1. *Nociones básicas.* El *pvi autónomo* dado por $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$, siendo f de clase $C^1(\mathbb{R})$ tiene, para cada x_0, una única solución $x(t) = \varphi(t, x_0)$ definida en el intervalo abierto maximal (posiblemente infinito) $I_{x_0} = (a_{x_0}, b_{x_o})$. Si el extremo a_{x_0} es finito se cumple $\lim\limits_{t \to a_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$, si el extremo b_{x_0} es finito se cumple $\lim\limits_{t \to b_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$. *Una solución* $\varphi(t, x_0)$ *es estable* si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda otra solución $\psi(t, y_0)$ que verifique $d(y_0, x_0) < \delta$ se cumple que $d(\varphi(t, x_0), \psi(t, y_0)) < \epsilon, \forall t \geq 0$.

   Un punto $x^\star \in \mathbb{R}$ es un *punto de equilibrio* del sistema sii $f(x^\star) = 0$ (observar que entonces $\varphi(t, x^\star) = x^\star$). En particular, *un punto de equilibrio* $x^\star$ *es estable* si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x_0 que verifique $d(x_0, x^\star) < \delta$ se cumple que $d(\varphi(t, x_0), x^\star) < \epsilon, \forall t \geq 0$, es *atractor* si es estable y además, para tales x_0 se cumple $\lim\limits_{t \to +\infty} d(\varphi(t, x_0), x^\star) = 0$, y el intervalo maximal que contiene a tales x_0 se llama *intervalo de atracción* de $x^\star$ y se designa con $I_{x^\star}$; el punto $x^\star$ se llama *inestable* si no es estable. Un punto de equilibrio $x^\star$ se llama *hiperbólico* [*no hiperbólico*] si $f'(x^\star) \neq 0$ [$f'(x^\star) = 0$]. El gráfico de $\varphi(t, x_0)$ es una *trayectoria que pasa por* x_0 y en cada punto es tangente al campo de direcciones. Para cada x_0, la *órbita positiva* es $\gamma^+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t \in [0, b_{x_0})} \varphi(t, x_0)$, la *órbita negativa* es $\gamma^-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t \in (a_{x_0}, 0]} \varphi(t, x_0)$ y la *órbita* $\gamma(x_0) \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t \in (a_{x_0}, b_{x_0})} \varphi(t, x_0)$. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es *positivamente [negativamente] invariante por* φ sii $\forall x_0 \in S : \gamma^+(x_0) \subset S \, [\gamma^-(x_0) \subset S]$; $S \subset \mathbb{R}$ es *invariante por* φ sii $\forall x_0 \in S : \gamma(x_0) \subset S$.

   El *diagrama de fase* del sistema representa el conjunto de sus órbitas con una flecha indicando el sentido del crecimiento de $\varphi(t, x_0)$ (esto es que se indica el sentido del flujo sobre las órbitas); el número de órbitas junto al sentido del flujo se llama *estructura de órbitas*. Si $\gamma^-(x_0)$ es acotada, el *conjunto α-límite* es $\alpha(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{\lim\limits_{t \to a_{x_0}^+} \varphi(t, x_0)\}$, y si $\gamma^+(x_0)$ es acotada el *conjunto ω-límite* es $\omega(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{\lim\limits_{t \to b_{x_0}^-} \varphi(t, x_0)\}$, y sus preimágenes respectivas son $\alpha^{-1}(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha(x) = \alpha(x_0)\}, \omega^{-1}(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \omega(x) = \omega(x_0)\}$. Se define la energía potencial del sistema por $V(x) \overset{\text{def}}{=} -\int_0^x f(\xi) \, \mathrm{d}\xi$.

   (a) Efectuar un análisis cualitativo completo del sistema: $\dot{x} = -x, x(0) = x_0$ (esto es, determinar explícitamente todos los elementos del léxico básico y examinar la verificación de las correspondientes relaciones), incluyendo la expresión explícita de $\varphi(t, x_0)$. ¿El intervalo $(-1, 1)$ es positivamente invariante? ¿El intervalo $(0, 3)$ es invariante?

   (b) Probar que las soluciones de $\dot{x} = f(x)$ son invariantes ante traslaciones horizontales $(t, x) \mapsto (t + s, x)$, y que cumplen $\varphi(0, x_0) = x_0, \varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0)) \forall t, t + s \in I_{x_0}$ y la inversa de $\varphi(t, x_0)$ es $\varphi(-t, x_0)$, siempre que $t, -t \in I_{x_0}$ (esto es, constituyen un *sistema dinámico*); mostrar que esto equivale a que las isoclinas del campo de direcciones en el plano (t, x) son rectas horizontales paralelas al eje t. Probar que la función constante $x(t) = x^\star$ es una solución (esto es $x(t) = \varphi(t, x^\star)$) y entonces que $\gamma^+(x^\star) = \gamma^-(x^\star) = \gamma(x^\star) = \{x^\star\}$. Probar que $\varphi(t, x_0)$ es una función monótona de la variable t, que $\varphi(t, x_0) < \varphi(t, y_0)$ para todo t si $x_0 < y_0$ y que si $\gamma^+(x_0) \, [\gamma^-(x_0)]$ es acotada, entonces $b_{x_0} = +\infty \, [a_{x_0} = -\infty]$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0) = x^\star \, [\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t, x_0) = x^\star]$. Probar que los conjuntos límites son conjuntos unitarios de puntos de equilibrio. Probar que V es decreciente a lo largo de una trayectoria, y que los puntos de equilibrio son puntos estacionarios de la función V. Probar que, siendo $f \in C^1(\mathbb{R})$, el punto de equilibrio hiperbólico $x^\star$ es un atractor sii $f'(x^\star) < 0$ (y entonces es inestable sii $f'(x^\star) > 0$), mientras que si el punto es no hiperbólico caben todos los comportamientos.

