Unidad 4 · Rectas en el plano

Introducción:

Un fabricante de cierto producto tiene como gastos fijos en su fábrica \$ 1200 (luz, alquiler, sueldos, etc.) y luego \$ 15 de materia prima para la producción de cada producto. La relación, entonces entre cantidad de productos fabricados (x) y el gasto total (y) para dicha producción, estará dada por la relación $y=1200+15.x$

Si el precio de cada producto es de \$ 42, la relación entre la cantidad de productos fabricados y el dinero que ingresa por la venta (y) de dicha producción estará dada por la fórmula $y=42.x$

Sería interesante analizar cuántos productos deberá fabricar y vender para que la plata que ingrese, por lo menos cubra los gastos de producción.

Para comprender mejor estas relaciones y las cantidades que estamos buscando es que resulta de nuestro interés el trabajo con rectas.

La recta es un subconjunto de puntos del plano xy, uno entre tantos que podríamos definir. Para poder llegar al concepto de recta comenzaremos por revisar algunos aspectos geométricos anteriores y al finalizar esta unidad deberán identificar las expresiones a las que gráficamente les corresponden rectas, identificar sus elementos: pendiente y ordenada al origen y los efectos de estos sobre la gráfica, reconocer ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares, calcular el punto de intersección entre dos rectas.

Al mismo tiempo, podrán reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre variables y aplicar estas relaciones para la resolución de problemas entre los que aparece el cálculo de porcentajes.

Organizaremos entonces esta unidad de la siguiente manera:

Contenidos:

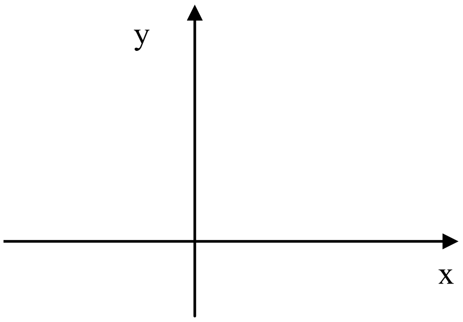
TEMA 1 · Puntos y Subconjuntos del plano

4.1.1 Puntos

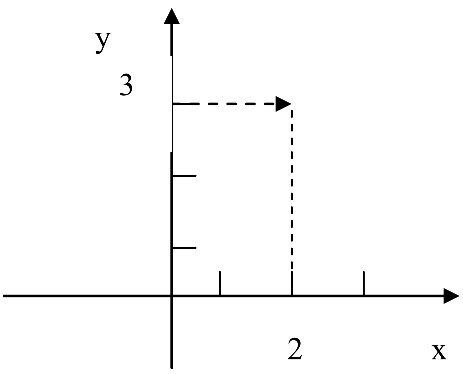
Para ubicar un número real, utilizamos una recta numérica.

Para ubicar un par ordenado de números reales que llamaremos en forma genérica (x;y) necesitamos de dos rectas – una donde ubicar la x y otra donde ubicar la y.

Dichas rectas se ubican de forma perpendicular y se conocen como ejes cartesianos.

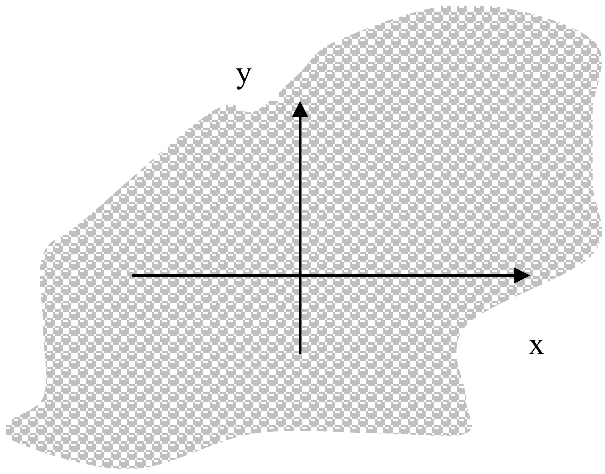


El par (2;3) se ubica considerando el valor 2 para la x y 3 para la y obteniendo entonces la siguiente posición:



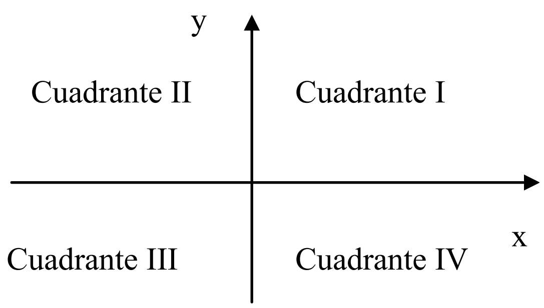
Observemos entonces que de la intersección de las dos condiciones surge un punto, la gráfica de un par ordenado es entonces un punto. Al par ordenado que define al punto lo llamamos coordenadas cartesianas del punto. A la primera componente del par ordenado, la que indica el valor de x, la llamamos abscisa y a la segunda componente la llamamos ordenada.

Así pues si consideramos el conjunto de todos los pares posibles entre números reales al que anotaremos $\Re^2$ obtendremos gráficamente todo un plano, el plano xy.



Debemos entender que el gráfico es un conjunto de infinitos puntos que se extiende sin bordes recorriendo todos los valores de reales de x y todos los valores reales de y.

Los ejes cartesianos seccionan a dicho plano en cuatro sectores llamados cuadrantes que se numeran de la siguiente forma.

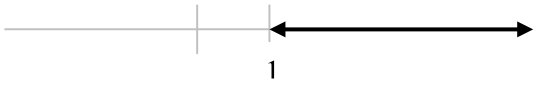


Resulta entonces que:

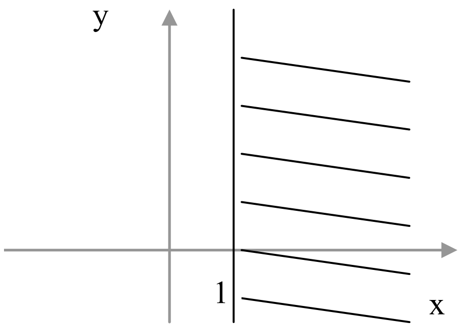
- Un punto estará en el primer cuadrante si las coordenadas que lo componen (el valor de x y el valor de y) son ambas positivas.
- Un punto estará en el segundo cuadrante si las coordenadas que lo componen (el valor de x y el valor de y) son x: negativa, y: positiva.
- Un punto estará en el tercer cuadrante si las coordenadas que lo componen son ambas negativas.
- Un punto estará en el cuarto cuadrante si las coordenadas que lo componen son x: positiva e y: negativa.

4.1.2. Subconjuntos del plano:

Una expresión algebraica del tipo $x \geq 1$ en el conjunto de los números reales expresaba un intervalo que podía representarse de la siguiente forma:

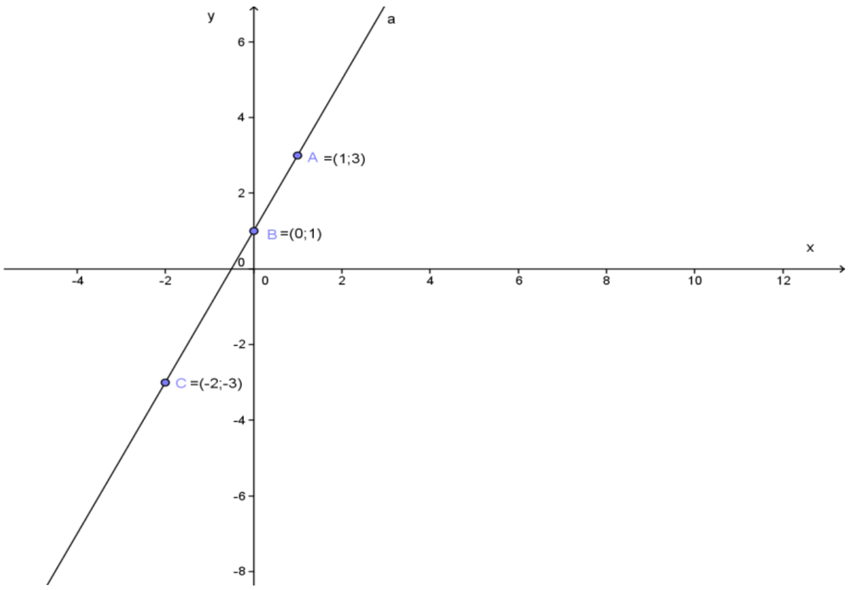


Ahora, la misma expresión en el contexto de $\Re^2$ debe entenderse como el conjunto de todos los puntos de primera coordenada mayor e igual que 1 y de segunda coordenada libre (ya que no establecimos condición para y), se obtiene así el siguiente sector del plano llamado **SEMIPLANO:**

