## Álgebra matricial

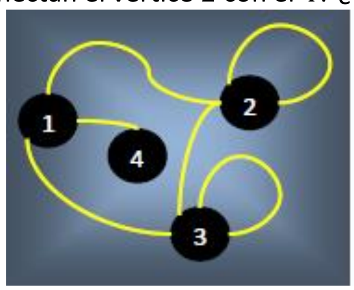
Para resolver los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de matriz, las operaciones entre matrices (suma, producto), producto de un escalar por una matriz así como también la definición de matriz traspuesta, traza de una matriz, cálculo y propiedades del determinante de una matriz, la definición y cálculo de la inversa de una matriz.

**1.** Los diagramas de redes de interconexión o grafos son una descripción gráfica como la que se muestra en la siguiente figura. Todo grafo de puede representar mediante una matriz de adyacencia $A$, cuyo orden es el número de nodos y cuyo elemento de la fila $i$ columna $j$ es $1$ si una línea conecta el nodo $i$ con el nodo $j$, mientras que es $0$ en caso contrario.

a. Determinar la matriz de adyacencia del grafo dado.

b. Si la matriz $A^n$ en la posición $ij$ indica la cantidad de caminos de longitud $n$ que conectan el nodo $i$ con el nodo $j$.

¿Cuántos caminos de longitud dos conectan el vértice $2$ con el $4$? ¿Cuáles son?




**2.** Para las unidades de tres alimentos, la siguiente matriz indica los correspondientes contenidos de vitaminas en unidades apropiadas

| Vitaminas / Alimentos | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0 |
| **2** | 0,3 | 0,1 | 0 | 0,3 |
| **3** | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,1 |

a. ¿Qué alimento no contiene vitamina C? ¿Y vitamina D? ¿Qué alimento contiene igual cantidad de vitamina A y D?

b. ¿Cuánto se consume de cada tipo de vitamina si se comen 4 unidades del alimento 1; 5 unidades del alimento 2 y 12 unidades del alimento 3?

c. Si sólo se paga por el contenido vitamínico de cada alimento y se han abonado respectivamente 15 unidades monetarias (u.m.), 10 u.m., 18 u.m. y 20 u.m. por las unidades de las cuatro vitaminas, ¿Cuánto cuesta la unidad de cada tipo de alimento?

**3.** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\in\Re^{2x3}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\in\Re^{3x2}$ realizar, si es posible, las siguientes operaciones:

a. $2A$

b. $A + B$

c. $A + B^T$

d. $A^T - 3B$

e. $A.B$ Calcular $tr(A.B)$

f. $B.A$ Calcular $tr(B.A)$

Nota: Podrán comprobar los cálculos realizados utilizando la aplicación gratuita para móviles EDITEX-Matemáticas-Determinantes,

Matrices (Sólo Android)

https://es.symbolab.com/

**4.** Calcular los valores de $x, y$ de modo tal que se verifique la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 3x & 2 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$$

**5.** Calcular el determinante de las siguientes matrices.

a. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

**6.** Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $det(A) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3k & 1 & 2 \\ 0 & k^2 - 4 & 3 \\ 0 & 0 & k^3 - 2k - 1 \end{pmatrix}$.

**7.** Propiedades del determinante

a. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ se pide calcular los siguientes determinantes: $det(A)$, $det(B^T)$, $det(A.B)$, $det(2A)$, $det(A^{10})$, $det(A^5.B - A^5)$.

b. Si $A, B \in \mathbb{R}^{3\,x\,3}$ tales que $det(A) = -3$, $det(B) = 5$, calcular $det(2A^2.B^T)$

**8.** i. Decidir si las siguientes matrices son inversibles.
ii. En caso afirmativo, hallar la matriz inversa.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d. $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

**9.** Sean $A$ y $B$ las matrices del ejercicio 7. Hallar todas las matrices $X \in R^{3x3}$ tales que verifican cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

i. $AX = B$
ii. $XA = 4A + 2B$

**10.**

a. Demostrar que si $A$ es una matriz inversible, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.
b. Demostrar que si $A$ es una matriz inversible de orden $n$ y $B$ es una matriz de orden $n$, $det(A^{-1}.B.A) = det(B)$
c. Demostrar que si $A$ y $B$ son matrices inversibles, $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
d. Demostrar que el producto de dos matrices regulares es regular.
e. Demostrar que el producto de matrices singulares es singular.

Sistemas de ecuaciones lineales
Aplicaciones

Para resolver los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales, su clasificación según la cantidad de soluciones, la definición de espacio nulo y un método para su resolución.

