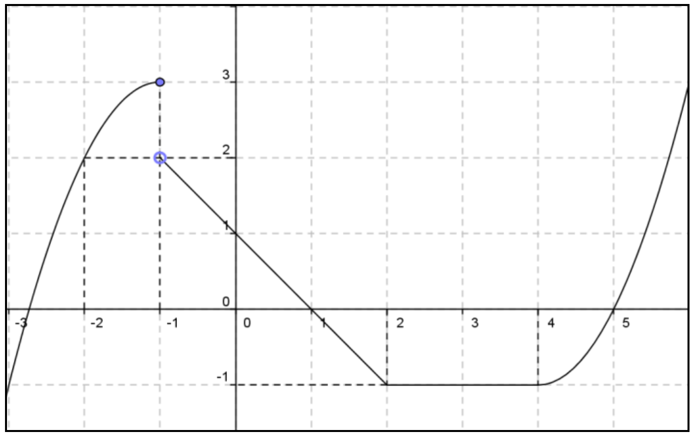
<u>Nota</u>: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

1. A partir del gráfico dado, determinar los límites que se piden en cada caso

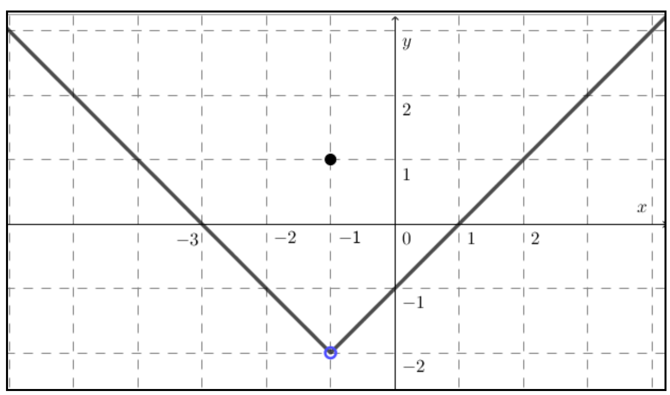
a)



$i)\ \lim_{x\to -2} f(x)$ $ii)\ \lim_{x\to -1^-} f(x)$ $iii)\ \lim_{x\to -1^+} f(x)$ $iv)\ \lim_{x\to -1} f(x)$

$v)\ \lim_{x\to 0} f(x)$ $vi)\ \lim_{x\to 2} f(x)$ $vii)\ \lim_{x\to 4^-} f(x)$ $viii)\ \lim_{x\to 4^+} f(x)$

b)



$\lim_{x\to -1} f(x)$

2. Dadas las siguientes funciones:

a) Hallar su dominio de definición.
b) Calcular los límites indicados.
c) Analizar puntos de discontinuidad para las funciones dadas en los ítems iii), iv).

i) $f(t) = e^{t-1}$ $\lim_{t\to 1} f(t)$

ii) $f(x)=\cos x+3$ $\qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$

iii) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\neq 3 \\ 2 & \text{si } x=3 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

iv) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 3 \\ 2 & \text{si } 3<x<5 \\ x+1 & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

3. Dada la función $f: A\subseteq R\to R / f(x)=\begin{cases} \log_2(x+4) & \text{si } x\leq 4 \\ \sqrt{x-4}-1 & \text{si } x>4 \end{cases}$

a) Representar gráficamente la función f, determinando previamente su dominio.
b) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificando en cada caso:

B1) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 4} f(x)=-1$

B2) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to -2} f(x)=1$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\,sen\frac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}(x-\pi)\cos\left(\frac{x^2}{x-\pi}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x^4+6x^3-4x^2}{x^3+x^2}$

5. Calcular los valores reales de *a* y de *b* para que existan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si

$$f(x)=\begin{cases} bx & \text{si } x\leq -1 \\ x^2+ax & \text{si } -1<x\leq 2 \\ -bx+a & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad (*)$$

