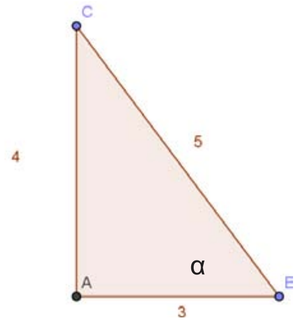
Unidad 5 · Trigonometría

Les propongo la siguiente actividad:

Construyan un triángulo rectángulo y denle nombre a sus vértices y midan sus lados:

Por ejemplo nosotros construimos este:

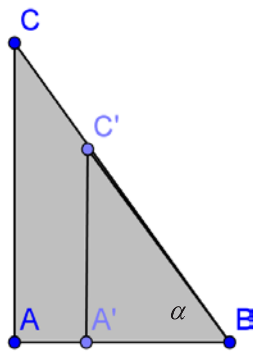


Ahora efectúen los cocientes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ y anoten los resultados

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=0{,}6$ $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=0.8$ $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{3}$

Ahora tracen el segmento $\overline{A'C'}$ paralelo al lado $\overline{AC}$ e interior al triángulo anterior, como se muestra en la figura.

Observen que si bien las medidas de los lados se modificaron, la medida de los ángulos permaneció constante.



Si ahora repetimos los cálculos anteriores en el nuevo triángulo rectángulo

$\frac{\overline{A'B}}{\overline{BC'}}=0{,}6$ $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}}=0.8$ $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B}}=\frac{4}{3}$

Podemos notar que al igual que los ángulos, las razones entre los lados también permanecen constantes.

Los invito a construir un nuevo triángulo rectángulo, prolongando o achicando alguno de sus lados pero siempre manteniendo las medidas de los ángulos interiores del triángulo, vuelvan a realizar los cocientes y observarán que los resultados no varían.

A estas razones numéricas, se las conoce como razones trigonométricas y con ellas comenzaremos a trabajar en esta unidad.

Al finalizarla, deberán poder utilizar las razones y relaciones trigonométricas en forma directa o indirecta para resolver problemas asociados con triángulos rectángulos. Deberán reconocer triángulos rectángulos en otras figuras geométricas o figuras de análisis y aplicar trigonometría adecuadamente sobre ellas. Podrán reducir ángulos al primer cuadrante e identificar valores y relaciones trigonométricas entre ángulos de diferentes cuadrantes.

Contenidos de esta unidad:

5.1 Razones trigonométricas.

5.2 Ecuaciones trigonométricas.

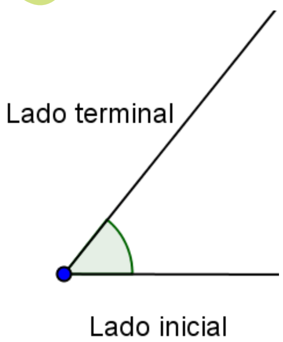
5.3 Resolución de triángulos y problemas.

5.4 Ejercitación propuesta.

TEMA 1 · Razones Trigonométricas

Como vimos en la presentación de la unidad las razones trigonométricas están asociadas a ángulos. Pero ¿Cómo se define un ángulo? ¿Cómo se miden?

Recordemos un poco

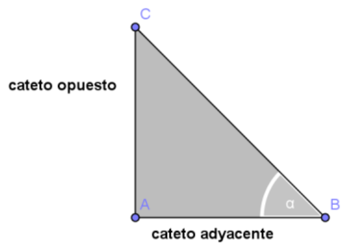


Un ángulo en el plano es la región generada por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen desde una posición inicial hasta una posición final. La medida del ángulo es la amplitud de la rotación.

Si la rotación se produce en sentido anti horario (contrario a las agujas del reloj) decimos que el ángulo es positivo, en otro caso diremos que el ángulo es negativo.

Al punto de intersección del lado inicial con el lado terminal del ángulo se lo denomina vértice.

Razones Trigonométricas



Dado un triángulo rectángulo y un ángulo α agudo, definimos:

$$\boxed{sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}}$$

$$\boxed{tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}}$$

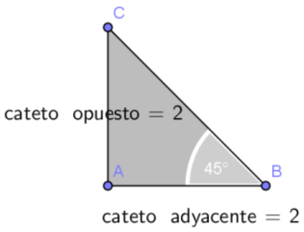
Además:

$$\boxed{\cos ec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}} \quad \boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}}$$

$$\boxed{cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}}$$

Para pensar entre todos…

Dado el triángulo de la figura calculen el valor de las seis razones trigonométricas



Primero deberemos calcular el valor de la hipotenusa…

$$hipotenusa = \sqrt{(cateto\,opuesto)^2 + (cateto\,adyacente)^2}$$

$$hipotenusa = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2}$$

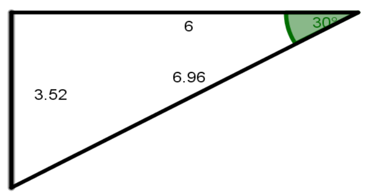
Por lo tanto:

$$sen\left(45^{\circ}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(45^{\circ}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\left(45^{\circ}\right) = \frac{2}{2} = 1 \qquad cotg\left(45^{\circ}\right) = 1$$

