1. La posición de un móvil a los t segundos de su partida está dada por la expresión $s(t) = 3t^2$. Una estrategia inicial para calcular la velocidad del móvil a los 5 segundos de partir consiste en calcular la velocidad media del móvil en diferentes intervalos de tiempo.

a. Teniendo en cuenta que la velocidad media se calcula como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido en recorrer dicha distancia $v_{media} = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$, completar la siguiente tabla.

Intervalo de tiempo	Distancia recorrida	Velocidad media
[4,9; 5]		
[4,99; 5]		
[5; 5,1]		
[5; 5,01]		
[5; 5,001]		

b. ¿Qué se puede observar en los valores obtenidos para la velocidad media a medida que los intervalos de tiempo se hacen cada vez más cortos? Calcular, utilizando la noción de límite, la velocidad instantánea en t=5.

2.

i) Calcular, aplicando la definición de derivada de una función en un punto, $f´(0)$ siendo $f(x) = sen(3x)$ (*)

ii) Hallar f´(x) aplicando la definición de función derivada si:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ (*)

b) $f(x) = 5$

3. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal al gráfico de la función f en el punto de abscisa x_0 dado. Representar gráficamente la función y las correspondientes rectas.

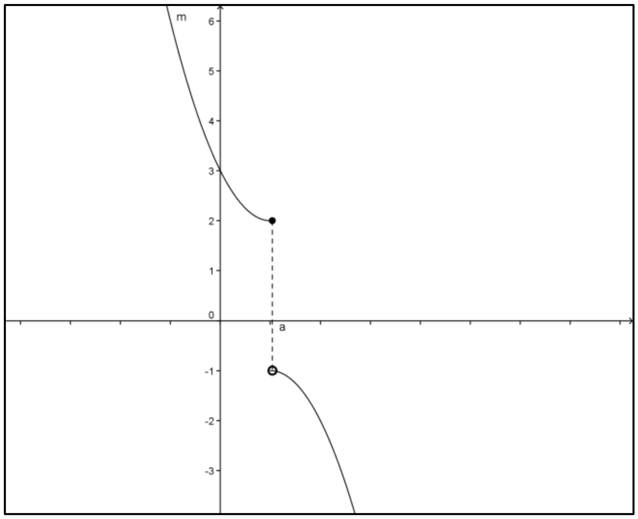
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $x_0 = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ $x_0 = 3$ (*)

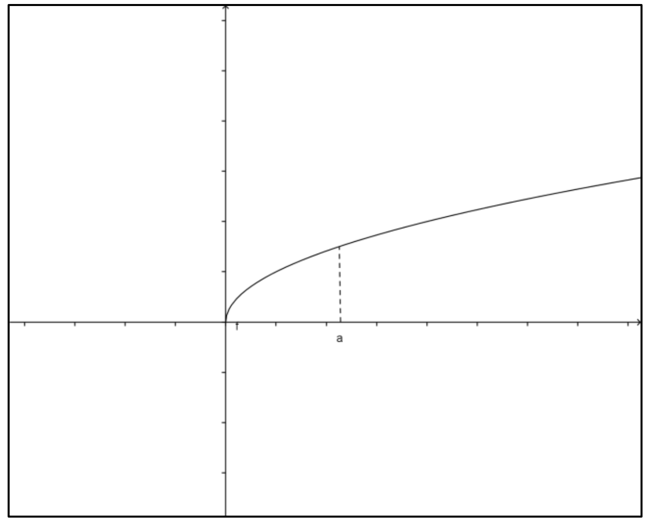
4. ¿Cuáles de las siguientes gráficas consideras que no admiten recta tangente en el punto correspondiente a x = a? ¿Por qué?

