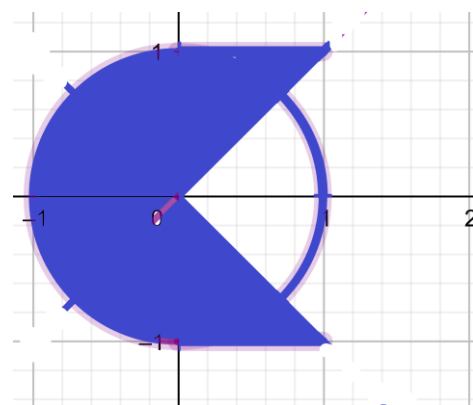
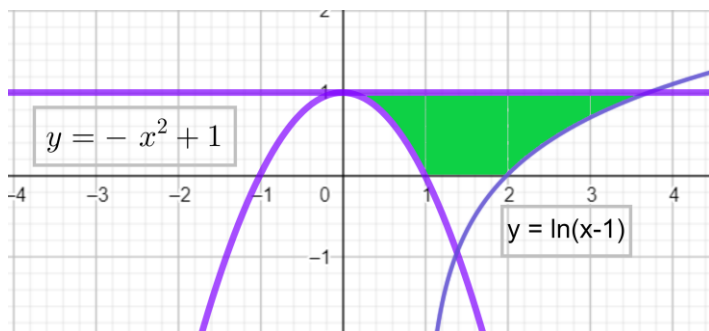
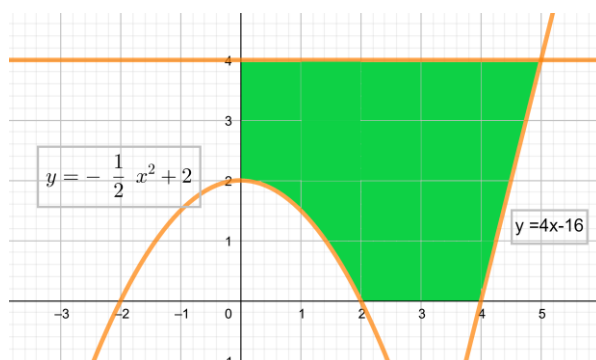
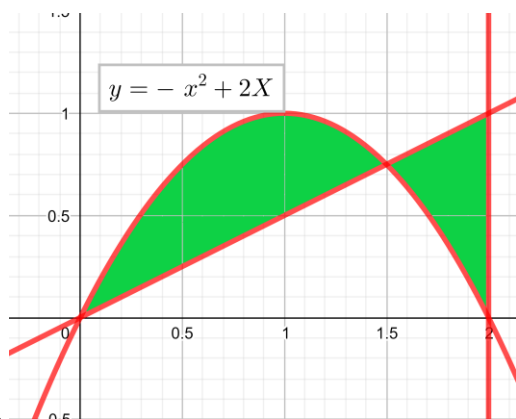


Integrales dobles

- Calcular, la integral doble $I(f, \mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ en el recinto $\mathcal{R} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ del campo escalar $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Graficar el recinto \mathcal{R} en el que se integra.
 - $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2], f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 3x^2 + 2y$
 - $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2], f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 2(x + 2y)^{-1}$
 - \mathcal{R} es la región acotada del plano comprendida entre las curvas de ecuación $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2, f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = 4 \frac{x^2}{y^2}$
 - \mathcal{R} es la región acotada del plano definida por las imágenes de las funciones $\bar{\gamma}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (2 \cos(t), 2 - 2 \cos(t))$, $\bar{h}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{h}(t) = (2 - 4t, 0)$, $\bar{w}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{w}(t) = (-2, 4t)$ siendo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = -3x$
- Para cada uno de los siguientes recintos, calcular el valor de su área planteando las integrales dobles en las coordenadas más apropiadas.



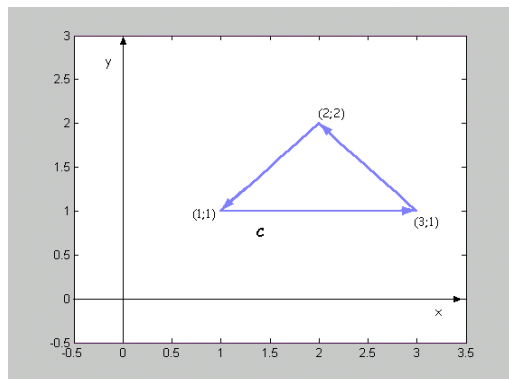
- Graficar el macizo \mathcal{M} y calcular su volumen $V(\mathcal{M})$, mediante integrales dobles, adoptando el sistema de coordenadas más conveniente.
 - $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z \leq 4 - x - y, x \geq 0, y \geq 0\}$.

