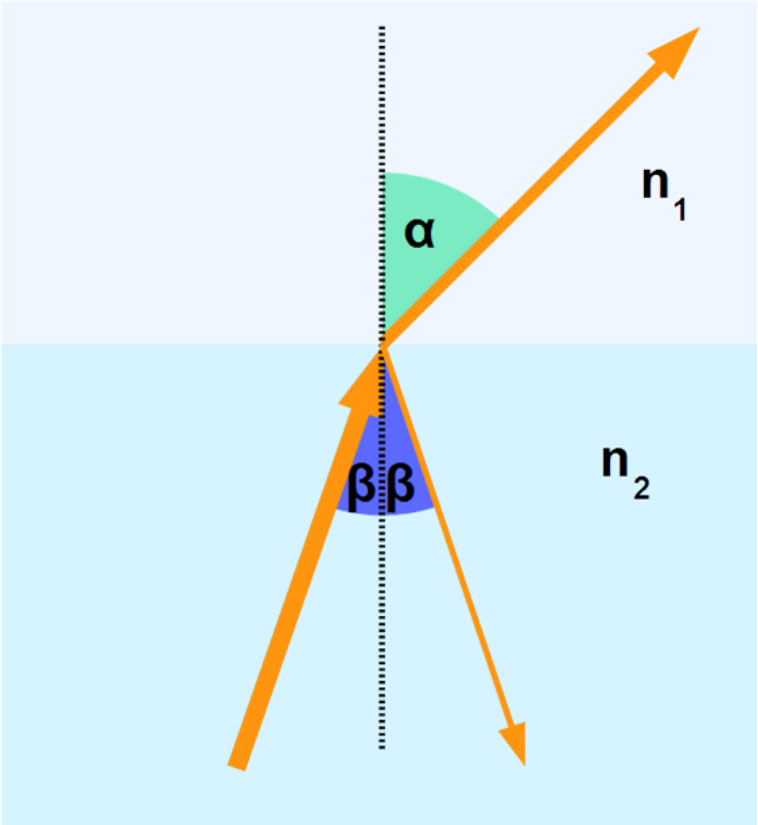


Abbildung 19.3: Brechung eines Lichtstrahls beim Austritt aus Wasser.

der Temperatur als Funktion des Abstandes vom Boden Totalreflexion auftreten. Dieses Phänomen nennt man **Fata Morgana**, siehe Fig. 19.6.

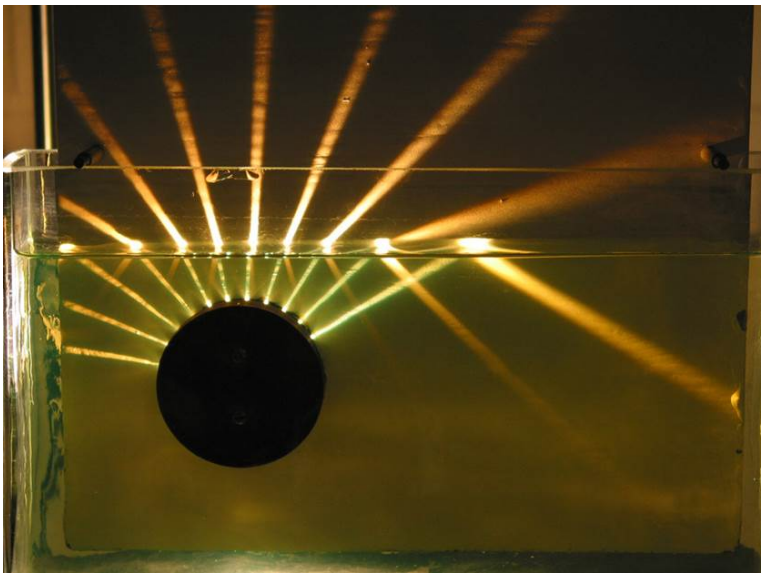


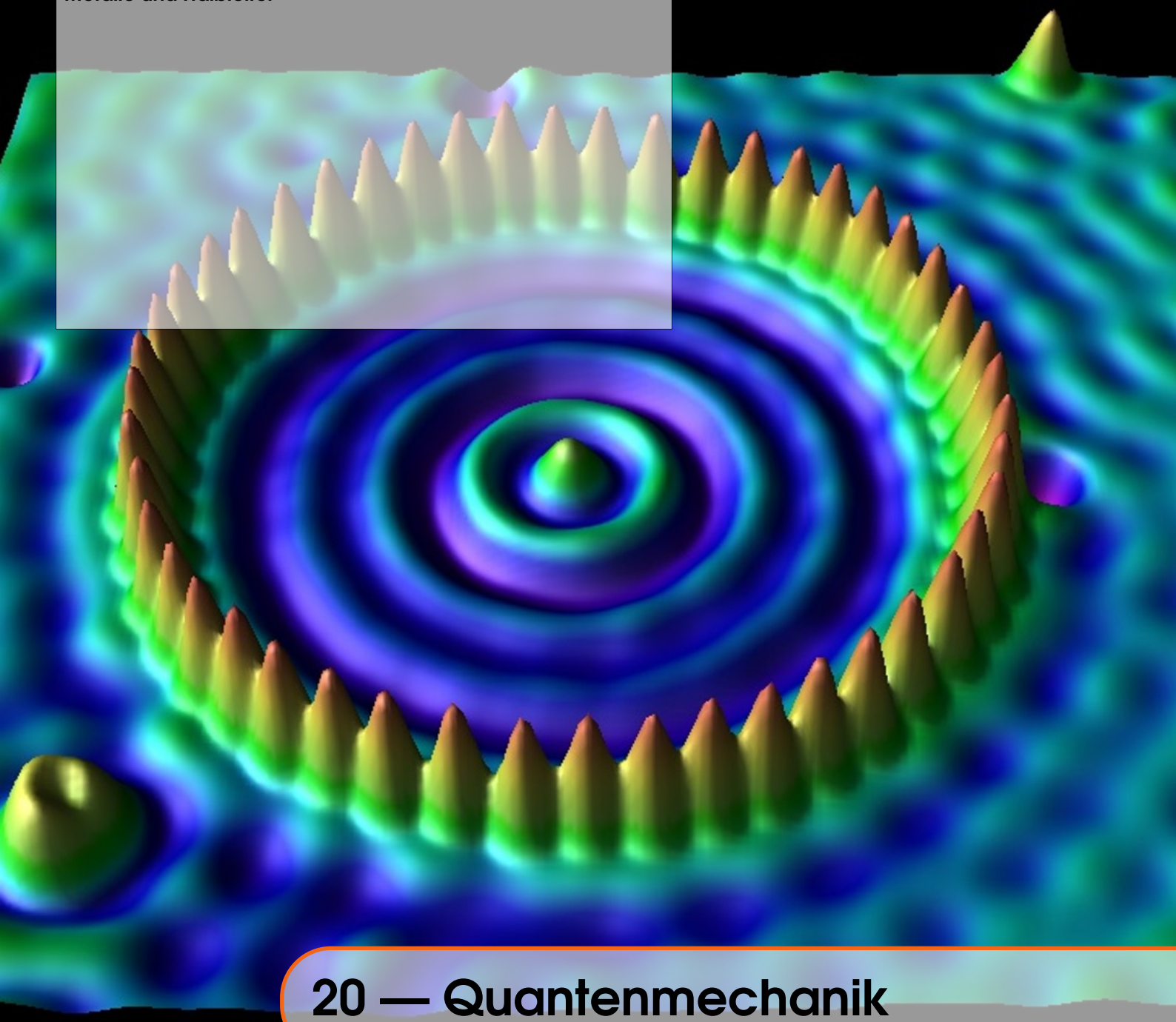
Abbildung 19.4: Brechung von Lichtstrahlen beim Austritt aus Wasser und Auftreten von Totalreflexion.

Abbildung 19.5: Totalreflexion eines Lichtstrahls in einer Glasfaser.

Abbildung 19.6: Fata Morgana.

Die quantenmechanische Wellenfunktion als Datenstruktur
Das eigenartigeste Experiment der Welt
Interpretation der Wellenfunktion
- Aufenthaltsort eines Teilchens
- Physikalische Grössen
- Impuls eines Teilchens
- Ort eines Teilchens
- Kinetische Energie eines Teilchens
- Potentielle Energie eines Teilchens
- Totale Energie eines Teilchens

Wie bekommt man die Wellenfunktion?
Materiewellen
Unschärferelation
Metalle und Halbleiter



20 — Quantenmechanik

Dieses Kapitel ist für BI nicht relevant.

