

Unidad 1: Números Reales

INTRODUCCION

¿Qué son los conjuntos numéricos Q e I ?

Sabemos que número racional es todo número que puede ser expresado como **fracción**.

Asimismo, a cada fracción le corresponde una **expresión decimal**, que es seguramente aquella que estamos acostumbrados a usar en nuestra vida diaria.

Estos números surgen de la necesidad de expresar divisiones no exactas y constituyen el conjunto **Q (Racionales)**.

La fracción es la expresión de una división indicada.

En consecuencia:

$$\frac{a}{b} \longrightarrow a : b \quad (\text{recordar que siempre } b \neq 0)$$

Cada nuevo conjunto numérico que aparece en la historia, trae como consecuencia una revolución en el mundo filosófico matemático. Así fue con la aparición de los **números irracionales**. Estos vieron la luz en el preciso momento en el que los Pitagóricos (seguidores de Pitágoras), se enfrentaron con la dificultad de representar $\sqrt{2}$ como un número entero.

Este acontecimiento provocó un terrible cataclismo en su mundo filosófico y fue Euclides capaz de probar la imposibilidad de expresarlo como un número racional.

Como todo lo que no puede ser expresado por una razón o cociente termina siendo **irracional**, así nacieron estos números, casi por oposición.

El término griego del cual se deriva y es traducción "irracional", significaba "sin medida".

No por haber aparecido por oposición los irracionales son menos famosos que los restantes; por el contrario, el número **pi** (π) es más que conocido simplemente por su nombre.

A este conjunto numérico se lo llama **I (Irracionales)**. Entonces, los números irracionales son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Observen:



$$\frac{3}{4} = 0,75 \quad \text{es racional}$$

$$\frac{2}{3} = 0,66666... \quad \text{es racional}$$

$$\frac{8}{2} = 4 \quad \text{es racional}$$

Unidad 1: Números Reales

Sin embargo tienen infinitas cifras decimales no periódicas, por ejemplo:



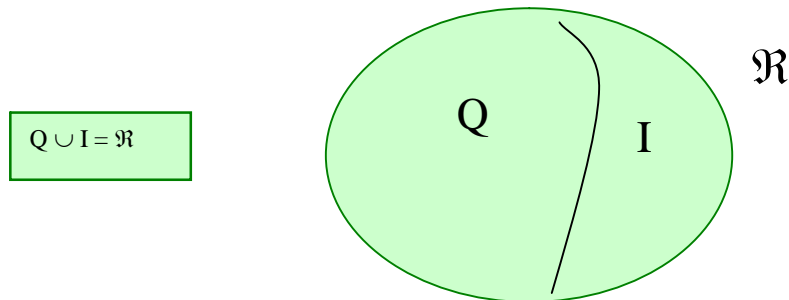
$$\sqrt{2} = 1,4142135.....$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508.....$$

$$\sqrt[3]{5}; \sqrt{11}; \sqrt{13}$$

Y los famosos números irracionales: $\pi = 3,141592654...$ y $e = 2,7182818....$

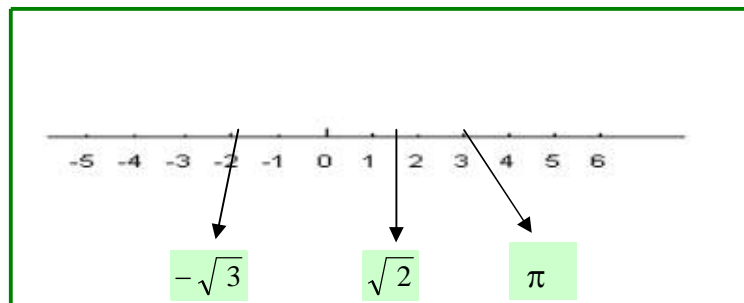
Como unión de estos conjuntos numéricos (**Q** e **I**) surge el conjunto de **números reales** \mathbb{R}



La representación de **Q** sobre la **recta numérica** no llega a cubrirla totalmente, pues existen algunos puntos que no corresponden a ningún número racional. Al incorporar al conjunto **I**, la recta queda completa.

