

J. Roederer, *Mecánica Elemental*  
EUDKBA, *Manuales*, S. A. Argentina  
(1979)

## Capítulo 1

### EL PROCESO DE MEDICIÓN

#### a.- Magnitudes físicas

La física es una ciencia experimental. Estudia los procesos del mundo físico y establece un cierto número limitado de leyes con las cuales se puede explicar la mayor variedad posible de los fenómenos observados y predecir el resultado de experiencias nuevas. Que sea ciencia experimental significa que los fenómenos en análisis deben observarse y medirse. Cualquier aseveración en física, la cual, o cuyas consecuencias lógicas, no sea comprobable experimentalmente, carece de sentido.

Vamos a analizar el proceso de medición; proceso fundamental para la física y punto de partida de toda teoría física. El proceso de medición es un proceso físico, una operación física experimental, en la que intervienen necesariamente tres sistemas: el "sistema objeto" al cual queremos medir; el sistema de medición o "aparato de medición", y el "sistema de comparación" que definimos como unidad, y que suele venir unido o estar incluido en el aparato o instrumento de medición.

Por ejemplo: en el proceso llamado "medición de longitud" intervienen:

1. El objeto cuya longitud queremos medir;
2. El instrumento, por ejemplo, una regla;
3. La unidad (cierta escala marcada en la misma regla, o en cierta barra patrón).

Para definir unívocamente el proceso de medición es necesario dar además la "receta" mediante la cual deben ponerse en interacción el sistema objeto, el aparato de medición y la unidad. En particular, el procedimiento físico correspondiente a esta "receta", realizado entre el aparato de medición y la unidad, se denomina "calibración" del aparato.

Por ejemplo, la "receta" para medición de longitudes sería: tó mese un cierto instrumento llamado regla, en la que están marcadas cierto número de divisiones; hágase coincidir la primera división de la regla con el extremo del objeto cuya longitud se quiere determinar; determinese la división que coincide con el otro extremo del objeto. Por otra parte, realícese el mismo procedimiento con el objeto que se definió como unidad (calibración de la regla).

Medir temperaturas significa: "tomar un instrumento llamado termómetro, ponerlo en contacto térmico con el sistema que queremos medir, esperar que se establezca equilibrio térmico, medir la longitud de la columna de mercurio, etc. ".

Medir el peso de un cuerpo significa: "tomar el cuerpo, ponerlo sobre el platillo de un instrumento llamado balanza, colocar pesos unidad en el otro platillo hasta equilibrar la balanza, leer el número de pesos unidad".

Cada proceso de medición define lo que se llama una magnitud física. Estas últimas están unívocamente determinadas por el proceso de medición. Por ejemplo, se define como "longitud" aquello que se mide en el proceso descrito como "medición de longitudes". "Peso" es aquello que se mide con el proceso físico denominado "pesar un cuerpo". Esto podría parecer trivial; sin embargo, es importante notar que no hay otra forma de definir una magnitud física más que por la descripción del proceso de medición en sí. En otras palabras, el concepto físico primario es el de proceso de medición, y no el de magnitud física.

Hay muchos procesos de medición que definen una misma magnitud. Por ejemplo, hay muchas formas de medir una longitud. Son procesos de medición equivalentes.

El resultado de un proceso de medición es un número real, que se llama valor de la magnitud en cuestión. Se lo interpreta intuitivamente como el "número de veces que la unidad está contenida en la magnitud en cuestión". Dos objetos tienen una cierta magnitud dada igual cuando el resultado del proceso de medición (que define la magnitud en cuestión) aplicado a ambos objetos es el mismo, o sea cuando se obtiene el mismo valor numérico.

Tenemos en resumen dos conceptos definidos a partir del proceso de medición:

Proceso de medición  $\left\{ \begin{array}{l} \text{define una magnitud física} \\ \text{da como resultado el "valor"} \\ \text{de la magnitud} \end{array} \right.$

La suma de dos magnitudes (de igual tipo, por supuesto) debe definirse por un proceso físico. Por ejemplo, la longitud "suma" de las longitudes de dos varillas, es la longitud del sistema que se obtiene alineando paralelamente las dos varillas en fila, una a continuación de la otra, haciendo coincidir el extremo de una con el principio de la segunda. Una magnitud física es "genuina" cuando el valor de la magnitud suma es la suma de los valores de las magnitudes originales. Esto no es trivial. Si ello no sucede, la magnitud en cuestión no es una magnitud física genuina. Por ejemplo, la temperatura no es aditiva. Si quisiéramos definir la

operación "suma" de temperaturas como proceso físico (juntando dos cuerpos de temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  y esperando que se establezca equilibrio térmico), veremos invariablemente que el valor numérico de la temperatura del sistema final o suma no es la suma de los valores  $T_1 + T_2$ .

El valor de una magnitud dada es independiente del proceso particular de medición, dependiendo solo de la unidad elegida. Como esta unidad, en principio, es arbitraria y se fija por convención, es necesario añadir un símbolo al valor numérico de una magnitud dada, para indicar cuál unidad ha sido utilizada como comparación. Por ejemplo, se escribe "1 m", "10 pies", "25 seg", etc. Decir que una longitud es "2,5" no tiene sentido físico, si no se indica la unidad de referencia.

Cuando cambiamos de unidad, el valor numérico de una misma magnitud cambia. Es necesario conocer la regla de transformación para los valores numéricos de las magnitudes.

Sean  $L$  y  $L'$  dos unidades de longitud distintas, y  $x$  el número real que representa el valor de la longitud de un objeto dado, cuando se usa  $L$  como unidad. Sea además  $\lambda$  el número real que representa el valor de la longitud de la unidad  $L$ , medida con la unidad  $L'$  (número de veces que la unidad  $L'$  está contenida en  $L$ ). La regla de transformación que sufre el número  $x$  cuando se pasa de la unidad  $L$  a la  $L'$ , es:

$$x' = x \cdot \lambda \quad \dots(1.1)$$

o sea, el "nuevo" valor es igual al "viejo" valor multiplicado por el número de veces que la nueva unidad está contenida en la vieja unidad. Observemos que la (1.1) es una relación entre números.

Para recordar la regla de transformación se utiliza la convención arriba indicada para escribir los valores numéricos de una magnitud. Sea una longitud de "3 m". Ello significa que " $x = 3$ " y "la unidad  $L$  es el metro patrón". Si ahora cambiamos de unidad, la operación por realizar es: remplazar el símbolo  $m$  por el valor (número real) de esa unidad (metro) medido con la nueva unidad y hacer el producto correspondiente.

