Unidad 4

Factorial

El factorial de un número es una operación que se realiza sobre lo números naturales y el cero.

Se nota con un signo de admiración: n!

Y se define de la siguiente forma:

Definición: $\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n.(n-1)! \qquad \forall n \in N \end{cases}$

Entendemos con esta notación que el factorial de cero y el factorial de uno dan uno, porque así están definidos. Pero a partir del número uno, los demás factoriales se calculan respecto del anterior

Ejemplo: Veamos qué pasa si n=5

5! = 5 . 4! (usamos el tercer renglón de la definición, pero ahora aparece 4!, así que volvemos a aplicar la definición al factorial de 4)

= 5 . 4 . 3! (ahora aparece el factorial de 3, así que volvemos a aplicar la definición)

= 5 . 4 . 3 . 2! (una vez más, aplicamos la definición)

= 5 . 4 . 3 . 2 . 1! (ahora usamos el segundo renglón de la definición)

= 5 . 4 . 3 . 2 . 1 =120

En conclusión, podríamos decir que el factorial de un número equivale a resolver el producto entre dicho número y todos sus anteriores.

Propiedad:

$$n! = n.(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

Otro ejemplo: 8!= 8 .7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320

Número Combinatorio

Definición: Llamamos número combinatorio a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ con $n \geq k$

Ejemplo:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{5040}{120.2} = \frac{5040}{240} = 21$$

Más adelante daremos una aplicación de este "número combinatorio".
Veamos primero unas propiedades:

Propiedades

1) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$
2) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$
3) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1$
4) $\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1-n)!n!} = n+1$
5) Los números combinatorios complementarios son iguales:
   $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Por ejemplo: $\binom{11}{2} = \binom{11}{9}$
6) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Las últimas dos propiedades son un poco complicadas de entender, para eso, utilizaremos un conocido truco llamado "Triángulo de Pascal"

Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{c}
1 \quad n=0 \\
1 \quad 1 \quad n=1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \quad n=2 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad n=3 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad n=4 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \quad n=5
\end{array}$$

- Cada fila se asocia a un número "n"
- Cada fila tiene un elemento más que la anterior
- Para armar una fila se comienza con un 1, y los siguientes números son el resultado de la suma de los números de la fila de arriba.
- Se puede seguir añadiendo filas infinitamente

Se puede observar que en cada fila aparecen los combinatorios “n”.
Por lo que otra interpretación del triángulo de Pascal sería la siguiente:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

Por lo tanto $\binom{n}{k}$ es lo que hay en la n-ésima fila, en el k-ésimo lugar

Esta relación entre los números combinatorios y el triangúlo de Pascal hace que sea mucho más fácil calcular números combinatorios

En la calculadora, para calcular, por ejemplo, el número combinatorio $\binom{5}{2}$ se utiliza la tecla nCr escribiendo 5C2

Binomio de Newton

Recordemos algunos resultados:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Podemos ver que los coeficientes de los términos del desarrollo de las potencias de un binomio son los resultados de los números combinatorios. Y también podemos ver que los exponentes del primer término van disminuyendo, mientas que los exponentes del segundo término van aumentando.
En general, vale:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Y a esta expresión la llamamos Binomio de Newton

Características:

1) Posee n+1 términos
2) La suma de los exponentes de "a" y "b", en cada término, es "n"
3) Los exponentes de "a" decrecen en cada término una unidad, hasta llegar a 0. Mientras que los exponentes de "b" crecen en cada término, una unidad, hasta llegar a "n"
4) Los coeficientes equidistantes son iguales
5) El término (k+1)-ésimo viene dado por la siguiente fórmula: $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Veamos cómo utilizar estos conceptos en los ejercicios de la práctica.