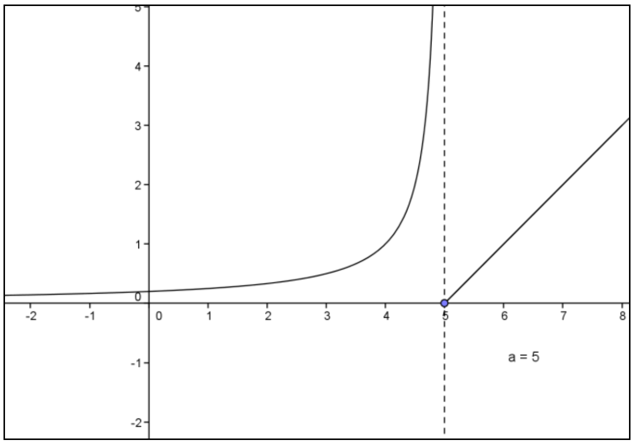
6. En un Parque Nacional se ha realizado un estudio sobre cierta especie y se ha concluido que la cantidad de individuos en los próximos años se rige por la fórmula $P(x)=\frac{15000x+6600}{3x+1}$, donde x representa la cantidad de años transcurridos a partir del momento en que se ha realizado el estudio.

a) ¿Cuántos individuos había en el momento de realizar el estudio? ¿Cuántos habrá dentro de cinco años?
b) ¿Llegará a extinguirse la población, o tiende a estabilizarse en torno a un número determinado de individuos? Justificar.

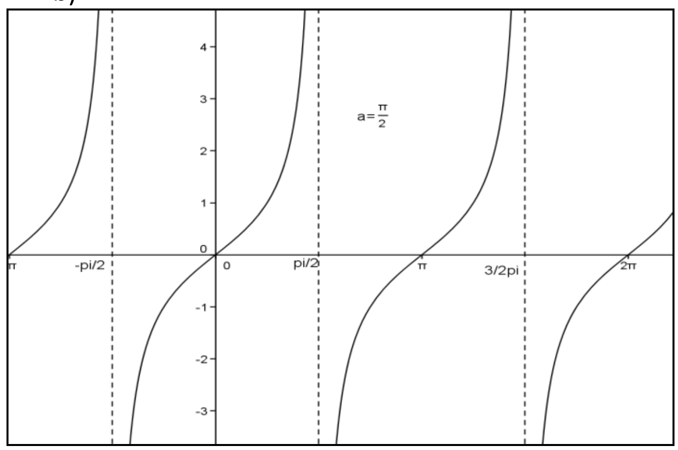
7. A partir de las siguientes gráficas, calcular los límites pedidos:

I) i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

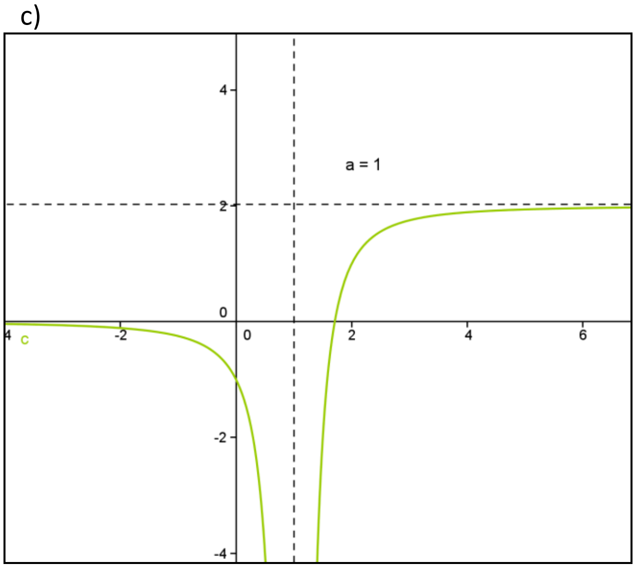
a)



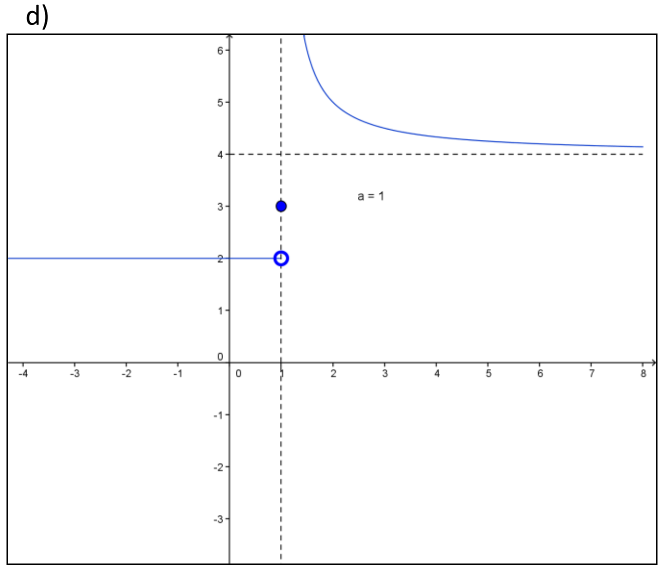
b)