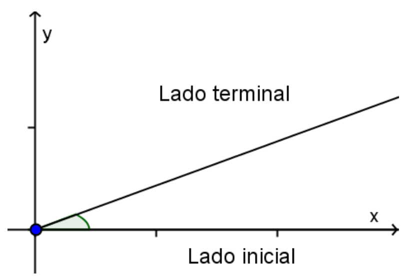
$$\cos ec\left(45\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad s\,ec\left(45^{\circ}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

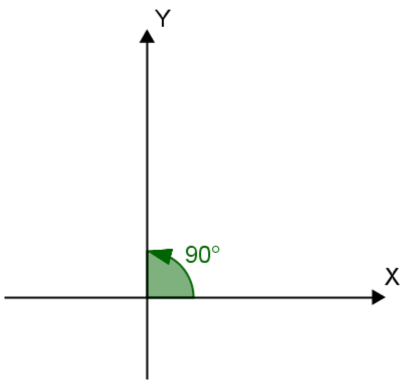
Ejercicio de aplicación



1- Repitan lo pedido en el ejercicio anterior ahora con este triángulo y verifiquen que: $sen\left(30^{\circ}\right) = 0.5$ $\cos\left(30^{\circ}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $tg\left(30^{\circ}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

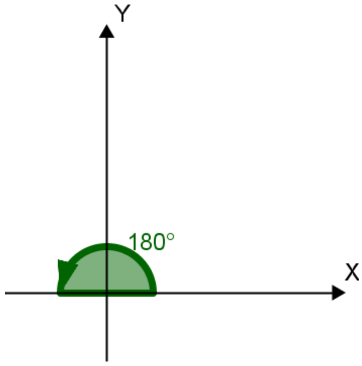
En general, para trabajar con ángulos, resulta útil imaginarlos sobre el plano cartesiano, ubicando el vértice en el origen y el lado inicial sobre el eje x positivo. En este caso diremos que el ángulo se encuentra en posición normal.



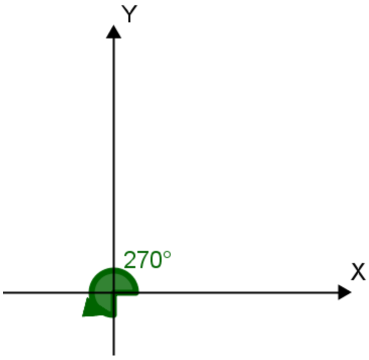


Un ángulo de 90º, en posición normal, será aquel cuyo lado terminal coincide con el semieje y positivo.

Un ángulo de 180º, en posición normal, será aquel cuyo lado terminal coincide con el semieje x negativo.



Un ángulo de 270º, en posición normal será aquel cuyo lado terminal coincide con el semieje y negativo.



Un ángulo de 360º será aquel cuyo lado inicial coincide con el lado final luego de haber dado una vuelta completa.

Un ángulo en posición normal pertenece al primer cuadrante, cuando su lado terminal cae en dicho cuadrante, es decir cuando es un ángulo menor a un ángulo recto. Análogamente sucede para los demás cuadrantes.

Para pensar entre todos…

Indicar a qué cuadrante pertenece cada uno de los siguientes ángulos: 125º, 210º, -130º, 395º, 930º, 15º, -230º, 850º

A continuación, resolvemos sólo algunos y al resto los piensan ustedes.

125º Es un ángulo mayor a 90º y menor a 180º, por lo tanto pertenece al segundo cuadrante.

-130º El ángulo es negativo, por lo tanto la rotación se produjo en sentido de las agujas del reloj. Si nos movemos en ese sentido, un ángulo del cuarto cuadrante será aquel que se encuentre entre -90º y 0, uno del tercer cuadrante será el que se encuentra entre -180º y -90º y así sucesivamente. En consecuencia el ángulo de -130º pertenece al tercer cuadrante.

930º Como dijimos anteriormente un ángulo de 360º es aquel que se obtiene al realizar un giro completo. En este caso como el valor del ángulo es mayor a 360º, se realizó más de un giro

930º = 360º+360º+210º Esto nos indica que para obtener éste ángulo debimos dar dos vueltas completas y luego girar 210º. Con lo cual el ángulo pertenece al tercer cuadrante.

Ok los dejamos que continúen resolviendo los restantes…

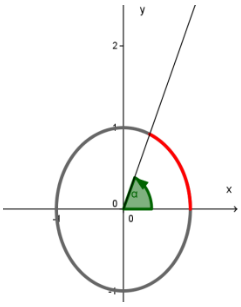
Podrán ver las demás respuestas al finalizar la unidad.

Medida en radianes

Es muy sencillo trabajar con ángulos cuya amplitud es 130º o 54º pero la dificultad aparece cuando el ángulo mide 30 grados 5 min y 6 seg o 125º 50 min y 4 seg.

Para simplificar esta notación trabajaremos con ángulos medidos en radianes, lo cual permite asociar a cada amplitud en grados un número real.

¿En qué consiste el sistema de medición de ángulos en radianes o sistema circular?



Consideremos una circunferencia de radio una unidad con centro en el origen, llamada **circunferencia trigonométrica** y consideremos un ángulo α en posición normal.

Como podemos ver en la figura, el ángulo determina sobre la circunferencia un arco, indicado en la figura en color rojo.

La longitud de dicho arco es la medida del ángulo α en radianes.