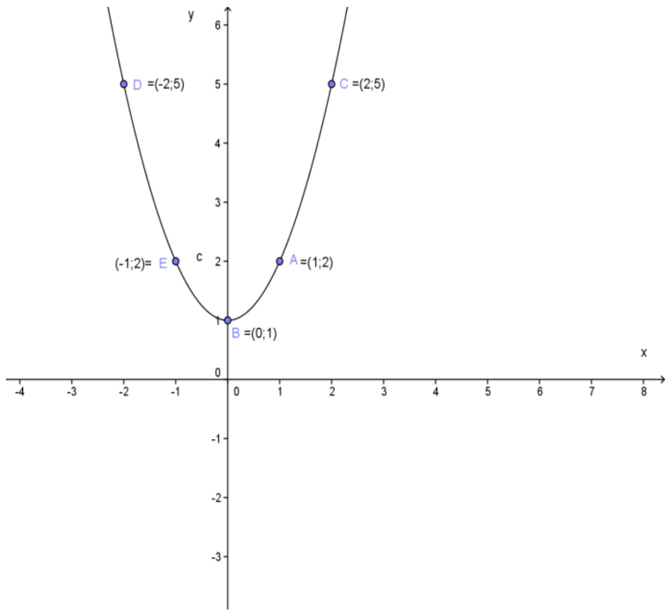


Expresiones como y=2x+1 son verificadas por los pares (1;3), (0;1),(-2;-3), etc.

Si bien se nota que no puede ser cualquier pareja se ve también que son infinitas. Si graficáramos éstas podemos observar que conforman una línea llamada **RECTA**:



Expresiones como $y = x^2 + 1$ son verificadas por los pares (1;2), (0;1), (2;5),(-2;5),(-1;2), etc. Si bien se nota que no puede ser cualquier pareja se ve también que son infinitas. Si graficáramos estas podemos observar que conforman una curva llamada **PARÁBOLA**:



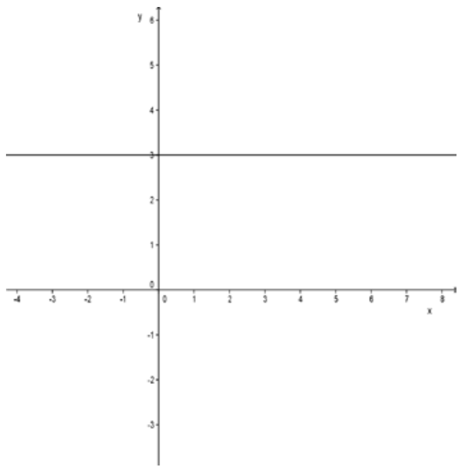
Podrían así introducirse otros sectores del plano o curvas mediante la utilización de igualdades o desigualdades con a lo sumo dos variables (que son las variables que se relacionan en el plano xy).

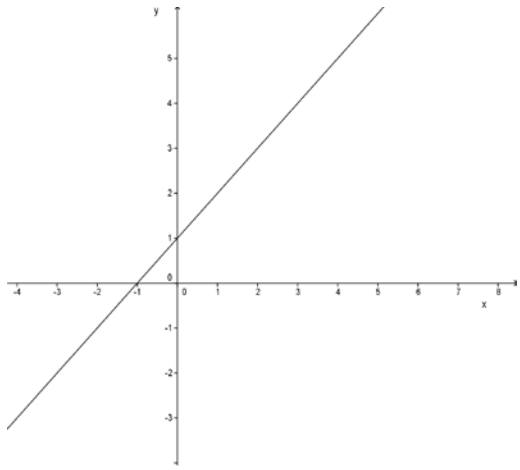
Resumiendo algunos aspectos geométricos:

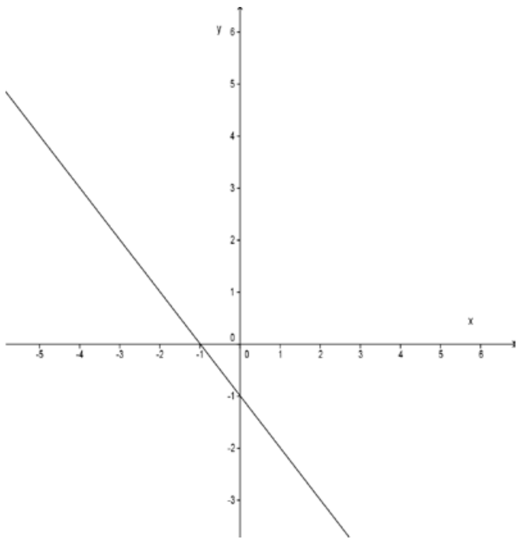
- Un par ordenado de dos variables representa gráficamente un punto en el plano xy
- Si un punto pertenece a un sector del plano o a una curva del plano debe verificar su condición.

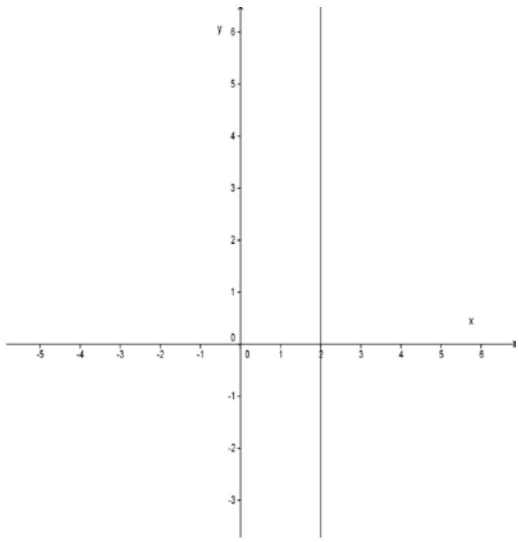
TEMA 2 · Rectas

Prestaremos ahora especial atención a las rectas. Presentamos a continuación el gráfico de cuatro rectas.









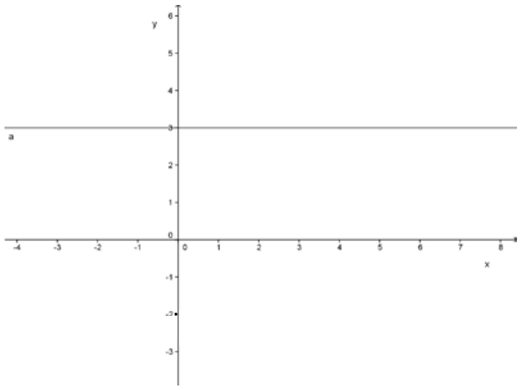
Las primeras tres rectas responden a la fórmula $y=mx+b$ con m y b números reales; mientras que la cuarta responde a la forma $x=a$ con a que representa un número real.

4.2.1 Análisis de la forma y=mx+b

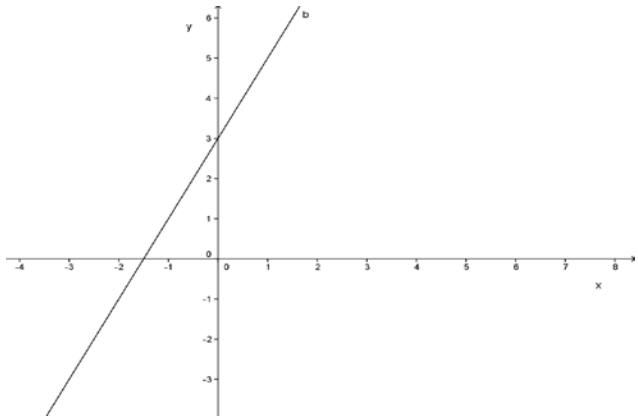
Pendiente de una recta.

