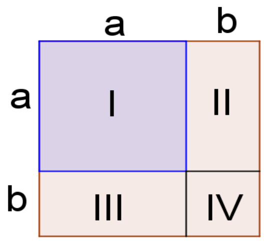
# Unidad 1 · Números Reales

Esta unidad abarca temas que ya son conocidos por todos ustedes, ya que seguramente los han visto en la escuela media pero aun así conviene refrescarlos debido a que tendrán un papel importante en el desarrollo de las unidades posteriores. Por este motivo, vamos a reverlos de manera de poner en juego sus conocimientos previos, y ayudarlos a ustedes en aquellas cosas que generen dificultad.

Les proponemos que antes de empezar con la explicación resuelvan el siguiente ejercicio:

Dado el cuadrado de la figura de lado a+b se pide:




i) Calculen su área.

ii) Repitan el cálculo anterior pero a partir de sumar el área de cada una de las figuras geométricas (figuras I, II, III y IV) que integran el cuadrado anterior.

iii) Comparen ambos resultados y concluyan.

iv) ¿Qué fórmula matemática relativa a los números reales surge de la igualación de ambos resultados? ¿Es dicha fórmula válida para todo par de número reales a y b?

Retomaremos este ejercicio durante el desarrollo de la unidad.

Iniciaremos ahora nuestro trabajo con los conjuntos numéricos y sus propiedades. La idea es que al terminar esta unidad puedan reconocer número reales y subconjuntos de números reales, utilizando la notación adecuada para indicarlos. Asimismo, se espera que sean capaces de operar correctamente con cálculos concretos y simbólicos y que apliquen pertinentemente las propiedades vinculadas con las operaciones en reales.

**Contenidos de la Unidad**



## TEMA 1 · Conjuntos Numéricos

### 1.1 Conjuntos Numéricos.

El conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ designa al conjunto de los números naturales. Este conjunto surge por la necesidad que el hombre tenía de contar, por ejemplo, contar para saber cuántos eran sus bienes personales.

Dentro del conjunto de los números naturales está siempre definida la **suma** y el **producto** de dos números, ya que al operar entre números naturales, el resultado siempre es un número natural. Es decir estas operaciones son cerradas en $\mathbb{N}$

No ocurre lo mismo con la **resta** y la **división** ya que el resultado de restar o dividir dos números naturales no necesariamente es un número natural.

3-5 = -2 y $-2 \notin \mathbb{N}$

De igual forma: 2:5 = 0,4 y 0,4 $\notin \mathbb{N}$

Si al conjunto de los naturales le agregamos el cero y los opuestos de los números naturales obtenemos el conjunto de los números enteros. Este conjunto se simboliza $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

En este conjunto, además de la suma y el producto entre números enteros, está definida la resta:

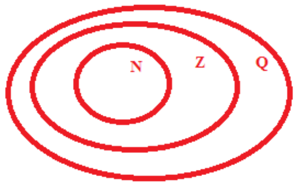
3-5=-2 y $-2 \in \mathbb{Z}$

El resultado de restar dos números enteros siempre es un número entero.

No ocurre igual con el cociente: 2:5 = 0,4 y 0,4 $\notin \mathbb{Z}$

Los números racionales surgieron ante la necesidad de expresar divisiones no exactas. Al conjunto de los números racionales se lo simboliza $\mathbb{Q}$

Estos números se expresan como razones entre números enteros, es decir, que todo número racional se puede escribir como el cociente de dos números enteros: $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$




***Recuerden que la división por 0 no es válida.***

Ahora 2:5 = 0,4 y $0,4 \in \mathbb{Q}$

En este conjunto son cerradas las operaciones de suma, producto, resta y división.

Otra característica que poseen los números racionales, es que admiten una expresión decimal finita o periódica. Esta expresión se obtiene al dividir a por b.

Ejemplo: $\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{5}{3} = 1.\widehat{6}$ $-\frac{2}{1} = -2$

¿Podrían pensar dos números racionales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$?

…. Les dejamos un minuto para pensar….

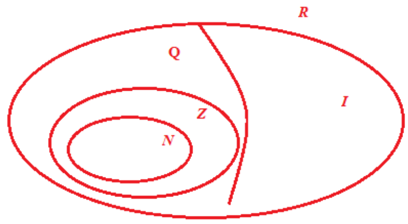
Para encontrar una respuesta posible, bastará con hallar el punto medio entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, es decir $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$ y ahora el punto medio entre 1 y cualquiera de los números dados, por ejemplo $\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$.

