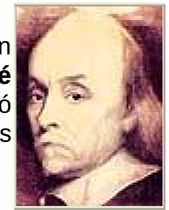
UNIDAD 5: Rectas en el plano

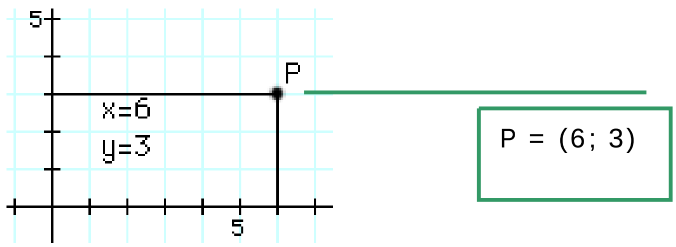
Introducción

Coordenadas en el plano


René Descartes

El sistema más usado es el de las **coordenadas cartesianas**, basado en un juego de ejes perpendiculares entre sí. Fue conocido con el nombre de **René Descartes** ("De-cart"), un científico y filósofo francés, quien hacia el año 1600 ideó una forma sistemática de designar cada punto en el plano por medio de dos números.

El sistema se basa en dos líneas rectas ("ejes"), perpendiculares entre sí, cada una marcada con las distancias desde el punto donde se cruzan ("origen"): los espacios hacia la derecha del origen y hacia arriba de él se toman como positivos y para los otros lados como negativos.



El eje horizontal se llama "x" y el vertical "y". Dado un punto P se dibujan, desde él, líneas **paralelas** a los ejes, y los valores de "x" e "y" definen el punto. El par ordenado (x; y) definen la posición del punto y son sus **coordenadas cartesianas**.

Todo par ordenado de números reales representa un punto del plano, donde la **primera componente** (el primer número) recibe el nombre de **abscisa** (eje x) y la **segunda componente** recibe el nombre de **ordenada** (eje y).

La gráfica de una ecuación en x e y, por ejemplo $3x + y = 2$, es el conjunto de todos los puntos (x; y) del plano que satisfacen la misma. Dichas gráficas son importantes para el estudio de las ecuaciones, ya que proporcionan una representación visual de las mismas.

En esta unidad trataremos la representación gráfica de rectas.

Tema 1: Ecuación explícita, ecuación general; representación gráfica

La ecuación **explícita** de la recta es de la forma:

$$\boxed{y = m\,x + b}$$

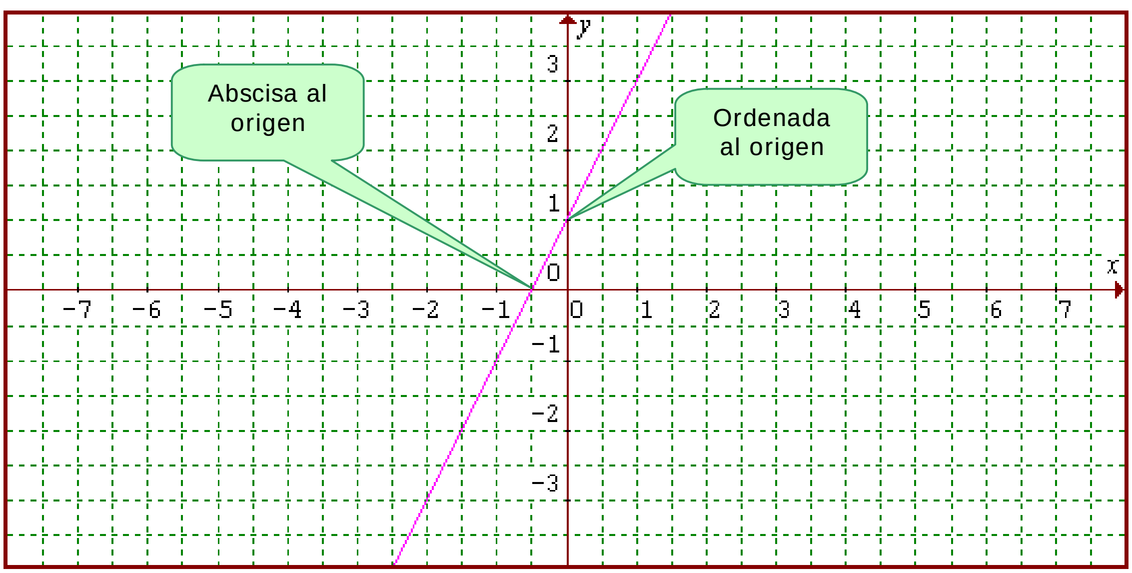
pendiente

ordenada al origen

(siendo m y b números reales)

Ejemplo 1:

Para representar el conjunto de puntos del plano que satisface la ecuación $y = 2\,x + 1$ se puede completar una tabla de valores y ubicar los puntos obtenidos.
(Recordar que dos puntos determinan una recta; la tabla puede completarse con la cantidad de puntos que se quiera, pero siempre, como mínimo, dos).
Se observa la siguiente gráfica:



Una tabla de valores puede ser la que sigue:

x	y = 2 x+1
0	1
- 1	- 1
2	5

Si se observa este primer ejemplo podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La gráfica corta al eje y (llamado eje de ordenadas, como se recordó en la introducción) en el punto (0; 1). La segunda componente de este punto es la "o*rdenada al origen*", *b* = 1. Para obtenerlo analíticamente es necesario reemplazar el valor *x* = *0* y operar algebraicamente en la ecuación para obtener *y*.

$$y = 2x + 1$$

$$2 = 2.0 + 1$$

En la ecuación explícita el valor "*b*" es llamado "ordenada al origen". El punto de (0; *b*) es la intersección de la recta con el eje de ordenadas.