Existe pues una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta numérica.

Esto quiere decir que cada **número real** tiene asignado un único punto sobre la recta y recíprocamente.



Unidad 1: Números Reales

Tema 1: Intervalos sobre una recta real

¿Por qué usaremos Intervalos sobre la recta real?

En muchos de los ejercicios que se plantearán en este curso, se debe expresar el conjunto solución con una inequación; es decir, con un subconjunto de números de la recta real.

Puesto que en la mayoría de los casos es un conjunto de infinitos elementos, no se los puede enumerar; por lo cual resulta muy útil trabajarlos con intervalos.



Ejemplo 1:

Si el conjunto solución es $\{ x \in \mathcal{R} / x \leq 2 \}$ quiere decir que consideramos dentro de este conjunto **todos** los números reales menores o iguales a 2. La representación gráfica de este conjunto es:



Cuya notación con intervalos se indica: $(-\infty; 2]$

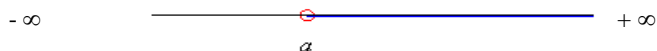
Observamos que el corchete al final del intervalo indica que el extremo **pertenece** al conjunto solución. Mientras que siempre el símbolo " ∞ " está precedido o seguido (como veremos en el siguiente ejemplo) por un paréntesis.

Esto se debe a la interpretación de este símbolo puesto que *no es un número* sino que representa la idea de que los números crecen o decrecen indefinidamente en forma positiva o negativa según el signo que lo acompaña y de acuerdo al sentido de la recta a la que nos referimos.



Ejemplo 2:

Si el conjunto que trabajamos es $\{ x \in \mathcal{R} / x > a \}$ quiere decir que consideramos en este conjunto todos los números reales mayores que a . La representación gráfica de este conjunto es:



Cuya notación con intervalos se indica: $(a; +\infty)$

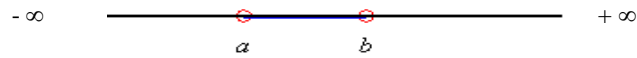
Observamos que el paréntesis al inicio del intervalo indica que el extremo **no pertenece** al conjunto solución. Mientras que siempre el símbolo " $+\infty$ " está seguido de un paréntesis por la explicación del ejemplo anterior.

Unidad 1: Números Reales



Ejemplo 3:

Si el conjunto de números reales es $\{ x \in \mathcal{R} / a < x < b \}$ quiere decir que consideramos en este conjunto todos los números reales comprendidos entre a y b . La representación gráfica de este conjunto es:



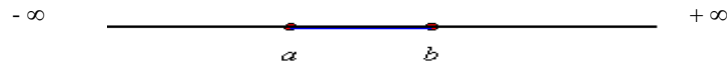
Cuya notación con intervalos se indica: $(a ; b)$

Observamos que el paréntesis al inicio y al final del intervalo indica que los extremos **no pertenecen** al conjunto solución, pero sí todos los números reales comprendidos entre ellos, por eso a este intervalo se lo llama abierto.



Ejemplo 4:

Si el conjunto es $\{ x \in \mathcal{R} / a \leq x \leq b \}$ quiere decir que consideramos en este conjunto todos los números reales menores o iguales a " b " y que al mismo tiempo sean mayores o iguales que " a ". La representación gráfica de este conjunto es:



Cuya notación con intervalos se indica: $[a ; b]$

Observamos que el corchete al inicio y al final del intervalo indica que éste es cerrado, es decir, los extremos **pertenecen** al conjunto.



Ejemplo 5:

Si el conjunto solución es $\{ x \in \mathcal{R} / a < x \leq b \}$ quiere decir que consideramos en este conjunto todos los números reales menores o iguales a " b " y que, al mismo tiempo, son mayores que " a ".

