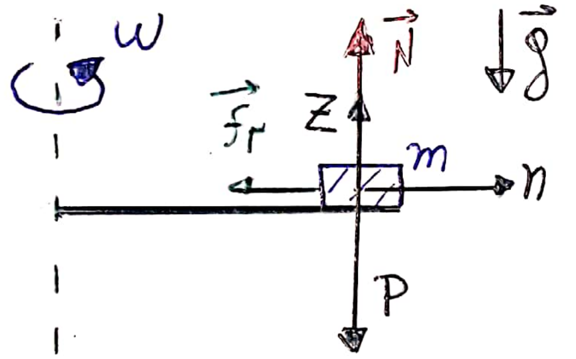
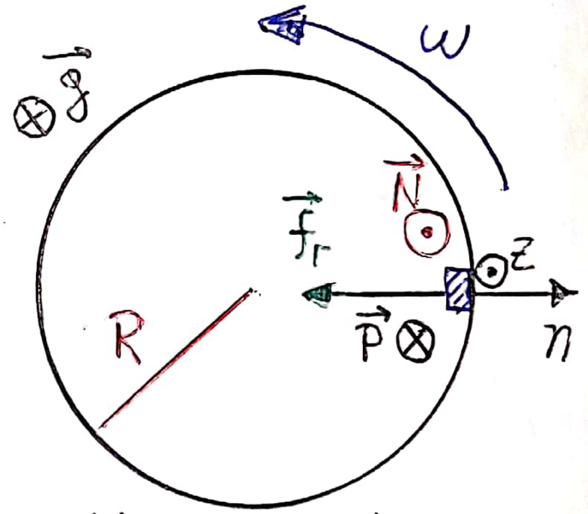
# DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR



EJEMPLO 1: UN DISCO DE VINILO DE RADIO $R$ GIRA CON VELOCIDAD ANGULAR $\omega$. UN BOTÓN DE MASA $m$ SE HALLA EN EL BORDE DEL DISCO. SI EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO ES $\mu_e$, DETERMINE EL MÁXIMO VALOR DE $\omega$ PARA EL CUAL EL BOTÓN NO DESLIZA.

SOLUCIÓN: VEAMOS EL DCL DESDE DISTINTOS PUNTOS DE VISTA




HEMOS DEFINIDO UN EJE NORMAL O RADIAL $n$ Y UN EJE VERTICAL $Z$. LAS ECS. DE NEWTON SON:

$$z)\quad N - mg = 0 \longrightarrow N = mg$$

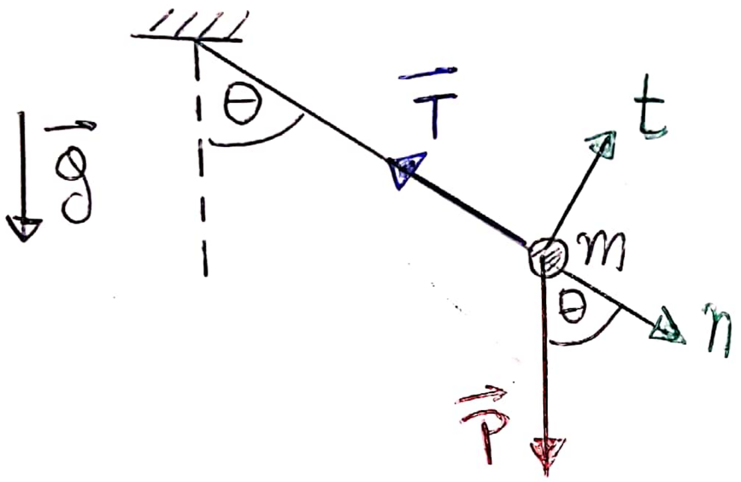
$$n)\quad -f_r = ma = -m\omega^2 R \longrightarrow f_r = m\omega^2 R$$

CUANDO EL BOTÓN ESTÁ A PUNTO DE DESLIZAR ES $\omega = \omega^{MAX}$ Y $f_r = f_r^{MAX} = \mu_e N = \mu_e mg$, QUEDA

$$\mu_e \cancel{m} g = \cancel{m}\, \omega_{MAX}^2 R \longrightarrow \boxed{\omega_{MAX} = \sqrt{\frac{\mu_e g}{R}}}$$

EJEMPLO 2: DETERMINAR EL PERIODO DE OSCILACIÓN DE UN PÉNDULO SIMPLE, PARA PEQUEÑAS OSCILACIONES.

SOLUCIÓN: EL PÉNDULO SIMPLE CONSISTE EN UNA MASA PUNTUAL $m$ SUSPENDIDA DE UN HILO IDEAL DE LONGITUD $l$. HACEMOS EL DCL:




¡HEMOS DEFINIDO UN EJE RADIAL O NORMAL $n$ Y UN EJE TANGENCIAL $t$.

EN EL EJE TANGENCIAL LA EC. DE NEWTON QUEDA:

$$t)\ -mg\,\text{sen}\,\theta = m\,a_t = m\,l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

ESTO DESCRIBE UN MOVIMIENTO OSCILATORIO CON ALGUNA SOLUCIÓN NUMÉRICA. PERO PARA PEQUEÑAS OSCILACIONES $\theta \ll 1$ Y $\text{sen}\,\theta \approx \theta$. EN ESE CASO QUEDA $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

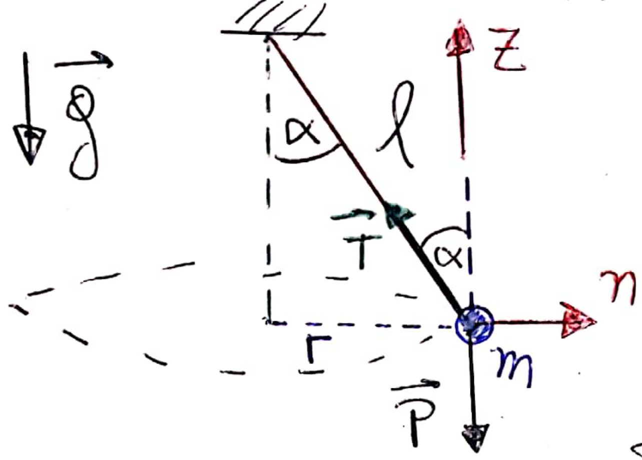
QUE ES LA ECUACIÓN DE UN M.A.S. CON $\boxed{\omega^2 = g/l}$. COMO $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ QUEDA:

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

(NO DEPENDE DE LA MASA NI DE LA AMPLITUD)

EJEMPLO 3: ESTUDIE EL PÉNDULO CÓNICO

SOLUCIÓN: HACEMOS EL DCL Y DEFINIMOS UN EJE NORMAL O RADIAL $n$ Y UN EJE VERTICAL $z$. EL PÉNDULO TIENE MASA $m$ Y LONGITUD $l$ DEL HILO.




EL CUERPO DESCRIBE UN MCU DE RADIO $r = l\,\text{sen}\,\alpha$.

LAS ECS. DE NEWTON SON:

$$z)\quad T\cos\alpha - mg = 0$$

$$n)\quad -T\,\text{sen}\,\alpha = m\,a = -m\omega^2 r = -m\omega^2 l\,\text{sen}\,\alpha$$

DE LA 1$^{er}$ ECUACIÓN SALE $T = m\dfrac{g}{\cos\alpha}$, Y

REEMPLAZANDO EN LA 2$^{A}$ ECUACIÓN:

$$-\cancel{m}g\,\text{tg}\,\alpha = -\cancel{m}\omega^2 l\,\text{sen}\,\alpha \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}}$$

EL PERIODO $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ QUEDA: $\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}}$

OBSERVAR QUE PARA $\alpha = 0$ SE RECUPERA EL PERIODO DEL PÉNDULO SIMPLE.

EJEMPLO 4: UN AUTOMÓVIL DESCRIBE UNA CURVA DE RADIO R, CON UN COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO $\mu_e$. DETERMINAR LA MÁXIMA RAPIDEZ QUE PUEDE TENER EL VEHÍCULO SIN SALIRSE DEL CAMINO, EN LOS SIGUIENTES CASOS:

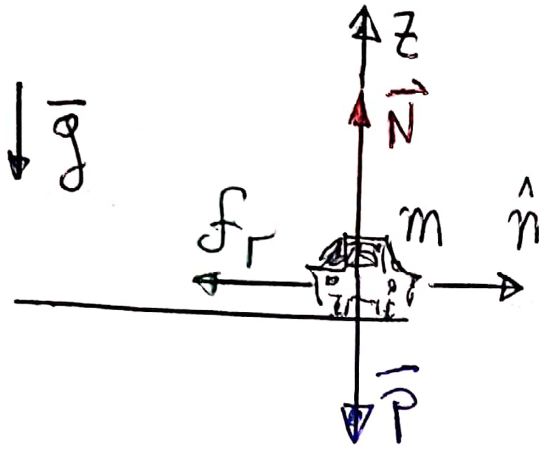
a) LA CURVA NO TIENE PERALTE.

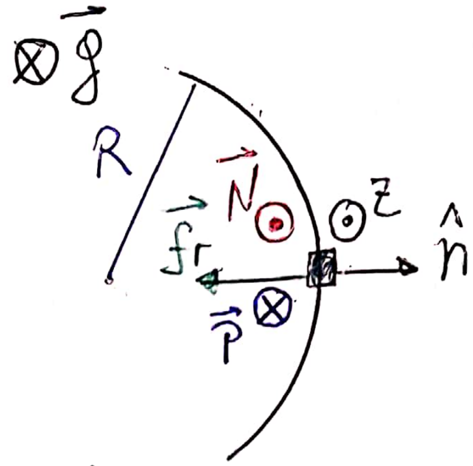
b) LA CURVA TIENE UN PERALTE DE ÁNGULO $\alpha$.

SOLUCIÓN

a) ESTE CASO ES ANÁLOGO AL EJEMPLO 1, DEL BOTÓN GIRANDO SOBRE EL DISCO. EL PESO Y LA NORMAL SE EQUILIBRAN, Y EL ROZAMIENTO ESTÁTICO CONSIGUE QUE EL VEHÍCULO DESCRIBA LA CURVA. SI LA RAPIDEZ ES MUY GRANDE, EL ROZAMIENTO ALCANZA EL VALOR MÁXIMO Y EL AUTOMÓVIL PIERDE EL AGARRE CON EL PISO.

VEAMOS EL DCL:




HEMOS DEFINIDO UN EJE RADIAL O NORMAL $n$ Y UN EJE VERTICAL $z$. LAS ECS. DE NEWTON QUEDAN:

$$z)\quad N - mg = 0$$

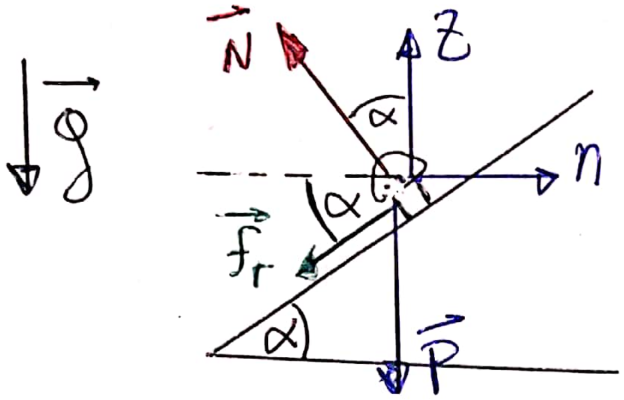
$$n)\quad -f_r = ma = -m\frac{v^2}{R}$$

PARA LA RAPIDEZ MÁXIMA $v_{MAX}$ EL ROZAMIENTO ESTÁTICO TOMA EL VALOR MÁXIMO $f_r^{MAX} = \mu_e N$ CON $N = mg$ Y QUEDA $\mu_e \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v_{MAX}^2}{R}$

$$\longrightarrow \boxed{v_{MAX} = \sqrt{\mu_e R g}}$$

b) AHORA LA PRESENCIA DE PERALTE HACE QUE LA NORMAL AYUDE AL ROZAMIENTO A QUE EL VEHÍCULO DESCRIBA LA CURVA.

VEAMOS EL DCL:




DEFINIMOS UN EJE NORMAL O RADIAL $n$ Y UN EJE VERTICAL $z$. OBSERVAR QUE EL EJE $n$ COINCIDE CON LA DIRECCIÓN DE LA ACELERACIÓN.