Ejercicios

1) Desarrollar $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^5$

Resolución

En un binomio de Newton de la forma $(a+b)^n$ es importante reconocer los valores de a, b, n

En este ejemplo: $a = \frac{2}{x}$ $\quad b = -x^2$ $\quad n = 5$

Usamos la fórmula del desarrollo:

$$\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^5 (-x^2)^0 + \binom{5}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^4 (-x^2)^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^3 (-x^2)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^2 (-x^2)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^1 (-x^2)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{x}\right)^0 (-x^2)^5$$

$$= 1 \cdot \frac{32}{x^5} \cdot 1 + 5 \cdot \frac{16}{x^4} \cdot (-x^2) + 10 \cdot \frac{8}{x^3} \cdot x^4 + 10 \cdot \frac{4}{x^2} \cdot (-x^6) + 5 \cdot \frac{2}{x} \cdot x^8 + 1 \,.\, 1 \,.\, (-x^{10})$$

$$= \frac{32}{x^5} - \frac{80}{x^2} + 80x - 40x^4 + 10x^7 - x^{10}$$

2) Calcular T_6 en el desarrollo de $\left(\dfrac{m^2}{3}+2m\right)^9$

<u>Resolución</u>

Para calcular sólo un término, usaremos la fórmula anterior $T_{k+1}=\dbinom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Nuevamente, observemos los valores de a,b,n,k

$a=\dfrac{m^2}{3}$ $\quad b=2m \quad n=9 \quad k=5$ (puesto que piden el término 6, entonces usamos un número menos para el valor de "k")

Reemplazando en la fórmula, queda:

$T_{5+1}=\dbinom{9}{5}\left(\dfrac{m^2}{3}\right)^{9-5}\cdot(2m)^5$ y lo desarrollamos

$$\begin{aligned}T_6&=126\cdot\left(\frac{m^2}{3}\right)^4\cdot(2m)^5\\&=126\cdot\frac{m^8}{81}\cdot32\cdot m^5\\&=\frac{448}{9}\cdot m^{13}\end{aligned}$$

3) Hallar el coeficiente de x^{-10} en el desarrollo de $\left(2x^2-\dfrac{3}{x^2}\right)^5$

<u>Resolución</u>

En este ejercicio la incógnita es el coeficiente numérico de un término del desarrollo del binomio $\left(2x^2-\dfrac{3}{x^2}\right)^5$ cuyo grado es 4.

Ojo! Eso no significa que el término sea el cuarto, es más no sabemos a qué termino nos referimos, en otras palabras una incógnita sería el valor de "k".

Veamos qué datos tenemos:

$a=2x^2 \quad b=-\dfrac{3}{x^2} \quad n=5 \quad k=?$

Reemplacemos los datos que tenemos en la fórmula del término k-ésimo:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}=\binom{5}{k}\left(2x^{2}\right)^{5-k}.\left(-\frac{3}{x^{2}}\right)^{k}$$ distribuimos los exponentes

$$=\binom{5}{k}2^{5-k}\left(x^{2}\right)^{5-k}\frac{\left(-3\right)^{k}}{\left(x^{2}\right)^{k}}$$ aplicamos las propiedades de la potencia

$$=\binom{5}{k}2^{5-k}.x^{10-2k}.\frac{\left(-3\right)^{k}}{x^{2k}}$$ juntamos los coeficientes numéricos entre sí

y las variables entre sí

$$=\binom{5}{k}2^{5-k}.\left(-3\right)^{k}.\frac{x^{10-2k}}{x^{2k}}$$ aplicamos propiedades de las potencias

$$=\binom{5}{k}2^{5-k}.\left(-3\right)^{k}.x^{10-2k-2k}$$ resolvemos la cuenta del exponente de la variable

$$=\binom{5}{k}2^{5-k}.\left(-3\right)^{k}.x^{10-4k}$$ (*)

Esta expresión es la del término k-ésimo.

