Esta práctica se realizará en los laboratorios del Edificio Tecnológico. Esté atento a las normas de seguridad y a las indicaciones. Ante cualquier indicio de riesgo o accidente se solicita informar inmediatamente al docente a cargo o llamar a los internos: Enfermería:5; Seguridad **1; Técnicos de Laboratorio **4**

TRABAJO PRÁCTICO DE LABORATORIO 3
PÉNDULO SIMPLE, DETERMINACIÓN DEL PERÍODO Y DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

Resumen

En este trabajo de laboratorio se trata de determinar el período de oscilación de un péndulo simple y propagar su error. Analizar la independencia del periodo de oscilación con la amplitud y la masa. Se determina el valor de la aceleración de la gravedad por el método tradicional y por el método grafico. Se estudia la dependencia del periodo de oscilación con la longitud del hilo.

1- INTRODUCCIÓN

Un péndulo simple es un dispositivo que consiste en una masa “m” sujeta a un hilo de longitud “l”. Cuando se realiza el modelado matemático de este experimento, se asume que la masa es puntual y el hilo inextensible y de peso despreciable, comparado con el de la masa “m”.

Cuando el péndulo se encuentra en su posición de equilibrio, el hilo se encuentra en posición vertical. Si se desplaza de esa posición un pequeño ángulo α_0 (amplitud inicial), y luego se lo deja en libertad, la masa comienza a oscilar. Si se desprecia todo rozamiento el movimiento será armónico simple. Las fuerzas que actúan sobre la masa son la tensión del hilo y el peso del cuerpo. En la dirección tangencial, que es la que interesa en este caso, la única componente es la del peso Ec. (1):

$$mgsen\alpha = -ml\frac{d^2\alpha}{d^2t} \quad (1)$$

(Esta ecuación será estudiada en la unidad correspondiente al movimiento armónico simple. Guía de problemas No. 10). Se trata de una ecuación diferencial, no lineal, cuya solución exacta es un desarrollo en serie de infinitos términos. Pero, si se considera que la oscilación es pequeña, al punto que se pueda aproximar el seno del ángulo al propio ángulo (sen$\alpha \approx \alpha$), una solución de la ecuación (1) es la Ec. (2):

$$\alpha = \alpha_0 \text{ sen } (\omega t+\varphi), \text{ siendo } \omega = (g/l)^{1/2} \quad \mathbf{(2)}$$

Para verificarlo, basta con sustituir (2) en la ecuación (1) y ver que se verifica la igualdad.

Esta solución representa un movimiento armónico simple de periodo T dado por la ecuación (4):

$$T = \frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4)$$

Si no se hace la aproximación de pequeñas oscilaciones, la solución es también un movimiento armónico de periodo aproximado por la siguiente expresión (5):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 sen^2\frac{\alpha_0}{2}+\left(\frac{9}{64}\right)sen^4\frac{\alpha_0}{2}+\ldots\right] \quad (5)$$

que coincide con la ecuación (4) cuando α_0 tiende a cero. Verificarlo.

2. PARTE EXPERIMENTAL:

Para realizar esta experiencia se requiere:

Cronómetro, cinta métrica, plomada, hilos y masas. (También bien puede utilizarse el péndulo para estudio de grandes amplitudes de Pasco que se encuentra en el laboratorio).

2-1 Estudio de la independencia del periodo con la amplitud

Se trata de medir los periodos del péndulo para las diversas amplitudes dada una longitud fija y representar en una gráfica la relación entre ambos. Para ello se debe:

1- Tomar una longitud fija de hilo, l, la cual tiene que ser medida con su error ($l = l_0.\pm\varepsilon_l$).

2- Desviar el péndulo 5° de la vertical y dejarlo oscilar libremente. La medición del ángulo puede hacerse con un goniómetro o sistema equivalente disponible en el laboratorio. Cuando lo haya hecho esta operación varias veces, poner en marcha el cronómetro para medir el intervalo de tiempo,Δt, transcurrido luego de 10 oscilaciones. (Para realizar el cálculo utilizar la expresión: $T = \Delta t/n$).

