Ejercicio I

En dinámica de poblaciones (de bacterias, animales, personas, etc.) es usual utilizar el siguiente modelo continuo, conocido como Ecuación Logística o Modelo de Verhulst:

$$\frac{dP}{d\,t} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Siendo P(t) el tamaño de la población. K representa la máxima población que soporta el medio ambiente en el que viven. Por otro lado, r es la tasa de crecimiento poblacional.

Esta ecuación tiene solución analítica, conocida como la función sigmoidea

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K+P_0(e^{rt}-1)}$$

siendo P_0 la población inicial.

a) Considerando $P_0 = 1$ (en miles de individuos), r =0,1 y K=5 discretizar el problema mediante el método de Euler en el intervalo I = [0, 100], considerando un paso h a elección. Realizar dos iteraciones utilizando este método.
b) Discretizar el problema utilizando alguno de los métodos de Runge Kutta de orden dos (Heun, punto medio o Ralston). Realizar dos iteraciones utilizando el método seleccionado.
c) Comparar los resultados obtenidos en b) y c) con la solución analítica. ¿Cuál es el error que se comete en cada paso con cada uno de los métodos?

Ejercicio II

En el proceso de esterilización de alimentos, resulta de interés estimar la evolución temporal de los contaminantes presentes. Como hipótesis de trabajo, asumimos que la velocidad de muerte de los contaminantes sigue la ecuación de primer orden dada por:

$$\frac{dN}{dt} = -k.N$$

siendo N el número de contaminantes y k [1/min] la velocidad específica de muerte. Consideremos el caso de un alimento prueba que contiene inicialmente microorganismos contaminantes en cantidad de 500 millones (N(0)=500). Supongamos que la constante cinética depende de la temperatura, según la siguiente ecuación

$$\mathrm{k} = e^{-\left(\frac{t_r - t}{t_r}\right)}$$

siendo t_r =121,1° la temperatura de referencia.

Calcular valores aproximados para N realizando dos iteraciones de los métodos de Euler y Runge Kutta, en el intervalo I= [0, 5] con paso h=0,1.

Ejercicio III

La velocidad con la que varía la temperatura T de un cuerpo colocado en un ambiente que se supone a una temperatura constante T_a es proporcional a la diferencia entre T_a y T (La constante de proporcionalidad es k >0)

a) Plantear el problema de valor inicial con $T(0) = T_0$, para todos los valores de T_0, T_a.

b) Considerando k =1/2, T_0 =20°, T_a. =25°, discretizar el problema por el método de Euler en el intervalo I=[0,100] con paso h a elección. Utilizando Octave, representar en un mismo gráfico la solución exacta y la aproximada.

Ejercicio IV

En el intervalo I = [0, 1] se define la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = t - y$$

Calcular, mediante el método de Euler, un valor aproximado de y(0,2) sabiendo que y(0) = 2 y considerando paso h =0,1