Gemeinhin gilt die Quantenmechanik als unverständlich, abgehoben, für die Praxis irrelevant und abstrakt. Gerne wird sie in einen Gegensatz zur klassischen Mechanik gestellt, wobei so getan wird, als ob die klassische Mechanik ein leuchtendes Beispiel für konzeptuelle und mathematische Einfachheit und intuitive Zugänglichkeit sei. Diese Betrachtungsweise ist schlicht falsch. Es ist wahr, dass die Quantenmechanik auf Konzepten basiert, die in einer auf kleinen Kügelchen basierenden Vorstellung der Physik nicht zu erfassen ist. Dies ist aber das Problem dieser Vorstellung und nicht das Problem der Quantenmechanik.

Die meisten Lehrbücher orientieren sich bei der Darstellung der Quantenmechanik an der historischen Entwicklung der selben. Dabei beginnt man die Diskussion der Quantenmechanik häufig mit der Analyse des Spektrums des Wasserstoffatoms. Dies ist ein System, welches zwar tatsächlich am Anfang der Entwicklung der Quantenmechanik stand und viele Vorteile bietet (experimentelle Zugänglichkeit, Gleichungen können, wenn auch mit grossem Aufwand, analytisch gelöst werden), aber fast ohne jede praktische Relevanz ist und zudem die konzeptuellen Herausforderungen der Quantenmechanik durch mathematische Schwierigkeiten deutlich vergrössert. In dieser Vorlesung wählen wir einen Zugang über Datenstrukturen. Dabei bemerken wir schlicht, dass die Datenstruktur zur Beschreibung der Bewegung eines Punktteilchens ein Vektor ist, elektrische und andere Felder durch Vektorfelder beschrieben werden können und wir zur Beschreibung der Quantenmechanik die sogenannte Wellenfunktion verwenden müssen. Wir lernen die Regelungen kennen, nach denen die Wellenfunktion berechnet werden kann und lernen, welche physikalischen Grössen wir aus ihr berechnen können. Selbstverständlich ist dieses Kapitel lediglich als Kürzestübersicht zu verstehen. Auch verlangen wir nicht (genau wie im Kapitel über elektromagnetische Wellen), dass Sie die präsentierten Gleichungen (welche partielle Differentialgleichungen sind) selber lösen können. Was wir Ihnen aber vermitteln möchten, ist ein Eindruck um

was es in der Quantenmechanik geht. Wir halten dies für wichtig, weil sowohl ihre Computer als auch zukünftige Systeme (“ Quantencomputer“) sich wesentlich auf quantenmechanische Prozesse abstützen.

Einer der wichtigen Gründe, warum uns die Quantenmechanik so schwierig zu verstehen dünkt, liegt darin begründet, dass die historische Entwicklung von der klassischen Mechanik hin zur Quantenmechanik ging. Logisch ist es aber so, dass die Quantenmechanik das Verhalten der kleinsten Teilchen beschreibt und nur deren gemitteltes Verhalten zudem führt was wir als klassische Mechanik bezeichnen in der Tat macht es wenig Sinn die Quantenmechanik klassisch verstehen zu wollen; die klassische Mechanik ist ein Resultat des Zusammenspiels vieler quantenmechanischer Systeme. Wenn überhaupt, sollte man versuchen die klassische Mechanik aus der Quantenmechanik zu verstehen.

20.1 Die quantenmechanische Wellenfunktion als Datenstruktur

Die Beschreibung der Dynamik eines Punktteilchens erfordert einen Vektor, dessen Komponenten durch drei Funktionen gegeben sind. Dabei handelt es sich um Funktionen der Zeit, ihr jeweiliger Wert gibt eine der Raumkoordinaten des. Teilchens an:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{20.1}$$

, Erfordert die mathematische Beschreibung der Dynamik eines Punktteilchens gewöhnliche Differenzialgleichungen.

Die Datenstruktur, welche wir zur Beschreibung von Feldern, also zum Beispiel zur Beschreibung des elektrischen Feldes verwenden, sieht sehr ähnlich aus. Auch sie ist ein Vektor mit drei Komponenten, wobei die Komponenten aus Funktionen bestehen, welche aber nicht nur von der Zeit sondern auch vom Ort abhängen. Für das $\vec{E}$- Feld sieht das so aus:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ E_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}. \tag{20.2}$$

Jede Komponente dieses Feldes gibt an jedem Ort die jeweilige Komponente des die $\vec{E}$ - Vektors an. Die Dynamik eines Feldes wird in der Regel durch sogenannte partielle Differenzialgleichungen (zum Beispiel der Wellengleichung) beschrieben.

In der Quantenmechanik ist die grundlegende Datenstruktur eine komplexwertige Funktion des Ortes und der Zeit (die Funktionswerte sind komplexe Zahlen), die

sogenannte **Wellenfunktion** $\Psi(x,y,z,t)$. Wir betonen, dass wir in dieser Einführung nur so genannt spinlose Teilchen behandeln. Teilchen mit Spin werden durch Vektoren von Wellenfunktionen beschrieben. Wie Sie sehen werden, ist $\Psi(x,y,z,t)$, sofern es um die Beschreibung eines Teilchens geht, ebenfalls die Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Context 20.1 Es gibt quantenmechanische Systeme mit endlich vielen Zuständen. Solche Systeme sind besonders wichtig in dem sich rasch entwickelnden Feld der Quanteninformatik. Interessanterweise ist die Mathematik die man zur Beschreibung solcher Systeme verwenden muss relativ einfach. Die Dynamik von quantenmechanischen Systemen mit endlich vielen Zuständen wird durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben (und könnte mit Berkeley Madonna gelöst werden).Sollten Sie sich also jemals mit Quanteninformatik beschäftigen, so können Sie darauf vertrauen, dass sie die dafür nötige Mathematik im Prinzip kennen.

20.2 Das eigenartigeste Experiment der Welt

Beim ëigenartigen Experiment der Welt"geht es um folgendes: Elektronen werden auf eine Wand mit zwei Schlitzen geschossen. Hinter dieser Wand befindet sich ein Schirm. Das Auftreffen eines Elektrons auf diesen Schirm kann detektiert werden und führt zu einem "Klick".

Wenn wir nun davon ausgehen, dass Elektronen kleine Kügelchen sind, dann würden wir erwarten, dass sich auf dem Schirm zwei Flecken ergeben auf die die Elektronen auftreffen. Da es sich um einzelne Elektronen handelt, erwarten wir auch, dass wir eine Reihe von Klicks hören. Diese Situation ist illustriert in der mittleren Figur in Fig. 20.1. Wären die Elektronen Wellen, würden wir etwas anderes erwarten: ein Interferenzmuster, wie wir es auf dem oberen Bild in Fig. 20.1 antreffen.

Das Experiment liefert verblüffenderweise eine Kombination der beiden erwarteten Ausgänge. Einerseits ist die Verteilung der auftretenden Elektronen beschrieben durch eine Interferenzverteilung (wie wir sie von Wellen erwarten würden), andererseits treffen die Elektronen offenbar einzeln auf dem Schirm auf (wir hören das an den einzelnen Klicks). Dies bedeutet, dass die Elektronen sich zwar in gewissem Sinne wie Kügelchen verhalten (sie erzeugen einzelne Klicks), aber offenbar scheinen die Kügelchen durch eine Wellenfunktion beschrieben zu werden, welche gleichzeitig durch beide Schlitze hindurch geht und dadurch ein Interferenzmuster erzeugt (untere Figur in Fig. 20.1.

Oftmals hört man die Frage, ob nun Elektronen Wellen oder Teilchen sind. Beide Bilder sind falsch oder zumindest unvollständig. Elektronen sind weder Wel-

len noch Teilchen, sondern werden durch quantenmechanische Wellenfunktionen beschrieben.

Viele Leute sind der Meinung, dass ein Kügelchen einfacher zu verstehen ist als eine Wellenfunktion. Wenn man sich dies aber genauer überlegt, so treten auch beim Kügelchenbild Probleme auf. Es ist in einem Kügelchenbild schwer vorstellbar, warum sich Elektronen zum Beispiel nicht teilen lassen ich persönlich stelle mich auf den Standpunkt, dass wir die Welt mit verschiedenen Datenstrukturen beschreiben können und dass die für Elektronen angemessene Datenstruktur nun halt einmal eine Wellenfunktion ist.

20.3 Interpretation der Wellenfunktion

Nehmen wir an, wir hätten die Wellenfunktion des Teilchens. Diese Wellenfunktion kann als Datenstruktur verstanden werden, aus derer man mit verschiedenen mathematischen Operationen Informationen über den physikalischen Zustand des Teilchens gewinnen kann. Hierzu eine Bemerkung: vielfach fragen sich die Menschen, was denn die Wellenfunktion eigentlich sei wir kennen die Antwort auf diese Frage nicht wir betrachten die Wellenfunktion schlicht als Datenstruktur. Wir versuchen, unseren Standpunkt mit einer Analogie zu beschreiben: es gibt Stadtpläne von Winterthur mithilfe dieser Stadtpläne können verschiedene Informationen über die Stadt Winterthur ermittelt werden. Niemand wird aber bezweifeln, dass ein Stadtplan von Winterthur und die Stadt Winterthur natürlich nicht dasselbe sind. Ob die quantenmechanische Wellenfunktion eine irgendwie geartete physikalische Realität darstellt ist zwar eine interessante Frage, für uns aber zweitrangig. Wir nehmen die Wellenfunktion als Informationsträger, welcher gegebene Systeme beschreibt

20.3.1 Aufenthaltsort eines Teilchens

Wir betrachten ein quaderförmiges Stück Raum Ω, gegeben durch die Koordinatenintervalle $[x_0,x_1],[y_0,y_1],[z_0,z_1]$. Die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Teilchen zur Zeit } t \text{ in } \Omega) = P(t)$, dass sich ein durch die Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ beschriebenes Teilchen in Ω aufhält, beträgt:

$$P(t) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} |\Psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz. \tag{20.3}$$

Dabei bezeichnet $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ das Quadrat des Absolutbetrags von $\Psi(x,y,z,t)$.