Por ejemplo, si la nueva unidad  $L'$  es el  $cm$ , dado que la longitud del metro patrón contiene 100 veces al centímetro, el nuevo valor de  $x'$  será, según la (1.1):

$$x' = 3 \cdot 100 = 300$$

O sea, con la nueva unidad escribimos "300 cm".

Hay que tener mucho cuidado: "3 m" ó "300 cm" es una expresión simbólica. El "m" ó "cm" es un símbolo que indica dos cosas:

1. la unidad que se eligió al expresar el valor;
2. nos recuerda que si se cambia la unidad, debemos multiplicar el valor original de la magnitud por el valor de la unidad original medida con la nueva unidad.

Por ese motivo, la igualdad:

$$3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$$

es simbólica y no tiene significado algebraico. El significado físico es: la longitud cuyo valor es 3 cuando la unidad es el metro es la misma que aquella cuyo valor es 300, cuando la unidad usada es el centímetro.

Hemos dicho que el proceso de medición, punto de partida de toda teoría física, es, en esencia, una interacción entre tres sistemas: el sistema objeto, el aparato de medición y el sistema unidad. Supongamos ahora que queremos medir la temperatura de un centímetro cúbico de agua con un termómetro de dos metros de largo y que contiene medio kilogramo de mercurio. ¿Qué sucede? Lo único que lograremos es que el centímetro cúbico de agua adquirirá la temperatura del termómetro. La lectura del termómetro nada tendrá que ver con la temperatura inicial del agua. Consideremos otro caso: queremos medir la velocidad de un proyectil por el impacto que causa sobre un objeto. Si bien podemos obtener información sobre la velocidad del proyectil, habremos destruido con nuestra medición nuestro sistema objeto. Sería imposible volver a repetir la medición con el mismo proyectil. En ambos ejemplos, el proceso de medición ha perturbado sustancialmente el sistema que quisimos medir.

Pensándolo bien, es fácil darse cuenta que en todo proceso de medición el aparato de medición perturba en mayor o menor grado el sistema que se está midiendo. Lo que la física clásica supone es que si la perturbación resultó apreciable, siempre es posible construir un aparato de medición más perfecto, con el que se obtendría una perturbación menor.

Este principio no "funciona" en el dominio atómico. Efectivamente, se comprueba experimentalmente que cuando nos aproximamos al dominio atómico, nunca podemos perfeccionar nuestros procesos

de medición más allá de cierto límite; es decir, nunca podemos reducir la perturbación del proceso de medición a cero. En otras palabras: jamás podría observarse y medir un sistema atómico sin molestarlo o perturbarlo sensiblemente.

La llamada "física clásica" fue edificada sobre la hipótesis de la posibilidad de perfeccionar los procesos de medición indefinidamente. Como esto no vale en el dominio atómico, la física clásica no vale en este dominio. No hay que sorprenderse entonces que en ese dominio pasen "cosas raras", como por ejemplo el comportamiento "dual" de la materia: según por qué método se observe una partícula atómica, ésta parece comportarse como "onda" o como "partícula". Esto deja de aparecer como "misterio de la naturaleza" si se tiene bien presente que en el dominio atómico es imposible "observar sin perturbar", influyendo el propio proceso de medición sobre lo que se está observando. "Lo que es" la partícula mientras que no se la esté observando (mientras que no esté interactuando) no tiene sentido físico, por lo expresado en la última frase del primer párrafo de este Capítulo.

#### b.- Errores de medición

Volvamos al proceso de medición y consideremos el valor numérico obtenido. Dijimos que es un número real. Un número real en el sentido matemático está representado por un número infinito de guarismos. Es evidente que esto no se obtiene como resultado de una medición. Hay un límite a priori dado por el instrumento o aparato de medición, en el cual aparece necesariamente un cierto límite de apreciación, dado por el mínimo valor distinguible en una medición.

Si por ejemplo se tiene una regla graduada en cm y mm, en la cifra que expresa el valor de una longitud dada, solo estará asegurado el guarismo correspondiente al milímetro. Por ejemplo: en el valor "3,25633" no tendrían sentido las dos últimas cifras (33) (pues solo serían producto de la imaginación).

Si se repite una medición varias veces, el resultado expresado en cifras significativas dadas por la escala del instrumento, debería ser el mismo en cada caso, siempre que la magnitud por medirse se mantenga constante. Pero en general esto no sucede. Aun si en cada medición podemos asegurar a priori hasta un cierto número de guarismos, los valores obtenidos en mediciones consecutivas no suelen coincidir.

Consideremos un ejemplo; yo mido una cierta longitud cien veces con mucho cuidado, y obtengo los mismos valores numéricos en cada medición. Pero, ahora tomo unas copas de vino y vuelvo a hacer cien mediciones. ¿Volveré a obtener valores coincidentes en cada caso? Evidentemente no; la "borrachera" me impedirá ver nítidamente las líneas y los números de la regla, así como los confines del objeto que estoy midiendo. Si, por otra parte, tomo una regla muy corta y (sin estar borracho) mido la longitud de un objeto largo, tampoco obtendré el mismo resultado en todas las mediciones. Esto se debe a que en el proceso de transporte de la regla se cometen inevitablemente ciertos errores mecánicos.

Supongamos entonces que hemos hecho una serie de  $N$  mediciones de una misma magnitud, que han dado los valores numéricos  $x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_N$ , todos ellos expresados en cifras significativas exclusivamente. ¿Qué hacemos con estos valores? Vamos a plantearnos claramente el problema: tenemos una serie de  $N$  mediciones con  $N$  resultados en general diferentes. Sabemos, además, que la magnitud dada puede tener, en realidad, un solo valor numérico. ¿Cómo podemos "fabricar" de esos  $N$  valores uno solo, que esté "lo más cerca posible" del "verdadero valor", al cual desconocemos? En términos más correctos: ¿Cómo podemos volcar la información dada por esos  $N$  números hacia uno solo, y que podamos adoptar como el "el valor más probable de la magnitud"?

