

# Análise Reológica de Pastas Cerâmicas

Bruno Kenji Nishitani Egami

## 1. Introdução

A caracterização reológica de pastas cerâmicas é essencial para entender seu comportamento durante processos de conformação, como a extrusão. O presente relatório descreve as equações utilizadas em um script Python desenvolvido para processar os dados experimentais obtidos com um reômetro capilar DIY de baixo custo. O objetivo é converter medidas diretas (como massa extrudada e pressão de extrusão) em parâmetros reológicos interpretáveis (como viscosidade e taxa de cisalhamento).

## 2. Variáveis e Nomenclatura Utilizada

$R$	Raio interno do capilar (m)
$D$	Diâmetro interno do capilar (mm)
$L$	Comprimento do capilar (m)
$Q$	Vazão volumétrica ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
$\rho$	Densidade da pasta ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$m$	Massa extrudada (kg)
$t$	Tempo de extrusão (s)
$P$	Pressão aplicada (Pa)
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento na parede (Pa)
$\dot{\gamma}_{aw}$	Taxa de cisalhamento aparente ( $\text{s}^{-1}$ )
$\dot{\gamma}_w$	Taxa de cisalhamento real (corrigida) ( $\text{s}^{-1}$ )
$\eta_a$	Viscosidade aparente (Pa s)
$\eta$	Viscosidade verdadeira (Pa s)
$n'$	Índice de pseudoplasticidade estimado (adimensional)
$K'$	Coeficiente de consistência estimado ( $\text{Pa s}^n$ )
$\tau_0$	Tensão de escoamento (Pa)
$\eta_p$	Viscosidade plástica (Pa s)

## 3. Conversão de Medidas Experimentais

Durante os ensaios reológicos capilares, coletam-se dados experimentais em unidades técnicas convencionais — por exemplo, massa em gramas, pressão em bar, e dimensões do capilar em milímetros. No entanto, todas as equações da mecânica dos fluidos que regem a análise exigem que as grandezas estejam expressas em **unidades do Sistema Internacional (SI)**. Por isso, o primeiro passo do script é converter essas unidades de forma padronizada.

### 3.1 Conversões de Unidades para SI

A primeira etapa do processamento consiste em converter todas as grandezas fornecidas pelo usuário para o Sistema Internacional de Unidades (SI). Essa padronização é essencial para garantir a consistência matemática de todas as equações físicas subsequentes.

#### Conversões realizadas:

- **Comprimento:**

$$D \text{ [mm]} \rightarrow D \text{ [m]} \quad \text{via} \quad D = \frac{D_{\text{mm}}}{1000} \quad (1)$$

$$L \text{ [mm]} \rightarrow L \text{ [m]} \quad \text{via} \quad L = \frac{L_{\text{mm}}}{1000} \quad (2)$$

- **Massa:**

$$m \text{ [g]} \rightarrow m \text{ [kg]} \quad \text{via} \quad m = \frac{m_{\text{g}}}{1000} \quad (3)$$

- **Densidade:**

$$\rho \text{ [g/cm}^3\text{]} \rightarrow \rho \text{ [kg/m}^3\text{]} \quad \text{via} \quad \rho = \rho_{\text{g/cm}^3} \times 1000 \quad (4)$$

- **Pressão:**

$$P \text{ [bar]} \rightarrow P \text{ [Pa]} \quad \text{via} \quad P = P_{\text{bar}} \times 10^5 \quad (5)$$

**Uso nas demais seções:** Todas as equações da Seção 3 até a Seção 8 pressupõem que as variáveis estejam em SI. A partir daqui, assumiremos que todas as grandezas estão corretamente convertidas.

### 3.2 Volume Extrudado

$$V = \frac{m}{\rho} \quad [\text{m}^3] \quad (6)$$

#### Onde:

- $V$  – Volume extrudado ( $\text{m}^3$ )
- $m$  – Massa da pasta extrudada (kg)
- $\rho$  – Densidade da pasta ( $\text{kg/m}^3$ )

O volume é necessário para calcular a **vazão volumétrica** na próxima etapa. Isso estabelece o primeiro elo entre a medição direta ( $m$ ) e o comportamento do escoamento.

