Unidad 2 · Expresiones Algebraicas

Para comenzar, analicemos el siguiente problema:

El rectángulo de la figura es tal que su base supera a su altura en 5 unidades ¿Cómo queda expresada el área del rectángulo en función de la longitud de su base?

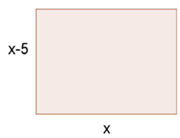
Solución: En este problema se desconoce la medida de los lados del rectángulo pero sabemos que la medida de la base supera en 5 unidades a la de su altura. De esta forma si llamamos x a la longitud de la base del rectángulo, la medida de la altura del mismo es x-5.

Figura de Análisis

En base a la figura de análisis podemos ver que el área del rectángulo será:

$$\boxed{A = x(x-5) = x^2 - 5x}$$

En este ejemplo el valor de x debe ser un número positivo y mayor que 5 debido a que x y (x-5) representan las medidas de los lados del rectángulo.



En muchos problemas nos encontramos con expresiones en las que conviven números y letras vinculadas por operaciones matemáticas. Dichas expresiones se denominan expresiones algebraicas.

En esta unidad aprenderemos a trabajar con expresiones algebraicas. Si bien ya trabajamos con algunas expresiones de este tipo al aplicar las propiedades de los números reales, ahora nos dedicaremos a definir con más detalle el trabajo con las mismas.

Al terminar la unidad ustedes deben poder aplicar correcta y sistemáticamente todas las propiedades algebraicas aún en ejercicios complejos, reconocer y obtener expresiones algebraicas equivalentes, por operación, factorización y/o simplificación y aprender a determinar para qué valores de variable dicha expresión tiene sentido.

Contenido de la Unidad

TEMA 1 · Factorización y simplificación de expresiones algebraicas

Comenzaremos definiendo a qué llamamos expresión algebraica.

2.1.1 Expresiones Algebraicas

Una expresión algebraica es aquella que involucra variables y números reales vinculados por operaciones matemáticas.

Ejemplo: $5x + 8y^3 - 3$

En este caso, x, y son las variables de la expresión algebraica. En general, en caso de que no se diga específicamente y las variables de la expresión lo permitan, se asume que pueden tomar cualquier valor real.

$$\left(y^4 + 3y - \frac{1}{2}y\right)\left(3 - y^2\right)$$

$\dfrac{5x + x^3 - 3}{x + 2}$ con $x \neq -2$. En este ejemplo la variable x puede tomar cualquier valor real excepto el -2, debido a que en dicho valor se anula el denominador y, como ya dijimos en la unidad anterior, no es válida la división por 0.

Denominamos expresión **algebraica entera** a aquella donde las variables están afectadas por las operaciones suma, resta, multiplicación y potenciación con exponentes enteros no negativos. Nuestros primeros dos ejemplos corresponden a expresiones algebraicas enteras

A las expresiones algebraicas donde las variables están dividiendo o afectadas por exponentes enteros negativos, las llamamos **expresiones algebraicas fraccionarias**. En este caso, la expresión algebraica estará definida sólo para los valores de variable que no anulen el denominador.

Es muy importante, previo a operar con una expresión algebraica fraccionaria, determinar para qué valores de variable, dicha expresión tiene sentido. Estos valores son los que no anulan el denominador.

Ejemplos:

$\dfrac{5x + x^3 - 3}{x + 2}$ con $x \neq -2$

$\dfrac{4 + x}{x^2 + 3}$ con $x \in \Re$

Sin embargo, la expresión $\dfrac{4 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$, no es una expresión algebraica fraccionaria debido a que la variable está afectada por una raíz. Trabajaremos con este tipo de expresiones más adelante.

Ejercicio de aplicación

1- Dadas las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias, indiquen para qué valores de variable tienen sentido, es decir especifiquen su región de validez.

i) $\dfrac{x}{x + 1}$

ii) $1 + x^{-2}$

Una vez resuelto, podrán ver la respuesta al finalizar la unidad.

Si en la expresión algebraica la variable se encuentra elevada a un exponente racional no entero, la expresión se denomina irracional. En este caso, si el índice de la raíz es par, la expresión algebraica que es argumento de dicha raíz estará definida sólo para los valores de variable que hagan que el argumento sea positivo o cero.

Ejemplo: $\sqrt{x} + x$ con $x \geq 0$

2.1.2 **Factoreo de expresiones algebraicas**

Muchas veces, en el momento de realizar cálculos con expresiones algebraicas, conviene simplificarlas previamente de forma que el cálculo resulte más sencillo. En este proceso de simplificación pueden ayudarnos los casos de factoreo.

La factorización también podrá ayudarnos en la resolución de ecuaciones, tema que veremos en la próxima unidad.

¿Qué significa factorizar una expresión algebraica?.

Factorizar una expresión algebraica entera, significa escribir dicha expresión como un producto de expresiones irreducibles.

Una expresión irreducible es aquella que no puede expresarse como el producto de dos o más expresiones algebraicas enteras.

Son expresiones irreducibles por ejemplo $x+3$, x^2+1.

Recordemos los casos de factoreo más importantes.

:: **Factor común**

Si en una expresión algebraica entera, donde las variables se relacionan únicamente mediante las operaciones de suma y resta, existe un factor que se repite en todos los términos, entonces la expresión puede escribirse como el producto entre dicho factor y el resultado de dividir cada término de la expresión algebraica por el factor común.

Ejemplo 1

$x^2y+6x^5+8x^3$ En este caso vemos que la variable x aparece en todos los términos de la expresión elevada a distintas potencias. En este caso el factor común será x elevada al mínimo exponente que aparece en dicha expresión. En nuestro caso x^2

De esta forma la expresión dada se puede factorizar como $x^2\left(y+6x^3+8x\right)$ donde la expresión entre paréntesis se obtiene de dividir cada término de la expresión original por x^2.