El coeficiente m es llamado pendiente de la recta y es quien determina la inclinación de la misma. Así es que:

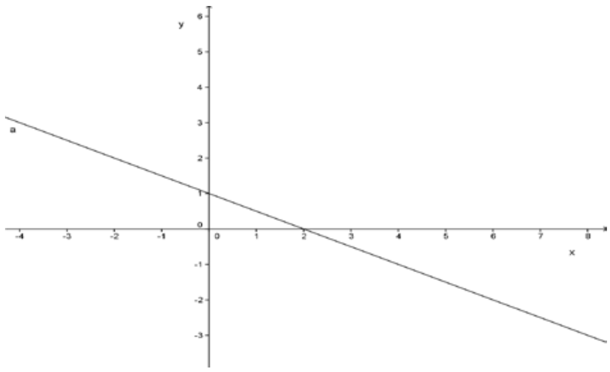
:: si m=0 la recta es horizontal



:: si m >0 la recta determina con el semieje positivo de las abscisas un ángulo menor a 90°.



:: si m<0 la recta determina con el semieje positivo de las abscisas un ángulo mayor a 90°.



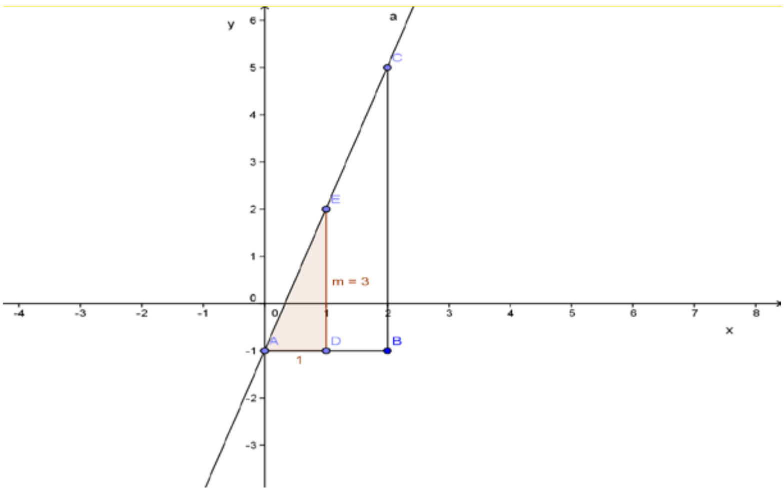
Para analizar la pendiente con mayor detalle consideremos dos rectas con pendientes del mismo signo, por ejemplo tomemos dos con pendiente positiva: $y=3x-1$, $y=\frac{2}{3}x-1$.

La pendiente de la primera que resulta ser 3, es mayor que la pendiente de la segunda que resulta ser $\frac{2}{3}$ puesto que el número tres es mayor que $\frac{2}{3}$, esto repercutirá en su gráfica obteniendo para la primera una recta más empinada que la segunda.

La pendiente puede interpretarse como un cociente donde el numerador representa la variación de las ordenadas de los puntos de la recta y el denominador representa la variación de las abscisas de los puntos de la recta: $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

Entonces, si la pendiente de una recta es 3 se interpreta $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \ldots = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ y esto implica que: al pasar de un punto a otro en esta recta se observarán las variaciones indicadas por su pendiente 3, por lo tanto: se variarán 3 unidades en y para cada 1unidad en x o lo que resulta equivalente 6 u. en y para 2u. en x o …...

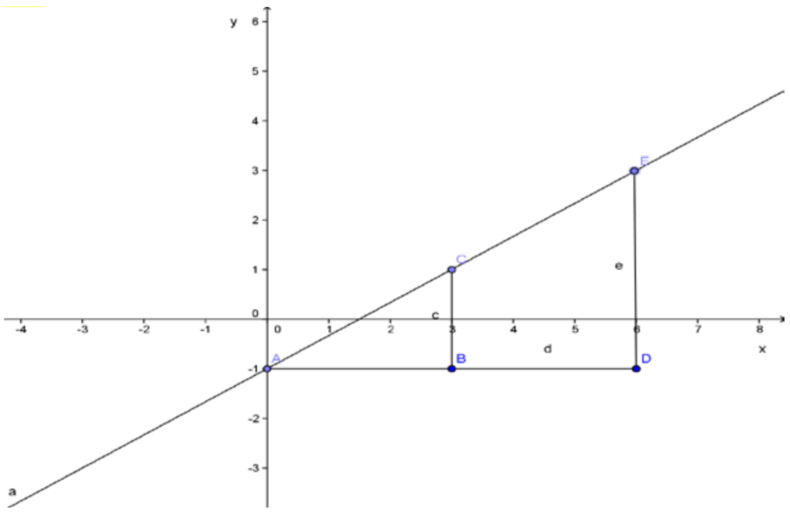
Ejemplo: recta de ecuación y=3x-1



En dicha recta se observa, si analizamos el movimiento entre algunos puntos de la misma, que el cociente $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{CB}{AB} = \frac{6}{2} = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{1}$ coincide con su pendiente 3.

En cambio, si la pendiente de una recta es $\frac{2}{3}$, se interpreta $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{-6}{-9} = \ldots. = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ y esto implica que al pasar de un punto a otro en esta recta se observarán las variaciones indicadas por su pendiente $\frac{2}{3}$, por lo tanto se variarán 2 unidades en y para cada 3 unidades en x o 4 u. en y para 6 u. en x o ………..

Ejemplo: Recta de ecuación y= $\frac{2}{3}x - 1$



En dicha recta se observa, si analizamos el movimiento entre algunos puntos de la misma, que el cociente $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{ED}{AD} = \frac{4}{6}$ coincide con su pendiente $\frac{2}{3}$.

Ordenada al origen.

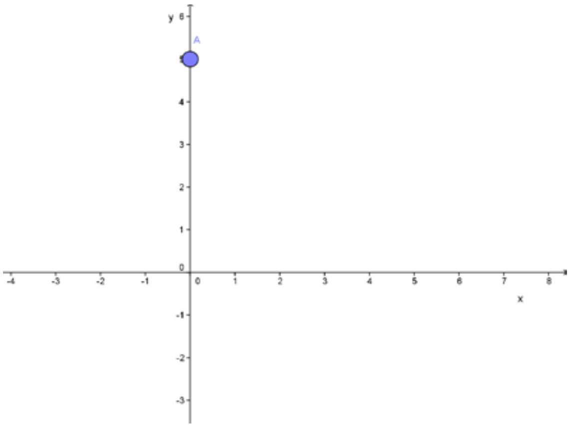
El término b es llamado ordenada al origen e indica el valor de ordenada (valor de y) por donde la recta interseca al eje y.

Ejemplos: las rectas graficadas anteriormente y=3x-1 tanto como y= $\frac{2}{3}x - 1$ tienen ordenada al origen -1 y por eso podemos observar su gráfica interseca al eje y en el punto de ordenada -1.

Para pensar juntos ….

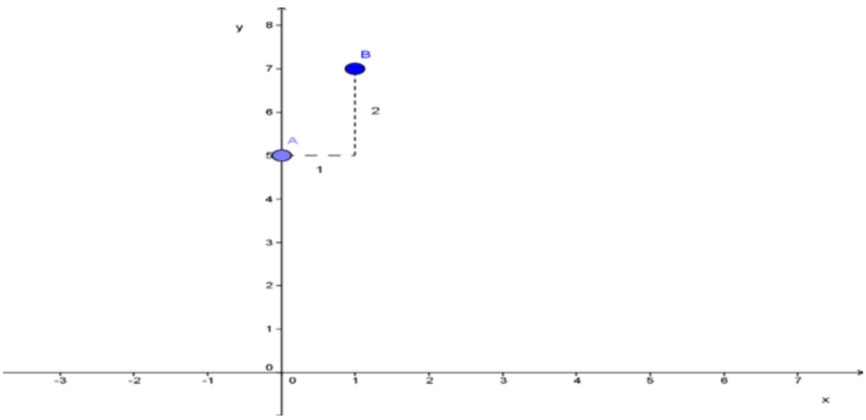
Utilizando el concepto de pendiente y de ordenada obtengan la gráfica de la recta y=2x+5.