**11.** Juan junta monedas de 25 y 50 centavos. Tiene 75 monedas y un total de 30$. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

**12.** Determinar todos los $X \in R^2$ tales que $AX = B$, con $A \in R^{nx2}$, $B \in R^n$ y clasificar cada sistema según la cantidad de soluciones que posee. Representar gráficamente usando GeoGebra cada ecuación del sistema e interpretar geométricamente.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

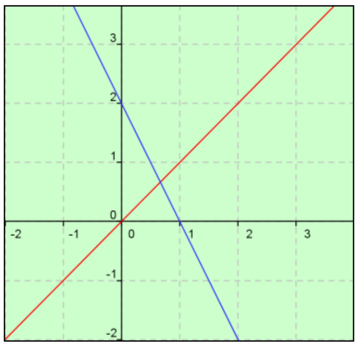
c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

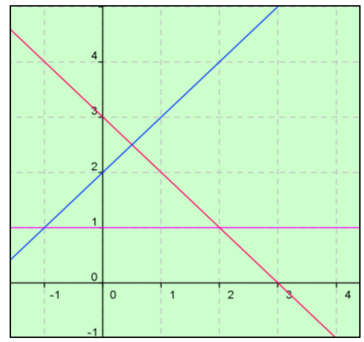
e. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 6\\ -3\end{pmatrix}$

**13.** Proponer, siempre que sea posible, una matriz $A \in R^{nx2}$ y una matriz $B \in R^{n}$ tal que el sistema lineal $AX = B$, con $X \in \mathrm{R}^2$, tenga una interpretación geométrica consistente con los gráficos que se dan a continuación. Hallar, en cada caso, el conjunto solución.

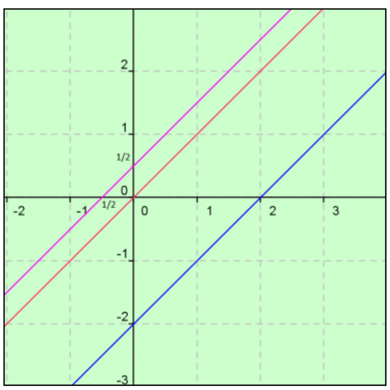
a.




b.




c.




**14.** i. Determinar todos los $X \in R^{m}$ tales que $AX = B$, con $A \in R^{nxm}$, $B \in R^{n}$. Clasificar cada sistema según la cantidad de soluciones que posee.

ii. Hallar, en cada caso, el espacio nulo de $A$. Observar que en los sistemas compatibles las soluciones se obtienen como $X = X_0 + X_N$, donde $X_N$ pertenece al espacio nulo de $A$ y $X_0$ es una solución particular del sistema $AX = B$.

a. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 16\\ 9\end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Para los problemas 17 a 20 te pedimos que en cada caso realices las siguientes indicaciones:

- La identificación de las variables del problema
- El sistema de ecuaciones que surge del problema

- La matriz ampliada
- La respuesta del problema

**15.** Una compañía de transporte de sustancias alimenticias tiene 19 camiones, los cuales son de tres tipos: A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de dos clases de alimentos (tipo I y tipo II).
Los camiones del tipo A pueden transportar dos toneladas del alimento I, los camiones del tipo B pueden transportar una tonelada de cada clase de alimento y los camiones de tipo C pueden transportar una tonelada del alimento I y dos toneladas del alimento II.
La empresa debe transportar 32 toneladas del alimento I y 10 del alimento II. Determinar cuántos camiones de cada tipo se requieren para transportar todo el pedido, suponiendo que cada camión debe ir con la carga completa.

**16.** Un carpintero ha aceptado el encargo de construir alacenas, escritorios, mesas y sillas. Para ello cuenta con tres máquinas.
Producir una alacena requiere una hora de uso de la máquina uno, dos horas de uso de la máquina dos y una hora de la máquina tres.
Para producir un escritorio, se requieren dos horas de la máquina uno y dos horas de la máquina tres.
Producir una mesa requiere una hora de uso de la máquina uno, una hora de la máquina dos y tres horas de la máquina tres.
Para producir una silla se requieren dos horas de la máquina uno y una hora de la máquina dos.
Determinar cuántas unidades de cada mueble puede fabricar el carpintero en un día de ocho horas, suponiendo que cada máquina se utiliza ocho horas corridas.

**17.** Una fábrica produce 3 artículos, A, B y C, que son procesados por 3 máquinas, I, II y III.
Una unidad del artículo A requiere 2 horas de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 3 horas en la máquina III.
Una unidad del artículo B requiere una hora en cada máquina.
Una unidad del artículo C requiere 1 hora de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 4 horas en la máquina III.
Se dispone de la máquina I por 68 horas, de la máquina II por 53 horas y de la máquina III por 146 horas.
¿Cuántas unidades de cada artículo deberán producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas?

