Derivación de campos vectoriales. Regla de la cadena. Derivación implícita

1. Para los campos vectoriales dados, hallar la matriz jacobiana en los puntos indicados.

a. $\overline{F}: R^2 \to R^2$; $\overline{F}(x; y) = (x^2 + y; 2xy)$ $\quad P_0 = (1; 2)$

b. $\overline{F}: R^2 \to R^3$; $\overline{F}(x; y) = (x + 2y; x - y; x^3 + y^2)$ $\quad P_0 = (-1; 0)$

c. $\overline{F}: R^3 \to R^3$; $\overline{F}(x; y; z) = (x^2 + y; x + y; z)$ $\quad P_0 = (0; 0; 0)$

2. Analizar si es posible realizar la composición que se pide, en caso afirmativo efectuarla. Indicar qué tipo de función es la función compuesta.

a. $F: R^2 \to R \;/\; F(x; y) = x^2 - 3xy$ $\quad (\bar{g} \circ F), (F \circ \bar{g})$

$\bar{g}: R \to R^2 \;/\; \bar{g}(t) = (\sqrt[3]{t}; t)$

b. $F: A \subseteq R^2 \to R / F(x; y) = x^2 + xy$ $\quad (g \circ F)$

$g: B \subseteq R \to R \;/\; g(t) = 2^{-t} \ln(t)$

c. $F: R^3 \to R \;/\; F(x; y; z) = x + yz$ $\quad (\bar{g} \circ F), (F \circ \bar{g})$

$\bar{g}: R \to R^2 \;/\; \bar{g}(t) = (t; 2^t)$

3. Siendo $z = F(u; v) = u - 2v$, con $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = xy \end{cases}$

a. Interpretar $z = z(x; y)$ como función compuesta.

b. Derivar utilizando regla de la cadena y hallar su valor para $P = (1; 1)$.

4. Dados las siguientes funciones, calcular en cada caso la derivada total de *z* respecto a *t* aplicando regla de la cadena.

a. $z = e^{3x+2y}$, siendo $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t^2 + t \end{cases}$ en $t = 0$

b. $z = x\, tg(y)$, siendo $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$

5. a. Hallar las derivadas parciales del campo escalar z, $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$, siendo $z = ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ con $\begin{cases} x = ve^u \\ y = ve^{-u} \end{cases}$

b. Calcular dz en términos de dx y dy, siendo $z = u^2 + v^2 + 2uv$ con $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = -x + y \end{cases}$

6. Hallar la derivada de la función compuesta (en los casos en que existe), usando regla de la cadena.

a. $\bar{F}: R \to R^3;\ \bar{F}(t) = (3t^3; 4; sen(2t))$

$G: R^3 \to R; G(x; y; z) = xz - y$

b. $\bar{F}: R^2 \to R^2\ ;\ \bar{F}(u; v) = (u^2 sen(v); u^2 \cos(v))$ calcular $\overline{\nabla}(G \circ \bar{F})(2; 0)$

$G: R^2 \to R\ ; G(x; y) = x^2 y - y^2$

c. $\bar{F}: R^2 \to R^2;\ \bar{F}(u; v) = (u^2 v; u - v)$ calcular $J(\bar{F} \circ \bar{G})(-1; 0)$ y $J(\bar{G} \circ \bar{F})(-2; 0)$

$\bar{G}: R^2 \to R^2;\ \bar{G}(x; y) = (e^{xy}; cos(xy))$

7. Debido al calor del sol, un bloque de hielo cilíndrico se funde: su altura, h, decrece con más rapidez que su radio r. Si su altura original es de 40 cm. y decrece 3 cm/h mientras que su radio de 15 cm. decrece a razón de 1 cm/h, calcular la tasa de cambio (aplicando regla de la cadena) que se produce en el volumen del cilindro. (V = $\pi r^2 . h$)

8. Sea el campo vectorial $\bar{F}$ dado por $\bar{F}(x, y) = (x + 1, 2y - e^x)$ y sea $G: R^2 \to R$ diferenciable tal que el polinomio de Mac Laurin de orden dos de $h = G \circ \bar{F}$ es

$$P(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy$$

Calcular $\overline{\nabla} G(1, -1)$.

