1. Dadas las sucesiones (a_n) de números reales, halle la expresión de a_n para un n arbitrario:

a) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n \in N)$

b) $a_1 = 3 \qquad a_n = a_{n-1} + 3^n \quad (n > 1)$

Sugerencia: utilizar convenientemente el ejercicio 1) g) de este TP

c) $a_1 = 0 \qquad a_n - a_{n-1} = 2n + 1 \quad (n > 1)$

d) $a_1 = -3 \qquad a_{n-1} + 2a_n = 0 \quad (n \geq 2)$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones en recurrencia homogéneas:

a) $a_0 = 2,\ a_1 = 1 \qquad a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$

b) $a_0 = 6,\ a_1 = 8 \qquad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n > 1)$

c) $a_1 = 6,\ a_2 = 0 \qquad a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$

d) $a_0 = 2,\ a_1 = 8 \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n \quad (n \geq 0)$

e) $a_0 = a_1 = 1 \qquad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \quad (n \geq 0)$

3. Hallar el valor de $k \in R$ de modo tal que 5^n sea solución de la ecuación $a_{n+2} - 3a_{n+1} = k\, a_n$ $(n \geq 0)$.

Para el valor de k hallado, resolver la ecuación de recurrencia si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 3: Hallar el valor de $k \in R$ de modo tal que 5^n sea solución de la ecuación $a_{n+2} - 3a_{n+1} = k\, a_n$ $(n \geq 0)$. Para el valor de k hallado, resolver la ecuación de recurrencia si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

La ecuación dada en el enunciado la podemos escribir como $a_{n+2} - 3a_{n+1} - k\, a_n = 0$. Como sabemos que 5^n es solución de la ecuación, esta sucesión verifica la igualdad. Es decir:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - k\, a_n = 0$$

$$5^{n+2} - 3.\, 5^{n+1} - k\, 5^n = 0$$

$$5^n.\, 5^2 - 3.\, 5^n.\, 5 - k.5^n = 0 \qquad \text{sacando } 5^n \text{ como factor común:}$$

$$5^n.\left(25 - 15 - k\right) = 0 \qquad \text{dado que } 5^n \neq 0:$$

$$10 - k = 0 \rightarrow k = 10$$

Reemplazamos de k hallado en la ecuación: $a_{n+2} - 3a_{n+1} - 10\, a_n = 0$. Para buscar la otra solución de la ecuación (una ya la conocemos, es $a_n = 5^n$) planteamos el polinomio característico:

$r^2 - 3r - 10 = 0$. Aplicando la fórmula resolvente, obtenemos que r = 5 o r = -2. Luego, la solución general de nuestra ecuación es $a_n = A.\, 5^n + B.\, (-2)^n$

Falta halar los valores de A y B de modo tal que se verifiquen las condiciones iniciales: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

$a_0 = A.\ 5^0 + B.\ (-2)^0 \rightarrow A + B = 1$

$a_1 = A.\ 5^1 + B.\ (-2)^1 \rightarrow 5A - 2B = 0$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} A + B = 1 \\ 5A - 2B = 0 \end{cases}$ (utilizar el método más conveniente) obtenemos que A = $\frac{2}{7}$ y B = $\frac{5}{7}$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $a_n = \frac{2}{7}.\ 5^n + \frac{5}{7}.\ (-2)^n$