Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de este trabajo práctico.

1. Dados los siguientes campos, decidir si son escalares o vectoriales:

a) El campo que proporciona la temperatura de un cuerpo de acuerdo a su posición (x, y, z)

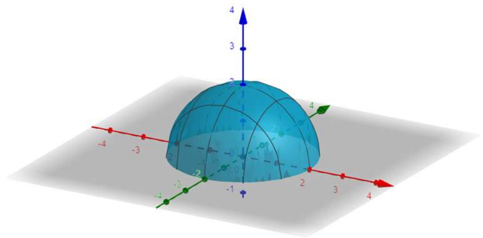
b) El campo de velocidad de un fluido.

c) El campo gravitacional que actúa sobre un cuerpo ubicado en la posición (x,y,z)

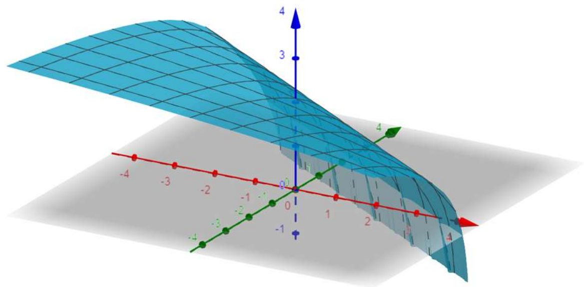
d) El campo que describe la densidad de una población de aves (número de individuos por unidad de área o volumen)

2. Dados los siguientes campos escalares $F: A \subseteq R^2 \rightarrow R$, expresar analíticamente y representar gráficamente el dominio de cada uno de ellos.

a. $F(x; y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



b. $F\,(x; y) = ln[8 - (2x\, +\, 3y)]$



c. $F(x; y) = 3y - 6xy$

d. $F(x; y) = \ln(x + 2y)\,.\sqrt{x^2 + y^2 - 36}$ (*)

e. $F(x; y) = \frac{\sqrt{9-y^2}}{2x+y}$

f. $F(x; y) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)(y^2-4)}}$

3. Decidir si las siguientes superficies representan o no el gráfico (es decir, el conjunto de puntos del espacio que verifican $z = F(x\,;\,y)$) de algún campo escalar $F\colon D \subseteq R^2 \rightarrow R$.

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b. $x^2 + z^2 = 1$

c. $8x^2 - 5y + z = 9$

4. Representar gráficamente (utilizar algún graficador adecuado, por ejemplo: https://www.wolframalpha.com/, https://www.geogebra.org/3d o algún aplicativo de celular gratuito como Quick Graph) el conjunto gráfico de los siguientes campos escalares $F: D \subseteq R^2 \to R$.

a. $F(x; y) = x^2$

b. $F(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c. $F(x; y) = x^2 + y^2$

5. Si la función T = T (x; y) representa la temperatura media anual en la posición (x; y) las curvas de nivel del campo T se denominan curvas isotermas. Indicar las isotermas de nivel k de los siguientes campos escalares, que describen la temperatura de un cuerpo en la posición (x; y). Representar gráficamente las correspondientes a los niveles -1, 0 y 1.

a. $T(x; y) = x - 3y$

b. $T(x; y) = \frac{2}{x-y}$

c. $T(x; y) = \frac{y}{x^2-1}$

d. $T(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

6. Proponer un campo escalar cuyo conjunto de nivel 3 sea la curva $y = x^2 + 2$.

7. Si la función V = V(x;y) representa el voltaje de un punto (x; y) en el plano, las curvas de nivel se denominan curvas equipotenciales. Hallar, analítica y gráficamente, las curvas equipotenciales para V = 1 y V = 4 si la función de voltaje está dada por $V(x; y) = \dfrac{4}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}}$. (*)

8. Hallar una parametrización del conjunto de nivel 4 del campo escalar dado por $F(x; y) = x + y - 1$.

9. Sea $F: D \subseteq R^2 \to R$ el campo escalar definido por $F(x, y) = \frac{y-x-2}{\sqrt{y-x^2}}$.

a. Determinar analítica y gráficamente el dominio de F.

b. Determinar analítica y gráficamente el conjunto de nivel 0 de F.