Conversión de grados a radianes

Si consideramos nuevamente la circunferencia trigonométrica, la misma tiene una longitud de 2π. El ángulo asociado con un giro completo mide 360º y determina un arco de longitud igual a la longitud de la circunferencia. Por lo tanto 360º equivalen a 2π radianes o bien

$$\boxed{180º = \pi \text{ radianes}}$$

$$\boxed{1º = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}}$$

Para pensar entre todos…

A partir de la equivalencia planteada expresen: 60º 30º 45º 150º en radianes

Solución: $60º = 60.\ 1º = 60.\ \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ radianes

Procediendo de la misma forma llegamos a que

$30º = \frac{\pi}{6}$ *radianes* $\quad 45º = \frac{\pi}{4}$ *radianes* $\quad 150º = \frac{5\pi}{6}$ *radianes*

Conviertan a grados: $\frac{4\pi}{3}$ radianes y 2,5 radianes.

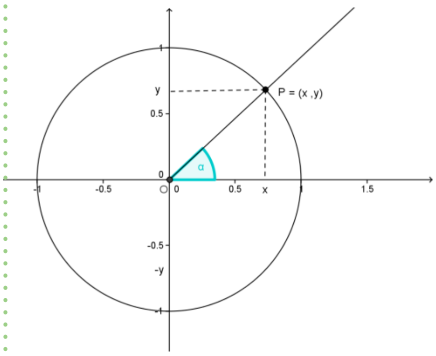
De forma similar a lo realizado en el ejercicio anterior y teniendo en cuenta que:

$1 \text{radian} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \qquad \frac{4\pi}{3} \text{ radianes} = \frac{4\pi}{3} .1 \text{ radian} = \frac{4\pi}{3} \frac{180^{\circ}}{\pi} = 240º$

$2{,}5 \text{ radianes} = 2{,}5.\ \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{450^{\circ}}{\pi}$

Signo del sen(α) y cos(α) en cada cuadrante

Dada la circunferencia trigonométrica, un ángulo α y el punto P de coordenadas (x y), intersección entre el lado terminal de α y la circunferencia trigonométrica, si consideramos el triángulo rectángulo oxP nos queda:



$\boxed{sen(\alpha) = \dfrac{\overline{0y}}{\overline{oP}} = \dfrac{y}{1} = y}$ puesto que la medida de $\overline{oP}$ es igual al radio de la circunferencia y dicho valor es igual a 1 unidad.

El valor del $sen(\alpha)$ coincide con la coordenada "y" del punto de intersección entre el lado terminal de dicho ángulo y la circunferencia trigonométrica.

Como en dicha circunferencia los valores de la variable "y" verifican que $-1 \le y \le 1$, entonces $\boxed{-1 \le sen(\alpha) \le 1}$

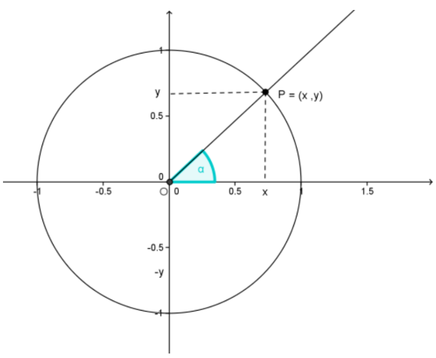
El $sen(\alpha)$ será positivo en aquellos cuadrantes donde la coordenada y del punto P lo sea, que es en el primero y segundo cuadrante.

Análogamente:

$\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\overline{0x}}{\overline{oP}} = \dfrac{x}{1} = x}$ ***El valor del $\cos(\alpha)$ coincide con la coordenada "x" del punto de intersección entre el lado terminal de dicho ángulo y la circunferencia trigonométrica y se verifica que*** $\boxed{-1 \le \cos(\alpha) \le 1}$

Por lo tanto $\cos(\alpha)$ será positivo en aquellos cuadrantes donde el la coordenada x del punto P lo sea, lo cual ocurre en el primer y cuarto cuadrante.

Figura Resumen

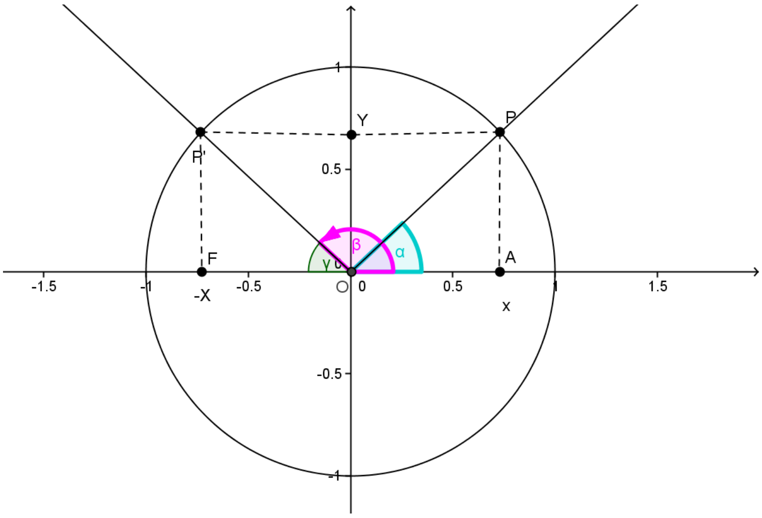


Valores de seno y coseno de ángulos particulares del primer cuadrante

Veamos ahora el valor del seno y coseno para ciertos ángulos del primer cuadrante:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tengan en cuenta que para realizar cualquiera de estos cálculos en la calculadora, la misma debe estar en modo radian.



