

1. Simplifique las siguientes expresiones mediante la aplicación de las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

- a) $a'.b'.(a+b)$
- b) $a + (a.b.c) + (a'.b) + (a'.b')$
- c) $[(x+y)'.z']'.x'.y$
- d) $[(x'.y).(x.z)]'. [x+(x.y')].(x'+y)'$
- e) $[(xy)' + x]z' + [x(x+z)y'] + (xy'z)$
- f) $[a.b' + c(a' + b)](b + c)$

2. Escriba el enunciado dual de cada afirmación:

- a) $(a' + b')' = a.b$
- b) $x.y' = 0 \Leftrightarrow x.y = x$
- c) $x + [x.(y+1)] = x$

3. En un álgebra de Boole, ¿existe algún elemento que sea igual a su complemento?

4. a) Sea $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Se define: $x + y = \text{mcm}(x, y)$, $x.y = \text{mcd}(x, y)$, $x' = \frac{6}{x}$ para $x, y \in A$. Demuestre que el conjunto $(A, +, ., ', 1, 6)$ es un álgebra de Boole.

b) Si A es el conjunto formado por los divisores positivos de 8, ¿es $(A, +, ., ', 1, 8)$ un álgebra booleanas? ¿Por qué?

Considere $x + y$ y $x.y$ como en el apartado a) y $x' = \frac{8}{x}$ para $x, y \in A$

5. Demuestre las siguientes afirmaciones, utilizando las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

- a) $x + x.(y+1) = x$
- b) $x . x = x$
- c) $a.b = a \rightarrow a+b = b$
- d) $x + y = 0 \rightarrow x.y' = 0$
- e) $x + y = y \wedge xy' = x \rightarrow x = 0$
- f) $a + b' = a' + b \rightarrow a = b$
- g) $ba = b \rightarrow a + bc = a$
- h) $x + y = 0 \rightarrow x = 0, y = 0$

6. De un contraejemplo para demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas en un álgebra de Boole:

- a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- b) $x.z = y.z \Rightarrow x = y$
- c) $a.b = a \Rightarrow a.b' = (a.b') + a'$

7. Se sabe que el conjunto $B = \{a, b, c, d\}$ tiene estructura de álgebra de Boole. Las operaciones "+" y "." están definidas por las siguientes tablas, que están incompletas:

+	a	b	c	d	.	a	b	c	d
a	a				a				a
b	b		d		b				b
c	c				c		a		c
d	d				d				d

Teniendo en cuenta las propiedades que se verifican en un álgebra de Boole, complete las tablas y determine el complemento de cada elemento.

8. Determine un circuito combinatorio correspondiente a cada una de las expresiones booleanas siguientes:

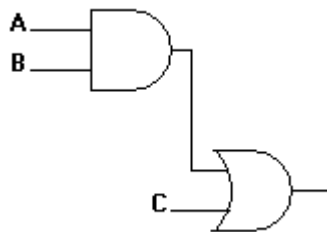
a) $x_1 \cdot (x_2' + x_3)$

b) $(x_1 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3') + x_1$

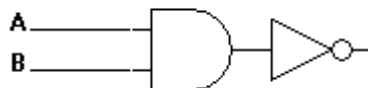
c) $[(x_1 \cdot x_2) + (x_2 \cdot x_3)]'$

9. i) Describa las expresiones booleanas para cada uno de los siguientes casos:

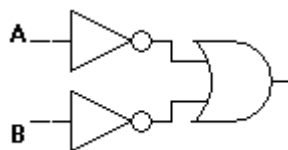
a)



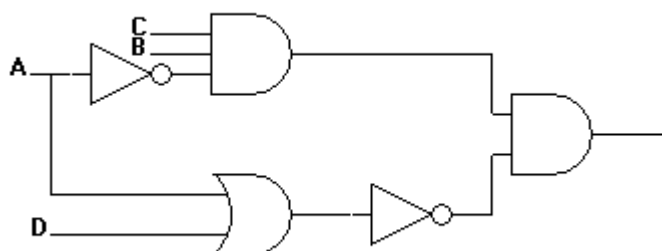
b)



c)



d)



- ii) Realice la tabla lógica correspondiente a los incisos b) y c).
- iii) ¿Es posible obtener un circuito más simple para la expresión obtenida en el inciso d)?

10. Sea $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ un álgebra de Boole. Dada la expresión $x + xyz + x'z' + (x + y)'$, se pide:

- a) Simplificar la expresión utilizando las leyes del álgebra de Boole. Indicar en cada paso la ley utilizada.
- b) Representar la expresión obtenida en el ítem anterior mediante compuertas

11. Dada la siguiente tabla:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- a) Encuentre la expresión booleana que la satisface
- b) Simplifíquela utilizando las propiedades del álgebra de Boole.

