Vectores

1. En la siguiente simulación se muestran vectores equivalentes. Desplazando el punto A o B podrás transformar estos vectores. ¿Cuáles son las características que tienen en común?

2. Decidir si las siguientes magnitudes son escalares o vectoriales:
   a. La posición de un móvil en un instante determinado.
   b. La masa de un cuerpo
   c. La temperatura de una partícula
   d. La fuerza ejercida sobre un objeto para desplazarlo.

3. Vamos a descansar un rato, jugando al Pacman con vectores.

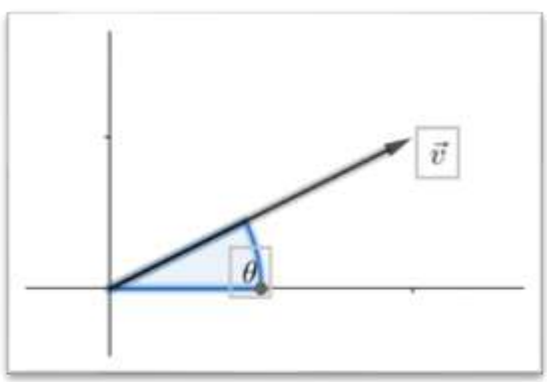
4. Utilizando GeoGebra, representar gráficamente el vector $\vec{v}$= (3, 2). Crear un deslizador llamado "a" para graficar los vectores de la forma $\vec{w} = a.\vec{v}$ ¿Cómo se interpreta geométricamente el producto de un vector por un escalar?

5. Consideremos los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ siendo $O = (0,0)$, P = (2, 5) y Q = (4. 1). ¿Mediante qué operación entre estos vectores podemos obtener el vector $\overrightarrow{PQ}$? ¿Y el vector $\overrightarrow{QP}$?

6. En el siguiente video se explica cómo trasladar un cuadrado en la dirección determinado vector. Trasladar con GeoGebra la siguiente imagen en la dirección del vector $\vec{v} = (2, -4)$

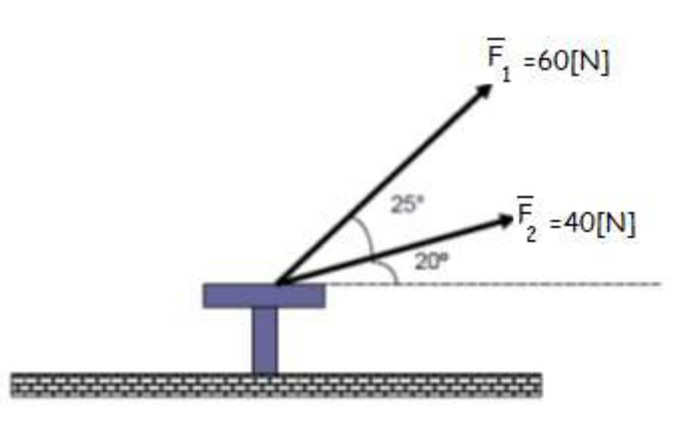
¿Cómo harías si queremos trasladarla en la dirección de un vector cualquiera?

7. Coordenadas polares de un vector. Son las componentes del vector expresadas en términos de θ , ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con el eje x, y $|\vec{v}|$, longitud (módulo o norma) del vector.



Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores en el plano:
   a. $\vec{v}$ tiene norma 3 y $\theta = \frac{\pi}{4}$
   b. $\vec{v}$ tiene norma 2 y $\theta = \frac{\pi}{3}$
   c. $\vec{v}$ tiene norma 1 y $\theta = \frac{4\pi}{3}$

8. Dos fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ actúan sobre un tornillo, tal como se muestra en la siguiente figura (la fuerza está medida en Newton, N). Determinar la magnitud de la fuerza resultante $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.



9. Dados los puntos P= (1, -3), Q = (-3, -1), se pide:

a. Calcular la longitud de los vectores OP, OQ siendo O el origen de coordenadas.

b. Hallar la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$.

c. Hallar la distancia entre P ȳ Q. Comparar con el ítem b.

d. Hallar un vector unitario (versor) que tenga la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{PQ}$.