Una forma de verificar que el factor común fue realizado correctamente es revertir la operación, realizando la distributiva y verificando que se llega a la expresión original.

Ejemplo 2

$ab^4+\sqrt{2}a^5b^3$ en este caso tanto la variable a como la b aparecen en ambos términos de la expresión algebraica…

¿Cuál será la expresión que podremos extraer como factor común en este caso?

¡Correcto! ab^3

De esta forma, la expresión $ab^4+\sqrt{2}a^5b^3$ podrá ser re-escrita en forma factorizada como $ab^3\left(b+\sqrt{2}a^4\right)$.

:: **Diferencia de cuadrados**

Como su nombre lo indica, necesitamos una diferencia (resta) de dos expresiones al cuadrado $x^2 - y^2$ dicha expresión podrá factorizarse como:

Pueden verificar la igualdad realizando las distributivas correspondientes, en el segundo término

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)}$$

Ejemplo 3:

$4y^2 - x^2$, veamos que el primer término de esta expresión puede ser escrito como $(2y)^2$, de esto se desprende que $4y^2 - x^2 = (2y)^2 - x^2$ ahora si aplicamos la fórmula de diferencia de cuadrados donde las bases de las potencias cuadradas son x y $2y$, entonces la expresión original nos queda $4y^2 - x^2 = (2y)^2 - x^2 = (2y-x)(2y+x)$.

Ejemplo 4:

Veamos ahora cuál sería la factorización de $m^3y^2 - my^4$.

Factorizar significa escribir como producto de expresiones irreducibles.

Como primer paso, podremos buscar si existe algún factor común…

¿Lo encontraron?

¡Exacto!

De esta forma nuestra expresión original $m^3y^2 - my^4$ nos quedará expresada como el producto de dos factores: $my^2(m^2 - y^2)$

Podemos ver que el segundo factor es una diferencia de cuadrados y puede escribirse como $(m^2 - y^2) = (m-y)(m+y)$.

De esta forma la factorización de nuestra expresión algebraica $m^3y^2 - my^4$ será: $my^2(m-y)(m+y)$

Es importante que comprendan que la expresión algebraica factoreada $my^2(m-y)(m+y)$ es la misma expresión algebraica original $m^3y^2-my^4$ pero expresada de forma diferente, como producto de expresiones irreducibles. La prueba está en que mediante distributiva podemos pasar de la expresión factoreada a la original.

Notemos que y^2 no es una expresión algebraica irreducible puesto que se puede escribir como y.y, sin embargo, para que la expresión algebraica no quede muy extensa se acepta que quede escrito como y^2

Continuemos con los casos de factoreo…

:: Trinomio cuadrado perfecto y Cuatrinomio cubo perfecto

En este caso nos valdremos del desarrollo del cubo o del cuadrado de un binomio, ya estudiados por nosotros en la unidad anterior, para factorizar trinomios cuadrados o cuatrinomios cubos perfectos, lo podemos hacer de la siguiente manera:

Trinomio cuadrado perfecto

La expresión $a^2+2ab+b^2$ se puede factorizar como: $(a+b)^2$

De la misma manera: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Cuatrinomio cubo perfecto

La expresión $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ se puede factorizar como: $(a+b)^3$

Análogamente: $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

Ejemplo 5:

Factorizar $10xy+x^2+25y^2$

Observemos que el término x^2 es el cuadrado de x y el último término es el cuadrado de 5y. Para que esta expresión corresponda al desarrollo del cuadrado de un binomio, el término 10xy deberá corresponderse con el doble producto de x por 5y, veamos si esto es así: 2.x.(5y)=10xy y esto es igual al primer término de nuestra expresión original, termino central del desarrollo del binomio cuadrado.

Utilizando la fórmula del trinomio cubo perfecto cuando a=x y b=5y obtenemos que $x^2+10xy+25y^2=(x+5y)^2$

Ejemplo 6:

Factorizar: $-27y+27-y^3+9y^2$ En este ejemplo, si bien los términos no se encuentran ordenados, detectamos a y^3 y a 27 que es el cubo de 3, de esta manera, si ordenamos los términos $27-27y+9y^2-y^3$ podemos notar cierta similitud con una de las fórmulas asociadas con el cuatrinomio cubo perfecto. Deberemos chequear entonces que las restantes expresiones se correspondan con $3y^2 3 = 9y^2$ y con $3y(3)^2 = 27y$

De esta forma $27 - 27y + 9y^2 - y^3$ puede factorizarse como $(3 - y)^3$
$27 - 27y + 9y^2 - y^3 = (3 - y)^3$.

Ejemplo 7:

Factorizar: $4 - 5x + x^2$, en este caso identificamos a 4 cuadrado de 2 y a x^2, sin embargo, la expresión **no** se corresponde con un trinomio cuadrado perfecto pues para que lo sea se debería verificar que el término 5x es igual a 2.2.x y esto no sucede.

Aprenderemos a factorizar esta expresión en la próxima sección.

¿Cómo sabemos que la expresión algebraica está factorizada?

En principio, cuando no sea posible seguir aplicando algunas de las reglas de factoreo vistas.

Los que vimos son sólo algunos casos de factoreo. En la unidad de ecuaciones veremos más estrategias de factoreo de expresiones algebraicas.

Ejercicio de aplicación

2- Factoricen las siguientes expresiones algebraicas todo lo que sea posible:

i) $2x^4 + 162 - 36x^2$ ii) $x^4 y + 4x^3 y^2 + 4x^2 y^3$ iii) $12r^2 - 3r^4$

2) Encuentren, si existe, una expresión algebraica entera A que verifique:
$x^4 y - x^3 y = A(x+1)$

Ayuda: factoricen la expresión de la izquierda.

