Segundo parcial

Ejercicio 1

En un grupo de 15 personas hay 4 que hablan francés, 7 que hablan inglés y el resto habla portugués. Se quiere formar grupos de 5 personas para enviar a una reunión de la Naciones Unidas en representación del país. ¿Cuántos grupos distintos pueden formarse con la condición de que:

a) haya exactamente tres personas que hablen francés?
b) haya al menos dos personas que hablen portugués?
c) ninguno hable inglés?

Ejercicio 2

a) Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(x^5 + \dfrac{2}{x}\right)^{12}$.

b) Calcular el término independiente en el desarrollo del binomio dado en el ítem a).

Ejercicio 3

Se define en el conjunto de números naturales la relación R dada por:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N} : \; x\,R\,y \;\text{ si y sólo si }\; y = kx\,,\; k \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que R es una relación de orden en $\mathbb{N}$.
b) Considerar la relación anterior en el conjunto A = $\{ n \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq n \leq 9 \}$. Realizar el diagrama de Hasse correspondiente a la relación R. Determinar elementos maximales y minimales

Ejercicio 4

Sea A = $\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 \leq x \leq 7 \}$. En el conjunto A se define la relación R dada por

$$\forall\, x, y \in A : x\,R\,y \;\text{ si y sólo si }\; \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z}$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia
b) Hallar cl (0) ; cl(1) ; cl(3)
c) Determinar la partición que induce en el conjunto A la relación R.

Ejercicio 5

Demostrar utilizando el principio de inducción que la siguiente propiedad se verifica para todo n $\in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 13^n - 2^n \text{ es divisible por } 11$$

Resolución

Ejercicio 1

En un grupo de 15 personas hay 4 que hablan francés, 7 que hablan inglés y el resto habla portugués. Se quiere formar equipos de 5 personas para enviar a una reunión de las Naciones Unidas en representación del país. ¿Cuántos grupos distintos pueden formarse con la condición de que:

a) haya exactamente tres personas que hablen francés?

Dado que tenemos que formar grupos, nos interesan las personas que integran cada uno de ellos y no el orden en que los elegimos. Por lo tanto, vamos a utilizar números combinatorios.
Si en el grupo de 5 personas tiene que haber exactamente 3 que hablen francés, de las cuatro personas que hablan este idioma seleccionamos a tres; luego, de las 11 personas que no hablan francés, elegimos a dos (para completar las 5 que deben integrar el grupo). Por lo tanto, el total de casos es:

$$\binom{4}{3}.\binom{11}{2}$$

De las 4 personas que hablan francés, elegimos a 3.

De las 11 restantes que no hablan francés, elegimos a 2.

b) haya al menos dos personas que hablen portugués?

En este ítem, para no contar casos repetidos, tenemos que considerar tres posibilidades:

- Que en el grupo haya exactamente dos personas que hablen portugués
- Que en el grupo haya exactamente tres personas que hablen portugués.
- Que en el grupo haya exactamente cuatro personas que hablen portugués.

Recordemos que el hecho de que haya por lo menos dos personas que hablen el idioma, significa que dos o más personas del grupo lo hablen. Contemos cuántas posibilidades hay en cada caso:

- Si exactamente dos personas hablan portugués:

$$\binom{4}{2}.\binom{11}{3}$$

De las 4 personas que hablan portugués, elegimos a 2.

De las 11 restantes que no hablan portugués, elegimos a 3.

- Si exactamente tres personas hablan portugués:

$$\binom{4}{3}.\binom{11}{2}$$

De las 4 personas que hablan portugués, elegimos a 3.

De las 11 restantes que no hablan portugués, elegimos a 2.

- Razonando de manera análoga a los casos anteriores, si exactamente cuatro personas hablan portugués hay en total $\binom{4}{4}.\binom{11}{1}$ grupos posibles.

Luego, el total de grupos de 5 integrantes que podemos armar en los que por lo menos dos de ellos hablen portugués son $\binom{4}{2}.\binom{11}{3} + \binom{4}{3}.\binom{11}{2} + \binom{4}{4}.\binom{11}{1} = 1221$ grupos.

c) ninguno hable inglés?