Como nosotros buscamos el término con x^{-10} tiene que suceder que el exponente 10-4k sea igual a -10. Planteeamos esa ecuación y la resolvemos:

$$10-4k=-10$$
$$10+10=4k$$
$$20=4k$$
$$5=k$$

Ahora que sabemos cuál es el valor de “k” reemplazamos en (*)
Para averiguar el término

$$T_{k+1}=\binom{5}{k}2^{5-k}.(-3)^k.x^{10-4k} \quad \Rightarrow \quad T_{5+1}=\binom{5}{5}2^{5-5}.(-3)^5.x^{10-4.5}$$

$$\Rightarrow \quad T_6 = 1.2^0 \ .(-243).x^{-10}$$

$$\Rightarrow \quad T_6 = (-243).x^{-10}$$

Por lo tanto, la respuesta es sólo el coeficiente: -243

4) Hallar el o los término/s central/es del desarrollo de $\left(xy^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$

<u>Resolución</u>

Observemos que en el desarrollo completo del binomio de Newton propuesto hay 12 términos (dado que "k" toma todos los valores entre 0 y 11).

Por lo tanto, el desarrollo sería algo así:

$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6 \qquad T_7 \quad T_8 \quad T_9 \quad T_{10} \quad T_{11} \quad T_{12}$

Términos centrales

k=5 k=6

Entonces hay que calcular dos términos, usando la fórmula del término k-ésimo

A continuación están los resultados, dejamos al lector las cuentas:

$T_6 = 462.(-3^5).x.y^{12}$ $\qquad$ $T_7 = 462.3^6.x^{-1}.y^{10}$

5) Hallar "n" para que el T_9 del desarrollo de $(2a-a^2)^n$ sea de grado 18

<u>Resolución</u>

En este ejercicio los datos son: $a=2a \quad b=-a^2 \qquad n=? \qquad k=8$

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{8}(2a)^{n-8}(-a^2)^8$$

$$\Rightarrow T_9=\binom{n}{8}2^{n-8}a^{n-8}a^{16}=\binom{n}{8}2^{n-8}a^{n+8}$$

Para que el término sea de grado 18, debe suceder que n+8=18

Despejando "n", obtenemos que n=10

Problemas de Conteo

Principio de la multiplicación

Si una actividad se descompone en dos etapas, y existen “m” formas de ejecutar la primera etapa, y por cada una de ellas existen “n” formas de ejecutar la segunda etapa, entonces, el número de formas en que puede ejecutarse la actividad propuesta es m.n

Problema 1:

Suponga que una clave de homebanking debe constar de 3 letras distintas seguidas de 3 dígitos distintos de los cuales el primero no debe ser el 0.

¿Cuántas claves distintas pueden generarse?

Resolución: Esta actividad se puede descomponer en 6 etapas: elegir las 3 letras, y luego elegir los 3 dígitos.

1° etapa: 26 posibilidades (por las 26 letras)
2° etapa: 26 posibilidades (por las 26 letras)
3° etapa: 26 posibilidades (por las 26 letras)
4° etapa: 9 posibilidades (por los números del 1 al 9)
5° etapa: 10 posibilidades (por los números del 0 al 9)
6° etapa: 10 posibilidades (por los números del 0 al 9)

Casos totales: 26.26.26.9.10.10= 15.818.400

Problema 2:

¿Cuántas palabras de 4 letras, aún sin sentido, se pueden formar usando las letras ABCDE si todas las letras deben ser distintas y la cadena comienza con la letra A y termina con la letra E?

Resolución:

Si la palabra tiene 5 letras, la actividad se puede dividir en 5 etapas: la elección de qué letra pongo en cada lugar

_ _ _ _ _

Ahí sólo puede poner la letra E

Acá podemos ordenar cualesquiera de las 3 opciones restantes, pero sin repetirlas, o sea que para el primer lugar hay 3 posibilidades, para el segundo 2 y para el último hay sólo una.

ahí sólo puedo poner la letra A

Casos totales: 1.3.2.1.1=6

Principio de la suma

Si un procedimiento llamado 1 puede realizarse de “m” formas, y otro procedimiento llamado 2, puede realizarse de “n” formas, y no es posible realizar ambos simultáneamente, entonces para realizar 1 o 2 existen “m+n” formas.

Problema 3:

¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 111 o 101?

