**1.** Para repasar algunos conceptos relacionados a polinomios, te sugerimos realizar la siguiente actividad

**2.** Sean los polinomios $p(x) = x$, $q(x) = x^2 + 1$, $r(x) = -x^3 + 5x - 2$

a. Realizar las operaciones que se indican a continuación.

b. Indicar, en cada caso, el grado y el coeficiente principal del polinomio que se obtiene como resultado.

i. $p(x) + r(x)$
ii. $q(x) - r(x)$
iii. $p(x).q(x)$
iv. $p(x) + 2.r(x) - q(x)$

<u>Algoritmo de división de polinomios</u>

Dados cualesquiera dos polinomios p y q (q no nulo) es posible encontrar otros dos (únicos) polinomios c (cociente) y r (resto) tal que p = q.c + r donde r es el polinomio nulo o bien el grado de r menor que el de q.

Observación: Si r es el polinomio nulo, decimos que p es divisible en q o que q divide a p o q es un factor de p.

**3.** Determinar, para cada uno de los siguientes polinomios, el cociente y el resto que se obtiene al hacer $p$ dividido $q$.

i. $p(u) = u^3 - 25u; q(u) = u^4 - 1$
ii. $p(t) = t^7 - t^5 + t^3 + t - 2; q(t) = t^3 - 1$
iii. $p(t) = t^8 - 1; q(t) = t^2 - 1$
iv. $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 66x + 120; q(x) = x^2 - 6x + 8$

**4.** Para los siguientes polinomios:

a. Hallar el conjunto de sus raíces $\sigma(p)$, $\sigma(p) = \{t \in C : p(t) = 0\}$.

b. Escribir su descomposición factorial en $Q[t]$, $R[t]$ y $C[t]$.

i. $p_1(t) = t^3 - t$
ii. $p_2(t) = -t^3 + t^2$
iii. $p_3(t) = t^4 - 4$
iv. $p_4(t) = t^5 - 13t^3 + 36t$
v. $p_5(t) = p_1 + p_2$
vi. $p_6(t) = p_1 . p_2$

**5.** Hallar los coeficientes desconocidos para los siguientes polinomios, de modo tal que en cada caso se cumplan las condiciones indicadas.

a. $p(x) = a(x-2)(x+1), p(4) = 2$. ¿Cuáles son las raíces de $p$?

b. $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, $x = 2$ es raíz y $q(5) = 1$.

c. $r(t) = t^4 - 4t^3 + 7t^2 + at + b$, $t = 2i$ es raíz con $a, b \in R$

Sugerencia: Para los ejercicios que siguen te proponemos utilizar algún graficador, por ejemplo:

- Aplicaciones gratuitas:

| Geogebra Calculadora Gráfica | Funciones-EDITEX Matemáticas | Funciones |
|---|---|---|
| | | |

- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

**6.** Representar gráficamente los siguientes polinomios

i. $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x+3)$

ii. $q(x) = -\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 (x-1)^3$

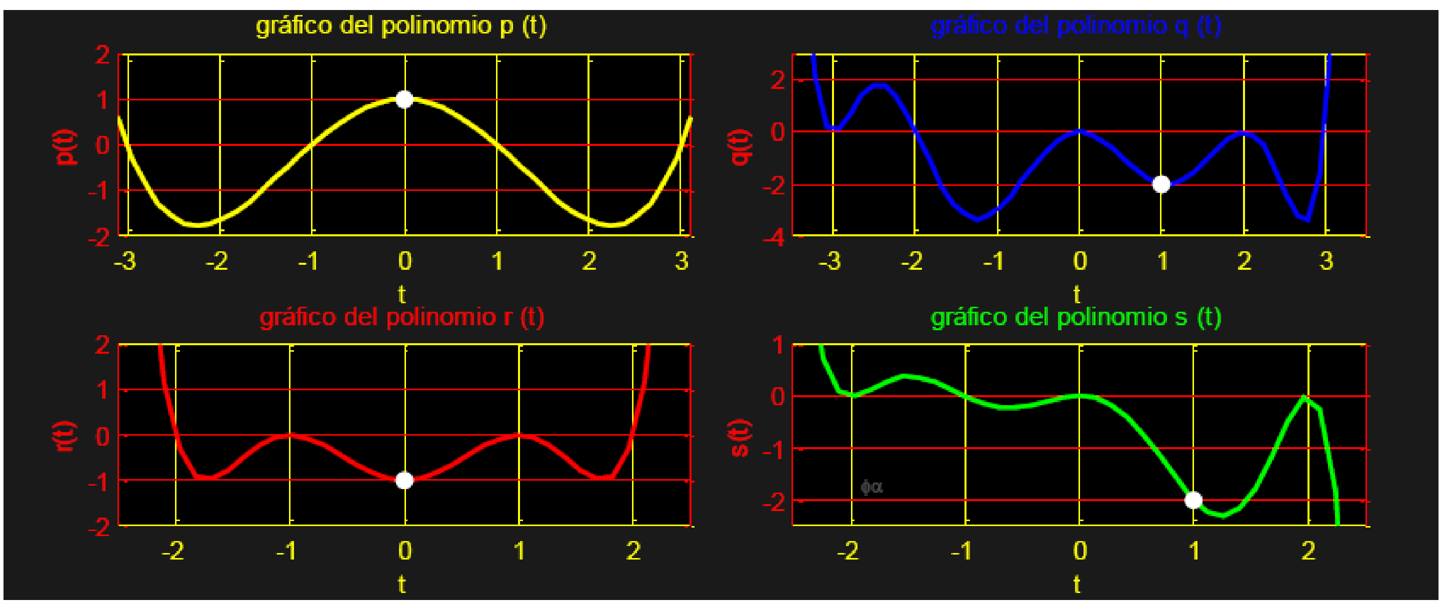
iii. $r(x) = -2x(x-3)^4$

iv. $s(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^5 (x-49)$

¿Cómo se interpreta en el gráfico la multiplicidad de una raíz? ¿Y el signo del coeficiente principal? ¿En el gráfico pueden visualizarse todas las raíces?

**7.**

Determinar la expresión analítica del único polinomio de grado mínimo cuyo gráfico en la zona relevante, en cada caso, se indica en la siguiente figura.



**8.** Dados los siguientes polinomios, efectuar su descomposición factorial en $R[t]$ y $C[t]$. Graficarlos en su zona relevante.

i. $p(t) = t^4 – 7t^3 + 17t^2 – 17t + 6$, sabiendo que es divisible en $q(t) = (t – 1)^2$.
ii. $p(t) = t^4 – 5t^3 + 13t^2 – 19t + 10$, sabiendo que $1 - 2i$ es una raíz.
iii. $p(t) = t^5 – 5t^3 + 4t$.
iv. $p(t) = t^5 - 10t^4 + 35t^3 – 50t^2 + 24t + k$, sabiendo que es divisible en $q(t) = t^3 – 3t^2 + 2t$.
v. $p$ es tal que $gr(p) = 3$, $\sigma(p) = \{-2\text{i}, 2\text{i}, 3\}$ y $p(1) = 20$.
vi. $p$ es tal que $gr(p) = 7$, $\sigma(p) = \{-2(\text{doble}), 2(\text{doble}), 0(\text{triple})\}$, $p(-1) = 27$.

**9.**
a. Hallar la expresión de un polinomio $P$ de grado mínimo, con coeficientes reales, que verifique las siguientes condiciones: $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 2i$ son raíces y $P(1) = -5$.

b. ¿Es divisible el polinomio hallado en el ítem anterior por $Q(x) = x^2 + 7x + 2$? Justificar.

## Ejercicios resueltos

### Ejercicio 5

Hallar los coeficientes desconocidos para los siguientes polinomios, de modo tal que en cada caso se cumplan las condiciones indicadas.

b. $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, $x = 2$ es raíz y $q(5) = 1$.

Resolución:

Buscamos $a, b \in R$ de manera que el polinomio $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ cumpla:

- Tiene como raíz a $x = 2$
- $q(5) = 1$

Que $x = 2$ sea raíz del polinomio $q$ es equivalente a que $q(2) = 0$:

$q(2) = 2^3 + \frac{1}{2}2^2 + a.2 + b = 0$

$q(2) = 10 + 2a + b = 0$ (A)

Además,

$q(5) = 1$

$q(5) = 5^3 + \frac{1}{2}5^2 + a.5 + b = 1$

$q(5) = \frac{275}{2} + 5a + b = 1$ (B)

Resolvemos el sistema de ecuaciones dado por (A) y (B):

$$\begin{cases} 10 + 2a + b = 0 \quad (A) \\ \dfrac{275}{2} + 5a + b = 1 \quad (B) \end{cases}$$

Si despejamos $b$ en (A):

$$b = -2a - 10 \text{ (C)}$$

Reemplazamos $b$ en (B):

$$\frac{275}{2} + 5a + (-2a - 10) = 1$$

$$\frac{275}{2} + 3a - 10 = 1$$

$$\frac{275}{2} + 3a - 10 = 1$$

$$3a = -\frac{253}{2}$$

$$\boxed{a = -\frac{253}{6}}$$

Por último, reemplazamos $a = -\frac{253}{6}$ en (C) y obtenemos el valor de $b$:

$$b = -2.\left(-\frac{253}{6}\right) - 10$$

$$\boxed{b = \frac{223}{3}}$$

Luego, si $a = -\frac{253}{6}, b = \frac{223}{3}$ entonces el polinomio $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ cumple:

- $x = 2$ es raíz de $q$
- $q(5) = 1$

**<u>Ejercicio 8</u>**

Dados los siguientes polinomios, efectuar su descomposición factorial en $R[t]$ y $C[t]$. Graficarlos en su zona relevante.

ii. $p(t) = t^4 - 5t^3 + 13t^2 - 19t + 10$, sabiendo que $1 - 2i$ es una raíz.

<u>Resolución:</u>

El polinomio $p$ tiene grado 4, así que su descomposición factorial en $C[t]$ será de la forma:

$p(t) = a(t - t_1).(t - t_2).(t - t_3).(t - t_4)$, donde $t_1, t_2, t_3, t_4$ son las raíces complejas de $p$.

Sabemos que $t = 1 - 2i$ es raíz del polinomio $p$. Por propiedad, como el polinomio $p$ tiene coeficientes reales, el conjugado de esta raíz también será raíz del polinomio. Es decir:

$t = 1 - 2i$ es raíz del polinomio $p \Rightarrow t = 1 + 2i$ es raíz del polinomio $p$

Luego, tanto $t - (1 - 2i)$ como $t - (1 + 2i)$ serán factores del polinomio $p$ y éste será divisible por

$$q(t) = [t - (1 - 2i)].[t - (1 + 2i)]$$

Entonces, desarrollamos el producto en $q$ y luego dividimos el polinomio $p$ por el polinomio $q$.

$$q(t) = [t - (1 - 2i)].[t - (1 + 2i)]$$

$$q(t) = t^2 - (1 + 2i)t - (1 - 2i)t + (1 - 2i)(1 + 2i)$$

$$q(t) = t^2 - (1 + 2i + 1 - 2i)t + 1^2 - (2i)^2$$

$$q(t) = t^2 - 2t + 1^2 - 4i^2$$

$$q(t) = t^2 - 2t + 1 + 4$$

$$q(t) = t^2 - 2t + 5$$

Luego,

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{t^4} - 5t^3 + 13t^2 - 19t + 10 & \underline{|\; t^2 - 2t + 5} \\
- \;\; \underline{\cancel{t^4} - 2t^3 + 5t^2} \qquad\qquad & t^2 - 3t + 2 \\
-\cancel{3t^3} + 8t^2 - 19t + 10 & \\
- \;\; \underline{-\cancel{3t^3} + 6t^2 - 15t} \qquad & \\
\cancel{2t^2} - 4t + 10 & \\
- \;\; \underline{\cancel{2t^2} - 4t + 10} & \\
\cancel{0} &
\end{array}
$$

Entonces,

$$p(t) = (t^2 - 2t + 5).(t^2 - 3t + 2)$$

Factorizamos el polinomio, usando fórmula resolvente, $t^2 - 3t + 2 = (t - 1).(t - 2)$ y sabíamos que

$$t^2 - 2t + 5 = [t - (1 - 2i)].[t - (1 + 2i)]$$

Luego, la descomposición factorial de $p$ en $C[t]$ es:

$$\boxed{p(t) = [t-(1-2i)].[t-(1+2i)].(t-1).(t-2)}$$

En cuanto a la descomposición factorial de $p$ en $R[t]$, debemos ocultar las raíces complejas realizando el producto $[t-(1-2i)].[t-(1+2i)]$:

$$\boxed{p(t) = (t^2-2t+5).(t-1).(t-2)}$$