i. Expresiones algebraicas

1. Simplificar con las siguientes expresiones, aplicando propiedades.

a. $(x+y)^2-(x+y)(x-y)-2y^2$ Rta: 2xy

b. $\dfrac{x^3y^2(xy^2)^{-1}}{x(x^2y)}$ con $x\neq 0,\ y\neq 0$ Rta: $\dfrac{1}{xy}$

c. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}$ con $x\neq 1,-1$ Rta: $\dfrac{2x}{x^2-1}$

d. $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^2+y^2}$ con $x\neq 0,\ y\neq 0$ Rta: $\dfrac{1}{x^2y^2}$

2. Demostrar que se verifican cada una de las siguientes identidades

a. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ $\forall\ x\in R,\ x\geq 0.$

b. $\dfrac{n^3+3n^2+n}{n^2+1}=\dfrac{n^2+3n+1}{n+\frac{1}{n}}$ $\forall\ n\in \mathrm{N}$

ii. Ecuaciones

1. Verificar que el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es solución de la ecuación $x^4-10x^2+1=0$.

2. Para cada una de las funciones f: Dom $f\rightarrow$ R, hallar el conjunto de sus raíces; esto es, hallar el conjunto $\sigma(f)$ cuya definición es: $\sigma(f)=\{t\in Dom\,f\ /\ f(t)=0\}$.

a. f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=t+1$
b. f: $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=2t+1$
c. f: $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=2t+1$
d. f: $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(w)=w+\pi$
e. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(w)=w+\pi$
f. f: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(u)=u^2-4$
g. f: $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(u)=u^2-4$
h. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=t^2-2$
i. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2+2$
j. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=(t-1)^2-2$
k. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=2t^2-1$
l. f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(t)=t^2+2t+1$.

Respuestas:

a. $\sigma(f)=\varnothing$ b. $\sigma(f)=\varnothing$ c. $\sigma(f)=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ d. $\sigma(f)=\varnothing$ e. $\sigma(f)=\{-\pi\}$ f. $\sigma(f)=\{2\}$

g. $\sigma(f)=\{-2,2\}$ h. $\sigma(f)=\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$ i. $\sigma(f)=\varnothing$ j. $\sigma(f)=\{1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\}$ k. $\sigma(f)=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

l. $\sigma(f)=\{-1\}$

iii. Sistemas de ecuaciones lineales

Hallar, analítica y gráficamente, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ -x+3y=-2 \end{cases}$

Rta: S = $\left\{\left(\frac{7}{5}\,,\,-\frac{1}{5}\right)\right\}$

b. $\begin{cases} x-6=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Rta: S = $\{(8\,,\,-1)\}$

c. $\begin{cases} -y+5x=1 \\ 10x+\frac{1}{2}=2y \end{cases}$

Rta: S = $\varnothing$

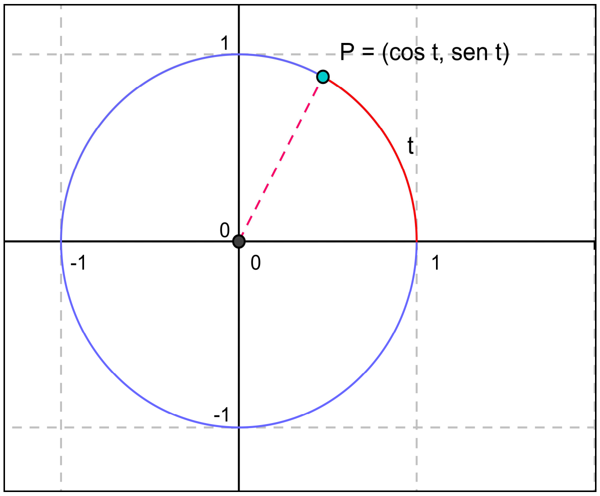
d. $\begin{cases} y=-x+\frac{3}{2} \\ -2x+3=2y \end{cases}$

