Para realizar los ejercicios de esta guía hace falta conocer la definición de transformación lineal, las definiciones de núcleo e imagen de una transformación lineal, matriz asociada a una transformación lineal en una base, el teorema fundamental de las transformaciones lineales y la noción de diagonalización.

1. Determinar si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

   a. f: $R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
   b. f: $R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1.x_2 - 3, 1)$.
   c. T: $R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 2x_1, \frac{4x_1 + 2x_3}{3})$
   d. T: $R^{2x2} \to R$, T(A) = tr(A).
   e. T: $R^{3x3} \to R$, T(A) = det(A).
   f. f: $R^4 \to R^{3x1}$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}^t$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

2. Decidir si existe una transformación lineal T que satisfaga las condiciones dadas. En caso afirmativo, encontrar una expresión para T.

   a. T: $R^2 \to R^2$: T(1, 0) = (3, -1) ; T(0, 1) = (-2, 4)
   b. T: $R^2 \to R^2$: T (2, 1) = (-1, 2) ; T(3, 0) = (-1, 2)
   c. T: $R^2 \to R^2$: T (1, -1) = (0, 7) ; T $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ = (2, -1)
   d. T: $R^3 \to R^2$: T (1, 0, -1) = (2, 0) ; T(0, -1, 2) = (3, -1) ; T(1, -1, 0) = (-1, 4)
   e. T: $R^3 \to R^3$: T(1, 1, 1) = (1, 0, 0) ; T(1, 1, 0) = (0, 1, 0) ; T(0, 0, -1) = (-1, 1, 0)

3. Sea T: $R^2 \to R^2$ la transformación lineal dada por $T(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, -6x_1 + 4x_2)$

   a. Decidir si los siguientes vectores pertenecen al núcleo de T. Justificar.
      i. (0, 0)   ii. (2, 3)   iii. (3, -2)   iv. $(1, \frac{1}{3})$

   b. Decidir si los siguientes vectores pertenecen a la imagen de T. Justificar.
      i. (3, -6)   ii. (2, 3)   iii. (1, -2)   iv. (4, -3)

4. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar una base del núcleo y una base de la imagen.

   a. T: $R^2 \to R^3$: $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -5x_2, 0)$.
   b. T: $R^3 \to R^3$: $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_1 - x_3, -x_2 + x_3, x_1)$.
   c. T: $R^4 \to R^3$: $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9x_3 - 3x_1 + 6x_2, x_4, 3x_3 - x_1 + 2x_2)$.
   d. T: $R^{2x3} \to R^{2x2}$: $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} - a_{12} & a_{11} \\ 0 & a_{13} - a_{23} \end{pmatrix}$

e. T: $R^{3x2} \to R^2$: $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \left(-a_{22} + \frac{1}{3}a_{11} + 4a_{31},\ a_{22} - a_{32}\right)$

5. Hallar, si existe, la expresión analítica de una transformación lineal que verifique las condiciones dadas en cada caso.

   a. T: $R^2 \to R^3$ tal que T(1, -2) = (-1, 3, 4) y (0, -5) $\in$ Nu(T). Sin obtener el conjunto imagen, ¿puede ser Im(T) = R^3?.
   b. T: $R^3 \to R^3$ tal que Nu(T) = $\{(x, y, z) \in R^3 : x + y - 2z = 0\}$, Im(T) = gen{(-1, 0, 0)}.
   c. T: $R^3 \to R^4$ tal que Im (T) = R^4
   d. T: $R^{2x2} \to R^2$ tal que dim Nu(T) = 2, (-1, 3) $\in$ Im(T).

6. Decidir si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justificar.
   "Si T: $R^4 \to R^3$ es una transformación lineal tal que dim Nu(T) = 1, entonces Im (T) = R^3"

7. Escribir la matriz asociada en la base canónica de cada una de las siguientes transformaciones lineales.
   a. T: $R^2 \to R^2$/ T(x, y) = $(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y\ ,\ 5y - x)$
   b. T: $R^3 \to R^4$/ $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ \frac{x_1 + x_2}{2},\ -\frac{x_3}{4},\ x_2 - x_3)$
   c. T: $R^2 \to R^3$/ $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\ ,\ 2x_1 + x_2,\ -4x_1)$

8. Sea T: $R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Hallar T(1, -5, 3), T(0, 0, 0), T(1, -1, 1).
   b. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen.
   c. Hallar la expresión analítica de la transformación lineal T.

9. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar la matriz asociada en las bases B y B'.

   a. T: $R^2 \to R^2$ / $T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2\ ,\ x_1 + x_2)$
      B = B' = {(1, -1) , (0, 1)}

   b. T: $R^3 \to R^2$ / $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1,\ -2x_3)$
      B = {(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, -1, 0)} B' es la base canónica de R^2

   c. T: $R^2 \to R^3$ / $T(x_1, x_2) = (\frac{3}{4}x_1 + \frac{2}{5}x_2\ ,\ x_1 + \frac{4}{5}x_2\ ,\ x_1)$
      B = {(4, 5) , (0, -10)} B'= ((3, 4, 4), (0, 1, 0), (1, 2, 0)}

10. Sea T: $R^3 \to R^4$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en las bases B y B' está dada por

$$M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

siendo B = {(0, 0, 1), (-1,1, 0), (1, 2, 0)} y B' = {(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1,0), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0)}.

a. Calcular T(-1, 1, 0), T(2, 4, 0) , T(-1, 1, 1),
b. Hallar una base del núcleo de T y una base de la imagen de T.

11. Hallar los autovalores y autovectores de cada una de las siguientes transformaciones lineales.

a. $T: R^2 \to R^2 / \ T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$
b. $T: R^2 \to R^2 / \ T(x, y) = (4x + y, 4y)$
c. $T: R^3 \to R^3 / \ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3 , -5x_2 - 4x_3, 8x_2 + 7x_3)$
d. $T: R^3 \to R^3 / \ T(X) = AX^T$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Hallar todos los valores de $k \in R$ de modo tal que $\lambda = 1$ sea un autovalor de T.
b. Para los valores de k hallados, calcular todos los autovalores de T.

13. Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$M(T) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Hallar una base B de R^3 para la cual se verifique $M_B(T) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
b. Hallar una base para el núcleo y la imagen de T.

14. Para cada una de las siguientes matrices, determinar su espectro y autoespacios. Decidir si son o no diagonalizables. En caso afirmativo, hallar una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular A^{21}
b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
c. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

15.

a. Demostrar que si A es una matriz de orden n inversible, entonces $\lambda = 0$ no es autovalor de A.
b. Sea A una matriz de orden n. Demostrar que A y A^T tienen los mismos autovalores. ¿Es cierto que tienen los mismos autovectores?
c. Demostrar que si una matriz A es diagonalizable, su determinante es el producto de sus autovalores.

Sugerencia: Podrás profundizar los temas estudiados en esta guía de trabajos prácticos realizando las actividades interactivas que se proponen en Web Campus, en la sección de recursos digitales de Álgebra y Geometría Analítica.