1. Regiones y nociones elementales. En este ejercicio se revisan algunas nociones elementales en el cuerpo complejo $\mathbb{C}$. Determinar y representar cada uno de los siguientes conjuntos $S \subset \mathbb{C}$. Clasificarlos en términos de *acotado, no acotado, abierto, cerrado, conexo, simplemente conexo*.

a. $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 - 2z + 5 = 0\}$

b. $S = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = i\}$

c. $S = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 16\, i\}$

d. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| = a$, con z_0 complejo, a real positivo, ambos fijos$\}$

e. $S = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + a\, e^{it}$, con z_o complejo, a real positivo, t real variando entre 0 y $2\pi\}$

f. $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(-2iz) \leq 2\mathrm{Im}(z)\}$

g. $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(2i/z) < 1\}$

h. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \leq |z - 2|\}$

i. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 2\,\mathrm{Im}(z)\}$

j. $S = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \pi/4\}$

k. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Re}(z)\}$

l. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = \mathrm{Re}(e^{\frac{2}{1-i}})\}$

m. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta| = k\,|z - \alpha|$, con $\alpha \neq \beta$ dos complejos, k un número real positivo$\}$

n. $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}[(z-1)/(z-i)] = 0\}$

o. $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}[(z-1)/(z-i)] = 0\}$

p. $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(1+z) = |z|\}$

Algunas respuestas parciales: (a) $S = \{z_1 = 1+2i,\ z_2 = 1-2i\}$, es un cerrado acotado no conexo, (b) $S = \{z_1 = e^{i\pi/4},\ z_2 = e^{i5\pi/4}\}$, (c) $S = \{z_1 = 2e^{i\pi/8},\ z_2 = 2e^{i5\pi/8},\ z_3 = 2e^{i9\pi/8},\ z_4 = 2e^{i13\pi/8}\}$, es un cerrado acotado no conexo, (d) Circunferencia centrada en z_o de radio a, es un conjunto acotado cerrado y conexo, pero no simplemente conexo (e) Circunferencia centrada en z_o y radio a, (f) El conjunto $\mathbb{C}$, (g) El exterior del círculo de radio 1 centrado en $z_0 = i$, (h) El semiplano por encima de la bisectriz del primer cuadrante, (i) El interior del círculo de radio 1 centrado en $z_o = i$, (j) La semirrecta bisectriz del primer cuadrante, (k) El eje real, (l) Círculo centrado en $z_o = i$, radio $e\cos(1)$, (m) Si k = 1 es la mediatriz del segmento que une α con β, si $k \neq 1$ es una circunferencia de centro $z_o = (-\alpha + k^2\beta)/|k^2-1|$, y radio $r = k\,|\beta-\alpha|/|k^2-1|$ (es un ejercicio difícil), (n) La recta que pasa por $z_1 = 1$ y $z_2 = i$, excluido el punto $z_2 = i$, no es abierto ni cerrado, es no acotado, no es conexo, (o) La circunferencia que tiene por diámetro el segmento que une $z_1 = 1$ con $z_2 = i$, excluido el punto $z_2 = i$, es acotado no abierto ni cerrado, no conexo, (p) es la parábola de ecuación $y^2 = 2x + 1$, cerrado no acotado, conexo pero no simplemente conexo.

2. Funciones elementales. La resolución de este ejercicio requiere del conocimiento de las definiciones y propiedades de las funciones elementales de variable compleja.

a. Probar que la función exponencial es periódica en $\mathbb{C}$ y hallar su período.

b. Probar que para cualquier complejo z no nulo se cumple que $e^{\ln(z)} = z$, cualquiera sea la rama del logaritmo que se considere, pero que es falso que $\ln(e^z) = z$.

c. Probar que la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = sen(z) no es acotada en $\mathbb{C}$.

d. Hallar los ceros de la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z + 1$ ¿Para algún valor z la función vale –1?

e. Probar que la función lineal f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que w = f(z) = $\alpha\, z + \beta$, con α y β complejos, α no nulo, transforma toda recta en otra recta, toda circunferencia en otra circunferencia, toda elipse en otra elipse, toda hipérbola en otra hipérbola, indicando específicamente cómo se transforman sus elementos.

f. 🔔 Probar que la función inversión f: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ tal que f(z) = $1/(z - z_0)$ transforma toda recta que pasa por z_0 en una recta que pasa por el origen, y a toda circunferencia que pasa por z_0 en un recta que no pasa por el origen. ¿Qué sucede con una recta que no pasa por z_0?

g. Probar que para todo z = x + i y, se verifican las siguientes identidades funcionales.

  i. $\text{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$

  ii. $\cosh^2(z) - \text{senh}^2(z) = 1$

  iii. $e^{iz+\pi i} + e^{z} = 0$ (En particular, para z = 0 es $e^{\pi i} + 1 = 0$)

  iv. $-i\,\text{sen}(i\,z) = \text{senh}(z)$, $-i\,\text{senh}(i\,z) = \text{sen}(z)$

  v. $\cos(i\,z) = \cosh(z)$, $\cosh(i\,z) = \cos(z)$

  vi. $|\text{senh}(z)|^2 = \text{senh}^2(x) + \text{sen}^2(y)$, $|\cosh(z)|^2 = \text{senh}^2(x) + \cos^2(y)$

  vii. $e^z = \cosh(z) + \text{senh}(z)$, $e^{iz} = \cos(z) + i\,\text{sen}(z)$

  viii. $|\text{sen}(z)|^2 = \text{sen}^2(x) + \text{senh}^2(y)$, $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \text{senh}^2(y)$

h. Probar que la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que w = f(z) = z^2, transforma el primer cuadrante en el semiplano superior, y el semicírculo de radio 2 centrado en el origen que queda por encima del eje real, en un círculo completo, centrado en el origen y de radio 4.

i. Determinar la parte real y la parte imaginaria, en las coordenadas (x, y) o (r, θ), según resulte más conveniente, de las siguientes funciones.

  i. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = z^n, con n un número natural cualquiera. En particular, para n = 2, dar las expresiones en coordenadas cartesianas.

  ii. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = sen(z)

iii. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = cos(z)

iv. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = ln(z)

v. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = e^z

vi. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = senh(z)

vii. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = cosh(z)

viii. f: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ tal que f(z) =1/ z

ix. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f(z) = $\bar{z} / z$

j. Resolver las siguientes ecuaciones en la incógnita $z \in \mathbb{C}$.

i. $e^z + i = 0$,
ii. $sh(i\, z) + i = 0$
iii. $e^{2z} + 2\, e^z - 3 = 0$
iv. $\cos(z) = 2$

Algunas respuestas parciales: (a) Alcanza con aplicar la definición de función periódica y resolver la ecuación resultante, para obtener que el período es el número imaginario puro $2\pi i$, (b) Aplicar la definición de las funciones logaritmo y exponencial compleja, (c) Calcular el módulo de f(z) y analizar lo que resulta, (d) Los ceros, $z_k = (2k+1)\pi i$, con k entero; sí existen infinitos valores: $z_k = \ln(2) + (2k+1)\pi i$, (e) Una de las pruebas: una circunferencia de centro en z_o y radio a, de ecuación $|\, z - z_0 | = a$, se transforma por la función $w = \alpha\, z + \beta$ en $|(w-\beta)/\alpha - z_o| = a$, esto es en $|w - \alpha\, z_0 - \beta\, | = a\, |\alpha|$, esto es, se transforma en una circunferencia cuyo centro es $w_o = f(z_o) = \alpha\, z_0 + \beta$, y su radio es a $|\alpha|$, (f) Puede ayudar escribir la ecuación general de la circunferencia, para concluir directamente las afirmaciones. La recta que no pasa por z_0 se transforma en una circunferencia que pasa por el origen (este ejercicio es difícil), (g) Basta aplicar las definiciones, (h) Conviene hacer este ejercicio en coordenadas polares, (i) Sólo damos el primero, $u(r, \theta) = r^n$, $v(r, \theta) = n\theta$, (j) Para (i), es $z_k = (2k - ½)\, \pi\, i$, con k entero, en (ii) es $z_k = (k - ½)\, \pi$, con k entero, en (iii) se tiene una familia doble de soluciones, $z_k = 2\, k\, \pi i$, $z_k = (2k + 1)\, \pi\, i + \ln(3)$, k entero, en (iv) es $z_k = 2k\pi + i\, \ln(2 \pm \sqrt{3})$, k entero.

3. Funciones analíticas. Para resolver este ejercicio es necesario el conocimiento de las condiciones de Cauchy-Riemann (CCR), la definición de derivada, la definición de funciones armónicas y pares de conjugadas armónicas. En todo el ejercicio, llamamos u = Re(f(z)), v = Im(f(z)), $w = u + i\, v$ = f(z)

a. Probar que la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^2 + 2\, z$ cumple las condiciones de CCR en todo el plano complejo y que (u, v) son conjugadas armónicas, calcular la función derivada f ’, por definición.

b. Probar que la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = |\, z\, |^2$ es derivable en $z_0 = 0$ (y por lo tanto cumple allí CCR), pero no es analítica en ningún punto. Hallar su derivada en z_0.

c. Probar que si f es una función analítica en el punto z_0, entonces las curvas de nivel u(x, y) = Re(f(z_0)), v(x, y) = Im(f(z_0)) que pasan por ese punto son allí ortogonales. Comprobar que efectivamente sucede así, en los casos de la función inversión f(z) = 1/ z, y de la función f(z) = z^2, graficando además los conjuntos de nivel u(x, y) = k_1, v(x, y) = k_2.

d. Hallar una función entera $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sabiendo que $\mathrm{Re}(f(z)) = e^{-y}\cos(x) + 2x$; si hubiese más de una, proponer otra. 💻 Si dispone de una aplicación, graficar los conjuntos de nivel $\mathrm{Re}(f(z)) = k_1$, $\mathrm{Im}(f(z)) = k_2$. Verificar analíticamente la ortogonalidad de ambas familias.