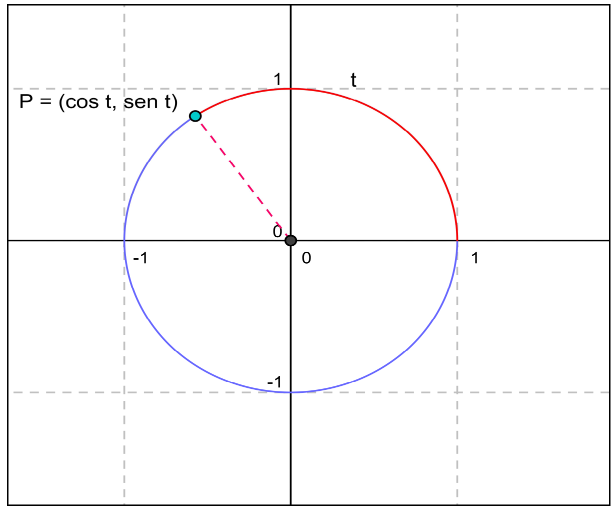
Rta: S = $\left\{(x, y)\in R^2 \;/\; y=-x+\frac{3}{2}\right\}$

iv. Relaciones trigonómetricas

La circunferencia de centro (0,0) y radio 1 recibe el nombre de circunferencia trigonométrica. Esta circunferencia se orienta de la siguiente manera: si un punto se desplaza sobre esta circunferencia, desde el punto (1,0), en el sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario), se dice que se desplaza en sentido positivo. En caso contrario, el sentido es negativo.

Sea P = (x_p, y_p) un punto sobre la circunferencia trigonométrica al cual se llega luego de recorrer sobre la misma un arco de longitud t desde el punto (1,0) en sentido positivo. Se define: $x_p = \cos t$; $y_p = \text{sen } t$. Gráficamente:





Notemos que cada vez que recorremos una longitud t sobre la circunferencia estamos 'barriendo' un ángulo. Considerando que la longitud de la circunferencia trigonométrica es 2π y que su ángulo central es $360°$, por tratarse de una relación de proporcionalidad directa, puede deducirse que barrer un ángulo de 180° equivale a recorrer un arco de longitud π radianes.

La equivalencia mencionada da lugar a dos sistemas de medición angular: el sistema sexagesimal, cuya unidad es el grado sexagesimal (ejemplo $\alpha = 180°$) y el sistema circular cuya unidad es el radián (ejemplo $\alpha = \pi\ rad$).

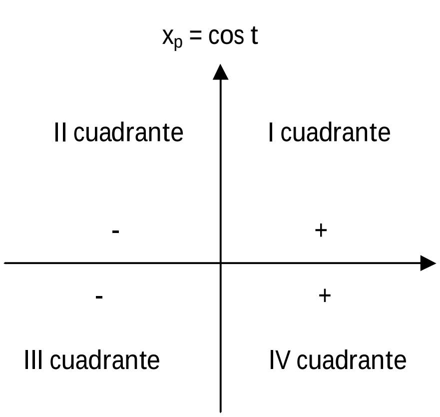
Para operar con ángulos expresados en sistema circular podrás utilizar la calculadora activando el modo "rad". Según cual sea la calculadora utilizada, la forma de activar este modo puede variar.

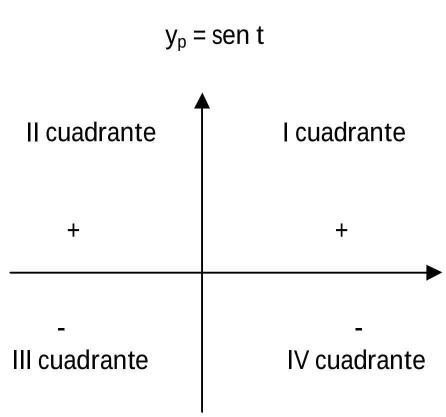
Los valores de sen t y cos t para los recorridos que más frecuentemente se utilizan en el primer cuadrante son:

t (en grados)	0	30°	45°	60°	90°
t (en radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabla I – Valores más frecuentes de seno y coseno en el primer cuadrante

Considerando el signo de x e y en cada uno de los cuadrantes, se deduce el signo de las relaciones trigonómetricas $x_p = \cos t$; $y_p = \text{sen } t$ de acuerdo al cuadrante en el que cae el recorrido:



