EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA

1. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Las rectas r y s son paralelas
r: $\bar{X} = (1, -1,2) + \mu(0,2,3), \mu \in \mathbb{R}$
s: $\bar{X} = (1, -3, -1) + t(0, -4, -6), t \in \mathbb{R}$

(b) Existe un único vector de norma 4 paralelo a $\bar{u}x\bar{v}$, siendo $\bar{u} = (1,1,3)$ y $\bar{v} = (1,0,2)$

2. Sea r_1 la recta de ecuación vectorial dada por $\bar{X} = (2,2,3) + t(2,2, -1)$ con $t \in \mathbb{R}$, y los puntos $M = (4,4,2)\ y\ P = (2,2,1)$

(a) Determinar si el punto M pertenece a la recta r_1y hallar una ecuación cartesiana del plano β que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r_1

(b) Hallar los puntos de intersección del plano β hallado en el ítem (a) con los ejes coordenados y graficar el plano β.

(c) Obtener la ecuación cartesiana del único plano π que contiene a las rectas r_1 y a la recta r_2 determinada por los puntos M y P.

3. Dados los planos de ecuaciones $\pi_1 : x - y - z = -1,\ \pi_2 : x - 2y - 3z = 2$

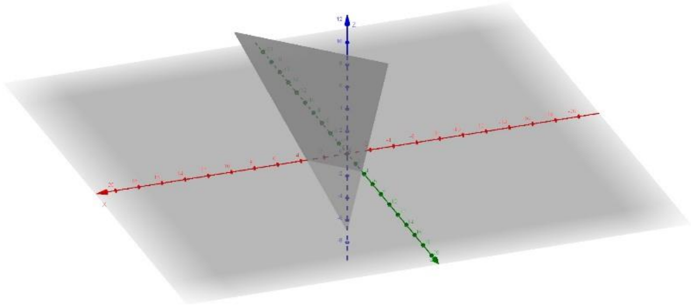
Hallar las ecuaciones simétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2

Respuestas:

1) (a) Los vectores directores de las rectas $\bar{d}_r = (0,2,3), \bar{d}_s = (0, -4, -6)$ tienen la misma dirección ya que $\bar{d}_s$= -2$\bar{d}_r$, de modo que las rectas r y s pueden ser paralelas o coincidentes. Resolvemos el sistema igualando las componentes de ambas rectas y resulta $\begin{cases} 1 = 1 \\ -1 + 2\mu = -3 - 4t \\ 2 + 3\mu = -1 - 6t \end{cases}$, sistema compatible indeterminado, luego las rectas son coincidentes y la afirmación es falsa.

(b) La afirmación es falsa. Existen dos vectores que son opuestos: $\pm\left(\frac{8}{\sqrt{6},}, \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

2) (a) El punto $M \in r_1$.
Si el plano β es perpendicular a la recta r_1, una dirección paralela al vector $\bar{d}_{r_1} = (2,2, -1)$ será normal al plano β, haciendo $(2,2, -1). (x - 2, y - 2, z - 1) = 0$, se obtiene el plano β de ecuación $2x + 2y - z = 7$



(b) Los puntos de intersección del plano β con los ejes coordenados son:
Eje x $\left(\frac{7}{2}, 0, 0\right)$, eje y $\left(0, \frac{7}{2}, 0\right)$ y eje z $(0,0-,7)$

(c) Una posible resolución consiste en hallar una ecuación vectorial de la recta r_2 determinada por los puntos M y P la misma será $\bar{X} = (2,2,1) + \lambda(2,2,1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Observar que el nombre del parámetro no puede ser igual al de la recta r_1). Las rectas se cortan en el punto de coordenadas $(4,4,2)$. El problema consiste entonces en hallar una ecuación del plano π determinado por dos rectas que se cortan.
Una ecuación vectorial de dicho plano se puede hallar de forma muy directa pero como se pide una ecuación cartesiana obtenemos una dirección normal al plano efectuando el producto vectorial entre los vectores directores de ambas rectas $\bar{N} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4,4,0)$ y luego hallamos la ecuación cartesiana: $(-4,4,0).(x-4, y-4, z-2) = 0$ de donde resulta el plano de ecuación $y = x$ (Observación: se pudo haber utilizado cualquier otro punto perteneciente tanto a la recta r_1 como a la recta r_2). El problema se podría haber resuelto hallando la ecuación de un plano que contiene a una recta y pasa por un punto, que pueden ser M o P.