1. Simplifique las siguientes expresiones mediante la aplicación de las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

   a) $a'.b'.(a+b)$
   b) $a+(a.b.c)+(a'.b)+(a'.b')$
   c) $[(x+y)'.z']'.x'.y$
   d) $\left[(x'.y).(x.z)\right]'.\left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$
   e) $[\,(xy)'+x]\,z'+[x\,(x+z)y'\,]+(xy'\,z)$
   f) $[a.\,b'+c\,(a'+b)](b+c)$

2. Escriba el enunciado dual de cada afirmación:
   a) $(a'+b')'=a.b$
   b) $x.y'=0 \Leftrightarrow x.y=x$
   c) $x+[x.(y+1)]=x$

3. Si U es un conjunto universal y P(U) es el conjunto de partes de U, demuestre que $(P(U), \cup, \cap, ', \varnothing, U)$ es un álgebra booleana.

4. En un álgebra de Boole, ¿existe algún elemento que sea igual a su complemento?

5. a) Sea $A=\{1,2,3,6\}$. Se define: $x+y=mcm(x,y)$, $x.y=mcd(x,y)$, $x'=\dfrac{6}{x}$ para $x,y \in A$. Demuestre que el conjunto $(A, +, ., ', 1, 6)$ es un álgebra de Boole.

   b) Si A es el conjunto formado por los divisores positivos de 8, ¿es $(A, +, ., ', 1, 8)$ un álgebra booleanas? ¿Por qué?
   Considere $x+y$ y $x.y$ como en el apartado a) y $x'=\dfrac{8}{x}$ para $x,y \in A$

6. Demuestre las siguientes afirmaciones, utilizando las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

   a) $x+x.(y+1)=x$
   b) $x\,.\,x=x$
   c) $a.b=a \rightarrow a+b=b$
   d) $x+y=0 \rightarrow x.\,y'=0$
   e) $x+y=y \wedge xy'=x \rightarrow x=0$
   f) $a+b'=a'+b \rightarrow a=b$
   g) $ba=b \rightarrow a+bc=a$

7. De un contraejemplo para demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas en un álgebra de Boole:
   a) $x+z=y+z \Rightarrow x=y$
   b) $x.z=y.z \Rightarrow x=y$
   c) $a.b=a \Rightarrow a.b'=(a.b')+a'$

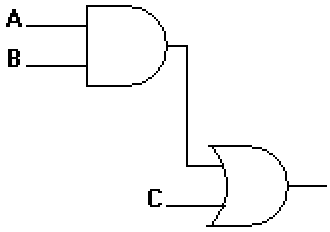
8. Determine un circuito combinatorio correspondiente a cada una de las expresiones booleanas siguientes:
   a) $x_1.(x_2'+x_3)$

b) $(x_1.x_3')+(x_2.x_3')+x_1$

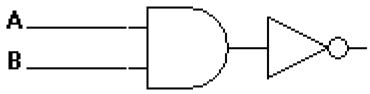
c) $[(x_1.x_2)+(x_2.x_3)]'$

9. i) Describa las expresiones booleanas para cada uno de los siguientes casos:

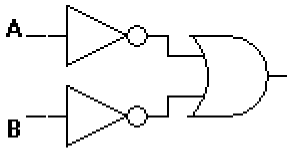
a)



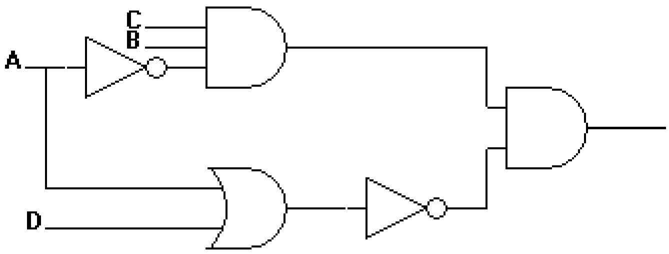
b)



c)



d)



ii) Realice la tabla lógica correspondiente a los incisos b) y c).

iii) ¿Es posible obtener un circuito más simple para la expresión obtenida en el inciso d)?

Sugerencia: En la página http://www.jhu.edu/virtlab/logic/logic.htm puedes encontrar un constructor interactivo de circuitos lógicos para ejercitar este tema.

