1. Dados los siguientes campos escalares, hallar el dominio, analítica y gráficamente

a) $F(x,y)=\dfrac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x-y}$

b) $F(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

c) $F(x,y)=\ln(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}-1)$

d) $F(x,y)=\ln(x+5y)$

e) $F(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-2y-4}}{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}-1}$

f) $F(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}}$

g) $F(x,y)=5xy+3y$

h) $F(x,y)=3xy-\dfrac{1}{x^2-1}$

i) $F(x,y)=\dfrac{5}{x+y-4}$

j) $F(x,y)=\ln(2x+y).\sqrt{1-x^2-y^2}$

k) $F(x,y)=\sqrt{9-(2x+3y)}$

l) $F(x,y)=\ln(16-x^2+4y^2)$

2. Para los niveles z: -2, -1, 0, 1, 2, 3 representar, cuando sea posibles, las curvas se nivel de las siguientes superficies.

a) $Z=x^2+y^2-1$

b) $Z=\sqrt{36-x^2-y^2}$

c) $Z=2xy$

d) $Z=-1$

e) $Z=\dfrac{x^2+2}{y+1}$

f) $Z=\dfrac{y-1}{x^2+1}$

g) $Z=x+y$

h) $Z=\sqrt{1+x+y}$

i) $Z=\dfrac{1}{x+y}$

j) $Z=x^2-y^2$

3. Dada la siguiente función: $F:A\subseteq\Re^2\rightarrow\Re\,/\,F(x,y)=\sqrt[6]{1-x^2-y^2}+\dfrac{\sqrt{x+2y+1}}{2+x^4}+e^{-x}$

a) Determinar gráfica y analíticamente su Dominio.

b) ¿A qué curva de nivel pertenece el punto $(0;0)$? Justificar.

4. Calcular, por definición, las derivadas parciales de los campos escalares en los puntos que se indican. Interpretar geométricamente los resultados obtenidos.

a) $F(x,y)=2x^2y-5xy$ $P_0=(2;-3)$

b) $F(x,y)=3x^2-2xy+y^2$ $P_0=(3;-2)$

c) $F(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ $P_0=(1;3)$

5. Calcular, aplicando las reglas de derivación, las derivadas parciales primeras de los siguientes campos escalares.

a) $F(x,y)=x^2y+sen\,x-\cos(3y)$

b) $F(x,y)=\dfrac{y^2}{x}+2^{xy}$

c) $F(x,y)=\sqrt{\ln(3x-y)}+e^{x^2}-\sqrt{y^3}$

d) $F(x,y,z)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{xy}{z}}+sen(xz)$

e) $F(x,y)=4y^2+4x.\sqrt{x^2+y^2}$

f) $F(x,y)=\dfrac{x^2.e^{xy+y^2}}{2y+x^2}$

g) $F(x,y,z)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

h) $F(x,y)=\dfrac{3.\sqrt{x}.e^{\frac{y}{x}}}{3y^2+2x^3}$

i) $F(x,y,z)=4.x^yz+z\ln(\dfrac{x^2}{y})+3$

j) $F(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{x+y}-(3y-1)^{2x^3+4}$

6. Hallar el vector gradiente de los siguientes campos escalares en los puntos indicados.

a) $F(x,y)=x^y-sen(xy)$ $P_0=(\pi;1)$

b) $F(x,y)=\sqrt{-x+y}.\ln(x^2+y^2-4)-\ln 8$ $P_0=(1;2)$

c) $F(x,y,z)=\dfrac{x^2.z}{y}-z^3xy$ $P_0=(1;1;0)$

7. Para los campos escalares que se presentan a continuación, calcular las derivadas parciales segundas y verificar el Teorema de Schwarz.

a) $F(x,y)=x^3y^2+x^y$

b) $F(x,y)=xe^y-x^2sen\,(xy)$

c) $F(x,y)=\cos(x^2+y)-sen(y^2x)$

d) $F(x,y)=(2x+1)^{y+3}$

8. Para los campos escalares que se presentan a continuación, obtener el Incremento y el Diferencial. Una vez obtenida la expresión, identificar el Diferencial Total como la parte lineal del incremento.

   a) $F(x,y)=x^2+3xy$ $\qquad P_0=(1;\,2)$

   b) $F(x,y)=3x^2-xy+2y^2$ $\qquad P_0=(x_0;\,y_0)$

9. Para los siguientes campos escalares calcular el Diferencial $dF=dF(x,y,\Delta x,\Delta y)$

   a) $F(x,y)=x^2+y^2sen(x^3y)$

   b) $F(x,y)=\dfrac{x}{y^2}+\ln(xy)$

   c) $F(x,y)=ysen(xy^2)+x^{\frac{1}{y}}$

   d) $F(x,y)=y+\ln x+xe^y$

10. Aplicando Diferenciales, calcular aproximadamente:

   a) $(1,02)^{3,03}$

   b) $\sqrt{(3,3)^2+2.(2,1)^3}$

11. a) Determinar la ecuación del Plano Tangente a la gráfica de los siguientes campos escalares en el punto $(x_0;\,y_0;z_0)$

   a) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$ $\qquad (x_0;y_0)=(1;1)$

   b) $G(x,y)=2y.x^y$ $\qquad (x_0;y_0)=(1;-1)$

   c) $H(x,y)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad (x_0;y_0)=(3;\,4)$

   b) Utilizar las ecuaciones obtenidas en a) para hallar un valor aproximado de $F(1{,}01;\,0{,}98)$ $G(1{,}01;-0{,}98)$, $H(2{,}9;\,4{,}01)$