Nota: Tener en cuenta que el error en T se calcula propagando la expresión $T = \Delta t/n$

Proceder según lo indicado en 2., pero ahora tomando ángulos cada cinco grados hasta llegar a 30°. Consignar las medidas de amplitudes,θ, y periodos T, con su correspondiente error, en la Tabla 1 (Ver 3.1). Observar que el error en la medida del periodo es inversamente proporcional al número de oscilaciones que tiene lugar durante el tiempo de medición, lo que justifica tomar un "n" grande.

2-2 Estudio de la independencia del periodo con la masa del péndulo

Construir un péndulo de la misma longitud, pero usar una plomada distinta en cada caso. Se trata de observar la independencia del período de oscilación del péndulo ideal con la masa.

2.2.1-Medir la longitud del hilo del péndulo ($l = l_0.\pm\varepsilon_l$). Junto con cada anotación indicar la mínima escala del instrumento y otras posibles fuentes de errores con su estimación.

2.2.2-Determinar la masa de la plomada con su error. Para ello utilizar la balanza y la expresión: m = P / g, siendo P el peso y g la aceleración de la gravedad).
2.2.3-Medir el período de oscilación del péndulo a partir de medir el tiempo de 10 oscilaciones con cada masa. Ver presentación de los resultados en 3.2.

2-3 Determinación del valor de la aceleración de la gravedad con un péndulo simple

En primera aproximación se puede medir la aceleración de la gravedad, despejando su valor de la ec. (4), es decir, a partir de la Ec. (6)

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad \textbf{(6)}$$

Para ello se puede realizar una serie de 10 mediciones de las longitudes y de los periodos correspondientes que pueden ser asentados en una tabla. Ver punto 3-2. Dar el valor de g con su error según (7):

$$g = g_0 \pm \varepsilon_g \quad (7)$$

siendo g_0 el valor más probable (media aritmética de los valores obtenidos, en cada caso, a partir de la evaluación de la ecuación (6) en los valores más probables de la longitud (l_0) y del periodo de oscilación (T_0). El error se obtiene propagando errores.

2.4 Segunda determinación de la gravedad utilizando un péndulo simple

Si bien se pude determinar la aceleración de la gravedad como se explica en 2.3, sin embargo, mientras el periodo se puede determinar con bastante precisión, la longitud (distancia desde el punto de suspensión al centro de la masa) no está bien determinada. El error relativo de g es proporcional al error en la determinación de la longitud del péndulo (8):

$$\frac{\varepsilon_g}{g_0} = \frac{\varepsilon_l}{l_0} + 2\frac{\varepsilon_T}{T_0} \quad (8)$$

Pero por otra parte, los incrementos en la longitud del péndulo se miden con un error tan pequeño como sea el de la escala graduada de que se dispone, ya que en esta medida no influye la posición del centro de masa de la pesa. Sea $l = l_0 \pm \varepsilon_l$ donde l_0 es una longitud cualquiera, entonces:

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{l + l_0}{g}\right) = \frac{4\pi^2}{g} l + \frac{4\pi^2 l_0}{g} \quad (9)$$

Y a partir de la pendiente de la recta de T^2 vs. l (9), igual a

$$p = pendiente = \frac{4\pi^2}{g} \quad (10)$$

se puede calcular el valor de g (ver Ec. 11)

$$g = \frac{4\pi^2}{p} \quad (11)$$

Como la constante se puede expresar con tanta precisión como se quiera, el error relativo de g es el mismo de la pendiente (12):

$$\frac{\varepsilon_g}{g_0} = \frac{\varepsilon_p}{p_0} \quad \mathbf{(12)}$$

Con los periodos correspondientes a las distintas longitudes del punto anterior, considerando siempre pequeñas amplitudes, tabular los resultados con los errores correspondientes en una tabla. Ver Tabla 3.4 de la sección 3.