Esto muestra claramente que entre dos números racionales cualesquiera, existen otros infinitos números también racionales, Cuando esto ocurre, decimos que el conjunto es denso. Por ello, es posible que ustedes hayan encontrado otras respuestas.

¿Ocurrirá lo mismo entre dos números enteros o naturales? Piensen números naturales entre 1 y 2 ó números enteros entre -1 y 0…

Hasta ahora definimos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el de los enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$. Sin embargo, podemos pensar en números como $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[5]{3}$ que además poseen infinitas cifras decimales no periódicas y, por lo tanto, no pueden expresarse como una razón (o división) de dos números enteros.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ $\pi = 3.1415926....$




Estos números forman parte del conjunto de los números irracionales (no razón), el cual se denota con la letra y al $\mathbb{I}$ igual que los racionales forman un conjunto denso.

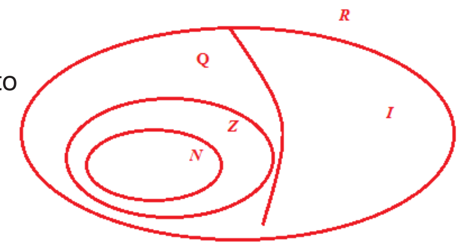
El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ forman el conjunto de los números reales $\Re$, en símbolos $\Re = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Los números reales se pueden representar mediante puntos en la recta numérica.

A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica y a cada punto de la recta le corresponde un único número real. Esto nos dice que el conjunto de los números reales es un conjunto completo, la recta numérica queda completa (sin huecos), y denso, entre dos números cualesquiera reales existen otros infinitos.

*Ejercicio de aplicación…*

1-Ubiquen cada número en el conjunto correspondiente:




3.14 $\pi$ -3 $\frac{3}{2}$ 5 $\frac{2}{\sqrt{2}}$ $-\frac{10}{2}$

Luego de resolverlo podrán ver la solución al terminar la unidad.

**Intervalos**

i) Hallar todos los números naturales que son mayores que -3 y menores que 4.

ii) Hallar todos los números enteros que son mayores que -3 y menores que 4.

iii) Hallar todos los números reales que son mayores que -3 y menores que 4.

La respuesta a los dos primeros puntos es muy sencilla:

En el primer caso será $\{1,2,3\}$ y en el ítem ii) la respuesta es $\{-2,-1,0,1,2,3\}$

En el ítem iii) nos encontramos, debido a la densidad del conjunto de los números reales, con la dificultad de que es imposible expresar la solución por enumeración. Una forma de subsanar dicha dificultad es expresar el conjunto solución por compresión, es decir: $\{x \in \Re : -3 < x < 4\}$. Otra posible forma de expresar la solución es recurrir al concepto de intervalo.

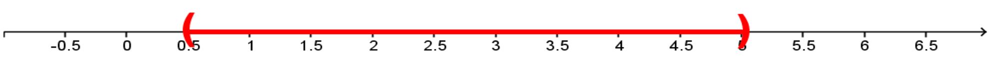
***Un intervalo es un subconjunto de los números reales.***

**Caso 1:** El conjunto $\{x \in \Re \,/\, a \leq x \leq b\}$ está integrado por los números reales que son mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*, se escribe $[a,b]$ y se conoce como intervalo cerrado.

Ejemplo El intervalo $[-1,3]$ se grafica:


**Caso 2:** Por su parte, el conjunto $\{x \in \Re \,/\, a < x < b\}$ está integrado por los números reales entre *a* y *b*, se escribe $(a,b)$ y se conoce como intervalo abierto.

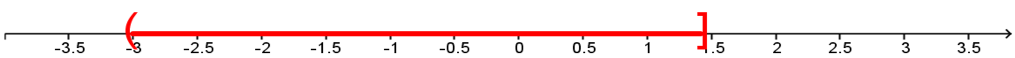
El intervalo $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, se grafica:




Utilizamos corchetes "[" " ] "para indicar que el extremo del intervalo está incluido en el conjunto y utilizamos paréntesis "(" ")" para indicar que el extremo no pertenece al conjunto.

¿Cómo expresarían el conjunto $\{x \in \Re \,/ -3 < x \leq \sqrt{2}\}$ utilizando notación de intervalo?

Perfecto!!! $\left(-3, \sqrt{2}\right]$ Podemos decir que dicho intervalo es abierto a izquierda o cerrado a derecha.