10. Para cada uno de los siguientes campos escalares $F: D \subseteq R^3 \to R$, determinar el conjunto de nivel k indicado en cada caso y, si es posible, identificarlo.

a. $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad k = 4$

b. $F(x; y; z) = x + y + z \quad k = 1$

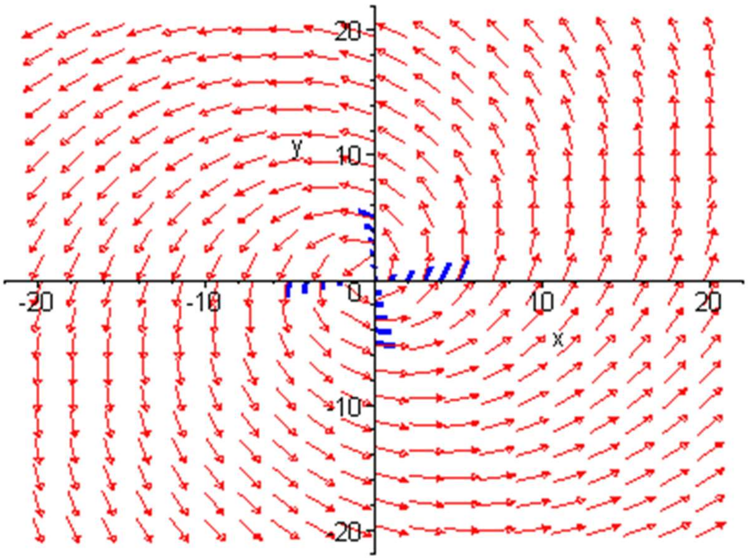
c. $F(x; y; z) = z + x^2 + y^2 \quad k = 0$

11. Cuando se quiere describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un punto dado del espacio. Un fluido en movimiento define un campo vectorial de velocidad el cual asigna a cada punto del fluido un vector que señala hacia dónde se mueve una partícula colocada en ese punto. Su magnitud o módulo describe qué tan rápido se mueve. En particular, en el caso de flujo estacionario (es decir, que no depende del tiempo), se usa un campo vectorial de velocidades $v = v(x, y)$ o $v = v(x, y, z)$.

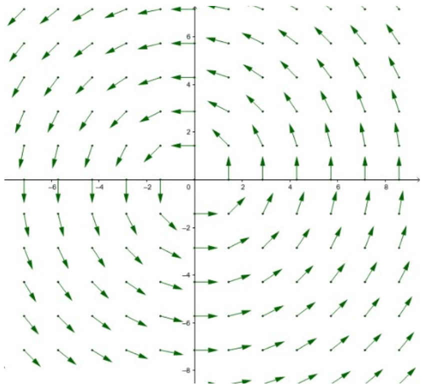
Dados los siguientes campos vectoriales con sus respectivas representaciones (que muestran su comportamiento), determinar en cada caso analíticamente su dominio.

¿Qué observaciones se podrían hacer en relación con las direcciones y las magnitudes de los vectores velocidad?

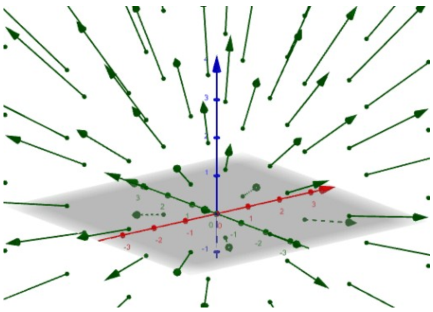
a. $v(x, y) = (-y, x)$



b. $v(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

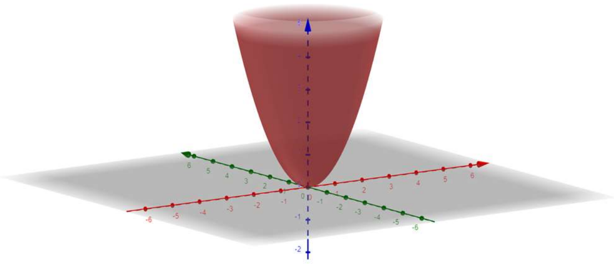


c) $v(x, y, z) = (x, y, z)$



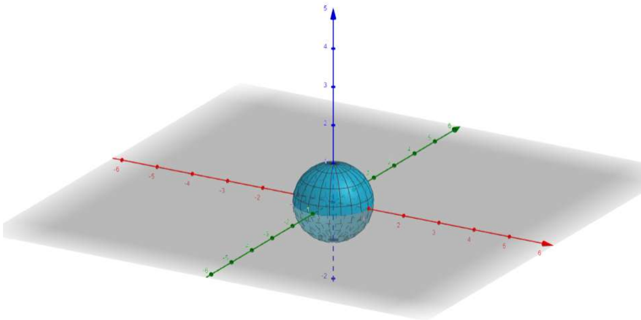
12. Hallar la ecuación cartesiana de la superficie que resulta ser el conjunto imagen del campo vectorial $\bar{F}: A \subseteq R^2 \to R^3$. Identificar la superficie.

