Ejercicio1:

a) Justificar si existe una transformación lineal que verifique:

$$T:\Re^2 \to \Re^3 \ / \ T(1;2)=(1;2;3)\ ,\ T(0;1)=(0;3;1)\ \text{ y } T(2;5)=(2;7;0).$$

b) Hallar una transformación lineal que satisfaga las siguientes condiciones

$$T:\Re^2 \to \Re^3 \ / \ T(2;1)=(2;1;1) \text{ y } T(0;1)=(1;2;0)$$

Ejercicio 2:

Dados los puntos $P=(-5;1;0)$ y $Q=(-1;0;K)$ y la recta *r* de ecuación $\frac{x+1}{2}=y=\frac{z-2}{3}$

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por P y contiene a la recta *r*
b) Obtener, si es posible, el valor de K para que el punto Q pertenezca al plano π.
c) Hallar el simétrico del punto A = (-1; 4; 0) respecto de la recta “r”.

Ejercicio 3:

Indicar la única respuesta correcta. Justificar.

La distancia del punto $A=(2;3)$ a la recta de ecuación 2x + y = 0 es:

i) $\frac{\sqrt{245}}{5}$ ii) $\frac{\sqrt{147}}{5}$ iii) 3 iv) Ninguna de las anteriores

Ejercicio 4:

Hallar la proyección del punto P = (-2; 0 ; 1) respecto del plano que pasa por los puntos (3 ; 1 ; -2), (1 ; 0 ; -1) y (-1 ; 1; 0).

Ejercicio 5:

Dado el subespacio $S=\left\{(x;y;z;w)\in R^4 \ / \ 2x-2y+z=0 \ \wedge \ 3y-9w=0\right\}$

a) Hallar una la dimensión y una base B de S
b) Hallar las coordenadas del vector $\vec{u}=(1;9;16;3)$ respecto de la base B
c) Hallar el complemento ortogonal de S, la dimensión y una base del mismo.

Resolución

Ejercicio1:

a) Justificar si existe una transformación lineal que verifique:

$$T:\Re^2 \to \Re^3 \ / \ T(1;2)=(1;2;3)\ ,\ T(0;1)=(0;3;1)\ \text{ y } T(2;5)=(2;7;0).$$

Los vectores $\vec{v}$ = (1; 2) y $\vec{w}$ = (0 ; 1) son linealmente independientes; dado que estamos trabajando en R^2, forman una base de este espacio vectorial. Escribimos el vector (2 ; 5) como combinación lineal de los elementos de esta base:

$$(2\ ;\ 5) = a\ (1\ ;\ 2) + b\ (0\ ;\ 1) \rightarrow (2\ ;\ 5) = (\ a\ ;\ 2\ a + b).$$

Igualando componente a componente, obtenemos que a = 2 y b = 1. Aplicando la función T y utilizando la definición de transformación lineal:

$$T(2;\ 5) = 2\ T(1\ ;\ 2) + 1.\ T(0\ ;\ 1)$$

Dado que T(1; 2) = (1; 2; 3) y T(0; 1) = (0; 3; 1):

$$T(2;\ 5) = 2.(1;\ 2;\ 3) + (0;\ 3;\ 1) = (2\ ;\ 7;\ 6) \neq (2\ ;\ 7;\ 0).$$

Por lo tanto, no existe una transformación lineal T que verifique lo pedido.

b) Hallar una transformación lineal que satisfaga las siguientes condiciones

$$T: \Re^2 \rightarrow \Re^3 \ / \ T(2;1) = (2;1;1) \text{ y } T(0;1) = (1;2;0)$$

El conjunto B = {(2 ; 1), (0; 1)} es una base de R^2. Escribimos un elemento (x; y) de este espacio como combinación lineal de los elementos de B:

$$(x ; y) = a\,(2; 1) + b\,(0 ; 1) \rightarrow (x ; y) = (2a ; a + b) \rightarrow a = \frac{x}{2} \text{ y } b = y - \frac{x}{2} = \frac{2y - x}{2}$$

Luego, $(x ; y) = \frac{x}{2}(2 ; 1) + \left(\frac{2y-x}{2}\right)(0 ; 1)$. Aplicando la función T y la definición de transformación lineal:

$$T(x ; y) = \frac{x}{2} T(2 ; 1) + \left(\frac{2y-x}{2}\right) T(0 ; 1)$$

Dado que T(2; 1(= (2; 1; 1) y T(0; 1) = (1; 2; 0):

$$T(x; y) = \frac{x}{2}(2; 1; 1) + \left(\frac{2y-x}{2}\right)(1; 2; 0)$$

$$T(x; y) = \left(x + \frac{2y-x}{2};\ \frac{x}{2} + 2y - x;\ \frac{x}{2}\right)$$

$$T(x ; y) = \left(\frac{x+2y}{2};\ \frac{4y-x}{2};\ \frac{x}{2}\right)$$

Ejercicio 2

Dados los puntos $P = (-5;1;0)$ y $Q = (-1;0;K)$ y la recta *r* de ecuación $\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por P y contiene a la recta *r*