**Veamos otros casos**

Necesitamos también considerar los conjuntos del tipo:

A= $\{x \in \Re \,/\; x \leq b\}$

B= $\{x \in \Re \,/\; x < b\}$

C= $\{x \in \Re \,/\; x \geq a\}$

D= $\{x \in \Re \,/\; x > a\}$

Dichos conjuntos también son intervalos y se escriben

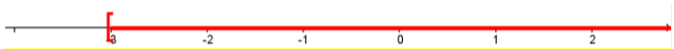
$A = (-\infty,\, b],\;\; B = (-\infty,\, b),\;\; C = [a, +\infty)\;\; D = (a,\, +\infty)$

Ejemplos:

$(-\infty,\, 4]$


$(-\infty, 2)$


$[-3, +\infty)$




$(0.5\;\;,\; +\infty)$


Les proponemos el siguiente ejercicio de aplicación:

2- Representen gráficamente, expresen en notación de intervalo o como conjunto, según corresponda.

| Notación de Conjunto | Notación de intervalo | Representación gráfica |
|---|---|---|
| $\left\{x \in \Re \,/\; -\sqrt{3} < x \leq \frac{5}{2}\right\}$ | | |
| | $(1,\; 7)$ | |
| | |   |

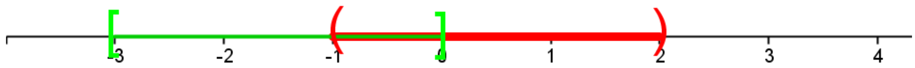
*Alumnos trabajando….*

Solución, al finalizar la unidad.

Recordemos ahora algunas operaciones entre intervalos.

La **intersección de intervalos** es un nuevo intervalo formado por los números que pertenecen a la vez a ambos conjuntos.

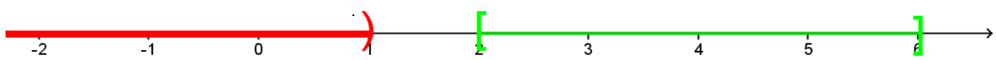
Veamos el siguiente ejemplo: $(-1\ 2)\cap[-3,0]$




El conjunto solución es aquel que queda pintado en ambos colores, es decir el intervalo $(-1,0]$ .

Notemos que el extremo -1 no pertenece a la intersección debido a que no pertenece al primer intervalo, pero, por el contrario, 0 pertenece al intervalo solución pues pertenece a la vez a ambos conjuntos. Por este motivo el intervalo es cerrado por derecha.

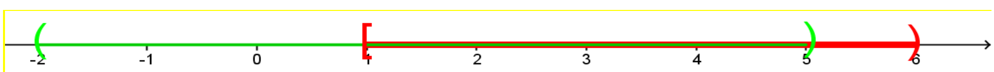
Ejemplo: $(-\infty,1)\cap[2,6]$




En el dibujo podemos ver que no existen elementos que pertenezcan a ambos conjuntos a la vez, por lo cual la intersección es vacía y lo escribimos $(-\infty,1)\cap[2,6]=\phi$

La **unión de intervalos** es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a un intervalo o al otro (o a ambos).

Ejemplo: $[1,\ 6)\cup(-2,\ 5)$




En este caso, los elementos que pertenecen al menos a uno de los dos intervalos forman el intervalo $(-2,6)$.

# TEMA 2 · Operaciones y propiedades

***Propiedades de los números reales para la suma y la multiplicación.***

1. Propiedad conmutativa para la suma y la multiplicación
   $a+b=b+a$ $\qquad$ $a.b=b.a$
2. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación
   $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\qquad$ $(a.b).c=a.(b.c)$
3. Propiedad distributiva: $a.(b+c)=a.b+a.c$

La propiedad distributiva será muy útil cuando trabajemos con ejercicios donde aparezcan letras y números.

Como las propiedades enunciadas valen para toda terna de números reales a, b y c, en particular vale también para el caso en que alguno sea negativo. Ahora bien, como la resta a-b se define como la suma de a+ (-b), podemos ver que las propiedades anteriores también son válidas para la resta de números reales.

De la misma forma, la división puede definirse a partir de la multiplicación de la siguiente manera: $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}$ donde $\frac{1}{b}$ representa el número inverso de b y $b\neq 0$ .