El concepto de ordenada nos proporciona un punto de la recta, esta recta que tiene ordenada 5 cortará al eje y en y=5 por lo tanto el punto (0;5) es un punto de dicha recta, comenzamos ubicando este dato en los ejes cartesianos:

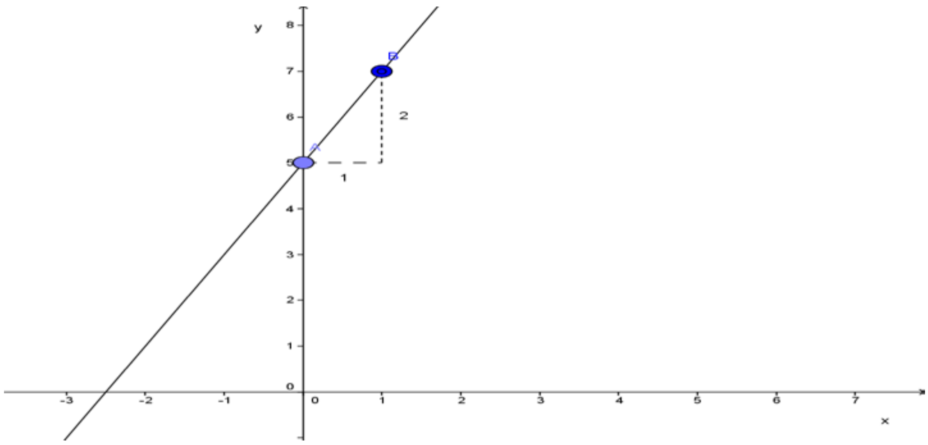


Ahora utilizamos el concepto de pendiente para obtener otro punto de la recta. Recordemos que la pendiente es $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$, en este caso la pendiente 2 = $\frac{2}{1}$ nos indica que al pasar de un punto a otro de esta recta la variación de la y deberá ser de 2 unidades por cada 1 unidad en x o cualquier par de números cuya razón sea 2 por ejemplo podríamos variar 6 unidades en y para 3 unidades en x.

Si a partir del punto marcado variamos lo que la pendiente indica, obtenemos otro punto que pertenecerá a esta recta:



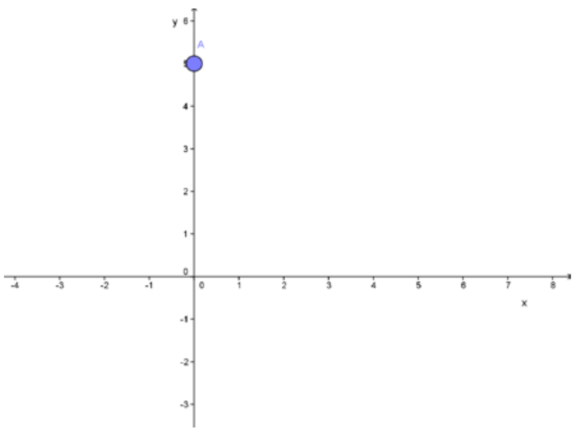
Quedando entonces con estos dos puntos determinada la gráfica de la recta



Utilizando el concepto de pendiente y de ordenada obtener la gráfica de la recta y= -2x+5.

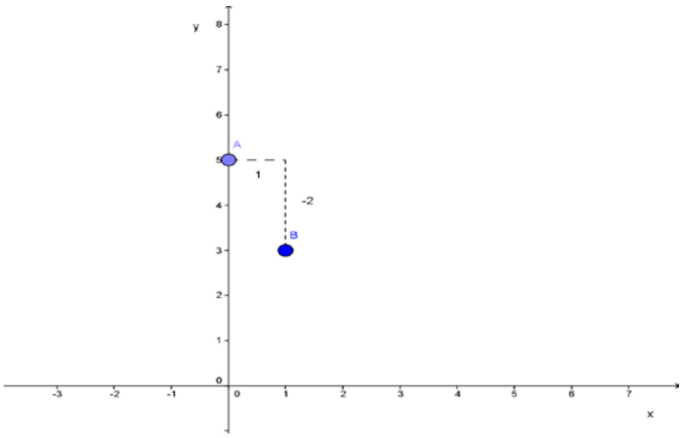
En este ejemplo hemos cambiado el signo de la pendiente por lo tanto retomaremos los pasos del ejercicio anterior observando esta modificación.

El concepto de ordenada nos proporciona un punto de la recta, esta recta que tiene ordenada 5 cortará al eje y en y=5 por lo tanto el punto (0;5) es un punto de dicha recta, comenzamos ubicando este dato en los ejes cartesianos:

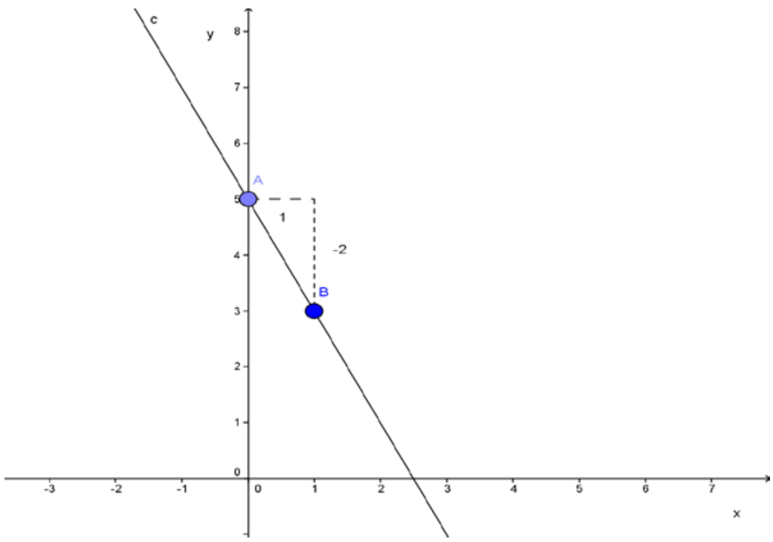


Ahora utilizamos el concepto de pendiente para obtener otro punto de la recta. Recordemos que la pendiente es $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$, en este caso la pendiente - 2 = -$\frac{2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1}$ (como vemos el signo deberemos asignarlo para una u otra variación, para el numerador o denominador) nos indica que al pasar de un punto a otro de esta recta la variación de la y deberá ser de -2 unidades por cada 1 unidad en x o cualquier par de números cuya razón sea -2 por ejemplo podríamos variar -6 unidades en y para 3 unidades en x.

Si a partir del punto marcado variamos lo que la pendiente indica obtenemos otro punto que pertenecerá a esta recta:

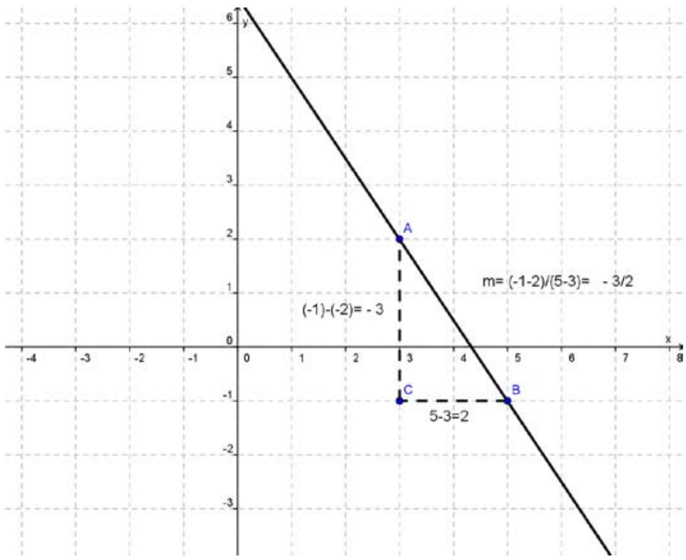


Quedando entonces con estos dos puntos determinada la gráfica de la recta



Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3;2) (5;-1).