¿Cómo calculamos el valor de seno y coseno de un ángulo que pertenece a los demás cuadrantes?

Vamos a ver que es suficiente conocer el valor del seno y coseno para ángulos del primer cuadrante y a partir de ellos podremos calcular el valor de estas razones para ángulos de los demás cuadrantes.

Analicemos los distintos escenarios:

Sean β y γ ángulos del segundo cuadrante, podemos observar que $\beta + \gamma = \pi$

Existe un ángulo α en el primer cuadrante como el de la figura, tal que $\gamma = \alpha$, por simetría respecto del eje y.

Como consecuencia de esta igualdad $\beta + \alpha = \pi$ o lo que es equivalente $\alpha = \pi - \beta$

Por lo tanto, recordando que el valor del seno de un ángulo coincide con la **coordenada y** del punto de intersección de su lado terminal con la circunferencia trigonométrica, se verifica:

$\boxed{sen(\beta) = y = sen(\alpha)}$

De forma similar se deduce que: $\boxed{\cos(\beta) = -x = -\cos(\alpha)}$

De esta manera, para calcular el valor del seno o coseno de un ángulo en el segundo cuadrante, bastará hallar el ángulo α del primer cuadrante, al que tomaremos como ángulo de referencia, calcular el valor de dichas funciones para α y adaptar el signo del resultado para el caso del coseno.

Para pensar entre todos…

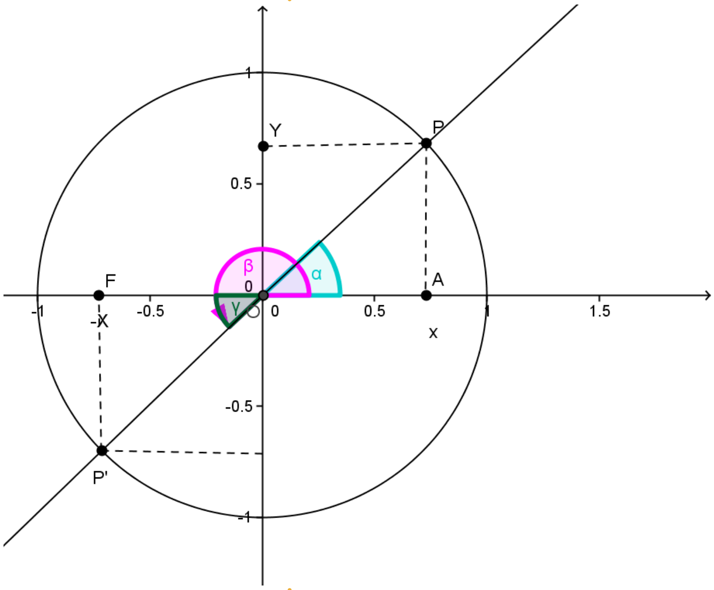
Calculen $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ y $tg\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Solución: Para responder a lo pedido, puesto que $\frac{2\pi}{3}$ es un ángulo del segundo cuadrante buscamos el correspondiente ángulo del primer cuadrante que resulta de

$\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Por lo tanto $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ y $sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

De esto se deduce que

$$tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$



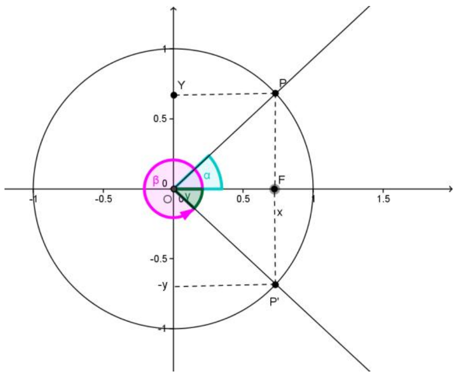
Sean β y γ ángulos del tercer cuadrante, podemos observar que $\beta - \gamma = \pi$ o lo que es equivalente $\gamma = \beta - \pi$,

Existe un ángulo α en el primer cuadrante, como el de la figura, tal que $\gamma = \alpha$, por simetría respecto del origen. Como consecuencia de esta igualdad $\beta = \pi + \alpha$, o lo que es equivalente $\alpha = \beta - \pi$,

Además: $\boxed{sen(\beta) = -y = -sen(\alpha)}$

De forma similar se deduce que $\boxed{\cos(\beta) = -x = -\cos(\alpha)}$

De esta manera para calcular el valor del seno o coseno de un ángulo en el tercer cuadrante bastará hallar el ángulo α del primer cuadrante, al que tomaremos como ángulo de referencia, calcular el valor de dichas funciones para α y adaptar el signo del resultado.