Resolución: Plantearemos casos bien separados para utilizar el principio anterior

1er caso: La cadena de 8 bits comienza con 111

Y entonces hay que elegir 5 bits más, cada uno con dos opciones (1 o 0), para lo cual aplicamos el principio de la multiplicación, quedando 2.2.2.2.2 = 32

2do caso: La cadena comienza con 101

Y entonces otra vez hay que elegir 5 bits, volviendo a quedar: 2.2.2.2.2 =32

Ahora bien, como los casos son separados, se suman los resultados

Respuesta final 32+32 = 64

A continuación estudiaremos cinco casos de conteo clásicos.

Permutaciones

Llamamos permutación de “n” objetos distintos a todo ordenamiento posible de dichos elementos

Ejemplo:

Dado el conjunto {A,B,C,D} una permutación de todos sus elementos podría ser BDCA

¿Cuántas existen en total?

Resolución:

Para responder esta pregunta conviene pensar que cada letra ocupará un lugar (el 1ro, el 2do, el 3ro o el 4to)

Para ocupar el primer lugar tenemos 4 posibilidades

Para ocupar el segundo lugar tenemos 3 posibilidades (pues una letra ya está fija en el primer lugar)

Para ocupar el tercer lugar tenemos 2 posibilidades

Para ocupar el cuarto lugar sólo hay una posibilidad.

Por lo tanto, tenemos 4.3.2.1 posibilidades, o sea 24 posibilidades.

- En general, la permutación de "n" elementos es el desarrollo del factorial de "n". De aquí deducimos la siguiente fórmula

$\boxed{P_n = n!}$ Significa *permutaciones de "n" elementos*

Permutaciones con repetición

Se quiere permutar los elementos de un conjunto de "n" elementos (no necesariamente distintos)

Fórmula: $\dfrac{n!}{r_1!r_2!r_3!.....}$ donde $r_1, r_2, r_3, \ldots$ es la cantidad de letras repetidas

Ejemplo:

¿Cuántos anagramas distintos hay de la palabra MATEMATICA?

Resolución

Queremos permutar todas las letras de la palabra MATEMATICA (son 10 letras en total)

Pero algunas están repetidas: hay dos letras M, hay tres letras A, hay dos letras T

Entonces, la fórmula para contar los anagramas es:

$$\frac{10!}{2!3!2!} = \frac{3628800}{2.6.2} = 151200$$

Variaciones simples (o permutaciones de "n" objetos, tomados de a "r")

De un conjunto de "n" objetos se arma un ordenamiento de "r".

En general: $V_{n,r} = P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo:

De un grupo de 30 estudiantes se quiere seleccionar una persona para que sea el presidente de la clase, otra persona para que sea el bedel, y una tercera persona para que el suplente del bedel. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse esta selección?

Utilizando la fórmula anterior: $V_{30,3} = \dfrac{30!}{(30-3)!} = \dfrac{30!}{27!} = 24360$

(nótese que este problema es una variación simple ya que elegir al presidente, al bedel y al bedel suplente es como elegir 3 personas y darles un orden a cada uno)

Variaciones con repetición

Se arma un ordenamiento de “r” objetos (no necesariamente distintos) con los elementos de un conjunto de “n” objetos

Fórmula: n^r

Ejemplo

¿Cuántas palabras de 5 letras (aún sin sentido) pueden armarse con las letras A, B, C, D, G, I, H, K, M, T, V?

Resolución

n= 11 r=5 Entonces $11^5 = 161051$

Combinaciones (de “r” objetos tomados de un conjunto de “n” elementos distintos)

Dada una colección de “n” objetos distintos, una combinación de esos “n” objetos tomados en grupos de “r” elementos, es todo subconjunto de “r” elementos tomados del total donde el orden de selección no se tiene en cuenta.

Fórmula: $C_r^n = \binom{n}{r}$ el número combinatorio!!!

Ejemplo

De un grupo de 20 personas se quiere seleccionar 3 personas para que formen una comisión representativa. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Resolución

$$C_3^{20} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{17!3!} = 1140$$