   (c) Efectuar un análisis cualitativo completo de $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$, obteniendo la expresión explícita de $\varphi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$ con el correspondiente intervalo maximal I_{x_0}, que para $x_0 > 0$ es $I_{x_0} = (-\infty, 1/x_0)$, para $x_0 = 0$ es $I_{x_0} = (-\infty, \infty)$ y para $x_0 < 0$ es $I_{x_0} = (1/x_0, \infty)$. Determinar si para algún x_0 es $b_{x_0} = 2$, si para algún x_0 es $a_{x_0} = -3$, si para algún x_0 es $I_{x_0} = (-3, 2)$. Determinar, siempre que existan, los conjuntos $\alpha(4), \omega(-1)$. Determinar, siempre que exista, un conjunto minimal invariante que contenga a los puntos: $x_1 = -1, x_2 = 3$. Determinar los conjuntos $\omega^{-1}(1), \alpha^{-1}(0)$.

   (d) Efectuar un análisis cualitativo completo de $\dot{x} = x^2 - 1, x(0) = x_0$, obteniendo la expresión explícita para $|t| > 1$ dada por $\varphi(t, x_0) = \frac{1 + a(t)}{1 - a(t)}$ siendo $a(t) = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} e^{2t}$ con el correspondiente intervalo maximal I_{x_0} que para $x_0 > 1$ es $I_{x_0} = \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right)\right)$, para $x_0 < -1$ es $I_{x_0} = \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right), \infty\right)$; para $-1 < x_0 < 1$ es $\varphi(t, x_0) = \frac{1 - a(t)}{1 + a(t)}$ siendo $a(t) = \frac{1 - x_0}{1 + x_0} e^{2t}$ con el correspondiente intervalo maximal $I_{x_0} = (-\infty, \infty)$, intervalo que por supuesto vale también para las soluciones de equilibrio. Determinar si para algún x_0 es $b_{x_0} = 2$, si para algún x_0 es $a_{x_0} = -3$, si para algún x_0 es $I_{x_0} = (-3, 2)$. Determinar, siempre que existan, los conjuntos $\alpha(4), \omega(-1), \alpha^{-1}(4), \omega^{-1}(0)$. Determinar, siempre que exista, un conjunto minimal invariante que contenga a los puntos: $x_1 = -1, x_2 = 3$.

   (e) Sea $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ con f de clase $C^2(\mathbb{R})$, con $f(x_0) < 0, f'(x_0) > 0, f''(x_0) < 0$. Determinar el signo de $\ddot{x}(0)$ y de $\dddot{x}(0)$.

(f) Proponer, siempre que exista, un sistema dinámico $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ con f de clase $C^1(\mathbb{R})$, tal que $\omega(-1) = \alpha(1) = \{0\}, \omega(1) = \alpha(4) = \{3\}$ y determinar el diagrama de trayectorias y el diagrama de fases. Determinar el mínimo valor de $d \in \mathbb{R}$ tal que $S = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < d\}$ resulte positivamente invariante.

(g) En cada uno de los siguientes casos, efectuar un análisis cualitativo completo, incluyendo consideraciones acerca de los conjuntos límite.

i. $\dot{x} = x^2 - x - 2 = 0, x(0) = x_0$.
ii. $\dot{x} = x^3 - 4x^2 + 4x = 0, x(0) = x_0$.
iii. $\dot{x} = x - x^3, x(0) = x(0) = x_0$.
iv. $\dot{x} = x^4 - x^2, x(0) = x(0) = x_0$.
v. $\dot{x} = -x^4 + x^2, x(0) = x(0) = x_0$.

(h) Determinar todos los atractores de $\dot{x} = x\sin(x), x(0) = x_0$.

(i) *Verhulst.* Asignar el significado de las constantes positivas r, N para alguna interpretación del modelo logístico $\dot{x} = rx(1-x/N), x(0) = x_0 \geq 0$, obteniendo su solución explícita $\varphi(t, x_0) = \dfrac{x_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-rt}} N$ siendo $I_{x_0} = (-\infty, \infty)$ si $0 \leq x_0 \leq N$, mientras que si $x_0 > N$ es $I_{x_0} = \left(-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{x_0}{x_0-n}\right), \infty\right)$. Efectuar un análisis cualitativo completo con las correspondientes interpretaciones en el contexto del modelo. Probar que mediante el cambio de variables $\xi = x/N, \tau = rt$, el modelo logístico se reduce a la ecuación adimensional $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = \xi(1-\xi), \xi(0) = x_0/N$.