Para asegurarnos que ninguna de las personas del grupo hable inglés, excluimos a las siete personas que hablan este idioma. Seleccionamos los cinco integrantes del grupo considerando sólo las 11 personas que no hablan inglés. El total de grupos distintos que pueden formarse en este caso está dado por $\binom{11}{5}$.

<u>Ejercicio 2</u>

a) Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(x^5 + \frac{2}{x}\right)^{12}$.

El término general en el desarrollo de este binomio es $T_{k+1} = \binom{12}{k}(x^5)^k.\left(\frac{2}{x}\right)^{12-k}$ Para obtener el término de grado 6, debemos trabajar con las potencias de x:

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}(x^5)^k.\left(\frac{2}{x}\right)^{12-k} = \binom{12}{k}x^{5k}.\frac{2^{12-k}}{x^{12-k}} = \binom{12}{k}2^{12-k}\,x^{5k-(12-k)}$$
$$= \binom{12}{k}2^{12-k}\,x^{6k-12}$$

Como nos interesa el término de grado 6, tenemos que 6k - 12 = 6, por lo que k = 3. El coeficiente pedido es $\binom{12}{3}.2^9$

b) Calcular el término independiente en el desarrollo del binomio dado en el ítem a).

El término independiente es aquel en la que la x no aparece: es decir, el exponente de la variable el 0. Teniendo en cuenta la expresión del término general con la que trabajamos en el ítem anterior, en este caso tenemos que pedir que 6k - 12 = 0 por lo que k = 2. En consecuencia, el término pedido es $T_3 = \binom{11}{2}2^{10}$.

<u>Ejercicio 3</u>

Se define en el conjunto de números naturales la relación R dada por:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N}: \ x\,R\,y \ \text{ si y sólo si } \ y = kx \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

a) Probar que R es una relación de orden en $\mathbb{N}$.

Para probar que R es una relación de orden en $\mathbb{N}$, tenemos que ver que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- R es reflexiva si y sólo si $\forall x \in \mathbb{N} : x R x$. En este caso x R x $\leftrightarrow$ x = kx, con k $\in \mathbb{N}$. Esra igualdad es verdadera: basta tomar k = 1

- R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in \mathbb{N} : (x R y \wedge y R x \rightarrow x = y)$. Sean x, y $\in \mathbb{N}$ tales que x R y e y R x. Entonces tenemos que: x R y $\leftrightarrow$ y = k_1x con $k_1 \in \mathbb{N}$

  y R x $\leftrightarrow$ x = k_2y, con $k_2 \in \mathbb{N}$

  Luego, como ambas igualdades se cumplen, tenemos que y = k_1x = $k_1(k_2y)$ = (k_1k_2) y. Para que se cumpla la igualdad, k_1k_2 = 1 y, dado que la única forma de que el producto de dos números naturales sea igual a uno es que ambos números sean uno, tenemos que $k_1 = k_2 = 1$, de donde deducimos que y = x.

- R es transitiva si y sólo si $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$. En este caso, tenemos que:

  x R y $\leftrightarrow$ y = k_1x con $k_1 \in \mathbb{N}$

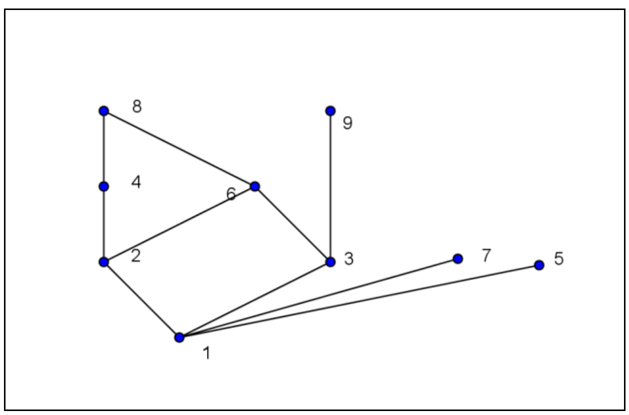
  y R z $\leftrightarrow$ z = k_1y con $k_1 \in \mathbb{N}$

  Por lo tanto, z = k_1y = k_1 k_1x = kx, con k = k_1 k_1 $\in \mathbb{N}$, por lo que x R z.

