Álgebra matricial

Para resolver los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de matriz, las operaciones entre matrices (suma, producto), producto de un escalar por una matriz así como también la definición de matriz traspuesta, traza de una matriz, cálculo y propiedades del determinante de una matriz, la definición y cálculo de la inversa de una matriz.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \Re^{2x3}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \Re^{3x2}$ realizar, si es posible, las siguientes operaciones:

a. 2A
b. A + B
c. $A + B^T$
d. $A^T - 3B$
e. AB. Calcular tr(AB)
f. BA Calcular tr(BA)

2. Sean A y B matrices cuadradas de orden tres cuyos elementos son $a_{ij} = 2i - j$, $b_{ij} = -3 + i + j$

a. Escribir en forma explícita las matrices A y B.
b. Calcular AB y BA. ¿Es cierto que el producto de matrices es conmutativo?
c. Probar que, en este caso, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

3. Calcular los valores de x, y de modo tal que se verifique la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 3x & 2 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

a. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

5. Determinar los valores de k $\in \Re$ para los cuales det(A) = 0, siendo $A = \begin{pmatrix} 3k & 1 & 2 \\ 0 & k^2 - 4 & 3 \\ 0 & 0 & k^3 - 2k - 1 \end{pmatrix}$.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ se pide calcular los siguientes determinantes: det(A), $\det(B^T)$, det(AB), det(2A), $\det(A^{10})$, $\det(A^5B - A^5)$.

7. Sea A la matriz dada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Sabiendo que det(A) = 80, calcular los determinantes de las siguientes matrices.

a. $B = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

c. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{8}a_{32} & \frac{1}{2}a_{33} \\ a_{21} & \frac{1}{4}a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & \frac{1}{4}a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ d. $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+2a_{21} & a_{12}+2a_{22} & a_{13}+2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$

8. i. Decidir si las siguientes matrices son inversibles.
ii. En caso afirmativo, hallar la matriz inversa.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d. $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

9. Sean A y B las matrices del ejercicio 6. Hallar todas las matrices $X \in \Re^{3x3}$ tales que verifican cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

i. AX = B
ii. XA = 4A + 2B

10. a. Demostrar que si A es una matriz inversible, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
b. Demostrar que si A es una matriz inversible de orden n y B es una matriz de orden n, $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.
c. Demostrar que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es nulo.
d. Demostrar que si A y B son matrices inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
e. Demostrar que el producto de dos matrices regulares es regular.
f. Demostrar que el producto de matrices singulares es singular.
g. Demostrar que la suma de matrices singulares no necesariamente es singular.
h. Demostrar que la suma de matrices regulares no necesariamente es regular.
i. Demostrar que el producto de una matriz cualquiera por una matriz singular es una matriz singular.

11. a. Si A, B y C $\in \Re^{3x3}$ tales que det(A) = -3, B = $\frac{1}{2}A^{-1}$ y $\det(C^{-1}) = \frac{1}{8}$, calcular $\det(A^2B^TC)$.
b. Sean A, B $\in \Re^{3x3}$. Sabiendo que $-2.\ A^{-1}B^T = I$ (I representa la matriz identidad de orden 3) y que det(A) = -3, hallar el valor de det(B), $\det((4B)^{-1})$ y $\det(4B^{-1})$.
c. Si $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{3}$ y det(AB) = -2, calcular det(B).

Sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales, su clasificación de acuerdo a la cantidad de soluciones, la definición de espacio nulo y un método para su resolución.

12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x+y+z=2 \\ x+3y-w=0 \\ 2x+3z+w=9 \end{cases}$$

Decidir si cada una de las siguientes cuaternas es solución del sistema dado o del sistema homogéneo asociado. Justificar.

a) (2, 2, 1, 0)   b) (1, 1, 2, 4)   c) (0, 0, 0, 0)   d) (-2, -5/3, 10/3, -7)   e) (-1, 1/3, 1/3, 0)

13. Determinar todos los $X \in R^2$ tales que AX = B, con $A \in R^{nx2}$, $B \in R^n$ y clasificar cada sistema de acuerdo a la cantidad de soluciones que posee. Representar gráficamente cada ecuación del sistema e interpretar geométricamente.

a. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

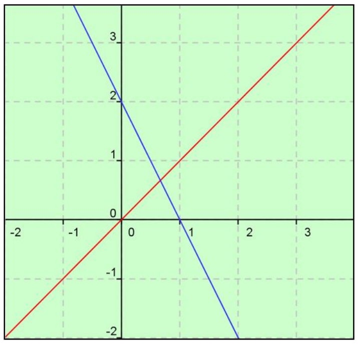
d. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

e. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

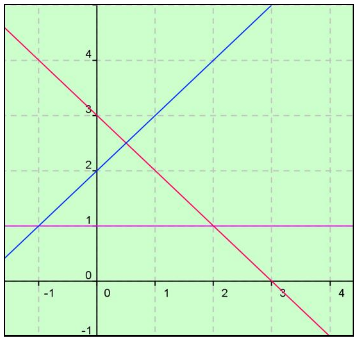
f. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

14. Proponer, siempre que sea posible, una matriz $A \in R^{nx2}$ y una matriz $B \in R^n$ tal que el sistema lineal AX = B, con $X \in R^2$, tenga una interpretación geométrica consistente con los gráficos que se dan a continuación. Hallar, en cada caso, el conjunto solución.

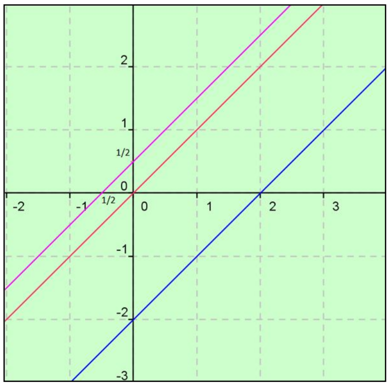
a.



b.



c.



15. i. Determinar todos los X $\in R^m$ tales que AX = B, con A $\in R^{nxm}$, B $\in$ R^n. Clasificar cada sistema de acuerdo a la cantidad de soluciones que posee.
ii. Hallar, en cada caso, el espacio nulo de A. Observar que en los sistemas compatibles las soluciones se obtienen como X = $X_0 + X_N$, donde X_N pertenece al espacio nulo de A y X_0 es una solución particular del sistema AX = B.

a. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

16. Una compañía de transporte de sustancias alimenticias tiene 19 camiones, los cuales son de tres tipos: A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de dos clases de alimentos (tipo I y tipo II).
Los camiones del tipo A pueden transportar dos toneladas del alimento I, los camiones del tipo B pueden transportar una tonelada de cada clase de alimento y los camiones de tipo C pueden transportar una tonelada del alimento I y dos toneladas del alimento II.
La empresa debe transportar 32 toneladas del alimento I y 10 del alimento II. Determinar cuántos camiones de cada tipo se requieren para transportar todo el pedido, suponiendo que cada camión debe ir con la carga completa.

17. Un carpintero ha aceptado el encargo de construir alacenas, escritorios, mesas y sillas. Para ello cuenta con tres máquinas.
Producir una alacena requiere una hora de uso de la máquina uno, dos horas de uso de la máquina dos y una hora de la máquina tres.
Para producir un escritorio, se requieren dos horas de la máquina uno y dos horas de la máquina tres.
Producir una mesa requiere una hora de uso de la máquina uno, una hora de la máquina dos y tres horas de la máquina tres.

Para producir una silla se requieren dos horas de la máquina uno y una hora de la máquina dos.
Determinar cuántas unidades de cada mueble puede fabricar el carpintero en un día de ocho horas, suponiendo que cada máquina se utiliza ocho horas corridas.

18. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \Re^{3x3}$ tal que det(B) = -2. ¿Cuántas soluciones tienen el sistema (BA)X = -BX?

19. Hallar, si existen, los valores de k $\in$ R de modo tal que el siguiente sistema de ecuaciones lineales resulte:

a. compatible determinado
b. compatible indeterminado
c. incompatible

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -x + ky = 0 \end{cases}$$

20. Analizar y clasificar (según su conjunto solución) el sistema de ecuaciones dado para todos los valores reales de k

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ (k^2 - 1)y + (k+1)z = 1 \\ kx + (k^2 + 2)y + z = 2 \end{cases}$$