UADE – Departamento de Ciencias Básicas

Física I- 3.1.052

Guía de Actividades de Formación Práctica Nro: 9
Dinámica: movimiento oscilatorio armónico

Bibliografía sugerida:
Básica

- Tipler, Paul Allen. Física para la ciencia y la tecnología; . 4a ed. Barcelona : Reverté, c2001. vol.1.Código de Biblioteca: 53/T548a.
- Resnick, Robert y Halliday, David y Krane, Kenneth S.. Física; 3a ed. en español México, D.F. : CECSA,1998.Código de Biblioteca: 53/R442a.
- Sears, Francis W. y Zemansky, Mark W. y Young, Hugh D., Física universitaria; 6a ed. en español Delaware: Addison Wesley Iberoamericana, 1988. xxi, 1110 p. Código de Biblioteca: 53/S566b.
- Alonso, Marcelo y Finn, Edward J.. Física; Buenos Aires : Addison Wesley Iberoamericana, 1992.969 p, Código de Biblioteca: 53/A459a.

Complementaria

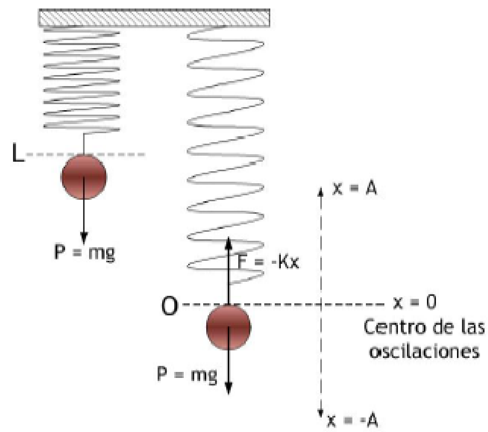
- Blackwood, Oswald H.. Física general; México, D.F.: CECSA, 1980. 860 p. Código de Biblioteca: 53/B678.
- Dossi, Jorge Armando. Guía de problemas de física I: Mecánica de la partícula; Buenos Aires : UADE, 1997. 115 p. Cuadernos UADE n.95. Código de Biblioteca: 53/D898.
- Bueche, Frederick J.. Física para estudiantes de ciencias e ingeniería; 3. ed. en español México, D.F.:McGraw Hill, 1992. Código de Biblioteca: 53/B952.
- Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.. Curso de física teórica : volumen 1. Mecánica; 2a ed. corr. Barcelona, Reverté, 2002. 200 p. Código de Biblioteca: 531/L253.
- Roederer, Juan G.. Mecánica elemental; Buenos Aires : EUDEBA, 2002. 245 p. Manuales. Código de Biblioteca: 531/R712.

Objetivo de la guía: Que el alumno aprenda a describir física y matemáticamente el movimiento de cuerpos puntuales sometidos a fuerzas elásticas. Es decir que puedan describir e interpretar movimientos armónicos simples.
Nota : esta guía fue tomada de:
http://www.iesclaracampoamor.edu.es/Documentos/Fisica_quimica/Soluciones%20Selectividad%20MAS.pdf
Se presentan todos los ejercicios resueltos ya que se trata de un tema que no siempre logra verse en clase y debe ser estudiado para el examen final de la asignatura.

Ejercicio 1

Una pequeña esfera homogénea de masa 1.2 kg que cuelga de un resorte vertical, de masa despreciable y constate recuperadora k= 300 N/m, oscila libremente con una velocidad máxima de 30 cm/s. Determinar:

a) el periodo de movimiento.
b) El desplazamiento máximo de la esfera respecto a la posición de equilibrio.
c) La energía cinética, potencial y total de la esfera cuando se encuentra en la posición de desplazamiento máximo.



Un pequeño preámbulo debe aclarar el modo en que oscila un objeto, tal como nuestra esfera, suspendido de un resorte vertical. Lo esencial es recordar que el centro de las oscilaciones, es decir, el punto en que la fuerza que actúa sobre el objeto es cero, se encuentra en el lugar en que el peso mg del objeto y la fuerza de recuperación del resorte se anulan entre sí, tal como muestra la figura. Así, el centro de las oscilaciones **no** se corresponde con la longitud natural del resorte, sino con la longitud *alargada* por el peso del cuerpo. Además, podemos olvidarnos del peso a partir del momento en que hayamos tomado en cuenta este *alargamiento* del resorte: ese es todo el efecto que producirá la fuerza gravitatoria. El resto de la discusión de un ejercicio como el que nos plantean se realiza tomando en consideración los siguientes detalles:

1) El centro de las oscilaciones es, como se ha dicho, O, donde se cumple mg = Kx, siendo x el alargamiento del resorte desde su longitud natural hasta el punto O. La igualdad anterior, por supuesto, maneja valores absolutos, ya que ambas fuerzas tienen signos opuestos.
2) Se toma en consideración una sola fuerza, que es $F = -Kx$, la fuerza de recuperación elástica (de Hooke). Por ello, se habla de una única energía potencial, $E_p = \frac{1}{2} Kx^2$, asociada a aquella. El peso no produce más efecto que el de desplazar el centro de las oscilaciones al punto O descrito en el epígrafe anterior.
3) Los desplazamientos x se miden respecto al punto O, centro de las oscilaciones, y **no** respecto a la longitud natural del resorte. Todo sucede, pues, como si el peso no existiese y el resorte tuviese una longitud natural hasta O, y no hasta L.

