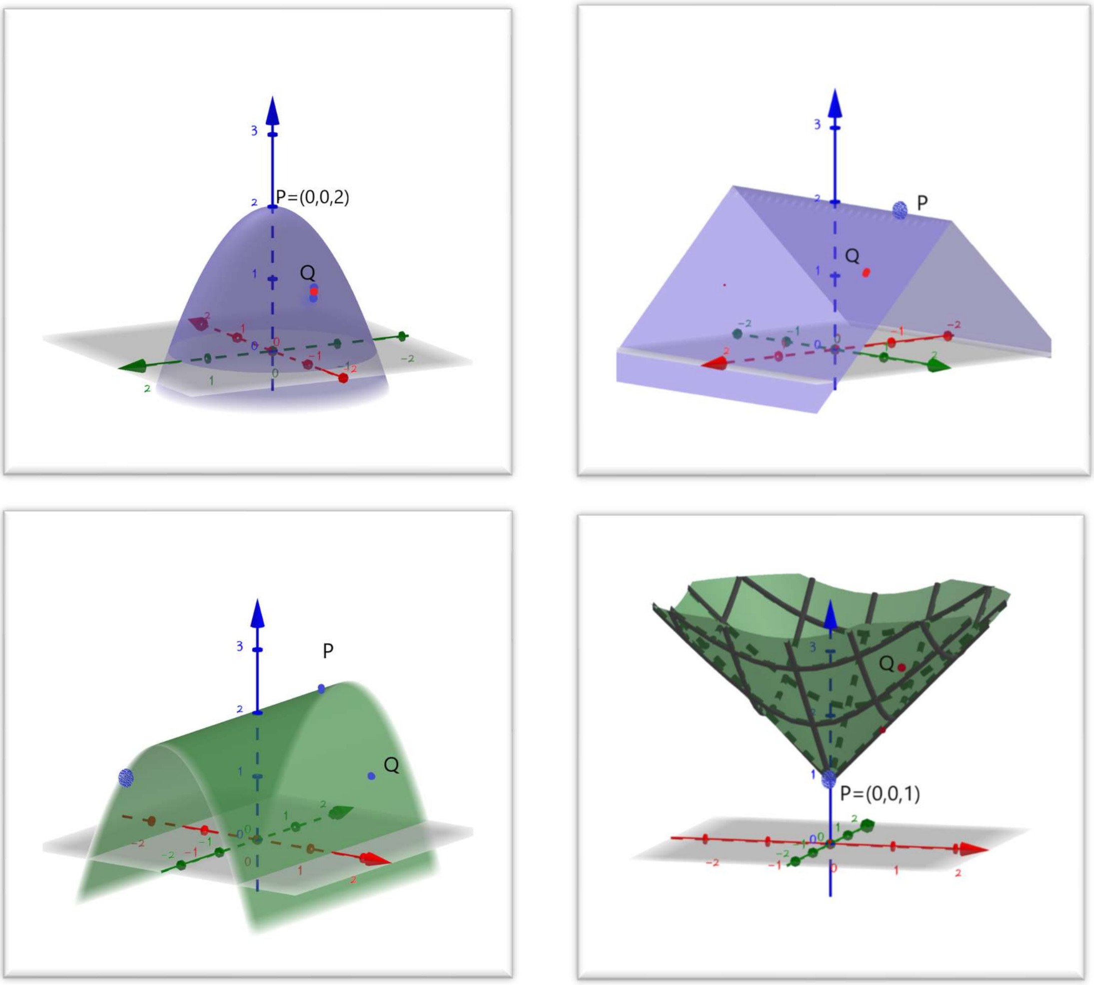
i. Diferencial y plano tangente

1. Se presentan a continuación los gráficos de algunos campos escalares $z = f(x\ y)$. Decidir cuáles de ellos admiten plano tangente en los puntos $P = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) y\ Q = (x_1, y_1, f(x_1, y_1))$. ¿En qué casos el plano tangente es horizontal?



2. a. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de los siguientes campos escalares en el punto (x_0; y_0; $F(x_0; y_0)$)

i. $F(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy \qquad en\ (x_0; y_0) = (1; 1)$

ii. $G(x; y) = 2yx^y \qquad en\ (x_0; y_0) = (1; -1)$

iii. $H(x; y) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad en\ (x_0; y_0) = (3; 4)$

b. Utilizar las ecuaciones obtenidas en a) para hallar un valor aproximado de

$$F(1{,}01; 0{,}98), G(1{,}01; -0{,}98), \quad H(2{,}9; 4{,}01)$$

3. Un envase metálico cerrado tiene la forma de cilindro circular recto con una altura de 10 cm y un radio 2 cm. El costo del metal es de 50 pesos por cm^2. Estimar mediante diferenciales el costo total del envase si se incrementa en 0,1 cm el valor de la altura y en 0,02 cm la medida del radio.