:: Sean β y γ ángulos del cuarto cuadrante, podemos observar que $\beta = 2\pi - \gamma$

Existe un ángulo α en el primer cuadrante tal que $\gamma = \alpha$ por simetría respecto del eje x, como se muestra en la figura. Como consecuencia de esta igualdad : $\beta = 2\pi - \alpha$. Y se verifica: $\boxed{sen(\beta) = -y = -sen(\alpha)}$

De forma similar se deduce que $\boxed{\cos(\beta) = x = \cos(\alpha)}$

De esta manera, para calcular el valor del seno o coseno de un ángulo en el cuarto cuadrante, bastará hallar el ángulo α del primer cuadrante, al que tomaremos como ángulo de referencia, calcular el valor de dichas funciones para α y adaptar el signo del resultado para el caso del seno.

En resumen:

β es un ángulo del segundo cuadrante y $\alpha = \pi - \beta$ el ángulo correspondiente en el primer cuadrante	$\boxed{sen(\beta) = sen(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\beta) = -\cos(\alpha)}$
β es un ángulo del tercer cuadrante y $\alpha = \beta - \pi$ el ángulo correspondiente del primer cuadrante	$\boxed{sen(\beta) = -sen(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\beta) = -\cos(\alpha)}$
β es un ángulo del cuarto cuadrante y $\alpha = 2\pi - \beta$ el correspondiente del primer cuadrante	$\boxed{sen(\beta) = -sen(\alpha)}$ $\boxed{\cos(\beta) = \cos(\alpha)}$

Para pensar entre todos :

Calculen de forma exacta y verifiquen el resultado usando calculadora:

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\quad sen\left(\frac{10\pi}{6}\right)$,

Resolvamos todos juntos:

$\frac{5\pi}{4}$ es un ángulo del tercer cuadrante, por lo tanto existe $\alpha = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ y se verifica que

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ es un ángulo del cuarto cuadrante , por lo tanto existe $\alpha = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ y se verifica que

$$\boxed{sen\left(\frac{10\pi}{6}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Determinen qué ángulo del primer cuadrante entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ tiene:

i) Seno igual al $sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

ii) Coseno igual a $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

iii) Tangente igual a $tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Resolvamos:

i) $\frac{5\pi}{6}$, es un ángulo del segundo cuadrante, en dicho cuadrante el seno es positivo. El seno también es positivo en el primer cuadrante por lo que el ángulo que estamos buscando es $\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

Verifiquen ustedes con la calculadora que efectivamente $sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ii) $\frac{4\pi}{3}$ es un ángulo del tercer cuadrante, en dicho cuadrante el coseno es negativo y también lo es en el segundo cuadrante. Por lo tanto el ángulo que buscamos pertenece a dicho cuadrante.

Buscamos primero el ángulo del primer cuadrante que se corresponde con $\frac{4\pi}{3}$. Este ángulo es $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$.

Finalmente trasladamos dicho ángulo al segundo cuadrante:

Nosotros vimos que si β es un ángulo del segundo cuadrante, entonces $\alpha = \pi - \beta$ es el ángulo correspondiente en el primer cuadrante. De aquí se deduce que $\frac{\pi}{3} = \pi - \beta$, de donde $\beta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ y éste es el ángulo que buscamos.

iii) $\frac{5\pi}{4}$ es un ángulo del tercer cuadrante, en dicho cuadrante tanto el seno como el coseno son negativos por lo que la tangente será positiva. Lo mismo ocurre en el primer cuadrante donde seno y coseno son positivos.

El ángulo buscado será entonces $\frac{5\pi}{4} - \pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

TEMA 2 · Ecuaciones Trigonométricas

Una ecuación trigonométrica, es toda ecuación que involucra razones trigonométricas de ángulos desconocidos. Resolver una ecuación de este tipo implica encontrar el o los ángulos que verifican la igualdad.

Explicaremos el tema a partir de diversos casos:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Hallen el conjunto solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Si analizamos la tabla de valores realizada anteriormente:

Podemos observar que el coseno devuelve $\frac{1}{2}$ cuando $x = \frac{\pi}{3}$, sin embargo nos piden todas las soluciones contenidas en una vuelta completa a la circunferencia trigonométrica.

El coseno también es positivo en el cuarto cuadrante, por consiguiente habrá un ángulo β en dicho cuadrante donde $\cos(\beta) = \frac{1}{2}$.

Dicho ángulo se puede obtener, como ya vimos, a partir del correspondiente ángulo en el primer cuadrante, es decir $\beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Podemos verificar utilizando la calculadora que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Las soluciones de la ecuación son: $\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$ y $\boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$

Hallen los valores de x que verifican $\sec(x) = -\sqrt{2}$ para $0 \le x \le 3\pi$

$\sec(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow$

Recordemos que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{1}{\cos x} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow$

Multiplicamos ambos términos por cos x

$1 = -\sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow$

Dividimos cada términos por $-\sqrt{2}$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos x \Leftrightarrow$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos x$

Racionalizamos el primer término

Si observamos la tabla

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$

Para determinar los x donde $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ deberemos buscar los ángulos del segundo y tercer cuadrante correspondientes a $\dfrac{\pi}{4}$ donde el coseno es negativo

La solución correspondiente al segundo cuadrante es $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

La solución correspondiente al tercer cuadrante es $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

Nos pedían las soluciones x que verifican $0 \le x \le 3\pi$ por lo que debemos incluir todas las soluciones que se encuentran en un vuelta y media a la circunferencia trigonométrica. Hasta el momento sólo consideramos las que están en un giro. Al dar media vuelta más volvemos a pasar por el segundo cuadrante donde encontraremos otra solución a la ecuación. Está última podemos obtenerla sumando 2π a $\dfrac{3\pi}{4}$

Por lo tanto la solución que nos falta es $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{4}$

En consecuencia nos queda que $\sec(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{3\pi}{4}}$, $\boxed{x = \dfrac{11\pi}{4}}$ o bien $\boxed{x = \dfrac{5\pi}{4}}$

Los dejamos verificando la respuesta….