(j) *Logística con extracción constante.* Si en el modelo de Verhulst se introduce una acción externa modelando un retiro a tasa constante $\mu \geq 0$, la ecuación se convierte en $\dot{x} = rx(1 - x/N) - \mu, x(0) = x_0 \geq 0$. Probar que, siendo $\mu < \mu^\star = \frac{rN}{4}$, se verifica que si $x_0 < x_1^\star = \frac{N}{2}(1 - \sqrt{1 - \mu/\mu^\star})$ se produce la extinción de x en tiempo finito, mientras que para $x_0 > x_1^\star$ la población x se aproxima (en tiempo infinito) al valor límite $x_2^\star = \frac{N}{2}(1 + \sqrt{1 - \mu/\mu^\star})$. ¿Qué sucede si $\mu > \mu^\star$?

(k) *Logística con extracción proporcional.* Si en el modelo de Verhulst se introduce una acción externa modelando un retiro a tasa proporcional a la población $p = \mu x \geq 0$, la ecuación se convierte en $\dot{x} = rx(1-x/N) - \mu x, x(0) = x_0 \geq 0$. Rehacer el análisis cualitativo, para r, N fijos y los distintos valores de μ.

(l) Probar que el sistema $\dot{x} = \sqrt{x}, x(0) = x_0$ tiene, para cada $x_0 \geq 0$ una solución $\varphi(t, x_0) = \frac{1}{4}(t + 2\sqrt{x_0})^2$, pero que tal solución no es única para $x_0 = 0$ ¿(la pérdida de unicidad contradice lo afirmado en las nociones básicas?). En cambio, mostrar que es única la solución de $\dot{x} = x^2 + 1, x(0) = 0$, graficando su trayectoria y órbitas.

(m) Formularle a la `AI` las cuestiones de cada ítem y analizar la respuesta.

`Observación bibliográfica`. Las cuestiones básicas de este ejercicio se encuentran en el capítulo de apertura de los textos de sistemas dinámicos de la bibliografía; por ejemplo en *Hale, J., Koçac, H.* (2019). Dynamics and Bifurcations. New York: Springer. Seleccionadas aplicaciones se encuentran en *Wiggins, S.* (2024). Texts in Applied Mathematics. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York: Springer. Para las ecuaciones diferenciales, cualquier texto permite revisar lo básico, como por ejemplo *Nagle, K., Saff, E., y Snider, A.* (2023). Fundamentals of differential equations Boston: Addison-Wesley. Un texto clásico ya canónico es *Birkhoff, G.* (1991). Dynamical Systems. New York: American Mathematical Society. Los primeros cuatro capítulos de *Broer, H. y Takens, F.* (2024). Dynamical Systems and Chaos. New York: Springer, requieren cierta madurez matemática; los restantes ya se dirigen a un público de graduados. Una iniciación básica se alcanza con *Scheinerman, E.* (2019). Invitiation to Dynamical Systems. New York: The John Hopkins University Press.

2. *Bifurcación.* La acción de un escenario representado por μ en el sistema dinámico $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ produce una familia μ-paramétrica dada por $\dot{x} = f(\mu, x), x(0) = x_0$, de modo que el flujo es ahora μ-dependiente. Se dice que, para un dado valor del parémtro $\mu = \mu_0$, el sistema tiene una *estructura estable de órbitas* si existe un entorno $E(\mu_0, \epsilon)$ en el que la estructura de órbitas se mantiene; si tal cosa no sucede, esto es, si para algún $\mu^\star$ cualquier perturbación del parámetro altera la estructura de las órbitas, se dice que $\mu^\star$ es un *valor de bifurcación*, y el correspondiente punto $(\mu^\star, x^\star)$ es un *punto de bifurcación.* El diagrama en el plano $(\mu, x^\star)$ en el que se representan todos los puntos de equilibrio $x^\star$ para cada valor de μ , junto con la indiciación de su naturaleza y las órbitas mismas se llama *diagrama de bifurcación.* Observar que todas las nociones fundamentales están ahora afectadas por μ, por ejemplo, una órbita será una función $\gamma(\mu, x_0)$.

(a) Construir el diagrama de bifurcación para el modelo logístico con extracción constante dado por $\dot{x} = rx(1 - x/N) - \mu, x(0) = x_0 \geq 0$ y el modelo logístico con extracción proporcional $\dot{x} = rx(1 - x/N) - \mu x, x(0) = x_0 \geq 0$ e interpretarlo en los términos del modelo mismo.

(b) En cada uno de los siguientes casos, efectuar el análisis cualitativo y su compilación completa en el diagrama de bifurcación; de haber un cliclo de histéresis, describirlo y desarrollar el sentido en que evoluciona. Seleccionar un valor fijo $\mu \in \mathbb{R}$ y determinar la función $\gamma(\mu, x_0)$ y la función $\gamma(\mu, \mu)$.

i. $\dot{x} = x^2 + \mu, x(0) = x_0$.
ii. $\dot{x} = \mu x - x^2, x(0) = x_0$.
iii. $\dot{x} = \mu + x - x^3, x(0) = x_0$.
iv. $\dot{x} = \mu x - x^3, x(0) = x_0$.
v. $\dot{x} = \mu^2 - x^2, x(0) = x_0$.
vi. $\dot{x} = \mu x^2 - x^3, x(0) = x_0$.
vii. $\dot{x} = \mu^2 + x^2, x(0) = x_0$.
viii. $\dot{x} = x^2 - 2x + \mu, x(0) = x_0$.
ix. $\dot{x} = x^2 - 2\mu x + 1, x(0) = x_0$.
x. $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5, x(0) = x_0$.
xi. $\dot{x} = 1 + \mu x - x^3, x(0) = x_0$.

