1. Indique (justificando) cuáles de los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo, semigrupo o monoide, con la operación indicada. Analice la conmutatividad en todos los casos.

a) $(N, +)$ b) $(Z, .)$

c) $(R - \{0\}, .)$ d) $(R, *)$, $a * b = \dfrac{5 - ab}{2}$

e) $(P(A), \Delta)$, con $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ y siendo P(A) el conjunto de partes del conjunto $A = \{1,2\}$

2. Dado $(A, +, ., ', 0, 1)$ un Algebra de Boole, se define en A: $x * y = y + x$. Estudie la estructura de $(A, *)$.

3. Sea $(\{a, b, c, d\}, *)$ un grupo. Completar la tabla justificando el procedimiento seguido:

$*$	a	b	c	d
a	d	a		
b	a			d
c			d	a
d		d	a	

¿El grupo obtenido es abeliano? Justifique.

4. Demuestre que en un grupo $(G, \circ)$ se verifica: $\forall x : \forall y : x, y \in G : (x \circ y)' = y' \circ x'$

5. Sabiendo que en un grupo $(G, *)$ todo elemento es igual a su inverso, demuestre que el grupo es conmutativo (sugerencia: utilizar la propiedad del ejercicio anterior).

6. Determine si los siguientes son subgrupos de los grupos dados:

a) $S = \left\{ \dfrac{x}{2} \,/\, x \in Z - \{0\} \right\}$ de $(Q - \{0\}, .)$

b) $S = \{ x \in Z \,/\, x = 10k \text{ con } k \in Z \}$ de $(Z, +)$

c) $S = \{ x \in Z \,/\, x = 10k \text{ con } k \in Z \}$ de $(Z - \{0\}, .)$

d) $S = \{ (x,y) \in R^2 \,/\, 3x - 2y = 0 \}$ de $(R^2, +)$

e) $S = \{ (x,y) \in R^2 \,/\, 3x - 2y = 1 \}$ de $(R^2, +)$

f) $S = \{ (x,y) \in R^2 \,/\, x = y \}$ de $(R^2, +)$

g) $S = \{ x \in Z \,/\, x = 5.z \text{ con } z \in Z \}$, de $(Z, +)$

7. Analice si los siguientes son morfismos de grupos.

a) $f : (R, +) \to (R_{>0}, .) \,/\, f(x) = 5^{-x}$

b) $f:(R,+)\rightarrow(R,+)\ /\ f(x)=3x^2$

c) $f:(R\text{-}\{0\},.)\rightarrow(R\text{-}\{0\},.)\ /\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

d) $f:(R,+)\rightarrow(R,+)\ /\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) ($\mathbb{R}$, .) (siendo "." el producto de números reales) es un grupo abeliano.
b) El conjunto de los números enteros es un subgrupo de $(\mathbb{R}-\{0\};\ \bullet)$
c) La aplicación $f:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{R},+)\ /\ f(x)=\dfrac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 4. Demuestre que en un grupo $(G,\circ)$ se verifica: $\forall x:\forall y: x,y\in G:(x\circ y)'=y'\circ x'$

En este ejercicio, tenemos que demostrar que el inverso de x $\circ$ y es y' $\circ$ x'. Por definición, si (G, $\circ$) es un grupo y w es un elemento de G, el inverso de w (w') es el único elemento de G que verifica que w $\circ$ w' = w' $\circ$ w = e, siendo e el elemento neutro del grupo.

En consecuencia, para probar que en elemento es inverso de otro tenemos que ver que cuando los operamos obtenemos como resultado el elemento neutro.

$$\begin{aligned}
(x\circ y)\circ(y'\circ x') &= x\circ(y\circ y')\circ x' && \text{por propiedad asociativa}\\
&= x\circ(e)\circ x' && \text{dado que } y\circ y'=e\\
&=(x\circ e)\circ x' && \text{por propiedad asociativa}\\
&= x\circ x' && \text{por definición de elemento neutro}\\
&= e && \text{dado que } x\circ x'=e
\end{aligned}$$

Luego, acabamos de demostrar que (x $\circ$ y) ' = y' $\circ$ x', que es lo que queríamos ver.