Representar gráficamente T^2 vs. l, calcular la pendiente y su error mediante el método grafico para, a partir de la pendiente, obtener le valor de g con su error.

2.5 Estudio de la dependencia del periodo con la longitud.

A partir de la ecuación (4) queda evidenciada la dependencia del periodo de oscilación de un péndulo con la longitud del hilo y el valor de la gravedad.

Para estudiar la dependencia con la longitud tomar los siguientes valores 11, 10, 9, 8 y 7 cm. Asumiendo el valor de g = 9,7949 y despreciando el error respecto al de la longitud, hallar el periodo en cada caso con su error.
Repetir lo realizado con el valor de g calculado en los puntos 2.3 y 2.4 con su error.
Ver la presentación de los datos en las tablas 5.1; 5.2 y 5.3 de la sección 3.5.

3- RESULTADOS

3-1 Estudio de la independencia del periodo con la amplitud.

Consignar en la tabla 1 los resultados obtenidos.

Tabla 1: Valores de la amplitud y su periodo, con su error, para diferentes amplitudes

Amplitud θ (°)	ε_θ (°)	Tiempo Δt (s)	ε_t (s)	Número de oscilaciones n	Periodo T (s)	ε_T (s)
5						
10						
15						
20						
25						
30						

Con los datos experimentales obtenidos graficar el periodo T (ordenadas) vs. la amplitud (abscisas). Sobre esta misma grafica representar en una forma que sea distinguible, los valores teóricos del periodo calculados a partir de la fórmula (5).

Gráfico 1: **T vs. θ**

(No olvidar colocar leyenda bajo el gráfico y unidades en los ejes).

3-2 Estudio de la independencia del periodo con la masa del péndulo

Tabla 2: Valores de la masa y periodo para la misma longitud

masa m (kg)	ε_m (kg)	Tiempo Δt (s)	ε_t (°)	Número de oscilaciones n	T (s)	ε_T (s)

Con los datos experimentales obtenidos verificar la independencia del periodo de oscilación con la masa de la partícula. (4).

Gráfico 2: **Período (T) vs. masa (m)**

(No olvidar colocar leyenda bajo el gráfico y unidades en los ejes).

3-3 Determinación del valor de la aceleración de la gravedad con un péndulo simple

Tabla 3: Determinación de la aceleración a partir de la longitud y del periodo de un péndulo simple.

	longitud l_0 (m)	ε_l (m)	Tiempo Δt (s)	ε_t (°)	Número de oscilaciones n	Periodo T (s)	ε_T (s)	Aceleración de la gravedad g (m/s^2)	ε_g (m/s^2)
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

Promedio									

Utilizando la formula (11) expresar el valor hallado para la aceleración de la gravedad:

$$g = g_0 \pm \varepsilon_g$$

3-4 Determinación del valor de la aceleración (método gráfico)
Comparar el resultado obtenido con lo analizado en el punto 3.3.

Tabla 4: Determinación de la aceleración usando la pendiente de T^2 vs. l

	longitud l (m)	**ε_l (l)**	**Periodo T (s)**	**ε_T (s)**	**T^2 (s^2)**	**$\varepsilon(T^2)$**
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Gráfico 3: **T^2 vs. l**

(No olvidar colocar leyenda bajo el gráfico y unidades en los ejes).

Utilizando la formula (11) expresar el valor hallado para la aceleración de la gravedad:

$$g = g_0 \pm \varepsilon_g$$

3.5 Estudio de la dependencia del periodo de oscilación con la longitud del péndulo.
Tabla 5. 1: Determinación del periodo de un péndulo para diferentes longitudes usando un valor dado de g.

longitud l (cm)	**ε_l (cm)**	**Aceleración de la gravedad**	**ε_t (°)**	**Periodo T (s)**	**ε_T (s)**
11		9,7949			
10		9,7949			
9		9,7949			
8		9,7949			
7		9,7949			

Tabla 5.2: Determinación del periodo de un péndulo para diferentes longitudes usando el valor hallado de g en el punto 2.3

longitud l (cm)	εl (cm)	Aceleración de la gravedad	εt (°)	Periodo T (s)	εT (s)
11		La hallada en el punto 2.3			
10					
9					
8					
7					

Tabla 5.3: Determinación del periodo de un péndulo para diferentes longitudes usando el valor hallado de g en el punto 2.4.

longitud l (cm)	εl (cm)	Aceleración de la gravedad	εt (°)	Periodo T (s)	εT (s)
11		La hallada en el punto 2.4			
10					
9					
8					
7					

4-DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se discute en este apartado cada una de las partes analizadas por separado.

