

Tabla 13.1

	Bloomington	Evansville	Fort Wayne	Gary	Indianápolis	South Bend
Evansville	119	—	—	—	—	—
Fort Wayne	174	290	—	—	—	—
Gary	198	277	132	—	—	—
Indianápolis	51	168	121	153	—	—
South Bend	198	303	79	58	140	—
Terre Haute	58	113	201	164	71	196

3. a) Responda el ejercicio 2, con la restricción adicional de que el sistema incluya una carretera que enlace en forma directa Evansville con Indianápolis.
b) Si debe haber un enlace directo entre Fort Wayne y Gary además del que une Evansville con Indianápolis, encuentre el número mínimo de millas de carretera que deben construirse.
4. Sea $G = (V, E)$ un grafo ponderado dirigido, conexo y sin lazos. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto de aristas (de E) que no incluyen ningún ciclo de G . Modifique el algoritmo de Kruskal para obtener un árbol recubridor de G que sea minimal entre todos los árboles recubridores de G que incluyen las aristas e_1, e_2, \dots, e_n .
5. a) Modifique el algoritmo de Kruskal para determinar un árbol óptimo de peso *maximal*.
b) Interprete la información del ejercicio 2 en términos del número de llamadas que pueden realizarse entre pares de ciudades, por medio de la adopción de ciertas líneas nuevas de transmisión telefónica. (Las ciudades que no estén enlazadas directamente deben comunicarse por medio de una o más ciudades intermedias.) ¿Cómo pueden comunicarse en forma minimal las siete ciudades y permitir que se realice un número máximo de llamadas?
6. Demuestre el teorema 13.2.
7. Sea $G = (V, E)$ un grafo ponderado no dirigido, conexo y sin lazos tal que cada par de aristas distintas $e_1, e_2 \in E$, $p(e_1) \neq p(e_2)$. Demuestre que G tiene un único árbol recubridor minimal.

13.3

Redes de transporte: El teorema de flujo máximo y corte mínimo

Esta sección proporciona una aplicación de los grafos ponderados dirigidos al flujo de un bien de una fuente a un destino dado. Tales bienes podrían ser litros de petróleo que fluyen a través de tuberías o números de llamadas telefónicas transmitidas en un sistema de comunicación. Al modelar estas situaciones, interpretamos el peso de una arista en el grafo dirigido como una capacidad que impone un límite superior, por ejemplo, sobre la cantidad de petróleo que puede fluir por cierta parte de un sistema de tuberías. Estas ideas se expresan formalmente en la siguiente definición.

Definición 13.1

Sea $N = (V, E)$ un grafo dirigido conexo sin lazos. Entonces N es una *red*, o *red de transporte*, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe un único vértice $a \in V$ tal que $ge(a)$, el grado de entrada de a , es igual a 0. Este vértice es la *fuente*.
- Existe un único vértice $z \in V$, llamado *sumidero*, tal que $gs(z)$, el grado de salida de z , es igual a 0.
- El grafo N es ponderado, por lo que existe una función de E en el conjunto de enteros no negativos que asigna a cada arista $e = (v, w) \in E$ una *capacidad*, que se denota con $c(e) = c(v, w)$.

Ejemplo 13.5

El grafo de la figura 13.9 es una red de transporte. El vértice a es la fuente, el sumidero es el vértice z y las capacidades se muestran debajo de cada arista. Como $c(a, b) + c(a, g) = 5 + 7 = 12$, la cantidad del bien que se transporta de a a z no puede ser mayor que 12. Como $c(d, z) + c(h, z) = 5 + 6 = 11$, la cantidad queda restringida aún más, a no ser mayor de 11. Para determinar la cantidad máxima que puede transportarse de a a z , debemos considerar las capacidades de todas las aristas de la red.

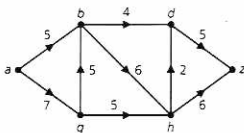


Figura 13.9

Damos la siguiente definición para ayudarnos a resolver este problema.