12. Si $Z=-4x+y-4$ es la ecuación del plano tangente a la gráfica de un campo escalar F en el punto $P=(-1;\,2;F(-1;2))$. Determinar $dF(-1,2,\Delta x,\Delta y)$

13. Sea $dF=(2xy+6x^2y^2)\Delta x+(x^2+4x^3y-1)\Delta y$ la expresión del diferencial de un campo escalar F. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el punto $P=(-1;\,1;5)$

14. Desarrollar según el Polinomio de Taylor hasta el segundo orden los siguientes campos escalares en un entorno de P_0

a) $F(x,y)=x^3.e^{2x+y}$ $P_0=(1;-2)$
b) $F(x,y)=(x+2)^{y-1}$ $P_0=(0;1)$
c) $F(x,y)=y.\ln x$ $P_0=(1;2)$

15. Desarrollar según el Polinomio de Maclaurin hasta el segundo orden los siguientes campos escalares.

a) $F(x,y)=\ln(1+xy)$
b) $F(x,y)=e^{x+y}$
c) $F(x,y)=sen\,(x+y)$

16. Desarrollar hasta el segundo orden los siguientes campos escalares en función de las potencias que se indican.

a) $F(x,y)=x^3y^2+x.y+x$ en potencias de $(x-1)$, $(y+1)$
b) $F(x,y)=x^3-8y^3+2x.y^2$ en potencias de $(x-2)$, $(y+3)$

17. Utilizando un Polinomio de Taylor de segundo orden, hallar un valor aproximado de:

a) $(0{,}87)^{3{,}02}$ b) $\sqrt{1{,}03}.\sqrt[3]{0{,}95}$

18. Dada la expresión del Diferencial del Campo Escalar F :

$$dF=(x^2.seny+2x)\Delta x+(\frac{1}{3}x^3.\cos y)\Delta y$$

Sabiendo que $F(3;0)=9$, se pide:

a) Obtener la expresión del Polinomio de Taylor de segundo orden del Campo Escalar F en un entorno del punto $(3;\,0)$
b) Utilizar el Polinomio anterior para obtener un valor aproximado de $F(2{,}98\,;\,0{,}4)$

19. Hallar los Puntos Críticos de los siguientes Campos Escalares y clasificarlos:

a) $F(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+y^2+xy$ e) $F(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$
b) $F(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+5$ f) $F(x,y)=x^3+y^3-3x$

c) $F(x,y)=y^2-2x^2y+x^4-x^6$

d) $F(x,y)=x^2y+xy^2-x$

g) $F(x,y)=2x^3-9x^2+12x+2y^3-3y^2+1$

20. Dado el Vector Gradiente de un Campo Escalar F :
$\nabla F(x.y)=(2(x-y)e^{(x-y)^2}+2x\,;-2(x-y)e^{(x-y)^2})$

a) Analizar la existencia de extremos relativos de F , sabiendo que $Dom\ F=Dom\ F_x=Dom\ F_y$ y clasificarlos.

b) Verificar el Teorema de Schwarz para el Campo Escalar F

21. Hallar y clasificar los extremos condicionados de los siguientes Campos Escalares:

a) $F(x,y)=xy$ $\quad con \quad x+y=4$

b) $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$ $\quad con \quad \frac{1}{2}x^2+y^2=1$

c) $F(x,y)=5x^2+6y^2-xy$ $\quad con \quad x+2y=24$

22. Sea P el punto en el que el campo escalar $F(x,y)=xy$ alcanza un extremos sujeto a la restricción $x+2y=12$. Hallar la ecuación del Plano Tangente a $G(x,y)=\ln(\frac{x}{2y})-\sqrt{x+y}$ en el punto P .