(c) Formularle a la `AI` las cuestiones de cada ítem y analizar la respuesta.

`Observación`. Puede ampliarse el alcance de este ejercicio en el texto

3. *Sistemas lineales planos homogéneos, nociones básicas.* Siendo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz constante $A = \binom{a\,b}{c\,d}$, la matriz columna de funciones escalares $X = \binom{x}{y}$ y su correspondiente matriz derivada $\dot{X} = \binom{\dot{x}}{\dot{y}}$, el problema de valor inicial $\dot{X} = AX, X(0) = X_0 = \binom{x_0}{y_0}$ tiene solución única $X : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2, X(t) = \varphi(t, X_0)$, para todo $X_0 \in \mathbb{R}^2$, siendo su gráfico la *trayectoria* que pasa por X_0, y su proyección sobre el plano xy la correspondiente *órbita* en el *plano de fases.* El sistema se llama *desacoplado* si $b = c = 0$ (en caso contrario es acoplado).

El espacio nulo de A es el conjunto de los *puntos de equilibrio* del sistema (esto es, $X^\star$ es un punto de equilibrio sii $AX^\star = \binom{0}{0}$; tal punto se llama *hiperbólico* si ninguno de los autovalores de A tiene parte real nula); el sistema tiene un único punto de equilibrio (el punto $X^\star = \binom{0}{0}$) sii no se anula el determinante de A (esto es, $\det(A) \neq 0$) y en todo otro caso tiene infinitos puntos de equilibrio (además del trivial). Las *nulclinas* son $N_x \stackrel{\text{def}}{=} \{(X \in \mathbb{R}^2 : \dot{x} = 0\}, N_y \stackrel{\text{def}}{=} \{(X \in \mathbb{R}^2 : \dot{y} = 0\}$ (y en consecuencia, $X^\star$ es un punto de equilibrio sii $X^\star \in N_x \cap N_y$).

Una solución $\varphi(t, X_0)$ es estable si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda otra solución $\psi(t, X_0')$ que verifique $d(X_0', X_0) < \delta$ se cumple que $d(\varphi(t, X_0), \psi(t, X_0')) < \epsilon, \forall t \geq 0$. En particular, *un punto de equilibrio $X^\star$ es estable* si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo X_0 que verifique $d(X_0, X^\star) < \delta$ se cumple que $d(\varphi(t, X_0), X^\star) < \epsilon, \forall t \geq 0$, es *atractor* si es estable y además, para tales X_0 se cumple $\lim\limits_{t\to+\infty} d(\varphi(t, X_0), X^\star) = 0$, el punto $X^\star$ se llama *inestable* si no es estable. Para cada X_0, la *órbita positiva* es $\gamma^+(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t\geq 0} \varphi(t, X_0)$, la *órbita negativa* es $\gamma^-(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t\leq 0} \varphi(t, X_0)$ y la *órbita* $\gamma(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t, X_0)$. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ es *positivamente [negativamente] invariante por φ* sii $\forall X_0 \in S : \gamma^+(X_0) \subset S\,[\gamma^-(X_0) \subset S]$; $S \subset \mathbb{R}^2$ es *invariante por φ* sii $\forall X_0 \in S : \gamma(X_0) \subset S$. El *conjunto α-límite* es $\alpha(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{t\leq 0} \overline{\gamma^-(\varphi(t, X_0))}$, y el *conjunto ω-límite* es $\omega(X_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, X_0))}$ (siempre que no sean vacíos), y sus preimágenes respectivas son $\alpha^{-1}(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \alpha(X) = \alpha(X_0)\}, \omega^{-1}(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \omega(X) = \omega(X_0)\}$.

Llamando $p \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(A), q \stackrel{\text{def}}{=} \det(A)$, el *polinomio característico* de A es $p(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \mu I) = \mu^2 - p\mu + q$ siendo sus raíces $\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(p \mp \sqrt{p^2 - 4q})$ los *autovalores* de A que se agrupan en el *espectro* $\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_1, \mu_2\}$ con sus correspondientes autoespacios $S_{\mu_k}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Nul}(A - \mu_k I), k = 1, 2$; si la matriz es diagonalizable con autovectores linealmente independientes v_1, v_2 asociados, respectivamente, a los autovalores μ_1, μ_2, la solución del sistema es $\varphi(t, X_0) = c_1 v_1 e^{\mu_1 t} + c_2 v_2 e^{\mu_2 t}$, siendo c_1, c_2 tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 = X_0$. Si A no es diagonalizable asociado a $\mu_1 = \mu_2$ se tendrá sólo un autoespacio generado por v_1, y obteniendo un segundo vector w tal que $(A - \mu I)w = v_1$, la solución es $\varphi(t, X_0) = ((c_1 + c_2 t)v_1 + c_2 w)e^{\mu t}$, siendo c_1, c_2 tales que $c_1 v_1 + c_2 w = X_0$. Finalmente, si el espectro es complejo $\sigma(A) = \{\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta\}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (con $\beta \neq 0$), y los correspondientes autovectores $v_{1,2} = u \pm iv$ con $u, v \in \mathbb{R}^2$, la solución del sistema es $\varphi(t, X_0) = c_1(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v)e^{\alpha t} + c_2(\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u)e^{\alpha t}$, con c_1, c_2 tales que $c_1 u + c_2 v = X_0$.