### 3.3 Vazão Volumétrica

$$Q = \frac{V}{t} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (7)$$

**Onde:**

- $Q$  – Vazão volumétrica da pasta ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
- $V$  – Volume extrudado ( $\text{m}^3$ )
- $t$  – Tempo de extrusão (s)

A vazão ( $Q$ ) representa o volume de pasta que passa por segundo através do capilar. É uma das grandezas mais importantes da análise, pois se relaciona diretamente à deformação do fluido. Essa informação será usada no cálculo da taxa de cisalhamento (Seção 3.4) e, posteriormente, corrigida por efeitos geométricos (Seções 4 a 6).

### 3.4 Taxa de Cisalhamento Aparente

$$\dot{\gamma}_{aw} = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (8)$$

**Onde:**

- $\dot{\gamma}_{aw}$  – Taxa de cisalhamento aparente na parede ( $\text{s}^{-1}$ )
- $Q$  – Vazão volumétrica ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
- $R$  – Raio interno do capilar (m)
- $\pi$  – Constante matemática ( $\sim 3,1416$ )

Estima a rapidez com que as camadas de fluido deslizam entre si na parede do capilar. É chamada "aparente" porque assume escoamento newtoniano ideal, e será corrigida mais adiante. Essa grandeza é usada como base para:

- Aplicar a correção de Weissenberg–Rabinowitsch (Seção 6);
- Calcular a viscosidade aparente (Seção 7.1);
- Determinar os parâmetros dos modelos reológicos (Seção 8).

### 3.5 Tensão de Cisalhamento na Parede

$$\tau_w = \frac{PR}{2L} \quad [\text{Pa}] \quad (9)$$

**Onde:**

- $\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede (Pa)
- $P$  – Pressão aplicada (Pa)
- $R$  – Raio do capilar (m)
- $L$  – Comprimento do capilar (m)

Quantifica o esforço por unidade de área exercido pela pasta na parede interna do capilar. Esse valor será:

- Corrigido pela técnica de Bagley se necessário (Seção 4);
- Utilizado diretamente na correção W-R (Seção 6);
- Base para o cálculo de viscosidade aparente e verdadeira (Seção 7);
- Variável dependente nos ajustes de modelos (Seção 8).

**Nota:** Esse valor é chamado de “bruto” porque pode incluir contribuições não desejadas, como perdas por entrada/saída e deslizamento — que serão corrigidas em seções posteriores.

## 4. Correção de Bagley (Perda nas Extremidades)

A medição da pressão total durante a extrusão capilar ( $P$ ) inclui não apenas o esforço necessário para o escoamento dentro do capilar, mas também perdas associadas às extremidades — isto é, à entrada e à saída do capilar. Essas perdas ocorrem por efeitos geométricos, contrações abruptas, turbulência localizada e atrito de entrada.

A não correção dessas perdas resulta na superestimação da tensão de cisalhamento calculada, especialmente em capilares curtos. Isso compromete os valores de viscosidade e o ajuste dos modelos reológicos.

### 4.1 Modelo Linear da Correção de Bagley

$$P = 2\tau_w \left( \frac{L}{R} \right) + P_e \quad [\text{Pa}] \quad (10)$$

**Onde:**

- $P$  – Pressão total medida experimentalmente (Pa)
- $\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede (Pa)

- $L$  – Comprimento do capilar (m)
- $R$  – Raio interno do capilar (m)
- $P_e$  – Perda de pressão nas extremidades (Pa)

**Interpretação:** A equação mostra que a pressão total é composta por:

- (a) Um termo linear proporcional a  $L/R$ , que representa o escoamento interno.
- (b) Um termo constante  $P_e$ , que representa as perdas localizadas nas extremidades.

## 4.2 Aplicação Experimental e Limitações

Para aplicar a correção de Bagley, utiliza-se um conjunto de capilares com:

- Mesmo diâmetro interno ( $D$ );
- Comprimentos distintos ( $L_i$ );
- Vários pontos experimentais com massa e pressão para cada capilar.

