1. Verificar que cada una de las siguientes expresiones es solución de la correspondiente ecuación diferencial. Indicar si se trata de una solución particular o de una solución general.

a) $y = 2x^2;\ \ y'\,x = 2y$ b) $y = Ae^{4x}\,;\ \dfrac{dy}{dx} = 4y$

c) $y = Ae^{x} + Be^{-x}\,;\, y''-y = 0$ d) $y = -\dfrac{1}{x^2}\,;\, x^2\,dy + 2xy\,dx = 0$

e) $y = x + 1;\ (y')^3 + xy' = y$ f) $y = A\cos 5x + B\,\mathrm{sen}\,5x;\ y''+25y = 0$

2. Modelo de T. Malthus. La población de una especie varía con una velocidad proporcional a la cantidad de individuos de la población. Inicialmente se tiene una población $x(0) = N_0$. Si luego de 1 hora la población es $x(1)= 2N_0$, determinar la constante de proporcionalidad y el instante en que la población es $5N_0$. Graficar $x = x(t)$.

3. Determinar todas las funciones que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, junto con sus condiciones iniciales, cuando se incluyen. Verificar que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial o el problema de valor inicial (pvi, en adelante), según corresponda. En el caso de un pvi bien planteado, indicar claramente el intervalo en el que la solución está definida.

a) $xyy' = 1 - x^2$ b) $xy'-y = y^2$, $y(1) = -1$

c) $3e^t\mathrm{tg}\,x\,dt + (1 - e^t)\sec^2 x\,dx = 0$ d) $(1 + e^{2t})\,x' + 2xe^{2t} = 0$

e) $t^2(1 + x^2) + 2x\dfrac{dx}{dt} = 0$, $x(0) = 1$ f) $y' = 2x\cos^2 y$, $y(0) = \pi/4$

g) $t^2\,dx + (1-x)\,dt = 0$, $x(0) = 1$

4. Modelo de P. F. Verhulst. En ambientes de recursos restringidos, el modelo postula que la población de una especie varía con una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre una población límite N y la población. Suponiendo que un alumno es portador del virus de la gripe regresa a su escuela, donde hay 800 estudiantes; si la población de engripados sigue el modelo de Verhulst, determinar la cantidad de infectados 6 días después, si se observa que a los 4 días el número de infectados es de 40.

5. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas o reducibles a exactas; verificar que todas las funciones halladas satisfacen la ecuación diferencial y, si corresponde, sus condiciones iniciales.

a) $(2t + x)dt + (2x + t)dx = 0$, $x(0) = 0$. b) $x^{-1}y\,dx + (\ln x + 3y^2)dy = 0$, $y(1) = 1$.

c) $x^{-1}dx + y^{-1}dy = 0$, $y(1) = e$. d) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$

e) $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$ f) $y\,dx - x\,dy - \ln x\,dx = 0$

6. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden o reducibles a ellas; verificar que todas las funciones halladas satisfacen la ecuación diferencial y, si corresponde, sus condiciones iniciales. En los problemas de valor inicial indicar claramente el intervalo I en el que se define la solución y graficarla.

a) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{\cos x}{x^2}$, $y(\pi) = 0$ b) $\dfrac{dx}{dt} + x\ \mathrm{tg}(t) = 2\,\mathrm{sen}\,(t)$, $x(0) = 2$

c) $y'+2y\,\mathrm{cotg}\,x + \cos x = 0$ d) $y'+y\cos x = \cos x\,\mathrm{sen}\,x$, $y(0) = 1$

e) $x(x-1)y' + (1-2x)y - x^2 + x = 0$ f) $t\,x' + (1+t)\,x + e^t = 0$, $x(-1) = 1$.

7. El modelo que interpreta la evolución de una población malthusiana x, en la que se retira una tasa β fija de individuos (por ejemplo por la acción de un antibiótico) es $\dot{x} = \alpha x - \beta$, con $x(0) = x_0$, con α, β, x_0 positivos. Obtener, graficar y analizar las soluciones para todos los valores de los parámetros. En particular, determinar el instante t* en que la población se extingue si $\beta > \alpha x_0$. [Respuesta parcial: $t^* = \alpha^{-1} \ln(\beta/(\beta-\alpha x_0))$].

8. La concentración x de un medicamento inyectado en el flujo sanguíneo puede modelarse mediante el problema de valor inicial $\dot{x} = \alpha - \beta x$, con $x(0) = 0$, con α, β positivos. Determinar y graficar la solución, analizar su comportamiento asintótico. Determinar el instante t* en que alcanza el 90% de la concentración límite. [Respuesta parcial $t^* = (\ln 10)/\beta$].

9. Determinar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, verificando que satisfacen la ecuación diferencial o el problema de valor inicial según el caso. En el caso de un pvi, indicar claramente el intervalo I en el que está definida la función que lo resuelve y graficarla.

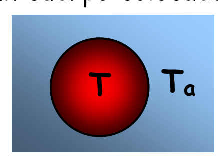
a) $xy'(y-3) = 4y$ b) $2x \ln y\, dx + \dfrac{x^2}{y} dy = 0$, $y(3) = e^2$

c) $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$ d) $(2t^3 + tx^2)\, dt + (t^2 x + 2x^3)\, dx = 0$

f) $(y + 2e^x)dx + (1 + e^{-x})dy = 0$ g) $\operatorname{sen} t\, dx = x \ln x\, dt$, $x(\pi/2) = 1$

10.

Ley de enfriamiento de Newton. La velocidad con la que varía la temperatura T de un cuerpo colocado en un ambiente que se supone a una temperatura constante T_a es proporcional a la diferencia entre T_a y T (La constante de proporcionalidad es k >0). Un termómetro que marca 40°C se coloca en el instante $t_0 = 0$ en un medio con temperatura constante de 20°C; después de 6 minutos, el termómetro marca 30°C. ¿Cuál es la lectura de temperatura en el instante $t_0 = 18$ min?



11. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de orden superior, determinar la solución general o la única solución del problema de valor inicial, según el caso.

a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$ b) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$

c) $\dddot{x} - 5\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$ d) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 5\dot{x} = e^{2t}$

e) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t + e^{2t}$ f) $\dddot{x} - 9\dot{x} = t + e^t$

g) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -2 + \cos(t)$

12. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, obtener la solución general o la solución del pvi, según corresponda.

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 3 \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{pmatrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + 1 \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \ddot{x} - 2x = y - 1 \\ \dot{y} - 1 = -y - 2x \end{cases}$