Definición 13.2

Si $N = (V, E)$ es una red de transporte, una función f de E a los enteros no negativos es un *flujo* de N si

- $f(e) \leq c(e)$ para toda arista $e \in E$, y
- para cualquier $v \in V$ distinto de la fuente a o del sumidero z , $\sum_{w \in V} f(v, w) = \sum_{u \in V} f(u, v)$. (Si no existe una arista (v, w) , $f(v, w) = 0$.)

La primera condición especifica que la cantidad de material transportado a lo largo de una arista dada no puede exceder la capacidad de esa arista. La condición (b) pide que la cantidad de material que fluye hacia un vértice v debe ser igual a la cantidad que fluye desde ese vértice. Esto es cierto para todos los vértices, excepto la fuente y el sumidero.

Ejemplo 13.6

Para las redes de la figura 13.10, la etiqueta x , y sobre cada arista e se determina de modo que $x = c(e)$ y y es el valor asignado a un flujo posible f . La etiqueta en cada arista e satisface $f(e) \leq c(e)$. En la parte (a) de la figura, el “flujo” hacia el vértice g es 5, pero el “flujo” hacia fuera del vértice es $2 + 2 = 4$. Por lo tanto, la función f no es un flujo en este

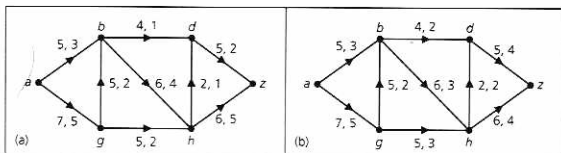


Figura 13.10

caso. La función f de la parte (b) satisface ambas condiciones, por lo que es un flujo de la red dada.

Definición 13.3

Sea f un flujo para una red de transporte $N = (V, E)$.

- Una arista e de la red está *saturada* si $f(e) = c(e)$. Cuando $f(e) < c(e)$, la arista es *no saturada*.
- Si a es la fuente de N , entonces $\text{val}(f) = \sum_{v \in V} f(a, v)$ es el *valor del flujo*.

Ejemplo 13.7

Para la red de la figura 13.10(b), $\{h, d\}$ es la única arista saturada. Las demás aristas no son saturadas. El valor del flujo en esta red es

$$\text{val}(f) = \sum_{v \in V} f(a, v) = f(a, b) + f(a, g) = 3 + 5 = 8.$$

¿Existirá otro flujo f_1 tal que $\text{val}(f_1) > 8$? La determinación de un *flujo maximal* (un flujo que logra el máximo valor posible) es el objetivo del resto de la sección. Para lograrlo, observamos que en la red de la figura 13.10(b),

$$\sum_{v \in V} f(a, v) = 3 + 5 = 8 = 4 + 4 = f(d, z) + f(h, z) = \sum_{v \in V} f(v, z).$$

En consecuencia, el flujo total que sale de la fuente a es igual al flujo total que llega al sumidero z .

La última observación del ejemplo 13.7 parece razonable, pero ¿ocurre en general? A fin de demostrar el resultado para cualquier red, necesitamos el siguiente tipo particular de conjunto de corte.

Definición 13.4

Si $N = (V, E)$ es una red de transporte y C es un conjunto de corte para el grafo no dirigido asociado con N , entonces C es un *corte*, o *corte* $a - z$, si la eliminación de las aristas de C de la red produce la separación de a y z .

Ejemplo 13.8

Cada una de las curvas punteadas de la figura 13.11 indica un corte para la red dada. El corte C_1 está formado por las aristas no dirigidas $\{a, g\}$, $\{b, d\}$, $\{b, g\}$ y $\{b, h\}$. Este corte divide los vértices de la red en los dos conjuntos $P = \{a, b\}$ y su complemento $\bar{P} = \{d, g, h, z\}$, por lo que C_1 se denota con (P, \bar{P}) . La *capacidad de un corte*, que se denota con $c(P, \bar{P})$, se define como

