Segundo parcial

Ejercicio 1

¿Cuántas "palabras" pueden formarse permutando las letras de la palabra LICENCIADO con la condición de que:

i. aparezcan juntas todas las vocales?
ii. comiencen y terminen en consonante?
iii. comiencen o terminen en vocal?

Ejercicio 2

a) Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(3x^5 + \frac{9}{x^2}\right)^{11}$.

b) Calcular los términos centrales en el desarrollo del binomio dado en el ítem a).

Ejercicio 3

Se define en el conjunto de números enteros la relación R dada por:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}: \ x\, R\, y \ \text{ si y sólo si } x^2 - y^2 \text{ es múltiplo de 5.}$$

a) Probar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
b) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente en cada caso:
   i. $cl(5) \cap cl(2) = \varnothing$
   ii. $cl(-15) = cl(-2)$

Ejercicio 4

Sea A = { 1,3, 5, 7, 9, 11}. Se define en A la siguiente relación R.

R = {(1; 1), (3; 3), (5; 5), (9; 11), (3; 5) ; (11; 11) ; (7 ; 7) ; (3 ; 1)}

a) Hallar dominio e imagen de la relación.
b) Analizar si R es una relación de orden y/o de equivalencia. Justificar.
c) Si R no es de orden, agregar a R la mínima cantidad de pares posibles para formar una relación S de manera tal que S sea una relación de orden. Para esta nueva relación S, realizar el diagrama de Hasse y determinar elementos maximales y minimales.

Ejercicio 5

Demostrar utilizando el principio de inducción que la siguiente igualdad se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^i = 10 - \frac{5}{2^n}$$

Resolución

Ejercicio 1

Con las letras de la palabra LICENCIADO ¿cuántas "palabras" pueden formarse con la condición de que:

i. aparezcan juntas todas las vocales?
ii. comiencen y terminen en consonante?
iii. comiencen o terminen en vocal?

Respuesta

i. Para asegurarse que estén juntas todas las vocales, conviene pensarlas como un bloque formado por las mismas. Es decir, un bloque de la forma IEIAO. Luego, para contar la cantidad de palabras que podemos formar tenemos que permutar, en principio. 6 elementos que son el bloque de las vocales y las consonantes L . C, N, C, D, de las cuales se repite la "C". Y tenemos que considerar también el total de permutaciones posibles dentro del grupo de las vocales. Es decir, el total de palabras que podemos formar es:

$$\frac{6!}{2!} \cdot \frac{5!}{2!}$$

Total de permutaciones de 6 elementos (el bloque de las vocales más las consonantes),en los que hay dos que se repiten (la letra C)

Total de permutaciones dentro del bloque de las vocales, dentro del cual hay un objeto que se repite dos veces: la letra I

ii. Para asegurarnos de que las palabras formadas comiencen y termine en consonante, tenemos que pensar que para el primera letra tenemos 5 posibilidades (L, C, N, C, D) y para la última letra, 4 (cualquiera de las consonantes restantes). Y hay que considerar que tanto la letra C como la letra I se repite dos veces cada una:

---- ----- ----- ------ ----- ----- ----- ----- ------ -------

5 posibilidades 8 7 6 5 4 3 2 1 4 posibilidades

El total de palabras que comienzan y terminan en consonante es $5.\ 4.\ \frac{8!}{2!.\ 2!}$

iii. Para contar las palabras que comienzan o terminan en vocal, tenemos que considerar (para no repetir casos) tres posibilidades:

1. comienzan en vocal y terminan en consonante
2. comienzan en consonante y terminan en vocal
3. comienzan y terminan en vocal

Contaremos la cantidad de palabras en cada uno de estos casos y luego sumaremos los resultados obtenidos.