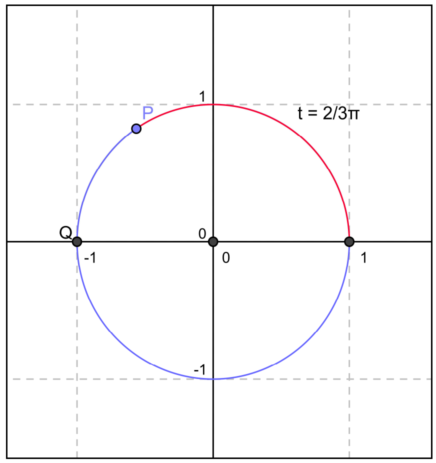


Pasaje al primer cuadrante

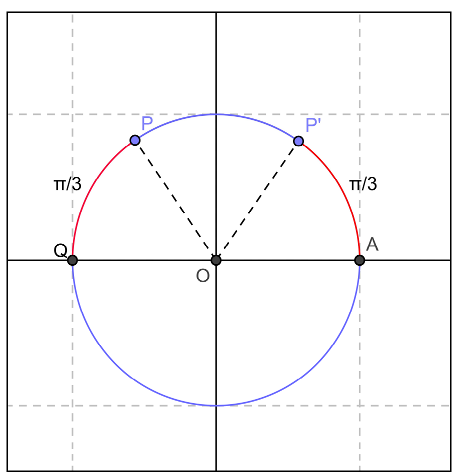
Utilizando la tabla I, la simetría de la circunferencia trigonométrica se puede calcular las relaciones trigonométricas para ciertos valores de t. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Calcular sen $(\frac{2}{3}\pi)$, cos $(\frac{2}{3}\pi)$

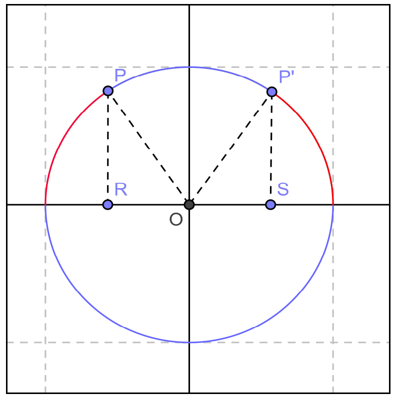
Dado que recorrer desde el punto (1; 0) una longitud de π equivale a 'barrer' un ángulo de 180°, recorrer una longitud de $\frac{2}{3}\pi$ equivale a barrer un ángulo de 120° por lo que el recorrido cae en el segundo cuadrante.



Queremos calcular el valor de la abscisa y de la ordenada del punto P = (x_P , y_P) ya que x_P = cos $(\frac{2}{3}\pi)$, y_P = sen $(\frac{2}{3}\pi)$. Sabemos que el arco de circunferencia PQ (que se muestra en el siguiente gráfico) tiene una longitud de $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$. Marcamos en el primer cuadrante esta longitud de $\frac{\pi}{3}$ desde el punto (1, 0) tal como se muestra en el siguiente gráfico:



Los arcos de circunferencia PQ y AP' tienen la misma longitud: $\frac{\pi}{3}$. Las coordenadas del punto P' son $x_{p'}$ = cos $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}$; $y_{P'}$ = sen $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (por la tabla I). A continuación, construiremos dos triángulos rectángulos trazando segmentos perpendiculares al eje x que pasan por P' y por P .



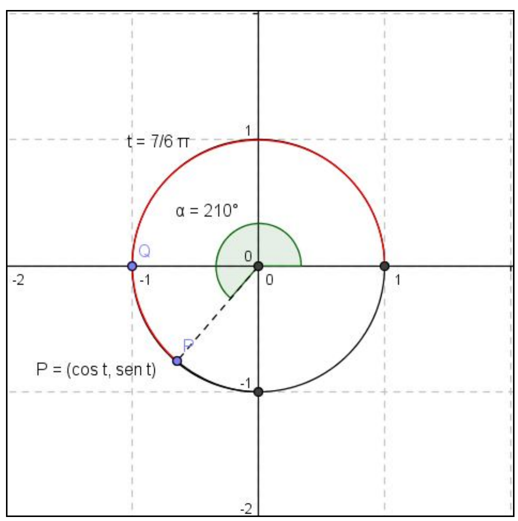
Los triángulos $O\overset{\Delta}{R}P$ y $O\overset{\Delta}{S}P'$ son congruentes. Por lo tanto, los puntos P y P' tienen el mismo valor en las ordenadas (es decir, están a la misma "altura") y los valores de sus abscisas son opuestos. Es decir, sen $\frac{2\pi}{3} = y_P = y_{P'} =$ sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos $\frac{2\pi}{3} = x_P = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