9. Sean $\bar{G}: R^2 \to R^3;\ \bar{G}(x; y) = (x + y; xy; x^2 - y),\ F: R^3 \to R;\ F(t; u; v) = tu + v\ \ y\ P_0 = (2; 3)$. Se define $H = F \circ \bar{G}$

a. Hallar $\overline{\nabla} H\ (P_0)$

b. Hallar la derivada direccional de H en P_0 hacia $P_1 = (5; 5)$

10. Obtener la derivada direccional de $H(x; y) = \sqrt{2x + F(x; y)}$ en $(-1; 2)$ hacia $(3; 4)$ sabiendo que el diferencial de $F(x; y)$ desarrollado en $(-1; 2)$ es $dF(-1; 2) = 2x + 3y - 4$, y que $F(-1,2) = 6$. (*)

11. Sea $\overline{G}(x; y) = (x^2 - 2xy + 4y; 2x + 5y)$ y $\overline{F}(u; v) = (F_1; F_2; F_3)$ tal que la matriz jacobiana de $\overline{F}$ es $J\bar{F}(u; v) = \begin{pmatrix} u^2 & 2v \\ e^u & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$

a. Obtener la matriz jacobiana de $\overline{F} \circ \overline{G}$ en el punto $(1; 0)$

b. Determinar el valor de la derivada direccional del campo escalar F_2 en el punto $(3; 4)$ según la dirección dada por el vector $(-2; 5)$.

12. Sea $F: R^2 \to R$ y, dado $k \in R$, sea C la curva de nivel k de F. Sea $P_0 \in C$ y supongamos que $F \in C^1(U)$ siendo U un entorno de P_0. Demostrar que si $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$ entonces $\overline{\nabla} F(P_0)$ es normal a C en P_0.

(Sugerencia para la demostración:

i. Considerar una parametrización $\overline{g}$ de C.

ii. Comprobar que $\overline{F} \circ \overline{g} \equiv k$

iii. Derivar ambos miembros de la igualdad anterior y especializar en el punto de interés)

13. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes curvas planas en los puntos indicados. Sugerencia: Usar el resultado demostrado en el ejercicio 12

a. $x^2 + xy + y^2 = 1,\ P_0 = (1; 0)$

b. $x^3 + y - 2y^2 = -1,\ \ P_0 = (0; 1)$

c. $x + 4y^2 = 3,\ P_0 = (-1; 1)$

14. Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en los puntos indicados.

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ P_0 = (3; 0; 0)$

b. $z^2 = x^2 + y^2,\ P_0 = \left(1; 1; \sqrt{2}\right)$

c. $x^2 + y^2 = 4,\ P_0 = (2; 0; 8)$

15. Para cada una de las siguientes superficies hallar un vector normal a la superficie en el punto indicado. Representar gráficamente la superficie y el vector.

a. $x^2 + z^2 = 4,\ \ P_0 = (\sqrt{2},\ 1\ , \sqrt{2})$
b. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,\ \ P_0 = (1, 0, 0)$
c. $z - x^2 - (y-1)^2 = 0,\ P_0 = (1, 1, 1)$

16. Sea $F: D \subseteq R^2 \to R, F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$. Se pide:

a. Determinar analítica y gráficamente el dominio de F.
b. Hallar un vector normal a la superficie de nivel 100 del campo escalar $G: D \subseteq R^3 \to R$
$G(x, y, z) = 3xz - yz^2 + z[F(x, y)]^2$, en el punto (4,0,5). (*)

17. Dadas las siguientes ecuaciones:

1) $x^3y + y^2z + \sqrt[3]{x} + z - 2 = 0$

2) $ln\, x + \frac{y}{x} - e^{xz} - z = 0$

a. Verificar las condiciones de existencia de $z = z(x; y)$ definida implícitamente en un entorno de $(x_0; y_0) = (1; 1)$ con $z_0 = z(1; 1) = 0$.

b. Hallar las derivadas parciales de z en $(1; 1)$.

18. Asumiendo que la ecuación $sen(xy) - x - 3y - 2z + 6 = 0$, define implícitamente $z = z(x; y)$ en un entorno de $(x_0; y_0) = (0; 0)$, con $z_0 = z(0; 0) = 3$, calcular $dz(0; 0)$.

19. Para las funciones definidas en forma implícita por las siguientes ecuaciones, hallar y'_x, y'_z.

a. $y\,sen(x) = e^x + yz$
b. $z^2 + 2xy - y^2 = 0$

20. Dada $F(x; y; z) = e^{x.z-2} + y.\ln(z) - x.y + 5$

a. Verificar que $F(x; y; z) = 0$ define implícitamente una función $z = z(x; y)$ en un entorno de $(x_0; y_0) = (2; 3)$ con $z_0 = z(2; 3) = 1$.
b. Hallar el valor de la derivada direccional máxima de $z = z(x; y)$ en el punto $(2;\ 3)$.
c. Obtener un valor aproximado de $z(2,01; 3,02)$ utilizando una aproximación lineal.