4-1 Estudio de la independencia del periodo con la amplitud

A partir del grafico obtenido indicar claramente las conclusiones que se obtienen comparando los datos experimentales entre sí y con los valores teóricos.
¿Qué valore de masa conviene elegir, es indistinto? ¿Cómo se midió la amplitud? ¿Qué aproximación hace? Para obtener la amplitud, ¿qué conviene medir: el ángulo o el desplazamiento horizontal?
¿Cuántos periodos tomaría para reducir el error de la medición de tiempo? ¿Por qué tiene no se usa sólo un periodo? ¿Existe algún limite superior o cuantos más periodos midamos mejor es? Elija un criterio para decir qué cantidad de oscilaciones conviene medir justificando su elección. ¿Cómo midió la longitud del péndulo? El péndulo utilizado en la práctica ¿corresponde al modelo del péndulo teórico ideal? ¿Cómo lo mejoraría?

4.2 Estudio de la independencia del periodo de oscilación con la masa del péndulo

Con los datos experimentales obtenidos concluir la independencia del periodo de oscilación con la masa de la partícula (4). ¿Era este hecho evidente a priori? Pedir los datos de otros grupos y comparar con los propios. ¿Conviene elegir una amplitud grande o chica? ¿Por qué?

4-3 Determinación del valor de la aceleración de la gravedad con un péndulo simple
A partir de los resultados de la tabla 3, dar el valor de la aceleración con su error (7) y compararlo con el valor en la coordenada de latitud y longitud correspondiente a la posición de Buenos Aires:

Buenos Aires, Argentina 9,7949 (latitud: 34° 37' S: Longitud: 58° 22' O altura=0)

4-4 Determinación del valor de la aceleración (método gráfico)
Comparar y discutir qué método es el mejor de los estudiados.
En las conclusiones deben incluirse las dificultades que tuvieron al realizar la práctica, las fuentes de error, mejoras a la práctica y ventajas y desventajas de los métodos y dispositivos utilizados.

4.5 Estudio de la dependencia del periodo de oscilación con la longitud del péndulo.
Al variar la longitud hay que mantener la amplitud y la masa constantes. Indicar cómo hizo para mantener la amplitud constante.¿ soltaría la masa desde un mismo ángulo o desde una misma distancia horizontal? ¿Qué cambia? Es lo mismo medir la amplitud en grados o en radianes? La expresión (4) supone una hipótesis para ser usada, ¿puede enunciar la misma?

5. REFERENCIAS

Confeccionar un informe, siguiendo el modelo de presentación de informes dado en el archivo correspondiente.

Bibliografía sugerida (si correspondiese): Básica de la materia.
Básica

- Resnick, Robert y Halliday, David y Krane, Kenneth S.. Física; 3a ed. en español México, D.F. : CECSA,1998.Código de Biblioteca: 53/R442a.
- Sears, Francis W. y Zemansky, Mark W. y Young, Hugh D., Física universitaria; 6a ed. en español Delaware: Addison Wesley Iberoamericana, 1988. xxi, 1110 p. Código de Biblioteca: 53/S566b.
- Alonso, Marcelo y Finn, Edward J.. Física; . Buenos Aires, Addison Wesley Iberoamericana, 1992.969 p, Código de Biblioteca: 53/A459a.

Complementaria

- Tipler, Paul Allen. Física para la ciencia y la tecnología; 4a ed. Barcelona: Reverté, 2001.