En general, si t es un recorrido que cae del primer cuadrante, $\pi - t$ es un recorrido en el segundo cuadrante y se verifica:

$$\boxed{\text{sen } t = \text{sen}(\pi - t)\ ;\ \cos t = -\cos(\pi - t)}$$

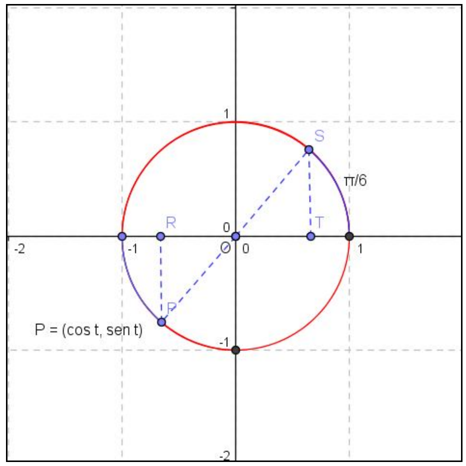
Ejemplo 2 Calcular sen $\frac{7}{6}\pi$, cos $\frac{7}{6}\pi$

Recorrer desde el punto (1 , 0) una longitud de $\frac{7}{6}\pi$ sobre la circunferencia trigonométrica equivale a barrer un ángulo de 210° por lo que el recorrido cae en el tercer cuadrante.



Queremos calcular el valor de la abscisa y el valor de la ordenada del punto P dado que $P = (x_P , y_P) = (\cos\frac{7}{6}\pi , \text{sen }\frac{7}{6}\pi)$.

La longitud del arco de circunferencia QP es $\frac{7}{6}\pi - \pi = \frac{1}{6}\pi$. Desde el punto (1, 0) marcamos un arco de medida $\frac{1}{6}\pi$, recorrido que se encuentra en el primer cuadrante.



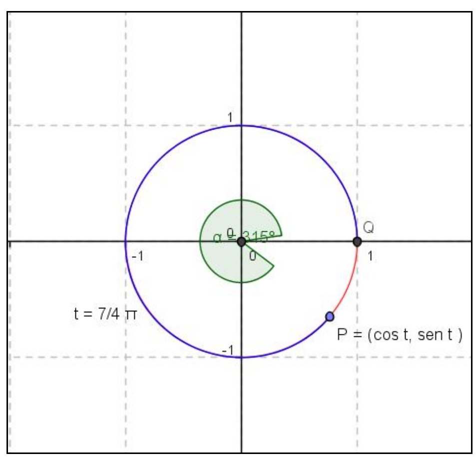
Los triángulos rectángulos $O\overset{\Delta}{T}S$ y $O\overset{\Delta}{R}P$ son congruentes y, en consecuencia, tanto el valor de la abscisa como el valor de la ordenada del punto P son opuestas al valor de la abscisa y al valor de la ordenada del punto S. Esto es, $x_P = -x_S$, $y_P = -y_S$. Dado que las componentes del punto S son conocidas por la tabla I tenemos que:

$x_P = \cos(\frac{7}{6}\pi) = -x_S = -\cos(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_P = \text{sen}(\frac{7}{6}\pi) = -y_S = -\text{sen}(\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

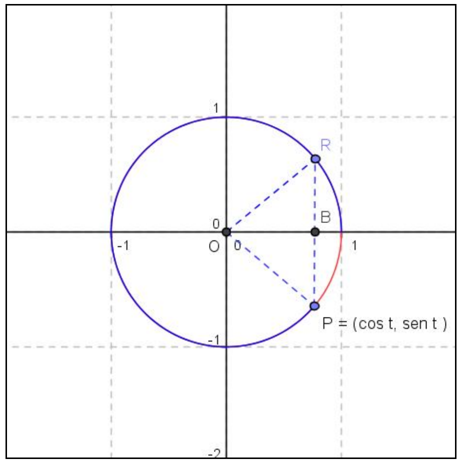
En general, si t es un recorrido en el primer cuadrante, $\pi +$ t es un recorrido en el tercer cuadrante (en este ejemplo, $\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6}$) se cumple que $\boxed{\text{sen}(\pi + t) = -\text{sen}\, t \,;\, \cos(\pi + t) = -\cos t.}$

<u>Ejemplo 3</u> Calcular $\text{sen}(\frac{7}{4}\pi)$, $\cos(\frac{7}{4}\pi)$

Recorrer una longitud de $\frac{7}{4}\pi$ equivale a barrer un ángulo de 315° por lo que el recorrido cae en el cuarto cuadrante.



El arco de circunferencia PQ tiene longitud $2\pi - \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$. Queremos calcular el valor de la abscisa del punto P, x_P , y el valor de la ordenada del punto P, y_P , dado que $x_P = \cos(\frac{7}{4}\pi)$, $y_P = \text{sen}(\frac{7}{4}\pi)$. Como hicimos anteriormente, trasladamos esta longitud al primer cuadrante desde el punto (1 , 0) :



Los triángulos $O\overset{\Delta}{B}R$ y $O\overset{\Delta}{B}P$ son congruentes. Luego, a partir del gráfico anterior, deducimos que el valor de la abscisa del punto P es igual al valor de la abscisa del punto R, mientras que el valor de la ordenada de P es opuesto al valor de la ordenada de R.

