UNIDAD 6: Trigonometría

Introducción

La Trigonometría se define como la rama de la matemática que se encarga del estudio de las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo (polígono de tres lados) Su nombre fue publicado por primera vez en 1595 por B. Pitiscus, y significa “el estudio de los triángulos” en Latín.

La trigonometría comenzó como una matemática eminentemente práctica para determinar distancias que no podían ser medidas directamente. Servía en la navegación, en la agricultura y astronomía. Para resolver problemas con la determinación de puntos y distancias en tres dimensiones, la trigonometría esférica amplio sus aplicaciones en Física, en Química y en casi todos las ramas de la ingeniería, en especial en el estudio de fenómenos periódicos como la vibración del sonido y el flujo de corriente alterna.

Posee muchas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en geografía para medir distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.
Tolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el Almagesto, bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de otros conocidos. Durante muchos siglos su trigonometría fue la introducción básica para los astrónomos.

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos; además, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

Tema 1: Nociones básicas

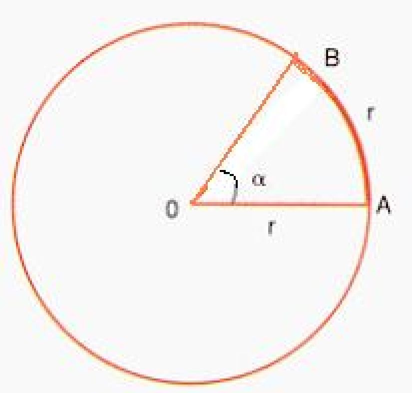
Para medir ángulos se pueden usar distintos sistemas de medición. Los que se utilizan con más frecuencia son:

Sistema sexagesimal: La unidad de medida en este sistema es el grado sexagesimal (1°), que se obtiene de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Los submúltiplos del grado sexagesimal son el minuto sexagesimal (1´) y el segundo sexagesimal (1´´).

$$1° = \frac{1R}{90} \quad \Rightarrow \quad 1R = 90°$$

$$1° = 60´ \quad 1´ = 60´´ \quad 1° = 3.600´´$$

Sistema circular: La unidad de medida en este sistema es el ***radián***. Se llama ***radián*** al ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma. El valor de un ángulo de un giro completo es de 2 π radianes.



Ángulo de **1 radián.**

$$r = \overline{OA} \quad \Rightarrow \quad arco \;\; AB = \overline{OA}$$

$$\alpha = 1 \quad radián$$

$$\alpha = \frac{arco \;\; AB}{\overline{OA}}$$

Equivalencias entre ambos sistemas:

Sistema sexagesimal	Sistema circular
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

Para trabajar con calculadora científica en cada uno de estos sistemas prestar atención al modo en que ésta se encuentra:

- Modo RAD: corresponde al sistema circular
- Modo DEG: corresponde al sistema sexagesimal

Ejemplo 1:

Calcular en sistema sexagesimal, el valor aproximado de cada uno de los siguientes ángulos:

$$a)\ \alpha = 1 \quad radián$$

$$b)\ \beta = 8\pi$$

$$c)\ \delta = \frac{\pi}{3}$$

Solución:

$$a)\ \alpha = 1 \quad radián$$

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\alpha \cong 57°\,17'\,45''$$

$$b)\ \beta = 8\pi$$

$$\frac{\beta}{360°} = \frac{8\pi}{2\pi}$$

$$\beta = 1440°$$

$$c)\ \delta = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\delta}{360°} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\,\pi}$$

$$\delta = 60°$$

Ejemplo 2:

Expresar los siguientes ángulos en radianes, dando las respuestas en función de π.

$$a)\ \alpha = 150°$$

$$b)\ \beta = 210°$$

$$c)\ \delta = 60°$$

Solución:

$$a)\ \alpha = 150°$$

$$\frac{\alpha}{150°} = \frac{2\pi}{360°}$$

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi$$

$$b)\ \beta = 210°$$

$$\frac{\beta}{210°} = \frac{2\pi}{360°}$$

$$\beta = \frac{7}{6}\pi$$

$$c)\ \delta = 60°$$

$$\frac{\delta}{60°} = \frac{2\pi}{360°}$$

$$\delta = \frac{\pi}{3}$$

Ejercicio 1: Expresar los siguientes ángulos en radianes, dando las respuestas en función de π.