La representación gráfica de este conjunto es:



Unidad 1: Números Reales

Cuya notación con intervalos se indica: $(a ; b]$

Observamos que el paréntesis al inicio del intervalo indica que el extremo " a " **no pertenece** al conjunto solución; mientras que el corchete al final del mismo indica que el extremo " b " **pertenece** al conjunto solución.

Repasamos el trabajo con conjuntos numéricos:



Ejemplo:

Si $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $T = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ y $V = \{ 6, 7, 8 \}$ obtengamos los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$, y $S \cap V$.

Solución:

Si S y T son conjuntos, entonces su unión $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S , en T o en ambos.

$$S \cup T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

Si planteamos ahora la intersección de S y T es el conjunto formado por todos los elementos que están tanto en S como en T . Es decir, $S \cap T$ es la parte común a ambos conjuntos.

$$S \cap T = \{ 4, 5 \}$$

El conjunto vacío (que se denota \emptyset o $\{ \}$) es el conjunto que no tiene ningún elemento. Por ejemplo como S y V no tienen ningún elemento en común:

$$S \cap V = \emptyset$$

Determinación de uniones e intersecciones de intervalos:

Veamos los siguientes ejemplos



Ejemplo 1:

$$(1; 3) \cap [2; 7]$$

Solución:

La solución de la intersección de dos intervalos está formada por el subconjunto de números reales que se encuentra en ambos:

$$\begin{aligned} (1; 3) \cap [2; 7] &= \{ x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3 \text{ y } 2 \leq x \leq 7 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 3 \} \\ &= [2; 3) \end{aligned}$$



Ejemplo 2:

$$(-2; 1] \cup (1; 2)$$

Solución:

Unidad 1: Números Reales

La solución de la unión de dos intervalos está formada por el subconjunto de números reales que se encuentra en $(-2; -1)$ o en $(1; 2)$, por lo que
 $(-2; 1] \cup (1; 2) = \{ x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 1 \text{ o } 1 < x < 2 \}$
 $= \{ x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2 \}$
 $= (-2; 2)$



Resolver los siguientes ejercicios, ver en **Respuestas** y constatar la solución.

Ejercicio 1: Determinar los siguientes conjuntos, expresarlos utilizando la notación de intervalos y representarlos sobre la recta real.

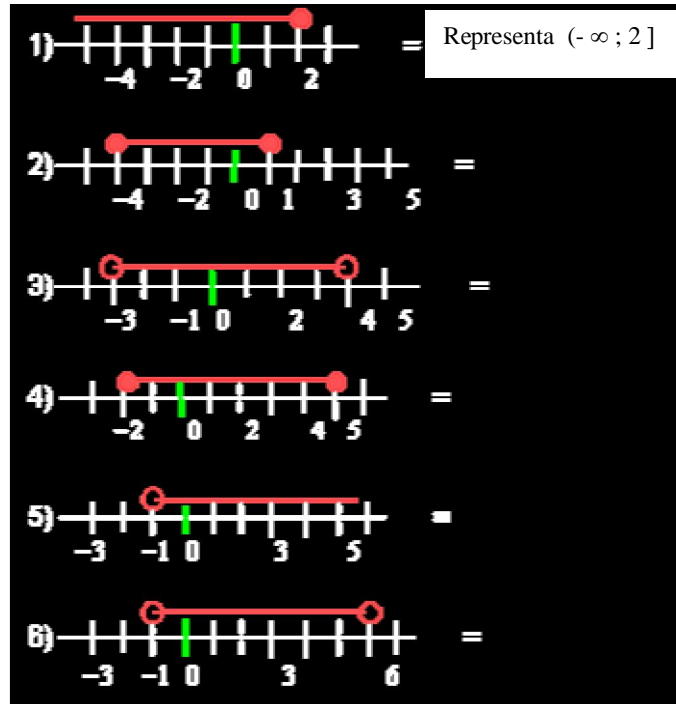
- a) $[-1;1] \cap [1;2)$
- b) $[2;4) \cup (-5; \frac{7}{2})$
- c) $(-\infty; -3) \cap (5; +\infty)$
- d) $(-2;0) \cup (-1;1)$
- e) $[-4;6] \cap [0;8)$
- f) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$
- g) $(-2;0) \cap (-1;1)$
- h) $[-4;6) \cup [0;8)$
- i) $(-\infty;6] \cap (2;10)$