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

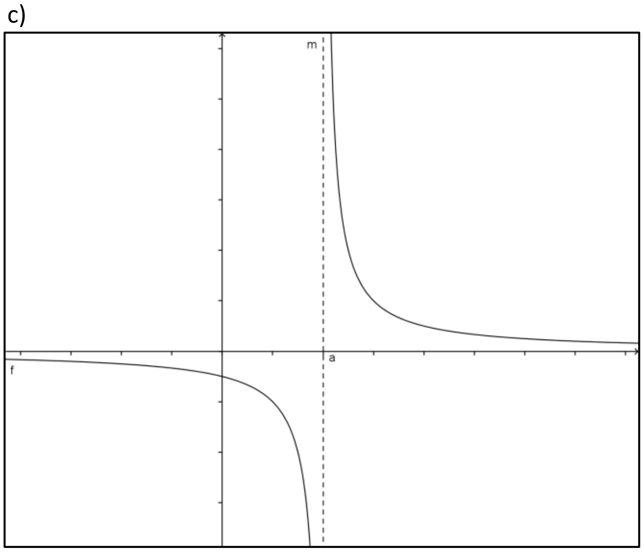
a)



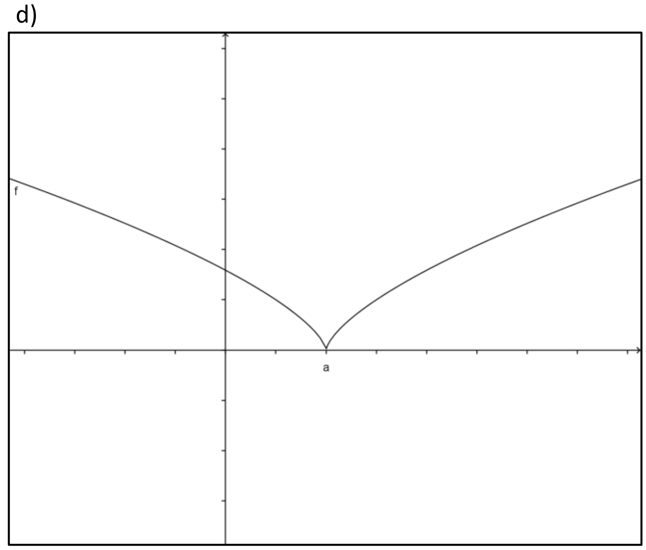
b)



c)



d)



5. Para cada una de las siguientes funciones, hallar la fórmula de $f'(x)$

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & si\ x\leq 1 \\ -\frac{2}{x} & si\ x>1 \end{cases}$ (*) b) $f(x)=\begin{cases} 2x & si\ x>1 \\ x^2+1 & si\ x\leq 1 \end{cases}$ c) $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$

6. Estudiar en forma analítica la continuidad y la derivabilidad de cada una de las siguientes funciones. Graficar.

a) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & si\ x<2 \\ (2-x)^2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x & si\ x\leq 1 \\ \frac{x^2+1}{2} & si\ x>1 \end{cases}$

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

7. Usando las reglas de derivación, hallar las funciones derivadas de:

a) $f(x) = x^3 + 6x + 1$

b) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \ln 3$

c) $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + 3x^5 \cos x$

e) $f(x) = \frac{2-\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$

f) $f(x) = mx + b$

g) $f(x) = tgx \ln x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

h) $f(t) = 2^t tgt + t.\ln t - e^5$

i) $f(x) = \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2}}$

j) $f(x) = \frac{x(\ln x+\pi)}{\sqrt{2}-\cos x}$

k) $f(x) = \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{2^x}$

l) $f(x) = (2+\sqrt{x})x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

m) $f(x) = \frac{x^2}{x+\sqrt[3]{x}}$

n) $f(h) = \frac{ah}{h^5+6h^3+2}$

o) $f(x) = (\sqrt{x}+x)(x^2+3x-2)$

p) $f(x) = \frac{3}{x^2}\ln x$

8. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba. Su posición en cada instante de tiempo está dada por la expresión $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, siendo $v_0 > 0$ el valor de la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad. ¿En qué instante de tiempo la velocidad del proyectil fue nula? ¿Si la velocidad inicial fue 10, en qué instante de tiempo la velocidad del proyectil se redujo a la mitad?

9. Dadas las siguientes funciones, hallar los dominios de f y de g, para que sea posible efectuar las composiciones

$f \circ g,\ g \circ f$. Luego, hallar dichas funciones compuestas.

a) $f(x) = senx$ $\qquad g(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = e^x$ $\qquad g(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = \log x$ $\qquad g(x) = 2x - 3$

10. Sabiendo que si f es una función biyectiva entonces se verifica que $f(f^{-1}(x)) = x$ se pide:

a) Demostrar que si $f'(x) \neq 0$, entonces $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

b) Utilizar el resultado anterior para obtener las funciones derivadas de:

i) $f(x) = arcsenx$ (sug. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$)

ii) $f(x) = arctgx$ (sug. $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$)

11. Hallar $f'(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = senhx + \cosh x$

b) $f(x) = (3x + x^4)^3$

c) $f(t) = \operatorname{sen}(2t) + sen2.t$

d) $f(x) = \ln\sqrt{4-x^2}$

<u>Nota</u>: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

e) $f(x) = arcsen(2x)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{ln\left(\frac{1}{cos\, x}\right)} + 2^{-x}\sqrt{ln\, 3}$

g) $f(x) = ln^2 x + ln(x^2)$

h) $f(x) = ln(\, senx^3) + cos \sqrt[3]{ln(\, 2x)}$

i) $f(x) = 2^{x\, cos\, x}$

j) $f(x) = \sqrt[3]{sen(ln(\, x^n - x))}$

k) $f(x) = \sqrt{a\, ln(senhx)}$

l) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 sen(3x)} + 2^{\pi}$

12. Un móvil posee la siguiente ecuación de movimiento $x(t) = \frac{v_0 m}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{m}}\right) + x_0$, dónde m es la masa, v_0 el valor de la velocidad inicial, x_0 la posición inicial y t el tiempo. Determinar el valor de la velocidad $v(t)$ del móvil en función del tiempo.

13. Cierta población crece de acuerdo a la ecuación $y = 1 + 0{,}2\, e^{0{,}1t}$ siendo t el tiempo medido en meses e y es el número de individuos en miles. Calcular la tasa de crecimiento de la población después de un año.(*)

14. Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{ln\, x}$

b) $f(x) = (ln\, x)^x$

c) $f(x) = (x + senx)^{\frac{2}{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}(senx)^{x^2}$

15. Obtener las ecuaciones explícitas de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de las siguientes funciones en el punto $(x_0;\ f(x_0))$

a) $f(x) = \frac{sen(\, ln(x^2+1)) - 3x}{2}$ $\qquad x_0 = 0$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{x+4}\right)^{\frac{x+8}{3}}$ $\qquad x_0 = -2$

16. Hallar los puntos para los cuales la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 e^{-3x}$ es paralela al eje x. (*)

17. Sea $f(x) = cosh(\, x^2 + x) + ax + b$. Hallar los valores de a y b para que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0 = 0$ sea $y = 3x - 2$.

18. La recta tangente al gráfico de la función f en $x = 1$ es $y = 4x - 2$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $g(x) = f(3x + 1) + e^{-x}$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

19. Hallar las funciones derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 3x$

b) $f(x) = e^{-2x^3+1}$

c) $f(x) = x\, ln\, x$

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

20. Para el móvil del ejercicio 11, calcular el valor de la aceleración $a(t)$ del móvil en función del tiempo.

Algunos ejercicios resueltos:

Ejercicio 2, ítem i) Calcular, aplicando la definición de derivada en un punto: $f'(0)$ siendo $f(x)=\text{sen}(3x)$

Para resolver este ejercicios consideramos como definición de derivada $f'(a)=\text{Lím}_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

resulta entonces $f'(0)=\text{Lím}_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}(3h)-\text{sen}0}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\dfrac{3\text{sen}(3h)}{3h}=3.1=3$

ii) a) Hallar $f'(x)$ aplicando la definición de función derivada si: a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h)x}\cdot\frac{1}{h}=$$

$$f'(x)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=\frac{-1}{x^2}$$

Ejercicio 3, ítem B) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal al gráfico de la función f en el punto de abscisa x_0 dado. Representar gráficamente la función y las correspondientes rectas.

B) $f(x)=\sqrt{x+1}-2$ $\qquad x_0 = 3$

Si consideramos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto correspondiente a $x=a$ tiene la fórmula $y=f'(a).(x-a)+f(a)$ será necesario encontrar $f(a)$ y $f'(a)$.