$$c(P, \bar{P}) = \sum_{\substack{v \in P \\ w \in \bar{P}}} c(v, w),$$

la suma de las capacidades de todas las aristas (v, w) , donde $v \in P$ y $w \in \bar{P}$. En este ejemplo, $c(P, \bar{P}) = c(a, g) + c(b, d) + c(b, g) + c(b, h) = 7 + 4 + 6 = 17$. [Si consideramos las aristas dirigidas (de P a \bar{P}) en el corte $C_1 = (P, \bar{P})$, a saber, (a, g) , (b, d) , (b, g) , vemos que la eliminación de estas aristas no produce un subgrafo con dos componentes. Sin embargo, estas tres aristas son minimales en el sentido de que al quitarlas se elimina cualquier camino dirigido posible de a a z .]

El corte C_2 induce la partición de vértices $Q = \{a, b, g\}$, $\bar{Q} = \{d, h, z\}$ y tiene capacidad $c(Q, \bar{Q}) = c(b, d) + c(b, h) + c(g, h) = 4 + 6 + 5 = 15$.

Un tercer corte de interés es el que induce la partición de vértices $S = \{a, b, d, g, h\}$, $\bar{S} = \{z\}$. (¿Cuáles son las aristas en este corte?) Su capacidad es 11.

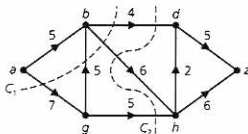


Figura 13.11

Por medio de la idea de capacidad de un corte, el siguiente resultado proporciona una cota superior para el valor de un flujo en una red.

TEOREMA 13.3

Sea f un flujo en una red $N = (V, E)$. Si $C(P, \bar{P})$ es cualquier corte en N , entonces $\text{val}(f)$ no puede exceder a $c = c(P, \bar{P})$.

Demostración: Sea el vértice a la fuente de N y el vértice z su sumidero. Como $g_e(a) = 0$, se sigue que para cualquier $w \in V$, $f(w, a) = 0$. En consecuencia,

$$\text{val}(f) = \sum_{v \in V} f(a, v) = \sum_{v \in V} f(a, v) - \sum_{w \in V} f(w, a).$$

Por la condición (b) en la definición de un flujo, para cualquier $x \in P$, $x \neq a$, $\sum_{v \in V} f(x, v) - \sum_{w \in V} f(w, x) = 0$.

Si sumamos los resultados de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}\text{val}(f) &= \left[\sum_{v \in V} f(a, v) - \sum_{w \in V} f(w, a) \right] + \sum_{\substack{x \in P \\ x \neq a}} \left[\sum_{v \in V} f(x, v) - \sum_{w \in V} f(w, x) \right] \\ &= \sum_{\substack{x \in P \\ v \in V}} f(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in V}} f(w, x) \\ &= \left[\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) + \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} f(x, v) \right] - \left[\sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w, x) + \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w, x) \right].\end{aligned}$$

Como sumamos

$$\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w, x)$$

sobre el mismo conjunto de todos los pares ordenados de $P \times P$, estas sumas son iguales. En consecuencia,

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w, x).$$

Para todos $x, w \in V$, $f(w, x) \geq 0$, por lo que

$$\sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w, x) \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{val}(f) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} c(x, v) = c(P, \bar{P}).$$

Del teorema 13.3 vemos que en una red N , el valor de *cualquier* flujo es menor o igual que la capacidad de *cualquier* corte en esa red. Por lo tanto, el valor del flujo máximo no puede exceder la capacidad mínima sobre todos los cortes de una red. Para la red de la figura 13.11, se puede mostrar que el corte formado por las aristas (d, z) y (h, z) tiene la capacidad mínima 11. En consecuencia, el flujo máximo f de la red satisface $\text{val}(f) \leq 11$. El valor del flujo máximo es 11. La forma de construir tal flujo y la razón por la que su valor es igual a la capacidad mínima entre todos los cortes serán el tema del teorema principal de esta sección.