Hallen los valores de x que verifican

$\cos(x) = sen(x)$ para $0 \leq x \leq 4\pi$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Si analizamos nuevamente la tabla definida anteriormente

Observamos que $\cos(x) = sen(x)$ en el primer cuadrante cuando $x = \frac{\pi}{4}$. Esta igualdad puede repetirse en el tercer cuadrante debido a que en dicho cuadrante el coseno y el seno son ambos negativos, mientras que en los demás cuadrantes ambas razones poseen distinto signo.

Buscamos entonces un ángulo en el tercer cuadrante correspondiente a $x = \frac{\pi}{4}$. Dicho ángulo puede obtenerse como $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Ahora bien nos piden todas las soluciones contenidas en dos vueltas a la circunferencia trigonométrica ($0 \leq x \leq 4\pi$)

Para obtener las soluciones correspondientes al intervalo $2\pi \leq x \leq 4\pi$, bastará sumar a los ángulos hallados una vuelta. Es decir que también es solución $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ y $x = 2\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$

Los dejo probando que para $\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ $\boxed{x = \frac{5\pi}{4}}$, $\boxed{x = \frac{9\pi}{4}}$ y $\boxed{x = \frac{13\pi}{4}}$ se verifica la ecuación y que por lo tanto dichos valores son soluciones de la ecuación planteada.

Hallen los valores de x que verifican

$2\cos(x)sen(x) + \cos(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Para comenzar, podemos extraer cos(x) como factor común: $2\cos(x)sen(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow (2sen(x)+1)\cos(x) = 0$ como obtuvimos un producto igualado a 0 podemos afirmar:

A	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$(2sen(x)+1)\cos(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2sen(x)+1=0 \quad (1) \\ o \\ \cos(x)=0 \; (2) \end{cases}$$

De (1) $2sen(x)+1=0 \Leftrightarrow sen(x)=-\frac{1}{2}$

Si revisamos la tabla:

$sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ Deberemos encontrar los ángulos correspondientes al tercer y cuarto cuadrante donde el seno es negativo e igual a $-\frac{1}{2}$

La solución correspondiente al tercer cuadrante será $\boxed{x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}}$

La solución correspondiente al cuarto cuadrante será $\boxed{x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}}$

De (2) cos(x) = 0 cuando en la circunferencia trigonométrica la coordenadas del punto p intersección entre lado terminal y circunferencia sea (0,1) 0 (0,-1). Esto ocurre cuando $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ o $\boxed{x=\frac{3\pi}{2}}$

Las soluciones de nuestra ecuación serán: $\boxed{x=\frac{7\pi}{6}}$, $\boxed{x=\frac{11\pi}{6}}$, $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ y $\boxed{x=\frac{3\pi}{2}}$

Hallen los valores de x que verifican

$2\cos(x)sen(x)+\cos(x)=0$ para $0 \le x \le \pi$

La ecuación es la misma que resolvimos en el punto anterior pero nos restringen la región a donde deben pertenecer las soluciones.

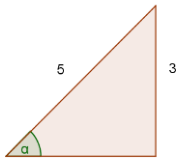
Debemos tomar de las soluciones obtenidas aquellas que pertenezcan al primer o segundo cuadrante. Nos quedará entonces una única solución y la misma será

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

TEMA 3 · Resolución de triángulos rectángulos

La palabra trigonometría está relacionada con la medición de triángulos rectángulos. A continuación plantearemos distintas situaciones problemáticas en las que intervienen triángulos rectángulos. En la resolución de las mismas aplicaremos los conceptos de trigonometría ya expuestos.

Ejemplos para pensar entre todos:



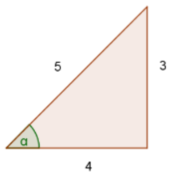
Sea α un ángulo agudo que verifica $sen(\alpha)=\frac{3}{5}$, determinen los valores de las demás funciones trigonométricas.

Para responder a la pregunta vamos a construir una figura auxiliar que nos ayude. Recordemos que dado un triángulo rectángulo si α es uno de sus ángulos agudos el $sen(\alpha)=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$.

Podemos construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 5 unidades y su cateto opuesto mida 3 unidades

Para hallar el valor de las restantes razones trigonométricas bastará calcular el valor del cateto adyacente. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$5^2=3^2+(\text{cateto ady})^2 \Leftrightarrow \sqrt{5^2-3^2}=\text{cateto ady} \Leftrightarrow \boxed{4=\text{cateto ady}}$$



Ubicamos los datos en nuestra figura de análisis y calculamos las demás razones trigonométricas:

$\boxed{\cos(\alpha)=\frac{4}{5}}$ $\boxed{tg(\alpha)=\frac{3}{4}}$ $\boxed{\cos ec(\alpha)=\frac{5}{3}}$ $\boxed{\sec(\alpha)=\frac{5}{4}}$ $\boxed{\cot g(\alpha)=\frac{4}{3}}$

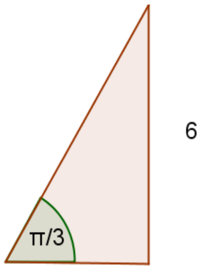
Determinen la longitud de cada lado y cada ángulo desconocido de un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos mide $\frac{\pi}{3}$ y su cateto opuesto mide 6.