c)



d)



8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{a \to 2} \dfrac{1}{a-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 5^-} 4(5-x)^{-3}$

c) $\lim\limits_{b \to 0^+} b^3 - b^{-2} + 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2^{-x} + \left(\dfrac{4}{5} \right)^x \right]$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{x+1}}{2^x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 + 6x + 2}{x^4 + 4x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+4}{3x+5}$

h) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t+2}{3t^3 + 2t}$

9. Dada la función $f: A \subseteq R \to R / f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-2} & si\, x > -1 \\ \frac{-x^3-3x}{x+3} & si\, x \leq -1 \end{cases}$, calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

10. Una población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat y su crecimiento se amortigua de acuerdo con la siguiente función: $B(t) = \dfrac{c}{1 + k e^{-at}}$, dónde *c*, *k* y *a* son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo *t* y $a > 0$.

a) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?

b) ¿Cuál es la población límite?

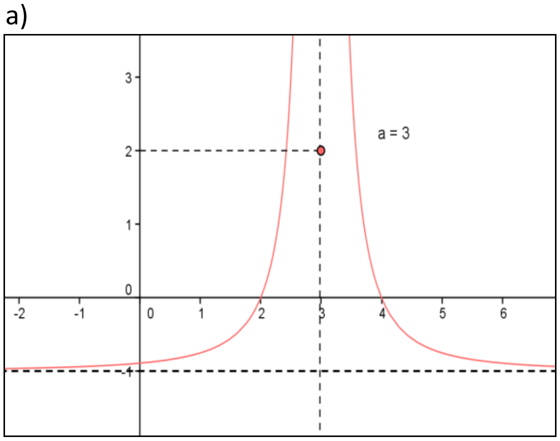
11. El tejido vivo sólo puede ser excitado por una corriente eléctrica si ésta alcanza o excede un cierto valor que designamos v. El valor v depende de la duración t de la corriente. De acuerdo con la ley de Weiss, se tiene que $v = \dfrac{a}{t} + b$, siendo a y b constantes positivas. Analizar e interpretar el comportamiento de v cuando:

a) t se aproxima a cero.

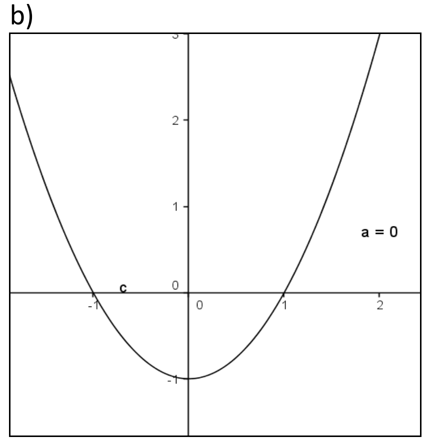
b) t tiende a infinito.

12. Dadas las siguientes gráficas de funciones analizar su continuidad en x = *a*. Si presentan alguna discontinuidad, clasificarla

a)



b)



13. Sean f y g funciones continuas en $x = x_0$. Se definen las funciones $s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $t(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$. Demostrar que:

a) s(x) es continua en $x = x_0$.

b) t(x) es continua en $x = x_0$.

c) Si definimos la función $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. ¿Es r(x) continua en $x = x_0$?