10. ¿Qué relación hay entre dos vectores si son paralelos? A partir de la siguiente simulación, encontrar un vector paralelo a (1, -1) de longitud 5. ¿Es único?

11. En el siguiente applet se muestran vectores perpendiculares. En todos los casos, ¿a qué número es igual el producto escalar entre los vectores? Encontrar un vector ortogonal a (-1, 3) de longitud dos. ¿Es único?

12. Un cubo tiene vértices (0,0,0), (1,0,0), (0,0,1). Hallar las coordenadas de los cinco vértices restantes. Para ayudarte, podés graficar la figura en GeoGebra

13. Sean los vectores $\vec{u}$= (4, -2, 1), $\vec{v}$ = (3, 1, -5) y $\vec{w}$ = (2, 3, -1)

a. Representarlos gráficamente en Geogebra

b. Obtener el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

c. Hallar $\vec{u} x \vec{v}$, $\vec{u} x \vec{w}$.

d. Obtener todos los vectores ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

14. Aplicaciones del producto cruz o producto vectorial

a. Calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{u} = (-1,1,-3)$ y $\vec{v} = (4,2,-4)$ como lados adyacentes.
b. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A = (2,0,0)$, $B = (2,3,0)$, $C = (1,2,4)$.

15. Hallar el valor de k ∈ R de modo tal que se verifiquen las condiciones pedidas en cada caso.

a. Los vectores (2, -1, 3) y ($\frac{k}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$) son paralelos.
b. Los vectores (1, 2. 3) y (k, 1, 5) son ortogonales.

Ecuación de la recta y del plano

16. Escribir una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en R^2. Representar gráficamente cada recta.

i. x + 2y = 4
ii. y = -x + 3
iii. L es la recta que pasa por los puntos (1, $\frac{2}{3}$) y (-2, $-\frac{1}{3}$).
iv. L es la recta que pasa por el origen de coordenadas, paralela a la recta x – 3y = 1.

17. Obtener en cada caso las ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de la recta L en R^3 que verifica las siguientes condiciones. Representar gráficamente.

i. L es la recta que pasa por el punto (1, 3, -1) y tiene dirección (0, 1, 2).
ii. L es la recta que pasa por los puntos (1, 2, -1) y (2, 1, 1).
iii. L es la recta que pasa por los puntos (3, 2, -1) y (2, -2, 5).
iv. L es una recta ortogonal a $\vec{X} = (0,0,1) + t(-1,2,-2), t \in R$, y pasa por el punto (-3, 2, 1). ¿Es única?

18. Posiciones relativas entre rectas: Decidir si las siguientes rectas son concurrentes, coincidentes, paralelas o alabeadas. Representar gráficamente.

i. $L_1: \vec{X}$ = (3, 1, 4) + t(-2, -3, 1) $t \in R$; $L_2: \vec{X}$ = (6, -1, 2) + α(-5, -1, 3) , $\alpha \in R$.
ii. $L_1: \vec{X}$ = (0, -1, 2) + t(1, 3, 1); $L_2: \vec{X}$ = (1, 1, 2), + α (2, -1, 0), $\alpha \in R$
iii. $L_1: \vec{X}$ = (1, 0, 0) + t(1, 0, -1) ; $L_2: \vec{X}$ = (3, 1, 1) + α (-2, 0, 2) $\alpha \in R$
iv. $L_1: x + 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-3}$; $L_2.: \vec{X}$ = (-1, -3, -1) + t(2, 4, -6) , t∈R .

19. En la siguiente figura señala:

- Dos rectas alabeadas
- Dos rectas concurrentes
- Dos planos que no se intersequen
- Dos planos que se corten en una recta

20. Dado el plano de ecuación $\pi: 3x + y + 2z = 1$

a. Hallar dos puntos distintos que pertenezcan a π.
b. Hallar un versor normal a π.
c. Hallar la intersección del plano π con cada uno de los ejes coordenados.
d. Hallar la intersección del plano π con cada uno de los planos coordenados.
e. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π que pase por el punto (1, 0, -1).
f. Hallar la ecuación de la recta normal a π que pasa por el punto (1, -1, 0).