Veamos otras propiedades relativas a los números reales:

***Propiedades de los números reales***

4. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ siempre que $b\neq 0$ y $d\neq 0$
5. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ siempre que $b\neq 0$ , $c\neq 0$ y $d\neq 0$
6. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ siempre que $b\neq 0$
7. $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$ siempre que $b\neq 0$ , $c\neq 0$

La última propiedad es muy importante debido a que nos da las condiciones para poder simplificar

$$\frac{\cancel{(x+1)}\,4}{5\cancel{(x+1)}} = \frac{4}{5}$$ Está bien simplificado!!

$$\frac{\cancel{(x+1)}+4}{5\cancel{(x+1)}} = \frac{4}{5}$$ Está **MAL** simplificado!! Puesto que en el numerador no hay un producto sino una suma

Analicemos algunos ejemplos para aplicar estas propiedades:

1- Calcular $\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right]$

Iniciaremos los cálculos indicando en cada paso qué propiedad fuimos aplicando. Ustedes pueden seguir los pasos en sus cuadernos

Resolvemos la resta sacando denominador común $\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{6}$

$\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{6}\right)\right]=\frac{4}{3}.6$

Aplicamos propiedad distributiva: $\left(\frac{2}{5}+1\right).5=\frac{2}{5}.5+1.5=2+5=7$ (*)

$$\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right] = \left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{6}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right] = \left[\frac{4}{3}.6\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right] = \left[\frac{24}{3}\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right).5\right] = \left[\frac{24}{3}\right]:7=\frac{24}{3}.\frac{1}{7}=\frac{24}{21}=\frac{8}{7}$$

(*) En este ejemplo quizás se podría haber evitado la aplicación de esta propiedad, debido a que se podría haber resuelto en primer lugar la suma $\left(\frac{2}{5}+1\right)$ y multiplicado al resultado por 5. Sin embargo la propiedad distributiva será indispensable para operar en expresiones de la forma $\left(\frac{2}{5}+x\right).5$ con las que trabajaremos más en detalle en la próxima unidad.

2- Una de las expresiones que siguen **no** es equivalente a $\frac{1}{3}a^3+a^4$, encuéntrela y expliquen por qué no son expresiones equivalentes.

i) $\frac{a^3}{3}+a^4$ ii) $\frac{a^3+a^4}{3}$ iii) $a^3\left(\frac{1}{3}+a\right)$ iv) $\frac{a^3+3a^4}{3}$

*Respuesta:*

No olvidemos que:

El producto tiene prioridad sobre la suma y la resta.

Es por esto que $\frac{1}{3}a^3 + a^4$ debe ser interpretado como $\left(\frac{1}{3}a^3\right) + a^4$ y **no** como $\frac{1}{3}\left(a^3 + a^4\right) = \frac{a^3 + a^4}{3}$

Por lo tanto la respuesta correcta es la ii)

¿Cómo justifican las restantes equivalencias?

3- Indiquen si las siguientes igualdades son válidas en los conjuntos indicados y justifiquen:

i) $\frac{5x + x^2}{x} = 5 + x$ para todo $x \neq 0$

*Solución: En la expresión* $\frac{5x + x^2}{x}$ podemos distribuir el denominador respecto de la suma en el numerador:

$$\frac{5x + x^2}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{x^2}{x}$$

Si ahora realizamos las simplificaciones correspondientes, propiedad 7 de números reales, $\frac{5x}{x} + \frac{x^2}{x} = 5 + x$ y por lo tanto la igualdad es cierta, pero sólo para $x \neq 0$

ii) $\frac{1}{5 + x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$ y $x \neq -5$

*Solución:*

Es importante recordar que **no es posible distribuir el numerador respecto de una suma o resta en el denominador, es decir** $\frac{1}{(5 + x)} \neq \frac{1}{5} + \frac{1}{x}$

Verificación: $\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{x + 5}{(5x)} \neq \frac{1}{(5 + x)}$ **Por lo tanto la igualdad es inválida.**

iii) $\frac{8 + x^2}{3x} = \frac{8 + x}{3}$ para todo $x \neq 0$

*Solución:* Un **error** bastante frecuente en la expresión $\frac{8 + x^2}{3x}$ es simplificar el x que se encuentra en el denominador con el $x^2$ que se encuentra en el numerador…

Esto está mal debido a que, si analizamos la regla $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$, podemos ver que tanto en el numerador como en el denominador está escrito como producto y en ambos casos uno de los factores de ese producto es c, es por esto que dicho factor puede cancelarse obteniendo así el segundo término de la igualdad.

En la próxima unidad trabajaremos más en detalle con este tipo de expresiones.