En primer lugar trataremos de visualizar la recta cuya fórmula queremos, tratando de determinar gráficamente algunos de los elementos que conformarán su ecuación.



Ahora lo explicaremos a partir de un procedimiento no gráfico, analítico:

Recordamos la fórmula de la recta que buscamos es: y= mx+b

Comenzamos buscando la pendiente $m=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ dichas variaciones las obtenemos restando las coordenadas de los puntos, entonces: $m=\frac{-1-2}{5-3}=-\frac{3}{2}$

Ya tenemos y= $-\frac{3}{2}x+b$

Para encontrar el valor de b podemos reflexionar lo siguiente: como la recta debe pasar por el punto (3;2), dicho punto debe verificar su fórmula entonces 2= $-\frac{3}{2}.3+b$ así nos queda determinada una ecuación para averiguar b, la resolvemos

$$b=2+\frac{9}{2}$$

$$b=\frac{13}{2}$$

Resulta entonces que la ecuación es $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$

Obtener la ecuación de una recta horizontal que pase por el punto (1;3)

Este ejercicio puede resolverse sin procedimiento algebraico ya que si debe ser horizontal debe tener pendiente nula y luego si debe pasar por el punto (1;3) y ser horizontal sus puntos irán modificando la x pero mantendrán la ordenada 3 por lo tanto pasará por el eje y intersecándolo en 3, ordenada al origen 3, b=3. Así resulta la ecuación y=0x+3   o bien   y=3

Obtener el valor de t para que el punto P=(t; 5t+1) pertenezca a la recta R de pendiente -1 y ordenada 4.

La recta R tiene, conforme a los datos, la ecuación $y = -1x + 4$.

Si el punto p debe pertenecer a R, debe verificar su fórmula por lo tanto 5t+1=-1. t+4

Despejando t resulta 5t+t=4-1

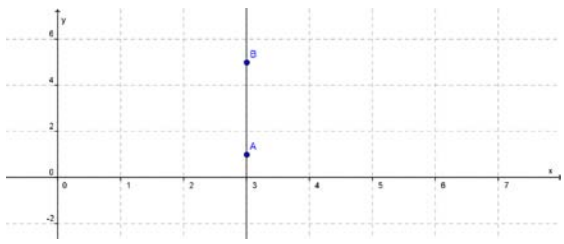
6t=3

t= $\frac{1}{2}$

4.2.2. Análisis de la forma x=a

Supongamos ahora que nos proponemos obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3;1) y (3;5).

Si comenzamos planteándolo gráficamente, la recta pretendida se representa de la siguiente manera:



Si intentáramos pensar en calcular la pendiente, nos encontraríamos con una división no definida, puesto que el denominador, la variación de x resultaría ser 0.

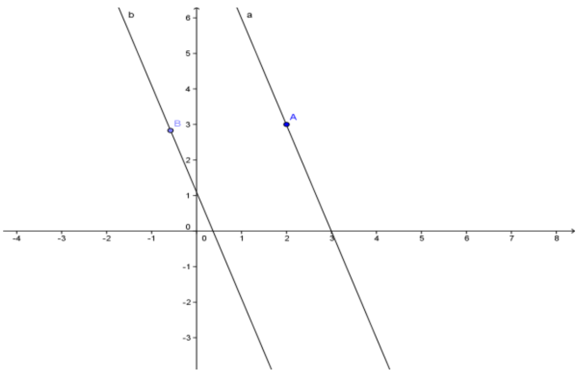
Pensemos entonces en el comportamiento de esta recta y de los puntos que conforman esta recta. En ella los puntos van cambiando el valor de su segunda coordenada, la coordenada "y" pero mantienen constante en 3 su valor de abscisa. Por esto la ecuación x=3 es la que identifica a estos puntos

Entonces: una ecuación del tipo x=a se identifica con una recta vertical cuyos puntos tienen todos abscisa a y por lo tanto también interseca el eje x en x=a.

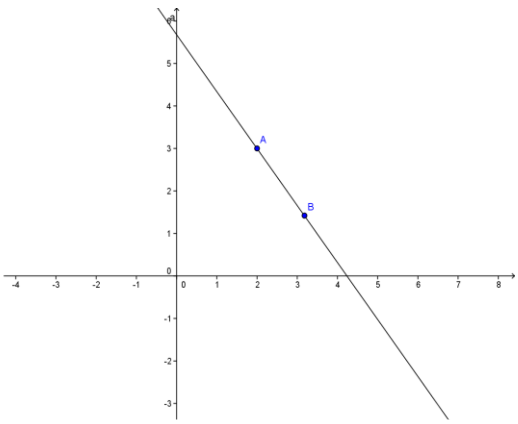
TEMA 3 · Posición relativa entre dos rectas en el plano

4.3.1 Diferentes posiciones:

PARALELAS: para que dos rectas resulten paralelas, es necesario y suficiente que tengan la misma pendiente. Recta que pasa por A paralela no coincidente con la recta que pasa por B.

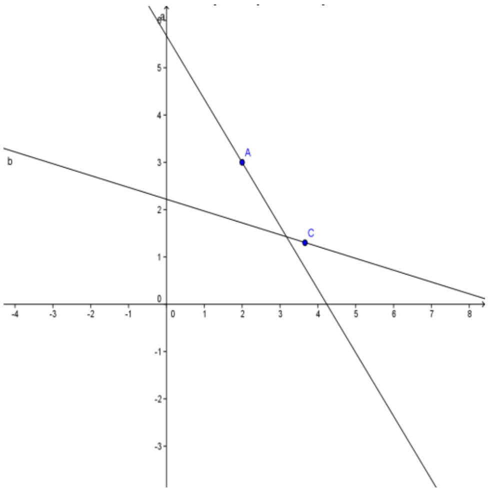


:: Recta que pasa por A es paralela coincidente con la recta que pasa por B.



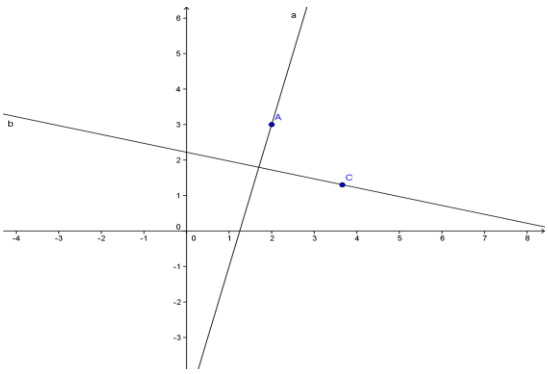
SECANTES: para que dos rectas resulten secantes es necesario y suficiente que tengan diferente pendiente.

:: La recta que pasa por A forma con la recta que pasa por C ángulos que no son rectos.



:: La recta que pasa por A forma ángulos rectos con la recta que pasa por C por eso se llaman

PERPENDICULARES (las pendientes son números inversos y opuestos)



Para pensar juntos…..

Obtener la ecuación de la recta perpendicular a y=5x+3 que pasa por el punto (1;-2).

Como la recta debe ser perpendicular deberá tener como pendiente el número inverso y opuesto de 5 resulta ser entonces m= $-\frac{1}{5}$ ya tenemos la ecuación y= $-\frac{1}{5}x+b$ ahora el punto (1;-2) debe verificar dicha ecuación, entonces: $-2=-\frac{1}{5}.1+b$ despejamos b y resulta b= $-2+\frac{1}{5}=\frac{-9}{5}$

Llegamos entonces a la ecuación $y=-\frac{1}{5}x-\frac{9}{5}$

La recta R es paralela a -2x+6y=9 y corta al eje x en x=4. El punto A=(a;5) pertenece a la recta R. Obtener la ecuación de R y la primera coordenada de A.