Una forma de resolver este apartado es la siguiente: dado que la recta r está contenida en el plano, el vector normal es perpendicular al vector director de la recta. Por otro lado, los puntos P = (-5; 1; 0) y R = (-1; 0; 2), que pertenece a la recta r, son dos puntos de π por lo que el vector $\overrightarrow{PR} = (-1 ; 0 ; 2) - (-5; 1 ; 0) = (4 ; -1 ; 2)$ es ortogonal al vector normal del plano.

Buscamos un vector ortogonal a (4; -1; 2) y (2 ; 1; 3) mediante el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5: -8 ; 6)$$

La ecuación del plano π es de la forma: -5x - 8y + 6z = k. Para hallar el valor de la constante k remplazamos en la ecuación por un punto cualquiera que pertenezca al plano, por ejemplo P: -5(-5) - 8. 1 + 6.0 = k → k =17. Una ecuación para el plano π es -5x - 8y + 6z = 17.

b) Obtener, si es posible, el valor de K para que el punto Q pertenezca al plano π.

Para que el punto Q = (-1 ; 0; k) pertenezca al plano, tiene que verificar la ecuación. Es decir:

$$-5.(1) - 8.0 + 6k = 17$$
$$-5 + 6k = 17$$
$$6k = 22$$
$$k = \frac{11}{3}$$

c) Hallar el simétrico del punto A = (-1; 4; 0) respecto de la recta "r".

El punto A no pertenece a la recta r. Para hallar el simétrico del punto A, buscamos la ecuación del plano π'_1 perpendicular a r que pasa por A: dado que el plano es perpendicular a la recta, el vector director de ésta y la normal del plano son paralelos, por lo que $\vec{n} = (2\ ;\ 1;\ 3)$. Como π'_1 para por el punto A, tenemos que 2.(-1) + 4 + 3.0 = k → k = 2. Luego, π'_1 : 2x + y + 3z = 2. Hallamos la intersección entre el plano π'_1 y la recta r

$$r:\ \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3} = \lambda \to \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda + 2 \end{cases}$$

Remplazando en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} 2(2\lambda - 1) + \lambda + 3.\,(3\lambda + 2) &= 2 \\ 14\lambda + 4 &= 2 \\ 14\lambda &= -2 \\ \lambda &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Por lo que el punto de intersección (la proyección de A sobre π'_1) es A' = $(-\frac{9}{7}\ ;\ -\frac{1}{7}\ ;\ \frac{11}{7})$. Dado que A´es el punto medio del segmento A A'', siendo A'' el simétrico de A respecto de la recta r, tenemos que

A'' = 2 A' - A = $2(-\frac{9}{7}\ ;\ -\frac{1}{7}\ ;\ \frac{11}{7})$ - (-1 ; 4; 0) = $\left(-\frac{11}{7}\ ;\ -\frac{30}{7}\ ;\ \frac{22}{7}\right)$.

<u>Ejercicio 3</u>:

Indicar la única respuesta correcta. Justificar.

La distancia del punto $A = (2;3)$ a la recta de ecuación 2x + y = 0 es:

i) $\frac{\sqrt{245}}{5}$ ii) $\frac{\sqrt{147}}{5}$ iii) 3 iv) Ninguna de las anteriores

Como estamos en el plano, podemos buscar la ecuación de la recta perpendicular a y = -2x que pasa por el punto A. La ecuación de esta recta es de la "pinta" y = $\frac{1}{2}x + b$ y, dado que pasa por el punto (2; 3): 3 = $\frac{1}{2}2 + b \to b = 2$. Por lo tanto, la recta buscada tiene ecuación y = $\frac{1}{2}x + 2$. Para hallar la distancia entre ambas rectas, necesitamos encontrar la proyección de A sobre r, A', punto que obtenemos a partir del cálculo del punto de intersección entre ambas rectas:

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x$$

$$\frac{5}{2}x = -2$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

De donde se deduce que y = $\frac{8}{5}$ y entonces A' = $\left(-\frac{4}{5} \ ; \ \frac{8}{5}\right)$. La distancia de A a la recta el la morma del vector AA' :

$$A' - A = \left(-\frac{4}{5} ; \frac{8}{5}\right) - (2 ; 3) = \left(-\frac{14}{5} ; -\frac{7}{5}\right) \rightarrow d(A, r) = \sqrt{\left(-\frac{14}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{245}{25}} = \frac{\sqrt{245}}{5}$$

Por lo que la respuesta correcta es la ii.

