

1. Indique (justificando) cuáles de los siguientes conjuntos tienen estructura de grupo, semigrupo o monoide, con la operación indicada. Analice la conmutatividad en todos los casos.

a) $(\mathbb{N}, +)$

b) (\mathbb{Z}, \cdot)

c) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

d) $(\mathbb{R}, *)$, $a * b = \frac{5 - ab}{2}$

e) $(P(A), \Delta)$, con $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ y siendo $P(A)$ el conjunto de partes del conjunto $A = \{1, 2\}$

2. Dado $(A, +, \cdot, ', 0, 1)$ un Algebra de Boole, se define en A : $x * y = y + x$. Estudie la estructura de $(A, *)$.

3. Sea $(\{a, b, c, d\}, *)$ un grupo. Completar la tabla justificando el procedimiento seguido:

*	a	b	c	d
a	d	a		
b	a			d
c			d	a
d		d	a	

¿El grupo obtenido es abeliano? Justifique.

4. Demuestre que en un grupo (G, \circ) se verifica: $\forall x : \forall y : x, y \in G : (x \circ y)' = y' \circ x'$
5. Sabiendo que en un grupo $(G, *)$ todo elemento es igual a su inverso, demuestre que el grupo es conmutativo (sugerencia: utilizar la propiedad del ejercicio anterior).
6. Determine si los siguientes son subgrupos de los grupos dados:
- a) $S = \left\{ \frac{x}{2} / x \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$ de $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$
- b) $S = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 10k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$ de $(\mathbb{Z}, +)$
- c) $S = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 10k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$ de $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$
- d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 0\}$ de $(\mathbb{R}^2, +)$
- e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 1\}$ de $(\mathbb{R}^2, +)$
- f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ de $(\mathbb{R}^2, +)$
- g) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x = 5 \cdot z \text{ con } z \in \mathbb{Z}\}$, de $(\mathbb{Z}, +)$
7. Analice si los siguientes son morfismos de grupos.
- a) $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) / f(x) = 5^{-x}$

- b) $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) / f(x) = 3x^2$
 c) $f: (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) / f(x) = \sqrt[3]{x}$
 d) $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) / f(x) = \sqrt[3]{x}$

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- a) (\mathbb{R}, \cdot) (siendo " \cdot " el producto de números reales) es un grupo abeliano.
 b) El conjunto de los números enteros es un subgrupo de $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$
 c) La aplicación $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) / f(x) = \frac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 4. Demuestre que en un grupo (G, \circ) se verifica: $\forall x: \forall y: x, y \in G: (x \circ y)' = y' \circ x'$

En este ejercicio, tenemos que demostrar que el inverso de $x \circ y$ es $y' \circ x'$. Por definición, si (G, \circ) es un grupo y w es un elemento de G , el inverso de w (w') es el único elemento de G que verifica que $w \circ w' = w' \circ w = e$, siendo e el elemento neutro del grupo.

En consecuencia, para probar que un elemento es inverso de otro tenemos que ver que cuando los operamos obtenemos como resultado el elemento neutro.

$$\begin{aligned}
 (x \circ y) \circ (y' \circ x') &= x \circ (y \circ y') \circ x' && \text{por propiedad asociativa} \\
 &= x \circ (e) \circ x' && \text{dado que } y \circ y' = e \\
 &= (x \circ e) \circ x' && \text{por propiedad asociativa} \\
 &= x \circ x' && \text{por definición de elemento neutro} \\
 &= e && \text{dado que } x \circ x' = e
 \end{aligned}$$

Luego, acabamos de demostrar que $(x \circ y)' = y' \circ x'$, que es lo que queríamos ver.

Ejercicio 6. Determine si los siguientes son subgrupos de los grupos dados:

ítem b) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x = 10k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ de $(\mathbb{Z}, +)$

Una forma de ver si S es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ es usando la siguiente propiedad:

Si S es un subconjunto no vacío de un grupo (G, \circ) . Entonces S es un subgrupo de G si y sólo si:

- $\forall a, b \in S: a \circ b \in S$
- $\forall a \in S: a' \in S$

En este caso, tenemos un conjunto S no vacío ($x = 10$ pertenece a S). Veamos que S es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$:

- Sean $x, y \in S$. Queremos ver que $x + y \in S$.

Como S es el conjunto formado por los múltiplos de 10 y $x \in S$, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 10k_1$. Análogamente, como $y \in S$, tenemos que $y = 10k_2$, con $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Luego, $x + y = 10k_1 + 10k_2 = 10 \cdot (k_1 + k_2) = 10k$, con $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$. Luego, $x + y \in S$ (al sumar dos múltiplos de 10, el resultado de la suma también es múltiplo de 10).

- Sea $x \in S$. El inverso de x respecto de la suma es $x' = -x$ (dado que $x + x' = x + (-x) = 0$). Como $x \in S$, $x = 10k$ con $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, $-x = -10k = 10 \cdot (-k)$, con $-k \in \mathbb{Z}$. Es decir, si $x \in S$, $-x \in S$.

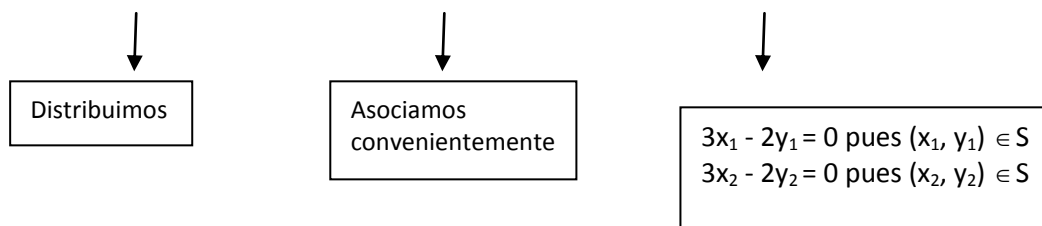
Al cumplirse las dos condiciones, concluimos que S es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Ítem d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\}$ de $(\mathbb{R}^2, +)$

En \mathbb{R}^2 se define la suma de la siguiente manera: $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

- Sean $(x_1; y_1), (x_2; y_2) \in S$. Entonces se verifica que: $3x_1 - 2y_1 = 0$ y que $3x_2 - 2y_2 = 0$. Queremos ver que $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in S$. Reemplazamos este último par ordenado en la ecuación que define a S , tomando como $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$:

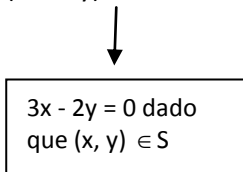
$$3 \cdot (x_1 + x_2) - 2 \cdot (y_1 + y_2) = (3x_1 + 3x_2) - 2y_1 - 2y_2 = (3x_1 - 2y_1) + (3x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$$



Luego, $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in S$.

- Dado $(x, y) \in S$, su inverso respecto de la suma es $(-x, -y)$. Vemos que si $(x, y) \in S$ entonces $(-x, -y)$ también pertenece a S . Reemplazamos en la ecuación que define a S :

$$3 \cdot (-x) - 2 \cdot (-y) = -3x + 2y = -1 \cdot (3x - 2y) = 0$$



Luego, probamos que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$.

Ejercicio 8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

Ítem c) La aplicación $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) / f(x) = \frac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.

Dados dos grupos $(G, \circ), (H, *)$ una aplicación $f: (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ es un morfismo de grupos si

$$\forall x, y \in G: f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

En este caso, tenemos que:

$$f(x + y) = \frac{3}{5}(x + y) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y = f(x) + f(y)$$

Luego, la aplicación $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) / f(x) = \frac{3}{5}x$ es un morfismo de grupos.