Context 20.2 Da die Wellenfunktion eine komplexe Funktion ist, gilt:

$$|\Psi(x,y,z,t)|^2 = \Psi(x,y,z,t)\overline{\Psi}(x,y,z,t). \tag{20.4}$$

Dabei bezeichnet $\overline{\Psi}(x,y,z,t)$ die komplex konjugierte Funktion zu $\Psi(x,y,z,t)$ (Sie müssen nicht wissen, was das bedeutet. Diese Kontextbox gibt Ihnen nur Zusatzinformationen).

Beachten Sie: Die Funktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist normiert, d.h. es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz = 1. \tag{20.5}$$

Dies ist so, weil die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen irgendwo im Universum ist, natürlich gleich 1 sein muss. Achtung: Sollten Sie sich jemals mit Quantenmechanik näher beschäftigen, werden Sie merken, dass diese Normierungsbedingung wesentlich weniger einfach zu erfüllen ist, als es aussieht. Grob gesagt: Wenn Sie wissen, dass ein Teilchen sich in einem endlich grossen Raumgebiet aufhalten muss (also die Wellenfunktion ausserhalb dieses Gebiets gleich null ist) ist die Normierung in der Regel kein Problem; schwieriger wird es, wenn dies nicht der Fall ist.

20.3.2 Physikalische Grössen

Die Wellenfunktion eines Teilchens ist eigentlich ein Multifunktionsinstrument, vergleichbar einem Sackmesser. Man kann mit $\Psi(x,y,z,t)$ die Mittelwerte $\langle G\rangle$ einer physikalischen Grösse G bestimmen. Hierbei ist eine Einsicht sehr wichtig: Die Quantenmechanik hat eine probabilistische Komponente.

Law 20.1 In der Quantenmechanik ist es in der Regel nicht korrekt zu sagen, ein Teilchen habe einen bestimmten Impuls oder einen bestimmten Aufenthaltsort. Was man angeben kann, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen einen Impuls (oder irgendeine andere physikalische Grösse) in einem bestimmten Bereich hat. Damit können wir auch den Erwartungs- oder Mittelwert des Impulses eines Teilchens bestimmen (Wir werden im Folgenden für bestimmte physikalische Grössen im Detail zeigen, wie das geht).

20.3.3 Impuls eines Teilchens

Der Erwartungswert der x-Komponente des Impulses eines Teilchens mit Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist gegeben durch:

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi}(x,y,z,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y,z,t)\right)dxdydz. \tag{20.6}$$

Dabei bedeutet $\hbar = 1.054571800(13) \cdot 10^{-34} Js$ und i die imaginäre Einheit. Dabei sagt man, das der Operator $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ der Operator für die x- Komponente des Impulses ist. Analog definiert man den Operator für die anderen Komponenten des Impulses. Man spricht von Öperatoren", weil z.B. die partielle Ableitung eine Funktion (hier die Wellenfunktion) auf eine andere Funktion abbildet.

Denken Sie nicht allzu viel über die Tatsache nach, dass wir hier mit partiellen Ableitungen arbeiten. Dies ist weniger geheimnisvoll als es aussieht, und kann im Rahmen der Fourier-Transformation ziemlich gut verstanden werden.

Es kann sein, dass Sie nun finden, dies sei ein sehr eigenartiges Vorgehen. Beachten Sie aber: Wenn Sie in der klassischen Mechanik z.B. den Impuls berechnen wollen, nehmen Sie die Trajektorie, welche Ihnen den Ort eines Teilchens als Funktion der Zeit angibt. Dann leiten Sie diese Trajektorie nach der Zeit ab (Sie erhalten den Geschwindigkeitsvektor), multiplizieren mit der Masse und erhalten den Impuls. Das Vorgehen ist genau dasselbe: Eine Datenstruktur wird mit mathematischen Mitteln bearbeitet, um physikalische Grössen zu ermitteln. Die Datenstruktur und die mathematischen Mittel sind in der klassischen Mechanik nicht dieselben wie in der Quantenmechanik, das Vorgehen ist aber im Wesentlichen dasselbe.

20.3.4 Ort eines Teilchens

Der Erwartungswert der x-Komponente des Ortes eines Teilchens mit Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist gegeben durch:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t)x\Psi(x,y,z,t)dxdydz. \tag{20.7}$$

Diese Formel kann relativ gut verstanden werden. Denken Sie daran, dass $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens angibt und die Funktion x nichts anderes als dessen Ort. Die Gleichung 20.7 entspricht dem Ausdruck für den Erwartungswert und kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} int_{-\infty}^{\infty} int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,y,z,t)|^2 dxdydz. \tag{20.8}$$

20.3.5 Kinetische Energie eines Teilchens

Der Erwartungswert der kinetischen Energie E_{kin} eines Teilchens mit Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist gegeben durch:

$$\langle E_{kin} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z,t)\right]dxdydz. \tag{20.9}$$

Wenn wir den Operator für den Impulsvektor als

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{20.10}$$

interpretieren, und beachten, dass in der klassischen Mechanik gilt:

$$E_{kin} = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \tag{20.11}$$

dann bekommen wir

$$E_{kin} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]. \tag{20.12}$$

20.3.6 Potentielle Energie eines Teilchens

Der Erwartungswert der potnetiellen Energie E_{pot} eines Teilchens mit Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist gegeben durch:

$$\langle E_{kin} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t) V(x,y,z) \Psi(x,y,z,t) dxdydz. \tag{20.13}$$

Dabei ist $V(x,y,z)$ nichts anderes als die klassische Funktion, welche die potentielle Energie eines Teilchens als Funktion des Ortes angibt.

20.3.7 Totale Energie eines Teilchens

Der Erwartungswert der totalen Energie E_{tot} eines Teilchens mit Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist gegeben durch:

$$\langle E_{kin} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,y,z,t) \right) dxdydz. \tag{20.14}$$

20.4 Wie bekommt man die Wellenfunktion?

Die quantenmechanische Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ ist die Lösung der **Schrödingergleichung**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x,y,z,t) + V(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,y,z,t). \tag{20.15}$$

Diese Gleichung kann begründet werden. Wenn Sie die Gleichungen 20.9, 20.13 und 20.14 anschauen, sehen Sie, dass die Schrödingergleichung 20.15 nichts

anderes besagt als $E_{kin} + E_{pot} = E_{tot}$. Das ist nichts anderes als der Energieerhaltungssatz!

Das Lösen der Schrödingergleichung ist numerisch anspruchsvoll; es gibt einige wenige Beispiele, in denen formale Lösungen oder zumindest formale Näherungslösungen möglich sind.

20.5 Materiewellen

Wenn kein Potential vorhanden ist (das heisst, die potentielle Energie eines Teilchens überall gleich null ist), ist die Lösung der Schrödingergleichung sehr einfach (Sie können das durch Einsetzen überprüfen):

$$\Psi(x,t) = A\exp(i(kx - \omega t)) \tag{20.16}$$

für ein Teilchen in einer Dimension. In drei Dimensionen gilt:

$$\Psi(\vec{r},t) = A\exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)). \tag{20.17}$$

Beachten Sie, dass diese Funktionen komplexwertig sind. Wie immer steht die Wellenzahl k mit der Wellenlänge λ in Beziehung:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{20.18}$$

Bleiben wir beim eindimensionalen System. Durch die Anwendung der Beziehungen 20.6 und 20.14 bekommen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} p &= \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \\ E_{tot} &= \hbar\omega. \end{aligned} \tag{20.19}$$

20.6 Unschärferelation

Wir können die Mittelwerte physikalischer Grössen berechnen. Damit können wir auch die Standardabweichung ermitteln. Für die Standardabweichung der x-Koordinate Δx und der y-Komponente des Impulses Δp_x gilt:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \\ \Delta p_x &= \sqrt{\langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle} \end{aligned} \tag{20.20}$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t)\,(x - \langle x \rangle)^2\,\Psi(x,y,z,t)dxdydz} \\ \Delta x &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x,y,z,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle\right)^2 \Psi(x,y,z,t)dxdydz} \end{aligned} \tag{20.21}$$

Selbstverständlich können entsprechende Ausdrücke auch für alle anderen Koordinaten analog bestimmt werden.