O script executa os seguintes passos:

1. Calcula  $\dot{\gamma}_{aw}$  para cada ponto experimental (com  $Q$  e  $R$  fixos);
2. Define um conjunto comum de taxas de cisalhamento alvo  $\dot{\gamma}_{aw,k}$ ;
3. Interpola os dados de pressão para essas taxas alvo em cada capilar;
4. Ajusta, para cada  $\dot{\gamma}_{aw,k}$ , uma reta da forma:

$$P_k = 2\tau_{w,k} \left( \frac{L}{R} \right) + P_{e,k} \quad (11)$$

5. Calcula a inclinação da reta ( $\tau_{w,k}$ ) e o intercepto ( $P_{e,k}$ );
6. Constrói a curva de fluxo corrigida: pares  $(\dot{\gamma}_{aw,k}, \tau_{w,k})$ .

Ao remover as perdas de extremidade, a curva de fluxo se torna mais precisa, especialmente em altas pressões e com capilares curtos. Isso garante que os valores de viscosidade e os modelos reológicos reflitam o verdadeiro comportamento do fluido.

Contudo, a correção exige pelo menos dois capilares com diferentes comprimentos e mesmo diâmetro. Se os dados forem escassos ou os comprimentos forem muito próximos, a regressão pode ser imprecisa.

## 5. Correção de Mooney (Deslizamento na Parede)

Em certos materiais — especialmente pastas cerâmicas, argilas e suspensões concentradas — pode ocorrer um fenômeno chamado **deslizamento na parede** (wall slip). Isso acontece quando a interface entre o fluido e o capilar não apresenta atrito total, fazendo com que o fluido escorregue parcialmente em vez de aderir à parede. Esse deslizamento afeta diretamente a medição da taxa de cisalhamento, levando à superestimação da deformação real do fluido. Em razão deste efeito, a taxa de cisalhamento aparente medida inclui uma componente falsa de movimento, resultando em uma viscosidade artificialmente baixa e modelos que não representam o comportamento real da pasta.

A correção de Mooney é aplicada para avaliar e quantificar esse deslizamento.

### 5.1 Modelo de Mooney

$$\dot{\gamma}_{aw} = \dot{\gamma}_{s,f} + \frac{C}{R} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (12)$$

Onde:

- $\dot{\gamma}_{aw}$  – Taxa de cisalhamento aparente na parede ( $\text{s}^{-1}$ )
- $\dot{\gamma}_{s,f}$  – Taxa de cisalhamento verdadeira do fluido (sem efeito de deslizamento) ( $\text{s}^{-1}$ )
- $C$  – Coeficiente de deslizamento (velocidade de deslizamento na parede,  $v_s$ ) ( $\text{m/s}$ )
- $R$  – Raio do capilar ( $\text{m}$ )

Quanto menor o raio  $R$ , maior será o impacto do termo de deslizamento ( $C/R$ ) na taxa de cisalhamento aparente medida.

### 5.2 Aplicação Experimental

O método exige:

- Múltiplos capilares com mesmo comprimento  $L$  e diferentes diâmetros ( $R_i$ );
- Medidas de  $\dot{\gamma}_{aw}$  para uma tensão de cisalhamento na parede ( $\tau_w$ ) constante (ou um conjunto de  $\tau_w$  alvo);
- Ajuste linear de  $\dot{\gamma}_{aw}$  como função de  $1/R$ .

A correção de Mooney é realizada com base em diferentes capilares de mesmo comprimento e raios distintos. Para cada valor de tensão de cisalhamento  $\tau_w$ , interpola-se a taxa de cisalhamento aparente  $\dot{\gamma}_{aw}$  em função de  $1/R$ , e ajusta-se uma regressão linear da forma:

$$\dot{\gamma}_{aw} = \dot{\gamma}_s + \frac{2V_s}{R} \quad (13)$$

O termo independente da regressão fornece uma estimativa da taxa de cisalhamento devido ao deslizamento na parede  $\dot{\gamma}_s$ , indicando a influência de efeitos de parede no escoamento.

Plotando  $\dot{\gamma}_{aw}$  versus  $1/R$  para um  $\tau_w$  fixo, a equação (12) representa uma reta. O **intercepto** dessa reta fornece  $\dot{\gamma}_{s,f}$  (a taxa de cisalhamento do fluido corrigida para o deslizamento), e a **inclinação** fornece  $C$  (o coeficiente de deslizamento, ou velocidade de deslizamento na parede). Com isso, pode-se reconstruir a curva de cisalhamento ( $\tau_w$  vs  $\dot{\gamma}_{s,f}$ ) sem o efeito de parede.