Todas estas consideraciones serán de utilidad, de un modo u otro, en todos los ejercicios que planteen oscilaciones de una masa suspendida en el extremo de un resorte dispuesto verticalmente. En el caso concreto que nos ocupa, las respuestas serían como sigue:

a) El movimiento que observaremos en nuestra esfera es, como sabemos, un M.A.S., cuya aceleración es en cada momento proporcional y de sentido contrario a la deformación del resorte (medida desde O, recuérdese), según

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

de modo que la fuerza sobre la esfera se escribe $F = ma = -m\omega^2 x = -Kx$ (2)

y podemos relacionar así la constante K = 300 N/m, característica del resorte, con la masa de la esfera suspendida y un parámetro básico del M.A.S., como es la pulsación ω. Se sigue que

$$K = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (3)$$

y, recordando que el periodo se puede escribir como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,2}{300}} = \mathbf{0,397\ s}$$

b) La velocidad máxima de la esfera se alcanza, como sabemos, cuando pasa por el centro O de las oscilaciones, y está dada por la expresión

$$v_{máx} = \pm A\omega \qquad (4)$$

donde el signo ± toma en consideración los dos sentidos que puede tener la velocidad en O, según la esfera está subiendo o bajando en su oscilación. Tomando el sentido positivo, y puesto que conocemos la velocidad máxima directamente del enunciado y ω se obtiene de (3), podemos despejar la amplitud A, que es lo que demanda este apartado:

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{0,3}{\sqrt{\frac{300}{1,2}}} = 0,0190 \text{ m} = \mathbf{1,90\ cm}$$

c) Cuando la esfera se encuentra en el punto de desplazamiento máximo (tanto da que sea arriba como abajo), la velocidad es nula, mientras que la posición toma su valor máximo $x_{máx} = \pm A$. En consecuencia, no hay energía cinética, y la energía potencial toma su máximo valor

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{0\ J} \qquad ; \qquad E_p = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}300.0,0190^2 = \mathbf{54.10^{-3}}\ \mathbf{J}$$

mientras que la energía total, suma de las dos anteriores, coincide con la total: en el extremo de las oscilaciones, toda la energía es potencial elástica, del mismo modo que en el centro de las oscilaciones toda la energía es cinética. Ese valor total, como sabemos es ½ KA^2.

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{0,3}{\sqrt{\frac{300}{1,2}}} = 0,0190 \text{ m} = \mathbf{1,90\ cm}$$

c) Cuando la esfera se encuentra en el punto de desplazamiento máximo (tanto da que sea arriba como abajo), la velocidad es nula, mientras que la posición toma su valor máximo $x_{máx} = \pm A$. En consecuencia, no hay energía cinética, y la energía potencial toma su máximo valor

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{0\ J} \qquad ; \qquad E_p = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}300.0,0190^2 = \mathbf{54.10^{-3}}\ \mathbf{J}$$

mientras que la energía total, suma de las dos anteriores, coincide con la total: en el extremo de las oscilaciones, toda la energía es potencial elástica, del mismo modo que en el centro de las oscilaciones toda la energía es cinética. Ese valor total, como sabemos es ½ KA^2.

Ejercicio 2

Una partícula realiza un movimiento armónico simple con una amplitud de 8cm y un periodo de 4s. Sabiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición de máxima elongación:

a) determinar la posición de la partícula en función del tiempo.
b) ¿Cuáles son los valores de la velocidad y de la aceleración 5s después de que la partícula pase por un extremo de la trayectoria?

a) La situación inicial en la posición correspondiente a la elongación máxima, entendida en el sentido positivo, significa una fase inicial de $\pi/2$ rad, si empleamos una función **seno**, como hacemos habitualmente, para escribir el M.A.S.; en cambio, si utilizamos la función **coseno**, deberíamos tomar una fase inicial nula. Es decir, podríamos utilizar indistintamente cualquiera de las dos funciones siguientes para la posición del oscilador:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (1)$$

$$x(t) = A\cos\omega t \qquad (2)$$

entendiendo que ambas representan exactamente el mismo movimiento, y que tomar una u otra es una cuestión de elección libre. Por lo demás, la amplitud es A = 8 cm y la pulsación se obtiene del periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad/s}\ \ (s^{-1})$$

de manera que las funciones posición escritas en (1) y (2) quedan definitivamente

$$x(t) = \mathbf{8\,sen}\,(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) \qquad t <> s;\ \ x <> cm \qquad (3)$$