- | | |
|----------------|--------------------------------------|
| a) $\{1\}$ | b) $(-5; 4)$ |
| c) \emptyset | d) $(-2;1)$ |
| e) $[0;6]$ | f) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ |
| g) $(-1; 0)$ | i) $(2; 6]$ |
| h) $[-4;8)$ | |

Unidad 1: Números Reales

Ejercicio 2: Indicar, en cada caso, el conjunto solución de lo representado en la recta real. Expresarlo en notación de intervalos. (Observar la resolución del ejercicio 1 como ejemplo). Las respuestas de los ejercicios se las deben enviar al TUTOR



- 1) $(-\infty; 2]$
- 2) $[-4; 1]$
- 3) $(-3; 4)$
- 4) $[-2; 5]$
- 5) $(-1; +\infty)$
- 6) $(-1; 6)$

Unidad 1: Números Reales

Ejercicio 3: Determinar los siguientes conjuntos, expresarlos utilizando la notación de intervalos y representarlos sobre la recta real.

a) $(2; 7) \cup [3; 14)$

b) $[5; 13] \cap (2; 18)$

c) $\left(-2; \frac{5}{2}\right) \cap [1; 3]$

d) $[3; +\infty) \cup (-7; 5)$



a) $(2; 7) \cup [3; 14) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7 \text{ o } 3 \leq x < 14\} = (2; 14)$

b) $[5; 13]$

c) $\left[1; \frac{5}{2}\right)$

d) $(-7; +\infty)$

Unidad 1: Números Reales

Tema 2: Operaciones y propiedades en el conjunto de números reales

Repasemos algunas propiedades de las operaciones suma y producto para los números reales.

Observen el cuadro a continuación:

Propiedades

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & 7 + 3 = 3 + 7 \\ a \cdot b = b \cdot a & 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \\ (a + b) + c = a + (b + c) & \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 1 = \frac{1}{2} + (2 + 1) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5}\right) \\ a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c & 2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \end{array}$$



Ejemplos

La operación de división se define en términos de multiplicación. Recordar que el inverso multiplicativo de un número real distinto de cero es $\frac{1}{b}$, que también se escribe b^{-1} . Entonces,

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

y se dice que a se divide entre b .

Algunas propiedades importantes de esta operación (las que siempre se deben tener en cuenta para no cometer errores) son las siguientes:

Propiedades

$$\begin{array}{ll} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} & b, d \neq 0 \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} & b, c, d \neq 0 \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} & c \neq 0 \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} & b, d \neq 0 \\ \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} & b, c \neq 0 \end{array}$$



Ejemplos

Unidad 1: Números Reales



Recordar que las variables deben estar restringidas de modo que se excluya la

Recordar algunas **propiedades** que se cumplen con el **número cero** que conviene tener presentes:

$a \cdot 0 = 0$	$7 \cdot 0 = 0$
$a + 0 = a$	$7 + 0 = 7$
$\text{Si } ab = 0 \text{ entonces } a = 0 \text{ ó } b = 0 \quad (x-2) \cdot (x+1) = 0 \text{ entonces } x = 2 \text{ ó } x = -1$	
$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$	$(-4)^0 = 1$
$0^a = 0 \text{ si } a > 0$	$0^4 = 0$

Se resuelven algunos ejemplos con la utilización de las propiedades enunciadas.