1. Si la palabra comienza en vocal, tenemos 5 posibilidades para el primer lugar; como termina en consonante, tenemos 5 posibilidades para el último lugar. Es decir:

   ---- ----- ----- ------ ----- ----- ----- ----- ------ -------

   5 posibilidades 8 7 6 5 4 3 2 1 5 posibilidades

   Teniendo en cuenta que las letras " I " y " C " se repiten dos veces cada una de ellas, el número total de palabras que comienzan en vocal y terminan en consonante es $5.\ 5.\ \frac{8!}{2!.\ 2!}$

2. Es análogo al anterior.

3. Si la palabra empieza y termina en vocal, tenemos 5 posibilidades para la primera letra (cualquiera de las cinco vocales) y cuatro posibilidades para la última letra (cualquier vocal menos la que pusimos en el primer lugar). Y hay que considerar que tanto la letra C como la letra I se repite dos veces cada una:

$$\underset{5 \text{ posibilidades}}{\underline{\quad}}\;\underset{8}{\underline{\quad}}\;\underset{7}{\underline{\quad}}\;\underset{6}{\underline{\quad}}\;\underset{5}{\underline{\quad}}\;\underset{4}{\underline{\quad}}\;\underset{3}{\underline{\quad}}\;\underset{2}{\underline{\quad}}\;\underset{1}{\underline{\quad}}\;\underset{4 \text{ posibilidades}}{\underline{\quad}}$$

El total de palabras que comienzan y terminan en vocal es $5.\ 4.\ \dfrac{8!}{2!.\ 2!}$.

Luego, el total de palabras que comienzan o terminan en vocal es: $5.\ 5.\ \dfrac{8!}{2!.\ 2!} + 5.\ 5.\ \dfrac{8!}{2!.\ 2!} + 5.\ 4.\ \dfrac{8!}{2!.\ 2!}$

<u>Ejercicio 2</u>

a) Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(3x^5 + \dfrac{9}{x^2}\right)^{11}$.

b) Calcular los términos centrales en el desarrollo del binomio dado en el ítem a).

<u>Respuesta</u>

a) El término general en el desarrollo de este binomio es $T_{k+1} = \binom{11}{k}(3x^5)^k.\left(\dfrac{9}{x^2}\right)^{11-k}$ Para obtener el término de grado 6, debemos trabajar con las potencias de x:

$$T_{k+1} = \binom{11}{k}(3x^5)^k.\left(\frac{9}{x^2}\right)^{11-k} = \binom{11}{k}3^k x^{5k}.\ \frac{9^{11-k}}{x^{2.(11-k)}}$$

$$= \binom{11}{k}3^k.\ 9^{11-k}\ x^{5k}\ x^{-22+2k} = \binom{11}{k}3^k.\ 9^{11-k}\ x^{7k-22}$$

Para obtener el término de grado 6, debemos igualar a 6 el exponente de x. Es decir, 7k - 22 = 6 → k = 4. El coeficiente pedido es el número que multiplica a x para el valor de k hallado. Es decir: $\binom{11}{4}3^4.\ 9^7$

b) Como el valor de n = 11, el desarrollo del binomio dado tiene 12 términos. Las posiciones centrales son la posición 6 y la posición 7. Hay que calcular T_6 y T_7 utilizando la expresión $T_{k+1} = \binom{11}{k}(3x^5)^k.\left(\dfrac{9}{x^2}\right)^{11-k}$ (para k = 5 y k = 6 respectivamente)

Ejercicio 3

Se define en el conjunto de números enteros la relación R dada por:

$\forall\ x, y \in \mathbb{Z}:\ x\ R\ y$ si y sólo si $x^2 - y^2$ es múltiplo de 5.

c) Probar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.
d) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente en cada caso:
   i. $cl(5) \cap cl(2) = \varnothing$
   ii. $cl(-15) = cl(-2)$

Respuesta

a)
- R es *reflexiva* dado que X R X si y sólo si $x^2 - x^2 = 0$ es múltiplo de 5, lo cual es verdadero.
- R es *simétrica*: Si $x^2 - y^2 = 5k$, con k entero entonces multiplicando por -1 la igualdad tenemos que $y^2 - x^2 = 5(-k)$, con -k entero. Por lo tanto, y Rx.
- R es *transitiva*: x R y si y sólo si $x^2 - y^2 = 5k_1$ con k_1 entero.
  Y R z si y sólo si $y^2 - z^2 = 5k_2$ con k_2 entero

  Sumando miembro a miembro ambas igualdades, tenemos que $x^2 - z^2 = 5(k_1 + k_2)$, por lo que x R z.

b)

i. Para ver si las clases tienen intersección vacío, tenemos que ver si 5 R 2. Si están relacionados, sus clases de equivalencia son iguales. Si no están relacionados, la intersección entre ellas es vacía.

