Ejercicio 1. Sea $P(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + ax + b$

a) Hallar a y b $\in \Re$ sabiendo que 2i es raíz de $P(x)$

b) Con los valores obtenidos, hallar el conjunto de raíces de $P(x)$, su descomposición factorial en $R[x]$ y $C[x]$ y efectuar un gráfico aproximado.

Ejercicio 2.

a) Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Determinar todos los $K \in \Re$ para que el sistema $A.X = B$, sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Sean $A, B \in \Re^{3*3}$. Sabiendo que $A = -\frac{1}{2}B^t.I$ y que $\det(B) = -2$. Calcular $\det(3A^{-1}.B^4)$

c) Determinar el conjunto R y graficar siendo $R = \{Z \in C / |Z|^2 + \mathrm{Re}(Z^2) - \mathrm{Im}(Z^2) = 0\}$

Ejercicio 3.

a) Completar: "Si $z = 2 - 2i$ entonces sus raíces cúbicas son:………….."

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Hallar, si es posible, la inversa de la matriz A.

Ejercicio 4.

a) Hallar la ecuación general del plano π, sabiendo que pasa por los puntos: $P_0 = (1;0;1)$, $P_1 = (2;1;3)$ y $P_2 = (-1;2;0)$

b) Hallar la ecuación de la recta L paralela a la recta $x + 1 = \frac{y-2}{2} = z + 4$ y que pasa por el punto: $Q_0 = (3;3;4)$.

c) Hallar la intersección entre el plano π y la recta L.

Resolución

Ejercicio 1. Sea $P(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + ax + b$

a) Hallar a y b $\in \Re$ sabiendo que 2i es raíz de $P(x)$

Dado que se sabe que 2i es raíz del polinomio P, se verifica que P(2i) = 0. Además, como los coeficientes de P son números reales, -2i también es raíz, o sea, P(-2i) = 0. Evaluamos entonces el polinomio en estos valores:

$$P(2i) = (2i)^5 - 5(2i)^4 + 12(2i)^3 - 24(2i)^2 + 2ia + b = 0 \rightarrow$$

$$32i^5 - 80i^4 + 96i^3 - 96i^2 + 2ai + b = 0 \quad \text{Como } i^5 = i,\ i^4 = 1,\ i^3 = -i,\ i^2 = -1:$$

$$32i - 80 - 96i + 96 + 2ai + b = 0$$

$$16 + b - 64i + 2ai = 0 \rightarrow b = -16 + 64i - 2ai \quad (1)$$

$$P(-2i) = (-2i)^5 - 5(-2i)^4 + 12(-2i)^3 - 24(-2i)^2 - 2ia + b = 0 \rightarrow$$

$$-32i^5 - 80i^4 - 96i^3 - 96i^2 - 2ai + b = 0$$

$$-32i - 80 + 96i + 96 - 2ai + b = 0$$

$$16 + b + 64i - 2ai = 0 \rightarrow b = -16 - 64i + 2ai \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) :

$$-16 + 64i - 2ai = -16 - 64i + 2ai$$

$$128i = 4ai$$

$$a = 32$$

Reemplazando este valor de a en (1) o en (2), obtenemos $b = -16$.

Observación 1: En la resolución se optó por despejar ‘b’ de ambas ecuaciones y luego evaluar. Se podría haber aplicado cualquier otro método para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a y b) dado por

$$\begin{cases} 16 + b - 64i + 2ai = 0 \\ 16 + b + 64i - 2ai = 0 \end{cases}$$

Observación 2: El mismo ejercicio se podría haber resuelto considerando únicamente que 2i es raíz. Al evaluar el polinomio en x = 2i e igualando a cero, llegamos a la ecuación dada en (1). Si en esta expresión sacamos “i” de factor común, nos queda 16 + b + (64 - 2 a)i = 0, por lo que 16 + b = 0 y 64 - 2a = 0 (un número es igual a cero si tanto su parte real como su parte imaginaria son nulas).

b) Con los valores obtenidos, hallar el conjunto de raíces de $P(x)$, su descomposición factorial en $R[x]$ y $C[x]$ y efectuar un gráfico aproximado.