De la recta dada despejamos y para observar la pendiente: $-2x+6y=9$ resultando y= $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$ entonces:

R: $\begin{cases} m=\frac{1}{3} \\ pasa \quad por \quad (4;0) \end{cases}$

Luego:

$$y=\frac{1}{3}x+b$$

$$0=\frac{1}{3}4+b$$

$$b=-\frac{4}{3}$$

Resulta entonces **R:** $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

Como el punto A de coordenadas (*a*;5) pertenece a R debe verificar su fórmula, por lo tanto:

$5=\frac{1}{3}a-\frac{4}{3}$ obteniendo a partir de esto ***a*= 19**

4.3.2. Intersecciones de una recta con los ejes de coordenadas:

Intersección con el eje x: Se trata aquí de encontrar el punto de la recta que responda a la forma (a;0) (esta es la característica de los puntos de este eje).

Si la recta resulta ser horizontal –diferente del mismo eje x- no tendrá intersecciones con el eje x.

Intersección con el eje y: Se trata aquí de encontrar el punto de la recta que responda a la forma (0;a) (esta es la característica de los puntos de este eje).

Si la recta resulta ser vertical –diferente del eje y- no tendrá entonces intersecciones con el eje y.

Para pensar juntos……….

Obtener las intersecciones con los ejes de la recta y=2x+6

Al no ser ni vertical, ni horizontal tendrá intersecciones con ambos ejes.

Para la intersección con el eje x buscamos el punto (a;0), lo reemplazamos en la recta ya que debe pertenecer al eje y a la recta, resulta 0=2.a+6, despejando resulta a=-3. La intersección es entonces en el punto (-3;0).

Para la intersección con el eje y buscamos el punto (0;a), lo reemplazamos en la recta ya que debe pertenecer al eje y a la recta, resulta a=2.0+6, al resolver resulta a=6. La intersección es entonces en el punto (0;6).

4.3.3. Intersección entre dos rectas:

Si dos rectas no son paralelas no coincidentes entonces existirá al menos un punto de intersección entre las mismas.

Para calcular analíticamente el o los puntos de intersección entre dos rectas, se deberá tomar las ecuaciones que definen a cada una y conformar con dichas fórmulas un sistema de ecuaciones y resolverlos de la forma correspondiente puesto que encontrar el punto de intersección entre dos rectas implica encontrar el punto que verifica ambas ecuaciones, ambas fórmulas.

Para pensar juntos…..

Obtener el o los puntos de intersección entre la recta de ecuación y=x-2 y la recta de ecuación y= $\frac{x}{2}$ si existen. Verificar lo obtenido gráficamente.

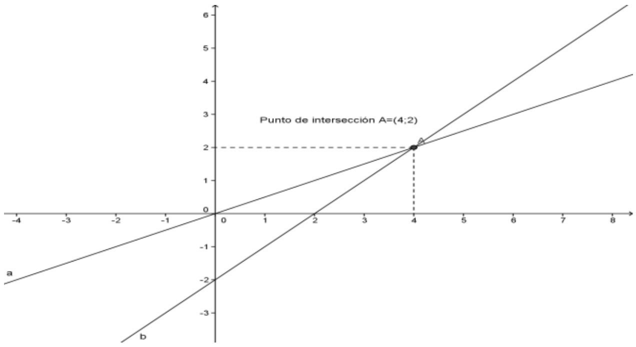
Conformamos el sistema $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$ para resolverlo igualamos: $x - 2 = \dfrac{x}{2}$

Resolvemos entonces la ecuación resultante

$$\begin{aligned} (x-2)\,2 &= x \\ 2x - 4 &= x \\ 2x - x &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Al buscar los correspondientes valores de y para conformar los puntos deberá darnos lo mismo si evaluamos una u otra ecuación puesto que es un punto de encuentro que por esto debe verificar ambas ecuaciones, obtenemos entonces (al probar en ambas) que x=4 tiene como pareja y=2. Existe entonces un único punto de encuentro que es el (4;2).

Lo verificamos en la gráfica: para esto dibujamos en un mismo sistema de ejes cartesianos ambas rectas obteniendo:



Observación: De acuerdo a las posibles posiciones entre dos rectas en un plano (analizadas anteriormente) existen diferentes posibilidades para dar solución a un ejercicio de este tipo:

1) podrían resultar paralelas no coincidentes, en dicho caso no se obtendría ningún punto de intersección entre las rectas
2) podrían resultar ser paralelas coincidentes, en dicho caso se obtendrían infinitos puntos de intersección –todos los de la recta.
3) Podrían ser secantes, como en nuestro ejemplo donde se encuentra un único punto de intersección.

Obtener el o los puntos de intersección entre la recta de ecuación y=x-2 y la recta de ecuación 3y-3x+6=0 si existen. Verificar lo obtenido gráficamente.

Conformamos el sistema $\begin{cases} y = x - 2 \\ 3y - 3x + 6 = 0 \end{cases}$ para resolverlo podemos sustituir la expresión de la primera ecuación en la segunda obteniendo: $3(x-2) - 3x + 6 = 0$

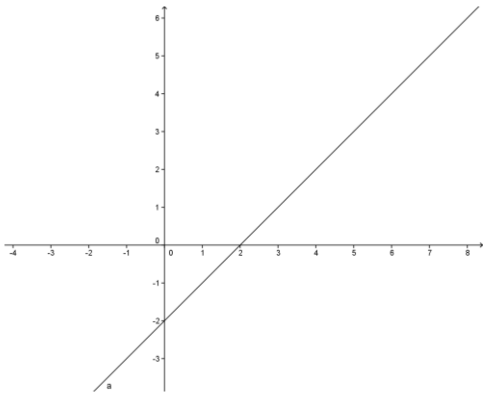
Resolvemos entonces la ecuación resultante $3x - 6 - 3x + 6 = 0$

Como podemos observar se cancela tanto los términos con x como los independientes llegando a una identidad tal que 0=0 . Esto nos indica que cualquiera sea el valor de x la igualdad se verifica -estamos entonces en un caso con infinitas soluciones- esto quiere decir que las rectas gráficamente coinciden y por esto todos los puntos de la recta son solución para este sistema (todos los puntos son puntos de coincidencia)

La respuesta será entonces: todos los pares de la forma (x;y) tales que y= x-2, es decir todos los puntos de la recta.

Si verificamos gráficamente:

Dibujamos la primer recta



Al despejar la y de la segunda ecuación

$$3y-3x+6=0 \Leftrightarrow 3y=3x-6 \Leftrightarrow y=\frac{3x-6}{3} \Leftrightarrow y=x-2$$

Podemos observar que efectivamente se trataba de la misma ecuación y por lo tanto coincidirían las rectas.

Obtener el o los puntos de intersección entre la recta de ecuación y=x-2 y la recta de ecuación 3y-3x+10=0 si existen. Verificar lo obtenido gráficamente.

Conformamos el sistema $\begin{cases} y=x-2 \\ 3y-3x+10=0 \end{cases}$ para resolverlo podemos sustituir la expresión de la primera ecuación en la segunda obteniendo:

$$3(x-2)-3x+10=0$$

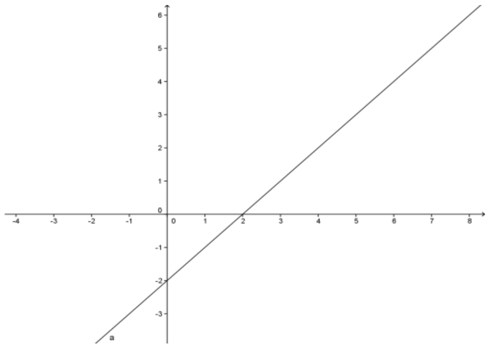
Resolvemos entonces la ecuación resultante $3x-6-3x+10=0$

Como podemos observar se cancelan ahora los términos con x pero no los términos independientes llegando a 4=0 . Esto nos indica que cualquiera sea el valor de x la igualdad no puede verificarse porque llegamos a un absurdo 4 nunca será igual a 0 -estamos entonces en un caso sin solución- esto quiere decir que las rectas gráficamente resultarán ser paralelas no coincidentes y por esto no habrá puntos de intersección y esto quiere decir que no encontraremos un par (x;y) que verifique ambas ecuaciones a la vez.

La respuesta será entonces: No hay punto de intersección entre estas rectas.