Trabajemos ahora con exponentes y raíces:

Si a es un número real no nulo, entonces: $a^0=1$

Si a es cualquier número real y n es un número natural, entonces: $\boxed{a^n=\underbrace{a.a.a...a}_{n\,veces}}$

*Además si* $a\neq 0$ *entonces* $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

**Propiedades de las potencias**

Sean a y b números reales y n y m naturales, entonces

- *Producto de potencias de igual base*: $a^n.a^m=a^{n+m}$
- *Potencia de potencia:* $(a^n)^m=a^{n.m}$
- *Cociente de potencias de igual base* $\frac{a^n}{a^m}.=a^{n-m}$ siempre que $a\neq 0$
- *Distributiva de la potencia respecto del producto:* $(a.b)^n=a^n\cdot b^n$
- *Distributiva de la potencia respecto del cociente:* $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$ siempre que $b\neq 0$

Cuidado!!! La potencia **no** es distributiva respecto de la suma y la resta $(a+b)^2$ no es equivalente a $a^2+b^2$

Ante la situación de calcular $(a+b)^2$ o $(a+b)^2$ debemos recordar:

*Binomio al cuadrado:* $(a+b)^2=a^{2\cdot}+2ab+b^2$ ***(*)***

*Binomio al cubo:* $(a+b)^3=a^{3\cdot}+3a^2b+3ab^2+b^3$

(*) Esta es la expresión a la que debieron llegar en el ejercicio de área planteado al inicio de la unidad. Es importante observar que si bien en dicho ejemplo a y b representaban constantes positivas, pues eran las medidas de los lados, la fórmula de binomio cuadrado en válida para todo número real a y b.

Recuerden que pueden obtener la expresión $(a+b)^2=a^{2\cdot}+2ab+b^2$ *, expresando* $(a+b)^2$ *como* $(a+b).(a+b)$ *y realizando las distributivas correspondientes.*

Veamos un ejemplo donde aplicar lo aprendido:

Realicen las siguientes operaciones:

i) $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2-3n}}$. con $x \neq 0$

Solución:

Cociente de potencias de igual base

$$\frac{x^{2n-1}}{x^{2-3n}} = x^{2n-1-(2-3n)} = x^{2n-1-2+3n} = x^{5n-3}.$$

ii) $\dfrac{x^{-4}y^{5}}{x^{2}.y^{3}}$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$

Resolución:

Producto de fracciones

$x^{-6} = \dfrac{1}{x^{6}}$

$$\frac{x^{-4}y^{5}}{x^{2}.y^{3}} = \frac{x^{-4}}{x^{2}}.\frac{y^{5}}{y^{3}} = x^{-4-2}.y^{5-3} = x^{-6}.y^{2} = \frac{y^{2}}{x^{6}}$$

Cociente de potencias de igual base

iii) $(a+b)^{-2}.(a+b)^{3}.(a^{5}.b^{-2})^{3}$

Resolución:

$b^{-6} = \dfrac{1}{b^{6}}$

$$\underbrace{(a+b)^{-2}.(a+b)^{3}}.(a^{5}.b^{-2})^{3} = (a+b).a^{15}.b^{-6} = \frac{(a+b).a^{15}}{b^{6}}$$

Producto de potencias de igual base

Distributiva y potencia de potencia

2- Sabiendo que $a^{2} = x$ y $b^{3} = 2x$, escriban las siguientes expresiones en términos de x

i) $\left(a^8+b^6\right)^2$

Resolución:

Como primera medida realizaremos los cambios de variable propuestos…

Para hacerlos veamos que: $a^8=\left(a^2\right)^4=(x)^4=x^4$

$a^2=x$

$b^3=2x$

$b^6=\left(b^3\right)^2=(2x)^2=4x^2$

De esta forma la expresión original nos queda:

Desarrollamos el cuadrado del binomio

$$\left(a^8+b^6\right)^2=\left(x^4+4x^2\right)^2=\left(x^4\right)^2+2x^4.\left(4x^2\right)+\left(4x^2\right)^2=\boxed{x^8+8x^6+16x^4}$$

Aplicamos el cambio de variable

ii) $\dfrac{\left(a^3\right)^4.\left(ab^2\right)^3}{(a.b)^9}.a^{-2}$

En este caso comenzaremos por reducir la expresión dada antes de realizar el cambio de variable:

$$\frac{\left(a^3\right)^4.\left(ab^2\right)^3}{(a.b)^9}.a^{-2}=\frac{a^{12}.a^3b^6}{a^9b^9}.\frac{1}{a^2}=\frac{\left(a^{12}.a^3\right)b^6}{a^9b^9a^2}=\frac{a^{15}.b^6}{a^{11}b^9}=\frac{a^{15}}{a^{11}}.\frac{b^6}{b^9}=a^4.b^{-3}=\frac{a^4}{b^3}$$