- La gráfica corta el eje x (llamado eje de abscisas, como se recordó en la introducción) en el punto (-1/2 ; 0). La primera componente de este punto es la "*abscisa al origen*". Para obtenerlo analíticamente es necesario igualar a *0* la ecuación (porque ahora es *y* =o) y operar algebraicamente en la ecuación para obtener *x*.

$$y = 2x + 1$$

$$0 = 2.x + 1$$

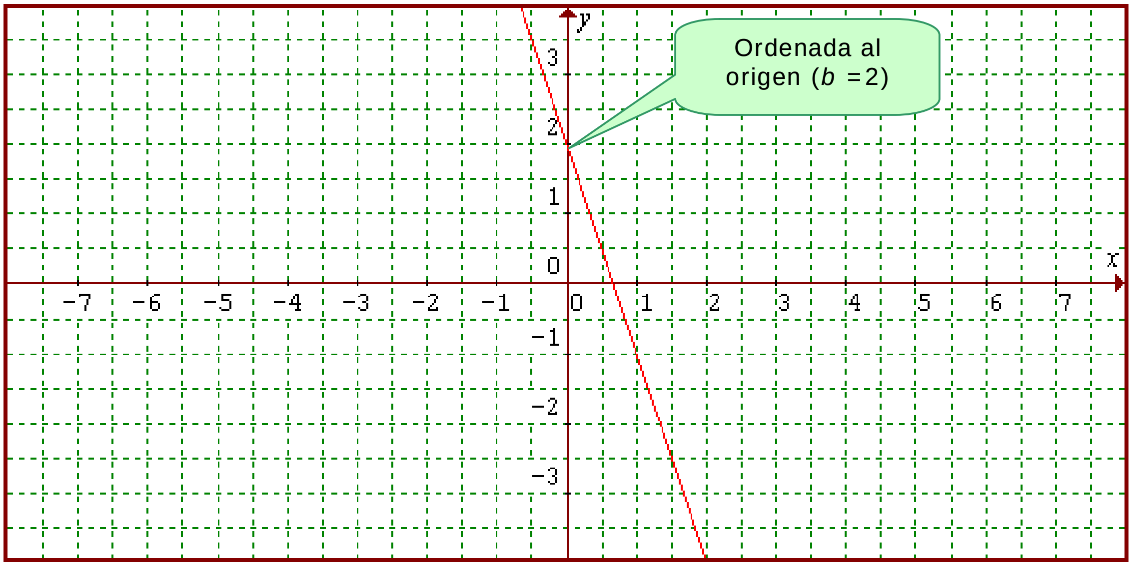
$$-1 = 2.x$$

$$-\frac{1}{2} = x$$

$$ó \;\; x = -\frac{1}{2}$$

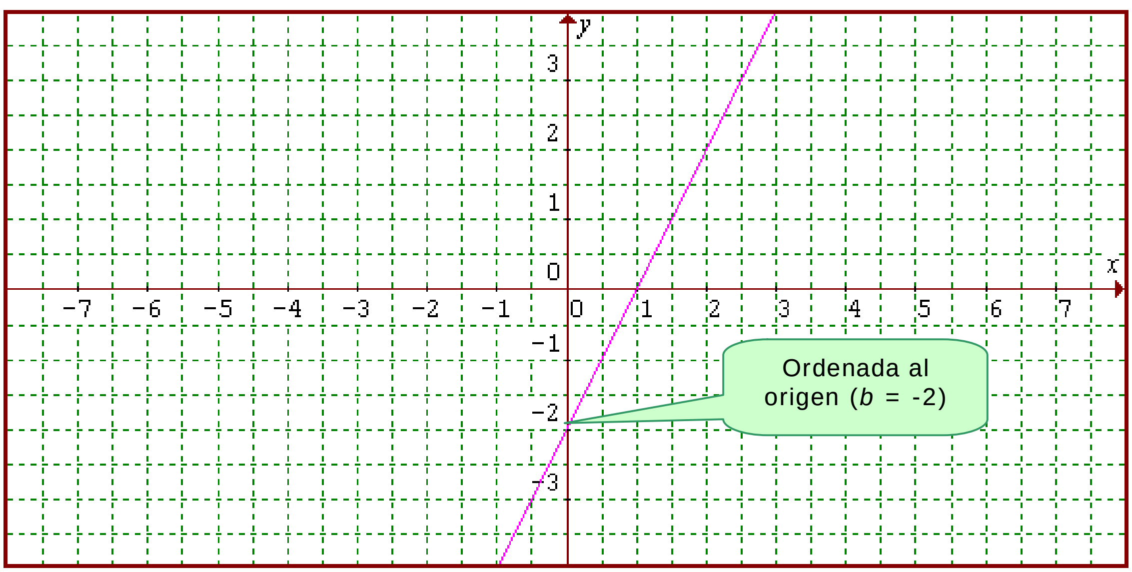
Ejemplo 2:

Al representar la ecuación $y = -3x + 2$ se observará la siguiente gráfica:



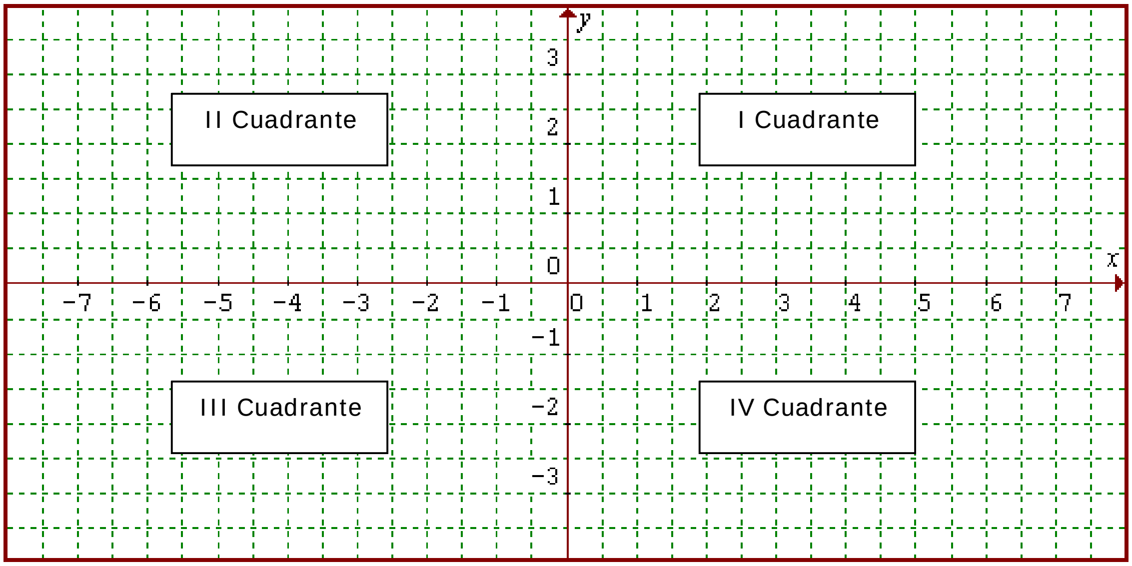
Ejemplo 3:

Al representar la ecuación $y = 2x - 2$ se observará la siguiente gráfica:



Tal como se puede verificar con los ejemplos, generalmente se cumple lo siguiente:

- si $m>0$ la gráfica se desplaza del III cuadrante al I cuadrante (Ver ejemplos 1 y 3),
- si $m<0$ la gráfica se desplaza del II cuadrante al IV cuadrante (Ver ejemplo 2).

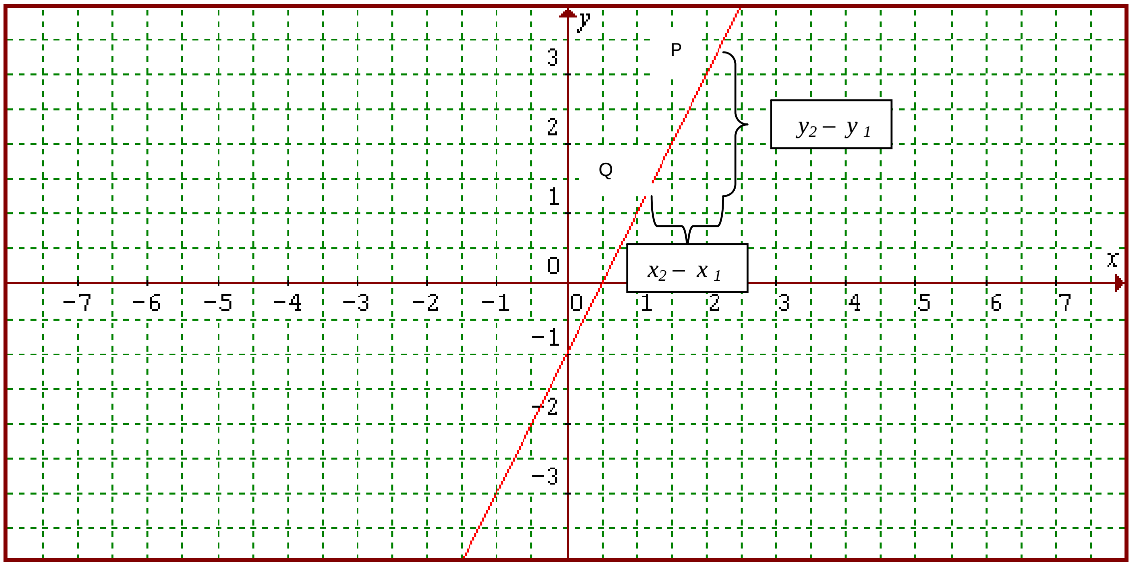


> En la ecuación explícita el valor "*m*" es llamado "pendiente" e indica el aumento o disminución de la variable *y* por cada aumento unitario de la variable *x*.

La pendiente de una recta es un número asociado a su inclinación. Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta, podemos calcular su pendiente mediante la siguiente fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \begin{cases} P=\left(x_1;\,y_1\right) \\ \\ Q=\left(x_2;\,y_2\right) \end{cases}$$

Siempre que $x_1 \neq x_2$



Si se desea hallar la ecuación de una recta conociendo dos puntos diferentes pertenecientes a la misma, se utiliza la fórmula anterior. Ver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P = (2; 1) y Q = (8; 5).

Solución

Puesto que cualquiera de dos puntos determinan una recta, existe sólo una que pasa por dichos puntos. A partir de la fórmula anterior, la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \begin{cases} P = (2;1) \\ Q = (8;5) \end{cases}$$

Quiere decir que por cada tres unidades que avancemos hacia la derecha, la recta se eleva dos unidades. La gráfica describe el comportamiento.

La ecuación de la recta es:

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Para encontrar el valor de "*b*" se reemplaza uno de los puntos (P ó Q, es indistinto puesto que la recta será la misma cualquiera sea el punto elegido), por las coordenadas del mismo y se despeja la incógnita. En este caso, se resolverá reemplazando el punto P.