- b. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 - y^2, 0 \leq x \leq 1\}$.
- c. \mathcal{M} es el conjunto de puntos del espacio \mathbb{R}^3 por encima del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y por debajo del plano de ecuación $z = 4$
- d. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2\}$
4. *Masa de una lámina plana.* Si δ es la densidad superficial de una lámina \mathcal{R} , su masa es $m(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} \delta \, dA$, y su densidad media es el valor medio de δ en \mathcal{R} . Determinar la densidad media de una lámina circular centrada en el origen de coordenadas, de radio α , si su densidad es $\delta(x, y) = k(\alpha + x)$.
5. *Centro de masa de una lámina plana.* Si δ es la densidad superficial de una lámina \mathcal{R} , entonces su centro de masas¹ $G_0 = (x_0, y_0)$ se obtiene de $x_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x \delta \, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta \, dS}$, $y_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y \delta \, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta \, dS}$. Determinar el centro de masas de la lámina dada por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y > 0, a > 0\}$ con densidad $\delta(x, y) = ky$, siendo k una constante positiva. Graficar la lámina \mathcal{R} y el centro de masas obtenido.

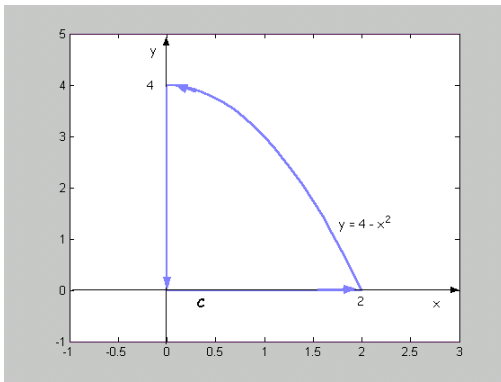
Teorema de Green

6. Aplicando el Teorema de Green, calcular:

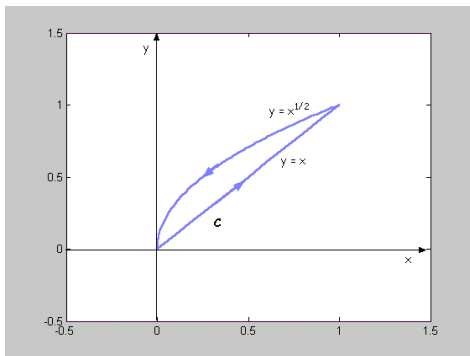
a) $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$



b) $\oint_C -x^2 y \, dx + xy^2 \, dy$

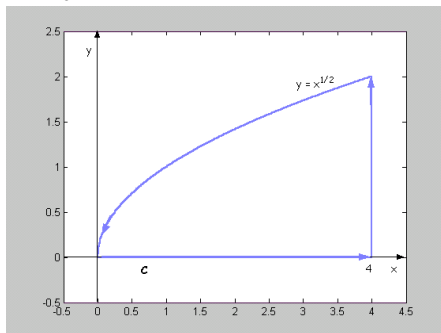


c) $\oint_C x \, dx + xy \, dy$

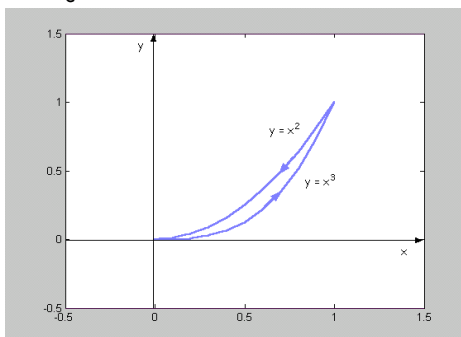


7. Verificar el Teorema de Green en los siguientes casos:

a) $\oint_C (x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy$



b) $\oint_C (x + y^2) \, dx + (1 + x^2) \, dy$



Integrales triples

8. Calcular, siempre que exista, la integral triple $I(f, \mathcal{M}) = \iiint_{\mathcal{M}} f(x, y, z) dx dy dz$ en el recinto $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ del campo escalar $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Graficar el recinto \mathcal{M} en el que se integra y calcular su volumen $V(\mathcal{M})$
- $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq 2 - y, x^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y, z) = 3$
 - $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0\}, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y, z) = x + z$
 - $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y, z) = x + y + z + 1$
9. *Baricentro de un macizo.* Si δ es la densidad volumétrica de un macizo \mathcal{M} , entonces su baricentro es el punto $G_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x \delta dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y \delta dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z \delta dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta dV}$. Graficar \mathcal{M} y determinar su baricentro, siendo $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + z^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0, a > 0\}$ con densidad $\delta(x, y, z) = kz$, donde k es una constante positiva.
10. *Centro geométrico de un macizo \mathcal{M} .* Es $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z dV}{\iiint_{\mathcal{M}} dV}$ (coincide con el baricentro si el macizo es homogéneo). Determinar el centro geométrico del macizo $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \frac{h}{a} \sqrt{z^2 + y^2} \leq x \leq h, h > 0, a > 0\}$
11. Los depósitos para granos a granel son silos de metal, hormigón o madera. Generalmente tienen un fondo cónico que permite la descarga del silo por la gravedad. Determinar el volumen del silo determinado por el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el cilindro de altura 2 de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.