Eine sorgfältige Analyse fördert nur folgendes Resultat zu Tage:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{20.22}$$

Dies ist die bekannte Heisenberg'sche Unschärferelation. Sie besagt, dass die Verkleinerung der Unschärfe, das heisst des Ausmasses der Unkenntnis einer Variablen, zum Beispiel des Ortes, automatisch zur Folge hat, das die Unschärfe des Impulses zunimmt. Dies ist im wesentlichen der Kern der Aussage, dass Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig bestimmt werden können.

Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist weit weniger geheimnisvoll, als sie aussieht. Wir kennen eine ähnliche Beziehung aus der Signalübermittlung. Ein scharfes Signal, zum Beispiel ein schmaler Puls, braucht viele Frequenzen, um dargestellt zu werden. Ein Signal mit vollständig bekannter Frequenz, zum Beispiel eine Sinusschwingung, ist auf der Zeitachse unendlich weit ausgedehnt. Bei Signalen verstehen wir gut, dass Lokalisierung in der Zeitdomäne zu einer Delokalisierung in der Frequenzdomäne führt. Ebenso führt eine Lokalisierung in der Frequenzdomäne zu zeitlich delokalisierten Signalen.

20.7 Metalle und Halbleiter

Benützen Sie bitte die Slides der Vorlesung 13.

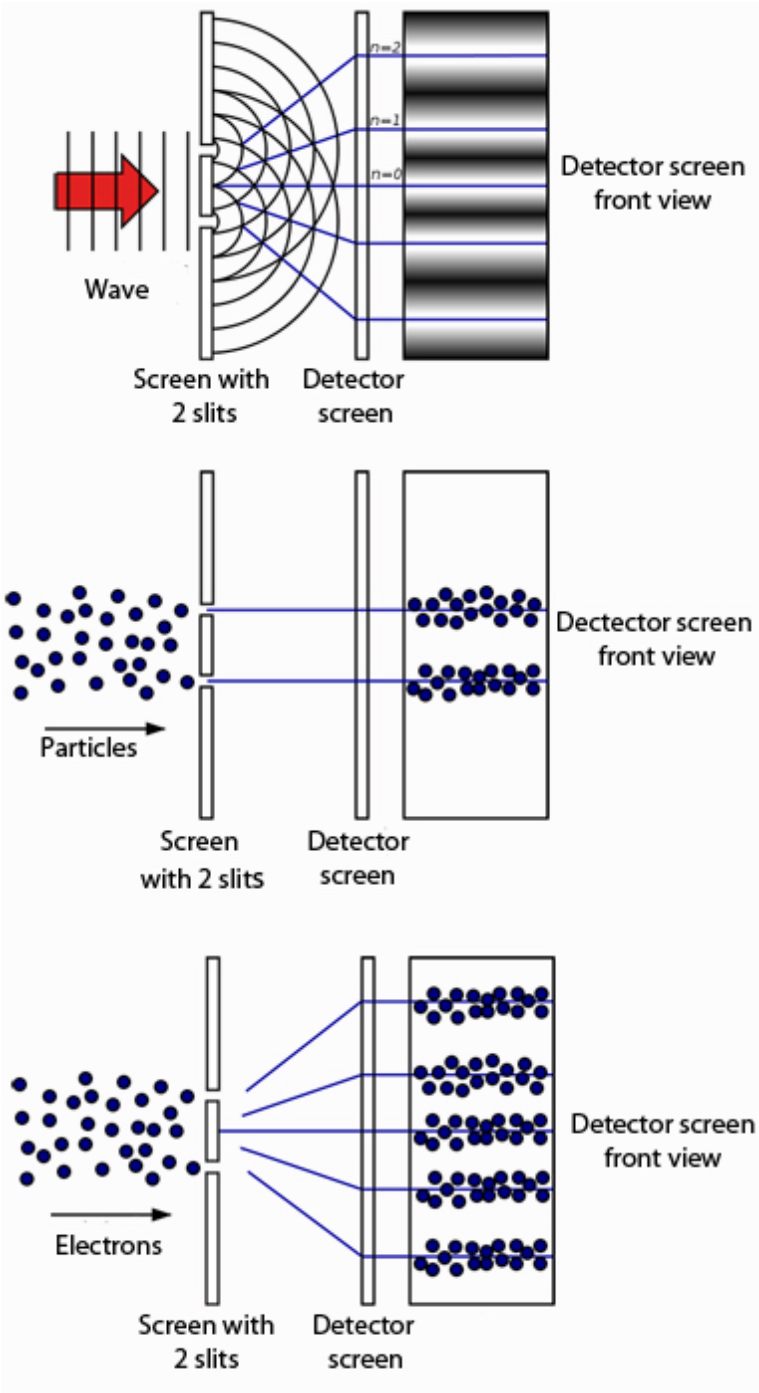


Abbildung 20.1: Doppelspaltexperiment.

Vektoren
- Skalarprodukt
- Betrag eines Vektors
- Winkel zwischen zwei Vektoren
- Einheitsvektor
- Das Kreuzprodukt von Vektoren

Matrizen
- Symmetrische Matrizen

Partielle Ableitung
Vektoranalysis
Numerische und analytische Verfahren
Differentialgleichungen
- Systeme von Differentialgleichungen
- Differentialgleichungen höherer Ordnung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen
Numerisches Integrieren

21 — Mathematik

In diesem Abschnitt fassen wir einige wichtige mathematische Tatsachen zusammen. Es handelt sich nicht um eine Formelsammlung und auch nicht um einen Lehrtext. Sie sollten die angesprochenen Tatsachen in Ihren Mathematikvorlesungen schon einmal gehört haben; hier rekapitulieren wir nur Resultate. Gleichzeitig legen wir implizit auch einige Notationskonventionen fest.

!!! In diesem Kapitel wird, sofern nicht ausdrücklich anders gesagt, immer angenommen, dass wir mit kartesischen Koordinaten arbeiten.

21.1 Vektoren

Zuerst weisen wir noch einmal ausdrücklich darauf hin, dass die verwendeten Formeln sich auf Vektoren dargestellt in kartesischen Koordinaten beziehen. Weiter illustrieren wir die Beispiele mit Vektoren in drei Dimensionen, versuchen aber die Formeln so allgemein wie möglich (also in d Dimensionen) anzugeben.

21.1.1 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, ..., a_d)$ und $\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$ ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i b_i. \tag{21.1}$$

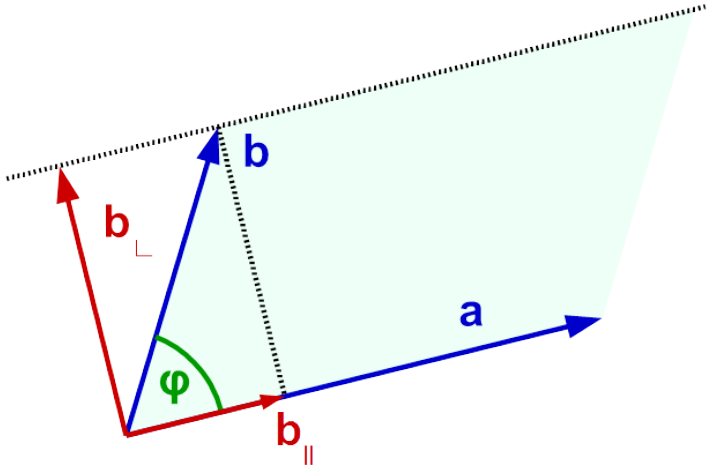


Abbildung 21.1: Geometrische Interpretation des Skalar- und Kreuzprodukts.

21.1.2 Betrag eines Vektors

Ein Vektor $\vec{v} = (v_1, ..., v_d)$ hat den Betrag (die Länge") $|\vec{v}|$ und es gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2} \tag{21.2}$$

Es gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \tag{21.3}$$

21.1.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Das Skalarprodukt ermöglicht es uns, sehr effizient den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Wir geben Ihnen hier einfach die Formel an, ohne diese zu begründen. Für eine Illustration der Situation betrachten Sie Fig. 21.1.