14. En los siguientes ejercicios hallar, si existen, los puntos de discontinuidad de cada función y clasificar la discontinuidad. Representar gráficamente las funciones de los ítems a), b). A partir del gráfico, identificar si se presenta alguna asíntota y dar su ecuación.

a) $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{3 - x}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \ln(x - 2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $h(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

15. Determina la constante $k \in$ R, para que la función f sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 10 & si\ x \neq 1 \\ 7 - 2k & si\ x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ln(x - 3) + k & si\ x > 4 \\ 2 + k(x + 1) & si\ x \le 4 \end{cases}$

16. En cada uno de los siguientes ítems definir analíticamente una función que cumpla con las especificaciones indicadas. Graficar.

a) Presenta una discontinuidad evitable en x = 1 y discontinua esencial en x = -1.

b) $3 \in \text{Dom} f$ y $\nexists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

17. Determinar el dominio y las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + e^{-x} & \text{si } x \ge -2 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 + 1}$

18. Para cada una de las funciones siguientes, se pide

i) Determinar el dominio y las intersecciones con los ejes.

ii) Analizar la continuidad y hallar las ecuaciones de todas sus asíntotas.
iii) Realizar un gráfico aproximado.

a) $f(x)=\dfrac{5x-3}{2x+6}$

b) $g(x)=\dfrac{2x^2+6x+4}{(x-3)(x+1)}$

19. Para cada una de las siguientes afirmaciones indicar si es Verdadera o Falsa. Justificar la respuesta dada.

a) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces *f* es continua en *x* = a

b) Si *P*(*x*) es un polinomio, la función $f(x)=\dfrac{P(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en *x* = 1.

c) Si x = a es asíntota de f(x), entonces no existe f(a).

d) Si Domf = R, entonces f no tiene asíntotas verticales.

e) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, entonces el gráfico de f no presenta asíntotas horizontales. (*)

20. Hallar el valor de k$\in$ R, de modo que x = -1/2 sea asíntota de la función $f(x)=\dfrac{4x-5}{kx+3}$. Para el valor de k obtenido calcular las ecuaciones de todas las asíntotas de f. (*)

21. Determinar los valores de a, b $\in$ R para que la función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{ax+b}$ admita a la recta de ecuación 2x – y = 5 como asíntota.

<u>Teorema de Bolzano</u>
Sea f una función continua en el intervalo [a, b] tal que f (a) y f (b) tienen distinto signo. Entonces existe al menos un valor c $\in$(a, b) tal que f (c)= 0.
<u>Consecuencia del teorema</u>
Si f es una función continua en un intervalo [a, b] y no tiene ningún cero en el intervalo (a, b), entonces f no cambia de signo en dicho intervalo (es decir, la función f es o bien positiva o bien negativa en ese intervalo).

22. Sea $f:R\to R$ una función continua que corta al eje x en tres puntos únicamente y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-8	-1/4	3/8	$-\sqrt{2}$	-5	-1/2	4

a) Hallar un intervalo abierto de amplitud uno que contenga a cada una de las raíces de f.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en cada uno de los siguientes intervalos: (-∞; -3), (-3; 2), (-2; 1), (2; +∞), (3; +∞).

23. Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-2x+1}{2}} & \text{si}\, x<1/2 \\ -4x+3 & \text{si}\, x\geq 1/2 \end{cases}$, mostrar que f tiene, al menos, un cero en el intervalo (0; 1).

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 5 Calcular los valores reales de a y de b para que existan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si

$$f(x)=\begin{cases} bx & \text{si }\ x\leq -1 \\ x^2+ax & \text{si }\ -1<x\leq 2 \\ -bx+a & \text{si }\ x>2 \end{cases}$$

Recordemos que para que exista el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, donde $a\in R$, deben existir los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y deben ser iguales.

Como queremos que exista el $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, calculemos los límites laterales y veamos qué condición deben cumplir a y b para que $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)}$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} bx=-b$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^2+ax=1+a$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, se tiene que $\boxed{-b=1+a}$ (A)

De manera similar, veamos qué relación deben cumplir a y b para que exista
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Los límites laterales son:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+ax=4+2a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -bx+a=-2b+a$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, se tiene $4+2a=-2b+a$ que es equivalente a
$\boxed{a=-2b-4}$ (B)

Reemplazando (B) en (A):

$$-b=1+(-2b-4)$$
$$-b+2b=1-4$$
$$\boxed{b=-3}$$

Si reemplazamos el valor de b obtenido en la ecuación (B),

$$a=-2(-3)-4$$

$\boxed{a=2}$

Luego, si a=2 y b=-3, existen $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Ejercicio 19 Para cada una de las siguientes afirmaciones indicar si es Verdadera o Falsa. Justificar la respuesta dada.

a) Si existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces f es continua en x=a.
b) Si P(x) es un polinomio, la función $f(x)=\dfrac{P(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en x=1.
c) Si x=a es asíntota de f(x), entonces no existe f(a).
d) Si Dom_f=R, entonces f no tiene asíntotas verticales.
e) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$, entonces el gráfico de f no presenta asíntotas horizontales.

a) Si existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces f es continua en x=a.