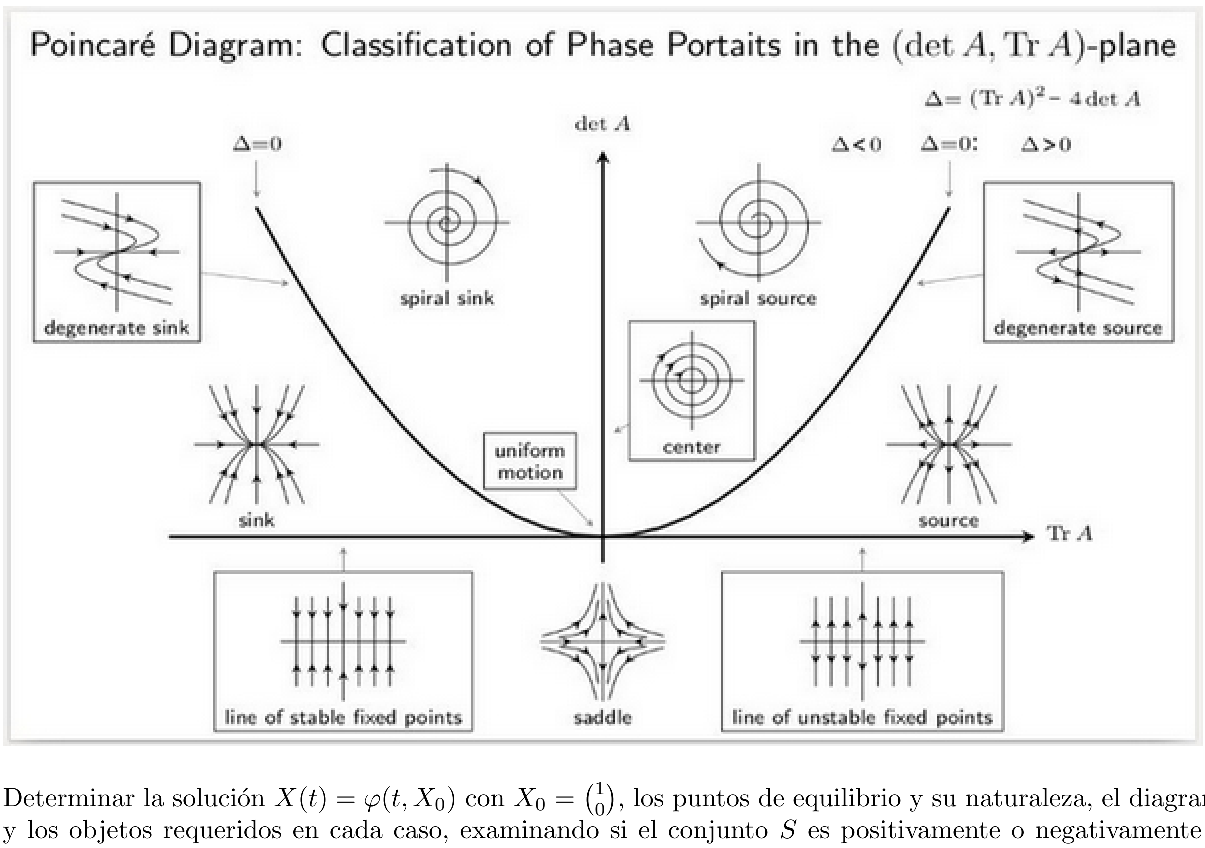
`Observación bibliográfica`. El capítulo 10 del texto *Zill, D., Cullen, M.* (2024). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera, México: Cengage, presenta de modo sencillo las consideraciones básicas para este apartado. Un desarrollo completo de los sistemas se encuentra en *Hirsch y Smale* (2024). Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Cuarta edición. New York: Springer y también *Arrowsmith - Place* (2023). An introduction to dynamical systems (Tercera edición). New York: Cambridge University Press-

(a) *Sistemas desacoplados.* Obtener la expresión analítica de las soluciones y de las órbitas del sistema desacoplado para todos los valores de las constantes a, d graficando en el plano (a, d) la localización de los equilibrios con su correspondiente denominación y estabilidad. Determinar además, para qué valores de a, b el conjunto $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ es positivamente invariante. Probar que S no es positivamente invariante para $a = 1, d = 2$, mostrando que la órbita que pasa por $X_0 = \binom{1}{1}$ abandona S en tiempo finito, determinando ese instante.