$a)\ \alpha = 45º$

$b)\ \beta = 270º$

$c)\ \delta = 315º$

$d)\ \varepsilon = 65º$

$e)\ \varphi = 35º\ 18´\ 45´´$

$f)\ \lambda = 168º\ 35´\ 14´´$

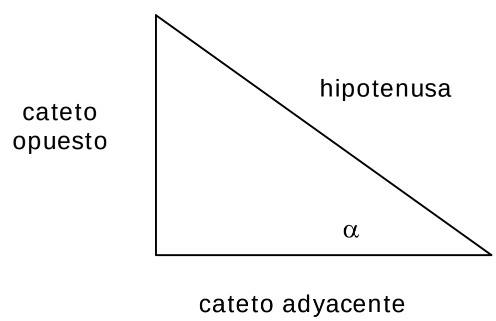
Respuestas:

$\alpha = \frac{1}{4}\pi\ rad$ $\beta = \frac{3}{2}\pi\ rad$ $\delta = \frac{7}{4}\pi \mathrm{rad}$ $\varepsilon = \frac{13}{36}\pi \mathrm{rad}$

$\varphi \cong 0{,}196\,\pi \mathrm{rad}$ $\lambda \cong 0{,}936\pi \mathrm{rad}$

Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:

Considerando un triángulo rectángulo que tiene α como uno de sus ángulos agudos, las razones trigonométricas se definen como sigue (ver la figura):



$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos \alpha = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\tan \alpha = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}}$$
$$\mathrm{cosec}\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}}$$
$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}}$$
$$\cot \alpha = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}}$$

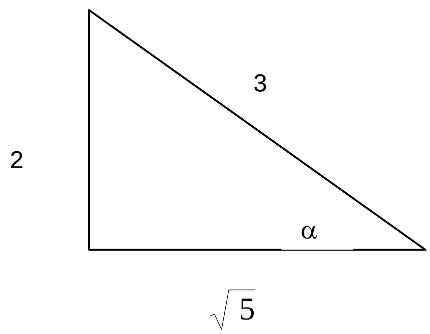
Los símbolos utilizados para estas razones son abreviaturas de sus nombres: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente (según orden de la lista anterior).

En todo triángulo rectángulo se cumple:

- que los ángulos agudos son complementarios: $\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}$
- el teorema de Pitágoras: (hip.) ^{2} = (cat. opuesto) ^{2} + (cat. adyacente) ^{2}

Ejemplo:

Determinar las seis razones trigonométricas del ángulo α de la figura.



Solución:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

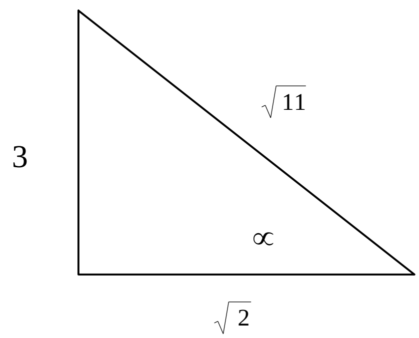
$$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2.\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3.\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ejercicio 2: Determinar las seis razones trigonométricas del ángulo $\propto$ del triángulo rectángulo que se muestra a continuación.



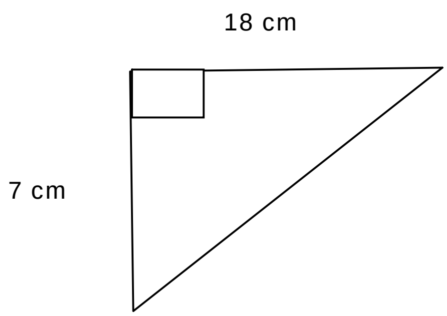
$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \qquad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11} \qquad \tan \alpha \ \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\sqrt{11}}{3} \qquad \sec \alpha = \frac{\sqrt{22}}{2} \qquad \cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Tema 2: Resolución de triángulos rectángulos. Aplicaciones.