Sea  $\bar{X}$  el número que adoptamos como "valor más probable" de la magnitud. Las diferencias  $\bar{X} - x_i = \varepsilon_i$  se llaman "desviación de cada medición" respecto de  $\bar{X}$ . Tendremos  $N$  desviaciones  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_N$ . Serán, en general, números positivos y negativos. La suma algebraica  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N$  no tendrá mucho significado físico. Incluso puede ser cero, aun siendo grandes los  $\varepsilon_i$ , si los valores positivos y negativos de los  $\varepsilon_i$  se compensan mutuamente. En cambio, la suma de los cuadrados, o suma de "desviaciones cuadráticas"

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_N^2 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$$

será una magnitud más representativa, que nos dará una idea global de cómo fluctúan los valores medidos  $x_i$  alrededor de  $\bar{X}$ . Es evidente que esa suma depende del valor que elijamos para  $\bar{X}$ :

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (\bar{X} - x_i)^2 = N\bar{X}^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Obtenemos una función cuadrática de  $\bar{X}$ , que pasa por un mínimo

para un cierto valor de  $\bar{X}$ . Con esta expresión encontramos la posibilidad para un criterio "razonable" (por ahora convencional) para definir el "valor más probable de una magnitud" obtenido a partir de  $N$  mediciones individuales  $x_i$ . Elegimos como tal al valor de  $\bar{X}$  que haga mínima la suma cuadrática de las desviaciones. Esto es lo más razonable que se puede hacer por ahora; más adelante quedará totalmente justificado.

O sea,  $\bar{X}$  debe satisfacer la siguiente condición de extremo:

$$\frac{d}{d\bar{X}} \sum \varepsilon_i^2 = 0.$$

O sea:

$$\frac{d}{d\bar{X}} (N\bar{X}^2 - 2\bar{X} \sum x_i + \sum x_i^2) = 2N\bar{X} - 2\sum x_i = 0$$

$$\therefore \boxed{\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}} \quad \dots(1.2)$$

(promedio aritmético de las  $x_i$ ).

El promedio aritmético de los valores  $x_i$  es entonces lo que elegimos como "valor más probable" o "valor más razonable" de la magnitud en cuestión. Es el valor (único) que hace mínima la suma cuadrática de las desviaciones.

Volvamos a esa suma cuadrática  $\sum \varepsilon_i^2$ . Esta cantidad tiene el inconveniente de que su valor no solo depende de las fluctuaciones, sino también del número total de observaciones  $N$ . Efectivamente, es fácil comprender que esta suma de sumandos positivos puede ser arbitrariamente grande, aun para muy pequeños valores de  $\varepsilon_i$ , con tal de ser el número de sus sumandos ( $N$ ) suficientemente grande.

Para independizarnos de este número ocasional  $N$ , definimos la cantidad llamada "varianza":

$$v = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}$$

que es el promedio de las desviaciones cuadráticas, y que ahora sí solo depende de la forma en que los datos individuales fluctúan alrededor del promedio, siendo independiente del número total de observaciones. Las dimensiones físicas de  $v$  no son las

\* En realidad, por razones matemáticas debe definirse la varianza como  $v = \sum \varepsilon_i^2 / (N-1)$ . Pero como en física experimental siempre suele ser  $N \gg 1$ , la expresión dada arriba es una aproximación suficientemente buena.

de los datos originales, puesto que éstos figuran elevados al cuadrado. Por lo tanto, se introduce la raíz cuadrada de la varian-za:

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad \dots (1.3)$$

que tiene las mismas dimensiones que  $\bar{x}$  (por ejemplo: una longitud, si las  $x_i$  son longitudes), y que por lo tanto se puede comparar numéricamente con  $\bar{x}$ .  $\sigma$  nos da una idea cabal y precisa de la mayor o menor fluctuación o dispersión, en forma global, de los valores de  $x_i$  alrededor del promedio  $\bar{x}$ .  $\sigma$  se llama "dispersión o error standard de cada medición".\* Obsérvese que  $\sigma = 0$ , solo si cada uno de los  $\varepsilon_i$  es nulo, o sea, si todos los valores de  $x_i$  son iguales entre sí. Tal como la varianza,  $\sigma$  depende solo del proceso de medición en sí.

La cantidad  $\eta = \sigma/\bar{x}$  se llama error o desviación relativa de cada medición;  $100 \sigma/\bar{x}$  se llama error porcentual de cada medición. Obsérvese que el error relativo, que no tiene dimensiones, es una cantidad que nos representa la forma numérica más intuitiva posible del concepto de "error" o dispersión. Efectivamente, cuando decimos que un error dado es del 10 %, tenemos con ello una información sobre la calidad de la medición, que es totalmente independiente de lo que estamos midiendo. Ello no ocurre con el error standard absoluto: si decimos que en la medición de una longitud el error standard es de 10 cm, ello puede representar una medición excelente, si la longitud que se mide es de centenares de metros, pero puede significar una medición "mala", si el objeto medido tiene solo 20 cm. El error relativo, asimismo, permite una comparación de la calidad de mediciones de diferentes magnitudes entre sí.

Supongamos que hemos obtenido un promedio  $\bar{x}$  de una serie de mediciones  $x_1, \dots, x_N$ . Hagamos ahora otra serie de  $N$  mediciones en las mismas condiciones que la anterior, obteniendo los valores  $x'_1, \dots, x'_N$ . El promedio  $\bar{x}'$  de esta segunda serie no tiene por qué coincidir con el de la primera:

$$\bar{x}' \neq \bar{x}$$

Tampoco las desviaciones standard  $\sigma$  y  $\sigma'$  serán idénticas, aunque su orden de magnitud siempre será el mismo, puesto que re-

\* Otras denominaciones: error cuadrático medio, desviación o fluctuación standard de cada dato, etc.

presentan una característica del proceso de medición en sí, que, por hipótesis, es el mismo en ambas series.

En general, los promedios  $\bar{x}', \bar{x}'', \dots, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^M$ , obtenidos a través de  $M$  series de mediciones con  $N$  valores cada una, fluctuarán alrededor de un promedio general, o "promedio de los promedios", de valor

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}^i}{M} = \frac{\sum x'_i/N + \sum x''_i/N + \dots + \sum x^M_i/N}{M} = \frac{\sum x}{MN} \quad (\text{suma de todas las } x) / (\text{total de mediciones})$$

La dispersión de esos promedios, considerados como datos individuales de una serie de valores, será:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\sum (\bar{\bar{x}} - \bar{x}^i)^2}{M}} \quad \dots (1.4)$$

Esta es la dispersión standard de cada promedio de las series de mediciones. Lo importante es que se puede demostrar que para los casos de errores casuales de medición esta dispersión o error standard vale

$$\zeta = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N^2}} \quad \dots (1.5)$$

Esta relación es en realidad aproximada, pero se convierte en igualdad para  $N$  suficientemente grande.  $\sigma$  es la dispersión standard en una de las  $M$  series de mediciones (ya dijimos que el orden de magnitud de las  $\sigma^i$  es el mismo en cada serie). Esto tiene una importancia práctica fundamental: permite predecir la fluctuación del promedio de una serie de  $N$  mediciones, sin necesidad de volver a realizar más series de mediciones. En la expresión (1.4) es necesario hacer  $N \cdot M$  mediciones. En la expresión (1.5) bastan las  $N$  mediciones de una sola serie. Para evitar confusiones y por razones prácticas, se conviene en definir como "error standard del promedio" directamente a la cantidad (y no a la (1.4)).