Sin embargo, antes de analizar esta construcción, observemos que en la demostración del teorema 13.3, el valor de un flujo está dado por

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w, x),$$

donde (P, \bar{P}) es *cualquier* corte de N . Por lo tanto, una vez que se construye un flujo en una red, entonces para cualquier corte (P, \bar{P}) de la red, el valor del flujo es igual a la suma de los flujos en las aristas dirigidas de los vértices de P hacia los de \bar{P} menos la suma de los flujos en las aristas dirigidas de los vértices en \bar{P} a los de P .

Esta observación conduce al siguiente resultado.

COROLARIO 13.1 Si f es un flujo en una red de transporte $N = (V, E)$, entonces el valor del flujo desde la fuente a es igual al valor del flujo hacia el sumidero z .

Demostración: Sean $P = \{a\}$, $\bar{P} = V - \{a\}$ y $S = V - \{z\}$, $\bar{Q} = \{z\}$. De la observación anterior,

$$\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w, x) = \text{val}(f) = \sum_{\substack{y \in Q \\ v \in Q}} f(y, v) - \sum_{\substack{y \in Q \\ w \in Q}} f(w, y).$$

Con $P = \{a\}$ y $g_e(a) = 0$, tenemos que $\sum_{x \in P, w \in \bar{P}} f(w, x) = \sum_{w \in \bar{P}} f(w, a) = 0$. En forma análoga, para $\bar{Q} = \{z\}$ y $g_s(z) = 0$, se sigue que $\sum_{y \in Q, w \in \bar{Q}} f(w, y) = \sum_{y \in Q} f(z, y) = 0$. En consecuencia,

$$\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) = \sum_{v \in P} f(a, v) = \text{val}(f) = \sum_{\substack{y \in Q \\ v \in Q}} f(y, v) = \sum_{y \in Q} f(y, z),$$

lo que establece el corolario.

Pasemos ahora al resultado principal de la sección.

TEOREMA 13.4 *El teorema del flujo máximo y corte mínimo.* Para una red de transporte $N = (V, E)$, el flujo máximo que se puede obtener en N es igual a la capacidad mínima sobre todos los cortes de la red.

Demostración: Por el teorema 13.3, si (P, \bar{P}) es un corte de capacidad mínima en N , entonces el valor de cualquier flujo en N satisface $\text{val}(f) \leq c(P, \bar{P})$. Para verificar la existencia de un flujo f para el que $\text{val}(f) = c(P, \bar{P})$, utilizamos el siguiente algoritmo iterativo, llamado *procedimiento de etiquetado*.

El procedimiento de etiquetado

Paso 1: Dada una red N , definimos un flujo inicial f en N como $f(e) = 0$ para cada e de E . (Esta función f satisface las condiciones de la definición de un flujo.)

Paso 2: Etiquetamos la fuente a con $(-, \infty)$. (Esta etiqueta indica que podemos disponer en la fuente a de todo el material necesario para obtener un flujo máximo.)

Paso 3: Para cualquier vértice x adyacente a a , etiquetamos x como sigue:

- Si $c(a, x) - f(a, x) > 0$, definimos $\Delta(x) = c(a, x) - f(a, x)$ y etiquetamos el vértice x con $(a^*, \Delta(x))$.
- Si $c(a, x) - f(a, x) = 0$, dejamos el vértice x sin etiquetar.

[La etiqueta $(a^*, \Delta(x))$ indica que el flujo presente de a a x puede incrementarse mediante la cantidad $\Delta(x)$, con $\Delta(x)$ unidades adicionales proporcionadas desde la fuente a .]

Paso 4: Mientras exista $x (\neq a) \in V$ tal que x esté etiquetado y exista una arista (x, y) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos el vértice y como sigue:

- a) Si $c(x, y) - f(x, y) > 0$, definimos $\Delta(y) = \min\{\Delta(x), c(x, y) - f(x, y)\}$ y etiquetamos el vértice y como $(x^*, \Delta(y))$.
- b) Si $c(x, y) - f(x, y) = 0$, dejamos el vértice y sin etiquetar.