### 5.3 Implementação da Correção de Mooney no Script

A correção de Mooney tem como objetivo estimar o deslizamento do fluido nas paredes do capilar, o que afeta a determinação da taxa de cisalhamento real. Este fenômeno é particularmente relevante em sistemas onde a tensão de cisalhamento na parede ( $\tau_w$ ) não resulta exclusivamente da deformação do fluido, mas também da contribuição do escoamento por deslizamento.

No presente script, a correção é ativada caso o usuário forneça dados de ao menos dois capilares com diâmetros distintos ( $D_i$ , portanto raios  $R_i$  distintos) e comprimento comum ( $L$ ). A metodologia consiste em:

1. Para cada capilar, obter pares de dados ( $\tau_w, \dot{\gamma}_{aw}$ ). A tensão  $\tau_w$  pode ser proveniente dos dados corrigidos por Bagley (Seção 4), caso essa correção também tenha sido ativada; caso contrário, os valores diretos de  $\tau_w$  são utilizados.
2. Definir um conjunto de valores alvo para a tensão de cisalhamento na parede ( $\tau_{w,k}$ ).
3. Para cada  $\tau_{w,k}$  alvo:
  - Interpolar o valor de  $\dot{\gamma}_{aw}$  correspondente para cada capilar  $i$  (com raio  $R_i$ ).
  - Se houver valores de  $\dot{\gamma}_{aw}$  para pelo menos dois raios  $R_i$  distintos, realizar um ajuste linear da forma:

$$\dot{\gamma}_{aw}(R_i) = \dot{\gamma}_{s,f,k} + C_k \left( \frac{1}{R_i} \right) \quad (14)$$

- O **intercepto** da regressão fornece  $\dot{\gamma}_{s,f,k}$  (a taxa de cisalhamento do fluido para o  $\tau_{w,k}$  considerado).
  - A **inclinação** da regressão fornece  $C_k$  (o coeficiente de deslizamento para o  $\tau_{w,k}$  considerado).
4. São aceitos apenas os pontos onde a regressão é bem definida (ex: intercepto fisicamente coerente,  $R^2$  satisfatório).
  5. Ao final, a lista de pares corrigidos ( $\tau_{w,k}, \dot{\gamma}_{s,f,k}$ ) é salva para análise e visualização.

Quando a regressão não é possível (por exemplo, devido a dados insuficientes ou inconsistentes para um determinado  $\tau_{w,k}$ ), esse ponto específico da correção de Mooney é descartado, e o processamento para os demais pontos ou correções prossegue com os dados disponíveis.

## 6. Correção de Weissenberg–Rabinowitsch

A equação da taxa de cisalhamento aparente (Seção 3.4) assume que o fluido apresenta um perfil de velocidade parabólico, típico de fluidos newtonianos. No entanto, pastas cerâmicas e materiais reológicos complexos exibem perfis não parabólicos devido à sua viscosidade dependente da taxa de deformação. Isso significa que  $\dot{\gamma}_{aw}$  (ou  $\dot{\gamma}_{s,f}$  após a correção de Mooney) **não representa corretamente** a taxa real de cisalhamento na parede do capilar para fluidos não newtonianos.

A correção de Weissenberg–Rabinowitsch (W-R) ajusta esse erro, fornecendo uma estimativa mais realista da taxa de cisalhamento na parede,  $\dot{\gamma}_w$ , baseada no comportamento não newtoniano do material. Para a aplicação da correção de Rabinowitsch e obtenção da taxa de cisalhamento verdadeira na parede  $\dot{\gamma}_w$ , é necessário estimar o índice de comportamento aparente  $n'$ , obtido por regressão linear da relação logarítmica entre tensão e taxa de cisalhamento:

$$\log \tau_w = \log K' + n' \log \dot{\gamma}_{aw} \quad (15)$$

O valor de  $n'$  é então utilizado na expressão:

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3n' + 1}{4n'} \dot{\gamma}_{aw} \quad (16)$$

Essa abordagem é recomendada quando não se conhece a equação constitutiva do fluido e permite uma correção geral da taxa de deformação.

### 6.1 Fundamento Teórico

Para fluidos não newtonianos, o perfil de velocidade no capilar não é simétrico ou parabólico. Ele se achata (pseudoplásticos) ou se afunila (dilatantes), alterando a distribuição da velocidade radial e, conseqüentemente, a taxa de cisalhamento na parede.