Recuérdese que  $\sigma$  era la dispersión standard de cada medición, y que era independiente de  $N$ . Evidentemente,  $\zeta$  depende de  $N$ , y siempre es menor que  $\sigma$ .

\* Como en rigor la varianza se define como  $v = \sum \varepsilon_i^2 / (N-1)$ , el error standard del promedio será, más exactamente,

$$\zeta = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N(N-1)}}$$

Físicamente,  $\xi$  da el orden de magnitud con el cual podemos esperar que el promedio ha de fluctuar alrededor del "verdadero valor" de la magnitud en cuestión, en caso de que se hicieren más series de mediciones. El significado más preciso del error standard del promedio lo daremos en l.c.

A este respecto nos falta aclarar un punto importante. Según la expresión (1.5)  $\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  y su interpretación física, se desprende de que cuanto más mediciones hacemos (mayor sea  $N$ ), tanto más se acercará el promedio al verdadero valor (pues tanto menor será su fluctuación  $\xi$ ). Pero esto requiere necesariamente una comprobación experimental. Efectivamente, si por algún medio conocemos a priori el valor exacto de una magnitud dada, se comprueba experimentalmente que el promedio  $\bar{X}$  tiende a confundirse con el valor exacto de la magnitud, si  $N$  tiende a infinito. Esto da ahora "carta de ciudadanía" al uso del promedio como ente representativo del valor más probable de una magnitud.

En resumen, a medida que aumenta el número de mediciones  $N$  en una serie, el rango de fluctuación que se espera para el promedio, dado por  $\xi$ , estará cada vez más restringido, y por lo tanto el valor del promedio  $\bar{X}$  tenderá cada vez más a confundirse con el "verdadero valor". Ésa es la razón por la cual el valor de una magnitud se conoce tanto mejor cuanto más mediciones se realizan.

En cambio, un aumento de  $N$  (esto se llama "un aumento de la estadística") no afecta en nada a la fluctuación  $\sigma$  de cada dato. Esta fluctuación está definida exclusivamente por el proceso de medición en sí.  $\xi$ , en cambio, está definido por el proceso de medición y la estadística ( $N$ ). En particular,  $\sigma$  puede ser muy grande (grandes fluctuaciones de los datos individuales); no obstante, el promedio puede estar muy bien definido, con tal de que  $\xi$  sea pequeño (o sea  $N$  grande). Un individuo "tremendamente borracho" (gran  $\sigma$ ) puede hacer una medición muy precisa, con tal de medir un número suficientemente grande de veces (pequeño  $\xi$ ).

El resultado numérico de una serie de mediciones se indica en la forma  $\bar{X} \pm \xi$ , o sea, por ejemplo:  $3,794 \pm 0,039$ . Para indicar la unidad, se escribe:  $(3,794 \pm 0,039) \text{ m.}$

La cantidad  $\xi/\bar{X}$  se llama error relativo del promedio, y  $100 \xi/\bar{X}$  se llama error porcentual del promedio.

Aparece aquí la cuestión del número de cifras significativas en el promedio y en  $\xi$ . Las del promedio estarán dadas eviden-

temente por el error standard  $\xi$ . Si en el ejemplo anterior 0,039 son todas cifras significativas del error standard, no tendría sentido expresar el promedio con más de tres cifras decimales.

Pero, ¿cómo determinamos las cifras significativas del error standard? Para ello habría que determinar el "error del error", o sea el orden de fluctuación que esperamos para la expresión de  $\xi$ . Para ello hay una fórmula. No la vamos a dar; nos limitaremos a dar la "receta práctica", de que se suelen tomar dos guarismos para el error del promedio.

Sea ahora una magnitud  $f$ , función de otras  $x, y, z, \dots$ , las cuales están medidas con errores  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$ . Se puede demostrar que, en primera aproximación, la dispersión standard  $\sigma$  de la magnitud  $f$  es, en función de las dispersiones  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \sigma_z\right)^2 + \dots} \quad \dots (1.6)$$

y su error del promedio:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N_x N_y N_z \dots}}$$

donde  $N_x, N_y, \dots$  son el número de mediciones de  $x, y, \dots$ . Una forma más cómoda, pero menos aproximada para  $\sigma$ , es:

$$\sigma \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y \right| + \dots \quad \dots (1.6')$$

(suma de valores absolutos).

Apliquemos esta relación para una función potencial del tipo  $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$ :

$$\sigma = |\alpha| x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma \dots + |\beta| x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma \dots + |\gamma| x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1} \dots$$

Dividiendo por  $f$  obtenemos la dispersión relativa  $\eta = \sigma/f$ , que aparece ligada a las dispersiones relativas de las variables independientes en la forma sencilla, lineal:

$$\eta = |\alpha| \eta_x + |\beta| \eta_y + |\gamma| \eta_z + \dots$$

Finalmente consideremos el caso de que tengamos que hacer el promedio de varios valores, cada uno de error standard diferente. En ese caso, evidentemente no le podemos "llevar el mismo apunte"

a un dato que tenga un error del 50% que a uno que solo tenga un error del 1%. Para calcular el valor más probable se procede mediante el método de los "promedios pesados". Se asigna un "peso estadístico" (un número positivo) a cada dato, que en alguna forma mide el "grado de confianza" que le tenemos. Si cada dato tiene entonces su peso estadístico  $p_i$ , "el promedio pesado" es:

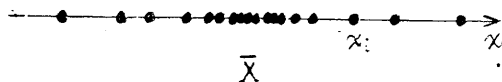
$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$$

Para obtener los valores de  $p_i$  no podemos dar una regla general. Depende del problema particular. Si por ejemplo disponemos de los errores de cada  $x_i$ , podemos tomar como  $p_i$  números proporcionales a la inversa del error de cada dato (o una potencia de la inversa).