[La etiqueta $(x^*, \Delta(y))$ indica que el flujo presente en el vértice y puede incrementarse mediante la cantidad $\Delta(y)$ tomada del vértice x.]

Paso 5: De forma análoga, mientras exista un vértice $x \neq a$ tal que x esté etiquetado y exista una arista (y, x) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos el vértice y como sigue:

- a) Si $f(y, x) > 0$, etiquetamos el vértice y como $(x^*, \Delta(y))$, donde $\Delta(y) = \min\{\Delta(x), f(y, x)\}$.
- b) Si $f(y, x) = 0$, dejamos el vértice y sin etiquetar.

[La etiqueta $(x^*, \Delta(y))$, indica que al disminuir el flujo de y a x , el total del flujo que sale de y a los vértices etiquetados puede ser disminuido en $\Delta(y)$. Estas $\Delta(y)$ unidades pueden utilizarse entonces para aumentar el flujo total de y a los vértices no etiquetados.

Puesto que un vértice y podría ser adyacente a, o de, más de un vértice etiquetado, los resultados de este procedimiento podrían no ser únicos. Además, si x está etiquetado, la red podría incluir ambas aristas (x, y) y (y, x) , lo que tal vez produciría dos etiquetas para y . Pero el procedimiento está diseñado para crear un flujo máximo, y podría haber más de un flujo de este tipo. No obstante, si un vértice puede ser etiquetado en más de una forma, podemos hacer una elección arbitraria.

Al aplicar el procedimiento de etiquetado a los vértices de la red dada, repetimos los pasos 4 y 5 mientras sea posible respecto del conjunto actual (aunque modificable) de vértices etiquetados. En cada iteración debemos considerar dos casos:

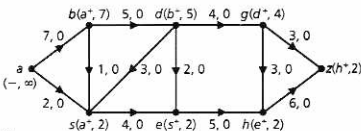
Caso 1: Si el sumidero z se etiqueta como $(x^*, \Delta(z))$, entonces el flujo en la arista (x, z) puede aumentarse de $f(x, z)$ a $f(x, z) + \Delta(z)$, según lo indique la etiqueta.

El vértice x puede etiquetarse como $(v^*, \Delta(x))$ o $(v^-, \Delta(x))$, donde $\Delta(x) \geq \Delta(z)$. Para la etiqueta $(v^*, \Delta(x))$, podemos considerar el vértice v como la fuente para aumentar el flujo en la arista (x, z) en la cantidad $\Delta(z)$. En este caso, incrementamos de forma análoga el flujo presente en la arista (v, x) , de $f(v, x)$ a $f(v, x) + \Delta(z)$ (no a $f(v, x) + \Delta(x)$). Si x tiene la etiqueta $(v^-, \Delta(x))$, entonces el flujo en la arista (x, v) cambia de $f(x, v)$ a $f(x, v) - \Delta(z)$ para proporcionar el flujo adicional de Δz unidades de x a z .

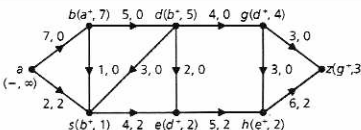
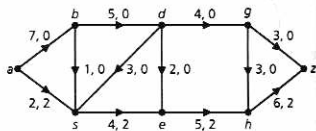
Conforme continúa este proceso de regreso hasta a , cada arista dirigida a lo largo de un camino de a a z ve aumentado o disminuido su flujo [para un vértice (que quede en el camino) con una etiqueta negativa] en Δz unidades. Al hacer esto, eliminamos todas las etiquetas de los vértices, excepto $(-, \infty)$ para la fuente; el proceso se repite para ver si es posible incrementar el flujo aún más.