Theorem 21.1 Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\phi). \tag{21.4}$$

Das bedeutet, dass der Winkel ϕ zwischen diesen Vektoren gegeben ist durch:

$$\phi = \arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}). \tag{21.5}$$

Also in drei Dimensionen heisst das

$$\phi = \arccos(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}) \tag{21.6}$$

mit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Observation 21.1 Fig. 21.1 legt Ihnen eine geometrische Interpretation des Skalarprodukts nahe: Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist gleich der Länge von $\vec{a}$ multipliziert mit der Länge der Projektion $\vec{b}_{||}$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

21.1.4 Einheitsvektor

Häufig hat man einen Vektor $\vec{r}$ mit irgendeiner Länge und möchte einen Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\vec{r}$ zeigt, aber die normierte Länge 1 hat. Diesen Vektor

bezeichnet man meist mit $\vec{n}_r$ und bezeichnet ihn als Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$. Es gilt:

$$\vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{21.7}$$

In drei Dimensionen haben wir für $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$:

$$\vec{n}_r = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}} \\ \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}} \\ \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2}} \end{pmatrix}. \tag{21.8}$$

21.1.5 Das Kreuzprodukt von Vektoren

Das **Kreuzprodukt** gibt es in der Form "Vektor mal Vektor gleich Vektornur in drei Dimensionen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{21.9}$$

Für das Kreuzprodukt gelten ein paar Regeln:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind, gilt $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
- Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\phi)$, wobei ϕ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Der Betrag des Kreuzprodukts ist also gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren mal dem Sinus des Zwischenwinkels.

Observation 21.2 Fig. 21.1 legt Ihnen eine geometrische Interpretation des Vektorprodukts nahe: Der Betrag des Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Aus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\phi)$ folgt sofort, dass $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}_\perp|$, wobei $\vec{b}_\perp$ der zu $\vec{a}$ senkrecht stehende Anteil von $\vec{b}$ bezeichnet.

21.2 Matrizen

(In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass Sie mit den Grundtatsachen der linearen Algebra, speziell der Matrizenrechnung, vertraut sind.)

21.2.1 Symmetrische Matrizen

Eine Matrix M (hier in drei Dimensionen) heisst **symmetrisch** wenn sie die folgende Gestalt hat:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \tag{21.10}$$

wobei $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Bildlich gesagt lässt eine Spiegelung an der Diagonalen die Matrix M unverändert.

Diese, auf den ersten Blick etwas oberflächlich wirkende Eigenschaft der Spiegelsymmetrie an der Diagonalen hat erstaunlich tiefgreifende Konsequenzen. Die wohl wichtigste davon ist folgende: Für eine (reelle) symmetrische Matrix gibt es immer eine orthonormale Basis (ein rechtwinkliges Koordinatensystem) so, dass die Matrix eine diagonale Gestalt[1] bekommt. Diese Basis wird gebildet durch die normierten Eigenvektoren von M. Ohne dies zu beweisen[2] postulieren wir:

Law 21.1 Sei M eine symmetrische Matrix, und $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die normierten Eigenvektoren von M. D_1, D_2, D_3 seien die zugehörigen Eigenwerte. Es gilt dann:

$$RAR^T = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \tag{21.11}$$

mit

$$R = \begin{pmatrix} e_{1,x} & e_{2,x} & e_{3,x} \\ e_{1,y} & e_{2,y} & e_{3,y} \\ e_{1,z} & e_{2,z} & e_{3,z} \end{pmatrix}, R^T = \begin{pmatrix} e_{1,x} & e_{1,y} & e_{1,z} \\ e_{2,x} & e_{2,y} & e_{2,z} \\ e_{3,x} & e_{3,y} & e_{3,z} \end{pmatrix} \tag{21.12}$$

21.3 Partielle Ableitung

Nehmen Sie an, Sie hätten eine Funktion f, welche von mehreren Variablen abhängig ist, also z.B. $f(x,y,z,t) = xy^2z^4 + t^2$. Etwas allgemeiner sprechen wir von $f = f(x_1, ..., x_n)$. Die **partielle Ableitung** von f nach einer Variablen x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_i \tag{21.13}$$

[1] Alle Koeffizienten, welche nicht auf der Diagonalen liegen, sind null.

[2] Der Beweis ist auch nicht ganz einfach, Sie finden ihn aber in jedem Buch über lineare Algebra.

ist für unsere Zwecke nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung von f nach x_i, wobei wir annehmen, dass alle anderen Variablen konstant sind. Man kann die Sache etwas tiefgründiger betrachten als es hier geschieht, aber wir benützen diese einfache und durchaus ausreichende Betrachtungsweise.

■ **Example 21.1** Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z,t) = xy^2z^4 + t^2$. Für die partiellen Ableitungen gilt dann:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^4 \tag{21.14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^4 \tag{21.15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4xy^2z^3 \tag{21.16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t \tag{21.17}$$

Natürlich kann man auch mehrfach partiell ableiten. Geschrieben wird dies als:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right). \tag{21.18}$$

Man bildet also zuerst die partielle Ableitung von f nach x_j und leitet dies dann nach x_i ab. Es gilt die sehr wichtige Regel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{21.19}$$

Das heisst, es spielt keine Rolle, ob man zuerst nach x_i und dann nach x_j ableitet oder umgekehrt.

21.4 Vektoranalysis

Aus Gründen, die wir hier nicht darlegen, definiert man spezielle partielle Ableitungen für Vektoren. Man geht vom sogenannten **Nabla - Operator** aus:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{21.20}$$

Diesen Nabla - Operator verwendet man wie einen gewöhnlichen Vektor und gebraucht ihn zur Bildung der **Divergenz** und der **Rotation** eines Vektorfeldes.

Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{a}(x,y,z)$ im Raum. Die Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ ist definiert als:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{21.21}$$

Wir tun also einfach so, als ob wir mit dem Nabla - operator und dem Vektor $\vec{a}$ ein Skalarprodukt bilden und führen dann die partiellen Ableitungen durch.

Für die Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ gilt Ähnliches:

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{21.22}$$

R Die Divergenz eines Vektorfeldes kann man in beliebig vielen Dimensionen definieren. Die Rotation existiert strenggenommen nur in drei Dimensionen (Für zweidimensionale Vektorfelder tut man so, als ob man mit einem dreidimensionalen Feld arbeiten würde, dessen dritte Komponente gleich null ist.)

21.5 Numerische und analytische Verfahren

Grundsätzlich unterscheiden wir in der Mathematik zwischen numerischen und analytischen Verfahren. Etwas vereinfacht gesagt: Bei **analytischen** Verfahren ist das Ergebnis einer Rechnung eine Formel. Bei einem **numerischen** Verfahren wird die Lösung eines Problems durch eine Zahl oder eine Liste von Zahlen dargestellt. Die Lösung eines durch eine Differentialgleichung gegebenen Anfangswertproblem ist eine Funktion. Manchmal kann man diese Funktion durch eine Formel darstellen (es gibt eine analytische Lösung). Analytische Lösungen sind aber nur selten möglich; ein numerischer Algorithmus stellt die gesuchte Funktion durch eine Liste von Zahlen dar. Ein anderes Beispiel: Der Wert eines bestimmten Integrals kann manchmal, wenn die Stammfunktion bekannt ist, durch eine Formel angegeben werden. Bei der numerischen Lösung werden "Häuschen gezählt", d.h. die Fläche unter der Kurve"bestimmt.

Observation 21.3 Generell gilt:

- Analytische Ergebnisse sind immer exakt. Allerdings haben viele Probleme keine durch eine Formel darstellbare Lösung.

- Numerische Lösungen sind viel häufiger möglich, aber es handelt sich immer um Näherungen.

Früher konnten Computer nur numerische Lösungen liefern. Mit der Entwicklung und Verbreitung von Computeralgebrasystemen (CAS) gilt dies nicht mehr.

21.6 Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem ausgedrückt durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (für die Definition des Begriffs "gewöhnlich", s. unten) hat folgende Struktur:

$$\frac{df}{dt} = G(f(t),t), \tag{21.23}$$

$$f(t_0) = f_0 \tag{21.24}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist nicht etwa eine Zahl, sondern eine Funktion $f(t)$. Dabei ist $G(f(t),t)$ eine Funktion, die sowohl von der nicht bekannten Funktion $f(t)$ als auch von t abhängen kann. Das einzige, was wir über $f(t)$ wissen, ist das f zum Zeitpunkt t_0 den Anfangswert f_0 hat.

Bei einem analytischen Lösungsverfahren versuchen Sie, eine Formel für $f(t)$ zu finden die abgeleitet nach t gleich $G(f(t),t)$ ist.

Ein numerisches Lösungsverfahren können Sie in gewissem Sinne mit einem Navigationsgerät vergleichen. Dabei sollten Sie die Ableitung $\frac{df}{dt}$ als Veränderungsrate von f interpretieren. Die Veränderungsrate sagt Ihnen, um wieviel (df) sich f in einem kurzen Zeitintervall (dt) ändert. Etwas sehr locker kann man sich das so merken:

$$df = \frac{df}{dt}dt. \tag{21.25}$$

Da die Veränderungsrate nicht notwendigerweise konstant ist ($G(f(t),t)$ kann sich mit fortschreitender Zeit ändern), müssen Sie dt möglichst klein wählen. Der Ausdruck $G(f(t),t)$ ist ein Navi, welches rausfindet, wo Sie sind ($f(t)$ wird als Input verwendet) und Ihnen sagt, in welcher Richtung Sie das nächste Schrittchen machen müssen (Ein Schrittchen der Grösse $G(g(t),t)dt$. Ein Computer erstellt eine Näherung von $f(t)$ indem er viele kleine Schrittchen durchführt und über jedes Schrittchen Buch führt (und Ihnen am Schluss dieses Buch übergibt).