### c.- Distribución de Gauss

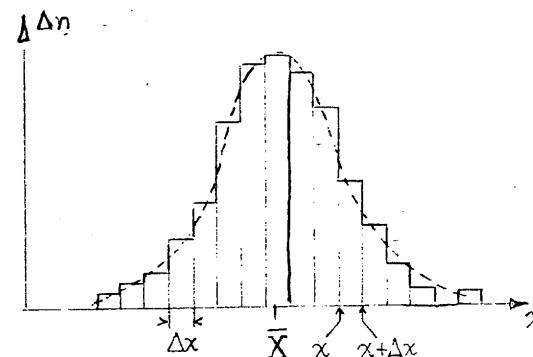
Consideremos de nuevo la serie de resultados de medición:  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_N$ . Estos números están distribuidos alrededor del promedio  $\bar{X}$ . Observaremos que hay valores que están cerca del promedio; otros, menos en número, estarán lejos. Cuando nos proponemos hacer una medición más, la  $(N+1)$ -ésima, no podemos saber de antemano el resultado que va a salir, tal como, evidentemente, en ningún caso podemos predecir de antemano el resultado de una medición. Pero es evidente que sí podremos decir que con buena probabilidad estará cerca del promedio, y con probabilidad menor estará lejos. En otras palabras, no podremos nunca predecir el valor de una medición dada, pero sí podremos decir algo sobre la probabilidad de que su valor esté en un determinado intervalo de valores posibles.

Analicemos detenidamente esto. Tomemos un eje, en el cual marcamos los valores de  $x_i$  que van apareciendo en nuestra serie de mediciones:



El aspecto suele ser el de la figura: los valores se "aglomeran" cerca del promedio, y se hacen más raros a medida que nos vamos alejando de él.

Si dividimos el eje  $x$  en pequeños intervalos iguales  $\Delta x$ , podemos contar el número de observaciones  $\Delta n$  que caen en cada intervalo y representarlo gráficamente. Esto es lo que se llama un histograma (cuando a todo un intervalo le corresponde un valor, y no a un solo punto, como sucede en una función). Cuanto más grande sea la estadística, o sea  $N$ , más pequeños podemos hacer los intervalos  $\Delta x$  sin por ello perder la chance de tener un número suficientemente grande  $\Delta n$  de datos en cada intervalo.



Lo notable de todo esto es que la experiencia muestra que para todos los casos de errores casuales, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua bien definida y única, cuya forma es siempre la misma, dependiendo solo de dos parámetros que podrán variar de caso en caso.

Sea  $\Delta n$  el número de valores numéricos de nuestra serie de mediciones, que caen en un determinado intervalo, entre  $x$  y  $x+\Delta x$ . Se comprueba experimentalmente que ese número depende del valor de  $x$  y de la longitud del intervalo  $\Delta x$  en la forma aproximada:

$$\Delta n \approx \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \Delta x \quad \dots(1.7)$$

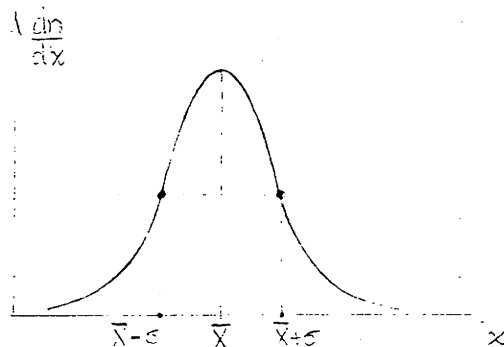
La aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea  $N$  y cuanto más pequeño sea  $\Delta x$ . La relación se transforma en igualdad para diferenciales  $dn$  y  $dx$ .

Como se ve, aparecen dos parámetros:  $\sigma$  y  $\bar{X}$  ( $N$  no es estrictamente un parámetro, pues no modifica la forma de la curva; es un factor de escala). Se puede demostrar que  $\sigma$  es lo que precisamente habíamos llamado desviación standard de cada medición (1.3), y  $\bar{X}$  es el valor medio (1.2).

La expresión:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{dn}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \quad \dots(1.8)$$

se llama "densidad de observaciones". Nótese nuevamente bien la relación entre  $dn$ ,  $dx$  y  $x$ :  $dn$  es el número de observaciones cuyos valores están comprendidos entre  $x$  y  $x+dx$ . O sea, la variable  $x$  que figura en el exponente ubica el intervalo  $dx$  en el cual se cuentan  $dn$  observaciones. La representación gráfica de la densidad de observaciones se llama curva de distribución de Gauss. Tiene la forma de la figura:



Presenta un máximo en  $x = \bar{X}$ . Es simétrica respecto de ese valor medio, tiene forma de campana, y sus puntos de inflexión están en  $\bar{X} \pm \sigma$ . Tiende a cero a medida que nos alejamos de  $\bar{X}$ .

La superficie total subtendida por la curva de Gauss, es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma} =$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = N, \text{ número total de observaciones.}$$

Esta es precisamente la razón por la cual se coloca el factor  $\sqrt{2\pi}$  en el denominador.

La integral:

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} dN = \Delta N \quad \dots(1.9)$$

es el número de observaciones, cuyo valor está comprendido entre  $x_1$  y  $x_2$ . La integral no se puede resolver en forma cerrada;

su valor debe buscarse en tablas\*. Si ahora dividimos el número  $\Delta N$  por  $N$ , número total de datos, o sea:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \dots(1.10)$$

obtenemos lo que se llama la probabilidad de que una observación dada esté comprendida en ese intervalo. Efectivamente, la probabilidad es por definición el cociente entre el número de casos "favorables" (o sea, en este caso, los  $\Delta N$  que están en ese intervalo  $x_1 x_2$ ) y el número de casos totales ( $N$ ). El número  $100\Delta N/N$  representa la probabilidad expresada en por ciento. La probabilidad de encontrar un dato entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es 1 (ó 100%), es decir, certeza. La probabilidad de encontrar un dato fuera del intervalo  $x_1 x_2$  será  $1 - \Delta N/N$ .

En resumen, de esto deducimos que, si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición dada, sí podemos decir algo sobre la probabilidad de que ese valor esté comprendido en un intervalo dado. La predicción de estas probabilidades es la utilidad fundamental de la función de Gauss.

Consideremos unos ejemplos. Ante todo, veamos las probabilidades para algunos intervalos "prototipo".

La probabilidad de que el valor de una medición dada caiga entre  $\bar{X} - \sigma$  y  $\bar{X} + \sigma$  es, según la (1.10), del 68%; entre  $\bar{X} - 2\sigma$  y  $\bar{X} + 2\sigma$  es del 95,4%, y entre  $\bar{X} - 4\sigma$  y  $\bar{X} + 4\sigma$  es del 99,99994%. Esto significa que la probabilidad de que una observación caiga fuera del intervalo  $\bar{X} \pm 4\sigma$  es de solo  $6 \cdot 10^{-5}\%$ ! El valor de  $\mu$  que determina el intervalo  $\bar{X} \pm \mu$  dentro del cual cae el 50% de las observaciones se denomina error más probable. De la (1.10) resulta  $\mu = 0,6456\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma$ .