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= dy \end{cases} \qquad \text{con } X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

(b) *Sistemas acoplados, diagrama de Poincaré.* El comportamiento del sistema $\dot{X} = AX, X(0) = X_0 = \binom{x_0}{y_0}$, siendo $A = \binom{a\,b}{c\,d} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ depende de la localización de la matriz A en el plano de los parámetros $p = \text{tr}(A), q = \det(A)$, quedando resumida gráficamente la información en el diagrama de estabilidad de Poincaré. Efectuar detalladamente el análisis que permite construir el diagrama, y *completarlo* con los datos del espectro y el correspondiente etiquetado de los ejes (en particular, en los nodos, determinando el autovector que dirige al que retiene las tangencias), normalizando en el caso de espectro real, la nomenclatura $\mu_1 \leq \mu_2$. También observar que sobre la parábola definida por $\Delta = p^2 - 4q = 0$ no solo pueden producirse, además de los nodos degenerados indicados en diagrama, los equilibrios tipo *estrella*. Caracterizar especialmente los comportamientos posibles en el caso $p = q = 0$.

El texto del sitio clickhereWiki, cuya figura se ha reproducido aquí, resume la información básica en ella consignada.



Determinar la solución $X(t) = \varphi(t, X_0)$ con $X_0 = \binom{1}{0}$, los puntos de equilibrio y su naturaleza, el diagrama de fases y los objetos requeridos en cada caso, examinando si el conjunto S es positivamente o negativamente invariante. Puede controlarse el análisis con interactivos como el del `MIT` clickhereMIT o de Wolfram clickhereWolfram.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= -2x + y \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; examinar $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |y|\}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -x + 2y \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \gamma^+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; examinar $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= -x+2y \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \alpha^{-1}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \gamma^+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; examinar $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 1\}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 4x \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \gamma^+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; examinar $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$

v. $\begin{cases} \dot{x} &= -2x+y \\ \dot{y} &= x-2y \end{cases}$ determinar $\omega^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; examinar $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$

vi. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x+y \\ \dot{y} &= -4x-2y \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \alpha^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \gamma^+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; examinar $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : 2x+y\ge 0\}$

vii. $\begin{cases} \dot{x} &= -2x+y \\ \dot{y} &= 4x-2y \end{cases}$ determinar $\gamma^-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \omega^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \gamma^+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; examinar $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

(c) *Bifurcación en sistemas planos homogéneos.* La acción de un escenario representado por μ en el sistema dinámico $\dot{X}=A(X), X(0)=X_0$ produce una familia μ-paramétrica dada por $\dot{X}=A_\mu X, X(0)=X_0$, de modo que el flujo es ahora μ-dependiente. Se dice que, para un dado valor del parémtro $\mu=\mu_0$, el sistema tiene una *estructura estable de órbitas* si existe un entorno $E(\mu_0,\epsilon)$ en el que la estructura de órbitas se mantiene; si tal cosa no sucede, esto es, si para algún $\mu^\star$ cualquier perturbación del parámetro altera la estructura de las órbitas, se dice que $\mu^\star$ es un *valor de bifurcación*, y el correspondiente punto $(\mu^\star, X^\star)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ es un *punto de bifurcación*. Observar que todas las nociones fundamentales están ahora afectadas por μ, por ejemplo, una órbita será una función $\gamma(\mu, X_0)$, los parámetros $p=\mathrm{tr}(A_\mu), q=\det(A_\mu)$...

En cada uno de los siguientes casos, determinar la estructura de órbitas para todos los valores del parámetro μ, y los valores de bifurcación, en caso de que existan. Determinar, además, todos los valores de μ que hacen que $S=\{x\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$ sea positivamente invariante.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x-2\mu y \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= \mu x \\ \dot{y} &= -x-2y \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= x+\mu y \\ \dot{y} &= x-y \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= \mu y-3y \\ \dot{y} &= x+\mu y \end{cases}$

v. $\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= \mu x-y \end{cases}$

(d) Formularle a la `AI` las cuestiones de cada ítem y analizar la respuesta.

`Observación bibliográfica`. Puede ampliarse el alcance de este ejercicio en el texto *Campbell, S., Haberman, R.* (2023). Introduction to Differential Equations with Dynamical System (Tercera edición). Princeton: Princeton University Press.

4. *Sistemas planos no homogéneos.* Una intervención externa de tasa constante sobre un sistema lineal está representada por la matriz $B=\binom{e}{f}\in\mathbb{R}^2$, siendo ahora el sistema $\dot{X}=AX+B$. Si A es regular (y entonces $\det(A)\ne 0$), la estructura de órbitas se preserva para cualquier B, con el punto de equilibrio desplazado a $X^\star=-A^{-1}B$; si, en cambio, $\det(A)=0$, la estructura se preserva sii $B\in\mathrm{col}(A)$ (en caso contrario el sistema pierde todos sus puntos de equilibrio).