10. Sea (B, +, . , ‘, 0, 1) un álgebra de Boole. Dada la expresión x + xyz + x´z’ + (x + y’)’, se pide:

a) Simplificar la expresión utilizando las leyes del álgebra de Boole. Indicar en cada paso la ley utilizada.

b) Representar la expresión obtenida en el ítem anterior mediante compuertas

11. Dada la siguiente tabla:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a) Encuentre la expresión booleana que la satisface
b) Simplifíquela utilizando las propiedades del álgebra de boole.

12. Se desea realizar una alarma para automóvil para detectar ciertas condiciones no deseables. Para la misma se emplean tres interruptores para indicar el estado en el que se encuentra la puerta del lado del conductor, el encendido y los faros respectivamente. Se quiere diseñar un circuito lógico con estos tres interruptores como entradas, de manera que la alarma se active cuando se presenten cualquiera de las siguientes condiciones:
    - Los faros están prendidos mientras el encendido está apagado.
    - La puerta está abierta mientras el encendido está prendido.

a) Plantee una expresión booleana que modelice la situación.
b) Simplifique la expresión.
c) Represente el circuito correspondiente.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 1 Simplifique las siguientes expresiones mediante la aplicación de las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

d) $\left[(x'.y).(x.z)\right]'.\left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$

$\left[(x'.y).(x.z)\right]'.\left[x+(x.y')\right].(x'+y)' = \left[y\,(x.\,x')\,z\right]'\ \left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$ por conmutatividad y ley asociativa

$= \left[y.\,0.\ z\right]'\left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$ por ley del inverso

$= 0'.\left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$ por ley de dominación

$= \left[x+(x.y')\right].(x'+y)'$ dado que $1'=0$ y ley de identidad

$= x.\,(x'+y)'$ por ley de absorción

$= x.\,(x.\,y')$ por ley de De Morgan / doble contradicción

$= xy'$ ley asociativa / ley de idempotencia

Ejercicio 4: En un álgebra de Boole, ¿existe algún elemento que sea igual a su complemento?

Demostraremos que en un álgebra de Boole no existe ningún elemento que sea igual a su inverso utilizando el método del absurdo.

Sea (B ; + ; . ; ‘ ; 0 ; 1) un álgebra de Boole. Supongamos que existe un elemento x $\in$ B tal que x es igual a su inverso, es decir, x = x’. Entonces tenemos que:

1. x = x.x = x. x’ = 0 , por lo que x = 0 (se aplicó la ley de idempotencia y que x = x’)
2. x = x + x = x + x’ = 1, por lo que x = 1

Luego, obtenemos que x = 0 = 1, lo cual es absurdo dado que, por definición de álgebra de Boole, $0 \neq 1$

Ejercicio 6: Demuestre las siguientes afirmaciones, utilizando las propiedades del álgebra de Boole. Justifique cada paso.

e) x + y = y $\wedge$ xy’ = x $\Rightarrow$ x = 0

La idea de la demostración es la siguiente: suponemos que el antecedente de la implicación es verdadero y a partir de este dato, queremos demostrar que el consecuente también es verdadero

Una posible manera de demostrar la proposición es la siguiente:

x = xy’	= x. (x + y)’	= x. (x’ y’)	= (xx’)y’	= 0
Por hipótesis, x = xy’	Por hipótesis, y = x+y	Ley de De Morgan	asociativa	Ley del inverso/ ley de dominación

Ejercicio 7: De un contraejemplo para demostrar que las siguientes afirmaciones son falsas en un álgebra de Boole:

a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

Dar un contraejemplo significa, en este caso, mostrar un álgebra de Boole en la que el antecedente de la implicación resulte verdadero y el consecuente falso. Es decir, se tiene que verificar que x + z = y + z pero x tiene que ser distinto de y.

Consideremos A el conjunto dado por A = $\{1, 2, 3\}$ Por el ejercicio 3 sabemos que $(P(A), \cup, \cap, ', \varnothing, A)$ es un álgebra de Boole. Consideremos X = $\{1, 3\}$, Y = $\{2, 3\}$, Z = $\{1, 2\}$. Notemos que todos estos conjuntos pertenecen a P(A). Como en este caso la operación “+” está dada por la unión de conjuntos, tenemos que:

- x + z = X $\cup$ Z = $\{1, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$
- y + z = Y $\cup$ Z = $\{2, 3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$

Por lo tanto, se cumple la hipótesis: X $\cup$ Z = Y $\cup$ Z (x + z = y + z) Sin embargo, x $\neq$ y dado que $\{1, 2\} \neq \{2, 3\}$.

Observación: notemos que con este ejercicio estamos viendo que en un álgebra de Boole no se verifica la propiedad cancelativa.