Un ejemplo para fijar ideas sobre la utilidad práctica de la distribución de Gauss, es el siguiente: supongamos que una fábrica de automóviles compra pistones a un subsidiario. La fábrica necesita que el diámetro de los pistones esté exactamente comprendido dentro del intervalo  $(110,00 \pm 0,02)$  mm (0,02 sería el límite de tolerancia admitida). Con una primera remesa de 100 ejemplares se comprueba, midiendo los diámetros, que el subsidiario provee pistones fabricados con error standard en el diámetro de 0,04 mm (o sea, que los diámetros fluctúan gaussianamente con una dis-

\* En las tablas no figura la integral como en la (1.9), sino en la forma  $\int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt$ . Por ello es necesario hacer previamente el cambio de variable  $t = (\bar{X}-x)/\sigma$  y calcular la (1.9) como diferencia entre valores tabulados para los límites en cuestión.



persión  $\sigma = 0,04 \text{ mm}$ ). ¿Cuántos pistones debe encargar la fábrica para poder seleccionar 1000 ejemplares que cumplan con los requisitos de tolerancia? La probabilidad de que un pistón fabricado por el subsidiario tenga su diámetro en el intervalo requerido ( $\bar{X} \pm \sigma/2$ ) es, según tablas, del 40 %. O sea, por 1000 pistones "buenos" vienen 1.500 "malos". Para seleccionar 1000 pistones, la fábrica debe encargar entonces 2.500.

Otra consecuencia, muy importante en la práctica, es la siguiente. Al realizar una serie de mediciones de una magnitud dada, es posible que en algunos casos aislados se cometa un error no casual (o sea no-gaussiano), originado por un factor extraño (error de cálculo, mal funcionamiento del aparato de medición, equivocación personal, etc.). La distribución de Gauss nos permite utilizar un criterio físico para rechazar un dato sospechoso. Supongamos haber hecho 100 mediciones de una magnitud, con un valor medio  $\bar{X}$  y una dispersión standard  $\sigma$  de cada dato. Supongamos que entre los 100 datos haya tres que difieran del valor medio en más de  $3\sigma$ , por ejemplo. De acuerdo con la función de Gauss, la probabilidad de que un dato caiga fuera del intervalo  $\bar{X} \pm 3\sigma$  es:

$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{X}-3\sigma}^{\bar{X}+3\sigma} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx = 0,0028 (= 0,28\%).$$

O sea que solo entre 1000 datos podría esperarse que haya 3 fuera de ese intervalo. El hecho de que los tres aparezcan entre un número 10 veces menor de datos, es un indicio de que esas tres mediciones particulares padecen de un defecto "extra-gaussiano": deben rechazarse. De esta manera podemos fijar para cada serie de mediciones un "límite de confianza". Cualquier dato cuyo valor caiga fuera del intervalo dado por el límite de confianza, debe ser rechazado. Por supuesto que para determinar el límite de confianza no puede darse un criterio unívoco; ese límite dependerá además del número total de mediciones  $N$ . Una receta razonable es la de fijar el límite de confianza  $K$  en forma tal de que la probabilidad "gaussiana" para un dato de caer fuera de  $\bar{X} \pm K$  sea mucho menor que  $1/N$  (probabilidad para un dato). O sea:

$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{X}-K}^{\bar{X}+K} e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}} dx \ll \frac{1}{N} \quad (\text{por ejemplo } = \frac{1}{10N}).$$

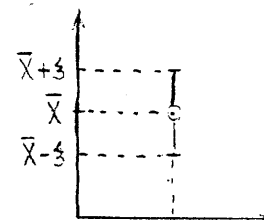
Obsérvese finalmente que, para la predicción de probabilidades a partir de una serie dada de mediciones, no es necesario que el suceso que querramos predecir haya ocurrido realmente en la serie en cuestión. Por ejemplo, en el caso de los pistones, es posible pre-

decir la probabilidad de que aparezca un pistón de, digamos, más de 100,07 mm de diámetro, aunque en la remesa de prueba de 100 ejemplares no hubiese habido ninguno de esas características.

Cuando tenemos varias ( $M$ ) series de  $N$  mediciones, con sus promedios parciales  $\bar{X}^i$ , se comprueba experimentalmente que estos  $M$  promedios siempre se distribuyen "gaussianamente" alrededor del promedio total  $\bar{X}$ . O sea, su distribución es a su vez una curva de Gauss en la que la dispersión cuadrática del promedio  $\xi$  (1.5) es el parámetro que fija sus puntos de inflexión. La interpretación de  $\xi$  como uno de los parámetros de esa curva de Gauss nos dice que el 68 % de los promedios parciales estarán entre  $\bar{X} - \xi$  y  $\bar{X} + \xi$ .

El significado de la relación (1.5) resalta ahora con toda claridad: cuando hacemos una sola serie de  $N$  mediciones, obteniendo un promedio  $\bar{X}$ , sabemos a priori que ese promedio, y todos los promedios de otras series de  $N$  mediciones, pertenecerán a una distribución de Gauss alrededor del "verdadero valor". Sin necesidad de determinar esta distribución experimentalmente, podemos predecir que su dispersión cuadrática será del orden de  $\sigma/\sqrt{N}$ . Por cierto que no podemos predecir el "verdadero valor" de la magnitud medida. Pero podemos interpretar el error standard del promedio  $\xi$  como aquel valor que determina el intervalo alrededor del promedio,  $\bar{X} \pm \xi$ , dentro del cual el "verdadero valor" de la magnitud estará comprendido con una probabilidad del 68 %. Obsérvese que la probabilidad de que el verdadero valor esté fuera de ese intervalo es apreciable: 32 %. Pero ya hemos visto que esa probabilidad cae rápidamente al aumentar el intervalo. Para un intervalo  $\bar{X} \pm 4\xi$ , la probabilidad de que el "verdadero valor" esté fuera del mismo es de solo  $6.10^{-5} \%$  !

La cantidad  $0,6416 \xi \approx \frac{2}{3} \xi$  representará, de acuerdo con lo visto más arriba, el error más probable del promedio. Nos fija el intervalo  $\bar{X} \pm \frac{2}{3} \xi$  dentro del cual el verdadero valor estará con una probabilidad del 50 %.