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

$f(a)=f(3)=\sqrt{3+1}-2=0$

$$f'(a)=f'(3)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\sqrt{(3+h)+1}-2-0}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=$$

$$\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}.\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h})^2-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=$$

$$\text{Lím}_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

Obtenemos entonces la ecuación de la recta tangente: $y=\frac{1}{4}(x-3)+0$

Ejercicio 5, ítem a) Para cada una de las siguientes funciones, hallar la fórmula de $f'(x)$

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si}\, x\le 1 \\ -\frac{2}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$ Consideramos la definición de derivada $f'(a)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ buscamos entonces $f'(x)$

$f'(x)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ debemos considerar que

* si trabajamos con $x>1$ tanto $f(x)$ como $f(x+h)$ estará definida en la segunda rama resultando para estos x la siguiente derivada:

$$f'(x)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{-2}{x+h}-\frac{-2}{x}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{-2x+2(x+h)}{(x+h).x}}{h}=$$

$$\text{Lím}_{h\to 0}\frac{\frac{-2x+2x+2h}{(x+h).x}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{2h}{(x+h)x.h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{2}{(x+h).x}=\frac{2}{x^2}$$

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

* si trabajamos con $x<1$ tanto f(x) como f(x + h) estará definida en la primer rama resultando para estos x la siguiente derivada:

$$f'(x)=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-\left[x^2-3x\right]}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=$$

$$\text{Lím}_{h\to 0}\frac{h(2x+h-3)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0}2x+h-3=2x-3$$

* si trabajamos con $x=1$ f(1) está definido en la primer rama pero f(1+h) estará definida en la primer o segunda rama dependiendo del signo de h entonces serán necesarias determinar los latarales del límite resultando:

$$f'(1)=\begin{cases}\text{Lím}_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2}{1+h}-(-2)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2+2(1+h)}{1+h}}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^+}\frac{2}{1+h}=2\\ \\ \text{Lím}_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-3(1+h)-(-2)}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^+}\frac{-h+h^2}{h}=\text{Lím}_{h\to 0^+}-1+h=-1\end{cases}$$

observamos entonces que no existe la derivada en $x=1$

Construimos entonces la función derivada pedida:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2} & \text{si } x>1\\ \\ 2x+3 & \text{si } x<1\end{cases}$$

nótese que perdimos la posibilidad de $x=1$(que estaba en f) puesto a que como demostramos no existe la derivada en dicho punto.

Ejercicio 13: Cierta población crece de acuerdo a la ecuación $y = 1 + 0{,}2\, e^{0{,}1\,t}$ dónde t es el tiempo medido en meses e y es el número de individuos en miles. Calcular la velocidad de crecimiento de la población después de un año.

Obtenemos en primer lugar la velocidad de crecimiento de la población:

$$y'=0+0{,}2.e^{0{,}1t}.0{,}1=0{,}02e^{0{,}1t}$$

Donde t es el tiempo medido en meses e y' es la velocidad de crecimiento de la población medida en miles de individuos por mes.

Ahora entonces consideramos como t=12 meses (un año) para obtener lo pedido:

$y'=0{,}02e^{0{,}1.12}=\text{aprox}\ \ 0{,}066$ esto nos indica que la velocidad después de un año es de 0,066miles de individuos por mes o lo que resulta equivalente 66 individuos por mes aproximadamente.

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

Ejercicio 16 Hallar los puntos para los cuales la recta tangente al gráfico de $f(x)=\frac{1}{4}x^2\,e^{-3x}$ es paralela al eje x.

El eje x es una recta horizontal, para obtener una recta paralela deberá tener pendiente cero.
Como la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiena $x=a$ es la derivada de la función en dicho punto, planteamos lo siguiente
$f'(a)=0$ resultando

$$\frac{1}{2}xe^{-3x}+\frac{1}{4}x^2e^{-3x}.(-3)=0$$

$$e^{-3x}x(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x)=0$$

e^{-3x}nunca es igual cero, $x=0$ es una posible solución; $x=-2$ es otra solución.

Armamos entonces los puntos de la gráfica que verifican lo pedido $P=(0;f(0))=(0;0)$

$Q=(-2;f(-2))=(-2;e^6)$

Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.