Número combinatorio. Binomio de Newton

**1.** Verifique las siguientes igualdades:

a) $n!+(n+1)!=(n+2).n!$ b) $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!}=n.n!$

c) $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$ d) $\dbinom{n}{k}+\dbinom{n}{k-1}=\dbinom{n+1}{k}$

**2.** a) Desarrolle la expresión $\left(3x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$

b) Calcule el $T_8$ en el desarrollo de $\left(a^{-2}+2a^3\right)^{12}$

c) Calcule el $T_4$ en el desarrollo de $\left(4x^5+\dfrac{2}{5}x^2\right)^9$

d) Halle el coeficiente de $p^4q^7$ en el desarrollo de $(p+q)^{11}$

e) Halle el coeficiente de $x^7$ en el desarrollo de $\left(x^2+\dfrac{2}{x^3}\right)^{16}$

f) Hallar el o los términos centrales de $\left(ab+\dfrac{1}{2b^2}\right)^{16}$

g) Halle el o los términos centrales de $\left(2x^2y+\dfrac{3}{xy^2}\right)^{13}$

h) Determine el valor de x sabiendo que el término central en el desarrollo de $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^8$ resulta igual a 70

i) Halle el término independiente de x en el desarrollo de $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3}{2x}\right)^{10}$

j) Determine el valor de n si en el desarrollo de $\left(\dfrac{2}{x}+x\right)^n$ el quinto término es de grado 0.

k) Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(3x^5+\dfrac{9}{x^2}\right)^{11}$.

Aclaración: en las respuestas a este ejercicio, se consideró la expresión $T_{k+1}=\dbinom{n}{k}a^k b^{n-k}$ como el k - ésimo término del desarrollo del binomio $(a + b)^n$

Conteo

**3.** ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 5, 7 y 9 con la condición de que:
a) todas las cifras sean distintas?
b) todas las cifras sean iguales?
c) el número obtenido sea par?
d) el número obtenido sea capicúa?

**4.** Hay cinco caminos desde la base hasta la cumbre de una montaña. ¿De cuántas maneras puede hacerse el camino de ascenso y descenso? ¿De cuántas, si el ascenso y el descenso se hacen por caminos distintos?

**5.** Hasta mediados del año 2016, el número de patente de un automóvil estaba formado por una sucesión de tres letras y tres números. Actualmente, está en vigencia el sistema de patentes del Mercosur, en el que cada placa se identifica por el país de origen del automóvil (Argentina, Uruguay, Venezuela, Brasil, Paraguay) y una sucesión alfanumérica formada por dos letras seguidos de tres números (del 0 al 9) y dos letras. Considerando que el alfabeto tiene 26 letras, ¿Cuántas patentes se pueden obtener en cada uno de los sistemas?

**6.** En la memoria principal de una computadora, la información se almacena en celdas de memoria. Cada celda tiene asignado un único nombre, llamado dirección. Una dirección se presenta como una lista ordenada de ocho símbolos 0 ó 1. Esta lista se denomina byte.
a) ¿Cuántos bytes existen?
b) ¿Cuántos bytes comienzan y terminan con uno?
c) ¿Cuántos bytes tiene exactamente un cero?
d) ¿Cuántos bytes comienzan con 11000?
e) ¿Cuántos comienzan o terminan con uno?

**7.** En el primer piso de una empresa trabajan 30 hombres y 16 mujeres. En el segundo piso, trabajan 25 hombres y 33 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de tres personas, dos hombres y una mujer, si:
a) todas las personas del equipo deben pertenecer al mismo piso?
b) la mujer debe pertenecer al segundo piso?
c) debe haber un hombre de cada piso?

**8.** Calcule el número de ubicaciones distintas de 6 libros diferentes de Matemática Discreta, 4 diferentes de Álgebra y 3 diferentes de Programación en un estante de modo que:
a) los textos de una misma asignatura deben estar juntos,
b) sólo deben estar juntos los de Matemática Discreta.

**9.** ¿Cuántos anagramas (aún sin sentido) se pueden formar permutando las letras de la palabra ESTRATEGIA? ¿En cuántos de ellos aparecen juntas todas las vocales?