Cuando en algún momento hay que hacer intervenir en un gráfico el resultado de una medición, se representa con un punto su valor medio y se indica con un segmento el intervalo que va de  $\bar{X} - \xi$  hasta  $\bar{X} + \xi$ . Esto permite visualizar gráficamente la influencia de la fluctuación: con un 68 % de probabilidad el verdadero va-

lor estará dentro del segmento y con un 32 % fuera de él; con un 4,6 % distará más de dos veces el segmento; con un 0,3 % distará más de tres veces, etc. Esto ayuda considerablemente cuando hay que ajustar curvas de forma predeterminada por puntos experimentales representados con su error en la forma indicada.

Aquí aparece otra cuestión muy importante en física experimental. Supongamos que hemos medido dos magnitudes de la misma clase. ¿Cuándo podemos afirmar que son iguales? Evidentemente nunca van a ser iguales los valores medios correspondientes  $\bar{x}$  y  $\bar{x}'$ , aunque realmente fueran iguales las magnitudes. Sean  $\xi$  y  $\xi'$  los errores de esos promedios. Según lo dicho arriba, es evidente que si  $|\bar{x} - \bar{x}'| \gg |\xi + \xi'|$ , es muy poco probable que los verdaderos valores de  $x$  y  $x'$  sean iguales (pues sería una tremenda casualidad que en ambas series los valores medios hayan caído lejos del verdadero valor). En cambio si  $|\bar{x} - \bar{x}'| \lesssim |\xi + \xi'|$ , hay buena chance de que los verdaderos valores de ambas magnitudes sean realmente iguales. Esta probabilidad se puede calcular exactamente en función de  $\bar{x} - \bar{x}'$ ,  $\xi$  y  $\xi'$ . No lo haremos aquí; simplemente diremos que un criterio razonable es ver si ambos promedios coinciden dentro del intervalo dado por sus errores.

No en todos los procesos de medición los datos se distribuyen de acuerdo con una curva de Gauss. Muchas veces, errores sistemáticos u otras condiciones físicas "distorsionan" la distribución de Gauss, sea haciendo aparecer mucho más datos de un lado del promedio que del otro (distribución asimétrica), o introduciendo "cortes" en sus extremos. La forma cualitativa más simple para verificar si una distribución dada de datos es gaussiana, es el histograma obtenido con la curva de Gauss teórica correspondiente.

Para ello, veamos brevemente cómo se procede para trazar una curva de Gauss por el histograma de una serie de datos experimentales. Ante todo, es conveniente elegir bien el intervalo  $\Delta x$ . Debe ser pequeño, pero no demasiado, pues si no caerán muy pocos datos en cada uno. Ello requiere un poco de experiencia y tanteo. Una vez elegido  $\Delta x$ , se representa el histograma. De los valores calculados  $\bar{x}$  y  $\sigma$ , y del valor de  $N$  y  $\Delta x$  (en las unidades del dibujo) se calcula numéricamente (1.7):

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}} \Delta x \quad (x \text{ es la coordenada de cada intervalo } \Delta x)$$

y se lo representa gráficamente. Si la distribución es gaussiana, la curva pasará más o menos bien por el histograma. Cuanto mayor

sea  $N$ , tanto mejor será el acuerdo.

Todo esto vale solo si todos los intervalos  $\Delta x$  son iguales entre sí. Si no lo son (cosa que suele hacerse cuando hay poca estadística), es necesario representar el histograma de los valores de  $\Delta n / \Delta x$ , o sea de la densidad de datos. En otras palabras, sobre cada intervalo  $\Delta x$  (ahora desiguales entre sí) se representa el valor de  $\Delta n$  dividido por  $\Delta x$ . Luego se traza la curva dada por (1.8):

$$\frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}}$$

que se puede comparar con el histograma.

Resumamos finalmente los pasos que deben darse para medir una magnitud dada:

1. Mídase  $N$  veces la magnitud, obteniendo los valores  $x_1, \dots, x_N$ , expresados en sus cifras significativas (determinadas por el instrumento de medición).
2. Calcúlese el promedio aritmético.
3. Calcúlese el error standard de cada dato:  $\sigma = \sqrt{\sum (\bar{x} - x_i)^2 / N}$
4. Fijese un límite de confianza  $K$  (de tal manera que la probabilidad gaussiana de tener un dato fuera del intervalo  $\bar{x} \pm K$  sea mucho menor que  $1/N$ ).
5. Recházese todos los datos que estuvieren fuera del intervalo y calcúlese con los que quedan los valores de  $\bar{x}$  y  $\sigma$  corregidos.
6. Calcúlese el error standard del promedio  $\xi = \sigma / \sqrt{N}$
7. Escríbese el resultado en la forma  $\bar{x} \pm \xi$  interpretándolo correctamente en la forma:
  - a) el valor más probable de la magnitud medida es  $\bar{x}$ ,
  - b) la probabilidad de que el verdadero valor esté en el intervalo  $\bar{x} \pm \xi$  es del 68 % (o sea, estará afuera con un 32 % de probabilidad).

A veces será necesario un paso adicional intermedio:

- 3'. Compárese el histograma de distribución de datos con la curva de Gauss correspondiente, para determinar si la distribución es gaussiana (si los errores son casuales).

Para terminar, hagamos una observación importante. En muchos casos de mediciones, es la cantidad misma que se mide la que sufre fluctuaciones intrínsecas. En este caso no podemos llamar a  $\sigma$  y  $\xi$  "errores". Son desviaciones o fluctuaciones "genuinas". Por ejemplo, si quisiéramos medir la longitud de un objeto con una

precisión de  $10^{-6}$  cm, nos encontraríamos con que la magnitud en cuestión fluctúa intrínsecamente. Ello se debe a que con esta precisión ya entramos dentro del dominio de los movimientos térmicos de las moléculas, que es un movimiento "al azar". O si se considera las estaturas de un grupo de personas (por ejemplo, de los alumnos de un curso), tenemos una magnitud, cuyo valor está determinado con arbitraria precisión, pero que fluctúa de caso en caso. El valor  $\bar{O}$  ó  $\bar{S}$  de una distribución de estaturas de un grupo de personas nuevamente no representa un "error", sino una dispersión ó fluctuación genuina. La distribución correspondiente es gaussiana, dentro de ciertos límites.