Si ahora aplicamos el cambio de variable $a^2=x$ y $b^3=2x$, el término $a^4$ nos queda $a^4=\left(a^2\right)^2=x^2$

Por lo tanto el resultado final será:

$$\boxed{\frac{a^4}{b^3}=\frac{x^2}{2x}=\frac{1}{2x}}$$

Si a, b son números reales y n es un número natural impar, entonces: $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $a = b^n$

Si a y b son números reales **positivos** o nulos y n es un número natural par entonces: $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $a = b^n$

Veamos algunas propiedades…

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Recordar que si n es par entonces a y b deben ser reales mayores o iguales a 0

***Importante!!!***

***Las operaciones entre números reales tienen solución única:*** $\sqrt{16} = 4$ y **no** $\pm 4$

Si en cambio, nos pidieran encontrar el o los número/s que elevado/s al cuadrado dan 16, o sea buscar: x tal que $x^2 = 16$, la respuesta correcta es -4 y 4, pues ambos números verifican que $(4)^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$. .

En este caso no estamos resolviendo la operación "raíz cuadrada" sino la ecuación $x^2 = 16$. Este tema será retomado más adelante en nuestra unidad de ecuaciones.

**Racionalización**

En ciertas expresiones como por ejemplo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ resulta útil eliminar el radical del denominador. Para lograrlo, debemos multiplicar numerador y denominador por $\left(\sqrt[3]{2}\right)^n$ con n, un natural tal que al realizar el producto de $\sqrt[3]{2}$ por $\left(\sqrt[3]{2}\right)^n$ lleguemos a una expresión de la forma $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ de manera que podamos simplificar la raíz con la potencia y obtengamos como resultado 2

En este caso particular n debe ser 2, de esta forma:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2}$$

Este procedimiento se denomina **racionalización de denominador.**

Si la expresión es de la forma $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ , para racionalizar deberemos multiplicar numerador y denominador por la expresión $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ .

De esta forma $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

Cálculo Auxiliar

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2+\cancel{\sqrt{x}\sqrt{y}}\cancel{-\sqrt{x}\sqrt{y}}-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y$$

1- Reduzcan a la mínima expresión

i) $x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Resolución:

Podemos comenzar por aplicar propiedad distributiva:

$$x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}$$

En el primer término podemos escribir $\sqrt{x}$ como potencia $x^{\frac{1}{2}}$ y sumar los exponentes. Por otra parte en el segundo término podemos racionalizar…

$$x\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+\frac{x\sqrt{x}}{x}$$

Simplificamos y re-escribimos como raíz: $x^{\frac{3}{2}}+\frac{x\sqrt{x}}{x}=\boxed{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$

ii) $\dfrac{(m.n)^{-1/4}\left(\dfrac{n^3}{m^2}\right)}{2\sqrt[3]{m.n^{-2}}}$

La expresión $(m.n)^{-1/4}$ puede ser re-escrita como $\frac{1}{m^{1/4}.n^{1/4}}$

De esta forma la expresión original nos queda: $\dfrac{\dfrac{1}{m^{1/4}n^{1/4}}\left(\dfrac{n^3}{m^2}\right)}{2\sqrt[3]{m.n^{-2}}}$ Si ahora en el numerador aplicamos las propiedades de producto y cociente de igual base: $\dfrac{\dfrac{n^{11/4}}{m^{9/4}}}{2\sqrt[3]{m.n^{-2}}}$

El denominador, por su parte, podemos expresarlo como $2\sqrt[3]{m.n^{-2}} = 2\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{n^{-2}} = 2\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^2}} = 2\sqrt[3]{m}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n^2}}$

Por lo tanto

Expresamos todo como potencia y aplicamos la propiedad de producto de potencias de igual base

$$\dfrac{\dfrac{n^{11/4}}{m^{9/4}}}{\dfrac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n^2}}} = \frac{n^{11/4}}{m^{9/4}}.\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\sqrt[3]{m}} = \frac{n^{11/4+2/3}}{2m^{9/4+1/3}}. = \frac{n^{41/12}}{2m^{31/12}} = \frac{1}{2}\sqrt[12]{\frac{n^{41}}{m^{31}}}.$$

2- Sabiendo que x-y=20 y $\sqrt{y}+\sqrt{x}=4$ calculen $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

….Les damos un tiempo para que lo piensen….