Caso 2: Si el procedimiento de etiquetado se realiza hasta donde sea posible y el sumidero z no está etiquetado, entonces se ha logrado el flujo máximo. Sea P el conjunto de vértices de V que están etiquetados y $\bar{P} = V - P$. Puesto que los vértices de \bar{P} no están etiquetados, los flujos de las aristas (x, y) , donde $x \in P$ e $y \in \bar{P}$, satisfacen $f(x, y) = c(x, y)$. Además, para cualquier arista (w, v) tal que $w \in \bar{P}$ y $v \in P$, tenemos $f(w, v) = 0$. En consecuencia, existe un flujo para la red dada, tal que el valor del flujo es igual a la capacidad del corte (P, \bar{P}) . Por el teorema 13.3, tenemos que este flujo es un máximo.

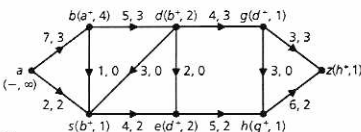
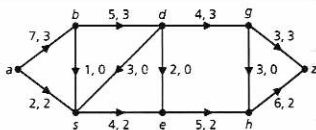
(a)



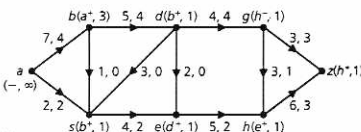
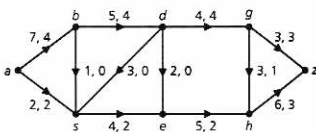
(b)



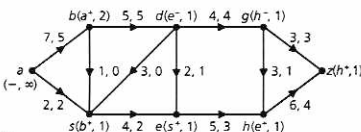
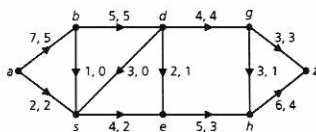
(c)



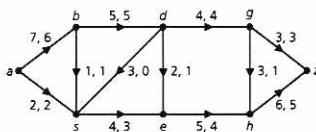
(d)



(e)



(f)



Antes de demostrar el procedimiento de etiquetado enunciaremos un último corolario y algunos comentarios relacionados con esto. La demostración del corolario se deja como ejercicio.

COROLARIO 13.2

Sea $N = (V, E)$ una red de transporte tal que para cada $e \in E$, $c(e)$ es un entero positivo. Entonces existe un flujo máximo f para N , donde $f(e)$ es un entero no negativo para cada arista e .

Las definiciones de red de transporte y flujo (en una red de transporte) pueden modificarse para admitir funciones de flujo y capacidad con valores reales no negativos. Si las capacidades de una red de transporte son números racionales, entonces el procedimiento de etiquetado terminará en cierto momento y se obtendrá un flujo máximo. Sin embargo, si algunas capacidades son irracionales, es posible que el procedimiento nunca termine, pues se obtendrían $\Delta(z)$ cada vez más pequeñas en cada iteración. Además, L. R. Ford, Jr., y D. R. Fulkerson [12] han demostrado que el procedimiento podría producir un flujo tal que no fuera un flujo máximo. Cuando aparecen capacidades irracionales, podemos usar la modificación hecha por J. Edmonds y R. M. Karp [9], en la que el procedimiento termina (en un número finito de pasos) y se obtiene un flujo máximo.

Ejemplo 13.9

Utilizaremos el procedimiento de etiquetado para encontrar un flujo máximo para la red de transporte de la figura 13.12(a).

En esta red, etiquetamos cada arista con un par ordenado x, y , donde x es la capacidad de la arista y $y = 0$ indica un flujo inicial para la red. La figura 13.12(b) demuestra la primera aplicación del procedimiento de etiquetado. En este caso, podemos hacer una elección en el etiquetado del sumidero z . Elegimos $(h^*, 2)$ como etiqueta, en vez de $(g^*, 3)$ (¿qué otra etiqueta podríamos utilizar para el vértice e ?) Retrocediendo de z a h a e a s a a , e incrementando el flujo en cada arista en $\Delta(z) = 2$, obtenemos el nuevo flujo de la figura 13.12(b). Las partes (c), (d), (e) y (f) de la figura muestran una segunda, tercera, cuarta y quinta aplicaciones del procedimiento de etiquetado. Observe que el vértice g tiene una etiqueta negativa en las partes (e) y (f). Además, la parte (f) proporciona una segunda aparición de una etiqueta negativa, esta vez para el vértice d . Aplicamos el procedimiento de etiquetado por última vez para etiquetar la red de transporte como en la figura 13.13. En esta ocasión, el sumidero z no está etiquetado y debemos usar el segundo caso del procedimiento. Sean $P = \{a, b\}$ y $\bar{P} = \{s, d, e, g, h, z\}$; vemos que $c(P, \bar{P}) = c(b, d) + c(b, s) + c(a, s) = 5 + 1 + 2 = 8 = 5 + 3 = f(h, z) + f(g, z)$, el flujo a z . Las aristas en N cruzadas por la línea punteada son las aristas del conjunto de corte (no dirigido) asociado con el corte (P, \bar{P}) , el cual consta de todas las aristas de la forma $\{x, y\}$, donde $x \in P$, $y \in \bar{P}$.

