Ejercicios para practicar para el final de Álgebra y Geometría Analítica

Trabajo Práctico 1

1. Sea el conjunto $M=\left\{z\in C/\operatorname{Re}(iz)-2[\operatorname{Im}(z)]^2-2\operatorname{Re}(z^2)\geq -i^{38}\right\}$
   a. Graficar el conjunto M.
   b. Indicar si alguna de las raíces de la ecuación $z^4-8iz=0$ pertenece al conjunto M. Justificar.

2. Sea el conjunto $N=\left\{z\in C/\left|z-2-i\right|<2,\ \left|z-i\right|>1\right\}$
   a. Graficar el conjunto N.
   b. Sea el polinomio $p(t)=t^3-4t^2+13t$. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
      "Todas las raíces de p(t) pertenecen al conjunto N"
   c. Hallar la expresión del único polinomio s(t) de grado dos con coeficientes reales que tiene a t= - 2i como raíz y verifica s(1) = 4.
   d. Sea el polinomio q(t) = p(t) . s(t), escribir su descomposición factorial en C[t].

Trabajo Práctico 2

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & k-1\\ -1 & k & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, se pide:
   a. Hallar todos los valores de $k\in R$ para los cuales la matriz $A.B$ resulta inversible.
   b. Considerar $k=1$ en la matriz A del ítem a. y calcular, utilizando propiedades, el determinante de la matriz $C=\frac{1}{2}A^T.B^5$.

2. Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$, se pide:
   a. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando adecuadamente:
   "Si $A=M^T.N$, siendo la matriz $N\in R^{3x3}$ tal que $\det(N)=7$, $X\in R^{3x1}$, el sistema $A.X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ tiene única solución."

b. Hallar todos los valores de $m \in R$ para los cuales $X = \begin{pmatrix} -m-1 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $M.X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix}$

Trabajo Práctico 3

1. Dados el plano $\alpha: \ 3x - 2y + z = 5$ y la recta $r: \ \dfrac{x-3}{2} = y - 2 = z$, se pide:
    a. Hallar el punto P que resulta de la intersección entre el plano α y la recta r.
    b. Sea el plano $\beta: \ x + y - 2z = 0$. Hallar el punto del plano β más próximo a P.
2. Sea el subespacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, x + y = 0\}$
    a. Dar una base y la dimensión del subespacio S. Graficar S.
    b. Hallar el simétrico del punto $A = (1,0,0)$ respecto del complemento ortogonal de S.

Trabajo Práctico 4

1. Sea $T: R^3 \to R^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, -2x_1 + 6x_2, 0)$
    a. Dar una base del conjunto Im(T). Graficar Im(T).
    b. Determinar los valores de a y b reales tales que el vector $(-a + b,\ a + b,\ b)$ pertenezca al Nu(T).
2. Sean $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal que verifica T(1, 0, 0) = (3, 0, 0), T(0, 1, 0) = (0, 1, 1), T(0, 0, 1) = (1, -1, 1) y $A \in R^{3x3}$ la matriz asociada a la transformación lineal en la base canónica de R^3.

    a. Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
    b. Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

    "El subespacio generado por los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 3$ es una recta en R^3"

Trabajo Práctico 5

1. Dada la superficie cuádrica de ecuación $z + 1 = 9x^2 + y^2$, se pide:
    a. Determinar sus intersecciones con los planos coordenados y con el plano z=8. Representar gráficamente cada intersección sobre el correspondiente plano. Identificar la superficie.
    b. Determinar si el punto de intersección entre la superficie dada y el eje z pertenece al plano de ecuación $x - 3y - z = 1$.
2. Dada la cónica de ecuación $4x^2 - y^2 + 6y + 8x = 6$ se pide:
    a. Expresarla en forma canónica, identificarla y representarla gráficamente.

b. Sea C el centro de la cónica dada. Hallar la distancia del punto C a la recta de ecuación $s:\ \overline{X} = (0,1) + t(1,1),\quad t \in R$.