Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de este trabajo práctico.

1. Si un tanque pierde aceite a razón de $r(t)$ litros por minuto en el tiempo t (medido en minutos) transcurrido desde el instante $t = 0$, ¿qué representa $\int_0^{180} r(t)dt$?

2. La densidad lineal ρ de una varilla es la razón de cambio de la masa, $m(x)$, con respecto a la longitud x de la varilla, es decir $\rho = m'(x)$. Si una varilla de longitud total 4 metros tiene densidad lineal $\rho = 9 + 2\sqrt{x}$ (medida en kilogramo por metro), con x medido en metros desde un extremo de la varilla, se pide calcular la masa total de la varilla.

3. Un objeto se desplaza con movimiento rectilíneo de modo tal que su velocidad a los t segundos es $v(t) = t^2 - 3t$. Calcular el desplazamiento del objeto durante los primeros 4 segundos. (*)

4. Calcular las siguientes integrales definidas.

a. $\int_1^2 \left(3\sqrt[5]{x} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

b. $\int_0^a \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx$

c. $\int_{-3}^{2} e^{-2x}dx$

d. $\int_{-\pi/2}^{\pi} |f(x)|dx$ si $f(x) = \cos(x)$ (*)

5. Calcular:

a. $\int_{-1}^{2} (x + 2f(x))dx$ si se sabe que $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 3$

b. $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ si $\int_{-2}^{3} (f(x) - 3)dx = 6$

c. $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ sabiendo que $\int_{3}^{6} f(x)dx = 5$ y $\int_{-1}^{6} f(x)dx = -5$

d. $\int_a^b f(t)f'(t)dt$

6. La aceleración de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea en cada instante de tiempo (medido en segundos), está dada por la función $a(t) = 4t - 16$. Se sabe que su velocidad inicial es de 30 $\frac{m}{s}$ y que su posición inicial es $x(0) = 0$. Hallar la distancia recorrida por el móvil entre los dos y los cuatro segundos.

7. Un corredor especializado en los 100 metros llanos, desarrolla una velocidad dada por $v(t) = 11(1 - e^{-2t})$ siendo la distancia medida en metros y el tiempo en segundos. ¿Cuál es la distancia que recorre el atleta durante los primeros ocho segundos de carrera?

8. Hallar el valor de $a \in R$ de modo tal que se verifique: $\int_{-a}^{0} y^2 \left(1 - \frac{y^3}{a^3}\right)^{-2} dy = 36$

9. Sea f una función continua. Demostrar que

a. $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

b. $\frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} g\left(\frac{t}{c}\right)dt = \int_{a}^{b} g(t)\,dt$, $c \neq 0$

10. Demostrar que:

a) si f es una función continua par, con dominio en R, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ ($a > 0$, fijo).

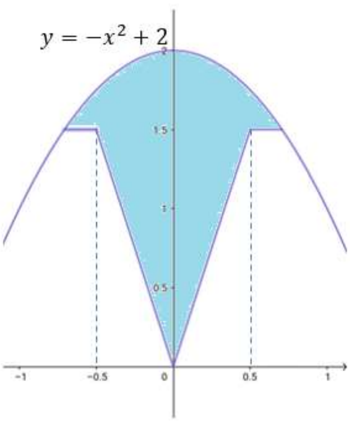
b) si f es una función continua impar definida en R, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ($a > 0$, fijo).

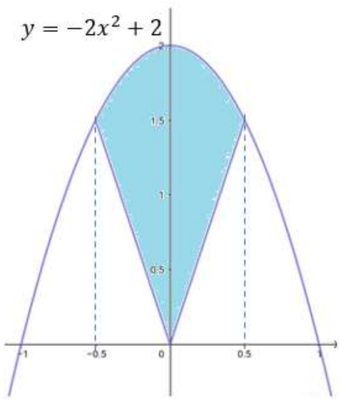
11. Si un objeto se desplaza en línea recta debido a la acción de una fuerza $F = F(x)$, siendo x la distancia recorrida por el objeto desde su punto de partida, el trabajo realizado por dicha fuerza conforme el objeto se desplaza desde $x = a$ hasta $x = b$ está dado por $T = \int_a^b F(x)\,dx$.