(a) Probar que la solución general del sistema $\dot{X}=AX+B, X(0)=X_0$ (con A regular) está dada por $X=X_h+X^\star$, con $X^\star=-A^{-1}B$, siendo X_h la solución del sistema homogéneo $\dot{X}=AX, X(0)=X_0-X^\star$. Aplicarlo en la resolución de los siguientes sistemas, graficando el diagrama de fases. Cuando se indique, examinar si S es positivamente (negativamente) invariante.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x-y+1 \\ \dot{y} &= -x+2y-5 \end{cases}$, $X(0)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : 4-x\le y\le 2+x\}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= -x+4y-2 \\ \dot{y} &= x-y-1 \end{cases}$, $X(0)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $S=\{X\in\mathbb{R}^2 : 4-2y\le x\le 2y\}$

(b) Determinar los diagramas de fase para cada uno de los siguientes sistemas, dando la ecuación de todas las órbitas que resulten rectilíneas. En todos los casos dar, siempre que exista, un semiplano S que resulte invariante.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y - 1 \\ \dot{y} &= 2x + 4y - 2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x + y - 1 \\ \dot{y} &= -4x - 2y + 2 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y - 2 \\ \dot{y} &= 2x + 4y \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= 2x + y - 1 \\ \dot{y} &= -4x - 2y \end{cases}$

(c) Determinar la estructura orbital para cada $\mu \in \mathbb{R}$, determinando, en caso de existir, valores y puntos de bifurcación.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= x + y - \mu \\ \dot{y} &= 2x + 2y + 1 - \mu \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + \mu y - 1 \\ \dot{y} &= x + y - \mu \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= -y + 2 - \mu \\ \dot{y} &= x - y \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= x + \mu y \\ \dot{y} &= \mu x - y \end{cases}$

(d) *Segundo orden.* En este apartado se trata del sistema dinámico lineal de segundo orden con coeficentes constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dado por $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = \gamma, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

i. Probar que puede transferirse el análisis del sistema de segundo orden al de un sistema plano en la variable $X = \binom{x}{v}$, resultando $\dot{X} = AX + B, X(0) = X_0$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, B = \binom{0}{\gamma}, X_0 = \binom{x_0}{\dot{x}_0}$.

ii. Analizar el sistema $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ y adjudicarle una interpretación.

iii. Analizar el sistema $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ y adjudicarle una interpretación.

iv. Analizar el sistema $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$.

(e) Formularle a la `AI` las cuestiones de cada ítem y analizar la respuesta.

5. *Sistemas no lineales.* Siendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2), X = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, este apartado trata del sistema dinámico $\dot{X} = F(X), X(0) = X_0 = \binom{x_0}{y_0}$. Luego está definida la *matriz jacobiana* de $F = \binom{f_1}{f_2}$ en cualquier punto X por $J_F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(X)$ y la matriz jacobiana evaluada en un punto de equilibrio $X^\star$ representa una *linealización* del sistema en ese punto dada por el sistema $\dot{X} = J(X^\star)X$; tal punto es *hiperbólico* si ninguno de sus autovalores tiene parte real nula (en otro caso, se llama *no hiperbólico*). El teorema de Hartman-Grobman prueba que en un entorno de un punto de equilibrio hiperbólico el sistema no lineal hereda la estructura orbital del sistema linealizado (es topológicamente equivalente).

(a) Efectuar el análisis completo de cada uno de los siguientes sistemas no lineales, detallando los comportamientos locales linealizados y su integración consistente en el diagrama de fases global.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^3 - x \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= x^2 - 1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

v. $\begin{cases} \dot{x} &= 8x - y^2 \\ \dot{y} &= 6x^2 - 6y \end{cases}$

vi. $\begin{cases} \dot{x} &= xy - 2y \\ \dot{y} &= xy - 2x \end{cases}$

vii. $\begin{cases} \dot{x} &= x(2 - x - y) \\ \dot{y} &= y(3 - 2x - y) \end{cases}$ Analizar como modelo competición: $x \geq 0, y \geq 0$

viii. $\begin{cases} \dot{x} &= x(2 - x - y/2) \\ \dot{y} &= y(3 - x - y) \end{cases}$ Analizar como modelo competición: $x \geq 0, y \geq 0$

ix. $\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) \end{cases}$ Analizar como modelo competición: $x \geq 0, y \geq 0$

x. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - xy \end{cases}$

xi. $\begin{cases} \dot{x} &= -y^2 + 2y \\ \dot{y} &= xy - 2x - 2y + 4 \end{cases}$

xii. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2y + y^2 \end{cases}$ Determinar la órbita positiva y el conjunto omega-límite de $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

xiii. $\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$ En coordenadas polares $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$

(b) Probar que si la matriz jacobiana del sistema tiene traza idénticamente nula, sus órbitas pertenecen a los conjuntos de nivel del campo escalar H tal que $H_x = -f_2, H_y = f_1$, y que todo punto de equilibrio (aislado) del sistema mo lineal es o bien un centro o bien un punto silla. Probar que el problema de segundo orden $\ddot{x} = u(x), u \in C^1(\mathbb{R})$ se convierte en un sistema plano de primer orden (introduciendo $\dot{x} = y$) que necesariamente satisface lo anterior, con $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, siendo $V(x) = -\int_0^x u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ y que si en $x = a$ la función V alcanza un mínimo (máximo) local estricto, el punto $\binom{a}{0}$ es un centro (silla) del sistema plano. Aplicar según corresponda estos resultados en el análisis de los siguientes sistemas.

i. $\begin{cases} \dot{x} &= x - 2xy \\ \dot{y} &= x - y + y^2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= 2xy \\ \dot{y} &= 1 + 3x^2 - y^2 \end{cases}$

iii. $\ddot{x} = 1 - x^2$

iv. $\ddot{x} = x^3 - 7x^2 + 10x$

(c) *Escenarios*. Analizar el comportamiento cualitativo de los siguientes sistemas no lineales para los distintos escenarios representados por el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.