$$x(t) = \mathbf{8\cos}\frac{\pi}{2}t \qquad t <> s;\ \ x <> cm \qquad (4)$$

b) Podemos responder a esta cuestión de muy diversas maneras. Por ejemplo, podemos derivar alguna de las funciones de posición de la partícula, obtener así las funciones velocidad–tiempo y aceleración–tiempo del movimiento y, en ellas, entrar con el valor de tiempo que nos proponen, después de haber establecido con claridad cuál es el tiempo t = 0, que sería el detalle más delicado al pensar de esta manera. Esas derivadas, usando la función (4), más fácil de escribir, serían:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -8\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t = -4\pi\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t \quad cm/s \qquad (5)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -4\pi\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t = -2\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t \quad cm/s^2 \qquad (6)$$

Y ahora debemos pensar cómo manejamos el tiempo: hemos de localizar un instante tal que hayan transcurrido 5 s desde que el móvil estuvo en un extremo de su trayectoria. Ahora bien, nuestra partícula estaba justamente en la posición de elongación máxima al tiempo t = 0 s, y de acuerdo a ello están escritas las leyes de posición (3) o (4); por tanto, bastará que tomemos el tiempo t = 5 s, que cumplirá la condición pedida. Llevando ese tiempo a las leyes (5) y (6) conseguiremos los valores instantáneos de velocidad y aceleración:

$$v(5) = -4\pi\,\text{sen}\frac{5\pi}{2} = \mathbf{-4\pi\ cm/s} \qquad a(5) = -2\pi^2\cos\frac{5\pi}{2} = \mathbf{0\ cm/s^2}$$

que se corresponden con valores máximos (aunque en sentido negativo) de la velocidad y nulo de la aceleración: eso quiere decir que el móvil está en ese momento pasando por el centro de la oscilación, en sentido negativo. Esto es la constatación de algo que hubiéramos podido saber considerando que el periodo es de 4 s, debido a lo cual un tiempo de 5 s después de estar en una posición máxima deja margen para una oscilación completa (4 s) y queda 1 s más, que significa un cuarto de oscilación más, es decir, tiempo para ir hasta el centro de la oscilación.

Ejercicio 3

Un oscilador armónico constituido por un muelle de masa despreciable, y una masa en el extremo de valor 40 g tiene un periodo de oscilación de 2s.

a) ¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?
b) Si la amplitud de las oscilaciones de ambos osciladores es de 10 cm ¿Cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del oscilador y la máxima velocidad alcanzada por su masa?

a) El periodo de un oscilador de masa m, en un sistema (podría ser un resorte, como es el caso) con constante de recuperación K, es una expresión familiar

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (1)$$

de manera que si la frecuencia, inversa del periodo, debe duplicarse, entonces el periodo **debe reducirse a la mitad**. El segundo oscilador, con una masa m' y la misma K, debe tener un periodo T' igual a la mitad de T:

$$T' = \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} \qquad (2)$$

de manera que podemos dividir miembro a miembro las igualdades (1) y (2) y obtener así la respuesta:

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\cancel{T}/2} = \sqrt{\frac{\frac{m}{K}}{\frac{m'}{K}}} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cancel{1}/2} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad \Rightarrow \quad m' = \frac{1}{4}m = \mathbf{10\ g}$$

b) La energía mecánica **total** de un oscilador es $E = \frac{1}{2}KA^2$ (3)

donde K es la constante de recuperación del oscilador y A la amplitud de las oscilaciones. Como se sabe, la energía total es la suma, en cada posición, de energía cinética de la masa oscilante y energía potencial del sistema, magnitudes que varían de una posición a otra. En los extremos de la oscilación, cuando la posición es $x_{máx} = \pm A$, toda la energía es potencial y la energía cinética es nula; por el contrario, cuando la masa oscilante pasa por el centro de las oscilaciones la velocidad toma su máximo valor, $v_{máx} = \pm A\omega$, y entonces toda la energía es cinética y la energía potencial es nula. Sabido todo esto, podemos responder fácilmente a las cuestiones que nos plantean:

Empezamos obteniendo K, que será necesaria para hacer las cuentas. Podemos hacerlo a partir de (1), con los datos que proporciona el enunciado sobre el primer oscilador:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4\pi^2 .\ 0,04}{4} = 0,39\ N/m$$

donde hemos tenido cuidado de escribir todas las unidades en SI, de modo que K se medirá igualmente en sistema; por tanto, en N/m. Debe notarse que este valor de K refleja el comportamiento del resorte, y es el mismo con los dos osciladores: lo que cambia de uno a otro es el valor de la masa suspendida. Ahora, sabido que la energía potencial máxima es la recogida en (3), debemos notar que depende **exclusivamente** de K y de A, de modo que, si A = 10 cm en ambos casos, se sigue que la energía potencial máxima es la misma para ambos:

Energía potencial máxima: $E_p^{máx} = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}0,39.0,1^2 = \mathbf{1,95.10^{-5}\ J}$