21.

a. Hallar, en cada uno de los siguientes casos, las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano normal al vector $\bar{n}$ que pasa por el punto P
   i. $\vec{n}$ = (-1, 3, -6); P = (5, 3, -2)
   ii. $\vec{n}$ = (0, -2, 1); P = (2, -1, 4)

b. Hallar las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano que contiene a los puntos P, Q y R si:
   i. P = (1, 0, 0); Q = (0, 1, 1); R = (-1, 0, 2)
   ii. P = (2, -1, 3); Q = (3, 3, 2); R = (-1, -2, 0)

   Con GeoGebra, representar gráficamente los planos.

c. Hallar la ecuación del plano π que contiene al eje z y al eje x.

d. Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos (1, -2, 4) y (1, 1, 8) y es normal al plano de ecuación $x - 2y - 2z + 7 = 0$.

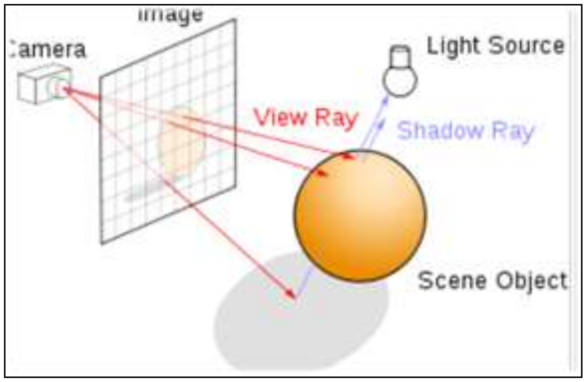
e. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P = (0, 3, -4) y contiene a la recta de ecuación $\vec{X} = (2, -3, 1) + t(2, -2, 1), t \in R$.

f. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{4}$ que pasa por el punto Q = (-1, 3, 2).

22. Intersección entre planos

a. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: 2x - y + z = 1$ y $\pi_2: -x - y + 2z - 2 = 0$.
b. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: 2x - y + 3z = 5$ y $\pi_2: x + 3y - z = 2$.
c. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: -x + y + z = 1$ y $\pi_2: -5x + 5y + 5z = 3$.

23. El término ray-casting hace referencia al uso de la intersección rayo – superficie para solucionar problemas relacionados a gráficos por ordenador y geometría computacional. La idea detrás de ray-casting es trazar rayos desde el observador, uno por pixel, y encontrar el objeto más cercano que interrumpe la trayectoria del mismo:



Modelizaremos la situación: supongamos que el plano de la figura tiene ecuación $2x+y=3$. La ecuación que representa a uno de los rayos que parten desde la cámara es $\vec{X}=\mathrm{t}(1,-1,-1)+(1,0,-2), \mathrm{t}\in \mathrm{R}$. Hallar el punto de intersección entre la recta y el plano. Dados una recta y un plano, ¿siempre hay intersección? ¿Qué casos pueden darse?

24. Sea π el plano que pasa por los puntos P = (1, 0, 2); Q = (0, -1, 3) y R = (-1, 5, 2). Sea B = (3, 4, 5) y sea r la recta perpendicular al plano π que pasa por B.

a. Determinar las ecuaciones del plano π y de la recta r.
b. Determinar las coordenadas del punto M, intersección de la recta r con el plano π.

25. Dados los puntos P_0= (4, -1, 2), P_1= (k, 0, -1) y la recta r_1: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$

a. Hallar la ecuación del plano π determinado por P_0 y r_1.
b. Obtener, si es posible, el valor de k $\in$R para que el punto P_1 pertenezca a π.

Algunos ejercicios resueltos

Enunciado:

Hallar las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano que contiene a los puntos P_0 , P_1 y P_2 si

$$\begin{cases} P_o = (-6; 6; 2) \\ P_1 = (-2; 3; 1) \\ P_2 = (4; 0; -1) \end{cases}$$

Solución:

"Tres puntos no alineados determinan un plano al cual pertenecen" expresa uno de los postulados de Euclides. Al plano que debemos determinar lo denominamos π .