21. Dada la expresión del diferencial primero de un campo escalar $F: D \subseteq R^2 \to R$

$$dF(x; y; \Delta x; \Delta y) = ((x+1)^2 + 4y - 1)\Delta x + (2y - \frac{5}{2} + 4x)\Delta y$$

Obtener la derivada de la función compuesta $h = F \circ \bar{g}$ para $t = 1$, sabiendo que $\bar{g}'(t) = (t^2 + 1; 2t + 1)$ y que $\bar{g}(1) = (-1; 2)$.

22. Sea $z = G(x; y)$ definida implícitamente por la ecuación $xz - ln(z + y) + 6 = 0$ en un entorno del punto $(3; 3; -2)$. Calcular $G(2.95; 3.01)$ utilizando una aproximación lineal.

23. Sea el campo escalar $F: R^3 \to R$ / $F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3xy + 3e^z + 3z - 4$

a. Demostrar que en un entorno del punto $P = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a $z = z(x, y)$

b. Calcular el $\vec{\nabla} z = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 10 Obtener la derivada direccional de $H(x; y) = \sqrt{2x + F(x; y)}$ en $(-1; 2)$ hacia $(3; 4)$ sabiendo que el diferencial de $F(x; y)$ desarrollado en $(-1; 2)$ es $dF(-1; 2) = 2x + 3y - 4$, y que $F(-1,2) = 6$.

Recordemos la fórmula de cálculo de la derivada direccional del campo escalar H en el punto P_0 según la dirección dada por el vector $\vec{v}$:

$$H'_v(P_0) = \nabla H(P_0).\vec{v}$$

En este caso la dirección del vector está dada por (3, 4) – (-1, 2) = (4, 2).
Calculemos las derivadas parciales del campo escalar H, dado por $H(x; y) = \sqrt{2x + F(x; y)}$. Tenemos que:

- $H'_x\ (x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2x+F(x:y)}}.(2 + F'_x(x:y))$
- $H'_x\ (x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2x+F(x:y)}}.F'_y(x; y)$

Estas derivadas parciales deben ser evaluadas en el punto (-1, 2). El campo escalar F no lo conocemos, pero sabemos que $F(-1, 2) = 6$ y, dado que el diferencial de F en (-1, 2) está dado por $dF(-1; 2) = 2x + 3y - 4$, podemos saber que $F'_x(-1; 2) = 2, F'_y\ (-1; 2) = 3$. Luego,

- $H'_x\ (-1; 2) = \frac{1}{2\sqrt{2(-1)+F(-1:2)}}.(2 + F'_x(-1; 2))$ = $\frac{1}{2\sqrt{-2++6}}(2 + 2) = 1$

- $H'_x\ (-1;2) = \frac{1}{2\sqrt{2(-1)+F(-1;2)}}.F'_y(-1;2) = \ \frac{1}{.4}.3 = \frac{3}{4}$

Estamos en condiciones de calcular el valor de la derivada direccional pedida:

$$H'_v(-1;2) = \ \nabla\mathrm{F}(-1;2).\vec{v} = \ \left(1\ ;\ \frac{1}{4}\right).(4\ ;2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 16 Sea $F: D \subseteq R^2 \to R, F(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$. Se pide:

a. Determinar analítica y gráficamente el dominio de F.
b. Hallar un vector normal a la superficie de nivel 100 del campo escalar $G: D \subseteq R^3 \to R$

$G(x,y,z) = 3xz - yz^2 + z[F(x,y)]^2$, en el punto (4,0,5)

El dominio del campo escalar F es R^2. Para resolver el ítem b), usaremos la propiedad demostrada en el ejercicio 12; el gradiente de un campo escalar Gen el punto P_0 es normal a la curva de nivel k (en este caso, k=100) en P_0. Calculemos entonces el gradiente de G en el punto (4, 0, 5):

- $G'_x(x\ ;y;z) = 3z + 2zF(x\ \ ;y).F'_x(x\ ;y)$
- $G'_y(x\ ;y;z) = -z^2 + 2zF(x\ \ ;y).F'_y(x\ ;y)$
- $G'_z(x\ ;y;z) = 3x - 2zy + [F(x\ \ ;y)]^{\ 2}$

Dado que $F(4;0) = 8, F'_x(4;0) = 6,\ F'_y\ (4\ ;0) = 0$ tenemos que:

- $G'_x(4,0,5) = 3.5 + 2.5.F(4,0).F'_x(4,0) = 15 + 10.8.6 = 495$
- $G'_y(4,0,5) = -25 + 2.5.F(4,0).F'_y(4,0) = \ -25$
- $G'_x(4,0,5) = 3.4 - 0 + F(4;0)^2 = 12 + 64 = 76$

Luego, un vector normal a la curva de nivel 100 del campo escalar G es $\vec{v} = (495, -25, 76)$