Recordemos que no basta que exista el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para que f sea continua en x=a sino que debe existir f(a) y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
Vamos a probar que la afirmación es Falsa.
Podríamos proponer un contraejemplo, es decir una función para la cual exista el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero que no sea continua.

Consideremos $f: R-\{1\}\to R \,/\, f(x)=\begin{cases} \ln(x) & \textbf{si} \;\; x>1 \\ x-1 & \textbf{si} \;\; x<1 \end{cases}$

Si bien existe el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ya que los límites laterales existen y son iguales entre sí:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x-1=0$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)=0$,
La función f no es continua en x=1 ya que no está definida en x=1.

b) Si P(x) es un polinomio, la función $f(x)=\dfrac{P(x)}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en x=1.

Recordemos que la recta de ecuación x=a es asíntota vertical de f si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Vamos a probar que la afirmación es Falsa.

Podríamos proponer un contraejemplo, es decir una función $f(x)=\dfrac{P(x)}{x-1}$, siendo P(x) un polinomio, y que no cumpla $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Proponemos P(x) = x – 1. Luego, $f: R-\{1\}\to R \,/\, f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} 1=1$, por lo tanto la recta de ecuación x=1 no es asíntota vertical de f.

c) Si Dom_f=R, entonces f no tiene asíntotas verticales.
Vamos a probar que la afirmación es Falsa.
Podríamos proponer un contraejemplo, es decir una función cuyo Dom_f=R pero que sí tenga asíntota vertical.

Consideremos $f:R\to R/f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \textbf{si } x\neq 0\\ 0 & \textbf{si } x=0\end{cases}$

La función f tiene como dominio el conjunto de números reales y posee asíntota vertical de ecuación x=0 pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

d) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$, entonces el gráfico de f no presenta asíntotas horizontales.

Vamos a probar que la afirmación es Falsa.
Podríamos proponer un contraejemplo, es decir una función f que verifique $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$ y cuyo gráfico sí presente asíntota horizontal.
Consideremos $f:R\to R/f(x)=e^x$.
Ésta verifica
$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x=\infty$ pero sí presenta asíntota horizontal "a izquierda" de ecuación y=0 pues $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$.

Ejercicio 20

Hallar el valor de k∈R, de modo que x=-1/2 sea asíntota de la función $f(x)=\frac{4x-5}{kx+3}$. Para el valor de k obtenido calcular las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

En primer lugar, notemos que la asíntota tiene ecuación x=-1/2, por lo que se trata de una asíntota vertical y deberá verificarse

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x-5}{kx+3}=\infty \ (\blacklozenge)$$

Analicemos cuál es el k∈R que verifica (♦).

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\overbrace{4x-5}^{\to -7}}{\underbrace{kx+3}_{\to -\frac{k}{2}+3}}$$

Para que el límite sea infinito, el denominador deberá tender a cero, por lo que buscamos k tal que $-\frac{k}{2}+3=0$. Luego, k=6.

Luego, para k=6 la recta de ecuación x=-1/2 es asíntota vertical de f.

Entonces $f(x)=\frac{4x-5}{6x+3}$.

Busquemos la ecuación de la asíntota horizontal de f.

Recordemos que para que exista asíntota horizontal debe cumplirse $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$**,** $\ell\in\mathbf{R}$ y en tal caso su ecuación será $y=\ell$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{4x-5}^{\to\infty}}{\underbrace{6x+3}_{\to\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x-5}{x}}{\frac{6x+3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}}{6+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}=\frac{4}{6}$$

Luego, f tiene asíntota horizontal de ecuación $y=\frac{4}{6}$.