Una vez resueltos, podrán ver la solución al terminar la unidad

2.1.3 Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Dada una expresión algebraica fraccionaria, cociente de expresiones algebraicas enteras, si al factorizar las expresiones del numerador y denominador en ambos aparecen idénticos factores, entonces dichos factores pueden simplificarse.

En símbolos: Si A, B y C son expresiones algebraicas enteras entonces:

$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$ para los valores de variable que no anulan B ni C

La expresión algebraica simplificada mantiene la región de validez de la expresión original aunque la expresión C ya no aparezca en el denominador.

Ejemplo 8

Pensemos entre todos…

Simplifiquen las siguientes expresiones algebraicas racionales:

$$\frac{5x^2-30x}{36-x^2} \quad con\ x \neq 6\ y\ x \neq -6$$

En primer lugar, debemos factorizar el numerador y el denominador

En el denominador podemos ver una diferencia de cuadrados: $36-x^2=(6-x)(6+x)$

Por su parte en el numerador $5x^2-30x$ podemos sacar $5x$ como factor común. Como consecuencia $5x^2-30x=5x(x-6)$.

La expresión fraccionaria original nos queda: $\frac{5x^2-30x}{36-x^2}=\frac{5x(x-6)}{(6-x)(6+x)}$.

Ahora, si bien (x-6) y (6-x) no son expresiones idénticas podemos re-escribir 6-x como –(x-6) y de esta forma:

$$\frac{5x^2-30x}{36-x^2}=\frac{5x(x-6)}{(6-x)(6+x)}=\frac{5x(x-6)}{-(x-6)(6+x)}$$

Ahora podemos simplificar los factores (x-6) ubicados en el numerador y denominador obteniendo la expresión simplificada de la expresión racional original:

$$\frac{5x^2-30x}{36-x^2}=-\frac{5x}{(6+x)}$$

Recordemos que esta igualdad es válida para todo x tal que $x \neq 6\ y\ x \neq -6$

Ejercicios de aplicación

3) Simplifiquen la siguiente expresión racional

$$\frac{x^2y^2+xy^3}{x^4-y^4} \quad con\ x \neq y\ ,\ x \neq -y$$

4) Indiquen si la siguiente igualdad es verdadera o falsa

$$\frac{x^3 - x}{x^4 - 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Podrán verificar la respuesta al finalizar la unidad.

TEMA 2 · Operaciones con expresiones algebraicas

2.2.1 Suma y resta de expresiones algebraicas enteras

Para sumar expresiones algebraicas se utilizan las propiedades de los números reales vistas en la unidad anterior.

En el caso de expresiones algebraicas enteras, la suma se realiza sumando los términos semejantes, que son aquellos que poseen idéntica parte literal (exactamente las mismas variables, cada una elevada al mismo exponente).

Para pensar entre todos:

Dadas las expresiones $A = 2xy + 3x^2y + 2xy^3 - y$ y $B = x^2y + xy - 4xy^3 + 2y - 6$, calculen A+B

Primero identificamos términos semejantes. Aquí los indicamos con el mismo color, y luego se suman dichos términos.

Si un término no posee término semejante en la otra expresión algebraica, se lo escribe directamente en el resultado.

$2xy + 3x^2y + 2xy^3 - y + x^2y + xy - 4xy^3 + 2y - 6 =$
$3xy + 4x^2y - 2xy^3 + y - 6$

Cálculos Auxiliares

$2xy + xy = (2+1)xy = 3xy$

$3x^2y + x^2y = (3+1)x^2y = 4x^2y$

$2xy^3 - 4xy^3 = (2-4)xy^3 = -2xy^3$

$-y + 2y = (-1+2)y = y$

Dadas las expresiones $A = m^3 - 2m^2n + 3n^2m - 5mn^3$ y $B = -6m^2n + n^2m + 4mn^3 - n^2$, calculen A-B.

Primero recordemos que el signo menos delante de un paréntesis indica que se deben invertir los signos de los términos de la expresión que está afectada por dichos paréntesis. En símbolos: A-B = A+ (-B), donde (-B) se denomina expresión opuesta de B y es igual a $+6m^2n - n^2m - 4mn^3 + n^2$

En este caso la expresión A+ (-B) nos queda: $m^3 - 2m^2n + 3n^2m - 5mn^3$ $+6m^2n - n^2m - 4mn^3 + n^2$

Ahora operamos como vimos en el ejemplo anterior, en este caso juntamos los términos semejantes, para operar entre ellos, escribiéndolos entre paréntesis.

$$m^3-2m^2n+3n^2m-5mn^3+6m^2n-n^2m-4mn^3+n^2=\underbrace{m^3+n^2}+\left(-2m^2n+6m^2n\right)+$$

No poseen términos semejantes, por este motivo los escribimos igual en la solución.

$$\left(3n^2m-n^2m\right)+\left(-5mn^3-4mn^3\right)=m^3+n^2+4m^2n+2n^2m+-9mn^3$$

Respuesta final:

$$m^3-2m^2n+3n^2m-5mn^3-\left(-6m^2n+n^2m+4mn^3-n^2\right)=m^3+n^2+4m^2n+2n^2m+-9mn^3$$

2.2.2 Multiplicación de expresiones algebraicas enteras

El producto de dos expresiones algebraicas enteras, es una nueva expresión algebraica, la cual se obtiene como resultado de multiplicar cada término de la primer expresión por cada término de la segunda, haciendo uso de la propiedad distributiva, y sumando luego los términos semejantes, si los hubiera.