Calcular el trabajo realizado por F desde x=0 hasta x=4 si $F(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

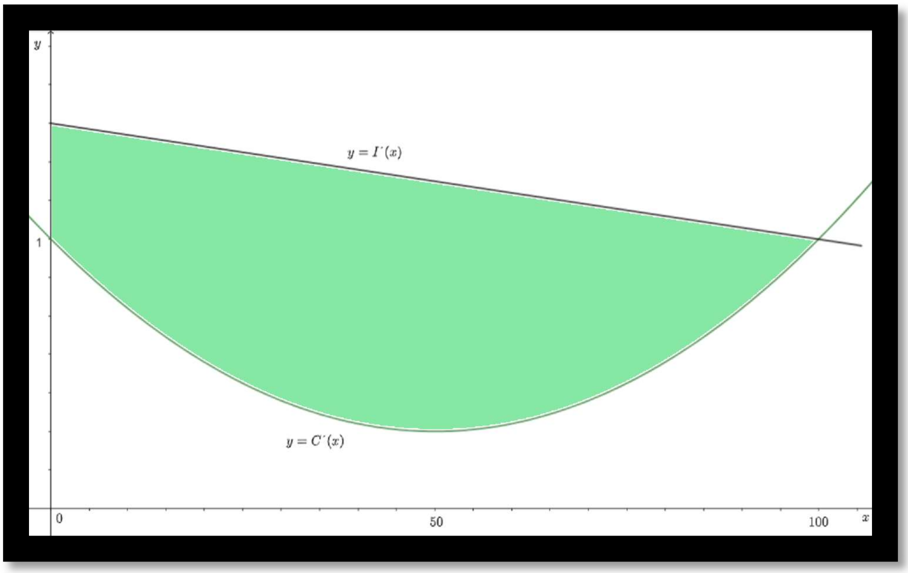
12. Sea la función $g(x) = \begin{cases} kx - 2 & si\ x \leq 0 \\ -4x^3 & si\ x > 0 \end{cases}$. Determinar el valor de la constante k para que se verifique $\int_{-1}^{2} g(x)dx = 1$.

13. El dueño de una heladería desea estampar su nuevo logo en el cartel donde se exhiben los sabores de helado disponibles. Dentro de este cartel dispone de un cuadrado de 4 decímetros cuadrados donde ubicar el logo. Si su objetivo es cubrir la mayor superficie posible del cuadrado con el logo y dispone de los siguientes diseños (donde la unidad en cada eje es el decímetro), ¿cuál de ellos le conviene elegir?





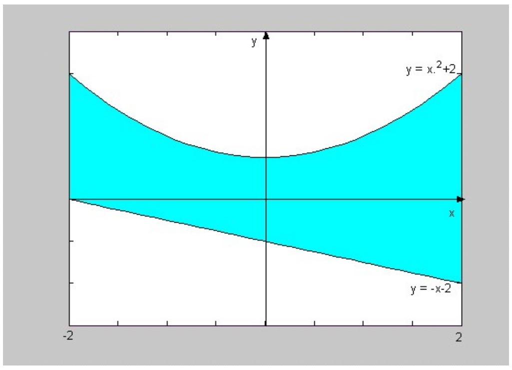
14. Las funciones $I = I(x)$ y $C = C(x)$ representan el ingreso y el costo (medidos en miles de pesos) cuando se fabrican x unidades de cierto producto en una planta industrial.
En economía frecuentemente se utiliza el concepto de marginal para hacer referencia a la variación que experimenta una función ante cambios muy pequeños de la variable a partir de cierto valor dado. Por ejemplo, el costo marginal (CM) mide el cambio que experimenta la función de costo (C) cuando, a partir de cierto nivel de producción, se aumenta o disminuye dicho nivel en una cantidad muy pequeña. Matemáticamente, la función de costo marginal es expresada como la derivada de la función de Costo con respecto a la cantidad x: $CM = C'(x)$. De manera similar, el ingreso marginal (IM) es expresada como la derivada de la función de Ingreso con respecto a la cantidad x: $IM = I'(x)$.
A continuación, se muestran los gráficos de las funciones de ingreso marginal $I'(x)$ y costo marginal $C'(x)$ de un fabricante:



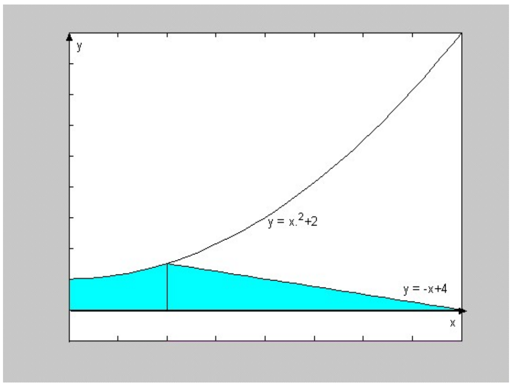
¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

15. Calcular el área de la región sombreada

a.



b.