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

$$1 = \frac{2}{3}.\,2 + b$$

$$1 = \frac{4}{3} + b$$

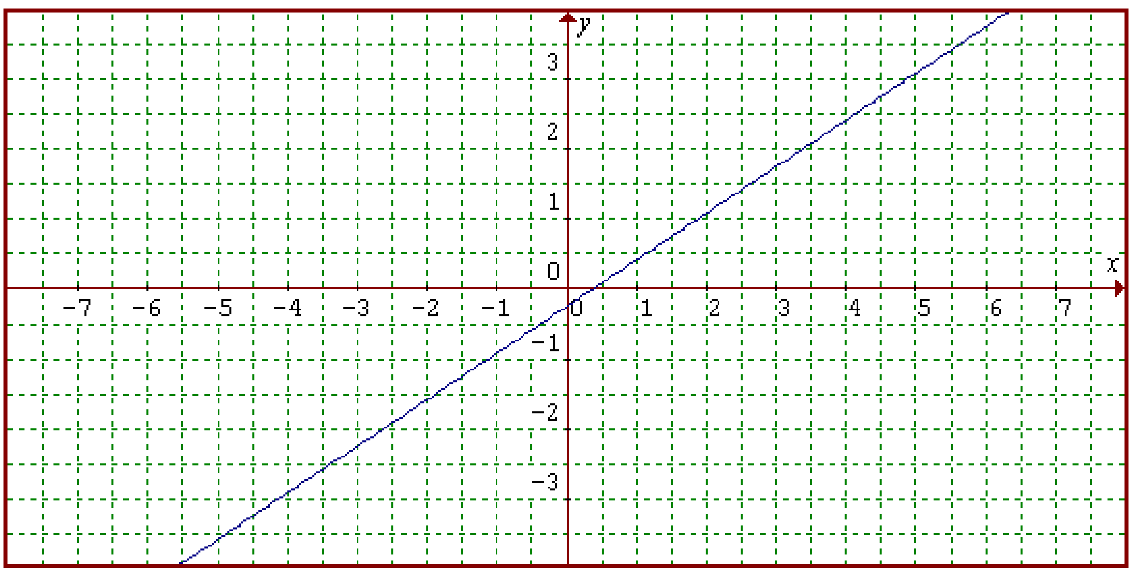
$$1 - \frac{4}{3} = b$$

$$-\frac{1}{3} = b$$

La ecuación de la recta es:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

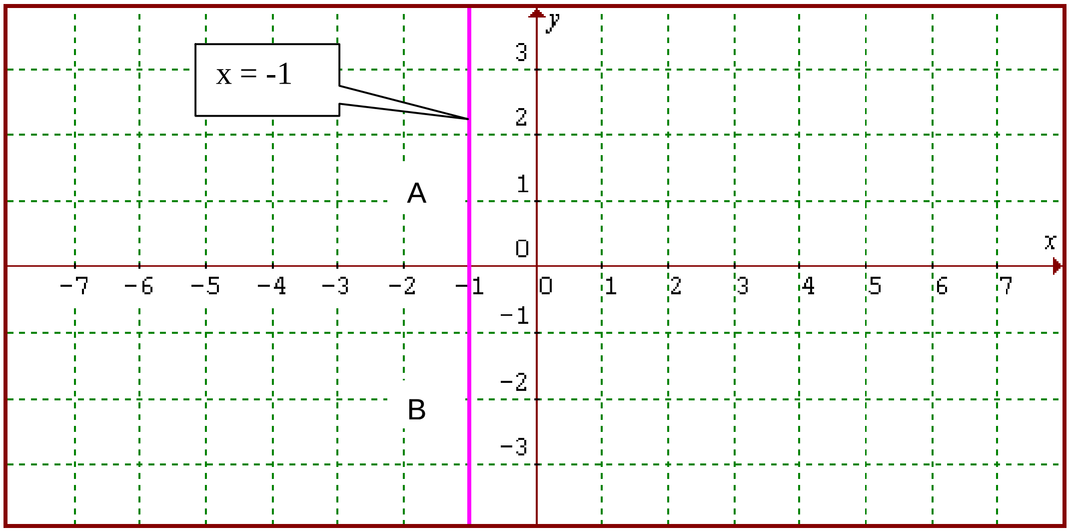
Su representación gráfica es:



Si se desea obtener la ecuación de una recta que pasa por los puntos de igual abscisa (es decir, $x_1 = x_2$) no es posible utilizar la fórmula dada de la pendiente, dado que anularía el denominador. Si esto ocurre, geométricamente visto, significa que los puntos están alineados respecto de una recta vertical, paralela al eje y.
La pendiente de una recta vertical no está definida. La ecuación de una recta constante respecto de la abscisa es: $\boldsymbol{x = x_1 = x_2}$. Observar que este tipo de rectas no admite la posibilidad de escribir sus ecuaciones en forma explícita. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A = (-1; 1) y B = (-1; -2).



La recta que cumple las condiciones pedidas es *x* = - 1.

Puede suceder que los puntos se encuentren alineados en forma horizontal. En ese caso la recta es constante pero respecto de las ordenadas. Es decir, la ecuación de la recta que une dichos puntos es de la forma: $y = y_1 = y_2$.

Se puede utilizar la fórmula de pendiente conociendo dos puntos, dado que en este caso se anula el numerador, eso implica que el cociente es cero. Si la pendiente (o inclinación) de la recta es nula significa que, geométricamente visto, es una recta paralela al eje de abscisas (o eje *x*). Vemos el ejemplo que sigue.

Ejemplo 6:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos *M* = (1; 2) y *S* = (-1; 2).

Solución

A partir de la fórmula anterior, la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0 \qquad \begin{cases} M = (1; 2) \\ S = (-1; 2) \end{cases}$$

Notar que es si bien en la fórmula inicial llamamos *P* y *Q* a los puntos datos, esta denominación es indistinta para la utilización de la fórmula, dado que lo que es importante en su utilización es no alterar sus correspondientes reemplazos. (Si llamamos *P* a lo que ahora es *M,* respetamos los valores en el orden de su reemplazo de x_1 e y_1 , y así sucesivamente).

La ecuación es:

$$y = 0.\, x + b$$

$$y = b$$

Para hallar "*b*" reemplazamos uno de los puntos dato, por ejemplo *M*.