En este punto es importante recordar la ley de producto de potencias de igual base: $a^n.a^m=a^{n+m}$

Calculen $(x+1)\left(x^2-5x-2\right)$

Comenzamos distribuyendo el primer factor con cada término de la segunda expresión:	$(x+1)\left(x^2-5x-2\right)=(x+1)x^2+(x+1)(-5x)+(x+1)(-2)$
Aplicamos nuevamente propiedad distributiva en cada término de esta suma y aplicamos las propiedades de potenciación:	$=x^3+x^2-5x^2-5x-2x-2$
Sumamos términos semejantes	$=x^3+(1-5)x^2+(-5-2)x-2$ $=x^3-4x^2-7x-2$

Respuesta: $\boxed{(x+1)\left(x^2-5x-2\right)=x^3-4x^2-7x-2}$

2.2.3 Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias.

En el caso de expresiones algebraicas fraccionarias, para realizar la suma y resta, se procede como en la suma y resta de fracciones.

Para pensar entre todos:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{5x-3}{x^2+x}-\frac{2}{x^2} \text{ con } x \neq 0 \; y \; x \neq -1$$

Como en suma y resta de fracciones primero se debe sacar denominador común.

Si los denominadores de cada fracción se encuentran factorizados, el denominador común es el producto entre los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

En nuestro ejemplo los denominadores factorizados nos quedan:

$x+1$ $\qquad x^2+x=x(x+1)$ $\qquad x^2$

$$\frac{4}{x+1}+\frac{5x-3}{x^2+x}-\frac{2}{x^2}=\frac{4}{x+1}+\frac{5x-3}{(x+1)x}-\frac{2}{x^2}$$

En este caso, el denominador común es: $x^2(x+1)$

El numerador está definido por la suma de los resultados de dividir el común denominador por el denominador de cada fracción y luego multiplicar esto por el numerador de dicha fracción.

$$\frac{4}{x+1}+\frac{5x-3}{x^2+x}-\frac{2}{x^2}=\frac{\quad}{x^2(x+1)}$$

De esta forma, la suma nos queda:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{5x-3}{x^2+x}-\frac{2}{x^2}=\frac{4x^2+(5x-3)x-2(x+1)}{x^2(x+1)}$$

Ahora realizamos las distributivas en el numerador: $\dfrac{4x^2+5x^2-3x-2x-2}{x^2(x+1)}$

Y finalmente sumamos los términos semejantes: $\dfrac{9x^2-5x-2}{x^2(x+1)}$

Obteniendo: $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{5x-3}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{9x^2-5x-2}{x^2(x+1)}$ con $x \neq 0 \; y \; x \neq -1$

Veamos otro caso:

$$\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{x}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x^2-4} \text{ con } x \neq 0,\ x \neq -2 \ y \ x \neq 2$$

Factorizamos los denominadores:

$$2x^2-4x=2x.(x-2) \qquad x^2-4x+4=(x-2)^2 \qquad x^2-4=(x-2)(x+2)$$

La expresión original nos queda $\frac{x+1}{2x(x-2)}-\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$

Podemos ver que en el tercer término se pueden simplificar los factores (x+2) del numerador y denominador. Esto lo hacemos para hacer más fácil la cuenta.

Luego de simplificar, obtenemos:

$$\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{x}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+1}{2x(x-2)}-\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-2)}$$

con $x \neq 0,\ x \neq -2 \ y \ x \neq 2$

El denominador común nos queda: $2x.(x-2)^2$ y por lo tanto:

$$\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{x}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{(x+1)(x-2)-x.2x+1.2x(x-2)}{2x(x-2)^2}$$

Realizando las distributivas correspondientes: $\frac{x^2-2x+x-2-2x^2+2x^2-4x}{2x(x-2)^2}$

Sumamos términos semejantes en el numerador y obtenemos de esta forma el resultado final:

$$\boxed{\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{x}{x^2-4x+4}+\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x^2-5x-2}{2x(x-2)^2} \text{ con } x \neq 0,\ x \neq -2 \ y \ x \neq 2}$$

2.2.4 Multiplicación de expresiones algebraicas fraccionarias.

El producto de expresiones algebraicas fraccionarias se desarrolla en forma análoga a la multiplicación de fracciones. Esto significa que el producto de dos expresiones algebraicas fraccionarias, es una expresión cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Es decir, si A, B, C, y D son expresiones algebraicas enteras entonces: $\frac{A}{B}.\frac{D}{C}=\frac{A.D}{B.C}$

Veamos algunos ejemplos.

Realicen el siguiente producto:

$$\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}.\frac{x^2+3x}{x^2+x} \; con \; x \neq 0, x \neq -3 \; y \; x \neq -1$$

Como primera medida intentaremos simplificar cada expresión fraccionaria involucrada, para lo cual factorizamos numeradores y denominadores:

$$\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}.\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}.\frac{(x+3)x}{(x+1)x}$$

Cálculo Auxiliar

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^2+3x=x(x+3)$

$x^2+6x+9=(x+3)^2$

$x^2+x=x(x+1)$

Realizamos las simplificaciones que sean posibles en cada expresión fraccionaria.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}.\frac{(x+3)x}{(x+1)x}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}.\frac{(x+3)}{(x+1)}$$

Realizamos el producto multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)^2}.\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x+3)^2(x+1)}$$

Antes de realizar los productos indicados intentaremos realizar las simplificaciones posibles:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x+3)^2(x+1)}=\frac{(x-1)}{(x+3)}.$$

Por lo tanto: $\frac{x^2-1}{x^2+6x+9}.\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\frac{(x-1)}{(x+3)} \; con \; x \neq 0, x \neq -3 \; y \; x \neq -1$

Veamos otro caso:

Calculen:

$$\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right).\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy} \quad \text{si } y\neq 0, x\neq 0, x\neq -y \ \ x\neq y$$