En este último caso es muy importante notar que el promedio no representa "el valor de algo", sino que es un parámetro que depende de la edad y de la raza del grupo de personas.  $\bar{O}$  representa el orden de magnitud con que las estaturas fluctúan alrededor del valor medio y también será característica de la edad y raza del grupo. La curva de Gauss correspondiente servirá para predecir las probabilidades para que una persona elegida al azar tenga su estatura comprendida en un intervalo dado. En este caso,  $\bar{S}$  no tendría ningún significado físico.

En el otro caso, en que la dispersión de datos se debe exclusivamente a errores de medición, el promedio representa el valor más probable de algo real y único, que es el "verdadero valor" de la magnitud que estamos midiendo.  $\bar{S}$  da información sobre el grado de conocimiento de esa magnitud.

#### d.- Relaciones entre magnitudes físicas: cuadrados mínimos.

Con saber medir una magnitud física dada y valorar el resultado de la medición desde el punto de vista de su significado estadístico, no está terminado el asunto. Esto solo es el primer paso. La "física en serio" solo comienza cuando se estudia la interdependencia causal entre dos o más magnitudes físicas entre sí. En otras palabras, para establecer leyes físicas con las cuales se pueda predecir la evolución de un sistema dado es necesario previamente descubrir experimentalmente el tipo de relación que hay entre los valores numéricos de las magnitudes intervinientes y representar esta dependencia matemáticamente.

Como en la práctica estos valores numéricos están todos afectados de errores de medición o fluctuaciones intrínsecas, es necesario aplicar un algoritmo que permita determinar algo así como "la relación más probable" entre dos magnitudes físicas, vinculadas causalmente en un proceso físico.

Comencemos por el caso más simple: supongamos que dos magnitudes  $y$ ,  $x$  están vinculadas linealmente (por ejemplo, la longitud de un resorte y la fuerza aplicada, la presión en un punto de un líquido y la distancia a la superficie):

Sea ahora una relación lineal entre dos magnitudes físicas  $y$ ,  $x$  (por ejemplo, la longitud de un resorte y la fuerza aplicada, la presión en un punto de un líquido y la distancia a la superficie):

$$y = ax + b.$$

Sea el problema determinar los coeficientes  $a$  y  $b$  experimentalmente, a partir de la medición de  $x$  e  $y$ . Si no hubiera error en las mediciones de  $x$  e  $y$ , bastará hacer dos pares de mediciones  $x_1 y_1$  y  $x_2 y_2$  y resolver el sistema:

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Desgraciadamente, ello nunca ocurre en la práctica. Debemos partir de una serie de pares de valores correspondientes  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n$ , los cuales, debido a sus errores, nunca satisfacen exactamente la relación  $y = ax + b$ . En otras palabras, la diferencia  $y_i - ax_i - b = \epsilon_i$  nunca será cero. Los valores de  $\epsilon_i$  serán positivos y negativos. Procedamos como en el caso de una sola variable. La suma de los cuadrados  $\sum \epsilon_i^2$  nos dará una cierta idea de las fluctuaciones (ahora combinadas) de  $x_i, y_i$ . Evidentemente, esa suma depende de los coeficientes  $a$  y  $b$  en la forma:

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum (y_i - ax_i - b)^2 =$$

$$= a^2 \sum x_i^2 + b^2 N - 2a \sum x_i y_i - 2b \sum y_i - 2ab \sum x_i + \sum y_i^2.$$

Esto es una función cuadrática de  $a$  y  $b$  que pasa por un mínimo para un dado par de valores  $a$  y  $b$ . Podemos aplicar el criterio conocido, de elegir como valores más probables de  $a$  y  $b$  aquellos que hacen mínima a  $\sum \epsilon_i^2$ . O sea,  $a$  y  $b$  serán soluciones del sistema (condición de extremo):

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial b} = 0$$

O sea:

$$2a \sum x_i^2 - 2 \sum x_i y_i + 2b \sum x_i = 0$$

$$2Nb - 2 \sum y_i + 2a \sum x_i = 0$$

y cuyas soluciones serán:

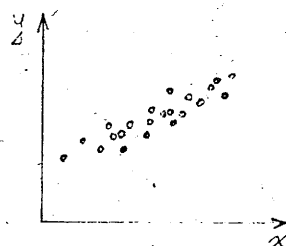
$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

...(1.11)

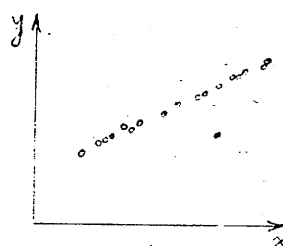
$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Cada uno de estos valores tiene a su vez un error. Para ello hay expresiones algo complicadas que pueden consultarse en los libros.

Veamos algo sobre la interpretación gráfica del método de cuadrados mínimos. Representemos en el plano (x y) los pares de valores medidos  $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$ . Si éstos obedecen a una relación lineal, y si carecen de errores, caerían exactamente sobre una recta de pendiente a y de ordenada origen b. Pero debido a las fluctuaciones casuales en las mediciones de x e y, los puntos formarán una "nube" que se condensará tanto más en las vecindades de una recta cuanto menores sean las fluctuaciones:



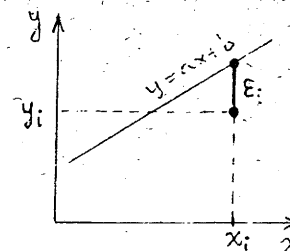
muchas fluctuaciones



pocas fluctuaciones

Los coeficientes a y b determinados por el método de los cuadrados mínimos son los parámetros de una recta para la cual  $\sum \varepsilon_i^2$

es mínimo. Pero obsérvese en el plano (x y) que  $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$  es precisamente la distancia vertical del punto experimental a la recta. La recta por cuadrados mínimos es entonces aquella para la cual la suma de las distancias verticales (en realidad sus cuadrados) es mínima. Esto permite, con un poco de experiencia, trazar "a ojo" la recta por cuadrados mínimos, y determinar así gráficamente los coeficientes de la relación lineal. Muchas veces, esto es suficiente para la práctica.



Obsérvese finalmente que el método de cuadrados mínimos puede aplicarse a relaciones no lineales, como por ejemplo la

$$y = bx^a$$

$$y = be^{ax}$$

$$y = \frac{a}{b+x}$$

Bastará para ello transformarlas en una relación lineal. En el caso de estos ejemplos, ello se consigue tomando de la siguiente manera:

$$\lg y = \lg b + a \lg x \quad \lg y = a x + \lg b \quad 1/y = \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$$

y tratar ahora los pares de valores  $\lg y, \lg x$ ;  $\lg y, x$ ;  $1/y, x$  como datos en una relación lineal, a los que se pueden aplicar directamente las fórmulas (1.11).