A correção W-R introduz um fator de ajuste baseado no **índice de comportamento de fluxo local**,  $n'$ , calculado a partir da relação entre tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento efetiva antes desta correção (que pode ser  $\dot{\gamma}_{aw}$  ou  $\dot{\gamma}_{s,f}$ ) em escala logarítmica:

$$n' = \frac{d \ln \tau_w}{d \ln \dot{\gamma}_{\text{antes de W-R}}} \quad (17)$$

**Interpretação:**

- Se  $n' = 1$ , o fluido é newtoniano (sem correção significativa);
- Se  $n' < 1$ , o fluido é pseudoplástico (tende a se afinar com o cisalhamento);
- Se  $n' > 1$ , o fluido é dilatante (tende a engrossar com o cisalhamento).

### 6.2 Equação de Correção da Taxa de Cisalhamento

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3n' + 1}{4n'} \cdot \dot{\gamma}_{\text{antes de W-R}} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (18)$$

**Onde:**



- $\dot{\gamma}_w$  – Taxa de cisalhamento real na parede ( $s^{-1}$ )
- $\dot{\gamma}_{\text{antes de W-R}}$  – Taxa de cisalhamento aparente ou corrigida por Mooney ( $s^{-1}$ )
- $n'$  – Índice de comportamento de fluxo local (adimensional)

**Finalidade:** Corrigir a deformação medida levando em conta a forma real do perfil de velocidade no escoamento capilar. Essa taxa corrigida é usada diretamente para:

- Calcular a **viscosidade verdadeira** (Seção 7.2);
- Ajustar os **modelos reológicos** (Seção 8);
- Analisar se o fluido tem comportamento pseudoplástico, dilatante ou aproximado de newtoniano.

### 6.3 Como o Script Aplica a Correção

O script realiza a correção W-R da seguinte maneira:

1. Recebe os pares  $(\tau_w, \dot{\gamma}_{\text{base}})$ , onde  $\dot{\gamma}_{\text{base}}$  são os dados de taxa de cisalhamento após correções anteriores (Bagley e/ou Mooney, se aplicadas) ou os dados brutos de  $\dot{\gamma}_{aw}$ ;
2. Aplica interpolação ou suavização log-log (dependendo do número de pontos disponíveis);
3. Calcula  $n'$  como a inclinação da curva  $\ln(\tau_w)$  versus  $\ln(\dot{\gamma}_{\text{base}})$ ;
4. Aplica a fórmula de correção para obter  $\dot{\gamma}_w$ ;
5. Armazena os pares  $(\tau_w, \dot{\gamma}_w)$  para uso em etapas posteriores.

#### Observações:

- O cálculo de  $n'$  pode ser feito ponto a ponto (derivada numérica) ou globalmente (ajuste linear em escala log-log);
- Se houver muitos pontos experimentais, o script opta por um modelo suavizado para evitar instabilidades;
- Para garantir precisão, o script evita regiões com taxas de cisalhamento muito baixas (onde erros relativos são maiores).

### 6.4 Impacto Prático da Correção

**Sem correção:** A viscosidade seria calculada com base em uma taxa de cisalhamento não representativa do comportamento não newtoniano, levando a:

- Subestimação da viscosidade em fluidos dilatantes;
- Superestimação em fluidos pseudoplásticos;
- Parâmetros incorretos nos modelos ajustados.

**Com correção:** O script fornece uma descrição realista do comportamento do fluido, refletindo a física do escoamento em um tubo capilar, e possibilita a aplicação rigorosa de modelos não newtonianos.

**Resultado:** Os dados  $(\tau_w, \dot{\gamma}_w)$  corrigidos são agora representações confiáveis do comportamento reológico do material e base para as próximas análises quantitativas.