e. Hallar una función analítica $f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ sabiendo que $\mathrm{Im}(f(z)) = \ln(x^2 + y^2) + x^2 - y^2$. Verificar analíticamente la ortogonalidad de las familias $u(x, y) = k_1$, $v(x, y) = k_2$.

f. Probar que si la función f se escribe como $f(z) = u(r, \theta) + i\, v(r, \theta)$, las CCR se escriben como $r\, u_r(r, \theta) = v_\theta(r, \theta)$, $-r\, v_r(r, \theta) = u_\theta(r, \theta)$. Determinar el conjunto de puntos en que las siguientes funciones cumplen las CCR.

   i. $f(z) = \ln(z)$
   ii. $f(z) = e^z$
   iii. $f(z) = z^n$, cualquiera sea n entero (en particular, considerar el caso $n = -1$)

g. Determinar una función entera $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{sen}(x)\,[\cosh(y) + \mathrm{senh}(y)]$, y $f(0) = i$

h. Determinar el conjunto de puntos D en los que cada una de las siguientes funciones de variable compleja $z = x + iy$ (o $z = r\, e^{i\theta}$) es derivable, y el conjunto de puntos A en los que es analítica. En los puntos en que es derivable, hallar la derivada.

   i. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (x^2 - y^2) + 2\, i\, x\, y$
   ii. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \bar{z}$
   iii. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \bar{z}\, z + 1$
   iv. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = [\mathrm{Re}(z)]^2$
   v. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z\, \mathrm{Im}(z)$
   vi. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = x^2 - i\, y$

i. Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = u + i\, v = r\, e^{i\theta}$. Probar que si f es analítica y una cualquiera de las funciones u, v, r, θ es constante, entonces la función misma es constante.

j. Hallar, siempre que exista, una función analítica $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = (x^2 + y^2)\, e^x$, tal que $f(0) = i$.

k. Hallar, siempre que exista, una función analítica $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\arg(f(z)) = \theta + r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $f(i\pi) = \pi$

l. Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en un recinto D que no contiene a $z_0 = 0$. Analizar cuál de los siguientes campos escalares es armónico en D: (i) $h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |f(z)|$, (ii) $h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \arg(f(z))$, (iii) $h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|f(z)|$.

m. Probar que si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica, y también lo es su conjugada, entonces f es constante.

n. Sean $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$. Probar que no existe un punto z_0 sobre el segmento que une z_1 con z_2 tal que se verifique $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$. Esto demuestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas[1].

o. Para cada una de las siguientes funciones, definir el dominio D en el que es analítica, y calcular su función derivada.

i. $f(z) = \operatorname{sen}(e^{iz})$
ii. $f(z) = (z^2 + z)^{-1}$
iii. $f(z) = (1 + e^z)^{-1}$

Algunas respuestas parciales: (a) Siendo $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, $v(x, y) = 2xy$, todo es bastante inmediato. $f': \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f'(z) = 2z + 2$, (b) Como $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$, las CCR sólo se cumplen en $z_0 = 0$; la derivada en $z_0 = 0$ es 0, (c) Pista: probar que $\nabla u \perp \nabla u$, con ayuda de las CCR; para los casos específicos, hallar u, v y efectuar el cálculo directo, luego graficar las curvas de nivel, (d) Una $f(z) = e^{iz} + 2z$; otra, $g(z) = f(z) + 3i$, (e) Una función es $f(z) = i \ln(z^2) + i z^2$, (f) La prueba es directa, utilizando la regla de la cadena; los casos son inmediatos, (g) $f(z) = \operatorname{sen}(z) + i \cos(z)$, (h) En ítem (i), es $D = A = \mathbb{C}$, con derivada $f'(z) = 2z$, en ii es $D = A = \phi$, en iii es $D = \{0\}$, $A = \phi$, con $f'(0) = 0$; en (iv) D es el eje imaginario (con derivada nula en él), A es vacío, en (v) es $D = \{0\}$, A vacío, $f'(0) = 0$, en (vi), $D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) = ½\}$, $A = \phi$, en (i) Trabajar con las CCR, (j) $f(z) = i z^2 e^z$, (k) $f(z) = iz\, e^z$, (l) el primero no es armónico, los otros dos sí, (o) El ítem (i) trata de una función entera, $f'(z) = i e^{iz} \cos(e^{iz})$, en (ii) es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto $z_0 = 0$, $z_1 = -1$, su función derivada en ese recinto es $f'(z) = -(2z + 1)(z^2 + z)^{-2}$, en (iii) es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto $z_k = (2k + 1)\pi i$, su función derivada en ese recinto es $f'(z) = -(1 + e^z)^{-2} e^z$

4. Integración en el campo complejo (primera parte). Para resolver este ejercicio es necesario conocer la definición de integral curvilínea de una función de variable compleja f sobre un curva suave por partes γ, parametrizada por $z(t)$ con t un parámetro real en un intervalo I, que se escribe brevemente como $\int_\gamma f(z)\, dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_I f(z(t))\, z'(t)\, dt$, el teorema fundamental del cálculo, el teorema de Cauchy-Goursat, y la fórmula integral de Cauchy.

a. Efectuar el cálculo de la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ para cada uno de los siguientes casos. Cuando la curva sea un lazo frontera de una región, se sobrentiende orientada dejando a la izquierda el recinto.

i.	$f: D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \bar{z}$;	$\gamma: z(t) = a\, e^{it}$, $a > 0$, $t \in [0, \alpha]$	R: $a^2 \alpha\, i$
ii.	$f: D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 1/\bar{z}$;	$\gamma: z(t) = a\, e^{it}$, $a > 0$, $t \in [0, \alpha]$	R: $½ (e^{2i\alpha} - 1)$
iii.	$f: D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 1/z$;	$\gamma: z(t) = a\, e^{it}$, $a > 0$, $t \in [0, \alpha]$	R: $\alpha\, i$
iv.	$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lvert z \rvert$;	$\gamma: z(t) = a\, e^{it}$, $a > 0$, $t \in [0, \alpha]$	R: $a^2 (-1 + e^{i\alpha})$
v.	$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \operatorname{Re}(z)$;	$\gamma: z(t) = (1 - t) + i\, t$, $t \in [0, 1]$	R: $½ (-1 + i)$
vi.	$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \operatorname{Re}(z)$;	$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1 + it, \text{si } t \in [0,1] \\ (2 - t) + i, \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$	R: $-½ + i$
vii.	$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \cos(z)$;	$\gamma: z(t) = t\, e^{it}$, $t \in [0, \alpha]$	R: $\operatorname{sen}(\alpha\, e^{i\alpha})$

[1] Este ejercicio está tomado textualmente del excelente texto Derrick, William. *Variable compleja con aplicaciones.* Primera edición en español [Original 1984, Complex Analysis and Applications]. Traducido por Marco Antonio Rosales. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987, ejercicio 16, p. 39.

viii. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^n$ (n entero), γ: $z(t) = a\, e^{i\,t}$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ R: si $n = -1$, $2\pi i$; 0 en todo otro caso (este resultado y los dos que le siguen como consecuencia son muy importantes).

ix. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-z_0)^n$ (n entero), γ: $z(t) = z_0 + a\, e^{i\,t}$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ R: ídem anterior

x. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-z_0)^n$ (n entero), γ: cualquier lazo simpl que encierre z_o R: ídem anterior

xi. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = |z|\ \bar{z}$; γ: la frontera del semicírculo superior de radio 1 centrado en el origen, recorrido en sentido positivo. R: $\pi\, i$

xii. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$; γ: $|z| = 1$ R: $2\pi\, i$

xiii. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 3\, z^2$; γ: el segmento orientado entre i y 1 R: $1 + i$

xiv. f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^{30}\, \mathrm{sen}^{12}(z)\, e^{z\,i}$; γ: $|z-\pi| = 3!$ R: 0

xv. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z^2 + 2z + 1)^{-1}$; γ: $|z+1| = 1$ R: 0

xvi. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}$; γ: $|z| = e$ R: $\pi/5$

xvii. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^4}$; γ: $|z| = a > 0$ R: 0

xviii. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3+z}$; γ: $|z| = a$, $a = ½ , 2$ R: si $a = ½$, $2\pi i$; si $a = 2$, $2\pi\, i\, (1-\cosh(1))$

xix. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z-1)^3}$; γ: $z(t) = ½ + 3\, e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ R: $-\, i\, \pi\, \mathrm{sen}(1)$

xx. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{\mathrm{sen}(\pi z)}{(z^2-1)^2}$; γ: $|z-1| = 1$ R: $-\, i\, \pi^2/2$

xxi. f: $D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$; γ: $|z| = 2$ R: $(e^{2\pi} - 1)\, i$

5. Series en el cuerpo complejo. Este ejercicio requiere como conocimientos previos las definiciones de series numéricas y series de potencia (en particular, geométricas), las nociones de radio de convergencia (uniforme), los criterios de convergencia (en particular D'Alembert), las definiciones y propiedades de las series de Taylor y Laurent.

a. Decidir acerca de la convergencia de cada una de las siguientes series numéricas.

i. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+2i)^n}{3^n}$ R: CV

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{(1-2i)^n}$ R: DV

iii. $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2}{3i}\right)^n$ R: CV

iv. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(in)^n}{3^n n!}$ R: CV

v. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(in)^{2n}}{3^n (2n)!}$ R: CV

vi. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n}$ R: DV

b. Para cada una de las siguientes series de potencia, determinar el centro z_0 y el radio de convergencia r_0. Indicar, cuando resulte directo, a qué función convergen, esto es la expresión de la función f a la que la serie converge uniformemente, esto es f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $D = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r_0\}$. Si resulta CV en todo el plano complejo, escribimos $r_o = \infty$.

i. $\sum_{n=0}^{\infty} (z)^n$ R: $z_o = 0$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(1-z)$

