(Álgebra de Boole

Operación:

En un conjunto B, una operación * es **binaria** y **cerrada** si se requiere dos elementos de B para realizarla y el resultado es también un elemento de B.

Por ejemplo, si en el conjunto de números naturales consideramos la operación suma, se trata de una operación binaria y cerrada: al sumar dos números naturales, obtenemos otro natural. No sucede lo mismo con la operación resta en el mismo conjunto: 1-2=-1 no es un numero natural.

En un conjunto B una operación ‘ es **unitaria** (**unaria**) y cerrada si se requiere de un elemento de B para realizarla y el resultado es también un elemento de B.

En el conjunto de números enteros, definimos a’ = -a (la operación que para cada número natural nos devuelve su opuesto) es una operación unaria.

Definición axiomática de álgebra de Boole:

Un álgebra booleana es todo sistema formado por un conjunto A en el que hay por al menos dos elementos distintos llamados “0” y “1” , dos operaciones binarias definidas en dicho conjunto, llamadas “suma lógica” y “producto lógico” y una operación unitaria llamada “complementación”, tal que se verifican los siguientes axiomas:

1) Leye conmutativas

$$\forall a,b \in A: \quad a+b=b+a$$
$$a.b=b.a$$

2) Leyes distributivas

$$\forall a,b,c \in A: \quad a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$$
$$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$$

3) Leyes de neutro o identidad

$$\forall a \in A: \quad a+0=a$$
$$a.1=a$$

4) Leyes del inverso

$$\forall a \in A \quad \exists a' \in A: \quad a+a'=1$$
$$a.a'=0$$

Todo conjunto $(A,+,\,.\,,',0,1)$ que cumple estos axiomas es un Álgebra de Boole.

Ejemplos:

1) A ={conjunto de todos las proposiciones}

“0” → F_0
“1” → T_0
“+” → disyunción
“.” → conjunción
“ ‘ ” → negación
$\Rightarrow$ $(A,\vee,\wedge,\neg,F_0,T_0)$ es un álgebra de Boole (considerando ⇔en lugar de =)

2) Sea U un conjunto. Luego, $(P(U),\cup,\cap,',\varnothing,U)$ es un álgebra de Boole.
3) Sea A ={0, 1}. Definimos en A las siguientes operaciones:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

x	x´
0	1
1	0

La sextúpla (A, +, ., ´, 0, 1) tiene estructura de álgebra de Boole.

Notemos que el álgebra de Boole es una estructura más general de las que estudiamos hasta ahora (proposiciones, conjuntos). Así como en lo referente a proposiciones vimos las leyes lógicas y en lo vinculado a conjuntos las leyes de la teoría de conjuntos, en un álgebra de Boole se verifican ciertas leyes (que son una generalización de las ya estudiadas)

<u>Leyes del álgebra de Boole</u>

Sea $(A,+,\,.\,,',0,1)$ un álgebra de Boole y sean $a,b,c\in A$ entonces se verifica:

1. Leyes de idempotencia
$$a+a=a$$
$$a.a=a$$
2. Leyes de absorción
$$a+(a.b)=a$$
$$a.(a+b)=a$$
3. Leyes de doble contradicción
$$(a')'=a$$
4. Leyes de De Morgan
$$(a+b)'=a'.b'$$
$$(a.b)'=a'+b'$$
5. Leyes asociativas
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a.b).c=a.(b.c)$$
6. Leyes de dominación

$$a+1=1$$
$$a.0=0$$

7. Leyes de complemento

$$0'=1$$
$$1'=0$$

La tabla con las leyes se encuentra disponible en Web Campus.

Demostraremos la ley de idempotencia, utilizando sólo las leyes que definen a un álgebra de Boole:

- $a+a=a$

a = a + 0 por identidad
= a + a.a' por inverso
=(a + a)(a + a') por distributiva
= (a+a).1 por inverso
= a+ a por identidad

Luego, a + a = a

Enunciado Dual

Si en un enunciado de un axioma o teorema del álgebra de Boole se permutan las operaciones suma y producto lógico y los elementos 0 y 1 se obtiene el enunciado de otro axioma o teorema llamado dual del anterior.

Principio de Dualidad

Si un enunciado es válido en un álgebra de Boole entonces su dual también lo será.