En cuanto a la velocidad máxima, podemos recurrir a la expresión ya citada $v_{máx} = \pm A\omega$, donde deberemos notar que A es común e igual a 10 cm en ambos osciladores, pero no así ω, que toma valores diferentes. Calcularemos ω en cada caso y después las velocidades máximas:

Primer oscilador $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s \quad \Rightarrow \quad v_{máx} = \pm A\omega = \pm\, \mathbf{0,1\pi\ m/s}$

Segundo oscilador $\quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad/s \quad \Rightarrow \quad v'_{máx} = \pm A\omega' = \pm\, 0,1.2\pi = \pm\, \mathbf{0,2\pi\ m/s}$

donde se ha usado que el periodo del segundo oscilador es la mitad del que tiene el primero; así, la conclusión es que la velocidad máxima del segundo oscilador resulta doble que la del primero. Podríamos haber llegado a esta conclusión de otro modo, discutiendo las energías cinéticas máximas, que deben ser la misma para ambos, y considerando que la masa de un oscilador es cuatro veces mayor que la del otro: es fácil seguir ese razonamiento hasta llegar a la misma conclusión que hemos obtenido nosotros.

Ejercicio 4

Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es 1s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es de 0.70 cm y su velocidad 4.39 cm/s, calcular:

a) la amplitud y la fase inicial.
b) La máxima aceleración de la partícula.

a) Conocer el periodo equivale, como sabemos, a conocer la frecuencia angular ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$$

Por otro lado, el enunciado señala que, al tiempo t = 0 s, conocemos la elongación inicial $x_0 = 0,70$ cm y la velocidad inicial $v_0 = 4,39$ cm/s. Recordando la relación entre elongación y velocidad

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

y utilizándola en la situación inicial que nos describen, tenemos

$$v_0 = \pm\omega\sqrt{A^2 - x_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad 4,39 = 2\pi\ \sqrt{A^2 - 0,70^2}$$

donde la elongación (y por tanto la amplitud A) se mide en cm; la velocidad en cm/s. Despejando, se obtiene

$$A = \sqrt{\frac{4,39^2}{4\pi^2} + 0,70^2} = \mathbf{0,99\ cm}$$

Y ahora podemos ir a por la fase inicial. La ley de elongaciones se podría escribir, de acuerdo a lo que sabemos, como

$$x(t) = 0,99 \text{ sen}(2\pi t + \varphi_0)$$

Aplicada al tiempo t = 0, con la elongación inicial $x_0 = 0,70$ cm conocida, nos quedará

$$x_0 = 0,70 = 0,99 \text{ sen } \varphi_0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 = \text{arc sen } \frac{0,70}{0,99} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \textbf{ rad}$$

un resultado que precisa alguna aclaración, seguramente necesaria en otros ejercicios semejantes. Hemos encontrado que sen $\varphi_0 = 0,707$, y de ahí hemos concluido nuestra solución, $\varphi_0 = \pi/4$ rad. En realidad, la igualdad sen $\varphi_0 = 0,707$ tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante (la que hemos cogido) y otra en el segundo cuadrante, que sería $\varphi_0 = 3\pi/4$ rad. Esto no es más que el hecho bien conocido de que el seno toma valores positivos en los dos primeros cuadrantes. ¿Cómo sabemos que hemos de tomar $\pi/4$ rad y no $3\pi/4$ rad como fase inicial?

La respuesta a eso es que la velocidad inicial v_0 es positiva, lo que quiere decir que el oscilador está inicialmente a la derecha del origen ($x_0 = 0,70$ cm) y moviéndose hacia la derecha ($v_0 = 4,39$ cm/s), de modo que **no ha llegado aún a la elongación máxima positiva, donde la fase valdrá π/2 rad**; por tanto, la fase inicial ha de ser un ángulo del primer cuadrante, menor que $\pi/2$. Si la velocidad inicial hubiese sido negativa, $v_0 = -4,39$ cm/s, entonces φ_0 hubiese sido $3\pi/4$ rad.

b) La máxima aceleración de la partícula es, como sabemos, $a_{max} = \pm A\omega^2$

de manera que sólo hemos de hacer las cuentas

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\, 0,99 \cdot 4\pi^2 = \mathbf{\pm\ 39,08\ cm/s^2}$$

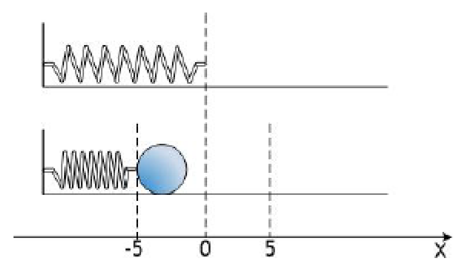
Ejercicio 5

Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora K = 10 n/M. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x = 0) y se deja en libertad. Determinar:

a) la expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t).
b) los módulos de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.
c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
d) La energía mecánica del sistema oscilante.