21.6.1 Systeme von Differentialgleichungen

Häufig untersuchen wir in der Physik nicht einzelne Differentialgleichung, sondern Systeme von Differentialgleichungen (Englisch: systems of ordinary differential

equations, kurz ODE). Ein System von Differentialgleichungen hat die Form:

$$\begin{aligned}
\frac{df_1}{dt} &= G_1(f_1(t),...,f_n(t),t),\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{df_n}{dt} &= G_n(f_1(t),...,f_n(t),t)\\
f_1(t_0) &= f_{1,0},\\
\vdots &= \vdots\\
f_n(t_0) &= f_{n,0}.
\end{aligned} \tag{21.26}$$

In der Regel sind die Funktionen $G_1,...,G_n$ unterschiedlich.

Eine Differentialgleichung heisst "**gewöhnlich**", wenn nur Ableitungen nach einer Variablen (hier der Zeit) vorkommen. Wäre f nicht eine Kurve, sondern ein Feld, dann wäre f nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Ort abhängig. Ableitungen nach Ort und Zeit können dann in eine Gleichung verpackt werden. Solche Differentialgleichung nennt man **partielle Differentialgleichungen** . Partielle Differentialgleichungen bilden das Herzstück weiter Teile der modernen Physik; die zugehörige Mathematik ist aber viel anspruchsvoller als das was Sie bis anhin gelernt haben. Grosse Teile der Physik lassen sich auch durch die einfacheren gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben.

21.6.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In der Physik haben wir gelernt, dass Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist. Dies sieht auf den ersten Blick etwas unerfreulich aus, denn mathematisch heisst dies:

$$\vec{F}(\vec{x},t) = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{21.27}$$

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten das Konzept der gewöhnlichen Differentialgleichung eingeführt, dabei aber immer nur von ersten Ableitungen gesprochen. Die Frage ist: Können wir auch Differentialgleichungen zweiter Ordnung (zweite Ableitungen nach der Zeit kommen in der Gleichung vor) lösen?

Im folgenden zeigen wir Ihnen, warum die folgende Aussage war ist:

Theorem 21.2 Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden.

Wir müssen noch definieren, was wir unter einer Differentialgleichung n-ter Ordnung verstehen:

Definition 21.1 Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung, welche Ableitungen der gesuchten Grösse bis hin zur n-ten Ableitung enthält. Allegemein hat eine solche Gleichung die Form:

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dt^n} &= G(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}, ..., \frac{d^2 f}{dt^2}, \frac{df}{dt}, f, t), \\ \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0} &= f_0^{(n-1)}, ..., f(0) = f_0. \end{aligned} \tag{21.28}$$

Dabei bezeichnet $f_0^{(n-1)}$ den Anfangswert der $(n-1)$-Ableitung.

Es ist wichtig, dass Sie einsehen, dass eine Differentialgleichung n-ter Ordnung als Startwert nicht nur einen Anfangswert für die Grösse f sondern auch für die Ableitungen von f erfordern. Überlegen Sie sich einfach folgendes: Sie fahren mit dem Auto und beginnen, zehn Meter vor dem Fussgängerstreifen zu bremsen. Die Bremsen üben eine Kraft auf Ihr Auto aus, und Sie kennen die Bremskraft. Die Frage ist: Halten Sie vor dem Fussgängerstreifen an? Wenn Sie sich das überlegen, werden Sie sofort sehen, dass es nicht reicht, zu wissen, wie gross die Bremskraft ist und wann Sie zu bremsen beginnen. Sie müssen auch wissen, mit welcher Geschwindigkeit Sie fahren. Mit anderen Worten: Sie müssen nicht nur den Ort des Beginns des Bremsprozesses, sondern auch die Ableitung dieses Ortes, die Geschwindigkeit, kennen.

Gegeben sei nun also eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung wie in Gl. 21.28. Wir verwenden nun einen Trick. Wir geben der n-ten Ableitung einer Funktion f einfach einen neuen Namen (Schliesslich sind Ableitungen von Funktionen auch nur Funktionen). Allgemein sagen wir:

$$a_n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}. \tag{21.29}$$

Das sieht nun nicht gerade sehr spektakulär aus, aber es gibt ein subtiles Detail zu beachten:

$$a_n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right) = \frac{da_{n-1}}{dt}. \tag{21.30}$$

Wenn wir das nun aber konsequent durchführen, wird aus Gl. 21.28 ein Gleichungs-

system der Form:

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= a_1(t), \\
\frac{da_1(t)}{dt} &= a_2(t), \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{da_{n-1}(t)}{dt} &= G(a_{n-1}(t),\ldots,a_2(t),a_1(t),f(t),t), a_{n-1}(0) = a_{n-1,0},\ldots,f(0) = f_0
\end{aligned} \tag{21.31}$$

Das sieht nun jetzt aber genau ein System mit n Differentialgleichungen erster Ordnung!

Note 21.1 Da sich Differentialgleichungen n-ter Ordnung in Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung verwandeln lassen, braucht die Mathematik nur für letztere eine vollständige Theorie zu entwickeln. Probleme, die durch Differentialgleichungen n-ter Ordnung beschrieben werden, können dann einfach in Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden.

21.7 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Berkeley Madonna ist in erster Linie ein Werkzeug zum numerischen Lösen von Differentialgleichungen. Eigentlich müssen Sie nur folgende Aussage verstanden haben: Wenn ein BM - Topf die Grösse f enthält, steht die Kugel im Einlass zu diesem Topf für die Veränderungsrate von f, also für $\frac{df}{dt}$.

Ein System von Differentialgleichungen ist eigentlich nichts anderes als eine Liste, bei der auf der einen Seite die Veränderungsraten der interessierenden Grössen stehen und auf der anderen Seite formale Ausdrücke, die diese Veränderungsraten als Funktionen der interessierenden Grössen angeben (Bem.: Anfangswerte werden in den Töpfen als INIT - Werte angegeben).

Dann illustrieren die folgenden drei Beispiele, wie Sie mit BM Differentialgleichungen lösen können.

Example 21.2 Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -ax + bx^2, \\
x(0) &= 1.
\end{aligned} \tag{21.32}$$

Für die Parameter soll gelten: $a = 1, b = 0.5$.

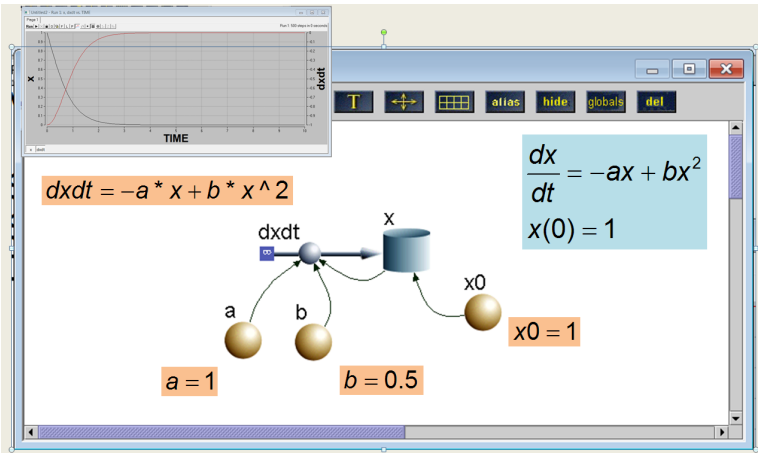


Abbildung 21.2: Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit Berkeley Madonna.

Ein BM - Programm kann über die graphische Benutzeroberfläche eingegeben werden und könnte so wie in Fig. 21.2 aussehen. Wichtig ist, dass Sie die Rolle des Zuflusses zum Topf"gut verstehen. Die linke Seite der ersten Gleichung im Anfangswertproblem gegeben durch Eqs. 21.32 bezeichnet die Veränderungsrate der gesuchten Funktion $x(t)$. Die rechte Seite stellt diese Veränderungsrate als Funktion von x und weiterer Parameter a, b dar. Genau diese Funktion müssen Sie in die Kugel des Zuflusses eingeben. Beachten Sie, dass Sie im Topf einen Anfangswert für x eintragen müssen. Berkeley Madonna (wie auch wir) lässt Simulationen defaultmässig bei $t_0 = 0$ beginnen.

Example 21.3 Mit Berkeley Madonna können Sie auch gekoppelte Systeme von Differentialgleichungen lösen. Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -paramx - y, \\ \frac{dy}{dt} &= -paramy + x, \\ x(0) &= 1, y(0) = 0. \end{aligned} \tag{21.33}$$

In der Simulation setzen wir $param = 0.03$.

Ein BM - Programm kann über die graphische Benutzeroberfläche eingegeben werden und könnte so wie in Fig. 21.3 aussehen.