12. Se desea realizar una alarma para automóvil para detectar ciertas condiciones no deseables. Para la misma se emplean tres interruptores para indicar el estado en el que se encuentra la puerta del lado del conductor, el encendido y los faros respectivamente. Se quiere diseñar un circuito lógico con estos tres interruptores como entradas, de manera que la alarma se active cuando se presenten cualquiera de las siguientes condiciones:

- Los faros están prendidos mientras el encendido está apagado.
- La puerta está abierta mientras el encendido está prendido.

- a) Plantee una expresión booleana que modelice la situación.
- b) Simplifique la expresión.
- c) Represente el circuito correspondiente.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 1 Simplifique las siguientes expresiones mediante la aplicación de las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

d)
$$[(x' \cdot y) \cdot (x \cdot z)]' \cdot [x + (x \cdot y')] \cdot (x' + y)'$$

$$\begin{aligned}
 [(x'.y).(x.z)]'.[x+(x.y')].(x'+y)' &= [y(x.x')z]'[x+(x.y')].(x'+y)' && \text{por conmutatividad y ley asociativa} \\
 &= [y.0.z]'[x+(x.y')].(x'+y)' && \text{por ley del inverso} \\
 &= 0'.[x+(x.y')].(x'+y)' && \text{por ley de dominación} \\
 &= [x+(x.y')].(x'+y)' && \text{dado que } 1' = 0 \text{ y ley de identidad} \\
 &= x.(x'+y)' && \text{por ley de absorción} \\
 &= x.(x.y') && \text{por ley de De Morgan / doble contradicción} \\
 &= xy' && \text{ley asociativa / ley de idempotencia}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 3: En un álgebra de Boole, ¿existe algún elemento que sea igual a su complemento?

Demostremos que en un álgebra de Boole no existe ningún elemento que sea igual a su inverso utilizando el método del absurdo.

Sea $(B; +; \cdot; ' ; 0; 1)$ un álgebra de Boole. Supongamos que existe un elemento $x \in B$ tal que x es igual a su inverso, es decir, $x = x'$. Entonces tenemos que:

1. $x = x.x = x.x' = 0$, por lo que $x = 0$ (se aplicó la ley de idempotencia y que $x = x'$)
2. $x = x + x = x + x' = 1$, por lo que $x = 1$

Luego, obtenemos que $x = 0 = 1$, lo cual es absurdo dado que, por definición de álgebra de Boole, $0 \neq 1$

Ejercicio 5: Demuestre las siguientes afirmaciones, utilizando las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

e) $x + y = y \wedge xy' = x \Rightarrow x = 0$

La idea de la demostración es la siguiente: suponemos que el antecedente de la implicación es verdadero y a partir de este dato, queremos demostrar que el consecuente también es verdadero

Una posible manera de demostrar la proposición es la siguiente:

$$x = xy' \quad \downarrow \quad = \quad x.(x+y)' \quad \downarrow \quad = \quad x.(x'y') \quad \downarrow \quad = \quad (xx')y' \quad \downarrow \quad = \quad 0$$

Por hipótesis, $x = xy'$

Por hipótesis, $y = x+y$

Ley de De Morgan

asociativa

Ley del inverso/ ley de dominación

Ejercicio 6: De un contraejemplo para demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas en un álgebra de Boole:

a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

Dar un contraejemplo significa, en este caso, mostrar un álgebra de Boole en la que el antecedente de la implicación resulte verdadero y el consecuente falso. Es decir, se tiene que verificar que $x + z = y + z$ pero x tiene que ser distinto de y .

Consideremos A el conjunto dado por $A = \{1, 2, 3\}$ Por el ejercicio 3 sabemos que $(P(A), \cup, \cap, ', \emptyset, A)$ es un álgebra de Boole. Consideremos $X = \{1, 3\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{1, 2\}$. Notemos que todos estos conjuntos pertenecen a $P(A)$. Como en este caso la operación “+” está dada por la unión de conjuntos, tenemos que:

$$- \quad x + z = X \cup Z = \{1, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

$$- \quad y + z = Y \cup Z = \{2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

Por lo tanto, se cumple la hipótesis: $X \cup Z = Y \cup Z$ ($x + z = y + z$) Sin embargo, $x \neq y$ dado que $\{1, 2\} \neq \{2, 3\}$.

Observación: notemos que con este ejercicio estamos viendo que en un álgebra de Boole no se verifica la propiedad cancelativa.