Cuando, como en este problema, nos piden averiguar la medida del ángulo y los lados desconocidos de un triángulo rectángulo, nos están pidiendo que resolvamos el triángulo rectángulo dado.

En estos tipos de problema es muy importante construir una figura de análisis que nos permita identificar la información dada rápidamente.

Construyamos entonces nuestra figura de análisis y ubiquemos la información dada en el problema:

Figura de análisis



Como conocemos el valor de un ángulo y la medida del cateto opuesto a dicho ángulo podemos utilizar el seno para calcular la medida de la hipotenusa.

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{hip} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{hip} \Leftrightarrow$$

Multiplicamos ambos términos por hip

$$\frac{\sqrt{3}}{2}hip = 6 \Leftrightarrow$$

Multiplicamos ambos términos por $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$hip = 6\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

Racionalizamos y simplificamos

$$\boxed{hip = 6\frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}}$$

Para calcular ahora el valor del cateto adyacente podemos utilizar la el valor de la tangente del ángulo dado.

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{cat\ ady} \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{6}{cat\ ady} \Leftrightarrow$$

Multiplicamos ambos términos por cat ady.

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}cat\ ady = 6 \Leftrightarrow$$

Dividimos ambos términos por $\sqrt{3}$ y racionalizo

$$\Leftrightarrow \boxed{cat\ ady = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

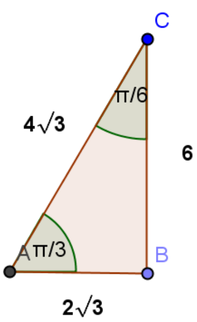
Si bien esta cuenta se puede realizar con calculadora, la misma no arroja un resultado exacto sino una aproximación del valor $\sqrt{3}$. Por este motivo es que utilizamos la tabla definida anteriormente.

Para averiguar ahora el valor del ángulo restante, bastará utilizar el hecho de que la suma de los ángulos interiores a un triángulo rectángulo es igual a π

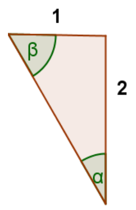
Sea β el ángulo agudo desconocido, se verifica que:

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\beta=\pi \Leftrightarrow \beta=\pi-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

Por lo tanto nuestro triángulo nos queda:



Resuelvan el triángulo de la figura



En este caso conocemos únicamente la medida de los catetos.

Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el valor de la hipotenusa:

$$hipotenusa^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow \boxed{hipotenusa = \sqrt{5}}$$

Calculamos ahora el valor de los ángulos β y α, para ello utilizaremos las razones trigonométricas: $tg(\alpha) = \frac{1}{2}$

Ya que dicho valor no aparece en la tabla construida anteriormente, pediremos ayuda a nuestra calculadora:

$$\alpha = tg^{-1}(0.5) \Leftrightarrow \boxed{\alpha \cong 0.46 rad}$$

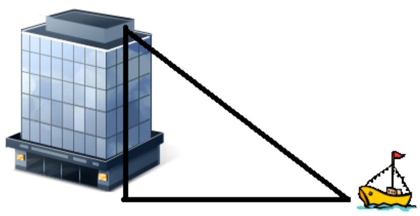
En forma análoga : $tg(\beta) = 2 \Leftrightarrow \beta = tg^{-1}(2) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\beta \cong 1.11 rad}$$

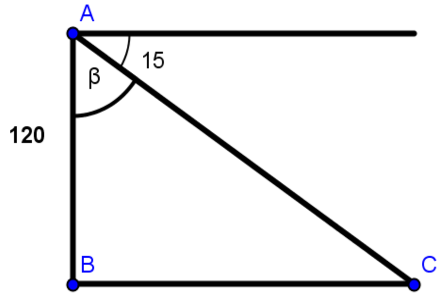
Ejemplo Desde lo alto de un edificio de 120m situado en la costa, se observa un barco. Si el ángulo de depresión del barco es de 15º ¿A qué distancia se encuentra el barco de la base del edificio?

Construyamos nuestra figura de análisis:

El ángulo de depresión es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto que se encuentra debajo de esta.



Ahora nos independizamos de las imágenes



Nos interesa conocer la medida del lado $\overline{BC}$ de nuestro triángulo, que en este caso representa el cateto opuesto.

Sabemos que

$\beta + 15° = 90°$, de donde $\beta = 75°$

Para obtener su valor a partir de los datos dados podemos utilizar la tangente del ángulo de 75º

$$tg(75°) = \frac{catet.\ opuesto}{catet.\ adyacente} \Leftrightarrow$$

$$tg(75°) = \frac{catet.\ opuesto}{120}$$

Multiplicamos por 120 ambos términos:

$$\Leftrightarrow 120.tg(75°) = catet.\ opuesto \Leftrightarrow$$

$$\boxed{447.85 = catet.\ opuesto}$$

.