$$a) (4x - 1)(x + 2) = 0 \quad \text{entonces} \quad x = \frac{1}{4} \quad \text{ó} \quad x = -2$$

$$b) \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x-3}{x+4} \quad \text{si } x \neq -2, x \neq -4$$

$$c) \frac{x-1}{y} : \frac{y+1}{x} = \frac{x-1}{y} \cdot \frac{x}{y+1} \\ = \frac{(x-1) \cdot x}{(y+1) \cdot y} \quad \text{si } x \neq 0, y \neq -1, y \neq 0$$

$$d) u \cdot (2v + w) = 2uv + u \cdot w$$

$$e) \frac{3}{4} - \frac{10}{4} = \frac{3-10}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$f) \frac{5}{9} + \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 7 \cdot 9}{9 \cdot 4} \\ = \frac{20 + 63}{36} = \frac{83}{36}$$

$$g) \frac{x}{y} + \frac{x}{y+1} = \frac{x \cdot (y+1) + x \cdot y}{y \cdot (y+1)} \\ = \frac{x \cdot y + x + x \cdot y}{y \cdot (y+1)} \\ = \frac{2xy + x}{y \cdot (y+1)}$$

Unidad 1: Números Reales



Ejercicio 1: Ha llegado el momento de resolver los siguientes ejercicios teniendo en cuenta las propiedades vistas, ver en **Respuestas** y constatar la solución.

$$a. \left[\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{8} \cdot \left(1 - \frac{4}{15} \right) \right] : \left(1 - \frac{14}{48} \right)$$

$$b. \frac{\frac{1}{5} - \frac{64}{7}}{2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right)} + \frac{\left(1 - \frac{2}{3} \right)^3}{7}$$

$$c. \frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \sqrt[4]{0,0625}}{\sqrt[3]{64 \cdot (-8)}}$$

$$d. \sqrt{\left(\frac{3}{5} \right)^{-2}} - 1 - \left[2 : \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]$$

$$e. (-1)^3 - \left[(-1 - 0,5)^3 + \left(-\frac{2}{3} \right)^{-1} - 0,5 \right]$$

a) **Recordamos**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0$$

y *n* entero positivo



a) 1

b) $\approx -6,31$

c) 0

d) $1/3$

e) 4,375

f) $\frac{1}{4}x^{10} - 100$

g) $\frac{9}{2}x^9 + 9x^8 + 6x^5 + 12x^4 + 2x + 4$

h) $3x^2 - 4x + 4$

Unidad 1: Números Reales

Tema 3: Exponentes y radicales. Definición, propiedades



Un **producto de números iguales** se escribe por lo general con **notación exponencial**. Por ejemplo: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. En general se tiene la siguiente definición:

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces la n -ésima potencia de a es.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n \text{ factores})}$$

El número a es la **base** y n es el **exponente**.



Ejemplos:

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$b) (-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

$$c) -3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

Notar la diferencia entre $(-3)^4$ y -3^4

En el primero el exponente se aplica a (-3) , mientras que en el segundo a 3 (el signo $-$ se aplica al resultado).

Como recordamos en los ejercicios del tema 2:

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0 \text{ y } n \text{ entero positivo}$$

Unidad 1: Números Reales

Otras propiedades útiles de los exponentes ($a \in \mathbb{R}$; m, n enteros positivos):

Propiedades

$$\begin{array}{ll}
 a^m \cdot a^n = a^{m+n} & x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5 \\
 \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0) & \frac{x^{10}}{x^4} = x^6 \\
 (a^m)^n = a^{m \cdot n} & (x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15} \\
 (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & (2x)^4 = 2^4 \cdot x^4 = 16x^4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) & \left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{x^3}{3^3} = \frac{x^3}{27}
 \end{array}$$



Ejemplos

Veamos la **aplicación de estas propiedades** en ejercicios de mayor complejidad:

$$\begin{aligned}
 1) \quad (2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)(3^3 \cdot a^3 \cdot (b^4)^3) \\
 &= (2a^3b^2)(27 \cdot a^3 \cdot b^{12}) \\
 &= 54a^3 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b^{12} \\
 &= 54a^6 \cdot b^{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2 \cdot x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{(y^2)^4 \cdot x^4}{z^4} \quad (y \neq 0; z \neq 0) \\
 &= \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{y^8 x^4}{z^4} \\
 &= \frac{x^3 \cdot x^4 \cdot y^8}{z^4 \cdot y^3} \\
 &= \frac{x^7 y^5}{z^4}
 \end{aligned}$$