Como a = 32 y b = -16 nos queda $P(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$. El polinomio es divisible por $Q_1(x) = x - 2i$ (dado que 2i es raíz) y por $Q_2(x) = x + 2i$ (dado que -2i también es raíz). Por lo tanto, P es divisible por el producto entre Q_1 y Q_2. Tenemos que $Q_1(x)Q_2(x) = (x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$. Realizamos la división:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2}
+ & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\
\underline{-x^5 \qquad - 4x^3} & \\
\quad -5x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16 & \\
\quad + & \\
\quad \underline{5x^4 \qquad + 20x^2} & \\
\qquad 8x^3 - 4x^2 + 32x - 16 & \\
\qquad + & \\
\qquad \underline{-8x^3 \qquad - 32x} & \\
\qquad\quad -4x^2 - 16 & \\
\qquad\quad + & \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 16} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, $P(x) = (x^2 + 4)(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$. A continuación, factorizamos el polinomio dado por $R(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. De acuerdo al teorema de Gauss, las posibles raíces racionales de este polinomio son {1, -1, 2, -2, 4, -4}. Especializando en x = 1 se verifica que R(1) = 0 por lo que R es divisible por x - 1. Efectuamos entonces la división entro el polinomio R y el polinomio x - 1, para lo cual podemos aplicar la regla de Ruffini:

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0

Luego, $R(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$. Las raíces del polinomio $x^2 - 4x + 4$ las podemos buscar utilizando la fórmula resolvente o de Baskara, obteniendo que x = 2 es raíz doble.

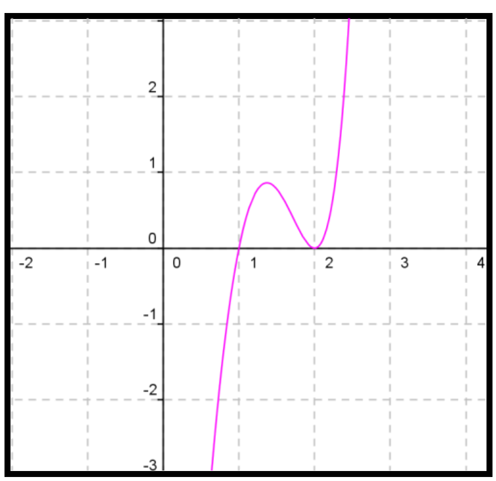
La descomposición factorial de P en R[x] es

$$P(x) = (x^2 + 4)(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x^2 + 4)(x - 1)(x - 2)^2$$

La descomposición factorial de P en C[x] es:

$$P(x) = (x - 2i)(x + 2i)(x - 1)(x - 2)^2$$

Un gráfico aproximado de P es el siguiente:



Ejercicio 2.

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & K\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Determinar todos los $K \in \Re$ para que el sistema $A.X = B$, sea Compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

Diagonalizamos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & k & 1\end{array}\right) \quad 3F_1 - F_2 \rightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & 3\\ 2 & 3 & k & 1\end{array}\right) \quad 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -k & 1\end{array}\right) \quad 5F_3 - F_2 \rightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -5k+2 & 2\end{array}\right)$$

Por lo tanto, si -5k + 2 = 0, o sea si $k = \frac{2}{5}$, el sistema resulta incompatible. Para $k \neq \frac{2}{5}$ el sistema es compatible determinado.

<u>Observación</u>: Otra forma de resolver el ejercicio es calculando el determinante de la matriz A. Si det(A) = 0, el sistema es compatible indeterminado mientras que si det(A) $\neq 0$ el sistema resulta compatible determinado.

b) Sean $A, B \in \Re^{3*3}$. Sabiendo que $A = -\frac{1}{2}B^t.I$ y que $\det(B) = -2$. Calcular $\det(3A^{-1}.B^4)$

Aplicamos las propiedades de los determinantes para calcular det(A)- Como

$$A = -\frac{1}{2}B^TI \rightarrow \det(A) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det(B^TI) = -\frac{1}{8}\det(B^T).\det(I) = -\frac{1}{8} . (-2) . 1 = \frac{1}{4}$$

det(kA) = k^ndet(A) siendo n el orden de A.

det(AB) = det(A).det(B)

det(B^T) = det(B)
det(I) = 1

Como det(A^{-1}) = $(\det(A))^{-1}$, det(A^{-1}) = 4. Luego:

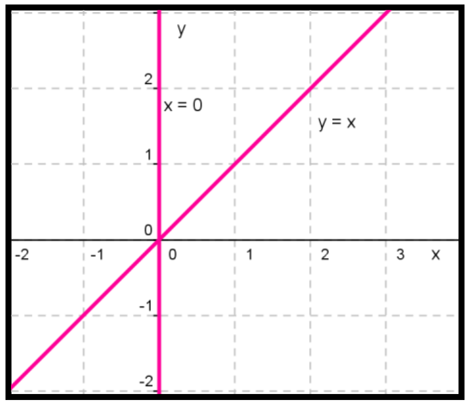
$$\det(3A^{-1}B^4) = 3^3 \det(A^{-1}B^4) = 27\det(A^{-1})\det(B^4) = 27.\ 4 .(-2)^4 = 1728$$

det(A^n) = $(\det(A))^n$

c) Determinar el conjunto R y graficar siendo $R = \{Z \in C / |Z|^2 + Re(Z^2) - Im(Z^2) = 0\}$

Sea $z = x + iy$. Sabemos que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Calculamos z^2:
$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Entonces, $Re(z^2) = x^2 - y^2$, $Im(z^2)$)= $2xy$. Remplazando en la ecuación:

$|z|^2 + Re(z^2) - Im(z^2) = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 - 2xy = 0 \leftrightarrow 2x^2 - 2xy = 0 \leftrightarrow 2x(x - y) = 0$. Al tener un producto igualado a cero, obtenemos que o $x = 0$ o $x - y = 0$, o sea $x = y$. Es decir, $R = \{(x, y) \in R^2 / x = 0 \text{ o } x = y\}$. Gráficamente:

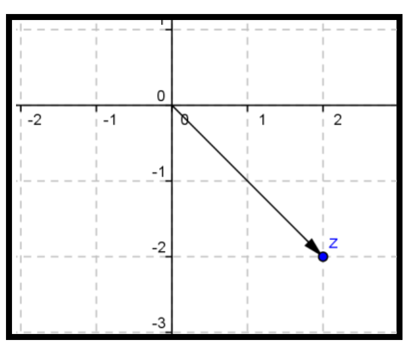


Ejercicio 3.

a) Completar: "Si $z = 2 - 2i$ entonces sus raíces cúbicas son:............."

Para hallar las raíces cúbicas de 2 – 2i necesitamos primero hallar el argumento y el módulo de este número complejo.

- $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$



La fórmula que permite calcular las raíces n-ésimas de un número complejo es:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{siendo } \varphi = \arg(z),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Las raíces cúbicas de z = 2 – 2i son:

$$k = 0 \qquad z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\operatorname{sen}\frac{7}{12}\pi\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}$$

$$k = 1 \qquad z_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$$

$$k = 2 \qquad z_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\operatorname{sen}\frac{23}{12}\pi\right) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\, e^{\frac{23}{12}\pi i}$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Hallar, si es posible, la inversa de la matriz A.

Para saber si la matriz A es o no inversible, calculamos su determinante. Por ser A una matriz triangular superior, su determinante resulta igual al producto de los elementos de su diagonal, por lo que det(A) = 2.3.3 = 18 y al ser distinto de cero, A admite matriz inversa.

Para hallar esta matriz, calculamos la matriz de cofactores, C, asociada a A. Recordemos que $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ siendo M_{ij} el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A. Los elementos de la matriz de cofactores son:

$$\begin{matrix} c_{11} = 9 & c_{12} = 0 & c_{13} = 0 \\ c_{21} = 0 & c_{22} = 6 & c_{23} = 0 \\ c_{31} = 0 & c_{32} = 0 & c_{33} = 6 \end{matrix}$$

La matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es la matriz de cofactores transpuesta. Notemos que, en este caso, por ser C una matriz diagonal $C = C^T$ por lo que Adj(A) = C. La inversa de la matriz A la obtenemos dividiendo cada uno de los elementos de la matriz adjunta por el determinante de la matriz A. Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.\ \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sugerencia: Comprobar que A. A^{-1} = A^{-1}ª = I

Ejercicio 4.

a) Hallar la ecuación general del plano π, sabiendo que pasa por los puntos: $P_0 = (1; 0; 1)$, $P_1 = (2; 1; 3)$ y $P_2 = (-1; 2; 0)$

Una manera posible de encontrar la ecuación del plano es la siguiente: primero, podemos hallar la dirección de los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_2P_1}$:

$P_1 - P_0$ = (2; 1; 3) - (1; 0; 1) = (1; 1; 2)
$P_1 - P_2$ = (2 ; 1 ; 3) – (-1; 2 ; 0) = (3 ; -1 ; 3)

Para buscar el vector normal, realizamos el producto vectorial entre los vectores obtenidos:

$$\vec{n} = (1\ ;\ 1\ ;\ 2)\ \mathrm{x}\ (3\ ; -1\ ; 3) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\breve{i} + 3\breve{j} - 4\breve{k}$$

Sabemos que los puntos del plano verifican la condición $\vec{n}\,.(X - P) = 0$ siendo P un punto cualquiera del plano. Por lo que, conociendo el vector normal y tomando un punto cualquiera perteneciente al plano (por ejemplo, P_0) podemos encontrar la ecuación de π:

$$\pi:\ (5\ ;\ 3\ ; -4)\ .\ [(x\ ;\ y\ ; z) - (1\ ; 0\ ; 1)] = 0$$
$$(5\ ;\ 3\ ; -4).(x - 1; y\ ;\ z - 1) = 0$$
$$5(x - 1) + 3y\ - 4(z - 1) = 0$$
$$\pi:\ \ 5x + 3y - 4z = 1$$

b) Hallar la ecuación de la recta L paralela a la recta $x + 1 = \frac{y-2}{2} = z + 4$ y que pasa por el punto $Q_0 = (3; 3; 4)$

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos. La recta dada en el enunciado tiene la dirección dada por el vector (1; 2; 1): podemos tomar cualquier múltiplo de este vector para obtener el vector director de la recta que buscamos. Dado que la recta L buscada pasa por el punto (3; 3; 4) su ecuación es L: $\overline{X} = \lambda(1\ ; 2\ ; 1) + (3\ ; 3\ ; 4)$ con $\lambda \in R$.

c) Hallar la intersección entre el plano π y la recta L.

De la ecuación de la recta L (hallada en el ítem anterior) obtenemos que $x = \lambda + 3$, $y = 2\lambda + 3$, $z = \lambda + 4$. Para hallar la intersección entre el plano y la recta, remplazamos estas igualdades en la ecuación del plano π :

$$\begin{aligned}
&5x + 3y - 4z = 1 \rightarrow \\
&5(\lambda + 3) + 3(2\lambda + 3) - 4(\lambda + 4) = 1 \\
&5\lambda + 15 + 6\lambda + 9 - 4\lambda - 16 = 1 \\
&7\lambda + 8 = 1 \\
&\lambda = -1
\end{aligned}$$

Para λ = -1 tenemos que x = 2, y = 1, z = 3. Por lo tanto, el plano y la recta se intersecan en el punto (2; 1; 3).