23. Analizar, en cada caso, si es posible realizar la composición que se pide. En caso afirmativo, efectuar dicha composición.

a) $F:A\subseteq\Re^2\to\Re\,/\,F(x,y)=x^3+xy$
$g:B\subseteq\Re\to\Re\,/\,g(t)=e^{2t}sen\,t$
$(g\circ F)\,;(F\circ g)$

b) $\bar{f}:A\subseteq\Re\to\Re^2\,/\,\bar{f}(t)=(\sqrt{t^3}\,;\ln t)$
$\bar{G}:B\subseteq\Re^2\to\Re^3\,/\,\bar{G}(x,y)=(sen\,x+y\,;\frac{x}{y}\,;\sqrt[3]{x})$
$(\bar{G}\circ\bar{f})\,;(\bar{f}\circ\bar{G})$

c) $G:A\subseteq\Re^3\to\Re\,/\,G(x,y,z)=2x+y+z$
$\bar{h}:B\subseteq\Re\to\Re^3\,/\,\bar{h}(t)=(t^2\,;2t\,;t-1)$
$(\bar{h}\circ G)\,;(G\circ\bar{h})$

24. Dada $\bar{g}:A\subseteq\Re\to\Re^2\,/\,\bar{g}(t)=(5t\,;\sqrt{t})$ y $F:B\subseteq\Re^2\to\Re\,/\,F(x,y)=x+xy^2$ para $h\,(t)$ definida por $h\,(t)=(F\circ\bar{g})\,(t)$. Calcular $h`(t)$ usando la regla de la cadena.

25. En cada uno de los siguientes casos, sea $h\,(t) = (F \circ \bar{g})\,(t)$. Calcular $h`(a)$ usando la regla de la cadena.

a) $F : \Re^3 \to \Re \,/\, F(x, y, z) = xyz$ y $\bar{g} : B \subseteq \Re \to \Re^3 \,/\, \bar{g}(t) = (t^2 ; 1 - t; t^3)$ $a = -3$

b) $F : \Re^2 \to \Re \,/\, F(x, y) = x^2 + y^2$ y $\bar{g} : B \subseteq \Re \to \Re^2 \,/\, \bar{g}(t) = (\ln t; \frac{1}{t})$ $a = 2$

26. Aplicando la regla de la cadena obtener las derivadas parciales de las funciones compuestas $H\,(P) = (F \circ \bar{G})\,(P)$ definidas por:

a) $F : A \subseteq \Re^2 \to \Re \,/\, F(x, y) = x^3 - 2xy + y$

$\bar{G} : B \subseteq \Re^2 \to \Re^2 \,/\, \bar{G}(s; t) = (s - t;\ ts)$

b) $F : A \subseteq \Re^3 \to \Re \,/\, F(x, y, z) = 6x^2 + zxy$

$\bar{G} : B \subseteq \Re^2 \to \Re^3 \,/\, \bar{G}(s; t) = (5s + 2t; s - t^2 ; t + s)$

27. Sean las funciones $\bar{G} = (x^2 + y\,; e^{y\sqrt{x}} ; x^2 + y^2 - 4)$ y $F(u, v, w) = v - \frac{u}{w}$ y sea $H(x, y) = F \circ \bar{G}\,(x, y)$.

a) Determinar $\nabla H(1;\, 0)$ utilizando la regla de la cadena.

b) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de $H(x, y) = F \circ \bar{G}$ en el punto $(1;\, 0;\, H(1;\, 0))$

c) Utilizar el plano obtenido en b) para hallar un valor aproximado de $H(1{,}01;\, 0{,}02)$

28. a) Estudiar si las siguientes funciones son Homogéneas:

a) $F(x, y) = 3x^2 + 5xy - y^2$

b) $F(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$

c) $F(x, y) = x^2 . e^{\frac{3}{y^2}}$

d) $F(x, y) = (\frac{x - y}{x + y})^3$

e) $F(x, y) = 5x^2 - 3x^2 y + 2y^3$

f) $F(x, y) = x^2 . \cos(\frac{x + y}{3y})$

b) Para las funciones Homogéneas dadas en a) verificar el Teorema de Euler.

29. Determinar analítica y gráficamente el conjunto C_q , siendo q el grado de homogeneidad de la función $H(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$; y C_q el Conjunto de Nivel q de la función $F(x, y) = x^2 - y$

30. Decidir si cada una de las siguientes ecuaciones definen implícitamente $z = z(x, y)$ en un entorno de $(x_0; y_0)$ *con* $z_0 = z(x_0; y_0)$. En caso afirmativo, hallar $z_x(x_0, y_0)$ y $z_y(x_0, y_0)$

a) $\ln(xy) + z - sen\, z + 4y = 4$ $\quad P_0 = (1, 1, 0)$

b) $x^3 y - z^3 y^2 - zx + 7 = 0$ $\quad P_0 = (1, -2, 1)$

31. Sea la ecuación $x^2 y + xyz + z^2 y^2 - 7 = 0$ y $P_0 = (1, 1, 2)$. Verificar las condiciones de existencia de $x = x(y, z)$ definida implícitamente en un entorno de $(1, 2)$ con $x(1,2) = 1$. Calcular $X_y(1,2)$

32. Para las funciones definidas en forma implícita por las siguientes ecuaciones, hallar X_y; X_z; Y_x; Y_z; Z_x; Z_y

a) $e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 = 3x$

b) $2xy^2 + y.e^x + x.e^y = xyz$

c) $x + 3y + 2z - \ln z = 0$

33. Para la función definida en forma implícita $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8.x.y - z - 8 = 0$. Calcular $dz\,(2, 0, \Delta x, \Delta y)$, sabiendo que $z\,(2, 0) = 1$