Primero resolvemos la resta:

$$\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)=\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{x-y-x-y}{(x-y)(x+y)}=\frac{-2y}{(x-y)(x+y)}$$

Por lo tanto: $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right).\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}=\frac{-2y}{(x-y)(x+y)}\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}$

Para resolver el producto factorizamos numeradores y denominadores:

$$\frac{-2y}{(x-y)(x+y)}\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}=\frac{-2y}{(x-y)(x+y)}\frac{(x+y)^2}{2xy}$$

Multiplicamos: $\frac{-2y}{(x-y)(x+y)}\frac{(x+y)^2}{2xy}=\frac{-2y(x+y)^2}{(x-y)(x+y).2xy}$

Por último realizamos las simplificaciones que sean posibles:

$$\frac{-2y(x+y)^2}{(x-y)(x+y).2xy}=-\frac{(x+y)}{(x-y).x}$$

Conclusión:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right).\frac{x^2+2xy+y^2}{2xy}=-\frac{(x+y)}{(x-y).x} \quad \text{para } y\neq 0, x\neq 0, x\neq -y \ \ x\neq y}$$

2.2.5 Cociente de expresiones algebraicas fraccionarias.

Al dividir expresiones algebraicas fraccionarias, utilizamos la propiedad de fracciones:

Sean A, B, C, D expresiones algebraicas enteras, entonces: $\frac{A}{B}:\frac{D}{C}=\frac{A}{B}.\frac{C}{D}$

Dicha propiedad es válida para los valores de variable que no anulen las expresiones algebraicas B, C y D.

Calculen

$\frac{x-5}{3x}:\frac{x^2-25}{4x+8x^2}$ para $x\neq 0, x\neq -5,\ x\neq 5\ \ y\ \ x\neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{x-5}{3x}:\frac{x^2-25}{4x+8x^2}=\frac{x-5}{3x}.\frac{4x+8x^2}{x^2-25}=\frac{x-5}{3x}.\frac{4x(1+2x)}{(x-5)(x+5)}=\frac{(x-5)4x(1+2x)}{3x(x-5)(x+5)}=$$

$$\frac{4(1+2x)}{3(x+5)}$$

Resultado final

$$\boxed{\frac{x-5}{3x}:\frac{x^2-25}{4x+8x^2}=\frac{4(1+2x)}{3(x+5)}\ \text{para}\ \ x\neq 0, x\neq -5,\ x\neq 5\ \ y\ \ x\neq -\frac{1}{2}.}$$

Resuelvan: $\frac{-4+\frac{1}{y^2}}{2+\frac{1}{y}}$ con $y\neq 0\, e\ \ y\neq -\frac{1}{2}$

Esta expresión es equivalente a $\left(-4+\frac{1}{y^2}\right):\left(2+\frac{1}{y}\right)$ con $y\neq 0\, e\ \ y\neq -\frac{1}{2}$

Primero resolvemos cada suma: $-4+\frac{1}{y^2}=\frac{-4y^2+1}{y^2}$ $\qquad 2+\frac{1}{y}=\frac{2y+1}{y}$

De donde, la expresión original nos queda:

$$\left(-4+\frac{1}{y^2}\right):\left(2+\frac{1}{y}\right)=\frac{-4y^2+1}{y^2}:\frac{2y+1}{y}=$$

Ahora bien, en el primer término podemos factorizar el numerador utilizando diferencia de cuadrados:

$$\boxed{\frac{-4y^2+1}{y^2}=\frac{(1-2y)(1+2y)}{y^2}}$$

El cociente inicial $\frac{-4y^2+1}{y^2}:\frac{2y+1}{y}$ ahora nos queda:

$$\frac{(1+2y)(1-2y)}{y^2}\cdot\frac{y}{2y+1}=\frac{(1+2y)(1-2y)y}{y^2(2y+1)}$$

Luego de realizar las simplificaciones correspondientes llegamos a

$$\frac{-4+\frac{1}{y^2}}{2+\frac{1}{y}}=\frac{(1-2y)}{y}\ \ \text{con}\ \ y\neq 0\, e\ \ y\neq -\frac{1}{2}$$

A continuación analizamos otro caso:

Reduzcan a la mínima expresión:

$$\left(\frac{1}{m}-\frac{3}{1-m^2}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}\right):\frac{-1}{m^2+m} \quad \text{con } m\neq 0,\, m\neq \pm 1$$

Resolvemos el paréntesis para lo cual como primer medida factorizamos:

$$\frac{1}{m}-\frac{3}{1-m^2}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m}-\frac{3}{(1-m)(1+m)}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}$$

Como 1-m y m-1 difieren en un signo, en alguno de ellos sacamos factor común -1. Por ejemplo 1-m lo expresamos –(m-1) y el cociente nos queda:

$$\frac{3}{(1-m)(1+m)}=\frac{3}{-(m-1)(1+m)}=\frac{-3}{(m-1)(1+m)}$$

Re-escribimos la suma:

$$\frac{1}{m}-\frac{3}{(1-m)(1+m)}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m}-\frac{-3}{(m-1)(1+m)}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}=$$

$$\frac{1}{m}+\frac{3}{(m-1)(1+m)}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}$$

Por lo tanto el denominador común es m(m-1)(m+1)

$$\frac{1}{m}+\frac{3}{(m-1)(1+m)}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}=\frac{(m-1)(m+1)+3m+2m(m+1)+m(m-1)}{m(m-1)(m+1)}$$