## 7. Viscosidades

A viscosidade é uma das propriedades mais fundamentais na reologia: ela quantifica a resistência interna de um fluido ao escoamento. No entanto, para fluidos não newtonianos, essa resistência depende da taxa de cisalhamento. Por isso, distinguimos dois conceitos:

- **Viscosidade Aparente** – Calculada com base na taxa de cisalhamento aparente  $(\dot{\gamma}_{aw})$  e na tensão correspondente  $(\tau_w)$  sem considerar o perfil real do escoamento ou outras correções.
- **Viscosidade Verdadeira** – Calculada após todas as correções aplicáveis (Bagley, Mooney, W-R), usando a taxa de cisalhamento real na parede  $(\dot{\gamma}_w)$  e a tensão de cisalhamento na parede corrigida  $(\tau_w)$ , representando melhor o comportamento físico real do material.

### 7.1 Viscosidade Aparente

$$\eta_a = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_{aw}} \quad [\text{Pa s}] \quad (19)$$

Onde:

- $\eta_a$  – Viscosidade aparente (Pa s)
- $\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede (não corrigida por Bagley) (Pa)
- $\dot{\gamma}_{aw}$  – Taxa de cisalhamento aparente (não corrigida por Mooney ou W-R) ( $\text{s}^{-1}$ )

Este valor representa a “resistência ao escoamento” calculada diretamente dos dados brutos (após conversão de unidades). Ela é útil como uma estimativa inicial e é amplamente utilizada na indústria para controle de qualidade. No entanto, não representa fielmente a viscosidade real quando o fluido é não newtoniano ou quando há efeitos de extremidade e deslizamento significativos.

### 7.2 Viscosidade Verdadeira

$$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} \quad [\text{Pa s}] \quad (20)$$

Onde:

- $\eta$  – Viscosidade verdadeira (Pa s)

- $\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede (corrigida por Bagley, se aplicável) (Pa)
- $\dot{\gamma}_w$  – Taxa de cisalhamento real na parede (corrigida por Mooney e W-R, se aplicáveis) ( $s^{-1}$ )

#### Finalidade e Interpretação:

Esta equação fornece a viscosidade mais representativa do comportamento intrínseco do material. Ela é mais fiel à realidade, pois considera o verdadeiro perfil de velocidade no interior do capilar e remove artefatos experimentais. Essa viscosidade é usada para ajustar modelos reológicos e prever o comportamento do material em diferentes condições de escoamento.

Table 1: Comparação entre viscosidade aparente e verdadeira

Tipo	Base de Cálculo	Aplicação Principal
Aparente ( $\eta_a$ )	$\tau_w$ (bruta), $\dot{\gamma}_{aw}$ (bruta)	Controle rápido, estimativas iniciais
Verdadeira ( $\eta$ )	$\tau_w$ (corrigida), $\dot{\gamma}_w$ (corrigida)	Modelagem, predição, análise científica

## 8. Modelos Reológicos Ajustados

Após corrigir os dados experimentais para obter pares  $(\tau_w, \dot{\gamma}_w)$  confiáveis, ajustam-se modelos matemáticos para descrever o comportamento reológico do material. Esses modelos permitem representar a relação entre tensão e taxa de cisalhamento de maneira funcional, possibilitando previsões e comparações entre diferentes materiais, bem como estimar parâmetros reológicos que caracterizem o tipo de fluido, como viscosidade, tensão de escoamento e pseudoplasticidade. O script ajusta todos os modelos abaixo e seleciona o melhor com base no coeficiente de determinação ( $R^2$ ).

Os modelos reológicos foram ajustados por meio de regressão não linear utilizando o método de mínimos quadrados (via `curve_fit`). A seleção do melhor modelo baseou-se no coeficiente de determinação  $R^2$ , obtido a partir da comparação entre os valores experimentais  $\tau_w$  e os valores previstos pelos modelos. Apenas pontos com  $\tau_w > 0$  e  $\dot{\gamma}_w > 0$  foram considerados válidos para o ajuste.

O comportamento reológico foi classificado com base no valor do expoente  $n$  ajustado no modelo de Lei da Potência ou Herschel-Bulkley. Os critérios utilizados foram:

Table 2: Interpretação do índice de comportamento de escoamento  $n$

Valor de $n$	Comportamento do fluido
$n \approx 1$	Fluido newtoniano
$n < 1$	Fluido pseudoplástico (afinamento com o aumento da taxa de cisalhamento)
$n > 1$	Fluido dilatante (espessamento com o aumento da taxa de cisalhamento)

Essa classificação fornece uma visão qualitativa sobre a estrutura e dinâmica do fluido durante o escoamento.