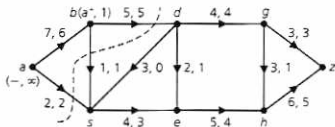


Figura 13.13

Cerraremos esta sección con tres ejemplos modelados con el concepto de red de transporte. Después de establecer los modelos, la solución final de cada ejemplo se deja para los ejercicios de la sección.

Ejemplo 13.10

Las compañías c_1, c_2, c_3 fabrican microcircuitos (chips) en unidades de mil; dichos chips se distribuyen a dos fabricantes de computadores, f_1 y f_2 , a través de la “red de transporte” de la figura 13.14(a), donde hay tres fuentes (c_1, c_2 y c_3) y dos sumideros f_1 y f_2 . La compañía c_1 puede producir hasta 15 unidades, la compañía c_2 hasta 20 unidades y la compañía c_3 hasta 25 unidades. Si cada fabricante necesita 25 unidades, ¿cuántas unidades debe producir cada compañía para satisfacer la demanda de los fabricantes de computadores o al menos proporcionar tantas unidades como permita la red?

Para modelar este ejemplo mediante una red de transporte, introducimos una fuente a y un sumidero z , como se muestra en la figura 13.14(b). Usamos la capacidad de producción de las tres compañías para definir las capacidades de las aristas (a, c_1) , (a, c_2) y (a, c_3) . Para las aristas (f_1, z) y (f_2, z) usamos las demandas como capacidades. A fin de responder nuestra pregunta, hay que aplicar el procedimiento de etiquetado a esta red para determinar el valor de un flujo máximo.

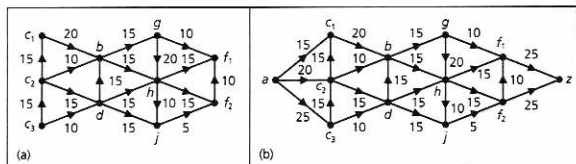


Figura 13.14

Ejemplo 13.11

La red de transporte que se muestra en la figura 13.15(a) tiene una restricción más, ya que ahora tenemos capacidades asignadas a los vértices distintos de la fuente y el sumidero. Tal capacidad impone un límite superior a la cantidad del bien en cuestión que puede pasar a través de un vértice dado. La parte (b) de la figura muestra la forma de volver a diseñar la red para obtener otra donde podamos aplicar el procedimiento de etiquetado. Para cualquier vértice v distinto de a o de z , separamos dicho vértice en los vértices v_1 y v_2 . Trazamos la arista de v_1 a v_2 y la etiquetamos con la capacidad original asignada a v . Una arista de la forma (v, w) , donde $v \neq a, w \neq z$, se convierte en la arista (v_2, w_1) que mantiene la capacidad de (v, w) . Las aristas de la forma (a, v) se convierten en la arista (a, v_1) con capacidad $c(a, v)$. Reemplazamos una arista como (w, z) por la arista (w_2, z) , con capacidad $c(w, z)$.