a. $\bar{F}(u; v) = (u; v;\ u^2 + v^2)$ i. con $(u; v) \in R^2$ (*)
ii. con $(u; v)$ tales que $u^2 + v^2 \leq 1$

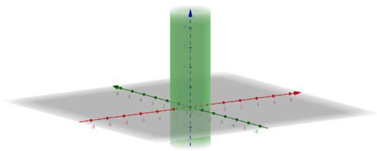


b. $\bar{F}(u; v) = (u; v; 1 - u - v)$

c. $\bar{F}(u; v) = (\cos(u)\ sen(v); sen(u)\ sen(v); \cos(v))$

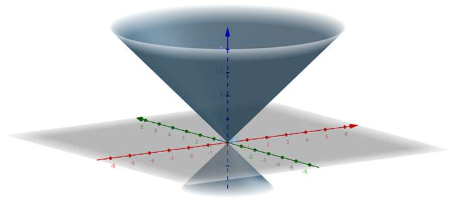


d. $\bar{F}(u; v) = (\cos(u); sen(u); v)$ i. con $(u; v) \in R^2$
ii. con $(u; v)$ tales que $0 \leq u \leq \pi, 1 \leq v \leq 2$



e. $\bar{F}(u\,; v) = (u; v;\ (u-1)^2 + 2v^2)$

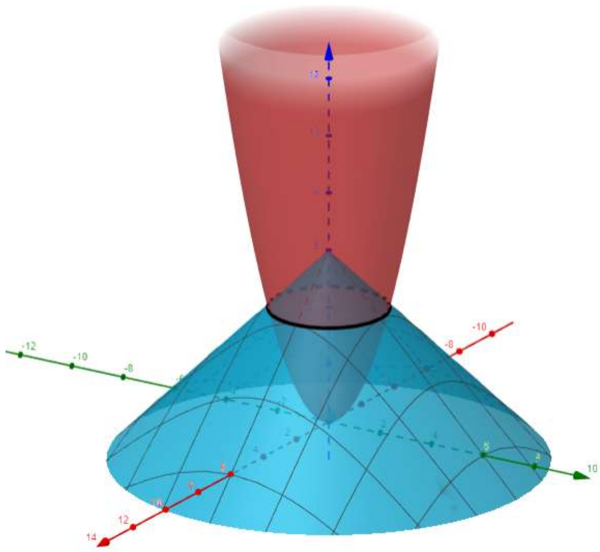
f. $\bar{F}(u\,; v) = (u\cos(v)\,;\ u\ sen(v); u)$



13. Dadas las ecuaciones cartesianas de las siguientes superficies, se pide dar la expresión de un campo vectorial que tenga como imagen a dicha superficie (es decir, dar una parametrización de la superficie). Sugerencia: Utilizar https://www.geogebra.org/3d para complementar lo trabajado.

a. $2x - y + z = 3$
b. $z - x^2 - y^2 = 0$
c. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
d. $x^2 + y^2 = 9$
e. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ Sugerencia: Resolver primero el ítem c del ejercicio 12.
f. La porción de cilindro $x^2 + y^2 = 9$ ubicada en el primer octante.
g. $x + y + z = 4$, con $x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0, z > 0$
h. $x^2 + y^2 = 4$, con $x + y + z < 4, x > 0, y > 0, z > 0$
i. $z = 4 - x^2 - y^2$, con $z > 0$
j. $z = x^2 + y^2$, con $1 < z < 9$
k. La porción de superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que es interior al paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$.

14. Considerar las superficies $S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / z = x^2 + y^2\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / 6 - z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$
a. Proponer una parametrización para cada una de las superficies.
b. Proponer una parametrización para la curva que es intersección de S_1 y S_2
c. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva hallada en el ítem anterior, en el punto $(2, 0, 4)$.



Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 2:

Dados los siguientes campos escalares F: $A \subseteq R^2 \rightarrow R$, expresar analíticamente y representar gráficamente el dominio de cada uno de ellos.

e. $F(x;y) = \left[\ln(x+2y)\right]\sqrt{x^2+y^2-36}$

Resolución

Para hallar el conjunto dominio del campo escalar $F(x;y) = \left[\ln(x+2y)\right]\sqrt{x^2+y^2-36}$ debemos tener en cuenta las restricciones de las siguientes funciones:

- $\text{Log}_a(z) \Rightarrow z > 0$
- $\sqrt{z} \Rightarrow z \geq 0$

Por lo tanto, las restricciones del do

- $x + 2y > 0$
- $x^2 + y^2 - 36 \geq 0$

Luego,

$$\text{Dom}(F) = \{(x;y) \in R^2 \; / \; x + 2y > 0, \; x^2 + y^2 - 36 \geq 0\}$$