Se considera que los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio son cuando el muelle esta estirado.

a) La figura muestra arriba el resorte sin deformar, antes de sujetar la masa m en su extremo. Debajo aparece la situación correspondiente a t = 0 s, cuando el muelle se ha comprimido 5 cm y se va a soltar.



Parece obvio que la amplitud de las oscilaciones va a ser A = 5 cm. También conocemos directamente el valor de la fase inicial φ_0: considerando la situación inicial del oscilador en el extremo negativo −A de sus oscilaciones, podemos entender que comienza con **tres cuartos de oscilación de adelanto**, y así, $\varphi_0 = 3\pi/2$ rad, o bien que comienza con un **cuarto de oscilación de retraso**, y así $\varphi_0 = -\pi/2$ rad. Tomaremos esta última opción, ya que ambas son equivalentes.

Y queda sólo conocer la frecuencia angular ω para escribir la elongación como función del tiempo. Conociendo la constante K del resorte y la masa del cuerpo, es fácil

$$K = m\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}\ \text{rad/s}$$

así que nos quedará $\quad \mathbf{x(t) = 5\ sen(\sqrt{5}\,t - \frac{\pi}{2})} \qquad$ x <> cm; t <> s

b) Conocemos relaciones entre elongación y velocidad, así como entre elongación y aceleración. Se trata de las expresiones

$$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad ; \qquad a = -\omega^2 x$$

que resolverán inmediatamente este apartado. Hemos de prescindir de signos en los resultados, ya que se nos piden módulos (de hecho, en la posición x = 2 cm la velocidad puede ser tanto positiva como negativa; la aceleración **es** negativa). Los resultados son

$$v = \sqrt{5}\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{5.21} = \mathbf{10{,}25\ cm/s}$$

$$a = 5.2 = \mathbf{10\ cm/s^2}$$

c) La fuerza recuperadora es $\quad F = -Kx$

como función de la elongación instantánea del oscilador. Cuando se encuentra en los extremos ±A de su recorrido, la fuerza aplicada por el resorte sobre m será

$$F = \pm KA = \pm\ 10\ N/m\ .\ 0{,}05\ m = \mathbf{\pm 0{,}5\ N}$$

Nótese la necesaria precaución en las unidades de A: ya que K está en SI, debemos hacer lo mismo con A y escribirla en metros.

d) La energía mecánica del sistema oscilante es $\quad E = \frac{1}{2}KA^2$

y se trata, como sabemos, de un valor constante que recoge la suma de las energías cinética y potencial en cualquier posición. En el caso que nos ocupa, sería

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}10.0{,}05^2 = \mathbf{1{,}25.10^{-2}\ J}$$

Ejercicio 6

Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3m y cuya aceleración viene dada por la expresión a = -9 π^2 x en unidades SI**.**

Sabiendo que se ha contado el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determinar:

a) el periodo y la constante elástica.

b) la expresión matemática del desplazamiento x = x(t)-.

c) los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.

d) la energía cinética y potencial cuando en el punto donde tiene la velocidad máxima.

a) La expresión a = –kx permite reconocer de modo inmediato un M.A.S. en el eje X, con el centro de las oscilaciones en el origen, x = 0. La constante de proporcionalidad entre **aceleración a** y **elongación x** (posición), que aparece como k en esa expresión, se relaciona con la **pulsación ω**, según

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

de manera que una comparación con $a = -9\pi^2 x$ permite identificar de inmediato el valor de ω:

$$\omega^2 = 9\pi^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 3\pi \text{ rad/s}$$

y, por tanto, del periodo

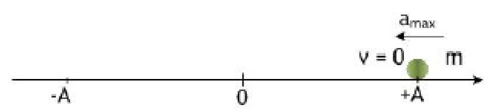
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}\text{ s}$$

La constante recuperadora del sistema se refiere, como sabemos, a la constante de proporcionalidad entre la **fuerza** F sobre la partícula y la **elongación** x (posición) de la misma, según la ecuación

$$F = ma \qquad \Rightarrow \qquad F = -m\omega^2 x = -Kx \qquad \Rightarrow \qquad K = m\omega^2$$

de manera que, considerando los valores de m y ω que conocemos, será

$$K = 0{,}1.(3\pi)^2 = \mathbf{0{,}9\pi^2}\text{ N/m}$$



En el instante inicial, la aceleración es máxima y negativa; la velocidad es cero

b) La expresión matemática del desplazamiento (es decir, de la elongación) en función del tiempo es la conocida