¿Pudieron resolverlo?

Ahora vamos a resolverlo para poder corroborar sus respuestas…

Si a partir de $\sqrt{y}-\sqrt{x}$, racionalizamos el numerador multiplicando por $\sqrt{y}+\sqrt{x}$ llegamos a la expresión: $\sqrt{y}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \dfrac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = -\dfrac{20}{4} = -5$

3- Encuentren tres números consecutivos de manera tal que la diferencia entre el cuadrado del que está en el medio y el producto de los otros dos sea lo más grande posible.

Les dejamos unos minutos para pensar…

Si pensamos tres números consecutivos concretos 3, 4, 5 la diferencia entre el cuadrado del que está en el medio y el producto de los otros dos nos queda 16-15=1

Pensemos en otro caso: 5,6,7… 36-35 =1

-1, -2,-3…. 4-3=1

Aparentemente la cuenta siempre da 1, sin embargo el trabajar con números concretos no nos permite generalizar que esto ocurrirá para cualquier terna de números consecutivos.

Intentemos ahora generalizar lo hecho anteriormente…

Los tres números consecutivos pueden escribirse como $a$, $(a+1)$ y $(a+2)$, o bien $(a-1)$, $a$ y $(a+2)$

Se les ocurre otra forma??

Nos piden que la diferencia entre el cuadrado del que está en el medio, en el primer caso: $(a+1)^2$ y el producto de los otros dos, en este caso $a.(a+2)$ sea lo mas grande posible…

Escribamos esa diferencia:

$$(a+1)^2 - a.(a+2) = a^2 + 2a + 1 - (a^2 + 2a) = a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a = 1 \text{ !!!}$$

Esto quiere decir que independientemente de cuanto valga a esta diferencia siempre nos dará 1!

Es importante que para llegar a la conclusión anterior, representen estos tres números en forma genérica como a (a+1) y (a+2) y no proponiendo números consecutivos concretos como 3, 4,5.

Trabajar con expresiones genéricas permite dar mayor generalidad a la conclusión, es decir puedo afirmar que **para todo a,** el resultado es 1. Esta conclusión no podría obtenerse si se trabaja con números concretos como 3, 4 y 5.

¿Y si a los números los expresamos como $(a-1)$, $a$ y $(a+2)$?

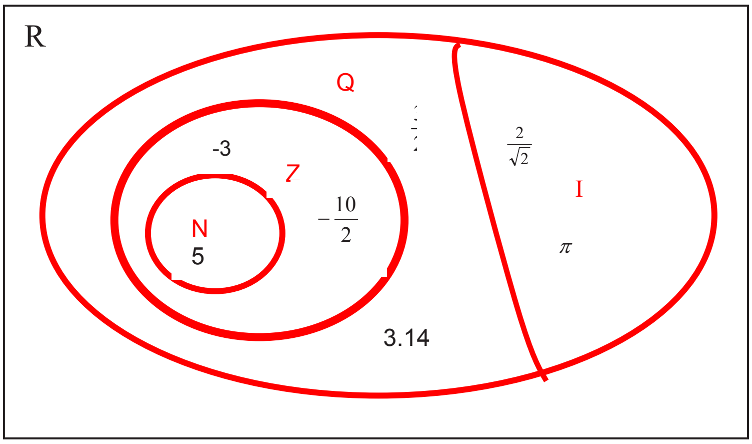
También es importante notar que si bien la expresión $(a+1)^2 - a.(a+2)$ es válida para todo a real, el concepto de número consecutivo sólo es válido en el conjunto de los números enteros. Por qué??

Esto último significa contextualizar el problema es decir, indicar qué valores puede tomar la variable en función del contexto del problema.

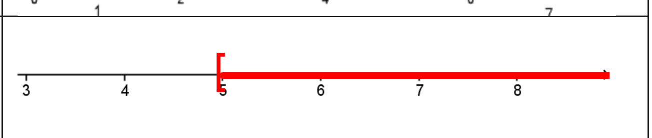
Contextualizar un problema es imprescindible para validar las soluciones del mismo, es decir indicar qué soluciones tienen sentido para el problema y cuáles no.

Respuestas a los ejercicios de aplicación planteados.