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, z)^n$, $\alpha \neq 0$ R: $z_o = 0$, $r_o = 1/|\alpha|$, $f(z) = 1/(1-\alpha z)$

iii. $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, z + \beta)^n$, $\alpha \neq 0$ R: $z_o = -\beta/\alpha$, $r_o = 1/|\alpha|$, $f(z) = 1/(1-\alpha z-\beta)$

iv. $\sum_{n=0}^{\infty} (z + 1 - i)^n$ R: $z_o = -1 + i$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(i-z)$

v. $\sum_{n=0}^{\infty} (-z - 1 + i)^n$ R: $z_o = -1 + i$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(z+2-i)$

vi. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\, z^n$ R: $z_o = 0$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(1-z)^2$

vii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n\, z^{n-1}$ R: $z_o = 0$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(1+z)^2$

viii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(inz)^n}{3^n n!}$ R: $z_o = 0$, $r_o = 3/e$

ix. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ R: $z_o = 0$, $r_o = \sqrt{2}$, $f(z) = (1-i)/(1-i-z)$

x. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{in}\right)^n$ R: $z_o = 2i$, $r_o = \infty$

xi. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (z - i)^n$ R: $z_o = i$, $r_o = 1/3$

xii. 🔔 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!} z^n$, con N natural mayor que 1[2] R: $z_o = 0$, $r_o = 1$, $f(z) = 1/(1-z)^N$

c. Probar que cada una de las siguientes funciones f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $D = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r_0\}$ tienen el desarrollo de Taylor indicado, alrededor de z_0, con el radio de convergencia r_0.[3]

i. $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ CV en $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

[2] Este potente ejercicio, que resuelve de modo general el problema del desarrollo de las potencias negativas de $(1-z)$, se prueba teniendo en cuenta que las series de potencia pueden ser derivadas término a término. Está tomado del muy buen texto Wunsch, David. Complex variables with applications. Segunda edición. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Publishing Company, 1994, excercise 3, p.258. El ejercicio (vi) es un caso particular de este resultado, con N = 2.

[3] La segunda de las igualdades se lee en el sentido de la convergencia (uniforme) en todos los puntos de un disco cerrado contenido en el disco D.

ii. $f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z-1| < 1\}$

iii. $f(z) = \frac{1}{\alpha z + \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{\beta^{n+1}} z^n, con\ \alpha, \beta \neq 0$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < |\beta/\alpha|\}$

iv. $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \infty\}$

v. $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} e^i \frac{(z-i)^n}{n!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z-i| < \infty\}$

vi. $f(z) = \operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \infty\}$

vii. $f(z) = \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \infty\}$

viii. $f(z) = \operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \infty\}$

ix. $f(z) = \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < \infty\}$

x. $f(z) = \frac{1}{a^2+z^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{z}{a})^{2n}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < |a|\}$

xi. $f(z) = \operatorname{arctg}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

xii. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

xiii. $f(z) = \ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

xiv. $f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

xv. $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$ CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$

d. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de cada una de las siguientes funciones f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, alrededor del punto z_0 indicado, estableciendo el disco de convergencia.

i. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z-1| < 1\}$

ii. $f(z) = \frac{1}{3-2z}$, $z_0 = 3$ R: $f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^n} (z-3)^n$, CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z-3| < 3/2\}$

iii. $f(z) = e^{3z}$, $z_0 = i$ R: $f(z) = e^{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-i)^n}{n!}$, CV en D = $\{z \in \mathbb{C}: |z-i| < \infty\}$

iv. $f(z) = \operatorname{sen}(z)$, $z_0 = \pi/2$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z-\pi/2| < \infty$}

v. $f(z) = \int_0^z e^{(t^2)}dt$, $z_0 = 0$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z| < \infty$}

vi. $f(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$, $z_0 = 0$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z| < \infty$}

vii. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$ R: $f(z) = \frac{1}{3} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z-1| < 3$}

viii. $f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$, con $0 < |\alpha| < |\beta|$, $z_0 = 0$ R: $f(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(\alpha\beta)^{n+1}}z^n$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z| < |\alpha|$}

e. Desarrollar en serie de Laurent en un entorno reducido de $z_0 = 0$ cada una de las siguientes funciones f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, indicando la zona de convergencia.

i. $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2}$ R: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < \infty$}

ii. $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)-z}{z^3}$ R: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < \infty$}

iii. $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$ R: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < \infty$}

iv. $f(z) = z^3 e^{(1/z)}$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < \infty$}

v. $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < 1$}

vi. $f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}$ R: $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < 1$}

vii. $f(z) = \frac{1}{z^4\,(1+z)^2}$ R: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,z^{n-5}$, CV en D = {$z\in\mathbb{C}$: $0 < |z| < 1$}

f. Efectuar todos los desarrollos en serie alrededor de $z_0 = 0$, indicando la zona de convergencia de cada uno de ellos, de la función f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$.

R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n-1})\,z^n$, convergente en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z| < 1$}; $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n$, convergente en D = {$z\in\mathbb{C}$: $1 < |z| < 2$}, y finalmente $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\,z^{-n-1}$, en la zona D = {$z\in\mathbb{C}$: $2 < |z|$}

g. Efectuar todos los desarrollos en serie alrededor de $z_0 = 0$, indicando la zona de convergencia de cada uno de ellos, de la función f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$.

R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+2^{-n-1})\,z^n$, convergente en D = {$z\in\mathbb{C}$: $|z| < 1$}; $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n$, convergente en D = {$z\in\mathbb{C}$: $1 < |z| < 2$}, y finalmente $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)\,z^{-n}$, en la zona D = {$z\in\mathbb{C}$: $2 < |z|$}

h. Efectuar el desarrollo en serie en la corona $0 < |z-1| < 2$, de la función f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$.

R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1}$

i. Efectuar todos los desarrollos en serie alrededor de $z_0 = 1$ de la función f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z}$.

R: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-2}$ en $\{z\in\mathbb{C}: 0 < | z-1 | < 1\}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-(n+3)}$ en $\{z\in\mathbb{C}: 0 < | z-1 |\}$

6. Puntos regulares, singulares, ceros y residuos. Este ejercicio requiere como conocimientos previos la definición de puntos regulares y singulares, la definición de ceros de funciones de variable compleja, la clasificación de puntos singulares aislados (evitables, polos, esenciales), la definición de residuo y algunos resultados que permiten aliviar su cálculo. En todos los casos el análisis se extiende al plano complejo completo $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty_{\mathbb{C}}\}$.

a. Determinar y clasificar todos los puntos singulares (incluyendo $\infty_{\mathbb{C}}$) de cada una de las funciones f: $D \subset \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Indicar además los ceros de la función, cuando los tenga. Justificar las respuestas.

i. $f(z) = \frac{1}{z+z^3}$ R: 0, $\pm$i son polos simples, $\infty_{\mathbb{C}}$ es un punto regular (cero de orden 3).

ii. $f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$
R: 0 es un cero cuádruple, $z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$ con k = 0, 1, 2, 3 son polos simples, $\infty_{\mathbb{C}}$ es un punto regular.

iii. $f(z) = z + \frac{1}{z}$ R: 0, $\infty_{\mathbb{C}}$ son polos simples; i, -i son ceros simples

iv. $f(z) = \frac{e^z(z+i)}{(z^2+1)^2}$ R: –i es polo simple, i es polo doble, $\infty_{\mathbb{C}}$ es una singularidad esencial

v. $f(z) = \frac{e^{\left(\frac{1}{z}\right)}}{z^3}$ R: 0 es una singularidad esencial, $\infty_{\mathbb{C}}$ es un punto regular (cero triple)

vi. $f(z) = \frac{z}{1+e^z}$
R: 0 es un cero simple, $z_k = (2k+1)\pi$ i, con k entero son polos simples, $\infty_{\mathbb{C}}$ es una singularidad no aislada (es un punto de acumulación de polos).

vii. $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)-z}{z^4}$ R: 0 es un polo simple, $\infty_{\mathbb{C}}$ es una singularidad esencial

viii. $f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$
R: 0 es un polo doble, $2k\pi$ i, con k entero no nulo, polos simples, $\infty_{\mathbb{C}}$ es una singularidad no aislada (es punto de acumulación de polos).

ix. $f(z) = \frac{e^z}{z^5(2-\cos(z))}$
R: 0 es polo quíntuple, $z_k = 2k\pi + \ln(2 \pm\sqrt{3})$, k entero son polos simples, $\infty_{\mathbb{C}}$ es un punto de acumulación de polos (esto es, una singularidad no aislada).

b. Calcular el residuo en cada una de las singularidades aisladas de las siguientes funciones f: $D \subset \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, incluyendo el $\infty_{\mathbb{C}}$ en los casos en que no sea un punto de acumulación de singularidades.

i. $f(z) = \frac{z}{z}$ R: R(f, 0) = R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 0$.

ii. $f(z) = \frac{2}{z^3 - z^5}$ R: R(f, ±1) = –1, R(f, 0) = 2, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 0$.

iii. $f(z) = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$ R: R(f, i) = –i, R(f, –i) = 1, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 0$.

iv. $f(z) = 6\, z^2\, \text{sen}(\frac{1}{z})$ R: R(f, 0) = –1, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 1$.

v. $f(z) = z^{77}\, \text{sen}(\frac{1}{z})$ R: R(f,0) = R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 0$.

vi. $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 3z^2}$ R: R(f, 3) = $e^3/9$, R(f, 0) = –4/9, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= (4 - e^3)/9$.

vii. $f(z) = \frac{z}{\text{sen}\,(z)}$ R: R(f, kπ) = $(-1)^k$ kπ, k entero.

viii. $f(z) = 2z^3 e^{(1/z^2)}$ R: R(f,0) = 1, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= -1$.

ix. $f(z) = 2(z-1)e^{(1/z)}$ R: R(f,0) = –1, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 1$.

x. $f(z) = \frac{z}{\text{senh}\,(z)}$ R: R(f, kπi) = $(-1)^k$ kπi, k entero.

xi. $f(z) = \frac{3z^4}{z^2 - iz + 2}$ R: R(f, –i) = i, R(f, 2i) = –16i, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 15$i.

xii. $f(z) = \frac{16}{(z^4-1)^2}$ R: R(f, 1) = –3, R(f, –1) = 3, R(f, i) = –3i, R(f, –i) = 3i, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= 0$.

xiii. $f(z) = \frac{\text{sen}(2z)}{(z+1)^3}$ R: R(f, –1) = 2 sen(2), R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= -2\,\text{sen}(2)$.

xiv. $f(z) = e^z e^{(1/z)}$ R: R(f, 0) = – R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.

xv. 🔔 $f(z) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ R: R(f, 1/kπ) = $-(-1)^{k+1}/k^2\pi^2$, k entero no nulo; R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6}$.

xvi. $f(z) = \frac{e^{\left(\frac{1}{z}\right)}}{1-z}$ R: R(f, 0) = e –1, R(f, 1) = –e, R(f, $\infty_{\mathbb{C}}$) $=1$.