Por ser reflexiva, antisimétrica y transitiva R es una relación de orden.

b) Considerar la relación anterior en el conjunto A = $\{ n \in \mathbb{N} / 1 \leq n \leq 9 \}$. Realizar el diagrama de Hasse correspondiente a la relación R. Determinar elementos maximales y minimales

Tenemos que A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}: notemos que para todo x en A, 1 R x dado que x = 1x. El diagrama de Hasse nos quedaría de la siguiente manera:



El elemento minimal es {1} y eñ conjunto de los elementos maximales es {8 , 6, 9, 5, 7}.

<u>Ejercicio 4</u>

Sea A = $\{ x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 7 \}$. En el conjunto A se define la relación R dada por

$$\forall x, y \in A: x R y \text{ si y sólo si } \frac{x - y}{3} \in \mathbb{Z}$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia

Para ver que R es una relación de equivalencia, tenemos que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

- R es reflexiva: x R x si y sólo si $\frac{x-x}{3} = 0 \in \mathbb{Z}$, lo cuál es verdadero.
- R es simétrica: sean x, y $\in$ A tales que x R y. Luego, $\frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}$. Multiplicando la expresión por -1 obtenemos que $\frac{-x+y}{3} \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{y-x}{3} \in \mathbb{Z}$ por lo que y R x.
- R es transitiva: sean x, y, z $\in$ A tales que x R y. y R z. Luego:

  x R y si y sólo si $\frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}$

  y R z si y sólo si $\frac{y-z}{3} \in \mathbb{Z}$

  Sumando ambas expresiones (y usando que la suma de dos números enteros es un número entero), obtenemos que $\frac{x-y}{3} + \frac{y-z}{3} \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{x-z}{3} \in \mathbb{Z}$, por lo que x R z

b) Hallar cl (0) ; cl(1) ; cl(3)

cl (0) = $\{ x \in A \;/\; x \text{ R } 0 \} = \left\{ x \in A \;/\; \frac{x-0}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{ 0 , 3 , 6 \}$

cl(1) = $\{ x \in A \;/\; x \text{ R } 1 \} = \left\{ x \in A \;/\; \frac{x-1}{3} \in \mathbb{Z} \right\} = \{ 1, -2 , 4, 7 \}$

Como 3 R 0, cl(3) = cl(0)

c) Determinar la partición que induce en el conjunto A la relación R.

La partición que queda determinada en el conjunto A está dada por las distintas clases de equivalencia. En este caso, la partición que induce la relación R está formada por tres conjuntos: A_1 = {0 ; 3 ; 6} , A_2 = {1 ; -2; 4; 7} , A_3 = {-1 ; 2; 5}

<u>Ejercicio 5</u>

Demostrar utilizando el principio de inducción que la siguiente propiedad se verifica para todo n $\in \mathbb{N}$:

$$P(n) : 13^n - 2^n \text{ es divisible por 11}$$

Sea P(n) : $13^n - 2^n$ es divisible por 11. Por el principio de inducción, tenemos que probar que:

- P(1) es verdadera.
- Si P(n) es verdadera, entonces P(n+1) lo es.

- P(1) es verdadera: en efecto, P(1) = 13 - 2 = 11 que es divisible por 11.
- Supongamos que P(n) es verdadera. Es decir, que $13^n - 2^n$ = 11k, con k $\in \mathbb{Z}$. Veamos que P(n + 1) es verdadera. Es decir, queremos ver que P(n + 1) : $13^{n+1} - 2^{n+1}$ es divisible por 11.

$13^{n+1} - 2^{n+1} = 13^n . 13 - 2^n .2 = 13^n (11+2) - 2^n . 2$ Escribimos $13 = 11 + 2$

$= 11.\, 13^n + 2.\, 13^n - 2^n .\, 2$ Propiedad distributiva

$= 11.\, 13^n + 2.\, (13^n - 2^n)$ Sacamos 2 como factor común

$= 11.\, 3^n + 2.\; 11\, k \;.\; k \in \mathbb{Z}$ Usamos hipótesis inductiva

$= 11.\, (3^n + 2k) = 11\bar{k}$, con $\bar{k} \in \mathbb{Z}$

Luego, por el principio de inducción, demostramos que $\forall\, n \in \mathbb{N} : 13^n - 2^n$ es divisible por 11.