Ejemplo 1:

Calcular el perímetro de la figura.



Solución:

$$(7\ cm)^2 + (18\ cm)^2 = x^2$$

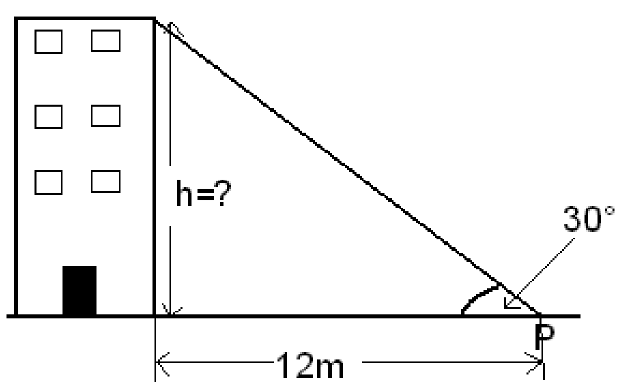
$$x = \sqrt{373\ cm^2} \qquad (x > 0)$$

$$x \cong 19{,}31\ cm$$

Perímetro $\cong 44{,}31\ cm$

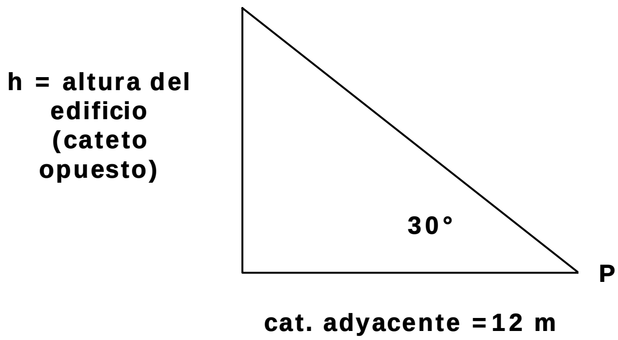
Ejemplo 2:

Desde un punto P situado a nivel del suelo hasta el pie de un edificio hay 12 metros de distancia. Se sabe que el ángulo de elevación que se forma con la horizontal hasta lo alto del edificio es de 30°. Determinar la altura del edificio. (Ver figura).



Solución:

A partir de la representación anterior se puede construir la siguiente figura de análisis:



La incógnita es **h** (altura del edificio). La relación que se puede establecer entre los datos y la incógnita es la tangente trigonométrica del ángulo de elevación 30°.
El planteo de la solución, en símbolos, es:

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{cat.opuesto}}{\text{cat.adyacente}}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{12 \text{ m}}$$

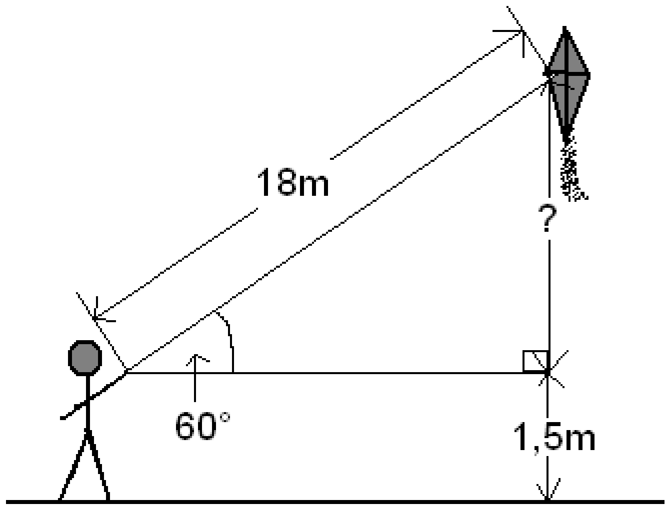
$$\text{tg } 30° . 12 \text{ m} = h$$

$$h \cong 6,93 \text{ metros}$$

Respuesta: La altura del edificio es de aproximadamente 6,93 metros.