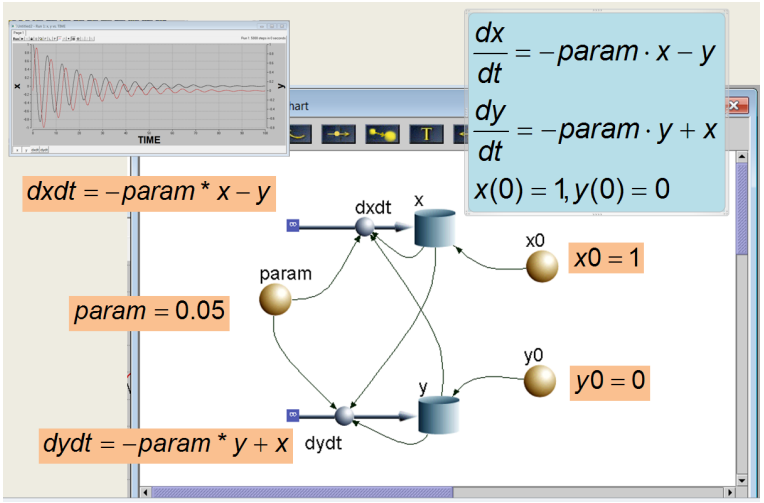


Abbildung 21.3: Lösen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichung mit Berkeley Madonna.

■ **Example 21.4** Gegeben sei die Differentialgleichung (hier als Beispiel die Bewegungsgleichung einer ungedämpften Federschwingung):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \\ x(0) &= 1, \dot{x}(0) = 0. \end{aligned} \tag{21.34}$$

In der Simulation setzen wir $k = 2, m = 1$.

Das Lösen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordert etwas mehr Arbeit. Zuerst muss die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung verwandelt werden. Wir verwenden den in Sec. 21.6.2 vorgestellten Trick. Wir setzen

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \tag{21.35}$$

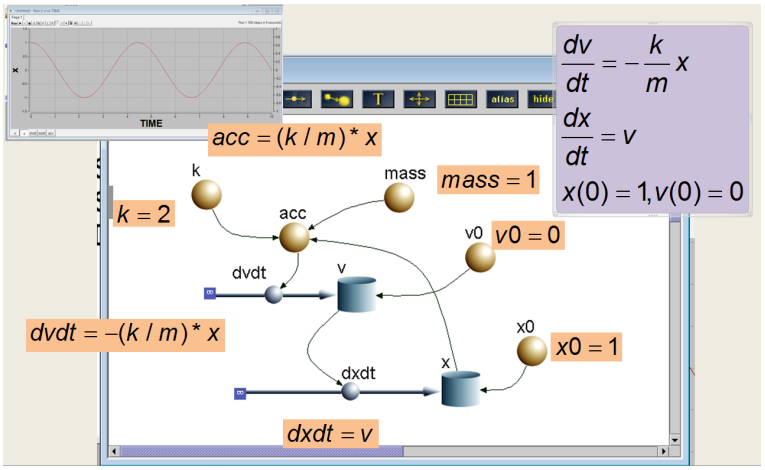


Abbildung 21.4: Lösen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Berkeley Madonna.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x, \\ x(0) = 1, v(0) &= 0. \end{aligned} \tag{21.36}$$

Ein BM - Programm kann über die graphische Benutzeroberfläche eingegeben werden und könnte so wie in Fig. 21.4 aussehen.

21.8 Numerisches Integrieren

Auch wenn Sie in der Numerik effizientere Methoden zur numerischen Integration kennenlernen werden, kann man auch mit Berkeley Madonna integrieren. Die grundlegende Idee ist, dass die Integration im Wesentlichen die Umkehrung der Differentiation ist. Formaler heisst dies (Hauptsatz der Analysis):

$$f(t) = \frac{d}{dt}\int_{s_0}^{t} f(s)ds. \tag{21.37}$$

Anders gesagt, wenn wir die Funktion F definieren als

$$F(t) = \int_{s_0}^{t} f(s)ds, \tag{21.38}$$

dann gilt

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{s_0}^{t} f(s)ds. \tag{21.39}$$

Das heisst aber (s. Eq. 21.37):

$$\frac{dF}{dt} = f(t). \tag{21.40}$$

Die letzte Gleichung ist aber nichts anderes als eine Differentialgleichung. Diese können wir mit Berkeley Madonna numerisch lösen.

■ **Example 21.5** Gegeben sei die Stammfunktion

$$F(t) = \int_{0}^{t} \cos(s)ds. \tag{21.41}$$

Aus der Analysis wissen Sie, dass $F(t) = \sin(t) + C$, wobei C die Integrationskonstante darstellt.

Beachten Sie die Wichtigkeit der Integrationsgrenzen. Da

$$F(0) = \int_{0}^{0} \cos(s)ds = 0. \tag{21.42}$$

und $F(0) = \sin(0) + C$ muss $C = 0$ sein.

Da Eq. 21.38 für $f(s) = \cos(s)$ zu Eq. 21.41 wird, können wir nun $F(t)$ durch Integrieren der Differentialgleichung bestimmen! Dies kann durch Berkeley Madonna wie z.B. dargestellt in Fig. 21.5 geschehen.

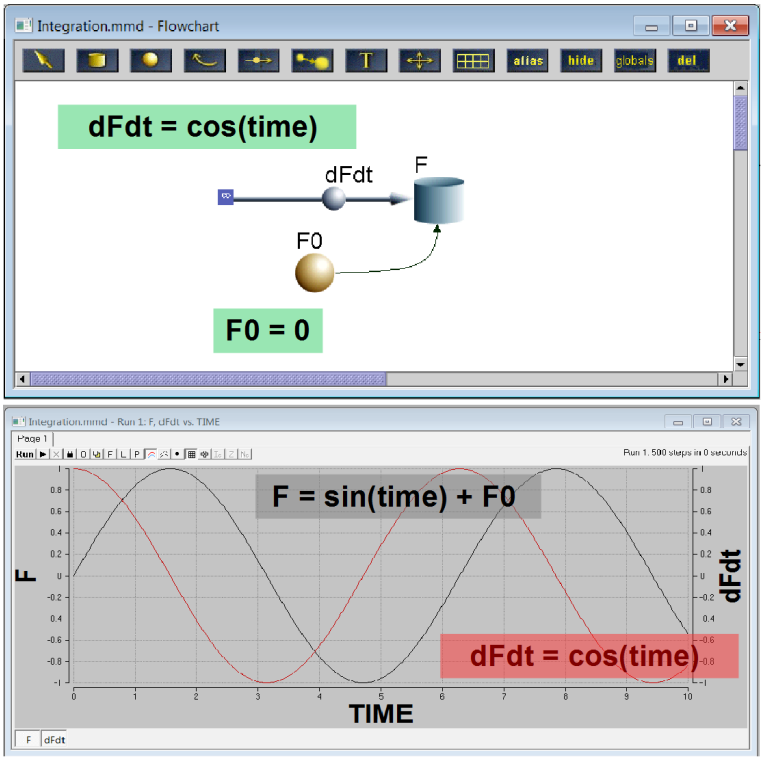
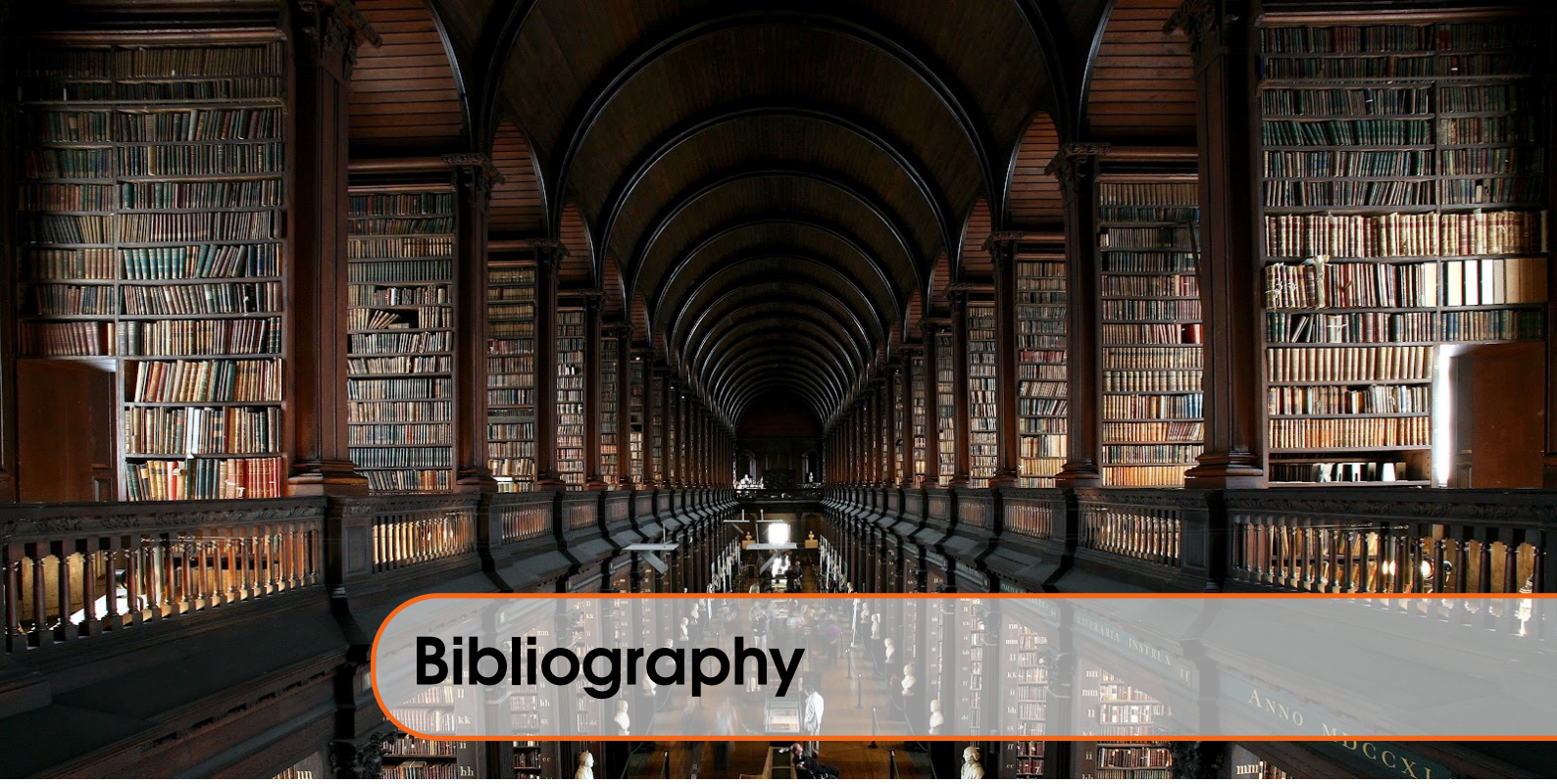