Para determinar cuáles serán los pares (x; y) que forman parte del dominio, primero podemos mirar cuáles son las curvas que forman parte del borde de la región

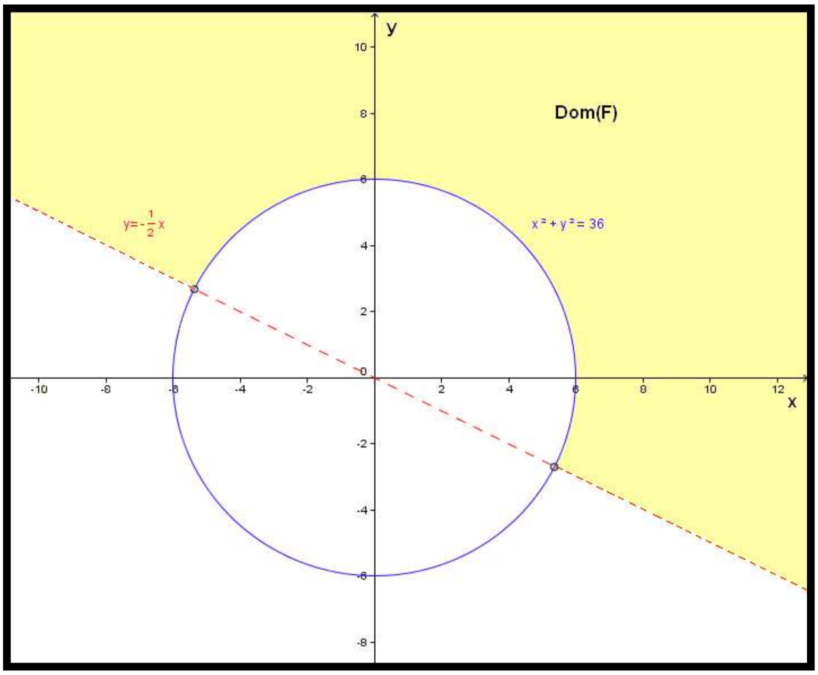


Fig. 1

La circunferencia de centro c = (0,0) y radio r = 6 divide al plano en dos regiones, una “interior” y otra “exterior” a la circunferencia. Tomemos un punto de prueba (x, y) interior, si el punto verifica $x^2+y^2-36\geq 0$, entonces todos los puntos que se encuentren en la misma región del plano también verificarán la inecuación, de lo contrario aquéllos que la verifiquen serán los que se encuentren en el exterior.

Si tomamos el punto (0,0) es sencillo verificar que no se cumple $x^2+y^2-36\geq 0$, luego todos los puntos del plano que cumplen la inecuación anterior son aquellos que se encuentran en la región “exterior” a la circunferencia.

Análogamente, la recta $x+2y=0$ divide al plano en dos regiones, si tomamos como punto de prueba el (2,2) se cumple $x+2y>0$, por lo tanto todos los puntos del plano que cumplen la inecuación anterior son aquellos que se encuentran por arriba de la recta.

Los puntos del plano que cumplen ambas inecuaciones son los que conforman el dominio del campo escalar y están representados en la Fig. 1.

Ejercicio 7:

Si la función V = V(x;y) representa el voltaje de un punto (x; y) en el plano, las curvas de nivel se denominan curvas equipotenciales. Hallar, analítica y gráficamente, las curvas equipotenciales para V = 1 y V = 4 si la función de voltaje está dada por $V(x\,;y)=\dfrac{4}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}$.

Resolución

En primer lugar determinemos cuál es el dominio la función de voltaje:

$$D_V=\left\{(x;y)\in R^2\,/\,(x-2)^2+(y+3)^2>0\right\}=\left\{(x;y)\in R^2\,/\,(x;y)\neq(2;-3)\right\}$$

Las curvas equipotenciales para V=1 y V=4 serán los conjuntos de nivel 1 y 4 del campo escalar V.