2 R 5 si y sólo si $2^2 - 5^2$ es múltiplo de 5. Como 4 - 25 = -21 no es múltiplo de 5, 2 no se relaciona con 5 y $cl(5) \cap cl(2) = \varnothing$. La afirmación es verdadera.

ii. Tenemos que ver si -15 se relaciona con -2: como $(-15)^2 - (-2)^2$ no es múltiplo de 5, ambos números no están relacionados. La intersección entre sus clases de equivalencia en el conjunto vacío. La afirmación dada es falsa.

Ejercicio 4

Sea A = { 1,3, 5, 7, 9, 11}. Se define en A la siguiente relación R.

R = {(1; 1), (3; 3), (5; 5), (9; 11), (3; 5) ; (11; 11) ; (7 ; 7) ; (3 ; 1)}

a) Hallar dominio e imagen de la relación.

b) Analizar si R es una relación de orden y/o de equivalencia. Justificar.

c) Si R no es de orden, agregar a R la mínima cantidad de pares posibles para formar una relación S de manera tal que S sea una relación de orden. Para esta nueva relación S, realizar el diagrama de Hasse y determinar elementos maximales y minimales.

Respuesta

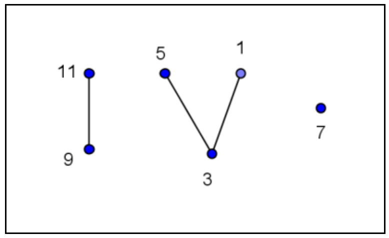
a) El dominio de la relación R definida en un conjunto A está definido por: $\mathrm{Dom}\,R = \left\{\, a \in A \,/\, (a;b) \in R \right\}$ mientras que el conjunto imagen de la relación es $\mathrm{Im}\,R = \left\{\, b \in A \,/\, (a;b) \in R \right\}$ Es decir, el dominio es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que participan de la relación, mientras que la imagen son las segundas componentes de estos pares. En este caso, Dominio R: {1, 3, 5, 9, 11, 7} ; Imagen R = {1, 3, 5, 7. 11]

b) No es de orden ni de equivalencia porque no es reflexiva: por ejemplo, el par (9; 9) no pertenece a la relación.

c) Para que la relación resulte reflexiva, hay que agregar el par (9; 9)

La relación dada es transitiva y antisimétrica, por lo que no hay que agregar ningún otro par. La relación S, que es de orden, es S = {(1; 1), (3; 3), (5; 5), (9; 11), (3; 5) ; (11; 11) ; (7 ; 7) ; (3 ; 1) ; (9 ; 9)}

El diagrama de Hasse correspondiente a esta relación es el siguiente:



Los elementos maximales son { 11 ; 1 ; 5 ; 7} mientras que el conjunto de elementos minimales es { 9 ; 3 ; 7}

Ejercicio 5

Demostrar utilizando el principio de inducción que la siguiente igualdad se verifica para todo n $\in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$$

Respuesta

Sea p (n) : $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$. Por el principio de inducción, tenemos que si se verifican las siguientes dos condiciones:

- P (1) es verdadera.
- Si p (n) es verdadera, entonces p(n+1) es verdadera.

Entonces p(n) es verdadera para todo n $\in \mathbb{N}$.

Veamos que p(1) es verdadera:

Por un lado, tenemos que: $\sum_{i=0}^{1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

Reemplazando en el lado derecho de la igualdad: $10 - \frac{5}{2^{1}} = \frac{15}{2}$, por lo que la igualdad se verifica.

Paso inductivo: Sabiendo que p(n) es verdadera, queremos probar que p(n + 1) es verdadera. Es decir, queremos ver que $\sum_{i=0}^{n+1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n+1}}$. Tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 10 - \frac{5}{2^{n}} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 10 - \frac{5}{2^{n}} + 5.\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 10 + \frac{-5.2+5}{2^{n+1}}$$

$$= 10 + \frac{-5}{2^{n+1}} = 10 - \frac{5}{2^{n+1}}$$

En el segundo paso, usamos la hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$. Luego, por el principio de inducción. P(n) es verdadera para todo n $\in \mathbb{N}$.