Abbildung 21.5: Numerisches Integrieren mit Berkeley Madonna.



Bibliography

Books

Articles

Index

A

Ableitung
partielle 308
Absorptionskoeffizient 262
Aggregatszustände 237
Albedo 272
Ampere 139
Amplitude 157
analytisch 310
Anfangswert 311
Arbeit 188
Archimedisches Prinzip 55
Avogadro - Konstante 228

B

Bahndrehimpuls 103
Beschleunigung 12
Bodenkraft 48
Boltzmannkonstante 228
Brechungsindex 285

C

coefficient of performance 196
cop 196

D

Dämpfung
hysteretische 163
schwache 160
Differentialgleichung
n-ter Ordnung 312
partielle 248, 312
Differntialgleichung
gewöhnliche 312
Dispersion 172
dissipativ 70
Divergenz 118, 309
Drehmoment 105

E

E-Feld 111
Eigendrehimpuls 103
Eigenfrequenz 156
Einheit
    Gauss 123
    Tesla 123
Einheitsvektor 307
Elektrostatik 111
Emission 263
Emissionskoeffizient 269
Energie 63
    Feder 64
    innere 181
    kinetische 64
    Lage 64
Energieleitfähigkeit
    spezifische 213
    thermische 213
Energiestransferkoeffizient
    konvektiver 215
Energietransferkoeffizient 213
Entropie 189
Entropiekapazität 198
Entropieleitfähigkeit 210
Eulerwinkel 80
Expansionskoeffizient
    thermischer 220

F

Fata Morgana 288
Feder
    gedämpfte 45
    ungegedämpfte 44
Federkonstante 64
Feld
    Elektrisches 111
    magnetisches 123
Flaschenzug 33
Frequenz 157, 249
    natürliche 156
fundamentale Kräfte 36
Funktion
    periodische 157

G

Gas
    ideales 226
Gaskonstante
    universelle 228
Gauss 123
Geschwindigkeit 11
Gesetz
    Amontons erstes Gesetz 49
    Amontons zweites Gesetz 49
    Coulomb'sche Gesetz 39
    Coulombs Gesetz der Reibung . 50
    Newton'sches Gravitationsgesetz 38
    Newtons drittes Gesetz 30
    Newtons erstes Gesetz 29
    Newtons zweites Gesetz 29
Gleitreibungskoeffizient 51
Grössen
    makroskopische 182
    mikroskopische 182
Gravitationspotential 75

H

Höhenformel
    barometrische 230
Haftreibungskoeffizient 51
Hauptachse 101

Hauptsatz
erster 188
nullter 178
zweiter
Alltagsformulierung, 189
formal, 190
Hauptträgheitsmomente 101
Henry 147
Hertz (Einheit) 249

I

Impuls 60
Induktivität 147
Intensität 262
Interferenz 173
destruktive 256
konstruktive 256
irreversibel 184

K

k-Wert 213
Körper
schwarzer 263
Körper
ausgedehnter 82
elastischer 81
starrer 81, 82
Kapazität 120
Kinematik 10
Knotenregel 144
Kondensation 242
konservativ 69
Konvektionszone 215
Koordinaten
kartesische 11
sphärische 23
Kraft
äussere 84
innere 84
Lorentz 125
Kreisfrequenz 157
Kreuzprodukt 307

L

Längenausdehnungskoeffizient
thermischer 220
Lage im Raum 80
Lageenergie 64
des starren Körpers 87
Leistung 76
Lichtleiter 287
Limit
Carnot 195
Lorentzkraft 125
Luftfeuchtigkeit
relative 243
Luftwiderstand 47

M

Magnetfeld 123
Maschine
ideale 193
reversible 193
Maschinen
einfache 32
Masse 28
Massenbelegungsdichte 169
Massenpunkt 10, 28
Matrix
symmetrische 308
Maxwellgleichungen 247
Mikrowellen 258
Modulation
Phasen- 254

Mol 228

N

Nabla - Operator 309
Nennspannung 150
Newton 30
Newton'sche Gesetze 29
Normalbedingungen
thermodynamische 178
Normaldruck 178
numerisch 310

O

ODE 248
Ohm'sches Gesetz 145
Operator 297
Orientierung 80
Ortskurve 11

P

Partialdruck 242
PDE 248
Periode 157, 249
Phase 157
Phasen
thermodynamische 237
Phasengeschwindigkeit 250
Phasenkonstante 157
Photon 274
Physik
statistische 180
Planck'sche Konstante 264
Potential
elektrisches 116
PRozess
adiabatischer 235
Prozess
irreversibler 184
reversibler 184

R

Radiowellen 258
Reflexionskoeffizient 262
Reibung 51
aerodynamische 159
Coulomb 51, 159
hydrodynamische 159
hysteretische 159
Stokes 159
Stokes'sche Reibung 53
viskose 159
Resonanz 163
reversibel 184
Reynoldszahl 53
Rollbedingung 99
Rotation 309

S

Sättigungsdampfdruck 241
Satz
von Steiner 96
Schleifenregel 144
Schmelzwärme
latente 239
Schnelligkeit 12
Schrödingergleichung 298
Schwarzer Körper 263
Schwerpunkt 84
Schwerpunktsatz 85
Schwerpunktsbeschleunigung 84
Schwerpunktsgeschwindigkeit 84
Schwerpunktskoordinaten 86
Seil 32

Spannung 116
Standardbedingungen
thermodynamische 178
Starrer Körper 80
Statik 31
statisch 31
Stefan-Boltzmann Gesetz 266
Strom 139
Stromrichtung
physikalische 139
technische 139

T

Temperatur 177
Tesla 123
Totalreflexion 287
Trägheitsmoment 95
Trägheitstensor 100
Trajektorie 11
Treibhausgas 276

U

U-Wert 213
Unschärferelation 300

V

Vakuumpermeabilität 131
Variablen;thermodynamische 181
Verdampfungswärme
latente 239
Viskosität 53

W

Wärme 176, 188
Wärmeenergie 176
Wärmekapazität 198
spezifische 199
Wärmekontakt 178
Wärmeleitfähigkeit
spzeifische 213
Wärmeleitung 213
Wärmekapazität
molare 232
Watt 76
Welle
ebene elektromagnetische 249
Wellen
Flachwasserwellen 172
Kapillarwellen 172
longitudinal 171
Tiefwasserwellen 172
transversal 171
Wellenfunktion 294
Wellengleichung 168, 248
Wellenlänge 250
Wellenzahl 250
Welt
makroskopische 28
Widerstand 145
Wien'sche Verschiebungsgesetz . . 265
Winkelgeschwindigkeitsvektor 91
Wirkungsgrad
Carnot 195

Z

Zeitkonstante 161
Zentralkraft 104
Zustandsgelichung
ideales Gas 228
Zyklotronfrequenz 128