**18.** María viajó a Europa y visitó Barcelona, Roma y Paris.
En Barcelona gastó 25 euros diarios en hospedaje y 30 euros por día en alimentos;
En Roma gastó por día 30 euros en hospedaje y 15 euros por día en alimentos;
En Paris gastó por día 40 euros en hospedaje y 45 euros en alimentos.
María estima que, por conceptos varios, gastó 20 euros diarios en cada una de las tres ciudades.
A su regreso, el registro de gastos indicaba en total, 485 euros en hospedaje, 480 euros en alimentos y 300 euros en gastos varios. Calcular cuántos días estuvo el turista en cada una de las tres ciudades.

**19.** Hallar, si existen, los valores de $k \in R$ de modo tal que el siguiente sistema de ecuaciones lineales resulte:

a. compatible determinado
b. compatible indeterminado
c. incompatible

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -x + ky = 0 \end{cases}$$

**20.** Analizar y clasificar (según su conjunto solución) el sistema de ecuaciones dado para todos los valores reales de $k$

a. $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ (k^2-1)y + (k+1)z = 1 \\ kx + (k^2+2)y + z = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - ky - z = -1 \\ -kx + 2y = 2 \\ -2x + (k-1)y + 4z = 0 \end{cases}$

Nota: A continuación, encontrarás la resolución de este ejercicio.

Algunos ejercicios resueltos

---

20. Analizar y clasificar (según su conjunto solución) el sistema de ecuaciones dado para todos los valores reales de k

$$\begin{cases} k.x - y + z = 0 \\ (k^2-1).y + (k+1).z = 1 \\ k.x + (k^2+2).y + z = 2 \end{cases}$$

---

**Solución:**

El sistema está compuesto de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde sus coeficientes ordenados, los podemos escribir así:

$$\begin{array}{cccc} X & Y & Z & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-1 & k+1 & 1 \\ k & k^2+2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

X, Y, Z: Variables

Términos independientes

Como el sistema es cuadrado (igual número de ecuaciones que de incógnitas), para resolver el ejercicio usaremos la propiedad que afirma que un sistema de este tipo tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz asociada es distinto de cero. Planteamos el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k+1 \\ k & k^2+2 & 1 \end{vmatrix}$$ que al desarrollado por la columna 1 (Laplace) queda:

$$\Delta = k.\begin{vmatrix} k^2-1 & k+1 \\ k^2+2 & 1 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k^2+2 & 1 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k^2-1 & k+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = k\left[\left(k^2-1\right)-(k+1)\left(k^2+2\right)\right]+k.\left[-1.(k+1)-\left(k^2-1\right)\right]$$ factor común k

$$\Delta = k\left[\cancel{\left(k^2-1\right)}-(k+1)\left(k^2+2\right)-(k+1)-\cancel{\left(k^2-1\right)}\right]$$ cancelamos los términos opuestos

$$\Delta = k\left[-(k+1)\left(k^2+2\right)-(k+1)\right]$$ factor común (-1) .(k+1)

$$\Delta = -(k+1).\,k\left[\left(k^2+2\right)+1\right]$$

$$\Delta = -k.\,(k+1).\,(k^2+3)$$

Este determinante se anula para los valores reales de k = 0 y k = -1 y en ese caso el sistema no sería compatible determinado.

Primera conclusión:

**Si $k \in \Re - \{-1\,;0\}$ el sistema es compatible determinado.**

¿Qué ocurre cuando k toma esos valores?

- Para k = 0, triangulamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_2\text{-}F_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_3\text{-}F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}\,F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \quad F_1+F_3 \rightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Rango de la matriz de coeficientes es 2

Rango de la matriz ampliada es 3

Como los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son distintos el sistema para el valor de k = 0 es incompatible.

- Para k = -1 buscamos los vectores canónicos para clasificar el sistema por comparación de rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_3\text{-}F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{4}\,F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$F_1+F_3 \rightarrow F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Rango de la matriz de coeficientes es 2

Rango de la matriz ampliada es 3

Como los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son distintos, el sistema para el valor de k = -1 es incompatible.

Segunda conclusión:

**Si** $k = -1 \vee k = 0$ **el sistema es incompatible.**

Respuesta del ejercicio:

- **S.C.D**. si $k \in \Re - \{-1\,;0\}$
- **S.I**. si $k = -1 \vee k = 0$
- **S.C.I**. $\nexists\ k$