7. Integración en el campo complejo (segunda parte). La resolución de este ejercicio requiere movilizar los conocimientos derivados del teorema de los residuos. En todos los casos, se trata de calcular la integral de la función f: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a lo largo de un lazo simple regular por partes γ. Cuando el lazo se indica como $|z - z_o| = r$, debe sobrentenderse recorrido en sentido positivo una vez.

a. $\int_\gamma \frac{e^{(-z^2)}}{\text{sen}\,(2z)}dz$, γ: $z(t) = e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$ — R: πi

b. $\int_\gamma \frac{e^z}{z^3-z}\,dz$, γ: $|z - ½| = 1$ — R: $\pi i\,(e - 2)$

c. $\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}dz$, γ: $z(t) = r\,e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, con r = ½ , r = 2 — R: si r = ½ , 0; si r = 2, $2\pi i\,(1-e^{-1})$

d. $\int_\gamma \frac{e^z}{\cos\,(\pi z)}dz$, γ: $z(t) = e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$ — R: $-4i\,\text{senh}(½)$

e. $\int_\gamma \frac{tg(z)}{z^3}\,dz$, γ: $z(t) = r\,e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, con r =1, r = 2, r=7 — R: si r = 1, 0; si r =2, 0 si r = 7, 0

f. $\int_\gamma \frac{tg(\pi z)}{z^3}dz$, γ: $z(t) = e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$ — R: 0

g. $\int_\gamma \frac{\text{sen}(\frac{1}{z})}{z-1}dz$, γ: $z(t) = r\,e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, con r = ½ y r = 2 — R: si r = ½ , $2\pi i$ sen(1); si r = 2, 0

h. $\int_\gamma \frac{\text{sen}\,(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$, γ: $z(t) = 2\cos(t) + i\,\text{sen}(t)$, $t\in[0, 2\pi]$ — R: $-\pi^2 i$

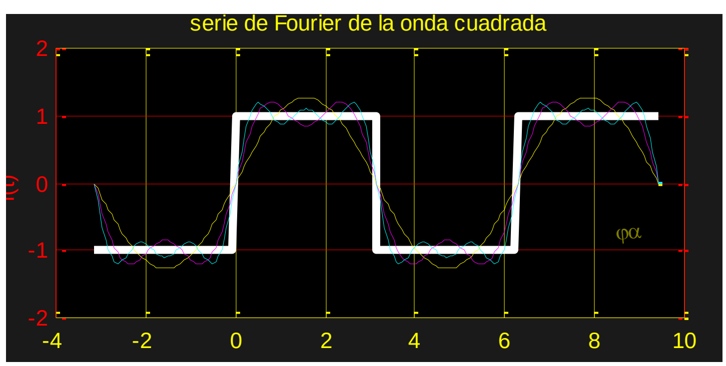
i. $\int_\gamma \frac{e^z-1}{\text{sen}\,(z)}\,dz$, γ: $|z| = 1$ — R: 0

j. $\int_\gamma \frac{\text{sen}\,(z)}{\text{senh}^2(z)}\,dz$, γ: $|z| = 3$ — R: $2\pi i$

k. $\int_\gamma \frac{z+\alpha}{z+\beta}\,z^{-n}dz$, γ: $|z| = 1$, $|\beta| > 1$, $n\in\mathbb{N}$ — R: $(-1)^{n+1}\frac{2\pi i(\alpha-\beta)}{\beta^n}$, n>1 (¿y con n=1?)

8. Series de Fourier. Este ejercicio comprende el conocimiento de la definición de las series de Fourier en su forma trigonométrica y compleja, sus propiedades de convergencia, identidad de Parseval, y espectros de frecuencia.

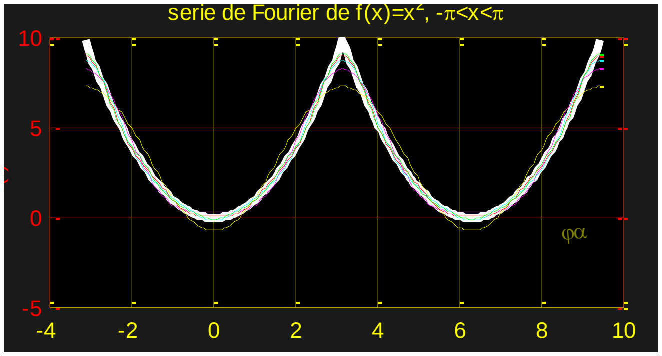
a. Probar la ortogonalidad respecto del producto interno $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$, del sistema fundamental de funciones trigonométricas S = {1, cos(nx), sen(nx)} en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y utilizarlo para deducir las expresiones de los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier. Probar además que los coeficientes de Fourier de la función $f = \alpha f_1 + f_2$ son $a_n = \alpha a_{1n} + a_n$, $b_n = \alpha b_{1n} + b_n$, si a_{1n}, b_{1n} son los coeficientes de Fourier de la función f_1 y a_{2n}, b_{2n} son los coeficientes de Fourier de la función f_2, siendo α un escalar. R: πi

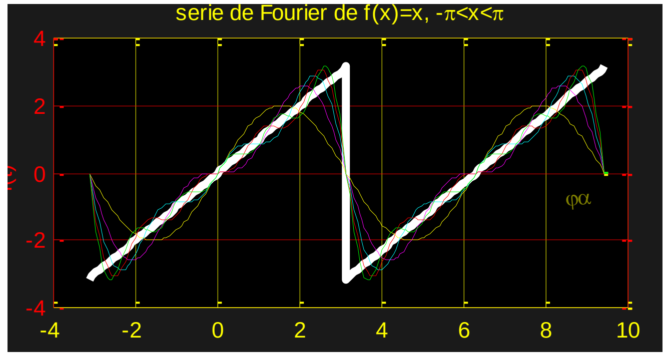


b. Período 2π. Probar que la serie indicada con S, es la serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones f, suponiéndolas periódicas de período 2π, esto es que f(x + 2π) = f(x), para todo x real. Graficar las primeras sumas observar su comportamiento[4].

i. $f(x) = \begin{cases} a, & si\ 0 < x < \pi \\ -a, & si\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$, $S(x) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$ ('onda cuadrada')

ii. $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ 0 < x < \pi \\ 0, & si\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$, $S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}((2n+1)x)}{2n+1}$





iii. $f(x) = x, si - \pi < x < \pi,$ $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \mathrm{sen}\ (nx)$ ('diente de sierra')

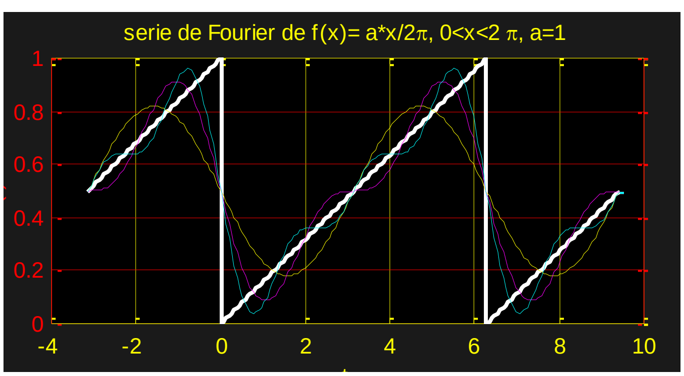
iv. $f(x) = x^2, si - \pi < x < \pi,$ $S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\ \cos\ (nx)$

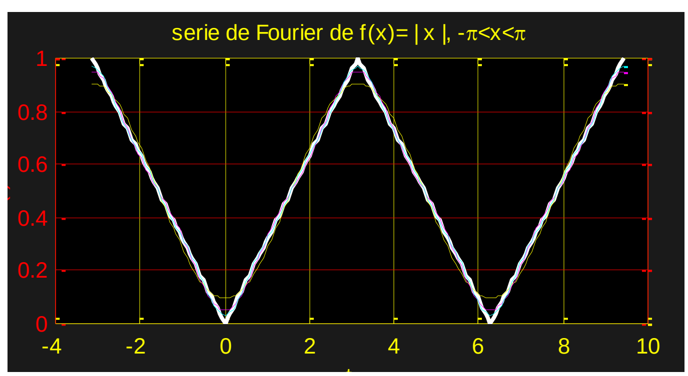
v. $f(x) = \frac{ax}{2\pi}, si\ 0 < x < 2\pi,$ $S(x) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$

vi. $f(x) = a|\sin\ (x)|\ si\ -\pi < x < \pi,$ $S(x) = \frac{2a}{\pi} + \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(\,2nx)}{(1-4n^2)}$ ('seno rectificado')