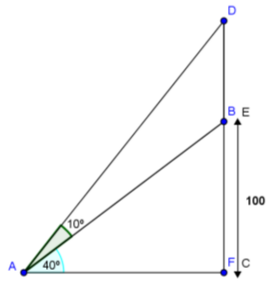
Respuesta:El barco se encuentra a 447.85 m del edificio

Desde un punto A, a nivel del suelo, los ángulos de elevación de la punta D y la base B de un mástil situado en la cima de una colina son 10º y 40ª. Calculen la altura del mástil si se sabe que la altura de la colina es de 100 m.

Para comenzar, intentaremos representar gráficamente la situación planteada:

Se define el ángulo de elevación como aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto situado arriba de ésta

Y ahora nos independizaremos de la imagen inicial y ubicamos los datos del problema obtenemos la siguiente figura de análisis:



Nos piden calcular la longitud del segmento $\overline{DB}$, para hallarlo podemos primero hallar la longitud del segmento $\overline{DF}$ y luego restarle 100.

De la figura de análisis se deduce que $tg(50°) = \frac{\overline{FD}}{\overline{AF}}$

$\Leftrightarrow \; tg(50°)\overline{AF} = \overline{FD}$ (1)

Averiguamos ahora la medida del segmento $\overline{AF}$

En el triángulo ABF

$$tg(40°) = \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} = \frac{100}{\overline{AF}} \Leftrightarrow tg(40°)\overline{AF} = 100 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AF} = \frac{100}{tg(40°)} \Leftrightarrow \boxed{\overline{AF} \cong 119{,}18}$$

Volvemos a la ecuación (1)

$$tg(50°)\overline{AF} = \overline{FD} \Leftrightarrow tg(50°)(119{,}18) = \overline{FD} \Leftrightarrow$$

$$\overline{FD} \cong 142{,}03$$

Por lo tanto la altura del mástil es
$142{,}03 - 100 = 42{,}03m$

Respuestas a ejercicios de aplicación

1- 210º 3º cuadrante.

395º 1º cuadrante.

15º 1º cuadrante.

-230º 2º cuadrante.

850º 2º cuadrante.

Unidad 5 · Actividades

Referencias para actividades:

RO·CC
Resolución optativa con clave de corrección

RO·P
Resolución optativa para enviar al profesor

TPO
Trabajo Práctico Obligatorio

RO·P

Ejercitación propuesta

1. Hallar qué ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ verifica:

   a. Coseno igual al $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

   b. coseno igual al $sen\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

   c. Tangente igual a $tg\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

2. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para los valores de x que se indican

   a. $sen^2(x) - \frac{sen(x)}{2} = 0 \ con \ 0 \le x \le 2\pi$

   b. $\cos^2 x - 1 = 0 \quad 0 \le x \le \pi$

   c. $2\cos(x) = -\sqrt{2} \quad 0 \le x \le 2\pi$

3. Desde la cima de un monte a 40m de altura los ángulos de depresión de dos botes alineados con la base son 30º y 45º. Hallar la distancia entre los botes.

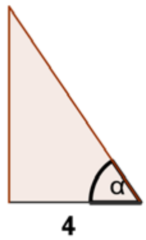
4. Un edificio de 50 m de altura proyecta una sombra de 138m. ¿cuál es el ángulo de elevación del sol?

5. Una escalera está apoyada sobre la pared de un edificio y su base se encuentra a una distancia de 1m del edificio. Si el ángulo que forma la escalera con el suelo es de 60º determine a qué altura se encuentra el extremo superior de la escalera y cuál es la longitud de la misma.

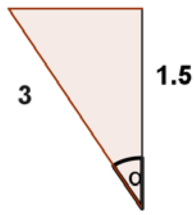
6. Dos edificios se encuentran a una distancia de 50 m. Desde el techo del edificio más bajo el ángulo de elevación hasta el borde del edificio más alto es de 40º. ¿cuál es la altura del edificio más bajo si la altura del más alto es de 60 m?.

7.

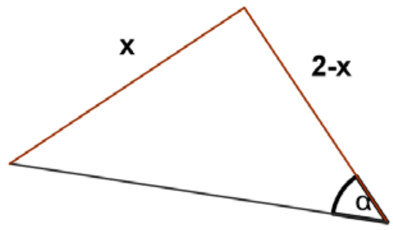
a) Calcular el valor del otro cateto si se sabe que α= 60°



b) Calcular el valor de α y el valor del otro cateto.



c) Hallar el valor de x que verifica que tgα = 2



Podrán encontrar más ejercitación en el cuadernillo: Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas examen de ingreso (EDI). Curso de apoyo. Comprensión de textos. Matemática. Autor: Universidad Argentina de la Empresa Secretaría Académica y legal. 2011.

Respuesta de los ejercicios correspondientes a la Unidad 5.

1. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$

2. a) S= {0, 2π, $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ }

   b) $S = \{0, \pi\}$

   c) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

3. $40\left(\sqrt{3} - 1\right)$

4. 19.91º

5. El extremo superior de la escalera se encuentra a $\sqrt{3}$ m del suelo y la escalera mide 2 m

6. Aproximadamente 18m

7. a) $4\sqrt{3}$

   b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\alpha = 60°$

   c) $x = \frac{4}{3}$