Para V=k, k>0:

$$C_{V=k}=\left\{(x,y)\in D_V\,/\,V(x\,;y)=k\right\}=\left\{(x,y)\in D_V\,/\,\frac{4}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}=k\right\}$$

Si reescribimos la ecuación que describe el conjunto de nivel k,

$$\frac{4}{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}=k$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\frac{4}{k}$$

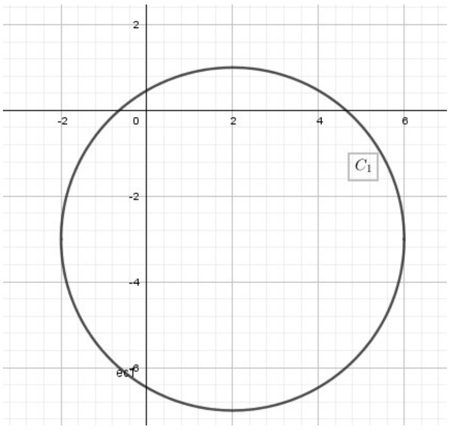
Obtenemos la ecuación de una circunferencia de centro c = (2; -3) y radio r = 4/k

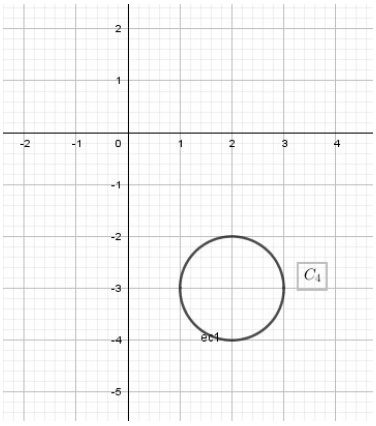
$$(x-2)^2+(y+3)^2=(\frac{4}{k})^2$$

Luego,

$C_{V=1} = \{(x,y) \in D_V / (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2\}$ y $C_{V=4} = \{(x,y) \in D_V / (x-2)^2 + (y+3)^2 = 1^2\}$

Gráficamente:





Ejercicio 12:

Hallar la ecuación cartesiana de la superficie que resulta ser el conjunto imagen del campo vectorial $\bar{F}: A \subseteq R^2 \to R^3$. Identificar la superficie.

a. $\bar{F}(u;v) = (u;v;\ u^2+v^2)$ i. con $(u;v) \in R^2$
ii. con $(u;v)$ tales que $u^2+v^2 \leq 1$

Resolución

i. con $(u\,;v) \in R^2$

Consideremos el campo vectorial $\bar{F}$: $R^2 \to R^3$, $\bar{F}\,(u\,;v) = (u\,;v\,;u^2 + v^2)$.

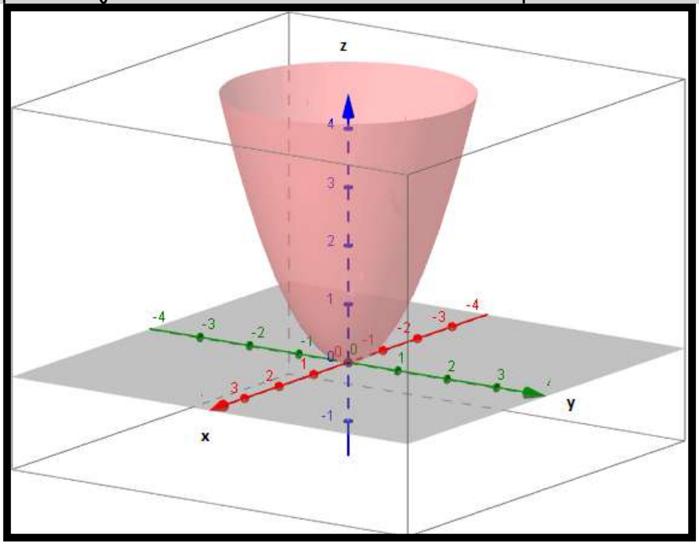
Si llamamos

$x = u$
$y = v$
$z = u^2 + v^2$

Podemos eliminar los parámetros u y v, obteniendo:

$$z = x^2 + y^2, \text{ donde } (x\,;y) \in R^2$$

Luego, la superficie que resulta ser el conjunto imagen del campo vectorial dado es el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$, cuyo gráfico se muestra a continuación:



ii. con (u ; v) tales que $u^2 + v^2 \leq 1$

En este caso, consideremos el campo vectorial $\bar{F}: A \subseteq R^2 \to R^3$, $\bar{F}(u;v) = (u;v;u^2+v^2)$, donde $A = \{(u;v) \in R^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$.

La ecuación cartesiana que obtenemos también será

$$z = x^2 + y^2$$

sólo que ahora A, el dominio del campo vectorial, impone la condición $u^2 + v^2 \leq 1$ y, siendo $z = u^2 + v^2$, esto equivale a $z \leq 1$.

Luego, la superficie que resulta ser el conjunto imagen del campo vectorial dado es el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$, donde $x^2 + y^2 \leq 1$ y cuyo gráfico se muestra a continuación: