1. Dado el conjunto $A = \{3, 4, \{5\}, \{3,4\}, -3\}$, indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) $3 \in A$ b) $\{5\} \subseteq A$ c) $\{3,4\} \subseteq A$

d) $\varnothing \subseteq A$ e) $\{3,4\} \in A$ f) $\{4\} \in A$

g) $A \subseteq \{-3,3,5,4\}$ h) $\{-3,3,5,4\} \subseteq A$ i) $\varnothing \in A$

2. Determine si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ ó $A = B$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,1,3\}$

b) $A = \{1,2,1,3\}$ $B = \{1,2,3\}$

c) $A = \{1,2,\sqrt{16}\}$ $B = \{1,2,3,4,5\}$

d) $A = [-2,2]$ $B = (-2;2)$

3. Sean los conjuntos $A = \{1,2,4,5,7,10\}$, $B = \{3,6,8,10\}$, $C = \{-1,2,0\}$ y $D = \{-2, 0, 3, 4, 5, 10\}$. Considerando que $U = \mathbb{R}$, realice las siguientes operaciones:

a) $A \cap C$ b) $A \cup B \cup D$ c) $A \Delta B$

d) $D - C$ e) $D' \cap A \cap C$ f) $D' \cap C'$

g) $(B \cup C) \cap A$ h) $B - (A \cup C)$ i) $[(A \cup B) - C] \cap D$

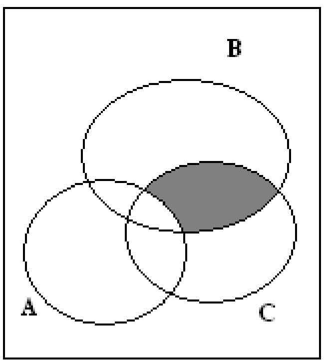
4. Represente mediante diagramas de Venn, los siguientes conjuntos:

a) $A \cap (B \cup C)$ b) $A' \cup (B \cap C)$

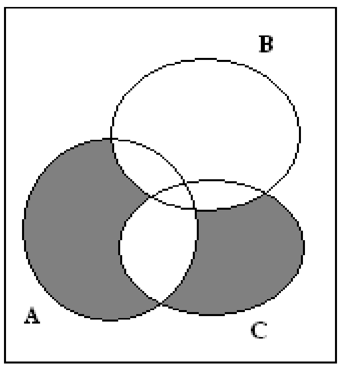
c) $(A \Delta B) \cap (C - A)$ d) $(A \cup B) - C$

5. Indique las operaciones que corresponden a los siguientes diagramas:

U



U



Sugerencia: en la página http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_153_g_4_t_1.html?open=instructions&from= encontrarás un programa con el cual podrás ejercitar las diferentes operaciones entre conjuntos

6. Demuestre las siguientes afirmaciones. Justifique.

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

b) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

c) $A - (B \cup A) = \varnothing$

d) $(A \cap C)' - B = (A' - B) \cup (C' - B)$

e) $A - (A \Delta B) = A \cap B$

f) $(A \Delta B)' = A \Delta B'$

g) $(A - B)' \cap C = (C - A) \cup (B \cap C)$

7. Obtenga el conjunto de partes de cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $\{0,1\}$ b) $\{a,b,c\}$
   c) $\{1,\{1,2\}\}$ d) $\varnothing$

8. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{3,5\}$. Complete las afirmaciones que siguen con alguno de los símbolos $\in, \notin, \subseteq, \not\subset, \supseteq, =, \neq$ de manera tal que resulten verdaderas:
   a) A……B b) C……P(B) c) $\{2\}$……A
   d) 2……B e) B…….C f) $\{4\}$……C
   g) 3……P(C) h) $\{1\}$……P(A) i) $\varnothing$……P(A)

9. a) Si el conjunto A tiene 32 subconjuntos, ¿cuántos elementos tiene A?
   b) Si P(B) tiene 64 elementos, ¿cuántos subconjuntos no vacíos tiene B?

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 6 Demuestre las siguientes afirmaciones. Justifique.