1)




2)

| | | |
|---|---|---|
| $\left\{x \in \Re \,/\, -\sqrt{3} < x \leq \frac{5}{2}\right\}$ | $\left(-\sqrt{3}\,, \frac{5}{2}\right]$ |  |
| $\{x \in \Re \,/\, 1 < x < 7\}$ | (1,7) |  |
| $\{x \in \Re \,/\, -5 \leq x\}$ | $[-5,\, +\infty)$ |  |

## Unidad 1 · Actividades

Referencias para actividades:

**RO·CC** Resolución optativa con clave de corrección

**RO·P** Resolución optativa para enviar al profesor

**TPO** Trabajo Práctico Obligatorio

**RO·P**

**Ejercitación propuesta**

1- Expresar en notación de intervalos y graficar

a) $[-2,3)\cap[2,5]$

b) $[-2,3)\cup[2,5]$

c) $(-\infty,2)\cap[-2,+\infty)$

d) $A\cap B$ con $A=\{x\in\Re\,/\,x>2\}$, $B=(-1,0)$

2- Si $a=\sqrt{5}+2$, $b=2\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ y $c=\sqrt{20}+\frac{1}{2}$, decidir, sin utilizar calculadora, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta:

a) b-2a es un número irracional.

b) b-c es un número racional.

c) b/c es un número racional.

3- Completar con los signos "$\neq$" o "$=$" sin usar calculadora y justifique con propiedades de los números reales.

a) $(3+2)^3 \ldots\ldots 3^3+2^3$

b) $\left(a^3\right)^5 \ldots\ldots a^8$ con $a\neq 1$ y $a\neq 0$

con $a\neq 0$

c) $8^{-3}\ldots\ldots 8^{\frac{1}{3}}$

d) $\pi \;\ldots.\; 3.14$

e) $-a^3 \;\ldots\; (-a)^3$

f) $-a^4 \;\ldots\; (-a)^4$

g) $\frac{3+a}{3}\ldots.\; a$

h) $8^{-3}\ldots\ldots\left(\frac{1}{8}\right)^3$

4- Calcular y reducir a la mínima expresión

a) $\sqrt{3\sqrt{5}-3}\;.\;\frac{\sqrt{3\sqrt{5}+3}}{5}$

b) $3\sqrt{2}+\left(5+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $2\sqrt{5}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$

d) $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-4\left(3+\sqrt{5}\right)+\sqrt{20}$

5- Demostrar que $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ es solución de la ecuación $2x^2-2x-1=0$

6- Reducir a la mínima expresión:

a) $\dfrac{(x^{-1}-y^{-1})}{\left(x^{-1}+\dfrac{1}{y}\right)}$ $x \neq 0,\ y \neq 0$

c) $\dfrac{a^2\, 2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{8a^{-1}}}+\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^5}}$ con $a \neq 0$

b) $\dfrac{a^2 b^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} b^{-1}}{b^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{4}}}$ $a \neq 0,\ b \neq 0$

7- Racionalizar y llevar a la mínima expresión

a) $\dfrac{b^2-9}{\sqrt{3}-\sqrt{b}}$ con $b \geq 0$ y $b \neq 3$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{4+x}+\sqrt{x}}$ con $x \geq 0$

8- Si se sabe que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ y $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$, calcular sin resolver el sistema:

a) $2\sqrt{x}$

b) $x-y$

Podrán encontrar más ejercitación en el cuadernillo : Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas examen de ingreso (EDI). Curso de apoyo. Comprensión de textos. Matemática. Autor: Universidad Argentina de la Empresa Secretaría Académica y legal. 2011.

**Respuesta de los Ejercicios correspondientes a la Unidad 1**

1- a) [2,3) b) [-2,5] c) [-2,2) d) $\varnothing$

2- a) falso b) verdadero c) falso

3-

a) $(3+2)^3 \neq 3^3+2^3$

b) $\left(a^3\right)^5 \neq a^8$

c) $8^{-3}. \neq 8^{\frac{1}{3}}$

d) $\pi \neq$ 3.14

e) $-a^3 = (-a)^3$

f) $-a^4 \neq (-a)^4$

g) $\dfrac{3+a}{3} \neq a$

h) $8^{-3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^3$

4-

a) $\dfrac{6}{5}$

b) $27+\dfrac{23}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{5+9\sqrt{5}}{4}$

d) $2+4\sqrt{5}$

6-

a) $\dfrac{y-x}{y+x}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}}{b}$ c) $a^3+\dfrac{1}{a}$

7-

a) $-(b+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{b}\right)$ b) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x}$

8-

a) 5 b) 4