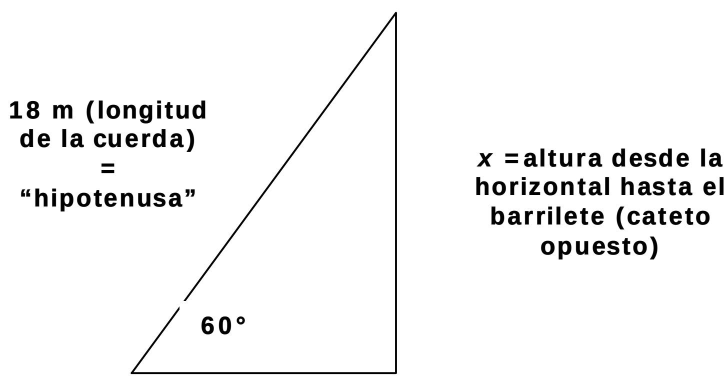
Ejemplo 3:

Una persona eleva un barrilete con una cuerda tensa que forma un ángulo de elevación de 60°. ¿A qué altura se encuentra el barrilete del suelo si la longitud de la cuerda es de 18 m y el carretel de hilo está a 1,5 . de altura sobre el suelo? (Ver figura).



Solución:

Considerando la figura de análisis que se extrae de la figura planteada, se observa:



La incógnita en este caso es x (altura desde la horizontal hasta el barrilete). La relación que se puede establecer entre los datos y la incógnita es el seno trigonométrico del ángulo 60°.

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{cat.opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{x}{18\text{ m}}$$

$$\text{sen } 60° . 18\text{ m} = x$$

$$x \cong 15{,}6 \text{ metros}$$

La altura del barrilete desde el piso, es la que resulta de sumar el valor encontrado (x) con la altura desde la horizontal al piso (1,5 metros).

Respuesta: La altura del barrilete hasta el piso es de aproximadamente 17,1 metros.

1) Un pino gigante proyecta una sombra de 135 metros de largo. Determinar la altura del árbol si el ángulo de elevación del sol es de 25,7º.

2) Un pintor tiene que apoyar una escalera en una pared para acceder a la parte más alta. Sabe que, para que no se resbale, el pie de la escalera debe estar a 1,20 m de la pared y que ésta debe formar un ángulo de 70º con el piso. Determinar el largo de la escalera, a qué altura llega y qué ángulo forma con la pared.

3) En determinado momento, una varilla de 85 cm de alto, clavada verticalmente en un jardín, produce una sombra de 45 cm de largo. A 2 cm de la parte superior se ató un alambre tirante que se clavó en el pasto, justo en el extremo de la sombra. Determinar qué ángulo forman los rayos del sol con el piso en ese momento, cuál es la longitud del alambre y qué ángulo forma este con la varilla.

4) Desde un helicóptero que vuela sobre el mar a 5000 metros de altura se divisa una boya. La amplitud del ángulo que forman la visual y la vertical es 47º. Calcular a qué distancia de la boya se encuentra el helicóptero.

5) Para sostener un poste de 22 m de altura se utiliza un cable de acero fijado desde el extremo superior del poste al piso. Calcular la longitud del cable si forma con el piso un ángulo cuya amplitud es 69º.

6) Calcular la amplitud del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles sabiendo que la longitud de cada lado congruente es 39 cm y la longitud de la base es 18 cm.

Respuestas:

1) La altura del árbol es aproximadamente de 65 m.

2) Largo de la escalera: 3,5m aprox , altura de la pared: 3,3 m, ángulo que forma con la pared 20°

3) Ángulo que forman los rayos del sol: aprox $61^\circ 32' 5''$, longitud del alambre: aprox 94 cm.
Ángulo que forma con la varilla aprox: $28^\circ\ 27'\ 55''$

4) La distancia que hay de la boya al helicóptero es de 7331,4 m aproximadamente.

5) Longitud del cable aprox 23,5 m.

6) Ángulo aprox $26^\circ 41' 5''$.