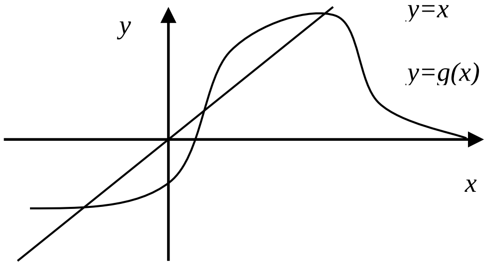
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS EXACTAS

3.1.020 CÁLCULO NUMÉRICO

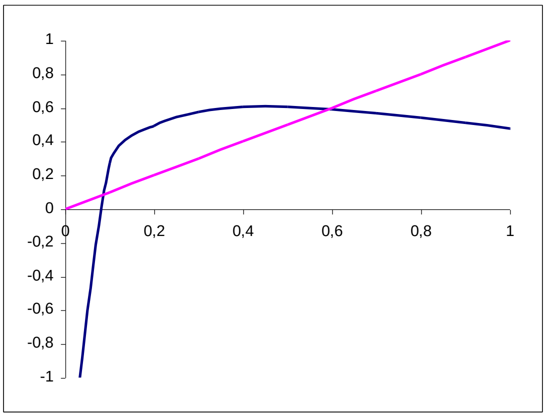
Guía de Ejercicios

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES
Puntos Fijos y Raíces



1) La igualdad *x=g(x)* se cumple para tres valores de *x* en el intervalo mostrado en la figura.
   a. Explique qué intersecciones se pueden encontrar mediante el método de punto fijo, y cómo.
   b. ¿Cómo haría para encontrar las restantes?

2) La función $h(x) = e^{-x}(\log x + 1.3)$, tiene dos puntos fijos en el intervalo (0,1], como se observa en la figura de la derecha.



   a. Uno de estos puntos puede ser encontrado por medio de iteraciones de punto fijo. Indique cuál y explique por qué.
   b. Realice a mano las tres primeras iteraciones de un proceso de iteración de punto fijo para encontrar ese valor, a partir de una semilla x_0=0.3.
   c. Programe un algoritmo para este proceso y realice 10 o más iteraciones, partiendo de semillas x_0 =0.05, 0.3, y 0.8. ¿Se confirma lo expresado en el punto a?

3) Considere el problema de encontrar los valores *x* tales que:

$$\sqrt{x} = e^{1-x}$$

Supongamos que planteamos este problema como tres problemas de punto fijo equivalentes: encontrar *x* tal que…

i) $x = \sqrt{x} - e^{1-x} + x$ ii) $x = e^{2-2x}$ iii) $x = 1 - \ln(\sqrt{x})$

Sabiendo que *x*=1 es una solución del problema. ¿En cuál o cuáles de las variantes es posible encontrar esta solución utilizando iteraciones de punto fijo

4) Considere un problema de cruce de funciones, es decir, de encontrar {*x* / *f*(*x*)=*g*(*x*)}. Para el caso particular:

$$e^x = 3\sqrt{x}$$

   a. Grafique *f*(*x*) y *g*(*x*) en forma aproximada o utilizando computadora (Excel, Matlab, Octave, GeoGebra, etc.) para ubicarse respecto de la o las respuestas a este problema, tratando de abarcar todo el dominio en donde puede haber cruces de estas funciones.
   b. Replantee el problema como un <u>problema de punto fijo</u>, es decir, encontrar {*x* / *x*=*h*(*x*)}.
   c. Grafique *h*(*x*) en forma aproximada o utilizando computadora, y trace la recta de pendiente unitaria para detectar los puntos fijos. Compare con el gráfico del punto a).
   d. Realice a mano los 5 primeros pasos de una *iteración de punto fijo*, partiendo de una semilla x_0 se su elección. ¿La solución parece converger a alguno de los puntos fijos?

Note:

   i) que tanto el <u>problema original</u> como las variantes de <u>problemas de punto fijo</u> generados tienen todos el mismo conjunto de soluciones {*x*}, y
   ii) que en algunos casos podrá y en otros no encontrar un determinado punto fijo utilizando una *iteración de punto fijo*, dependiendo de la forma de *h*(*x*).

5) En arquitectura, una de las formas matemáticas más utilizadas es la llamada *catenaria*, dada por:

$$y(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\cosh(x/a)\,,$$

curva que toma su nombre del hecho de que es la forma que adopta una cadena sostenida en ambos extremos y sometida sólo a su peso propio. Como parte de un diseño, se necesita definir para qué valor del parámetro *a* esta curva toma el valor de altura *y*=20m para la posición *x*=4m.

   a. Plantee el problema como uno de punto fijo en la variable *a*.
   b. Realice los 3 primeros pasos de una iteración de punto fijo, partiendo de la semilla a_0=1. ¿Qué puede decir de la sucesión de valores resultante?

6) Se desea que la función:

$$f(x) = ae^{ax} - 1$$

tenga un cero para *x*=1.

   a. Plantee el problema como uno de punto fijo en la variable *a*.
   b. Realice las 5 primeras iteraciones partiendo de la semilla a_0=0.5.

7) Durante un examen se encuentra con que para resolver un problema Ud. debe encontrar las raíces del polinomio

$$P(x) = 0.20x^2 - 3.17x + 9.78$$

pero se ha olvidado de la clásica fórmula para raíces de polinomios cuadráticos. Entonces se acuerda de su materia de Cálculo Numérico y replantea el problema como uno de punto fijo, iniciando las iteraciones con la semilla x_0=4 tratando de encontrar una de las raíces.

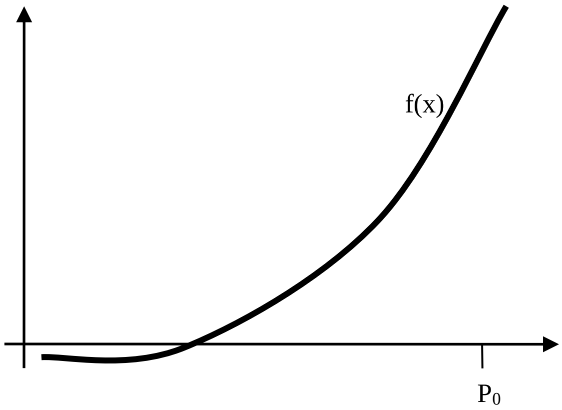
   a) Escriba los valores que obtiene en las 4 primeras iteraciones.
   b) ¿Puede concluir algo a partir de los mismos, respecto de la convergencia del proceso y del posible valor de esta raíz?

8) Plantee el método de Bolzano para encontrar algún cero de la función

$$f(x) = \sin(e^x)$$

en el intervalo (0,π/2), con un error menor a π/16.

9) Sea una función $f(x)$ y una semilla P_0 como muestra la figura. Basándose en la interpretación gráfica del proceso de iteración del método de Newton-Raphson, indique claramente sobre el gráfico dónde estarían aproximadamente los primeros dos valores P_1 y P_2 resultantes de los dos primeros pasos de esta iteración.



10) Plantee el método de Newton-Raphson para encontrar uno de los ceros de las siguientes funciones, partiendo de las semillas sugeridas:

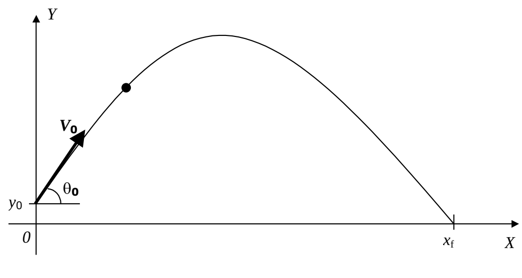
a. $f(x) = \sin(\cos(x))$; $x_0 = 1$

b. $f(x) = ae^{ax} - 1$ (con a=0.567144); $x_0 = 2$

c. $f(x) = \sin(e^x)$; $x_0 = 1$

Realice a mano dos iteraciones. Programe un algoritmo para resolver estos problemas con una precisión de 8 cifras significativas.

11) La trayectoria de un proyectil lanzado con una velocidad V_0 desde el punto $(x,y) = (0,y_0)$ está dada por:



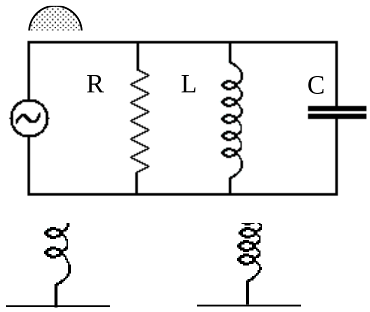
$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + y_0$$

Encuentre el ángulo inicial apropiado θ_0, si V_0 = 20 m/s, para que el proyectil toque el suelo en x = 40 m. El lanzamiento se realiza desde una altura y_0 = 1.8 m.

12) La velocidad ascensional de un cohete se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$v = u\ln\frac{m_0}{m_0 - qt} - gt$$

donde v es la velocidad del cohete, u la velocidad relativa al cohete de los gases de combustión, m_0 es la masa inicial del cohete (al tiempo t=0), q es el ritmo de consumo de combustible, y g es la aceleración de la gravedad (considerarla constante = 9.8 m/s^2). Calcule con menos de 1% de error el tiempo para el cual v = 1100 m/s, para el caso en que u = 2200 m/s, m_0 = 160000 kg y q = 2680 kg/s.



13) La figura muestra un circuito con un resistor, un inductor y un capacitor en paralelo. Las reglas de Kirchhoff permiten expresar la impedancia del sistema como

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

donde Z es la impedancia (Ω) y ω es la frecuencia angular.
Encuentre ω para que la impedancia resultante sea de 100 Ω usando el método de Bolzano partiendo del intervalo [1,1000], para los siguientes parámetros: R = 225 Ω, C = 0.6x10^{-6} F y L = 0.5 H.