Ejemplo:

$x+\left[x.\left(y+1\right)\right]=x$ entonces su dual es $x.\left[x+\left(y.0\right)\right]=x$

Vamos a hacer algunos ejercicios ☺

Ejercicio I Dada la siguiente expresión definida en un álgebra de Boole, simplificarla utilizando propiedades: [x(x + y) + z]'.(z'.x)'

Proponemos una manera de realizar la simplificación. No es la única.

[x(x + y) + z]'.(z'.x)' = [x + z]'(z + x') absorción/De Morgan/Doble complementación
= (x'.z')(z + x') De Morgan
=(x'z')z + (x'z')x' distributiva

= x’(zz’) + z’(x’x’) Asociativa/ Conmutativa
= x’0 + z’x’ inverso/idemptencia
= 0 + zx’ dominación
= zx’ neutro

Ejercicio II Sea (B, +,., ‘, 0, 1) un álgebra de Boole. Demostrar que

$$\forall\, x, y \in B: x + y = 0 \leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

Tenemos que demostrar una doble implicación:

→) Sabemos que x + y = 0. Veamos que x = 0

x = x + 0 por identidad

_= x + (x + y) por hipótesis, x + y =0

= (x + x) + y por asociativa

= x + y por idempotencia

=0 por hipótesis

Luego, x = 0. Como 0 = x + y = 0+y, se sigue que y = 0

←) Es trivial. Si x =0, y =0 se tiene que x + y = 0 + 0 =0

Observación: el enunciado dual de esta propiedad afirma que x.y = 1 si y sólo si x =1, y=10

Circuitos combinatorios

Sea el álgebra booleana con $S=\{0;1\}$ y tal que

$$x' = \begin{cases} 0 & si \quad x=1 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$$

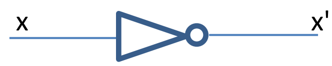
$$x_1.x_2 = \begin{cases} 1 & si \quad x_1=x_2=1 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$x_1+x_2 = \begin{cases} 0 & si \quad x_1=x_2=0 \\ 1 & si\ no \end{cases}$$

Un circuito combinatorio es un caso particular de los circuitos eléctricos, en el que las salidas dependen directamente del valor de entrada y no pueden almacenar ningún tipo de información, sólo realizan transformaciones. Se construyen utilizando dispositivos llamados compuertas.

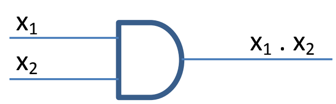
<u>Compuerta NOT</u>

Recibe como entrada x y devuelve como salida x'



<u>Compuerta AND</u>

Recibe como entradas x_1 y x_2 y devuelve como salida $x_1 . x_2$

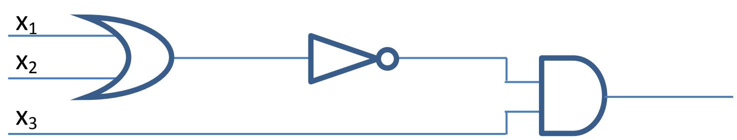


<u>Compuerta OR</u>

Recibe como entradas x_1 y x_2 y devuelve como salida $x_1 + x_2$

<u>Ejemplo</u>

Dado el circuito, escribir la expresión booleana que la representa



En este caso, la expresión booleana que representa el circuito es $(x_1 + x_2)'. X_3$

<u>Ejercicio</u>

Determinar un circuito combinatorio correspondiente a la siguiente tabla lógica

x1	x2	f(x1,x2)
1	1	1

1	0	0
0	1	1
0	0	0

Recordemos que el producto devuelve 1 sólo cuando ambos son 1
Entonces, el primer renglón se puede pensar como x1.x2
Y el tercero, como x1'.x2
Y como queremos ambos casos, los sumo.
La expresión booleana asociada con la tabla es x1.x2 + x1'.x2

Decimos que la expresión está dada como suma de productos

<u>Ejercicio</u>
Determinar un circuito combinatorio correspondiente a la siguiente tabla lógica

x1	x2	x3	f(x1,x2,x3)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

<u>Observación</u>: Si identificamos los 0 que devuelve la tabla lógica, recordando que la suma devuelve 0 cuando todos los términos son 0, obtenemos en el ejercicio 1: $\left(x_1'+x_2\right).\left(x_1+x_2\right)$
A esta expresión la llamamos: expresión como producto de sumas