1. ¿Cuántas palabras de seis letras pueden formarse con las letras de CHOCOLATE con la condición de que:

i- tengan exactamente una letra repetida?
ii- tengan al menos una letra repetida?

2. Sean A, B, C conjuntos incluidos en un universal U. Demuestre, justificando cada paso, la siguiente proposición:

$$A \subseteq B \rightarrow A \,\Delta B = A' \cap B$$

3. Compruebe, utilizando las leyes lógicas, que las dos proposiciones siguientes son lógicamente equivalentes. Indique en cada paso de la comprobación la ley lógica utilizada.

Proposición 1: $[(p \rightarrow \neg q) \wedge p] \vee r$ Proposición 2: $(p \vee r) \wedge (q \rightarrow r)$

4. Demuestre que en un álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , 0, 1) se verifica la siguiente propiedad:

$$\forall\, a, b, c \in B : \left[\ (b.c=b \ \wedge\ a.b=a) \Rightarrow a.c=a\ \right]$$

5. Sea V el conjunto de vértices de un grafo finito. En V se define la relación R de la siguiente manera: $\forall$ v, w$\in$V: vRw $\Leftrightarrow$ gr(v)=gr(w) .

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en V.
b) Presente un ejemplo de un grafo finito en el cual esta relación induzca sobre V una partición que conste exactamente de dos clases de equivalencia, y que además sea un grafo conexo.

6. Se define f: (Z, +) → (Z, .), f(z) = 3^z . Demuestre que f es un morfismo de grupos.

7. Demuestre que $\forall$ n$\in$**N**: $6^n - 1$ es divisible por 5.

8. 20 amigos quieren jugar al fútbol, para lo cual deben formar equipos de cinco integrantes cada uno. Entre los amigos cinco son arqueros, siete mediocampistas y el resto juegan de delanteros. ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse con la condición de que haya exactamente un arquero y al menos un delantero y al menos un mediocampista en cada equipo?

9. Sea (B, + , . , ‘ , 0,1) un álgebra de Boole. Si *x, y, z* $\in$ B, simplifique la siguiente expresión, indicando las leyes del álgebra de Boole utilizadas en cada paso:

$$[(x+y)'.(x+y')].\{[y'.(z+z')]'+y'\}$$

10. Sean p, q y r los siguientes predicados:

- p(x) : |x| > 2
- q(x) : x > 2
- r(x) : x < -2

Considerando como universo al conjunto de números reales, decida el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $\forall x\,[\,p(x) \rightarrow (r(x) \vee q(x))\,]$
b) $\exists x\,[\,\neg(r(x) \vee q(x)) \wedge p(x)\,]$

c) $\forall x\,[\,q(x) \rightarrow p(x)\,]$

11. La matriz M que se indica a continuación es la matriz de adyacencia de un grafo.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para este grafo, analice si tiene o no aristas paralelas y/o lazos; indicar si se trata de un grafo simple o no simple.

12. Dado el conjunto $H=\{(x;\,y\,) \in R^2\ /\ x = 3y\ \}$, determine si (H,+) es un subgrupo de (R^2, +)

13. a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = n^2 + 2n$

b) Dada la relación de recurrencia $a_{n+2} = 12a_{n+1} - 36a_n$ con $a_1 = 0$ y $a_2 = 6$, halle su solución general. ¿Cuánto vale a_{15} ?

14. En el conjunto $B = \{x \in N\ /\ 0 < x \leq 4\}$ se define la relación S / $xSy \Leftrightarrow x \leq y$

a) Defina la relación por extensión
b) Pruebe que S es relación de orden
c) Indique si el orden es total o parcial
d) Halle elementos minimales y maximales

15. Demuestre la validez del siguiente razonamiento utilizando reglas de inferencia o leyes lógicas. Indique, en cada paso, la regla o ley utilizada.

$$\begin{array}{l} (p \vee r) \wedge q \\ r \rightarrow \neg q \\ p \rightarrow s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

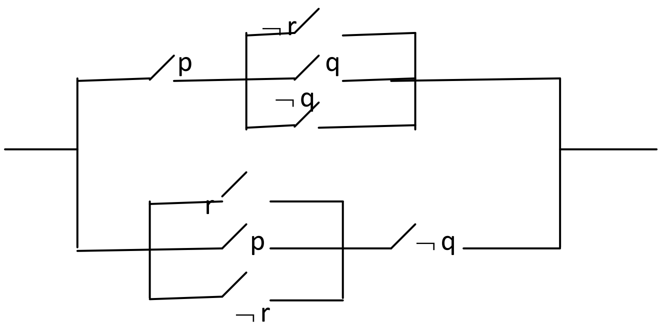
16. Sea U = {x $\in \mathbb{Z}$ / 0 < x < 30}. Se definen los siguientes conjuntos contenidos en U:

A = {x $\in$ U / x es par y x < 10}
B = {x $\in$ U / x es divisible por 3, x < 21}

Halle: i- (A $\cap$ B)'
ii- A Δ B

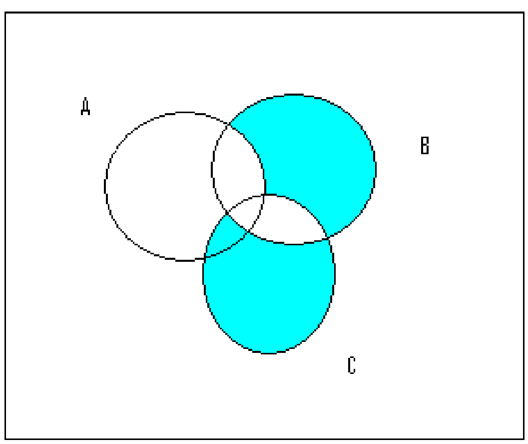
17. ¿Cuántas palabras, aún sin sentido, pueden formarse utilizando todas las letras de la palabra MANZANA? ¿En cuántas de ellas aparecen las consonantes juntas?

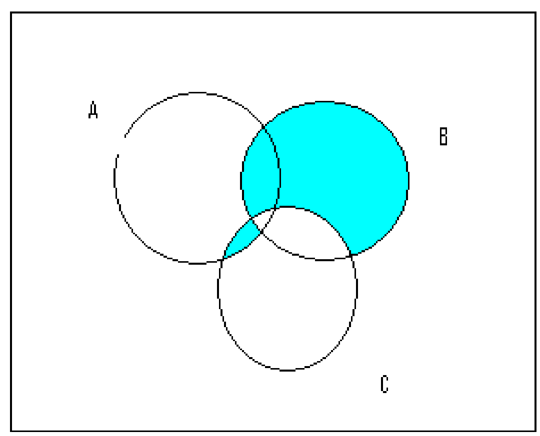
18. Simplifique el siguiente circuito lógico a través de la simplificación de la proposición asociada:



19. Sean A, B, C $\subseteq U$ conjuntos. Demuestre que se verifica la siguiente igualdad: $(A \cap C)' - B = (A' - B) \cup (C' - B)$

20. En cada uno de los siguientes casos, indique las operaciones realizadas entre los conjuntos de modo tal que el resultado final sea la zona sombreada:





21. Sea A el conjunto formado por los divisores positivos de seis y sea $(A, +, ., ', 1, 6)$ un álgebra de Boole, siendo $x + y = mcm(x,y)$, $x.y = mcd(x,y)$, $x' = \frac{6}{x}$ para $x, y \in A$. Defina en A una relación de orden R, realice el diagrama de Hasse correspondiente e identifique elementos maximales y minimales.

22. Se define en el conjunto A = {1, 2, 3, 4} la siguiente relación R:

x R y si y sólo $x^2 + y^2$ es múltiplo de dos

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
b) Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

1- 3 pertenece a cl[2] (la clase del dos)

2- La clase del uno es vacía.

23. Demuestre que $\forall n \in \mathrm{N}$ se verifica que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i.2^{i}}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$.

24. a) ¿Es cierto que una manera equivalente de expresar la recíproca de “p es suficiente para q” es “$\neg$ q es necesaria para $\neg$ p”?.

b) ¿Es posible que un razonamiento no válido tenga una proposición de la forma $p \wedge \neg p$ como premisa? Justifique

25. Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$. Halle a_{78}. Justifique.

26. a) Sea $(\{a, b, c, d\}, *)$ un grupo. Complete la tabla justificando el procedimiento seguido:

$*$	a	b	c	d
a	a	b		
b	b			c
c			a	b
d		c	b	

¿Es abeliano el grupo obtenido?. Justifique.

b) Proponga un ejemplo de grupo formado por tres elementos.

27. a) ¿Es posible que exista un grafo con 5 vértices, tres de ellos de grado dos, uno aislado y el restante, de grado 1?

b) ¿Cuántas aristas tiene un grafo simple si sus cinco vértices tienen grado 4, 3, 3, 2, 2 respectivamente? Dibuje el grafo y halle su matriz de incidencia.