Tomando los puntos de a pares formamos dos vectores incluidos en el plano:

$P_0P_1 = \vec{a}$ A este vector formado por los puntos P_0 y P_1 lo denominamos $\vec{a}$ y se obtiene restando extremo menos origen.

$$\vec{a} = P_1 - P_0$$
$$\vec{a} = (-2; 3; 1) - (-6; 6; 2)$$
$$\vec{a} = (4; -3; -1)$$

De la misma forma se determina el vector $\vec{b}$

$$\vec{b} = P_2 - P_0$$
$$\vec{b} = (4; 0; -1) - (-6; 6; 2)$$
$$\vec{b} = (10; -6; -3)$$

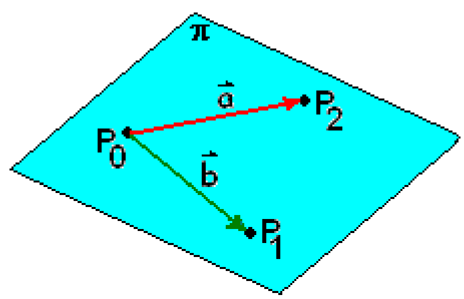


figura de análisis

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos pues sus componentes no forman proporción, esto refuerza la idea de que los puntos no están alineados y garantiza que podamos obtener las ecuaciones del plano π .

Estos vectores son generadores del plano. Tomando uno de los tres puntos dados como dato, por ejemplo, $P_0 = (-6; 6; 2)$ podemos armar la ***ecuación vectorial del plano***:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + q.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + q.\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{con } t, q \in R}$$

con t y q reales

Desarrollando el segundo miembro de esta expresión, es decir, multiplicando los escalares t y q por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sumando los vectores, se obtienen las ***ecuaciones paramétricas del plano***:

$$\boxed{\begin{cases} x = -6 + 4.t + 10.q \\ y = 6 - 3.t - 6.q \qquad \text{con } t, q \in R \\ z = 2 - t - 3.q \end{cases}}$$

Volviendo a la figura de análisis, al realizar el producto vectorial entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se obtiene un vector $\vec{n}$ perpendicular a ambos y en consecuencia también es perpendicular al plano donde están incluidos estos vectores. Esto se puede verificar aplicando la condición de perpendicularidad entre vectores, el producto escalar debe dar cero.

$\vec{a} = (4; -3; -1)$

$\vec{b} = (10; -6; -3)$

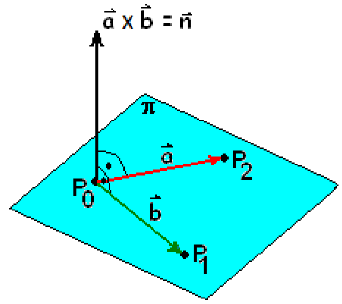


figura de análisis

El vector normal es $\vec{n} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 10 & -6 & -3 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{n} = 3.\breve{i} + 2.\breve{j} + 6.\breve{k}$

Verificamos si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{n}$:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ \vec{b}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.3 - 3.2 - 1.6 = 0 \text{ verifica } \vec{a} \perp \vec{n} \\ 10.3 - 6.2 - 3.6 = 0 \text{ verifica } \vec{b} \perp \vec{n} \end{cases}$$

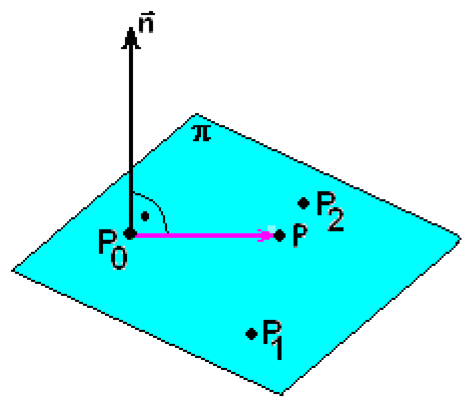


figura de análisis

Elegimos un punto P = (x;y;z) genérico del plano. Con él y el punto P_0 formamos el vector del plano $\overrightarrow{P_0P}$ que como todo vector del plano es perpendicular al vector normal $\vec{n}$.