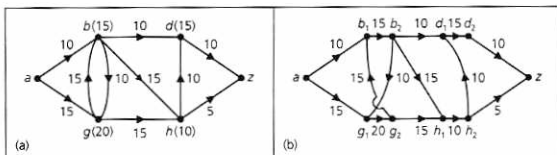


Figura 13.15

El flujo máximo de la red dada se determina entonces mediante el procedimiento de etiquetado aplicado a la red que se muestra en la figura 13.15(b).

Ejemplo 13.12

Durante una práctica militar, los mensajeros deben entregar la información del cuartel general (vértice a) a la comandancia de campo (vértice z). Puesto que algunos caminos podrían estar bloqueados o destruidos, ¿cuántos mensajeros deben enviarse de modo que cada uno recorra un camino sin aristas en común con los demás caminos?

Ya que las distancias entre los vértices no son importantes, el grafo de la figura 13.16 no tiene capacidades asignadas a sus aristas. El problema aquí es determinar el número máximo de caminos con aristas disjuntas de a a z . Si asignamos a cada arista una capacidad de 1, convertimos el problema en uno de flujo máximo, donde el número de caminos con aristas disjuntas (de a a z) es igual al valor de un flujo máximo para la red.

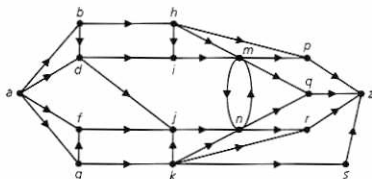


Figura 13.16

EJERCICIOS 13.3

1. a) Para la red de la figura 13.17, sea 10 la capacidad de cada arista. Si cada arista e de la figura se etiqueta con una función f , como se muestra, determine los valores de s , t , w , x y y de modo que f sea un flujo en la red.
b) ¿Cuál es el valor de este flujo?
c) Encuentre tres cortes (P, \bar{P}) en esta red que tengan capacidad 30.

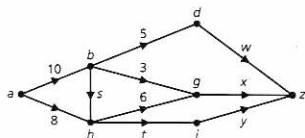


Figura 13.17

- Si $N = (V, E)$ es una red de transporte, sea f un flujo en N y (P, \bar{P}) un corte. Demuestre que el valor del flujo f es igual a $c(P, \bar{P})$ si y sólo si
 - $f(e) = c(e)$ para cada arista $e = (x, y)$, tal que $x \in P, y \in \bar{P}$ y
 - $f(e) = 0$ para cada arista $e = (v, w)$, tal que $v \in \bar{P}, w \in P$.
- Encuentre un flujo máximo y el corte mínimo correspondiente para cada una de las redes de transporte de la figura 13.18.

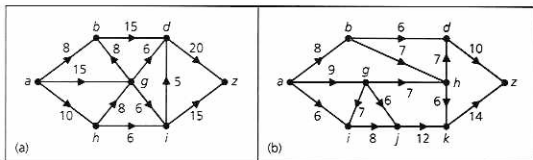


Figura 13.18

- Aplique el procedimiento de etiquetado para encontrar un flujo máximo en los ejemplos 13.10, 13.11 y 13.12.
- Demuestre el corolario 13.2.
- En cada una de las siguientes "redes de transporte", dos compañías c_1 y c_2 producen cierto artículo utilizado por dos fabricantes f_1 y f_2 . Para la red de la parte (a) de la figura 13.19, la compañía c_1 produce 8 unidades y la compañía c_2 produce 7 unidades; el fabricante f_1 necesita 7 unidades y el fabricante f_2 necesita 6 unidades. En la red de la figura 13.19(b), cada compañía produce 7 unidades y cada fabricante necesita 6 unidades. ¿En qué situación (o situaciones) satisfacen las compañías las necesidades de los fabricantes?

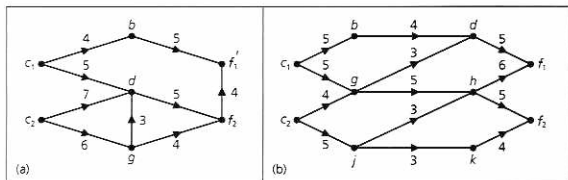


Figura 13.19