Si ahora realizamos las distributivas correspondientes y sumamos términos semejantes:

$$\frac{(m-1)(m+1)+3m+2m(m+1)+m(m-1)}{m(m-1)(m+1)}=\frac{m^2-1+3m+2m^2+2m+m^2-m}{m(m-1)(m+1)}=$$

$$\frac{4m^2+4m-1}{m(m-1)(m+1)}$$

Nuestro problema inicial nos queda:

$$\left(\frac{1}{m}-\frac{3}{1-m^2}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}\right):\frac{-1}{m^2+m}=\frac{4m^2+4m-1}{m(m-1)(m+1)}:\frac{-1}{m^2+m}=$$

$$\frac{4m^2+4m-1}{m(m-1)(m+1)}\left[-\left(m^2+m\right)\right]=\frac{4m^2+4m-1}{m(m-1)(m+1)}\left[-m(m+1)\right]=$$

$$\frac{\left(4m^2+4m-1\right)\left[-m(m+1)\right]}{m(m-1)(m+1)}=\frac{-\left(4m^2+4m-1\right)}{(m-1)}$$

Conclusión:

$$\boxed{\left(\frac{1}{m}-\frac{3}{1-m^2}+\frac{2}{m-1}+\frac{1}{m+1}\right):\frac{-1}{m^2+m}=\frac{-\left(4m^2+4m-1\right)}{(m-1)} \quad \text{con } m\neq 0,\, m\neq \pm 1}$$

Ejercicio de Aplicación

5) Dadas las expresiones $A=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}$ y $B=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4}$

i) Determinen las restricciones que deben hacerse sobre los valores de x para que la expresión B tenga sentido.

ii) Hallen la expresión más simple posible para el resultado de A-B

Luego de resolverlo podrán corroborar sus respuestas al finalizar la unidad.

TEMA 3 · Uso del lenguaje algebraico

En muchos problemas de la ingeniería, el álgebra nos permite independizarnos del lenguaje coloquial y expresar en símbolos las ecuaciones importantes que surgen del enunciado para luego resolverlas.

La clave para la resolución de estos problemas es traducir la información dada al lenguaje algebraico, para lo cual primero debemos identificar cuáles son las variables involucradas en la situación planteada.

Compartamos algunos casos para pensar.

1) Todas las mañanas Juan disfruta hacer ejercicio, primero inicia su actividad caminando, luego trota 2 veces y media la distancia que caminó y por último corre una distancia igual a 2 y un tercio veces la distancia que trotó. Expresen la distancia total recorrida diariamente por Juan en función de la distancia caminada.

Resolución:

Primero identificamos las variables del problema. Para hacerlo, debemos leer cuidadosamente el enunciado e identificar qué es lo que nos pide

En nuestro caso, nos piden identificar la distancia total recorrida, en función de la distancia caminada…

Tomaremos entonces a la distancia caminada como variable y la llamaremos x.

x= distancia caminada

Es importante definir claramente que representa cada variable

En nuestro problema, a la distancia total recorrida, llamémosla D, es decir que:

D= distancia caminada+ distancia trotada+ distancia corrida.

Debemos expresar cada una de estas distancias en términos de la distancia caminada…

Distancia caminada: x

Distancia trotada = 2 y media veces la distancia que caminó $= 2x+\frac{1}{2}x = \left(2+\frac{1}{2}\right)x=\frac{5}{2}x$

Distancia corrida $=$ 2 veces y un tercio la distancia que trotó

$$= 2\left(\frac{5}{2}x\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x\right) = \left(5+\frac{5}{6}\right)x = \frac{35}{6}x$$

Por lo tanto: $D=x+\frac{5}{2}x+\frac{35}{6}x=\left(1+\frac{5}{2}+\frac{35}{6}\right)x=\frac{6+15+35}{6}x=\frac{56}{6}x=\frac{28}{3}x$

La distancia recorrida es $\frac{28}{3}$ veces la distancia caminada igual a 9 veces y $\frac{1}{3}$ la distancia caminada.

Si ahora nos plantearan la siguiente pregunta:

Si el lunes Juan caminó 1 km y el viernes caminó 2.5 km, ¿en cuánto se modificó la distancia total recorrida?

Como en el punto anterior la distancia total recorrida diariamente quedó expresada en función de la distancia caminada a partir de la ecuación $D=\frac{28}{3}x$, podemos determinar la distancia total recorrida cada día simplemente remplazando en la fórmula.

Lunes: $D_L=\frac{28}{3}.1=9{,}33$ km aproximadamente.

Viernes: $D_L=\frac{28}{3}.2{,}5\approx 23.3\,km$

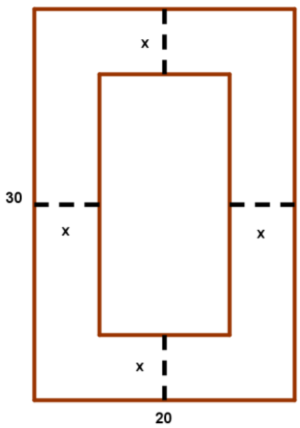
En consecuencia la distancia total se incrementó en 14 km.

Veamos otro problema:

2) En una hoja de papel de 20 cm de ancho y 30 cm de largo se quiere realizar un dibujo de manera de dejar un margen de ancho constante en los laterales y en la parte superior e inferior de la hoja. ¿Cuál es el área que queda disponible para el dibujo?

Resolución: Para organizar la información muchas veces es útil realizar un dibujo, figura de análisis, que represente la situación planteada y nos ayude a comprender mejor el problema

Figura de análisis



En este ejemplo desconocemos las dimensiones de la región donde se va a realizar el dibujo.

A partir de la figura de análisis, observamos que dichas dimensiones podemos obtenerlas en función de las dimensiones de la hoja y de la medida del margen.

Si llamamos x a la medida de los márgenes:

Ancho área dibujo: 20-2x

Largo área dibujo: 30-2x

Área disponible para el dibujo: (20-2x).(30-2x). que es lo que nos pedía el problema.