## 8.1 Modelo Newtoniano

$$\tau_w = \eta \dot{\gamma}_w \quad (21)$$

**Onde:**

- $\tau_w$  – Tensão de cisalhamento (Pa)
- $\dot{\gamma}_w$  – Taxa de cisalhamento real ( $s^{-1}$ )
- $\eta$  – Viscosidade constante (Pa s)

**Descrição:** Modelo mais simples. Assume que a viscosidade é constante, independentemente da taxa de cisalhamento. Válido para fluidos ideais como água ou óleos leves. Raramente adequado para pastas cerâmicas.

## 8.2 Lei da Potência (Power Law)

$$\tau_w = K \dot{\gamma}_w^n \quad (22)$$

**Onde:**

- $K$  – Coeficiente de consistência (Pa s<sup>n</sup>)
- $n$  – Índice de comportamento de fluxo (adimensional)

**Descrição:** Captura o comportamento de fluidos cuja viscosidade varia com a taxa de cisalhamento. Para  $n < 1$ , o fluido é pseudoplástico (afinamento); para  $n > 1$ , dilatante (espessamento). Não representa tensão de escoamento.

## 8.3 Modelo de Bingham

$$\tau_w = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma}_w \quad (23)$$

**Onde:**

- $\tau_0$  – Tensão de escoamento (Pa)
- $\eta_p$  – Viscosidade plástica (Pa s)

**Descrição:** Indica que o material não começa a fluir até que uma tensão mínima ( $\tau_0$ ) seja ultrapassada. Após isso, flui com viscosidade constante ( $\eta_p$ ). Útil para materiais como argilas e suspensões concentradas.

## 8.4 Modelo de Herschel-Bulkley

$$\tau_w = \tau_0 + K \dot{\gamma}_w^n \quad (24)$$

Onde:

- $\tau_0$  – Tensão de escoamento (Pa)
- $K$  – Coeficiente de consistência ( $\text{Pa s}^n$ )
- $n$  – Índice de comportamento de fluxo (adimensional)

**Descrição:** Generaliza os modelos anteriores. Apresenta tensão de escoamento inicial ( $\tau_0$ ), seguida por comportamento não newtoniano dependente de  $n$ . É o modelo mais versátil e frequentemente o melhor ajustado para pastas cerâmicas e suspensões complexas.

O script calcula o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) para cada modelo e escolhe aquele que melhor representa os dados experimentais corrigidos.

## 9. Funcionamento do Script e Integração com as Equações

O script Python desenvolvido automatiza todas as etapas do processamento reológico, partindo de dados experimentais brutos até a geração de resultados quantitativos e gráficos. Nesta seção, detalhamos seu funcionamento interno, ligando cada etapa à teoria descrita nas seções anteriores.

### 9.1 Visão Geral do Processo

O script funciona como um fluxo de etapas encadeadas, com bifurcações opcionais conforme a escolha do usuário (ex: aplicar ou não a correção de Bagley). Cada etapa resolve um problema físico por meio de uma equação implementada computacionalmente.

Fluxograma do Processo.

### 9.2 Entrada de Dados e Conversões

Ao iniciar, o script solicita ao usuário:

- Densidade da pasta ( $\rho$ ), fornecida em  $\text{g/cm}^3$ ;
- Tempo de extrusão ( $t$ ), normalmente fixo, em segundos;
- Método de entrada de dados experimentais (manual ou por arquivo CSV);
- Parâmetros geométricos dos capilares: diâmetro ( $D$ ), comprimento ( $L$ ), em mm;
- Pressões aplicadas ( $P$ ) e massas extrudadas ( $m$ ), em bar e g.

O script converte automaticamente todas essas grandezas para unidades do SI, conforme detalhado na Seção 3.1.

### 9.3 Cálculos Iniciais: Vazão, Cisalhamento e Viscosidade

Com os dados convertidos, o script realiza os cálculos básicos (Seções 3.2 a 3.5):

- (a) Volume extrudado:  $V = m/\rho$
- (b) Vazão volumétrica:  $Q = V/t$
- (c) Taxa de cisalhamento aparente:  $\dot{\gamma}_{aw} = 4Q/(\pi R^3)$
- (d) Tensão de cisalhamento na parede:  $\tau_w = PR/(2L)$
- (e) Viscosidade aparente:  $\eta_a = \tau_w/\dot{\gamma}_{aw}$

Esses valores formam a “curva de fluxo bruta”, ponto de partida para correções e modelagens.