16. En cada uno de los siguientes ítems graficar y calcular el área de la región limitada por:

a. $y = x^2 - 1$; el eje x; $-1 \leq x \leq 2$
b. $y = |x|; y = 6 - x^2 ; -2 \leq x \leq 3.$
c. $y = \sqrt{x+6} ; y = 2x - 3 ; y = 0$

d. $y=\frac{1}{x^2}; y=x; y=8x.$ (*)

e. La curva $y=\frac{1}{x}$ $, x>0$, y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva $(2,\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2};2)$ respectivamente.

17. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias. En caso de ser convergentes, hallar el valor al cual convergen.

a. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx$ b. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$ (*) c. $\int_{2}^{+\infty} \frac{3x+1}{x^2-1}dx$

18. ¿Para qué valores de p la integral $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente?

19. Comprobar que $\int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = 1$

20. Determinar el área de la región ubicada por debajo de la curva $y = e^x$ y por sobre la recta $y = 0$, con $x \le 0$.

21. Calcular el área de la región del plano limitada por la recta y = 0 por debajo; y las curvas $y = 2^x$; $x + y = 1$ por arriba.

Volumen de un sólido de revolución

Supongamos que f es una función no negativa y continua en [a, b]. Si giramos la región por debajo de la gráfica de f alrededor del eje x, obtenemos un sólido. El volumen de este sólido viene dado por la fórmula $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$

22. Deducir, a través de la fórmula correspondiente, la ecuación del volumen de los siguientes sólidos:

a. El interior de un cono, cuyo radio de la base es r y tiene altura h. (Sugerencia: el cono se genera haciendo girar una recta convenientemente hallada, alrededor del eje x).

b. El interior de una esfera de radio r.

23. Hallar el volumen del sólido definido al hacer girar la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ alrededor del eje x

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 3: Un objeto se desplaza con movimiento rectilíneo de modo tal que su velocidad a los t segundos es $v(t) = t^2 - 3t$. Calcular el desplazamiento del objeto durante los primeros 4 segundos.

Resolución:

Recordemos que la función velocidad de un objeto en el instante de tiempo t es la derivada de la función de posición del objeto en el instante de tiempo t, de modo que la función de posición podremos obtenerla integrando la función velocidad:

$$x(t) = \int v(t)dt$$

Luego, como el objeto se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, si queremos conocer su desplazamiento durante los primeros 4 segundos, tendremos que conocer su posición a los 0 segundos y a los 4 segundos.

Recordemos también que si x es una primitiva de v, se tiene

$$\int_a^b |v(t)|dt = x(b) - x(a)$$

Tomando $a = 0, b = 4$,

$$\int_0^4 v(t)dt = x(4) - x(0)$$

$$\int_0^4 (t^2 - 3t)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right]\Bigg|_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - \frac{3.4^2}{2}\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{3.0^2}{2}\right] = -\frac{8}{3}$$

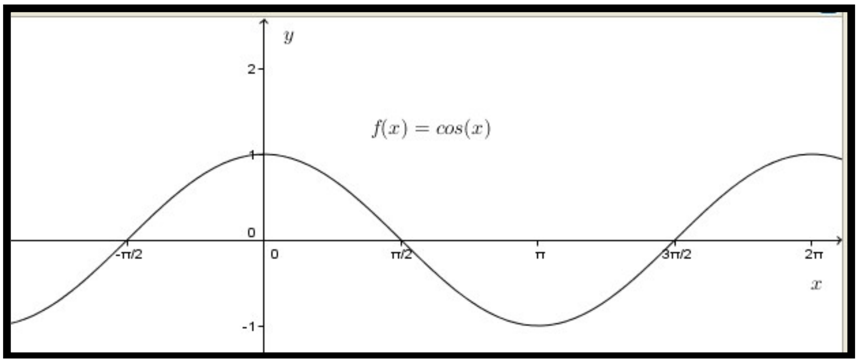
Si la posición del objeto se mide en metros, esto significa que el objeto se desplazó aproximadamente 2.66 metros hacia la izquierda.