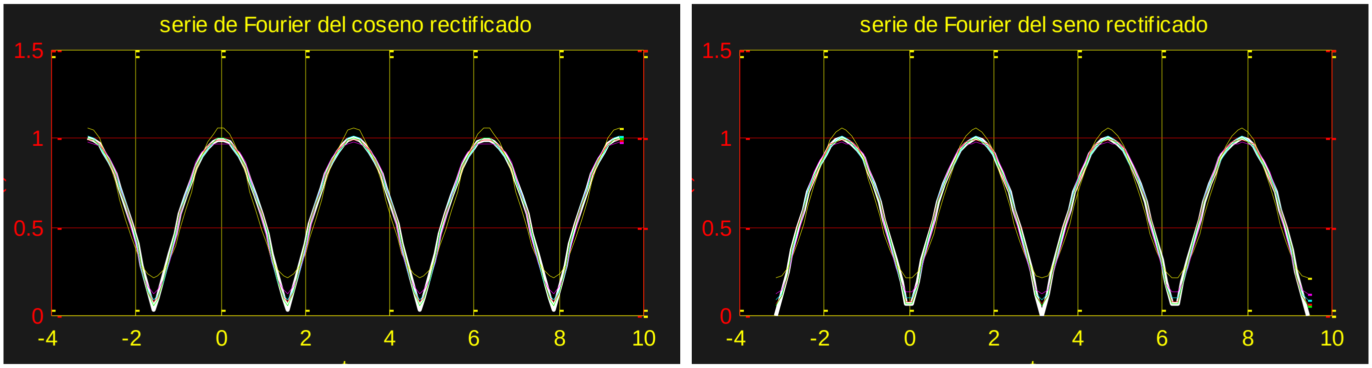
vii. $f(x) = a|\cos(x)|\ si\ -\pi < x < \pi,$ $S(x) = \frac{2a}{\pi} + \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}cos(\,2n\,x)$ ('coseno rectificado')

viii. $f(x) = a\frac{|x|}{\pi}\ si - \pi < x < \pi,$ $S(x) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ (observar que es lo mismo que ix).





[4] Conviene ayudarse con alguna aplicación que se encargue de los cálculos, por ejemplo Matlab, programa con el que se han elaborado las figuras incluidas en este ejercicio, que muestran la función que se desarrolla en trazo grueso y las primeras cinco sumas parciales con trazo fino y diferenciadas por colores.

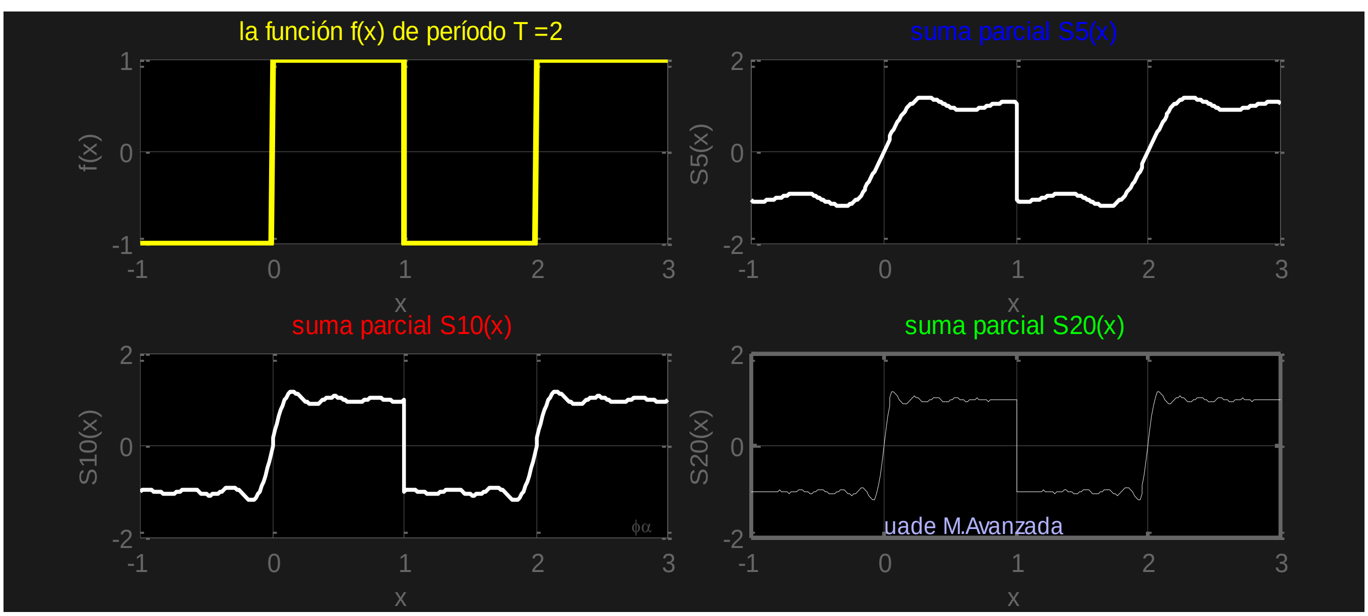


ix. $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{\pi}, si\ 0<x<\pi\\ \frac{a(2\pi-x)}{\pi},\ si\ \pi<x<2\pi\end{cases}$, $S(x)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

x. $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{\pi}, si\ 0<x<\pi\\ 0,\ si\ \pi<x<2\pi\end{cases}$, $S(x)=\frac{a}{4}-\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}+\frac{a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen}((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

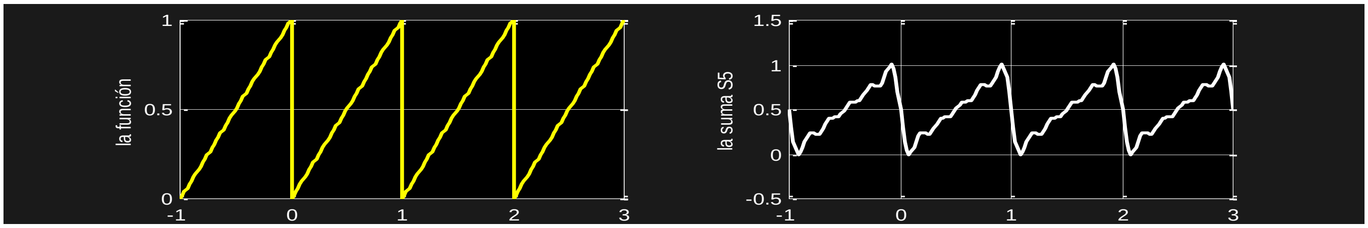
c. Periodo 2τ. Si f satisface las condiciones de Dirichlet con $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\tau}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\tau}\right)$, los coeficientes de Fourier son $a_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(u)\cos\left(\frac{n\pi u}{\tau}\right)du$, $b_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(u)\,sen\left(\frac{n\pi u}{\tau}\right)du$, lo que en la notación de la frecuencia angular $\omega_n=\frac{2\pi n}{T}=\frac{\pi n}{\tau}$ se escribe $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\omega_n x)+b_n\sin(\omega_n x))$, con $a_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(u)\,cos(\omega_n u)\,du$, $b_n=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(u)\,sen(\omega_n u)\,du$. Probar este resultaddo y aplicarlo a las siguientes funciones *f* para obtener su serie de Fourier S. Observar además que la componente dada por ½ a_0 es el valor medio de la función *f* en el período T =2τ.[5]

i. $f(x)=1, si\ 0<x<1, -1\ si\ 1<x<2, f(x+2)=f(x)$, $S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}sen((2n-1)\pi x)$ (el período es T = 2τ =2, el valor medio de *f* en el intervalo (–1, 1) es cero; la serie tiene solo senos porque *f* es impar, observar lo que se denomina el *fenómeno de Gibbs* en las figuras).

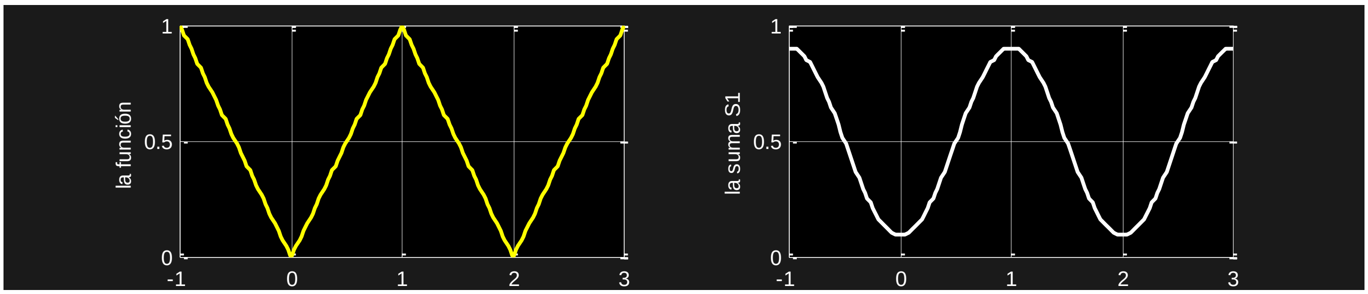


[5] La componente sinusoidal de frecuencia ω_n se denomina la *enésima armónica* de la función periódica, mientras que la primera armónica se conoce como *componente fundamental* (pues su período es el de la función periódica *f*) y ω_0 = 2π/T se denomina *frecuencia armónica fundamental*.

ii. $f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x < 1 \\ 1 + x & si -1 < x < 0 \end{cases}, f(x+2) = f(x), \quad S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sin(2\pi n x)$