Teniendo en cuenta la tabla I tenemos que: $x_P = x_R = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y_P = -y_R = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En general, si t es un recorrido en el primer cuadrante, $2\pi - t$ es un recorrido que cae en el cuarto cuadrante (en este caso, $t = \frac{\pi}{4}$ y $2\pi - t = 2\pi - \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$) se tiene que $\boxed{\cos(t) = \cos(2\pi - t)\ ;\ \operatorname{sen}(t) = -\operatorname{sen}(2\pi - t).}$

Ejemplo 4. Calcular sen $\left(\frac{13}{6}\pi\right)$, cos $\left(\frac{13}{6}\pi\right)$

En este caso, al recorrer una longitud de $\frac{13}{6}\pi$ sobre la circunferencia trigonométrica, estamos barriendo un ángulo de 390°, por lo que estamos dando más de una vuelta a la circunferencia. Dado que en una vuelta barremos un ángulo de 360°, el recorrido cae en el primer cuadrante (390° = 330° + 60°).

Es decir que los valores de sen $\left(\frac{13}{6}\pi\right)$ y cos $\left(\frac{13}{6}\pi\right)$ van a ser iguales a los valores de sen $\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ y cos $\left(\frac{1}{6}\pi\right)$ dado que con ambos recorridos caemos en el mismo punto. Por lo que sen $\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, cos $\left(\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En general, $\boxed{\operatorname{sen}(2\pi + t) = \operatorname{sen}(t),\ \cos(2\pi + t) = \cos(t)}$

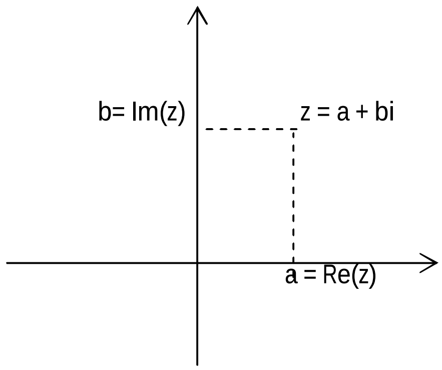
Observación: Hemos calculado, con la ayuda de la tabla I, los valores **exactos** del seno y del coseno para algunos recorridos que caen en otros cuadrantes distintos del primero. Notemos que para cada uno de los recorridos con los que trabajamos $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$ pudimos encontrar un recorrido en el primer cuadrante el cuál que nos permitía calcular los valores tanto del seno como del coseno.

¿Cómo calculamos los valores de las relaciones trigonométricas cuando se trata de un recorrido que, al hacer el pasaje al primer cuadrante, no figure en la tabla I? Por ejemplo, ¿cómo calculamos sen(3) o cos($-5{,}1\pi$)? En estos casos, para operar con recorridos expresados en sistema circular podrás utilizar la calculadora activando el modo “rad”. Según cual sea la calculadora utilizada, la forma de activar este modo puede variar. Vale la pena aclarar que la calculadora proporciona valores aproximados.

v. Introducción a los números complejos

Se define el conjunto de los números complejos, C, como aquel cuyos elementos son de la forma a + bi, con a y b números reales, mientras que i es la unidad imaginaria, que satisface la ecuación $i^2 + 1 = 0$. En símbolos: C = {a + bi / a $\in$ R, b $\in$ R}. Si z = a + bi, el número ‘a’ es la parte real de z mientras que ‘b’ es la parte imaginaria.

Gráficamente, los números complejos se representan como puntos del plano cartesiano; en el eje horizontal se representa la parte real del número complejo mientras que en el eje vertical se representa la parte imaginaria.



Se define la suma y el producto de números complejos de la siguiente manera:

- Suma: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i
- Producto: (a + bi). (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i

Dado z = a + bi, con a, b $\in$ R, se define el conjugado de z como el número complejo $\bar{z}$ = a – bi y el módulo de z como el número real no negativo |z| = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Dados z = 2 + $\frac{1}{3}$ i , w = - 1 – i , realizar las siguientes operaciones.

   a. | z | Rta: $\frac{\sqrt{37}}{3}$

   b. $\bar{w}$ Rta: -1+ i

   c. z + w Rta : 1 – 2/3 i

   d. z. w Rta: $-\frac{5}{3}-\frac{7}{3}i$