**10.** ¿Cuántos anagramas de seis letras se pueden formar permutando las letras de la palabra DISCRETA?¿En cuántos de ellos están juntas todas las consonantes?

**11.** ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas mayores que 1000 y menores que 3000 se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 6, 7, 9?

**12.** De una caja que contiene 123 bolillas numeradas de 1 a 123 se extraen cinco bolillas. ¿Cuántos resultados posibles hay si:
a) las bolillas se extraen una a la vez, sin reposición?

b) las bolillas se extraen todas juntas?
c) las bolillas se extraen devolviendo cada una al bolillero, es decir, con reposición?

**13.** Con 8 letras entre las cuales hay varias “a” se pueden formar 336 “palabras” de 8 letras. Si se sabe que el resto de las letras son distintas, ¿cuántas “a” hay?

**14.** Se consideran diez puntos en el plano no alineados de a tres. ¿Cuántos triángulos con vértices en esos puntos quedan determinados? ¿Cuántas rectas quedan determinadas?

**15.** El mazo de póquer consta de 52 cartas de cuatro palos (tréboles, diamantes, corazones y espadas). Cada uno de ellos tiene trece denominaciones: as, jack, reina, rey y del 2 al 10. Si se extraen cinco cartas del mazo:
a) ¿de cuántas maneras es posible hacerlo?
b) ¿de cuántas formas pueden extraerse si todas tienen que ser espada?
c) ¿de cuántas maneras es posible hacerlo si todas las cartas tienen que ser del mismo palo?
d) ¿de cuántas maneras se pueden extraer si por lo menos dos deben ser ases?

**16.** Entre diez ingenieros y ocho abogados debe elegirse una comisión de cinco miembros formada por más ingenieros que abogados. ¿De cuántas formas diferentes puede elegirse la comisión?

**17.** Si A es un conjunto con n elementos y P(A) es el conjunto de partes de A, ¿cuántos elementos tiene P(A)?

**18.** Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}. B = {2, 4} y C = {4, 6}. ¿Cuántos números de seis cifras pueden formarse con la condición de formarse con la condición de que las tres primeras cifras pertenezcan a A U C y las tres últimas al conjunto A - B?

## Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 2)k. Hallar el coeficiente del término de grado 6 en el desarrollo de $\left(3x^5 + \frac{9}{x^2}\right)^{11}$.

El término general en el desarrollo de este binomio es $T_{k+1} = \binom{11}{k}(3x^5)^k . \left(\frac{9}{x^2}\right)^{11-k}$ Para obtener el término de grado 6, debemos trabajar con las potencias de x:

$$T_{k+1} = \binom{11}{k}(3x^5)^k . \left(\frac{9}{x^2}\right)^{11-k} = \binom{11}{k} 3^k\, x^{5k} . \frac{9^{11-k}}{x^{2.(11-k)}}$$

$$= \binom{11}{k} 3^k . 9^{11-k}\, x^{5k}\, x^{-22+2k} = \binom{11}{k} 3^k . 9^{11-k}\, x^{7k-22}$$

Para obtener el término de grado 6, debemos igualar a 6 el exponente de x. Es decir, $7k - 22 = 6 \rightarrow k = 4$. El coeficiente pedido es el número que multiplica a x para el valor de k hallado. Es decir: $\binom{11}{4} 3^4 . 9^7$

Ejercicio 8

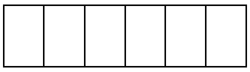
Calcule el número de ubicaciones distintas de 6 libros diferentes de Matemática Discreta, 4 diferentes de Álgebra y 3 diferentes de Programación en un estante de modo que:

a) los textos de una misma asignatura deben estar juntos,

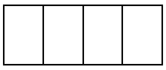
b) sólo deben estar juntos los de Matemática Discreta.