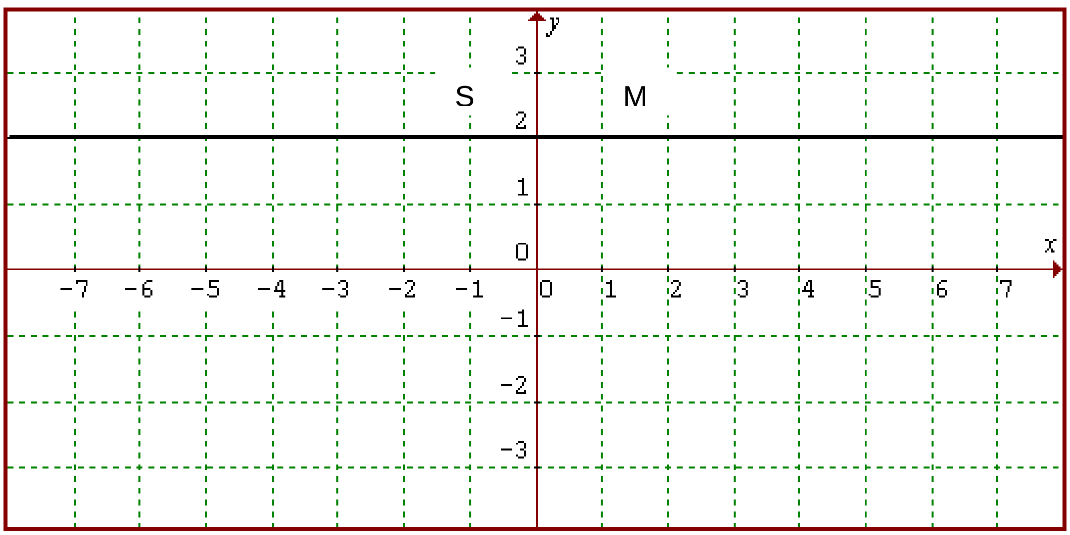
$$2 = 0.1 + b$$

$$2 = b$$

Finalmente la ecuación de la recta pedida es:

$$\boxed{y = 2}$$

La gráfica es:



La ecuación **general** de la recta es de la siguiente forma:

$$\boxed{A\,x + B\,y + C = 0}$$

(A, B y C son números reales, A y B, no simultáneamente nulos)

Ejemplo 7:

Al representar la ecuación $2x - 3y + 1 = 0$ se puede completar una tabla de valores y, ubicando en el plano los puntos obtenidos, se obtendrá la gráfica. Es conveniente llevar la ecuación original a la forma explícita para operar con comodidad en la tabla. Observar el encabezado de la segunda columna con el despeje ya efectuado.

x	$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$
- 1	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	0

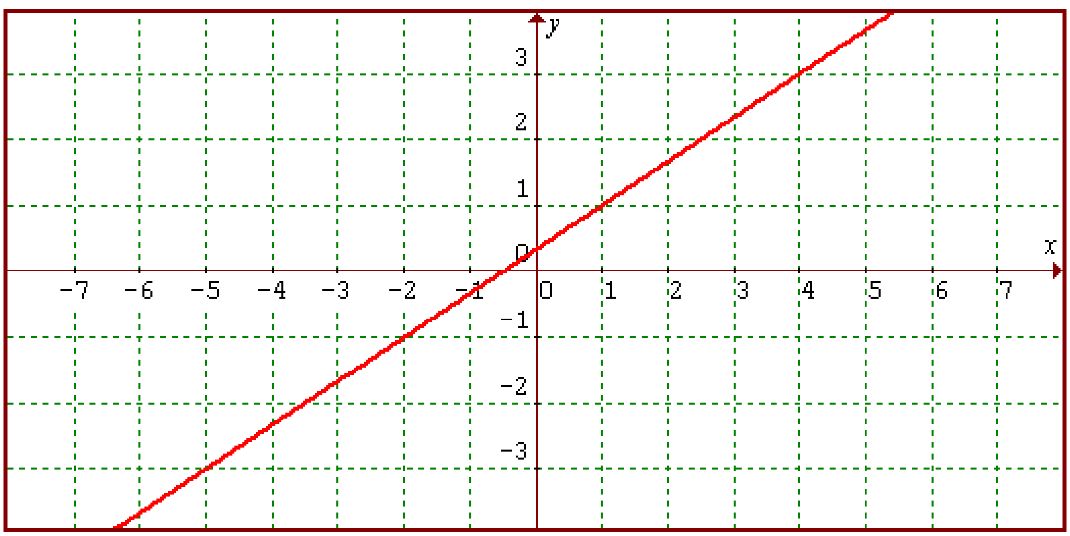
$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$2x + 1 = 3y$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = y$$

$$ó \qquad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

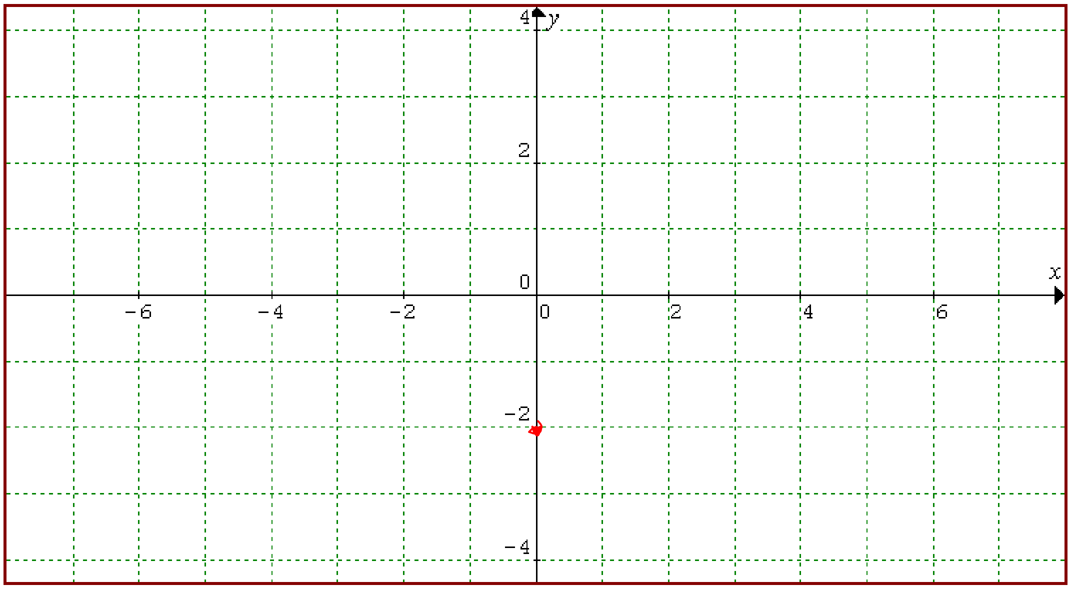
La representación gráfica es:



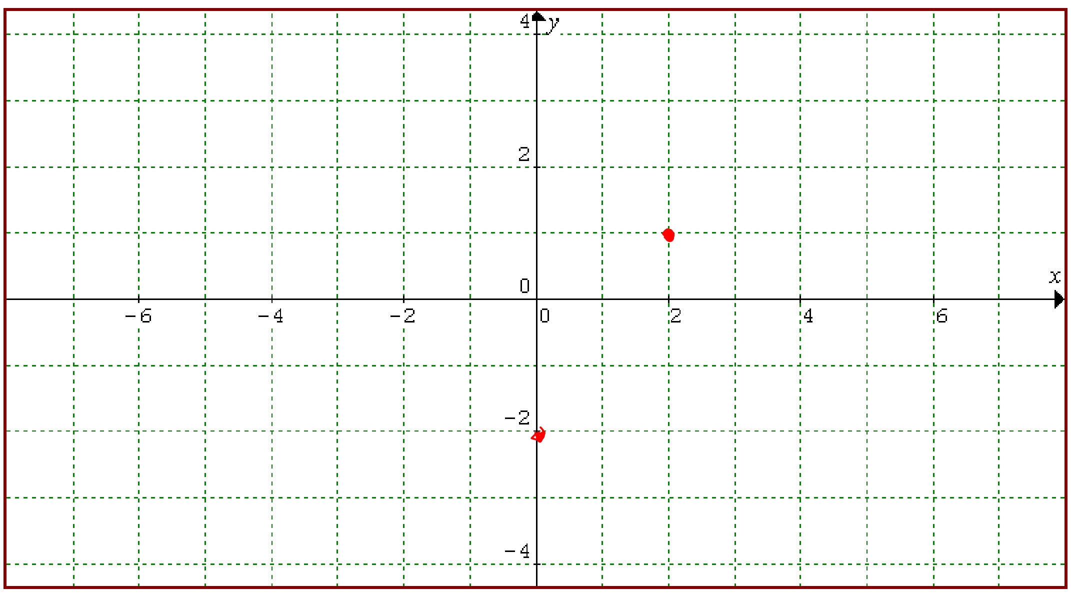
Ejemplo 8:

Para graficar la recta de ecuación $y = \frac{3}{2}x - 2$ utilizando como datos la pendiente $\frac{3}{2}$ y la ordenada al origen (-2), se procede así:

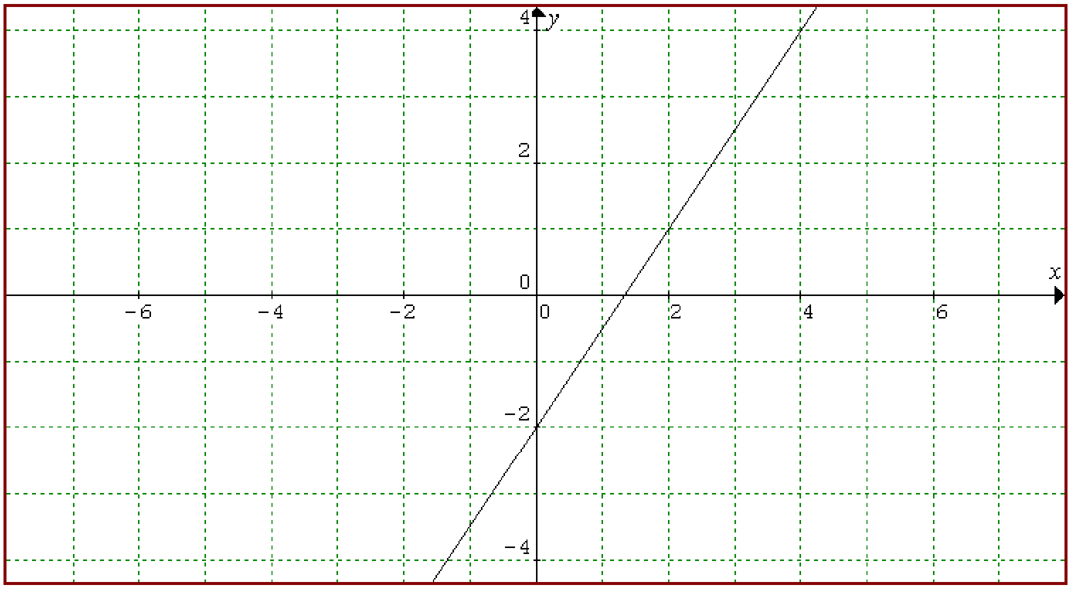
1°. Marcar sobre el eje de y la ordenada al origen.



2°. A partir de ese punto avanzar dos unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba, y marcar el punto (2; 1).



3°. Trazar la recta uniendo los dos puntos marcados.



Tema 2: Determinación de la recta conociendo diferentes datos

a) Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

La ecuación **explícita** de la recta es de la forma:

$$y = m\,x + b$$

pendiente

ordenada al origen

Si se tienen como datos m y un punto cualquiera $P = (x_1\,;\,y_1)$, se reemplaza en la fórmula por el valor de m, y luego se obtiene la ordenada al origen “b” utilizando las coordenadas del punto (Ver ejemplo 4 y el ejemplo 8).

Ejemplo 1:

Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto (3; 1).