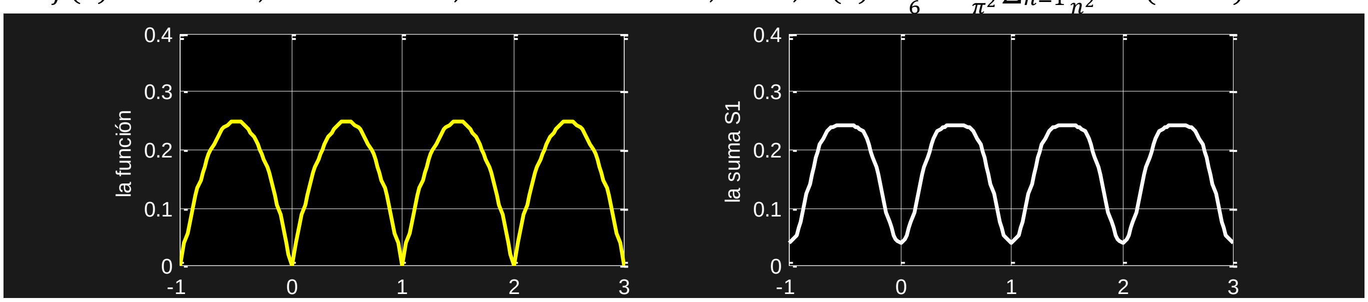


iii. $f(x) = |x|, si -1 < x < 1, \ f(x+2) = f(x), \ S(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} cos((2n-1)\pi x)$



Utilizar la serie de Fourier obtenida para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

iv. $f(x) = -x^2 - x, si -1 < x < 0, x - x^2\ si\ 0 < x < 1, T = 2, \ S(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} cos(2\pi n x)$



Observar que la serie solo tiene términos en coseno, lo que es natural siendo par la función f; utilizar el resultado de la serie obtenida para probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

d. Series de coseno (o de senos) para funciones definidas en (0, τ). Una función *f* definida en el intervalo (0, ω) puede considerarse tanto como la mitad de una función F par (impar) definida en (–τ, τ), con período T = 2τ, y en tal caso puede hacerse un desarrollo en serie de Fourier de cosenos S_c o de senos S_s de la *misma* función *f* según las expresiones $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x), con\ a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(u) \cos(\omega_n u)\ du$ para la serie de cosenos mientras que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(\omega_n x), con\ b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(u)\, sen(\omega_n u)\ du$ para la serie de senos, donde como siempre la frecuencia angular es $\omega_n = \frac{\pi n}{\tau}$. Probar que, para cada una de las siguientes funciones, S_c y S_s son sus correspondientes series y graficar la función junto a su correspondiente serie.

i. $f(x) = 1, si\ 0 < x < \tau, \ S_s(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\pi x/\tau)}{2n-1}, \quad Sc(x) = 1$

ii. $f(x) = x, si\ 0 < x < \tau,\ \ S_s(x) = \frac{2\tau}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\text{sen}(n\pi x/\tau)}{n}\ ,\quad Sc(x) = \frac{\tau}{2} - \frac{4\tau}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos((2n-1)\pi x/\tau)}{(2n-1)^2}$

iii. $f(x) = sen(x), si\ 0 < x < \pi,\ \ S_s(x) = \ sen(x)\ ,\quad Sc(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(\,2nx)}{4n^2-1}$

iv. $f(x) = \ x - x^2\ si\ 0 < x < 1,\ S_s(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^3}\ S_c(x) = \frac{1}{6} - \ \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}cos(\,2\,\pi nx)$

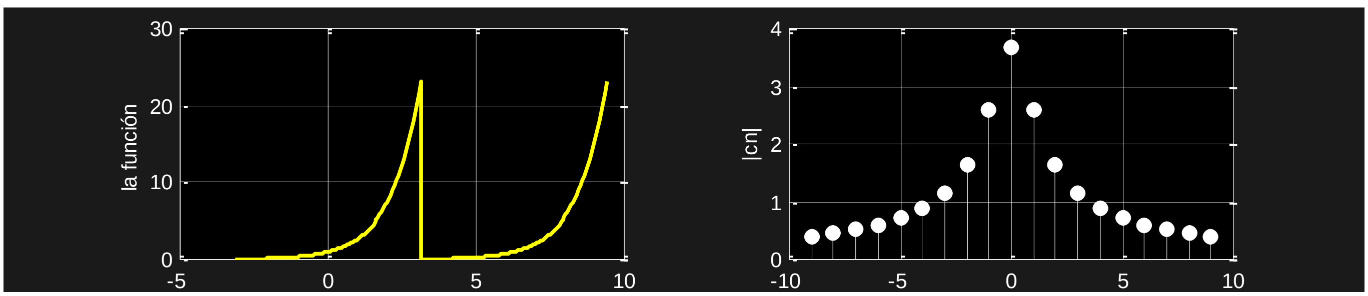
e. Serie de Fourier exponencial compleja. Siendo $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}\ ,\ c_n = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)e^{-i\omega_n t}dt\ ,\ \omega_n = \frac{\pi n}{\tau}$, con $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), c_0 = \frac{a_0}{2}, |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, se pide determinar la serie de Fourier en su notación compleja para cada una de las siguientes funciones de período T = 2τ, cuya expresión se da en el intervalo (−τ, τ) y graficar el espectro de amplitud, tal como se muestra en las figuras para algunos casos[6].

i. $f(x) = 1, si - a < x < a,\ \ S(x) = 1$

ii. $f(x) = \begin{cases} 0 & si - \pi < x < 0 \\ 1 & si\ \ 0 < x < \pi \end{cases}\ ,\quad S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)}\,e^{i(2n+1)x}$

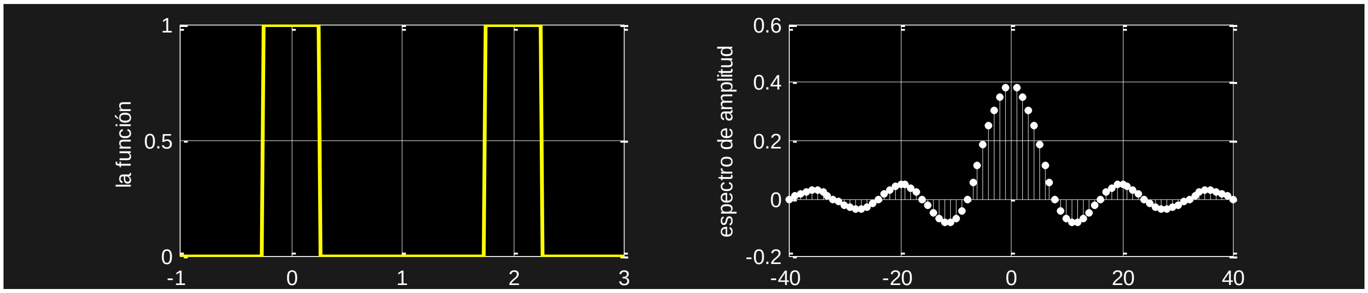
iii. $f(x) = x, si - a < x < a,\ \ S(x) = \ \frac{ai}{\pi}{\sum'}_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,e^{inx\pi/a}$ (∑’ indica que el índice no toma el valor 0)

iv. $f(x) = e^x, si - \pi < x < \pi,\ \ S(x) = \ \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}\,e^{inx}$



v. $f(x) = \begin{cases} a & si|x| < \frac{1}{2}d < \tau \\ 0 & si\ \frac{1}{2}d < |x| < \tau \end{cases}\ ,\quad S(x) = \frac{a}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}\ \sin\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)e^{inx}$ (Tren de pulsos rectangulares de magnitud *a* > 0 y duración *d* con período T = 2τ, siendo *d* < T; en este caso el espectro de fase será nulo, ya que los coeficientes c_n son, como se observa, todos reales).

6 El espectro de amplitud es uno de los espectros de frecuencia discreta que caracterizan la función y permite apreciar la contribución de cada armónica a la reconstrucción de la función. El espectro de amplitud grafica $|c_n|$ versus n mientras que el espectro de fases grafica arg(cn) versus n. También se dice que el gráfico de f(x) describe a f en ‘el dominio del tiempo’, mientras que el los espectros lo hacen en ‘el dominio de la frecuencia’, nomenclatura proveniente de la teoría de señales, apropiada cuando la variable x es temporal. Los gráficos se realizan a veces con ω_n en lugar de n como abscisa (lo que se reduce a un cambio de escala).



f. Identidad de Parseval[7]. Entre los coeficientes de Fourier se establece la identidad de Parseval, cuya expresión es $\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}[f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. Probar que, en la notación compleja la identidad es $\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}[f(x)]^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ y escribir la identidad de Parseval para algunas de las series obtenidas en los anteriores apartados y utilizarla para establecer sumas de series numéricas notables, como por ejemplo $\sum_1^{\infty} 1/n^2 = \frac{\pi^2}{6}, \sum_1^{\infty} 1/n^4 = \frac{\pi^2}{90}$

g. Propiedades. La correspondencia entre la función *f* de período T = 2τ y sus coeficientes de amplitud y frecuencia se indica con $f(x) \longleftrightarrow \{c_k, \omega_k\}$. Probar las siguientes propiedades e interpretarlas en lenguaje tiempo-frecuencia, mostrando un ejemplo en el que se aprecien esos efectos.

   i. Desplazamiento en el dominio del tiempo $f(x-a) \longleftrightarrow \{c_k e^{-ia\omega_k}, \omega_k\}$.
   ii. Desplazamiento en el dominio de las frecuencias $f(x)e^{2\pi a/\tau} \longleftrightarrow \{c_{k-a}, \omega_k\}$.
   iii. Escalamiento en el dominio del tiempo (aquí *a* es real) $f(ax) \longleftrightarrow \{c_k, \frac{\omega_k}{a}\}$.
   iv. Observar que la integración de una serie de Fourier introduce un factor (1/*n*) reforzando la convergencia, mientras que la derivación introduce el factor (*n*), debilitándola. Mostrar una serie de Fourier convergente a la función *f* cuya derivada no converja a *f'* (y entonces una serie que no converja a la función *f* cuya integral converja a alguna primitiva de *f*).

h. Problema de contorno. Resolver el problema de contorno clásico de hallar la función x = x(*t*) tal que satisface la ecuación diferencial x'' + 4x = 4t, con x(0) = x(1) = 0 del modo clásico (esto es sumando a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular y luego ajustar las constantes) para obtener la solución exacta dada por x(*t*) = *t* – sin(*t*) / sin(2). Obtener ahora esta solución proponiendo una solución $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t)$ y remplazándola en la ecuación diferencial, para determinar los coeficientes $b_n = (-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi(4-n^2\pi^2)}$ y graficarla.