4. La presión P (expresada en Kilopascales), el volumen V (en litros) y la temperatura T (en grados Kelvin) de un mol de gas ideal están relacionados por la expresión $PV = 8{,}31T$. Calcular aproximadamente el cambio que se produce en la presión cuando la temperatura aumenta de 300K a 300,1K y el volumen se incrementa de 100L a 99,8L.

5. Sea el campo escalar $F(x;y) = \ln(xy - x + 1).\ \sqrt[4]{-9 + x^2}$

a. Hallar gráfica y analíticamente su dominio.
b. Hallar un valor aproximado de $F(5{,}02; 1{,}01)$ mediante una aproximación lineal.

6. Si $z = -4x + y - 4$ es la ecuación del plano tangente a la gráfica de un campo escalar F en el punto $P = (-1; 2; F(-1; 2))$, determinar la expresión de $dF(-1, 2)$.

7. Sea $dF = (2xy + 6x^2y^2)\Delta x + (x^2 + 4x^3y - 1)\Delta y$ la expresión del diferencial de un campo escalar F. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el punto $P = (-1; 1; 5)$. (*)

8. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie (gráfica del campo escalar F), determinada por $z = F(x; y)$

a. $F(x; y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ en el punto correspondiente a $P_0 = (-3; 1)$

b. $F(x; y) = x^2y^3$ en el punto $P = (-1; 1; 1)$

c. $F(x; y) = 2\,cos(x - y) + 3\,sen(x)$ en el punto correspondiente a $P_0 = (\pi; \frac{\pi}{2})$

9. Para cada una de las siguientes superficies hallar un vector normal a la superficie en el punto indicado. Representar gráficamente la superficie y el vector.

a. $-x + 2y + 2z - 4 = 0,\ P = (0, 1, 1)$

b. $z = x^2 + (y - 1)^2 + 2,\quad P = (2, , 1, 6)$

c. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2},\ P = (1, 1\ 2)$

10. Sea $D = \left\{(u, v) \in R^2 : 0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Sea $T: D \to R^3$ el campo vectorial dado por $T(u, v) = (2\cos(v)sen(u), 2\,sen(u)sen(v), 2\cos(u))$

a. Hallar la ecuación cartesiana de la superficie S = Im(T)

b. Dar la ecuación cartesiana del plano tangente a S en $P_0 = (1, 1, \sqrt{2})$ y la ecuación vectorial de la recta normal a S en P_0.

ii. Polinomio de Taylor y Mac. Laurin. Aproximaciones

11. Desarrollar según la fórmula de Taylor hasta segundo orden los siguientes campos escalares.

a. $F(x\,;y) = e^{-x^2-y^2}$ en un entorno de $P_0 = (0;0)$. Hallar un valor aproximado de $F(-0{,}1;0{,}02)$ (*)