Si verificamos gráficamente:

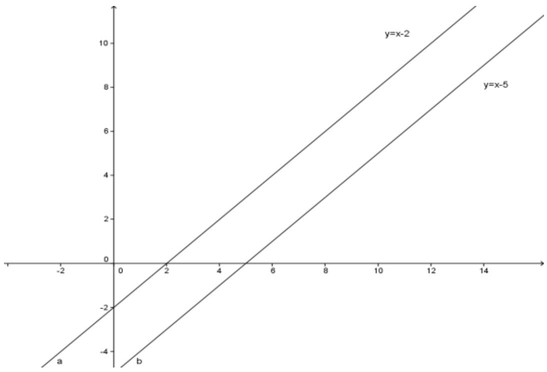
Dibujamos la primera recta



Al despejar la y de la segunda ecuación para graficarla utilizando la pendiente y la ordenada obtenemos:

$$3y-3x+10=0 \Leftrightarrow 3y=3x-10 \Leftrightarrow y=\frac{3x-10}{3} \Leftrightarrow y=x-5$$

Podemos observar que efectivamente se trataba de rectas paralelas (ambas tienen pendiente 2) no coincidentes (difieren en la ordenada, la primera tiene ordenada -2 y la segunda tiene ordenada -5).



Calcular las edades de un padre y un hijo sabiendo que hoy el padre tiene el doble de la edad del hijo y en 20 años tendrá el triplo de la edad que el hijo tiene hoy más 5 años.

Para su resolución necesitamos de dos variables: x: edad del padre; y: edad del hijo.

La relación entre las variables está expresada de manera coloquial en el problema, debemos entonces extraer un planteo:

“hoy el padre tiene el doble de la edad del hijo”: $x=2y$

“en 20 años tendrá el triplo de la edad que el hijo tiene hoy más 5 años”: $x+20=3y+5$

Cada una de las ecuaciones es una recta y tiene entonces infinitas parejas que la verifican, debemos encontrar aquella pareja que verifica ambas a la vez, es decir deberemos calcular el punto de intersección entre esas rectas y para ello conformamos con las ecuaciones un sistema:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 20 = 3y + 5 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema sustituyendo la expresión de la primer ecuación en la segunda obteniendo: $2y + 20 = 3y + 5$

Resolvemos la ecuación obteniendo un valor para *y:*

$$2y - 3y = 5 - 20$$
$$-y = -15$$
$$y = 15$$

Entonces $x = 2.15 = 30$

Podemos decir entonces que la edad del padre es de 30 años y la del hijo 15.v

TEMA 4 · Proporcionalidad directa

4.4.1 Relación de proporcionalidad directa:

Dos variables se relacionan de forma proporcional (directamente proporcional), cuando crece/decrece una y la otra también lo hace en forma proporcional (al triple de una el triple de la otra, a la mitad de una le corresponde la mitad de la otra, etc.). Esto es, que la razón de cambio de una sea igual a la razón de cambio de la otra.

Observemos la siguiente tabla:

x	y
10	7
20	14
30	21
5	3,5
10/7	1

La relación es tal que la razón entre las magnitudes siempre se mantiene constante:

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{3,5}{5} = \frac{1}{10/7} = \ldots.$$

Por lo tanto verifica la fórmula $y = \frac{7}{10}x$ ecuación de una recta con ordenada cero.

Esta será entonces la característica de una relación de proporcionalidad directa, deberá estar representada por una recta de ecuación $y = ax$, de ordenada al origen nula y pendiente $a =$ razón de proporcionalidad.

Nótese que podría haberse planteado la razón al revés, es decir:

$$\frac{x}{y}=\frac{10}{7}=\frac{20}{14}=\frac{30}{21}=\frac{5}{3{,}55}=\frac{10/7}{1}=....$$

En ese caso: $x=\frac{10}{7}y$, ahora si despejáramos y porque necesitamos esta variable despejada obtendríamos la misma ecuación que en el planteo inicial $y=\frac{7}{10}x$.
Esto quiere decir que esta forma de resolución habría sido totalmente equivalente.

La razón entre las variables se mantiene y es la misma expresada la x en función de y o la y en función de x.

Para pensar juntos…

Para que una foto de 18x10 (largo x ancho en centímetros) pueda ser ampliada sin deformar la imagen deberá modificarse en igual proporción el ancho y el largo, completar la tabla con la medida faltante para que no se deforme la imagen original:

Largo	Ancho
27	
	20
37,8	

Como el largo y el ancho según se indica en el enunciado deberán guardar entre sí una relación de proporcionalidad directa para que no sé modifique la imagen, entonces deberán conservar la relación:

$$\frac{Largo}{Ancho}=\frac{18}{10}$$

$$\text{es decir }: Largo = 1{,}8.Ancho$$

Utilizando esta relación, calcular los elementos faltantes consistirá en reemplazar donde corresponda y resolver la ecuación.

Para Largo=27 $\longrightarrow$ $27 = 1{,}8.Ancho \quad \text{entonces} \quad Ancho = 27:1{,}8 = 15$

Para Ancho=20 $\longrightarrow$ $Largo = 1{,}8.20 \quad \text{entonces} \quad Largo = 36$

Para Largo=37,8 $\longrightarrow$ $37{,}8 = 1{,}8.Ancho \quad \text{entonces} \quad Ancho = 37.8:1{,}8 = 21$

Quedando entonces la tabla completa de la siguiente forma:

Largo	Ancho
27	15
36	20
37,8	21

Dos cantidades $\alpha;\beta$ guardan entre sí una relación de proporcionalidad directa. Completar la siguiente tabla:

α	β
100	
150	**750**
	200

Fórmula:

Como α y β son dos magnitudes directamente proporcionales en toda la tabla deberán guardar la misma relación que se puede obtener en el segundo renglón de la misma:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{750}{150}$$
$$\text{es decir}: \beta = 5\alpha$$

Utilizando esta relación, calcular los elementos faltantes consistirá en reemplazar donde corresponda y resolver la ecuación.

Para $\alpha = 100 \longrightarrow \beta = 5.100$ entonces $\beta = 500$

Para $\beta = 200 \longrightarrow 200 = 5.\alpha$ entonces $\alpha = 200 : 5 = 40$

Quedando entonces la tabla completa de la siguiente forma:

α	β
100	**500**
150	**750**
40	**200**

Fórmula:
$\beta = 5.\alpha$

4.4.2 Porcentaje

La relación entre una cantidad y el porcentaje que le corresponde es un ejemplo de proporcionalidad directa. Así es que si 40 es el 100%, 20 es el 50%, 10 es el 25%, etc.

Si tenemos entonces que calcular el 54% de 2000 (considerando a este entonces como el 100%) resulta que 2000 le es a 100 como x (lo que queremos calcular) le es a 54, $\frac{2000}{100}=\frac{x}{54}$ y por lo tanto x= $\frac{54.2000}{100}=\frac{54}{100}2000$= 54% de 2000= 108

Para pensar juntos…

Una librería compra determinado libro a una editorial a un cierto precio y lo incrementa en un 35% para su venta. Si el precio de venta del libro es de $68. ¿Cuánto pagó la librería a la editorial por este libro?

En este caso el precio original es el desconocido: x y $68 es el precio ese aumentado un 35% entonces el 135% de x es 68, planteando esto resulta:

$\frac{135}{100}x = 68$ entonces despejando $x = 68.\frac{100}{135} = 50{,}37$ aprox.