Respuesta

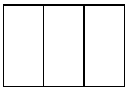
a) Si queremos que lis libros de una misma asignatura tienen que estar juntos, podemos agruparlos en “bloques”, de manera tal que tendríamos tres “bloques”: el bloque formado por los 6 libros de Matemática Discreta, el bloque formado por los libros de álgebra y el de los libros de Programación:



Bloque 1: 6 libros de Matemática Discreta



Bloque 2: 4 libros de Álgebra



Bloque 3: 3 libros de Programación

Los tres bloques los podemos ubicar de 3! Maneras. Pero dentro del primer bloque, tenemos 6! Maneras de ordenar los libros de Matemática Discreta; en el segundo bloque los libros de Álgebra pueden estar ordenados de 4! Formas posibles y los libros de Programación los podemos ordenar de 3! Formas. Por lo tanto, el número de formas distintas en que podemos ubicar los libros de modo tal que los de una misma asignatura estén juntos es 3!. 6!. 4!. 3!

b) Si queremos que estén juntos los de Matemática Discreta, los agrupamos en bloque. Luego, tenemos que permutar 8 objetos: el bloque de Matemática Discreta y los 7 libros restantes (que no necesariamente tienen que estar juntos). El total de posibilidades es 8!. 6! (6! son todos los posibles ordenamientos de los libros de Matemática Discreta dentro del bloque).

Ejercicio 15

El mazo de póquer consta de 52 cartas de cuatro palos (tréboles, diamantes, corazones y espadas). Cada uno de ellos tiene trece denominaciones: as, jack, reina, rey y del 2 al 10. Si se extraen cinco cartas del mazo:

a) ¿de cuántas maneras es posible hacerlo?

b) ¿de cuántas formas pueden extraerse si todas tienen que ser espada?

c) ¿de cuántas maneras se pueden extraer si por lo menos dos deben ser ases?

d) ¿de cuántas maneras es posible hacerlo si todas las cartas tienen que ser del mismo palo?

Lo importante de este ejercicio es tener en cuenta que, cuando extraemos cartas de un mazo, no nos importa el orden en que sacamos las cartas. Nos interesa qué cartas sacamos (y no el orden en que las obtuvimos. Por lo tanto, utilizamos números combinatorios.

a) De un mazo de 52 cartas, queremos contar la cantidad de maneras de elegir 5 de ellas. Como el orden no nos interesa, la cantidad de maneras de hacerlo es $\binom{52}{5}$

b) Si nos quedamos únicamente con las cartas de espada, hay $\binom{13}{5}$ maneras de asegurarnos que todas las cartas extraídas sean de ese palo.

c) Sacar por lo menos dos ases significa que entre las cinco cartas tiene que haber dos o más ases. Tenemos que considerar casos diferentes para no contar demás: un primer caso sería sacar exactamente dos ases; otra posibilidad es sacar exactamente tres ases y, por última, considerar los casos en que sacamos exactamente cuatro ases. Contemos cuántas posibilidades hay en cada caso y luego sumemos los resultados obtenidos:

- Exactamente dos ases: $\binom{4}{2}\binom{48}{3}$

  De los cuatro ases, elegimos dos

  De las 48 cartas que NO son ases, elegimos tres

- Exactamente tres ases: $\binom{4}{3}\binom{48}{2}$

  De los cuatro ases, elegimos tres

  De las 48 cartas que NO son ases, elegimos dos

- Exactamente cuatro ases: $\binom{4}{4}.\binom{48}{1}$

El número total de extracciones en las que obtenemos por lo menos dos ases es

$$\binom{4}{2}\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\binom{48}{2}+\binom{4}{4}.\binom{48}{1}$$

d) Si las cinco cartas que extraemos tienen que ser todas del mismo palo, tenemos cuatro casos posibles: son todas tréboles o son todas diamantes o son todas corazones o bien todas espadas. Para asegurarnos que las 5 cartas sean, por ejemplo tréboles, separamos las trece cartas de este palo del mazo y elegimos 5: Hay en total $\binom{13}{5}$ posibilidades.

En consecuencia, como tenemos cuatro posibilidades distintas de que todas las cartas sean del mismo palo, el número total de casos es $\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} = 4.\binom{13}{5}$