`Observación`. Además de la indicada en la bibliografía, una referencia clásica con alcances por encima del curso es *Andronov, Leontovich, Gordon, y Maier* (1971). Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane. Washington: NASA).

i. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu x - 2y + y^2 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 - y - \mu \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \dot{x} &= -x^2 + \mu \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$

v. $\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$

vi. $\begin{cases} \dot{x} &= y + \mu x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y(x^2 + y^2) \end{cases}$ Observar que la linealización no predice el comportamiento no lineal

(d) Formularle a la `AI` las cuestiones de cada ítem y analizar la respuesta.

6. *Algunos modelos interpretados elementales.*

   (a) Explicar el significado de los coeficientes positivos a, b en el modelo lanchesteriano de combate de dos fuerzas convencionales x, y y analizar su dinámica (en el primer cuadrante), determinando la ecuación de las órbitas para cada X_0. Rehacer, ahora considerando una tasa de refuerzo constante α, β para cada fuerza.
   $$\begin{cases} \dot{x} &= -ay \\ \dot{y} &= -bx \end{cases}$$

   (b) Si en el modelo lanchesteriano la fuerza x es no convencional, analizar su dinámica (en el primer cuadrante), determinando la ecuación de las órbitas para cada X_0. Rehacer, ahora considerando una tasa de refuerzo constante α, β para cada fuerza.
   $$\begin{cases} \dot{x} &= -axy \\ \dot{y} &= -bx \end{cases}$$

   (c) Interpretar los coeficientes positivos a, b, c, d y analizar la dinámica del sistema de Lotka-Volterra en espacios limitados de recursos sin interacciones intra-especies, especificando hipótesis sobre el depredador y la presa consistentes con el modelo y resolverlo. Analizar las modificaciones introducidas por una intervención externa de tasa constante.
   $$\begin{cases} \dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= -(d - cx)y \end{cases}$$

   (d) Interpretar los coeficientes positivos $a, b, c, d, \alpha, \beta$ y analizar la dinámica del sistema de Lotka-Volterra en espacios limitados de recursos con interaciones intra-especies (conviene considerar dos casos distintos,según que las nulclinas se intersequen o no en el primer cuadrante: en el primer caso se tendrá una extinción del depredador con una estabilización de la presa en a/α, mientras que en el segundo una estabilización asintótica en la intersección, para cualquier condición inicial en el primer cuadrante).
   $$\begin{cases} \dot{x} &= (a - by - \alpha x)x \\ \dot{y} &= -(d - cx - \beta y)y \end{cases}$$

   (e) El principio de exclusión competitiva afirma que si dos especies similares x, y compiten en un espacio que puede albergar más miembros de x que de y, entonces y termina extinguiéndose y todo el espacio saturado de x. Probarlo intepretando el siguiente sistema con $a > b$.
   $$\begin{cases} \dot{x} &= (a - x - y)x \\ \dot{y} &= (b - x - y)y \end{cases}$$

   (f) La competencia entre entidades de distintas capacidades x, y que compiten en un espacio limitado se modela con el siguiente sistema; interpretar el significado de los coeficientes positivos a, b, α, β, analizando e interpretando los resultados en cada uno de los tres casos cualitativamente distintos: (i) $a/\alpha > b, a > b/\beta$, (ii) $a/\alpha > b, a < b/\beta$, (iii) $a/\alpha < b, a > b/\beta$ (mostrar que en los casos (ii) y (iii) las nulclinas se intersecan en el primer cuadrante en el punto $X_0 = \binom{x_0}{y_0}$ donde $x_0 = \frac{a-\alpha b}{1-\alpha\beta}, y_0 = \frac{b-\beta a}{1-\alpha\beta}$).
   $$\begin{cases} \dot{x} &= (a - x - \alpha y)x \\ \dot{y} &= (b - \beta x - y)y \end{cases}$$

   (g) Un modelo epidemiológico de propagación de una enfermedad que identifica con x a la población contagiosa (tasa de infección constante $r > 0$) y con y a la contagiada, tomando como constante $\gamma > 0$ la tasa de retiro se representa por el siguiete sistema. Probar que existe un umbral epidemiológico $\rho = \gamma/r$, que siempre quedan sin contraer la enfermedad algunos individuos y que si inicialmente $S_0 = \rho + \mu$, con $\mu/\rho \ll 1$, el número de individuos que finalmente contrae la enfermedad es del orden de 2μ.
   $$\begin{cases} \dot{x} &= -rxy \\ \dot{y} &= rxy - \gamma y \end{cases}$$

`Observación`. Modelos interpretados diversos pueden encontrarse en *Braun* (2022). Differential equations and their app1ications: an introduction to applied mathematics New York: Springer.