Otras **propiedades adicionales** que serán útiles para la simplificación de expresiones (siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$) con exponentes negativos son:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$



Cuidado con estas
propiedades, cambia el
signo del exponente pero

Unidad 1: Números Reales



Ejemplos:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

$$\frac{x^{-5}}{y^{-3}} = \frac{y^3}{x^5} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$



Ejercicio1: De acuerdo con las **propiedades** vistas, resolver los siguientes ejercicios.

Simplificar la expresión y expresar el resultado con potencias positivas.

- a) $t^3 \cdot t^{-5}$ (si $t \neq 0$)
- b) $(12x^2y^4) \cdot \left(\frac{1}{2}x^5y^{-1}\right)$ (si $y \neq 0$)
- c) $\frac{x^9(2x)^4}{x^5}$ (si $x \neq 0$)
- d) $m^4 \cdot \left(\frac{1}{3}m^2\right) \cdot (12m^{-8})$ (si $m \neq 0$)
- e) $(r \cdot s^2)^3 \cdot (2 \cdot s)^{-2} \cdot (4 \cdot r)^4$ (si $s \neq 0$)
- f) $\frac{(6 \cdot y^3)^4 \cdot y^{-4}}{2 \cdot y^5}$ (si $y \neq 0$)
- g) $\frac{(x^2 \cdot y^3)^4 \cdot (x \cdot y^4)^{-3}}{x^{-2} \cdot y^{-4}}$ (si $x \neq 0$; $y \neq 0$)
- h) $\frac{x \cdot y^3 \cdot z^4}{(x^2 \cdot y^{-2} \cdot z^2)^{-4}}$ (si $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$)



a) $\frac{1}{t^2}$

b) $6x^7y^3$

c) $16x^8$

d) $\frac{4}{m^2}$

e) $64r^7s^4$

f) $648y^3$

g) x^7y^4

h) $\frac{x^9z^{12}}{y^5}$ 14

Unidad 1: Números Reales

Otros resultados conocidos son los desarrollos de las siguientes potencias de binomios:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Recordar que surge de

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

y aplicar propiedad

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Es importante **no cometer el error común de distribuir la potencia en una suma de términos**, puesto que las igualdades anteriores evidencian que no se verifica la distributividad de la potencia respecto de la suma.

Teniendo en cuenta lo comentado, se resuelven los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} a) \left(a + \frac{1}{a}\right)^{-3} &= \left(\frac{a \cdot a + 1}{a}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{a^2 + 1}{a}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{a}{a^2 + 1}\right)^3 \\ &= \frac{a^3}{(a^2 + 1)^3} \\ &= \frac{a^3}{a^6 + 3a^4 + 3a^2 + 1} \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$



Cuando exista suma de términos **no simplificar** expresiones del numerador

$$\begin{aligned} b) \left(2b - \frac{3}{b}\right)^{-2} &= \left(\frac{2b \cdot b - 3}{b}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{2b^2 - 3}{b}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{b}{2b^2 - 3}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{(2b^2 - 3)^2} \\ &= \frac{b^2}{(2b^2)^2 + 2 \cdot 2b^2 \cdot (-3) + (-3)^2} \\ &= \frac{b^2}{4b^4 - 12b^2 + 9} \end{aligned}$$

La potenciación es distributiva respecto del cociente

$$b \neq 0 \text{ y } \left(2b - \frac{3}{b}\right) \neq 0$$

Unidad 1: Números Reales



Ejercicio 2: Ha llegado el momento de resolver los siguientes ejercicios, ver en **Respuestas** y constatar con la solución.