Es importante destacar que en este caso, x tiene una condición, que no surge de la expresión algebraica en sí misma, debido a que (20-2x).(30-2x) no posee valores prohibidos, sino que la restricción sobre los valores de la variable x surgen del análisis del contexto.

Tanto 20-2x como 30-2x, representan medidas, por lo tanto deben ser magnitudes positivas.

Por lo tanto $20-2x>0 \Leftrightarrow$ sumamos 2x a ambos términos

$20>2x \Leftrightarrow$ dividimos ambos términos por 2

$\boxed{10>x}$

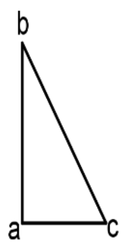
Análogamente: $30-2x>0 \Leftrightarrow 30>2x \Leftrightarrow \boxed{15>x}$

Al mismo tiempo x representa la medida del margen, por lo cual es siempre positiva. Por lo tanto x debe ser un número positivo y menor a 10.

Nota: En la próxima sección veremos en más detalle el mecanismo de resolución de inecuaciones como las resueltas recién.

3) En un triángulo rectángulo, al cateto menor le faltan 10 cm para igualar al mayor. Calculen el área y perímetro del triángulo en función de su cateto mayor.

Figura de an�lisis



Como primer paso, realicemos nuestra figura de análisis:

Nos piden calcular el área y el perímetro de este triángulo y expresarlos en función del cateto mayor.

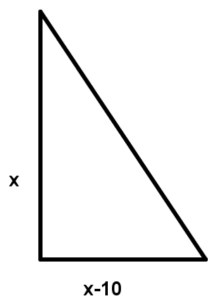
Por este motivo, tomaremos como variable x a la medida del cateto mayor.

En nuestra figura, $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ representan los catetos y $\overline{bc}$ la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo.

Definimos: Sea **x: medida del cateto mayor** ($x \geq 0$ por tratarse de una medida)

Según el problema al cateto menor le faltan 10 cm para igualar al mayor, por este motivo si x es la medida del cateto mayor, entonces el cateto menor mide x-10

Ubicamos los datos en nuestra figura de análisis



En este caso x debe ser un número mayor a 10, en símbolos $x>10$

El área de nuestro triángulo es igual a $\frac{base.altura}{2}$, en nuestro ejemplo:

Área $= \frac{x(x-10)}{2}$

Para calcular el perímetro debemos calcular la medida de la hipotenusa, por teorema de Pitágoras sabemos que: $(Hipotenusa)^2 = (cateto\,mayor)^2 + (cateto\,menor)^2$

Por lo tanto, según los datos de nuestro problema: $(Hipotenusa)^2 = x^2 + (x-10)^2$

De donde

$(Hipotenusa) = \sqrt{x^2+(x-10)^2} = \sqrt{x^2+x^2-20x+100} = \sqrt{2x^2-20x+100}$

Por lo tanto el perímetro mide $= x+(x-10)+\sqrt{2x^2-20x+100} = 2x-10+\sqrt{2x^2-20x+100}$

$\boxed{\text{Perímetro}=2x-10+\sqrt{2x^2-20x+100}}$

Solución de ejercicios de aplicación:

1) i) $x \neq -1$ ii) $x \neq 0$ iii) $2(x-3)^2(x+3)^2$ iv) $(x+2y)^2x^2y$

iii) $-3r^2(r+2)(r-2)$

2) Para encontrar A, bastará con factorizar la expresión: x^4y-x^3y, en este caso la forma factorizada de dicha expresión nos queda: $x^3y(x-1)(x+1)$.

De esta forma para que $x^3y(x-1)(x+1) = A(x+1)$, A deberá ser igual a $x^3y(x-1)$

3) $\frac{x^2y^2+xy^3}{x^4-y^4}$ con $x \neq y$, $x \neq -y$

Factorizamos el numerador: $x^2y^2+xy^3 = xy^2(x+y)$

Factorizamos el denominador: $x^4-y^4 = (x^2)^2-(y^2)^2$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$x^4-y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

Nota: la expresión (x^2+y^2) es irreducible por tratarse de una suma de potencias pares.

De esta manera, la expresión original nos queda:

$$\frac{x^2y^2+xy^3}{x^4-y^4} = \frac{xy^2(x+y)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{xy^2}{(x-y)(x^2+y^2)} \text{ con } x \neq y \text{ , } x \neq -y$$

4) Falso

Sorprendidos??

Veamos una justificación:

Si factorizamos numerador y denominador del primer término de la igualdad llegamos a una expresión de la forma:

$$\frac{x^3-x}{x^4-1}=\frac{(x+1)(x-1)x}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

Si realizamos las simplificaciones correspondientes:

$$\frac{x^3-x}{x^4-1}=\frac{x}{(x^2+1)}$$

Sin embargo debemos recordar que la igualdad es válida sólo para los valores de x donde la expresión original $\frac{x^3-x}{x^4-1}$ tiene sentido que son los x que no anulan el denominador, en este caso: $x\neq 1$, $x\neq -1$

Por lo tanto ambas expresiones sólo son iguales para dichos valores de x , motivo por el cual la igualdad es falsa salvo que se especifique la región de validez.

5) i) En este caso $B=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4}$, los valores donde está expresión tiene sentido serán aquellos que no anulen el denominador, en este caso para que $x^2-4\neq 0$, se debe cumplir que: $x\neq 2$, $x\neq -2$

ii) Para realizar A-B en primer lugar debemos factorizar los denominadores de ambas expresiones:

$x^2-4=(x-2)(x+2)$ por diferencia de cuadrados.