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

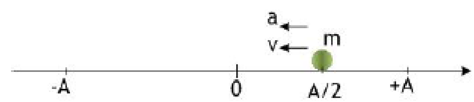
donde φ_0 es el valor de fase inicial del M.A.S., que debe determinarse conociendo la posición inicial del móvil. En nuestro caso, el enunciado señala que se empieza a contar el tiempo (t = 0 s) cuando la aceleración de la partícula es máxima dentro de los desplazamientos positivos, lo que no es sino una manera de decir que la aceleración tiene ahí el valor máximo y negativo, $a = -\omega^2 A$, y que la partícula se encuentra inicialmente en la posición $x = A$, correspondiente al extremo positivo de la oscilación. La fase inicial, por tanto, corresponde a un cuarto de oscilación, $\varphi_0 = \pi/2$ rad. Así, la expresión que nos piden, empleando A = 3 m y $\omega = 3\pi$ rad/s, junto con el valor de fase inicial que acabamos de discutir, queda como

$$x(t) = 3\,\text{sen}\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x <> m;\ t <> s \qquad (2)$$

c) Esta es una pregunta que debería responderse pensando en ecuaciones que relacionen directa y respectivamente la velocidad y la aceleración con la posición, sin intervención de la variable tiempo. Estas expresiones son bien conocidas: una de ellas es (1), que muestra la dependencia a–x, y la otra es

$$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (3)$$

que recoge la dependencia entre v y x. Usándolas para el valor de la elongación x correspondiente a la mitad del desplazamiento máximo, es decir, x = 1,5 m, se tiene



Cuando el móvil pasa por A/2, su aceleración es la mitad que en el extremo, y su velocidad ha aumentado mucho (más de la mitad de la máxima)

$$a = -(3\pi)^2 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}\pi^2 \ \text{m/s}^2 \qquad ; \qquad v = \pm 3\pi\sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \pm 3\pi\frac{3\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{9\pi\sqrt{3}}{2} \ \text{m/s}$$

que serían los valores en la mitad del desplazamiento máximo positivo. La velocidad ofrecería exactamente el mismo resultado en x = −1,5 m, la mitad del desplazamiento máximo negativo, y la aceleración sería la misma, pero con signo positivo. En todo caso, como se nos piden valores absolutos, la respuesta sería

$$a = \frac{27}{2}\pi^2 \ \text{m/s}^2 \quad ; \qquad v = \frac{9\pi\sqrt{3}}{2} \ \text{m/s}$$

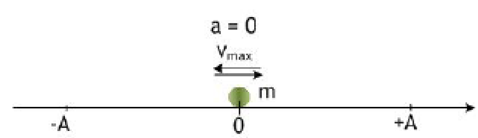
y conviene insistir en algún detalle de importancia: esa aceleración es exactamente la mitad de la que tenía el móvil en el extremo, ya que la aceleración es proporcional (aunque de signo contrario) a la elongación. En cambio, la velocidad no es la mitad de la velocidad máxima, que se alcanzará al llegar a O; cuando pasa por A/2, el móvil tiene ya el 86,6% de la velocidad máxima que alcanzará, y sólo ganará aún el 13,4%.

d) Por fin, las energías potencial y cinética en el punto donde se tiene velocidad máxima. Ese punto, como sabemos, corresponde al centro de las oscilaciones, x = 0 m, donde la aceleración de la partícula es también cero, $a = 0$ m/s^2, y la velocidad es la máxima, $v = \pm A\omega$ m/s, donde el doble signo ± toma en cuenta los dos sentidos en que la partícula puede pasar por ese lugar. El valor de esa velocidad máxima resulta ser

$$v_{máx} = \pm\, 3.3\pi = \pm\, 9\pi \ \text{m/s}$$

y las expresiones de las energías cinética y potencial

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ; \qquad E_p = \frac{1}{2}Kx^2$$



Cuando el móvil pasa por el centro de las oscilaciones, su velocidad es máxima y su aceleración nula.

en ese lugar, con los valores x = 0 m y de velocidad máxima que acabamos de escribir, resultan

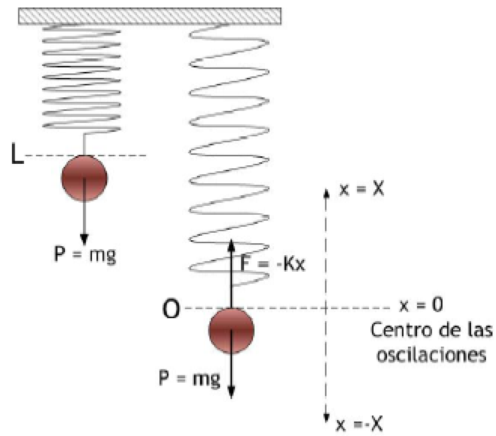
$$E_c = \frac{1}{2}0{,}1\,(9\pi)^2 = 4{,}05\,\pi^2 \ \text{J} \qquad ; \qquad E_p = 0 \ \text{J}$$

reflejando que la energía en el centro de las oscilaciones es estrictamente cinética, y que el valor $4{,}05\pi^2$ J representa también la energía mecánica constante (suma de E_c y E_p) en cualquier posición. Así, por ejemplo, en los extremos de la oscilación tendremos $E_c = 0$ J y $E_p = 4{,}05\pi^2$ J.