### 9.4 Correção de Bagley (Opcional)

Se ativada, o script aplica a Correção de Bagley conforme descrito na Seção 4, utilizando dados de capilares com comprimentos distintos para estimar e remover as perdas de pressão nas extremidades, resultando em uma curva  $\tau_w$  vs.  $\dot{\gamma}_{aw}$  corrigida.

### 9.5 Correção de Mooney (Opcional)

Se ativada e dados de capilares com diâmetros distintos são fornecidos, o script aplica a Correção de Mooney (detalhada na Seção 5) para corrigir a taxa de cisalhamento aparente ( $\dot{\gamma}_{aw}$ ) em relação ao efeito de deslizamento na parede, obtendo  $\dot{\gamma}_{s,f}$ .

### 9.6 Correção de Weissenberg–Rabinowitsch

Utilizando a curva  $\tau_w$  vs.  $\dot{\gamma}_{base}$  (onde  $\dot{\gamma}_{base}$  é  $\dot{\gamma}_{aw}$  ou  $\dot{\gamma}_{s,f}$  após correções anteriores), o script calcula o índice  $n'$  e então a taxa de cisalhamento real na parede  $\dot{\gamma}_w$ , conforme a Seção 6. A viscosidade verdadeira  $\eta = \tau_w/\dot{\gamma}_w$  é então calculada.

### 9.7 Ajuste de Modelos Reológicos

Com os pares  $(\tau_w, \dot{\gamma}_w)$  finais, o script ajusta os modelos reológicos (Newtoniano, Lei da Potência, Bingham, Herschel-Bulkley), como detalhado na Seção 8. Utiliza regressão não linear para estimar os parâmetros de cada modelo e calcula o  $R^2$  para selecionar o mais adequado. Adicionalmente, o script menciona que comportamentos dependentes do tempo (tixotrópicos e reopédicos) não são analisados no momento.

#### 9.7.1 Equações Ajustadas

As equações e parâmetros ajustados são (conforme Seção 8):

- **Modelo Newtoniano:**  $\tau = \eta \dot{\gamma} \Rightarrow \eta$
- **Lei da Potência:**  $\tau = K \dot{\gamma}^n \Rightarrow K, n$

- **Modelo de Bingham:**

$$\tau = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma} \Rightarrow \tau_0, \eta_p \quad (25)$$

- **Modelo de Herschel-Bulkley:**

$$\tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n \Rightarrow \tau_0, K, n \quad (26)$$

**Nota:**  $\tau$  e  $\dot{\gamma}$  aqui correspondem a  $\tau_w$  e  $\dot{\gamma}_w$  corrigidas.

### 9.7.2 Método Numérico de Ajuste

Usa algoritmos de otimização (Levenberg-Marquardt via `curve_fit` do SciPy) para regressão não linear, minimizando o erro quadrático médio entre tensões previstas e experimentais.

### 9.7.3 Interpretação Física dos Parâmetros

Os parâmetros ( $\eta, K, n, \tau_0, \eta_p$ ) são interpretados fisicamente para caracterizar o fluido (ex: pseudoplasticidade, tensão de escoamento).

### 9.7.4 Avaliação da Qualidade do Ajuste — $R^2$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (\tau_{\text{real}} - \tau_{\text{modelo}})^2}{\sum (\tau_{\text{real}} - \bar{\tau}_{\text{real}})^2} \quad (27)$$

) é usado para seleccionar o modelo mais representativo.

### 9.7.5 Geração de Curvas Modeladas

Curvas teóricas  $\tau_{\text{modelo}}(\dot{\gamma})$  e  $\eta_{\text{modelo}}(\dot{\gamma})$  são geradas e plotadas com dados experimentais.

## 9.8 Geração de Resultados e Relatórios

Por fim, o script:

- Organiza os resultados em tabelas (CSV);
- Gera gráficos;
- Exporta um relatório em formato TXT, com os dados da análise realizada.

Esses gráficos estão salvos automaticamente na pasta de resultados com nomes descritivos (timestamp data/hora) e podem ser utilizados para visualização complementar dos ajustes.