Entonces por la condición de perpendicularidad se verifica que:

$\vec{n}.\overrightarrow{P_0P} = 0$ ***Ecuación vectorial normal del plano***

$(3; 2; 6).(x + 6; y - 6; z - 2) = 0$

$3.(x + 6) + 2.(y - 6) + 6.(z - 2) = 0$

$3x + 18 + 2y - 12 + 6z - 12 = 0$

$$\boxed{3x + 2y + 6z - 6 = 0}$$

Ecuación general del plano

Como en este caso el plano no pasa por el origen de coordenadas ya que el (0; 0; 0) no satisface la ecuación se puede obtener la expresión segmentaria del plano:

$$3x + 2y + 6z - 6 = 0$$
$$3x + 2y + 6.z = 6$$

Dividimos miembro a miembro por 6

$$\frac{3x + 2y + 6.z}{6} = \frac{6}{6}$$

Distribuimos el denominador:

$$\frac{3x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{6.z}{6} = 1$$

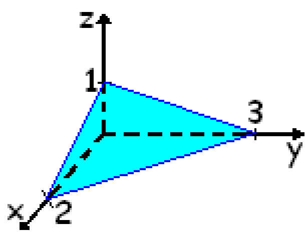
Simplificando:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$ ***Ecuación segmentaria del plano***

Esta ecuación resulta útil para graficar al plano. Anulando de a dos a las variables obtenemos el punto de intersección entre el plano y el eje de la variable restante:

Si x = 0 y = 0 z = 1
Si x = 0 z = 0 y = 3
Si y = 0 z = 0 x = 2

Estos valores coinciden con los denominadores respectivos de la ecuación.



Tarea: verificar que la ecuación obtenida es correcta, es decir, que el plano obtenido pasa por los puntos indicados.

Enunciado:

21-e. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P = (0, 3, -4) y contiene a la recta de ecuación

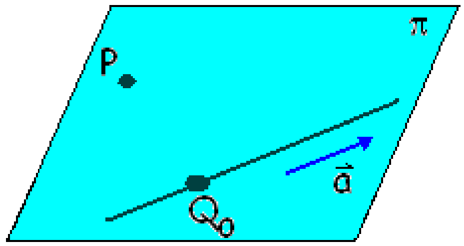
X = (2, -3, 1) + t(2, -2, 1), $t \in R$

Solución:

De la ecuación de la recta podemos leer un punto de la misma y un vector director

$$X = \underbrace{(2;-3;1)}_{\text{Punto de la recta } Q_0} + t.\underbrace{(2;-2;1)}_{\text{Vector asociado } \vec{a}} \quad \text{con } t \in R$$

Como la recta está contenida en el plano, el vector asociado es un vector generador del plano. El punto forman parte del plano



Con los puntos Q_0 de la recta y P del plano formamos otro vector $\overrightarrow{Q_0P}$, generador del plano.

$\overrightarrow{Q_0P} = P - Q_0 = (0;3;-4)-(2;-3;\ 1) \ \rightarrow \overrightarrow{Q_0P} = (-2;\ 6;-5)$ lo llamamos $\vec{b}$

Con los datos obtenidos hasta ahora:

Los vectores $\vec{a} = (2;-2;1)$ y $\vec{b} = (-2;6;-5)$ y el punto P = (0, 3, -4) podemos armar la ecuación vectorial del plano

$$\pi \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \text{con t y q reales}$$

Como el enunciado no especifica una ecuación particular del plano, podríamos tomar a la anterior por respuesta. Sin embargo, en general, se expresa al plano con su ecuación general. Para esto necesitamos un punto, que lo tenemos, es P, y un vector normal al plano que lo calculamos con el producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4.\breve{i} + 8.\breve{j} + 8.\breve{k}$ este vector es perpendicular al plano π, pero cualquier vector que sea múltiplo de él (paralelo) podemos usarlo como vector normal, por ejemplo a $\vec{n} = (1;2;2)$