9. Integral de Fourier. Transformadas integrales (Transformada de Fourier, Transformada de Laplace). Espectros de frecuencia continuos. Relación entre las transformadas de Laplace y de Fourier.

a. La integral de Fourier de una función *f* absolutamente convergente en ℝ que cumple las condiciones de Dirichlet está dada por $f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x))\,d\omega\right)$, $a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt, b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$ (la igualdad se da en los puntos de continuidad de *f*, en otro caso se entiende la semisuma de los límites laterales de *f*). Hallar la integral de Fourier del escalón simétrico función *f*: ℝ→ ℝ tal que *f*(*x*) = 1 si |*x*| < 1, 0 en todo otro caso y de allí deducir las expresiones de las integrales impropias resultantes.

[7] En la identidad de Parseval, el término que da el valor cuadrático medio $\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}[f(x)]^2 dx$ recibe el nombre de *contenido de potencia* de la función periódica ya que si se interpreta a *f* como una onda de voltaje (o también de corriente), mide la potencia desarrollada por *f* a través de una resistencia unitaria.

R. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega} cos(\omega x)\, d\omega, \quad \int_0^\infty \frac{sin(\omega)}{\omega} cos(\omega x)\, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & si\ |x| = 1 \\ 0 & si\ |x| > 1 \end{cases}, \int_0^\infty \frac{sin(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$

b. Una función definida en el intervalo (0, ∞) puede escribirse mediante una integral de Fourier coseno (pensando en la extensión par) o una integral de Fourier seno (referida a la extensión impar). Hallar la integral de Fourier seno y la integral de Fourier coseno de la función f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{-a\,x}$ con $x > 0$, $a > 0$ y utilizar los resultados para obtener las integrales impropias resultantes.
Respuestas:

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{\omega^2 + a^2} d\omega, \quad \int_0^\infty \frac{cos(\omega x)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a}\ e^{-ax}, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a}$$

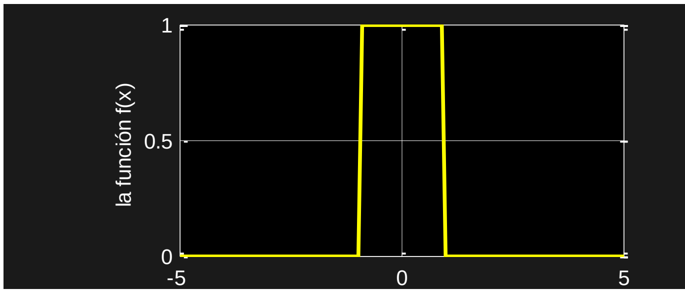
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + a^2} d\omega, \quad \int_0^\infty \frac{\omega\ sin(\omega x)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2}\ e^{-ax}$$

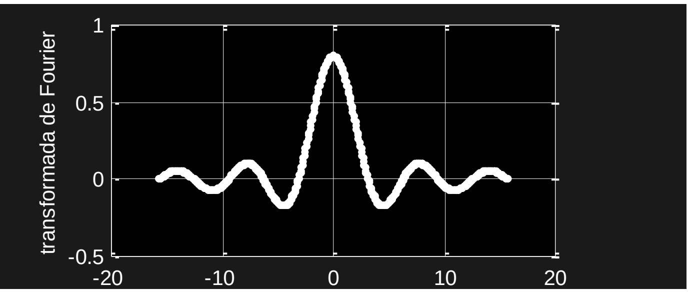
c. Resolver la ecuación integral en la incógnita dada por $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\ dt\ = \begin{cases} 1-\omega & si\ 0 < \omega < 1 \\ 0 & si\ \omega > 1 \end{cases}$ y utilizar el resultado para probar que $\int_0^\infty \frac{\sin^2(u)}{u^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$
R. $f(t) = \frac{2}{\pi t^2}(1 - \cos(t))$

d. La transformada de Fourier para una f que cumple las condiciones de Dirichlet es $\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$, y la función original se recupera en los puntos de continuidad mediante el teorema de inversión [8] con $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{+i\omega x} d\omega$. Determinar la transformada indicada en cada uno de los siguientes casos.

i. Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ si $|\ x\ | < a$, 0 en todo otro caso (siendo a positivo). Hallar su transformada de Fourier $\mathcal{F}$ (ω), y representar f(x) y $\mathcal{F}$(ω) para a = 1. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\,(at)\cos(at)}{t}\ dt, y\ \int_0^\infty \frac{sen\,(t)}{t}\ dt.$

R. $\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sen(a\omega)}{\omega}, si\ \omega \neq 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ a, si\ \omega = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\,(at)\cos(ax)}{t}\ dt = \begin{cases} \pi\ si\ |x| < a \\ \frac{\pi}{2}, si\ |x| = a \\ 0, si\ |x| > a \end{cases}$





ii. Hallar la transformada $\mathcal{F}$ (ω) de la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si\ \ 0 < x \\ e^{ax} & si\ \ x < 0 \end{cases}$ (siendo $a > 0$).

[8] La integral de la derecha debe entenderse como valor principal si la transformada no es absolutamente convergente (y en todos los casos, la función recuperada en los puntos de discontinuidad queda evaluada en la semisuma de los límites laterales), ver detalles en Vretblad, A. (2003). Fourier Analysis and Its Applications New York: Springer.

R. $\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+w^2}$

iii. Hallar la transformada $\mathcal{F}$ (ω) de la función f: ℝ→ ℝ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si \quad 0 < x \\ -e^{ax} & si \quad x < 0 \end{cases}$ (siendo $a > 0$).

R. $\mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2wi}{a^2+w^2}$

iv. Hallar la transformada $\mathcal{F}$ (ω) de la función f: ℝ→ ℝ tal que $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si\ 0 < x \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$ (siendo $a > 0$).

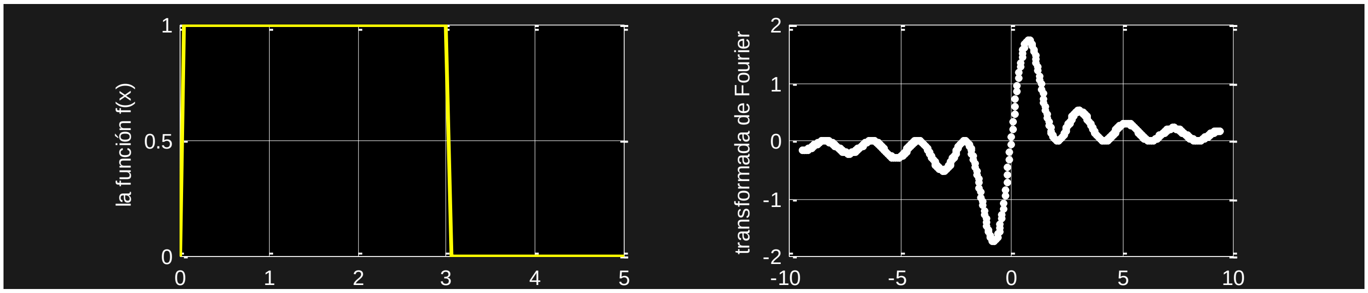
R. $\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a-i\omega}{a^2+w^2}$

v. Dada f: ℝ→ ℝ tal que $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$, hallar su transformada de Fourier $\mathcal{F}$ (ω).

i. R. $\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|\omega|}}{a}$ (conviene utilizar la propiedad de simetría: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(\omega) = f(-\omega)$).

e. Se definen las transformadas de Fourier coseno (seno) de la función par (impar) f o bien de una función definida en un intervalo (0, τ) como $\mathcal{F}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x)\ dx, \mathcal{F}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x)\, dx$ y entonces es $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}_c(\omega) \cos(\omega x)\ d\omega,\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}_s(\omega)\, sin(\omega x)\ \ d\omega.$

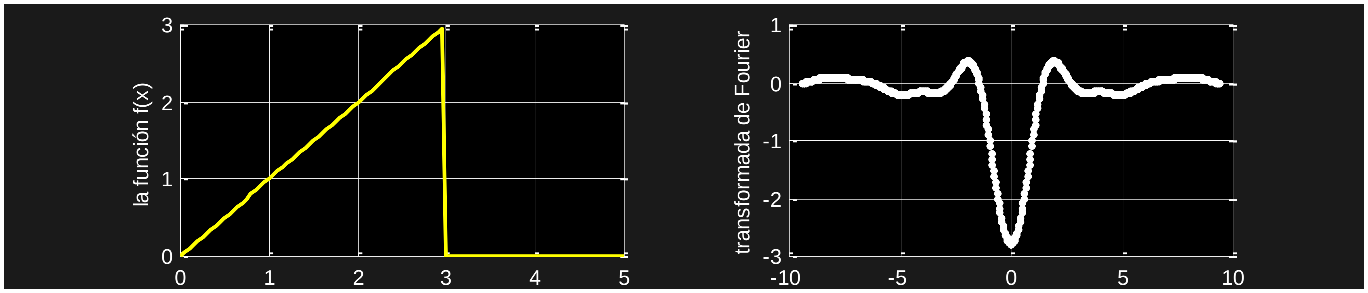
i. Hallar la transformada coseno y la transformada seno de la función f: ℝ⁺→ ℝ tal que $f(x) = \begin{cases} k\ si\ 0 < x < a \\ 0 \quad si\ x > a \end{cases}$ y representar ambas transformadas.



R. $\mathcal{F}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{sen(a\omega)}{\omega}, \mathcal{F}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{(1-cos(a\omega))}{\omega}$ el gráfico de $\mathcal{F}_c$ es como el ejercicio anterior, y la del seno se muestra en la figura.

ii. Hallar la transformada coseno de la función f: ℝ⁺→ ℝ tal que $f(x) = \begin{cases} x\ si\ 0 < x < a \\ 0 \quad si\ x > a \end{cases}$ y representarla.