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

Demostraremos la doble implicación utilizando equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x \in U: (x \in A \to x \in B) && \text{por definición de inclusión}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in U: \left[\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)\right] && \text{por equivalencia del contrarecíproco}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in U: \left(x \notin B \to x \notin A\right) && \text{por negación del "pertenece"}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in U: \left(x \in B' \to x \in A'\right) && \text{por definición de complemento de un conjunto}\\
&\Leftrightarrow B' \subseteq A' && \text{por definicion de inclusión.}
\end{aligned}$$

Otra manera de demostrar la misma proposición es mediante el método el absurdo: se trata de suponer que $A \subseteq B$ y que $B' \not\subset A'$ y llegar a un absurdo o contradicción.

$$\begin{aligned}
B' \not\subset A' &\to \exists x \in U: \left(x \in B' \wedge x \notin A'\right) && \text{por negación de la inclusión}\\
&\to \exists x \in U: (x \notin B \wedge x \in A) && \text{por definición de complemento de un conjunto}
\end{aligned}$$

Luego, existe un elemento x que pertenece al conjunto A y no pertenece al conjunto B. Esta conclusión es absurda o contradictoria, dado que $A \subseteq B$. Ea contradicción provino de suponer que $B' \not\subset A'$, por lo que acabamos de demostrar que si $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$.

Nos falta probar la otra implicación: $B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B$. Pero esta implicación podemos demostrarla utilizando lo que demostramos anteriormente: que si $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$. Dado que esta proposición es verdadera para cualesquiera conjuntos A, B tomemos como A = B’ y como conjunto B, A’. Entonces tenemos que $B' \subseteq A' \Rightarrow (A')' \subseteq (B')' \Rightarrow A \subseteq B$.

f) $A - (A \Delta B) = A \cap B$

Para demostrar esta igualdad, usaremos las leyes de la teoría de conjuntos y la definición de las operaciones entre conjuntos.

$$
\begin{aligned}
A - (A \Delta B) &= A \cap (A \Delta B)' && \text{por definición de diferencia} \\
&= A \cap \left[(A - B) \cup (B - A)\right]' && \text{por definición de diferencia simétrica} \\
&= A \cap \left[(A \cap B') \cup (B \cap A')\right]' && \text{por definición de diferencia} \\
&= A \cap \left[(A \cap B')' \cap (B \cap A')'\right] && \text{por ley de De Morgan} \\
&= A \cap (A' \cup B) \cap (B' \cup A) && \text{por ley de De Morgan / doble complementación} \\
&= A \cap (B' \cup A) \cap (A' \cup B) && \text{por ley asociativa} \\
&= A \cap (A' \cup B) && \text{por ley de absorción} \\
&= (A \cap A') \cup (A \cap B) && \text{por propiedad distributiva} \\
&= \varnothing \cup (A \cap B) && \text{por ley del inverso} \\
&= A \cap B && \text{por ley del neutro}
\end{aligned}
$$

Luego, probamos que $A - (A \Delta B) = A \cap B$.

Ejercicio 9

a) Si el conjunto A tiene 32 subconjuntos, ¿cuántos elementos tiene A?

Recordemos que el conjunto de partes de un conjunto A está formado por todos los subconjuntos de A. Es decir, $P(A) = \{ B \,/\, B \subseteq A \}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

- $\varnothing \in P(A)$
- $A \in P(A)$
- Si A es un conjunto de n elementos, entonces su conjunto de partes tiene 2^n elementos.

En este ejercicio, sabemos que A tiene 32 subconjuntos, es decir que su conjunto de partes tiene 32 elementos. Para conocer la cantidad de elementos del conjunto A, tenemos que plantear la siguiente igualdad: $2^n = 32$, por lo que n = 5 y, en consecuencia, A tiene 5 elementos.

b) Si P(B) tiene 64 elementos, ¿cuántos subconjuntos no vacíos tiene B?

Sabemos que el conjunto vacío es un elemento del conjunto de partes de cualquier conjunto. Por lo tanto, si P(B) tiene 64 elementos (o sea B tiene 64 subconjuntos), 63 de ellos son no vacíos.