Por su parte en A, x^2-2x+1 es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que:

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

Por todo esto:

$$A=\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}=\frac{x^2-4x+4}{(x-1)^2} \text{ con } x\neq 1$$

$$B=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \text{ con } x\neq 2,\ x\neq -2$$

En el caso de la segunda expresión podemos simplificarla de donde nos queda:

B= $\frac{(x-1)}{(x-2)}$ con $x\neq 2$, $x\neq -2$

Ahora resolveremos la resta: A-B= $\frac{x^2-4x+4}{(x-1)^2}$ - $\frac{(x-1)}{(x-2)}$

El denominador común es $(x-1)^2(x-2)$

A-B= $\dfrac{(x^2-4x+4)(x-2)-(x-1)^3}{(x-2)(x-1)^2}=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8-(x^3-3x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)^2}=$

$\dfrac{-3x^2+9x-7}{(x-2)(x-1)^2}$ con $x\neq 2$, $x\neq -2$ y $x\neq 1$

Unidad 2 · Actividades

Referencias para actividades:

RO·CC Resolución optativa con clave de corrección

RO·P Resolución optativa para enviar al profesor

TPO Trabajo Práctico Obligatorio

RO·P

Ejercitación Propuesta

1- Dado la expresión A=2x+3, hallar la expresión simplificada de $\dfrac{A^2-4x^2}{16x^2-9}$ $con\ x\neq\dfrac{3}{2}\ y\ x\neq\dfrac{-3}{2}$

2- Sea $B=x^6-4x^4+4x^2$, encontrar la expresión M para que la expresión B se pueda re-escribir como $M\left[(x+\sqrt{2})x\right]^2$.

Ayuda: factorice B.

3- Simplificar:

a. $\dfrac{x^3+27+9x^2+27x}{(x+3)(x+1)+(x+3)}$ $con\ x\neq -3\ \ x\neq -2$

b. $\dfrac{8x+x^2+16}{x^4-256}$ $x\neq 4,\ x\neq -4$

c. $\dfrac{x^3-25x}{x^3+25x-10x^2}$ $x\neq 0\ \ x\neq 5$

4- Dadas las expresiones:

$A=\dfrac{x^2+9+6x}{9-x^2}\ con\ x\neq 3,\ x\neq -3$ y $B=\dfrac{x^2+2x}{x^3+2x^2}\ con\ x\neq 0,\ x\neq -2$

a. Simplificar A y B

b. Calcular A-B

c. Calcular B+2A

5- Efectuar las operaciones indicadas e indique para qué valores de y tiene sentido al expresión hallada

a. $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{4-y^2}+\frac{3}{2-y}-\frac{1}{y+2}\right):\frac{1}{-y^2-2y}$

b. $\left(1+\frac{2}{y-3}\right)\left(\frac{y^2-3y}{y^3-1-3y^2+3y}\right)$

c. $\left(\frac{y^2-49}{y^2+49-14y}+\frac{1}{y-7}\right):\frac{64-y^2}{y-8}$

d. $\frac{y}{y^2+2y+1}-\frac{2y}{y^2-1}.\frac{y-1}{2y+2}$

e. $\left(\frac{y+4}{y^2+8y+16}:\frac{1}{y^2-16}-\frac{2}{y+1}\right)$

6- Expresar en lenguaje simbólico

a. Área de un triángulo rectángulo cuyo cateto mayor x, es el triple de cateto menor.

b. Longitud de un círculo de radio r

c. El producto del cuadrado del siguiente de un número entero x por el doble del anterior a x

7- Una empresa necesita envasar un producto en recipientes de lata cilíndricos, de manera tal que el diámetro de la base sea la mitad de la altura. Encuentren una fórmula para el volumen de la lata, en función de la altura. ¿Qué volumen corresponde a una lata de altura 10 cm?

Podrán encontrar más ejercitación en el cuadernillo: Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas examen de ingreso (EDI). Curso de apoyo. Comprensión de textos. Matemática. Autor: Universidad Argentina de la Empresa Secretaría Académica y legal. 2011.

Respuesta de los ejercicios correspondientes a la Unidad 2

1- $\frac{3}{4x-3}\ con\ x\neq\frac{3}{2}\ y\ x\neq\frac{-3}{2}$

2- $M=\left(x-\sqrt{2}\right)^2$

3-

a) $\frac{x^2+6x+9}{x+2}\ con\ x\neq -3\ y\ x\neq -2$

b) $\frac{x+4}{(x-4)(x^2+16)}\ con\ x\neq -4\ y\ x\neq 4$

c) $\dfrac{x+5}{(x-5)}$ *con* $x \neq 5$ y $x \neq 0$

4-

a) $A = -\dfrac{x+3}{x-3}$ *con* $x \neq -3$ y $x \neq 3$ $\quad B = \dfrac{1}{x}$ *con* $x \neq -2$ y $x \neq 0$

b) $A - B = -\dfrac{x^2+4x-3}{x^2-3x}$ $x \neq -3, x \neq 0, x \neq -2$ y $x \neq 3$

c) $B + 2A = -\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-3x}$ $x \neq -3, x \neq 0, x \neq -2$ y $x \neq 3$

5-

a) $\dfrac{3y^2+3y+4}{y-2}$ *con* $y \neq 2, y \neq -2, y \neq 0$

b) $\dfrac{y}{(y-1)^2}$ *con* $y \neq 3$ y $y \neq 1$

c) $\dfrac{-1}{(y-7)}$ *con* $y \neq 8, y \neq -8$ y $y \neq 7$

d) 0 con $y \neq -1$ y $y \neq 1$

e) $\dfrac{y^2-3y-6}{y+1}$ *con* $y \neq -4$, $y \neq 4$ y $y \neq -1$

6- a) Área= $3x^2$ b) longitud= $2\pi r$ c) $2x^2(x-1)$

7- V= $\pi \dfrac{125}{2}$