R. $\mathcal{F}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\omega sen(a\omega) + \cos(a\omega) - 1}{\omega^2}$



f. Propiedades de la transformada de Fourier. Probar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier, donde en todos los casos es $\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\omega) = \mathcal{F}(\omega)$ (introducir las hipótesis sobre la función original *f*) y dar un ejemplo sencillo de aplicación para una función cuya transformada de Fourier se conozca previamente (o se obtenga de una tabla [9]).

ii. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$ (linealidad)

iii. $\mathcal{F}\big(f(\alpha\, x)\big)(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\,\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ (escalamiento)

iv. $\mathcal{F}(f(x-\alpha))(\omega) = e^{i\omega\alpha}\ \mathcal{F}(\omega)$ (desplazamiento en dominio del tiempo)

v. $\mathcal{F}\big(e^{i\alpha x}f(x)\big)(\omega) = \ \mathcal{F}(\omega+\alpha)$ (desplazamiento en el dominio de las frecuencias)

vi. $\mathcal{F}\big(f^{(n)}(x)\big)(\omega) = \ (i\omega)^n\mathcal{F}(\omega)$ (derivada enésima)

vii. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(\omega)|^2d\omega$ (identidad de Parseval)

viii. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(\omega) = f(-\omega)$ (simetría)

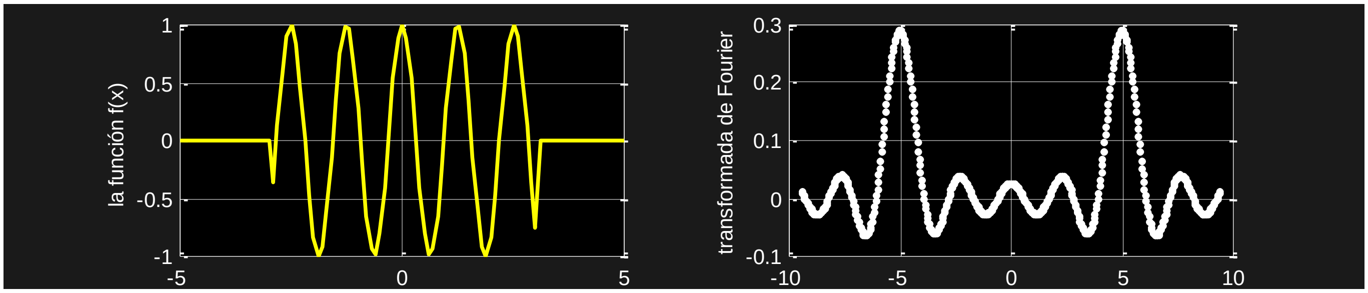
ix. $\mathcal{F}(f(x)\cos(\omega_0 x))(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(\omega+\omega_0)$

x. $\mathcal{F}(f(x)\sin(\omega_0 x))(\omega) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2i}\mathcal{F}(\omega+\omega_0)$

g. Utilizando la propiedad $\mathcal{F}(f(x)\cos(\omega_0 x)) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(\omega+\omega_0)$, hallar y graficar la transformada de Fourier de la función coseno de duración finita *a* (lo que también se suele expresar diciendo que se trata de la función coseno modulada por una onda rectangular de duración *a.*

R. Basta considerar que se conoce la transformada de Fourier del pulso de duración *a* centrado en el origen, esto es $\mathcal{F}_0(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sen(a\omega)}{\omega}, si\ \omega \neq 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ a, si\ \omega = 0$, de modo que por la propiedad anterior, el coseno modulado tiene una transformada $\mathcal{F}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\ (\frac{sen(a(\omega-\omega_0))}{(\omega-\omega_0)} + \frac{sen(a(\omega+\omega_0))}{(\omega+\omega_0)}), si\ \omega \neq \pm\omega_0$, y su gráfico se muestra en la siguiente figura.

[9] Un clásico en el tratamiento de señales y sistemas es el texto Oppenheim, Alan, alan Willsky, y Hamid Nawab. *Signals & Systems.* Segunda. Singapore: Prentice Hall, 1998. También orientado a la teoría de comunicaciones es Hsu, Hwei. *Análisis de Fourier.* Primera. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley, 1987, y para referencias rápidas puede verse Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics.* Séptima edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1993. Respecto a las tablas, es necesario examinar cómo se ha definido la Transformada de Fourier (esto es la forma simétrica con el factor √(2π) u otra elección de producto 2π). Un tratamiento completo de series de tiempo en Pollock, D.G. *A Handbook of Time-Series Analysis, Signal Processing and Dynamics.* Segunda. London: Academic Press, 1999.



h. Probar cada una de las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace (en todos los casos es *F* (*p*) = L[*f* (*t*)] = $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$, mientras que *a* es una constante real, *u* es el escalón unitario de Heaviside). En todos los casos suponer cumplidas las condiciones de convergencia.

i. $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)](p) = e^{-ap}F(p)$

ii. $\mathcal{L}^{-1}[F(p-a)](p) = e^{at}f(t)$

iii. $\mathcal{L}[t\, f(t)])(p) = -F'(p)$

iv. $\mathcal{L}[\, f'(t)](p) = pF(p) - f(0)$

v. $\mathcal{L} \int_0^t f(z)dz = \frac{F(p)}{p}$

vi. $\mathcal{L}^{-1} \int_p^\infty F(z)dz = \frac{f(t)}{t}$

i. Mediante la fórmula integral de Bromwich (de los residuos), obtener la función original de las siguientes transformadas de Laplace.

i. $F(p) = \frac{9}{(p-2)\,(p+1)^2}$ R: f (t) = $e^{2t} - 3t\, e^{-t} - e^{-t}$

ii. $F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ $, a \neq b$ R:$f(t) = \frac{e^{bt} - e^{bt}}{b-a}$

j. Probar que $I = \int_0^\infty \frac{sen(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty \frac{sen^3(t)}{t} dt = \frac{\pi}{4}$

k. Resolver el problema de valor inicial de ecuaciones diferenciales X' = AX + B, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta(t-\pi) \\ 0 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde δ es la delta de Dirac. R: $X(t) = \begin{pmatrix} -sen(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix} u(t-\pi)$

📖📖 Algunos de los textos consultados en la elaboración de esta guía

Ahlfors, Lars. *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* Tercera. New York: McGraw-Hill, 1979.

Beals, Richard. *Advanced Mathematical Analysis.* Tercera edición. New York: Springer-Verlag, 1987.

Boyer, Carl. «The Foremost Textbook of Modern Times.» *The American Mathematical Monthly* 58, nº 4 (1951): 223-226.

Churchill, Ruel. *Series de Fourier y Problemas de Contorno.* Primera edición en castellano traducida de la segunda edición en inglés Fourier Series And Boundary Value Problems. Traducido por Luis Jevenois de Arrilucea y Manuel Arjona Brieva. México D. F.: McGraw-Hill, 1977.

Churchill, Ruel, y James Ward Brown. *Variable compleja y sus aplicaciones.* Cuarta edición en español. [Original 1984, Complex variable and applications, fourth edition]. Traducido por Luis Martínez Alonso. Naucalpán de Juárez: McGraw-Hill, 1990.

Derrick, William. *Variable compleja con aplicaciones.* Primera edición en español [Original 1984, Complex Analysis and Applications]. Traducido por Marco Antonio Rosales. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.

Hsu, Hwei. *Análisis de Fourier.* Primera. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley, 1987.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics.* Séptima edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1993.

Lathi, B. *Introducción a la teoría y sistemas de comunicación.* Segunda. México D.F.: Limusa, 1976.

Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas. Tomo I.* Primera edición. Segunda reimpresión. Traducido por Emiliano Aparicio Bernardo. Vol. I. 2 vols. Moscú: Mir, 1978a.

—. *Teoría de las funciones analíticas. Tomo II.* Primera edición. Segunda reimpresión. Traducido por Emiliano Aparicio Bernardo. Vol. II. 2 vols. Moscú: Mir, 1978b.

Oppenheim, Alan, alan Willsky, y Hamid Nawab. *Signals & Systems.* Segunda. Singapore: Prentice Hall, 1998.

Pollock, D.G. *A Handbook of Time-Series Analysis, Signal Processing and Dynamics.* Segunda. London: Academic Press, 1999.

Prosperetti, Andrea. *Advanced Mathematics for Applications.* Primera. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Rao, Murali, y Henrik Steaker. *Complex Analysis. Am Inviitation.* Primera edición. London: World Scientific Publishing, 1991.

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

Rudin, Walter. *Analyse réelle et complexe. Cours et exercices.* Tercera. Traducido por Jean Dhombres. Paris: Dunod, 1988.

Shilov, Georgi. *Elementary Real and Complex Analysis.* Primera. Traducido por Richard Silverman. Mineola (New York): Dover, 1973.

Smirnov, Vladimir. *Cours de mathématiques supérieures. Tome III. Deuxième partie.* Segunda. Traducido por Jean Sislian. Moscú: Mir, 1972.

Spiegel, Murray. *Cálculo Superior.* Primera edición [Original 1963, Advanced Calculus]. Cali: McGraw-Hill, 1973.

Tolstov, Georgi. *Fourier Series.* Tercera edición. Traducido por Richard Silverman. New York: Dover publications, 1986.

Volkovyski, L. I., G. L. Lunts, y I. G. Aramanovich. *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja.* Primera edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1972.

Vretblad, A. (2003). Fourier Analysis and Its Applications (Primera edición ed.). New York: Springer.

Wunsch, David. *Complex variables with applications.* Segunda edición. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Zill, Dennis. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. Traducido por Eduardo Ojeda Peña y ÁLvaro Cofré Mata. México: Thomson, 2007.

Zill, Dennis, y Patrick Shanahan. *A first course in complex analysis with applications.* Primera. Sudbury (Massachusetts): Jones and Bartlett Publishers, 2003.

💻 Las figuras se han obtenido mediante la aplicación Matlab