Ejercicio 4 d): Calcular $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x)| dx$, si $f(x) = \cos(x)$

Resolución:

Tenemos que calcular la integral definida entre $-\frac{\pi}{2}$ y π del módulo de la función coseno.

Realicemos un gráfico:



En el gráfico podemos observar que en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función es positiva y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ la función es negativa, por lo tanto, en el intervalo de integración tendremos

$$|f(x)| = |\cos(x)| = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Luego, utilizando la propiedad (B),

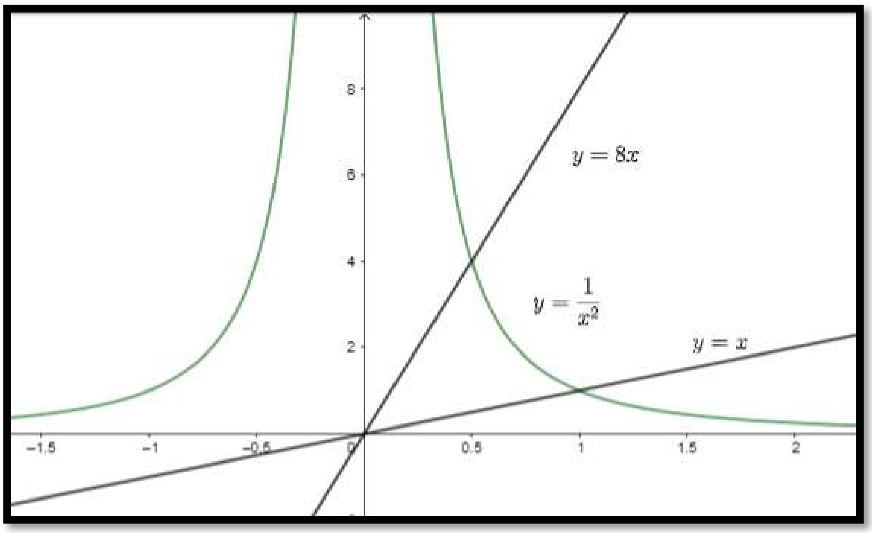
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - cos(x)\, dx = sen(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (-sen(x))|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[-sen(\pi) - \left(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$
$$= [1 - (-1)] + [0 + 1] = 3$$

Ejercicio 16 d): En cada uno de los siguientes ítems graficar y calcular el área de la región limitada por:

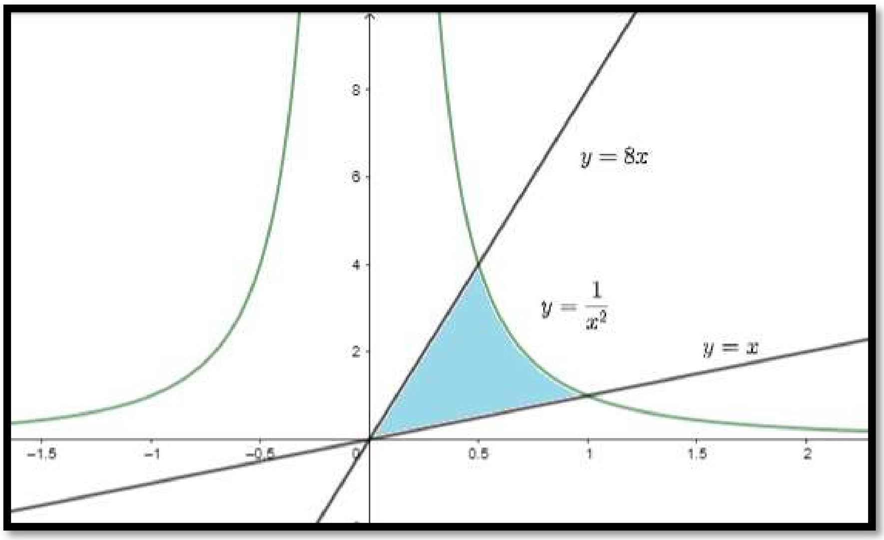
$$y = \frac{1}{x^2}; y = x; y = 8x.$$

Resolución:

Con la ayuda de un graficador, realizamos el gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ y luego agregamos las rectas:

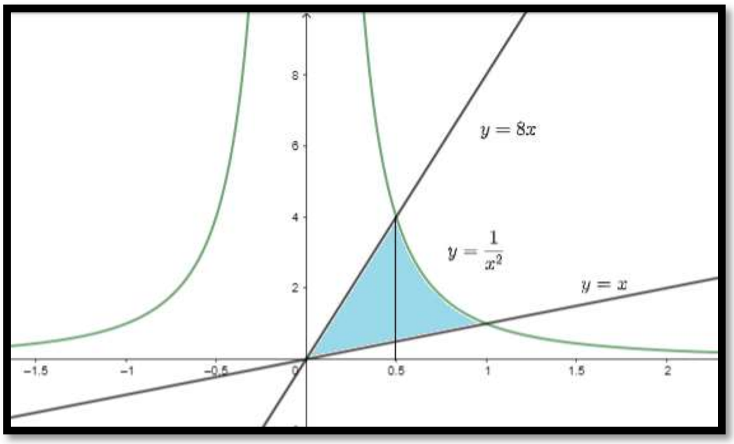


La región encerrada por las curvas mencionadas será



Igualando las ecuaciones $y = \frac{1}{x^2}; y = 8x$ obtenemos la abscisa $x = 0.5$ del punto donde cambia la función que limita superiormente la región.

Subdividiendo la región:



El área de la región sombreada será:

$$\int_0^{0.5}[8x - x]dx + \int_{0.5}^{1}\left[\frac{1}{x^2} - x\right]dx = \int_0^{0.5}[7x]dx + \int_{0.5}^{1}\left[\frac{1}{x^2} - x\right]dx = \left[\frac{7x^2}{2}\right]\Big|_0^{0.5} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{0.5}^{1} =$$

$$= \left[\frac{7(0.5)^2}{2}\right] - \left[\frac{7(0)^2}{2}\right] + \left[-\frac{1}{1} - \frac{1^2}{2}\right] - \left[-\frac{1}{0.5} - \frac{(0.5)^2}{2}\right] = \frac{7}{8} - 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{17}{8}\right) = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 17 b): Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias. En caso de ser convergentes, hallar el valor al cual convergen

b. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4(x)}$

Resolución:

Recordemos que, por definición,

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4(x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^{b} \frac{dx}{x\, ln^4(x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^{b} \frac{1}{x\, ln^4(x)}dx \overset{\ln^4 x = (ln x)^4}{\cong} \lim_{b\to+\infty} \int_3^{b} \frac{1}{x(\ln(x))^4}dx$$

Si F es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^4}$, tendremos $\lim_{b\to+\infty} \int_3^{b} \frac{1}{x(\ln(x))^4}dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b) - F(3)]$.

Calculemos entonces una primitiva de f, como no es una integral inmediata, analicemos si podemos usar el método de sustitución:

$$F(x) = \int \frac{1}{x(\ln(x))^4}dx = \int \frac{1}{[\ln(x)]^4}.\frac{1}{x}dx$$

Si tomamos $z = \ln(x)$, $dz = \frac{1}{x}dx$, tendremos:

$$F(x) = \int \frac{1}{x(\ln(x))^4}dx = \int \frac{1}{[\ln(x)]^4}.\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{z^4}.dz = \int z^{-4}.dz = \frac{z^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{-3.z^3} + c = -\frac{1}{3.z^3} + c \overset{z=\ln(x)}{\cong} -\frac{1}{3.[\ln(x)]^3} + c$$

Si tomamos $c = 0$, $F(x) = -\frac{1}{3.[\ln(x)]^3}$ es una primitiva de f.

Luego,

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4(x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_{3}^{b} \frac{1}{x(\ln(x))^4}\, dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(3)] = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(3)]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} [-\frac{1}{3.[\ln(b)]^3} - \left\{-\frac{1}{3.[\ln(3)]^3}\right\}] = \lim_{b\to+\infty} [-\overbrace{\frac{1}{3.[\ln(b)]^3}}^{\to 0} + \frac{1}{3.[\ln(3)]^3}] = \frac{1}{3.[\ln(3)]^3}$$

Como obtuvimos como resultado un número real, la $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^4(x)}$ es convergente y converge a $\frac{1}{3.[\ln(3)]^3}$.