Solución

$$\left.\begin{aligned} y &= 2.\,x + b \\ 1 &= 2.\,3 + b \\ 1 - 6 &= b \\ -5 &= b \end{aligned}\right\}$$

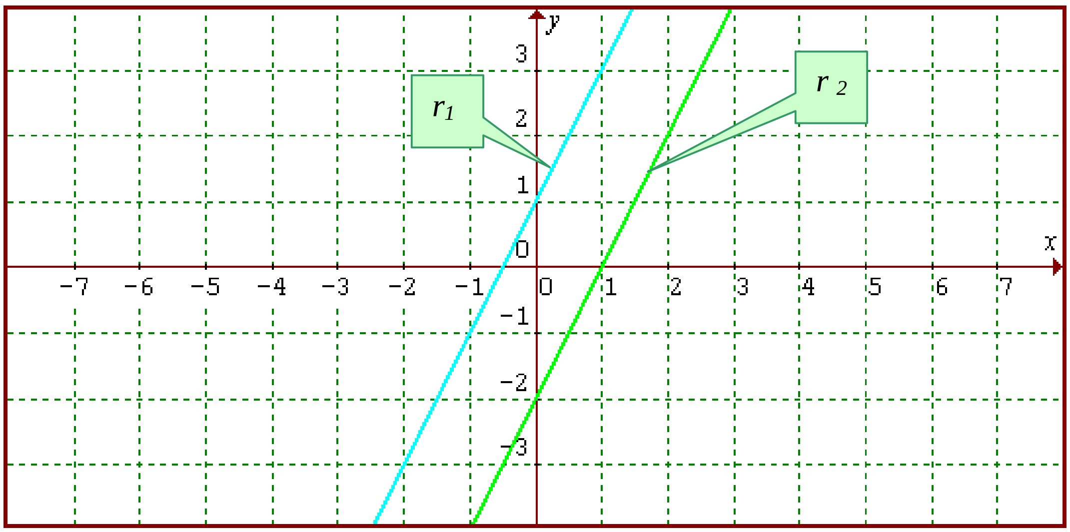
La recta es $y = 2\,x - 5$

b) Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Se utiliza la fórmula dada en los ejemplos 4, 5 y 6 del tema anterior, y se procede según la explicación dada.

c) Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.



Las rectas r_1 e r_2 de la figura anterior tienen pendiente m_1 y m_2 respectivamente. Si son paralelas entonces $m_1 = m_2$.

Ejemplo 2:

Hallar la ecuación de la recta paralela a y = -2 x + 1 que pasa por el punto (1; 1).

Solución

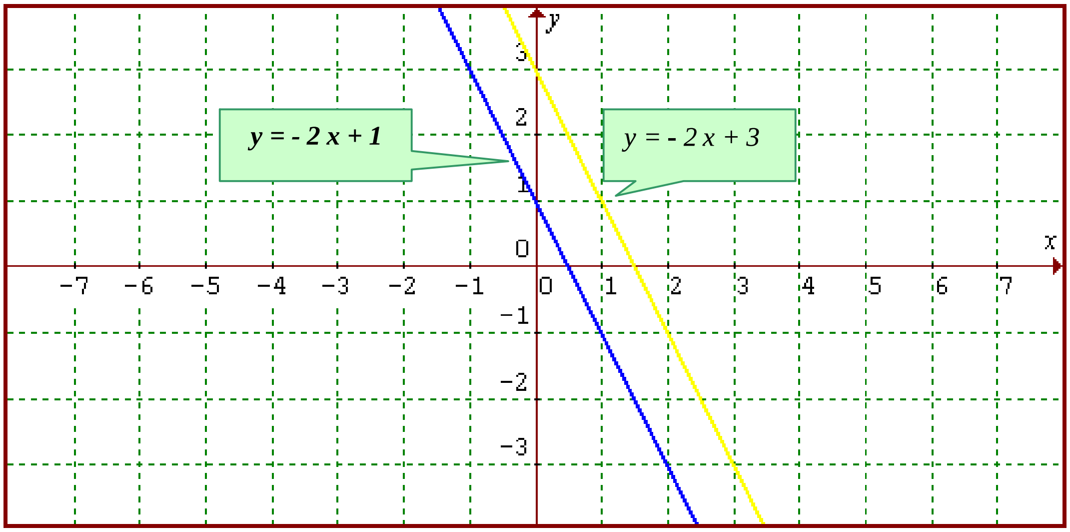
Puesto que las rectas deben ser paralelas, la recta que se busca tiene igual pendiente que la dada, es decir $m_1 = m_2 = -2$.

Completando el valor de la pendiente en la ecuación explícita y reemplazando el punto dato, resulta:

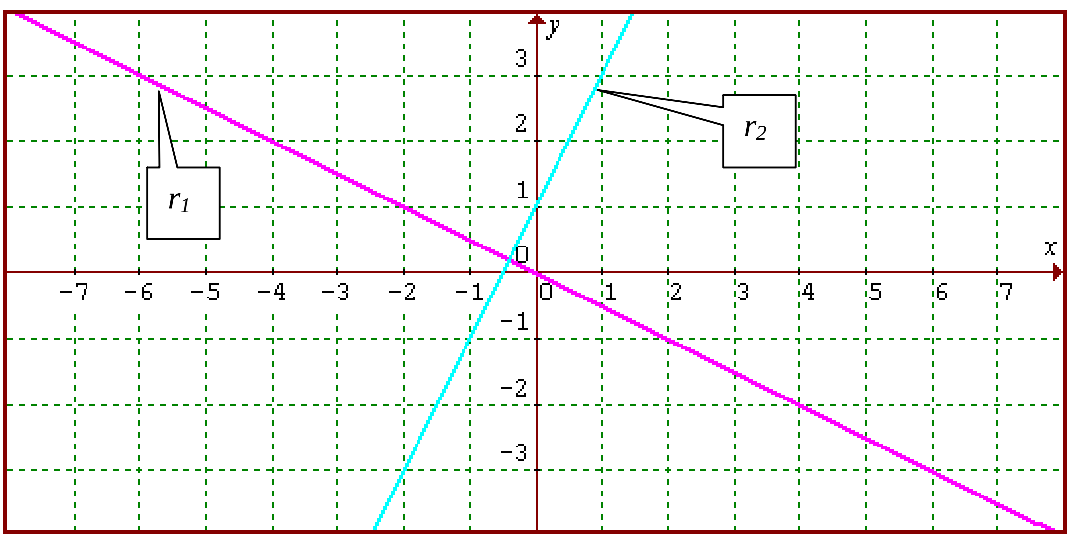
$$\left.\begin{aligned} y &= -2.\,x + b \\ 1 &= -2.1 + b \\ 1 + 2 &= b \\ 3 &= b \end{aligned}\right\}$$

La recta es $y = -2x + 3$

Ilustramos gráficamente:



Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 . m_2 = -1$.
Una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una vertical (pendiente no definida).