Realizar las operaciones indicadas a continuación y simplificar convenientemente indicando las restricciones para cada caso.

$$a) \left(a - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{b}\right)$$

$$b) \left(c + \frac{1}{c}\right)^{-2}$$

$$c) (1-b)^2$$

$$d) (x-1)(x^2 + x + 1)$$



$$a) a - \frac{1}{b^2} \quad (b \neq 0)$$
$$d) h^2$$

$$b) \frac{c^2}{(c^2 + 1)^2} \quad \left(c + \frac{1}{c}\right) \neq 0$$
$$c) 1 - 2b + b^2$$
$$e) x^3 - 1$$



No olvidamos los radicales. Definimos la raíz n -ésima de $a \in \mathbb{R}$

- Si n es un número entero positivo impar, entonces la raíz n -ésima de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si se cumple} \quad b^n = a$$

- Si n es par, es necesario que además se cumpla $a \geq 0$ y $b \geq 0$
- Notación: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$



Por Ejemplo:

Unidad 1: Números Reales

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{81} &= 3 & \sqrt{9} &= 3 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2 & \sqrt[5]{1} &= 1\end{aligned}$$

De acuerdo con la definición, recordar que el caso en que el **índice de la raíz sea par** y el **radicando sea negativo**, no tiene solución para los números reales.

Veamos un ejemplo ilustrativo.

$$\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$$

(No está definido en el conjunto \mathbb{R})

Otras reglas para trabajar con raíces aparecen en el siguiente recuadro (en todos los casos suponemos que las raíces existen en \mathbb{R}):

Propiedades

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \sqrt[3]{-8 \cdot 27} &= \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27} = -2 \cdot 3 = -6 \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) & \sqrt[4]{\frac{16}{81}} &= \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3} \\ \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[p \cdot m]{a} & \sqrt[3]{\sqrt{729}} &= \sqrt[3 \cdot 2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3 \\ \sqrt[p]{a^m} &= a^{m/p} & \sqrt[3]{x^2} &= x^{2/3} \\ (\sqrt[n]{a})^n &= a & (\sqrt[4]{2})^4 &= 2\end{aligned}$$



Ejemplos



Observación: esta propiedad se cumple si n es impar; si n es par se cumple sólo en el caso $a \geq 0$.

- Racionalización de denominadores:

Unidad 1: Números Reales

Con frecuencia resulta útil eliminar el radical en el denominador, multiplicando tanto el numerador como el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se conoce como **racionalización de denominadores**.

Observar estos tres ejemplos ilustrativos:

$$a) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$c) \sqrt[7]{\frac{1}{a^3}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^4}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{a} \quad (a \neq 0)$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar para la racionalización de numeradores.



Ejercicio 3: Racionalizar los denominadores

$$a) \frac{1 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{7}}$$

$$b) \sqrt[3]{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$c) \frac{y}{\sqrt{3} + \sqrt{y}}$$

$$d) \frac{3x^2}{2 - \sqrt{x}}$$

$$e) \frac{5ax^2}{\sqrt{x} + 2a}$$

$$f) \frac{y - 2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$g) \frac{3 - x}{\sqrt[5]{x^2a}}$$

$$h) \frac{2x + 3}{3\sqrt{x} - 4}$$

Unidad 1: Números Reales



$$\text{a) } -\frac{1}{3}(1-\sqrt{5})(2-\sqrt{7})$$

$$\text{c) } \frac{y(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$$

$$\text{e) } \frac{5ax^2(\sqrt{x}-2a)}{x-4a^2}$$

$$\text{g) } \frac{(3-x)\sqrt[5]{x^3a^4}}{xa}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{y} + \frac{\sqrt{y}}{y}$$

$$\text{d) } \frac{3x^2(2+\sqrt{x})}{4-x}$$

$$\text{f) } \frac{\sqrt[3]{x^2}(y-2)}{x}$$

$$\text{h) } \frac{(2x+3)(3\sqrt{x}+4)}{9x-16}$$