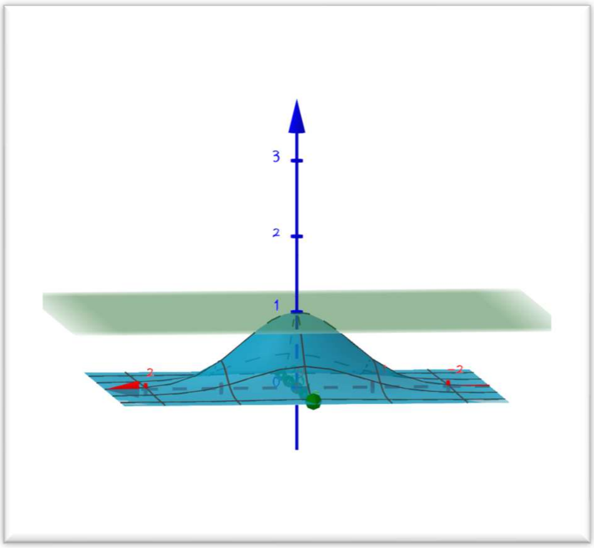


Fig. 1: Gráfico de F y Polinomio de Taylor de orden 1 en un entorno de P

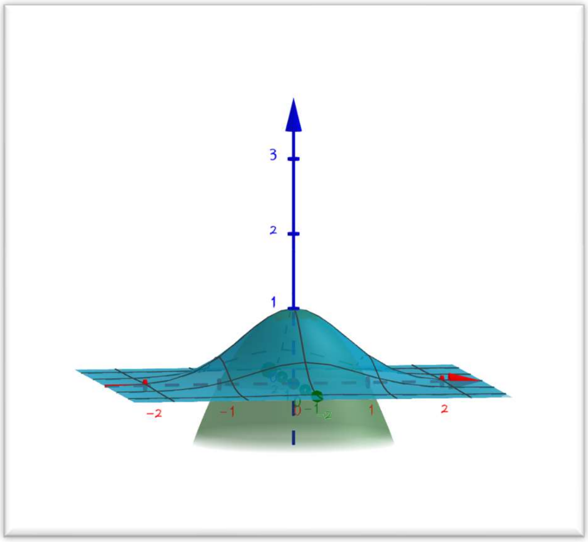


Fig. 2: Gráfico de F y Polinomio de Taylor de orden 2 en un entorno de P

b. $F(x;y) = (x-1)^y$ en un entorno de $P_0 = (2;2)$. Hallar un valor aproximado de $F(2{,}1;1{,}9)$

c. $F(x;y) = x\ln(y)$ en un entorno de $P_0 = (2;1)$. Hallar un valor aproximado de $F(2{,}01;0{,}97)$

12. Utilizar la fórmula de Mac Laurin para aproximar de $F(x;y) = x^3e^y + y\cos(x)$ mediante un polinomio de grado dos.

13. Verificar que en un entorno de $(0;0)$ se cumple:

a. $e^{xy} \cong 1 + yx$

b. $\cos(x)\cos(y) \cong 1 - \frac{x^2+y^2}{2}$

14. ¿Hay diferencia en la aproximación que se logra para una función si se hace utilizando: plano tangente, diferencial total, polinomio de Taylor de primer orden? Justificar.

15. Expresar el polinomio $y^3 - 2xy + x^3$ en potencias de $(x+1)$ e $(y+1)$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 7: Sea $dF = (2xy + 6x^2y^2)\Delta x + (x^2 + 4x^3y - 1)\Delta y$ la expresión del diferencial de un campo escalar F. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el punto $P = (-1; 1; 5)$.

Notemos que el campo escalar F es desconocido. Sin embargo, a partir de la expresión de su diferencial, podemos identificar sus derivadas parciales: $F_x(x; y) = 2xy + 6x^2y^2$, $F_y(x ; y) = x^2 + 4x^3y - 1$- Por otro lado, como el punto P pertenece a la gráfica de F, tenemos que $F(-1, 1) = 5$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el punto $P = (-1, 1, 5)$ es:

$$z = F_x(-1, 1)(x + 1) + F_y(-1, 1)(y - 1) + 5$$

Dado que $F_x(-1, 1) = 2(-1)1 + 6(-1)^2 1 = 4$, $F_y(-1, 1) = (-1)^2 + 4(-1)^3 1 - 1 = -4$, la ecuación del plano pedido es

$$z = 4(x + 1) - 4(y - 1) + 5$$

Ejercicio 11, ítem a) Desarrollar según la fórmula de Taylor hasta segundo orden dos el campo escalar

$F(x ; y) = e^{-x^2-y^2}$ en un entorno de $P_0 = (0; 0)$. Hallar un valor aproximado de $F(-0{,}1; 0{,}02)$

La expresión del polinomio de Taylor de orden dos en un entorno del $(0; 0)$ del campo escalar F es

$$P(x; y) = F(0; 0) + F_x(0; 0)x + F_y(0; 0)y + \frac{1}{2}\left[F_{xx}(0; 0)x^2 + 2F_{xy}(0; 0)xy + F_{yy}(0; 0)y^2\right]$$

Tenemos que:

- $F(0; 0) = e^0 = 1$
- $F_x(x; y) = -2xe^{-x^2-y^2}$, $\quad Fx\ (0; 0) = 0$
- $F_y(x; y) = -2ye^{-x^2-y^2}$, $\quad F_y\ (0; 0) = 0$
- $F_{xx}(x; y) = -2e^{-x^2-y^2} + 4x^2e^{-x^2-y^2},$ $\quad F_{xx}(0; 0) = -2$
- $F_{xx}(x; y) = -2e^{-x^2-y^2} + 4y^2e^{-x^2-y^2},$ $\quad F_{yy}(0; 0) = -2$
- $F_{xy}(x; y) = 4xye^{-x^2-y^2}$, $\quad F_{xy}(0; 0) = 0$

La expresión del polinomio entonces es

$$P\ (x; y) = 1 - x^2 - y^2$$

Y se tiene que $F(-0{,}1; 0{,}02) \cong P(-0{,}1; 0{,}02) = 1 - (-0{,}1)^2 - (0{,}02)^2 = 0{,}9896$