Ejercicio 7

Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo deslazando éste una distancia X respecto a la posición de equilibrio, y se deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior el desplazamiento hubiese sido 2X, deducir la relación que existe, en ambos casos, entre:

a) las velocidades máximas del cuerpo
b) las energías mecánicas del sistema oscilante.



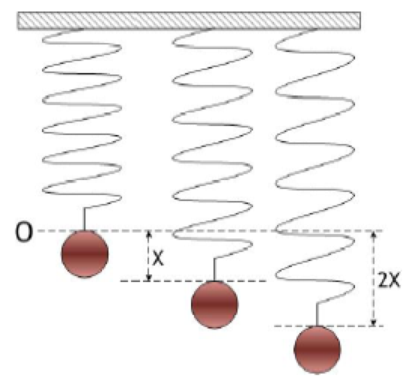
Debemos empezar recordando qué se entiende por posición de equilibrio cuando un cuerpo de masa m está suspendido del extremo de un resorte dispuesto verticalmente. En esa situación, el resorte tendrá un alargamiento tal que la fuerza de recuperación y el peso del cuerpo sean fuerzas iguales y de sentido contrario, que se anulan y justifican así la situación de equilibrio, tal como muestra la figura a la derecha. El centro de las oscilaciones de un resorte dispuesto verticalmente no está en L, que sería la longitud natural del resorte, sino en O, que es la longitud del resorte alargado por el peso de la masa m. Una discusión más detallada de esto puede encontrarse en SEPTIEMBRE 96 PROBLEMA B2, al comienzo de este archivo.

Así que, cuando nos dicen que se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, debemos entender que esto se hace a partir de O, y que X no sería otra cosa que la amplitud de las oscilaciones resultantes. Del mismo modo, cuando el desplazamiento desde la posición de equilibrio sea 2X, será también a partir de la posición O de equilibrio, y se tratará de la nueva amplitud de oscilación.

Por tanto, estamos hablando de oscilaciones de amplitudes X y 2X. Como sabemos, el periodo no es una función de la amplitud, ya que depende sólo de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

la masa m suspendida y de la constante de recuperación k del resorte.



a) La velocidad máxima de las oscilaciones se alcanza al pasar por el centro de las mismas, y su valor es $v_{max} = \pm A\omega$, donde A es la amplitud. De este modo, la velocidad máxima en cada caso será

$$v_{max} = \pm\,\omega X$$

$$v_{max} = \pm\,\omega\, 2X$$

y se alcanzarán ambas al pasar por O. La relación entre las velocidades máximas es obvia,

$$\frac{v_{max}}{v_{max}} = \frac{\pm\,\omega X}{\pm\,\omega\, 2X} = \frac{1}{2}$$

y resulta doble cuando la amplitud de oscilación es doble.

b) La energía mecánica de un oscilador es un invariante del movimiento, y su valor es

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

donde K es la constante de recuperación del sistema, y A la amplitud de las oscilaciones. En el caso que nos ocupa, las energías mecánicas quedarán

$$E = \frac{1}{2}kX^2 \qquad ; \qquad E' = \frac{1}{2}k(2X)^2$$

de manera que la relación entre las energías mecánicas es

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}kX^2}{\frac{1}{2}k(2X)^2} = \frac{X^2}{4X^2} = \frac{1}{4}$$

así que la oscilación tiene cuatro veces más energía cuando su amplitud de oscilación

Ejercicio 8

En la figura se muestra la representación gráfica de la energía potencial (EP) de un oscilador armónico simple constituido por una masa puntual de valor 200 g unida a un muelle horizontal, en función de su elongación (x).

a) hallar la constante elástica del muelle.

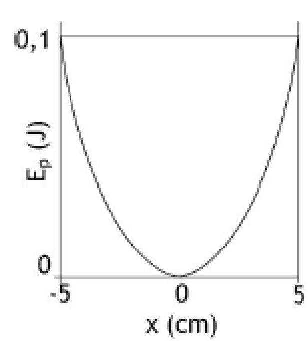


Fig . Problema 8.

b) Calcular la constante elástica del oscilador.
c) Determinar numéricamente la energia cinetica cuando la masa está en la posición x = +2.3 cm-
d) ¿Dónde se encuentra la masa puntual cuando el módulo de su velocidad es igual a la cuarte parte de su velocidad máxima?

parte de su velocidad máxima. x (cm)

Hay que mirar la figura con atención: muestra la gráfica de la energía potencial $E_p = ½Kx^2$ de un oscilador armónico. También recoge la amplitud de las oscilaciones, que sería A = 5 cm, así como la energía mecánica total, que es la energía potencial en los extremos de la oscilación y vale, como puede leerse, E = 0,1 J.