Ejemplo 3:

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = -2x + 1$ que pasa por el punto (2; 1).

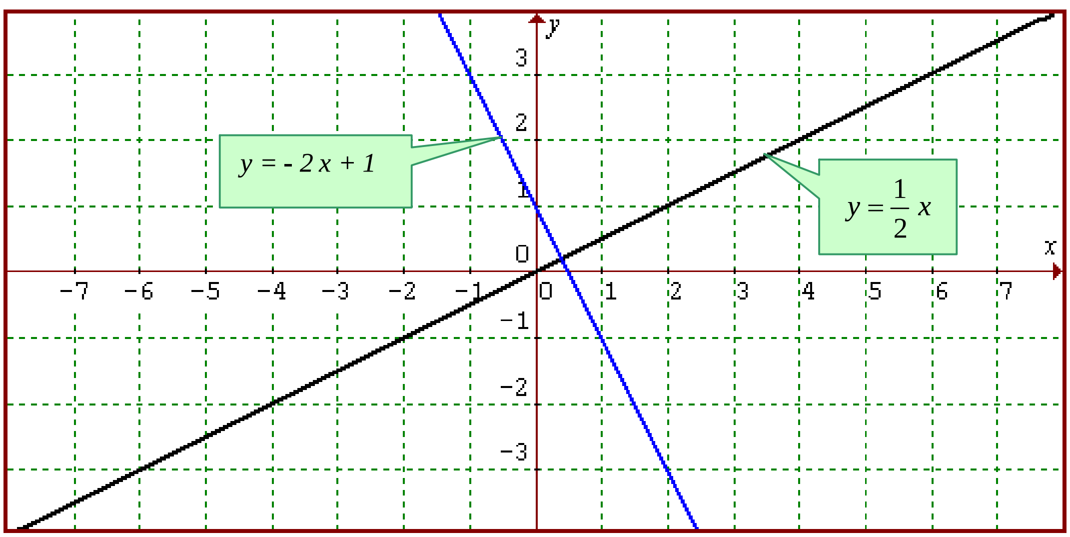
Solución

Puesto que las rectas deben ser perpendiculares, la recta que se busca tiene pendiente $m_2 = \frac{1}{2}$.

Completando el valor de la pendiente en la ecuación explícita y reemplazando el punto dato, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}.\, x + b \\ 1 = \frac{1}{2}.\, 2 + b \\ 1 - 1 = b \\ 0 = b \end{array}\right\}$$

La recta es $y = \frac{1}{2}\, x$



Ejercicio 1) Obtener la ecuación de la recta que cumple con la condición pedida en cada caso. Graficarlas en un sistema de ejes cartesianos.

a) Pasa por (2; 3) y su pendiente es 1
b) Pasa por (-2; 4) y su pendiente es –1
c) Pasa por (1; 7) y su pendiente es 2/3
d) Pasa por (-3; -5) y su pendiente es –7/2
e) Pasa por (2; 1) y (1; 6)
f) Pasa por (-1;-2) y (4; 3)
g) Pendiente 3; intersección eje de ordenadas en –2.
h) Pendiente 2/5; intersección eje de ordenadas en 4.
i) Intersección con el eje de ordenadas en –3 y con el eje de abscisas en 1.
j) Intersección con el eje de ordenadas en 6 y con el eje de abscisas en - 8.
k) Pasa por (4; 5); paralela al eje x.
l) Pasa por (4; 5); paralela al eje y.
m) Pasa por (1; -6); paralela a la recta $x + 2y = 6$.
n) Intersección eje de ordenadas en 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.
o) Pasa por (-1; 2); paralela a la recta $x = 5$.

Ejercicio 2) Utilizando el concepto de pendiente determinar si los siguientes puntos pertenecen a la misma recta:

a) (1; 1), (3; 9), (6; 21)
b) (-1; 3), (1; 7), (4; 15)

1)

a) $y = x + 1$ b) $y = -x + 2$ c) $y = \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$

d) $y = -\frac{7}{2}x - \frac{31}{2}$ e) $y = -5x + 11$ f) $y = x - 1$

g) $y = 3x - 2$ h) $y = \frac{2}{5}x + 4$ i) $y = 3x - 3$

j) $y = \frac{3}{4}x + 6$ k) $y = 5$ l) $x = 4$

m) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$ n) $y = -\frac{2}{3}x + 6$ o) $x = -1$

2) a) Sí b) No

Ejercicio 3) Obtener la ecuación de la recta que cumple con la condición pedida en cada caso.

a) Pasa por (2; 6); paralela a la recta *y = 1.*
b) Pasa por (-1; -2); perpendicular a la recta *2 x +5 y +8 =0.*
c) Pasa por (1; 7); paralela a la recta que pasa por (2; 5) y (-2; 1).

Ejercicio 3) Obtener la ecuación de la recta que cumple con la condición pedida en cada caso.

a) Pasa por (2;6); paralela a la recta y =1

por ser paralela a y=1 entonces m =0, por lo tanto y = 0.x+b
como pasa por (2;6) : 6 = 0.2 + b $\rightarrow$ b = 6, por lo tanto, $\boxed{y = 6}$

b) Pasa por (-1;-2); perpendicular a la recta 2x + 5y + 8 =0

2x + 5y + 8 =0 $\rightarrow$ 5y = -2x – 8 $\rightarrow$ y = $-\frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$

entonces, la pendiente de la recta pedida es m = 5/2 $\rightarrow$ $y = \frac{5}{2}x + b$

como pasa por (-1;-2) : -2 = $-2 = \frac{5}{2}(-1) + b$ $\rightarrow$ b = 1/2 $\rightarrow$ $\boxed{y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}$

c) Pasa por (1;7); paralela a la recta que pasa por (2;5) y (-2;1)

Obtenemos m **=** $\frac{1-5}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1$ $\rightarrow$ y = 1.x + b

Como pasa por (1;7) : 7 = 1 + b $\rightarrow$ b = 6 $\rightarrow$ $\boxed{y = x + 6}$