Reemplazamos en la ecuación general del plano: $n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$

$$x + 2.y + 2.z + k = 0$$

Como el punto P = (0, 3, -4) pertenece al plano

$$1.0 + 2.3 + 2.(-4) + k = 0$$

Despejamos k:

$$k = 2$$

Reemplazamos en la ecuación el valor de k:

$$\pi \rightarrow x + 2.y + 2.z + 2 = 0$$

Respuesta: el plano buscado es $\boxed{\pi \rightarrow x + 2.y + 2.z + 2 = 0}$

Enunciado:

21-f. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-4}{4}$ y que pasa por el punto Q = (-1, 3, 2).

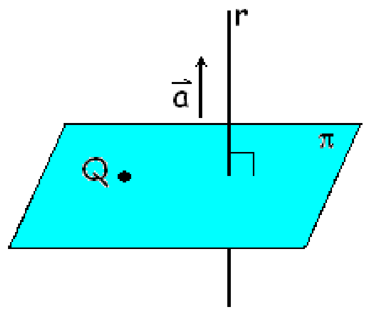
Solución:

De la ecuación de la recta podemos leer un punto de la misma y un vector asociado o vector director

$$\frac{x-1}{\underbrace{2}}=\frac{y+6}{\underbrace{-1}}=\frac{z-4}{\underbrace{4}}$$

Vector director
$\vec{a}=(2;-1;4)$

Un punto perteneciente a la recta es P = (1; -6 ; 4).
La recta es perpendicular al plano, por lo que su vector asociado también lo es y lo usamos como vector normal al plano



Con el vector normal $\vec{a}=\vec{n}=(2;-1;4)$, armamos la ecuación general del plano: $n_1x+n_2y+n_3z+k=0$

Reemplazando:

$$2.x-y+4.z+k=0$$

Como el punto Q = (-1, 3, 2) pertenece al plano

$$2.(-1)-3+4.2+k=0$$

Despejando k:

$$k=-3$$

Reemplazamos en la ecuación el valor de k:

$$\pi \rightarrow 2x-y+4z-3=0$$

Respuesta: La ecuación del plano buscado es: $\boxed{\pi \rightarrow 2x-y+4z-3=0}$

Enunciado:

22. b. Hallar, si existe, la intersección entre los planos π_1: 2x – y + 3z = 5 y π_2: x + 3y –z = 2.

Solución:

Si los planos se cortan pueden suceder dos cosas: una es que los planos sean coincidentes, y la otra es que se intersequen en una recta. La forma de averiguarlo es resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde el sistema nunca puede dar compatible determinado (es imposible que dos planos que se corten den por resultado un único punto). Además, al aplicar el teorema de clasificación de los sistemas a través del rango, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada (como máximo 2) no pueden valer igual al número de incógnitas (3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) F_1\text{-}2.\,F_2 \rightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) -\tfrac{1}{7}\,F_1 \rightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$F_2\text{-}3.F_1 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \end{array}\right)$$

Volviendo a las variables: $\begin{cases} y-\frac{5}{7}z=-\frac{1}{7} \\ x+\frac{8}{7}z=\frac{17}{7} \end{cases}$ despejando: $\begin{cases} y=-\frac{1}{7}+\frac{5}{7}z \\ x=\frac{17}{7}-\frac{8}{7}z \end{cases}$

Armamos el conjunto solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7}-\frac{8}{7}z \\ -\frac{1}{7}+\frac{5}{7}z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{7}z \\ \frac{5}{7}z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{7}.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Llamamos a $t=\frac{z}{7}$ y queda: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t\in R$, que es la ecuación vectorial de la recta resultado de la intersección de los dos planos **π_1 y π_2**

Respuesta: **$\pi_1 \cap \pi_2$=** $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{, con } t \in R \right\}$