Resumiendo algunos aspectos relacionados con rectas:

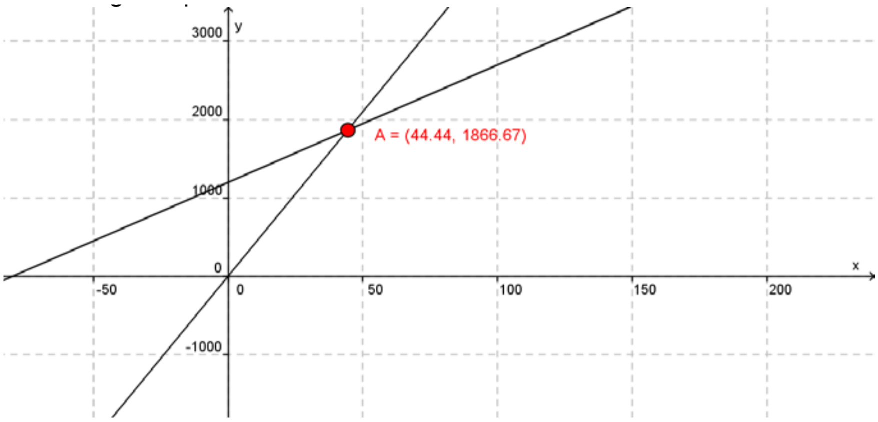
- y=mx+b ecuación de una recta no vertical.
- x=a ecuación de una recta vertical.
- Pendiente: m= $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$.
- Ordenada al origen: b, punto del eje y por donde interfecta la gráfica de la recta.
- Si dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas.
- Si dos rectas tienen pendientes que son números inversos y opuestos son perpendiculares.
- Considerando x=0 se determina la intersección con el eje y.
- Considerando y=0 se determina la intersección del eje x.
- Resolviendo el sistema de ecuaciones conformado por la fórmula de dos rectas se determina la intersección entre las mismas.
- Una relación de proporcionalidad directa entre x e y, se expresa mediante la fórmula y = *a*x

Como cierre, retomamos la introducción:

Estamos en condiciones de comprender que cada una de las relaciones costo total-cantidad de unidades fabricadas e ingresos-cantidad de unidades corresponden a rectas-

En la primera de las relaciones y=1200+15.x la ordenada al origen representa los costos fijos de la fabrica (aquellos que se deberán abonar aún cuando la producción sea de 0 unidades), la pendiente representa la cantidad que cambia el gasto por cada unidad producida.

En la segunda de las relaciones y=42.x la ordenada al origen es 0 ya que no habrá ingreso si no se vende ninguna unidad y la pendiente de 42, el precio de venta da cada producto y se interpreta justamente como la cantidad que varía el ingreso por cada unidad vendida.



El valor en el que el ingreso se iguala al costo total es el valor de nuestro interés ya que a partir de ese valor (en adelante) el ingreso supera al costo y esto quiere decir que se están generando ganancias. Para encontrar ese punto, bastará con buscar analíticamente la intersección entre las dos rectas que intervienen tal cual lo hemos trabajado en esta unidad.

Unidad 4 · Actividades

Referencias para actividades:

RO·CC Resolución optativa con clave de corrección

Resolución optativa para enviar al profesor

TPO Trabajo Práctico Obligatorio

RO·P

Ejercitación Propuesta

1- Nombrar un punto que pertenezca a cada cuadrante, uno que pertenezca al ejex y otro al eje y.

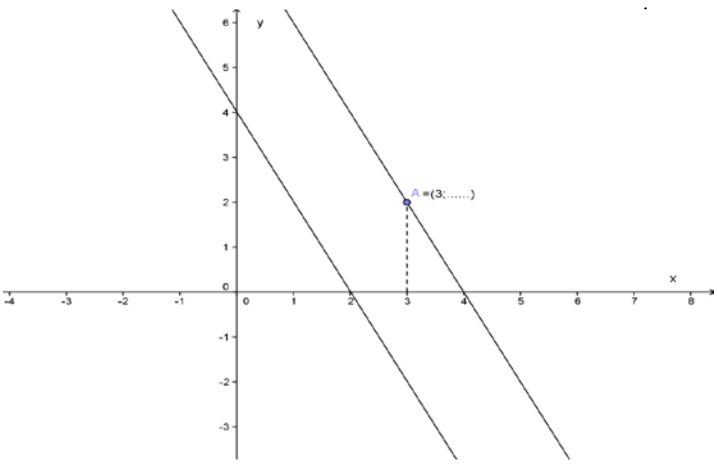
2- Si a>0 y b<0 ¿a qué cuadrante pertenece el punto (-a+b;b^{3})?

3- Si a= $(-1)^4+(-2+4)^3$ y b= $5^{-1}-1$, ¿a qué cuadrante pertenece el punto (b;a).

4- Indicar si el punto (0;4) pertenece a la recta y=3x+4.

5- G es la recta que pasa por los puntos (4;-7) y (2;-3). H es la recta perpendicular a G de ordenada al origen 5. Calcular el punto de intersección entre ambas rectas.

6- Obtener el valor de la coordenada faltante del punto A sabiendo que las rectas son paralelas.



7- a)Obtener el valor real de"a" para que el punto T=(a;10) pertenezca a la recta R, que pasa por los puntos A=(1;6) y B=(4;2)

b) Nombrar, de ser posible, un punto de la recta R que pertenezca al interior de cada cuadrante.

c) Determinar la ecuación de una recta S perpendicular a la que pasa por A y B que intersecte al eje x en

x=3.

d) Obtener analíticamente el punto de intersección entre la recta R y S. verificar gráficamente.

8- Calcular el área del triángulo rectángulo determinado entre la recta de ecuación y= -2,5x+5 y los ejes de coordenadas.

9- Calcular la medida de dos lados de un triángulo sabiendo que uno de ellos supera al otro en 5 unidades y que la medida del tercero es de 20 cm y el perímetro es de 100cm.

10- Una familia ha debido pagar el 15% del costo total de sus vacaciones al contado como reserva, el 25% del costo total en el momento del viaje y el resto en 10 cuotas de $180 ¿cuál es el costo total de estas vacaciones?

11- Si en un local por la compra de más de 100 productos iguales te ofertan un descuento del 12% sobre el valor de cada producto que sobrepase esa cantidad. Si el valor de cada producto es de $24

¿Cuánto se abonará por 230 productos?, ¿Cuántos productos se vendieron si se abonó 3033,6?

12- Si por la compra de más de 50 remeras cada remera tiene un costo del 15% menos que el valor de lista de $35. ¿Cuánto se abonará por una compra de 86 remeras?

Podrán encontrar más ejercitación en el cuadernillo : Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas examen de ingreso (EDI). Curso de apoyo. Comprensión de textos. Matemática. Autor: Universidad Argentina de la Empresa SecretaríaAcadémica y legal. 201

Respuesta de los Ejercicios correspondientes a la Unidad 4:

1- A=(7;14) del primer cuadrante, (-2;3) del segundo, (-3;-5) del tercero, (2;-9) del cuarto. (5;0) pertenece al ejes y (0;4) al eje y.

2- El punto pertenece al tercer cuadrante.

3- El punto pertenece al segundo cuadrante.

4- El punto (0;4) pertenece a la recta y=3x+4 pues verifica su fórmula 4=3.0+4

5- G tiene ecuación y=-2x+1. H tiene ecuación $y = \frac{1}{2}x + 5$. El punto de intersección entre ambas es (-8/5;21/5)

6- A=(3;2)

7- a) a= -2.

b) Podría resolverse a partir de la gráfica y ayudándose por la formula.

Por ejemplo del primer cuadrante punto: (1;6)

Por ejemplo del segundo cuadrante punto (-1;26/3)

Por ejemplo del cuarto cuadrante punto (6;-2/3)

No tiene puntos que pertenezcan al tercer cuadrante

c) La ecuación de la recta S resultaría y=3/4x-9/4.

d) El punto de intersección resultaría (23/5;6/5

8- Área: (2.5)/2= 5 unidades al cuadrado

9- Lado 1= 37,5 , lado 2=42,5.

10-Costo total: 3000

11- a) Por 230 productos se abonará: $5145,6.

b) Si se abonó 3033,6 resulta que $ 2400 corresponden a los primeros 100. Resta pensar cuántas unidades abonadas a $21,12 se compran con el dinero restante $633,6. Para esto, deberemos dividir 633,6 por 21,12 obteniendo como respuesta: 30.

Entonces se vendieron 130 unidades.

12-En este caso se entiende que al comprar más de 50 unidades se abona un 15% menos cada una del total de remeras. El precio de cada remera resultará: 35-15/100 .35= 29,75.

Entonces se abonará 86. 29,75= 2558,5