<u>Ejercicio 4</u>:

Hallar la proyección del punto P = (-2; 0 ; 1) respecto del plano que pasa por los puntos (3 ; 1 ; -2), (1 ; 0 ; -1) y (-1 ; 1; 0).

Busquemos la ecuación del plano que pasa por los puntos dados:

(1 ; 0 ; -1) - (-1; 1; 0) = (2 ; -1 ; -1)
(3 ; 1; -2) - (-1; 1; 0) = (4 ; 0 ; -2)

Por lo tanto, el vactor normal al plano es ortogonal a los vectores (2; -1; -1) y (4 ; 0; -2). Calculamos el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2 ; 0 ; 4)$$

La ecuación del plano buscado es de la forma: 2x + 4z + k = 0. Dado que el punto (1 ; 0 ; -1) pertenece al plano: 2 - 4 + k = 0 → k = 2. El plano que pasa por os puntos dados tiene ecuación 2x + 4z = -2 o, equivalentemente, x + 2z = -1. Notemos que el punto P no pertenece al plano ya que no verifica la ecuación.

Para hallar la proyección de P sobre el plano, buscamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por P. El vector director de esta recta es paralelo a la normal del plano por lo que la ecuación de la recta buscada es
$r: \ X = t(1 ; 0 ; 2) + (-2 ; 0 ; 1)$ con $t \in R$. La proyección del punto A sobre el plano es el punto de intersección entre la recta y el plano.

De la ecuación de la recta: $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 0 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ Remplazando en la ecuación del plano:

$$(t - 2) + 2(2t + 1) = -1$$
$$5t = -1$$
$$t = -\frac{1}{5}$$

Luego, x = - $\frac{11}{5}$, y = 0, z = $\frac{3}{5}$. Por lo que A' = $\left(-\frac{11}{5} ; 0 ; \frac{3}{5}\right)$.

Ejercicio 5:

Dado el subespacio $S=\{(x;y;z;w)\in R^4 \,/\, 2x-2y+z=0 \quad \wedge \quad 3y-9w=0\}$

a) Hallar la dimensión y una base B de S
b) Hallar las coordenadas del vector $\vec{u}=(1;9;16;3)$ respecto de la base B
c) Hallar el complemento ortogonal de S, la dimensión y una base del mismo.

a) Para obtener una base de S notemos que de la primera ecuación se obtiene que z = 2y - 2x mientras que de la segunda ecuación se tiene que w = $\frac{1}{3}y$. Por lo tanto, los puntos (x; y ; z; w) que pertenecen a S tienen la forma:

$$(x;\ y\ ;\ z\ ;\ w) = (x\ ;\ y\ ;\ 2y-2x\ ;\ \frac{1}{3}y\ ) = x\,(1\ ;0;-2\ ;\ 0) + y\,(0\ ;1\ ;2\ ;\ \frac{1}{3}) \quad \text{con } x,y\in R$$

Una base posible para S es B = $\left\{ (1\ ;0\ ;-2\ 0)\ ,\ \left(0\ ;1\ ;2\ ;\ \frac{1}{3}\right)\right\}$ (observar que ambos vectores son linealmente independientes) y la dimensión de S es igual a 2.

Observación: la base propuesta no es única, sino una de las posibles.

b) Planteamos el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los elementos de la base e igualamos componente a componente. Notemos que el vector pertenece al subespacio:

$$\vec{u} = (1\ ;9\ ;16\ ;3) = \alpha\,(1\ ;0\ ;-2\ ;0) + \beta\left(0\ ;1\ ;2\ ;\frac{1}{3}\right) \rightarrow 1=\alpha\ ,\ 9=\beta\ .\ \text{Por lo que } C_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}.$$

c) Dado que dim(R^4) = dim(S) + dim($S^\perp$) sabemos que dim($S^\perp$) = 2. Los elementos del complemento ortogonal de S son ortogonales a los elementos de la base B; por lo que:

$$(x\ ;y\ ;z\ ;\ w) \in S^\perp \leftrightarrow (x;y;z;w).(1\ ;0\ ;-2\ ;0)=0 \leftrightarrow x-2z=0$$

$$(x;y;z;w).\left(0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\frac{1}{3}\right)=0 \leftrightarrow y+2z+\frac{1}{3}w=0$$

De la primera ecuación, x = 2z mientras que de la segunda ecuación obtenemos y = -2z - $\frac{1}{3}w$. Los vectores de $S^\perp$ son de la forma (x ; y ; z; w) = (2z ; -2z - $\frac{1}{3}w$, z, w) = z (2 ; -2; 1; 0) + w (0 ; -$\frac{1}{3}$; 0; 1) con w, z $\in$R. Una base posible para $S^\perp$ es

B' = $\left\{ (2\ ;\ -2;\ 1;\ 0)\ ,\ (0\ ;-\frac{1}{3}\ ;\ 0;\ 1)\right\}$