Ejercicio 6, Determine si los siguientes son subgrupos de los grupos dados:
ítem b) $S=\{x\in Z\ /\ x=10k \text{ con } k\in Z\}$ de (Z , +)

Una forma de ver si S es un subgrupo de (Z, +) es usando la siguiente propiedad:

Si S es un subconjunto no vacío de un grupo (G, $\circ$). Entonces S es un subgrupo de G si y sólo si:

- $\forall a,b\in S:\ a\circ b\in S$
- $\forall a\in S:\ a'\in S$

En este caso, tenemos un conjunto S no vacío (x = 10 pertenece a S). Veamos que S es un subgrupo de (Z , +):

- Sean x, y $\in$ S. Queremos ver que x + y $\in$ S.

Como S es el conjunto formado por los múltiplos de 10 y $x \in S$, sabemos que existe $k_1 \in Z$ tal que $x = 10k_1$. Análogamente, como $y \in S$, tenemos que $y = 10k_2$, con $k_2 \in Z$.

Luego, $x + y = 10k_1 + 10k_2 = 10.(k_1 + k_2) = 10k$. con $k = k_1 + k_2 \in Z$. Luego, $x + y \in S$ (al sumar dos múltiplos de 10, el resultado de la suma también es múltiplo de 10).

- Sea $x \in S$. El inverso de x respecto de la suma es $x' = -x$ (dado que $x + x' = x + (-x) = 0$). Como $x \in S$, $x = 10k$ con $k \in Z$. En consecuencia, $-x = -10k = 10.(-k)$, con $-k \in Z$. Es decir, si $x \in S$, $-x \in S$

Al cumplirse las dos condiciones, concluimos que S es un subgrupo de (Z, +)

<u>Ítem d)</u> $S = \{(x,y) \in R^2 \ / \ 3x - 2y = 0\}$ de $(R^2, +)$

En R^2 se define la suma de la siguiente manera: $(x_1 ; y_1) + (x_2 ; y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$

- Sean $(x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2) \in S$. Entonces se verifica que: $3x_1 - 2y_1 = 0$ y que $3x_2 - 2y_2 = 0$. Queremos ver que $(x_1 ; y_1) + (x_2 ; y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2) \in S$. Reemplazamos este último par ordenado en la ecuación que define a S, tomando como $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$:

  $3.(x_1 + x_2) - 2.(y_1 + y_2) = (3x_1 + 3x_2) - 2y_1 - 2y_2 = (3x_1 - 2y_1) + (3x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$

  Distribuimos

  Asociamos convenientemente

  $3x_1 - 2y_1 = 0$ pues $(x_1, y_1) \in S$
  $3x_2 - 2y_2 = 0$ pues $(x_2, y_2) \in S$

Luego, $(x_1 ; y_1) + (x_2 ; y_2) = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2) \in S$.

- Dado $(x, y) \in S$, su inverso respecto de la suma es $(-x , -y)$. Vemos que si $(x, y) \in S$ entonces $(-x, -y)$ también pertenece a S. Reemplazamos en la ecuación que define a S:

  $3.(-x) - 2.(-y) = -3x + 2y = -1.(3x - 2y) = 0$

  $3x - 2y = 0$ dado que $(x, y) \in S$

Luego, probamos que $S = \{(x,y) \in R^2 \ / \ 3x - 2y = 0\}$ es un subgrupo de $(R^2, +)$.

<u>Ejercicio 8</u> Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

Ítem c) La aplicación $f:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{R},+)\ /\ f(x)=\frac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.

Dados dos grupos (G, $\circ$), (H, *) una aplicación f: (G, $\circ$) $\rightarrow$ (H, *) es un morfismo de grupos si

$$\forall\ x,\ y \in G:\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

En este caso, tenemos que:

$$f(x+y)=\frac{3}{5}(x+y)=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y=f(x)+f(y)$$

Luego, la aplicación $f:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{R},+)\ /\ f(x)=\frac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.