a) Sabemos que la energía mecánica total de un oscilador es $E = \frac{1}{2}KA^2$

y, si A = 5 cm y E = 0,1 J, se sigue que $E = 0{,}1\ J = \frac{1}{2}K(5.10^{-2})^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2.0{,}1}{25.10^{-4}} = \mathbf{80}\ N/m$

b) La aceleración máxima de un oscilador es $a_{max} = \pm\omega^2 A$

y se alcanza, como sabemos, en los extremos de la oscilación. Ya que conocemos A = 5 cm, necesitamos hallar ω: podemos obtenerla a partir de

$$K = m\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{80\ N/m}{0{,}2\ kg}} = 20\ rad/s$$

de modo que ya es inmediato $a_{max} = \pm\ 0{,}05.20^2 = \pm\mathbf{20\ m/s^2}$

c) La suma de las energías cinética y potencial es la energía mecánica total, un invariante del oscilador:

$$E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 = 0{,}1\ J$$

que vale 0,1 J en el caso que nos ocupa. Sabiendo que el móvil está en la posición x = +2,3 cm es muy sencillo hallar la energía potencial en esa posición

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}80\ (2{,}3.10^{-2})^2 = 0{,}02\ J$$

y despejar entonces la energía cinética en la posición x = +2,3 cm:

$$E_c = E - E_p = 0{,}1 - 0{,}02 = \mathbf{0{,}08\ J}$$

Nótese que, aunque el oscilador está prácticamente a mitad de camino entre el centro de las oscilaciones (x = 0) y la máxima elongación (x = 5 cm), la energía cinética es aún muy grande, un 80% de la energía total. Esto debe ilustrar cómo la pérdida de velocidad al alejarse del centro de las oscilaciones es pequeña al principio, y bastante brusca al acercarse al extremo de la oscilación.

d) Seguimos trabajando con la conservación de energía mecánica. Si sabemos que la velocidad es la cuarta parte de la velocidad máxima, entonces debe valer

$$v = \frac{1}{4}v_{max} = \pm\frac{1}{4}A\omega$$

ya que, como sabemos, la velocidad máxima es $v_{max} = \pm\ A\omega$. Ahora podemos hallar la energía cinética en ese lugar, que será

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}A\omega\right)^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{16}E$$

la energía total partido por 16. La conservación de energía requiere que la suma de energías cinética y potencial en ese lugar sea E = 0,1 J, así que

$$\frac{1}{16}E + E_p = E \qquad \Rightarrow \qquad E_p = E - \frac{1}{16}E = \frac{15}{16}E$$

de modo que podemos despejar la elongación, x:

$$E_p = \frac{15}{16}E = \frac{15}{16}0{,}1 = \frac{1}{2}K\,x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2.15.0{,}1}{16.80}} = 0{,}0484\ m = \mathbf{4{,}84\ cm}$$

casi en el límite máximo de la oscilación: tan cerca de él, todavía queda la cuarta parte de la velocidad (y la dieciseisava parte de la energía total). De nuevo, hay que percibir de qué modo la velocidad cae abruptamente al acercarse al extremo de las oscilaciones: en los últimos 16 mm de nuestro ejemplo se pierde la cuarta parte de la velocidad.

Un comentario: los apartados c) y d) se han discutido como aplicaciones de la conservación de energía mecánica. Se ha hecho así para respetar lo que parecería el deseo del redactor del enunciado, que nos proporciona una gráfica de energías potenciales y parece así inducirnos a ello. Pero pueden resolverse también, probablemente más rápido, recordando

$$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

que relaciona velocidad del móvil con su elongación. Queda para el alumno esa repetición.

Ejercicio 9

Una partícula realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud y tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad es nula y la elongación positiva, determinar:

a) la expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.
b) La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0.25 s.

Podemos empezar por la situación inicial: el móvil está en un extremo de la trayectoria, ya que su velocidad inicial es nula, y además la elongación es positiva, así que está en $x_0 = A$. Naturalmente, eso significa que la fase inicial es $\varphi_0 = \pi/2$ rad.

Además, sabemos que A = 10 cm, y que el periodo es T = 2 s. Eso implica $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \text{rad/s}$

a) así que la ecuación de elongaciones en el tiempo queda

$$x(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi_0) = \mathbf{10\ sen(\pi t + \frac{\pi}{2})} \qquad x <> \text{cm};\ t <> \text{s}$$

b) Ahora basta derivar para tener las ecuaciones de velocidad y aceleración:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 10\pi\ \cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad v <> \text{cm s}^{-1};\ t <> \text{s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -10\pi^2\ \text{sen}(\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad a <> \text{cm s}^{-2};\ t <> \text{s}$$

y entrar con el tiempo t = 0,25 s. Queda

$$v(0,25) = 10\pi\ \cos(\pi . 0,25 + \frac{\pi}{2}) = 10\pi\ \cos\frac{3\pi}{4} = \mathbf{-22,21\ cm/s}$$

$$a(0,25) = -10\pi^2\ \text{sen}(\pi . 0,25 + \frac{\pi}{2}) = -10\pi^2\ \text{sen}\frac{3\pi}{4} = \mathbf{69,79\ cm/s^2}$$