QUEDAN LAS ECS. DE NEWTON:

$z)\ N\cos\alpha - f_r \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

$n)\ -N\operatorname{sen}\alpha - f_r\cos\alpha = ma = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$

PARA LA RAPIDEZ MÁXIMA $v_{MAX}$ EL ROZAMIENTO ¡QUE ES ESTÁTICO!, ALCANZA SU VALOR MÁXIMO $f_r^{MAX} = \mu_e N$ Y QUEDAN LAS ECS.:

$z)\ N\cos\alpha - \mu_e N \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

$n)\ N\operatorname{sen}\alpha + \mu_e N\cos\alpha = m\frac{v_{MAX}^2}{R}$

DE LA PRIMERA ECUACIÓN DESPEJAMOS:

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu_e \operatorname{sen}\alpha}$$

Y REEMPLAZANDO EN LA SEGUNDA:

$$(\operatorname{sen}\alpha + \mu_e \cos\alpha)\frac{\cancel{m}g}{\cos\alpha - \mu_e \operatorname{sen}\alpha} = \cancel{m}\frac{V_{MAX}^2}{R}$$

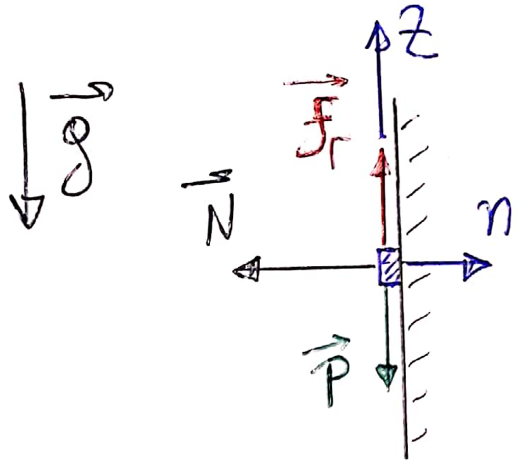
$$\longrightarrow \boxed{V_{MAX} = \sqrt{Rg\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha + \mu_e\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_e \operatorname{sen}\alpha}\right)}}$$

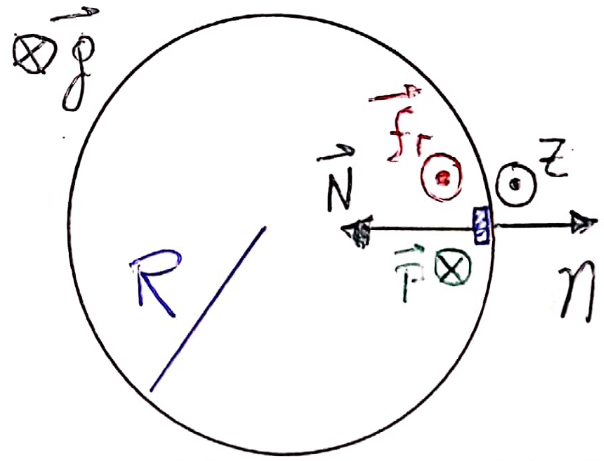
OBSERVAR QUE NO DEPENDE DE LA MASA, POR LO QUE NO ES NECESARIO CREAR UN PERALTE PARA, DIGAMOS, AUTOMÓVILES, Y OTRO PARA, POR EJEMPLO, CAMIONES.

VEMOS QUE PARA CUALQUIER $\alpha$ EL $V_{MAX}$ ES MAYOR QUE EL VALOR $\sqrt{\mu_e R g}$ SIN PERALTE. HACIENDO $\alpha = 0$ REOBTENEMOS EL VALOR ANTERIOR.

EJEMPLO 5: UN BOTÓN GIRA PEGADO AL TAMBOR VERTICAL DE UN LAVARROPAS. CUANDO EL MOTOR SE APAGA, EL TAMBOR DESACELERA HASTA DETENERSE. SI EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO ES $\mu_e$, DETERMINE LA VELOCIDAD ANGULAR QUE TIENE EL TAMBOR CUANDO EL BOTÓN CAE.

SOLUCIÓN: HACEMOS EL DCL PARA EL BOTÓN:




HEMOS DEFINIDO UN EJE RADIAL O NORMAL $n$ Y UN EJE VERTICAL $z$. LAS ECS. DE NEWTON:

$$z)\ f_r - mg = 0$$

$$n)\ -N = ma = -m\omega^2 R$$

LUEGO EL ROZAMIENTO EQUILIBRA AL PESO E IMPIDE QUE EL BOTÓN CAIGA. POR LO TANTO EL ROZAMIENTO VALE SIEMPRE LO

MISMO. LA NORMAL A SU VEZ HACE GIRAR AL BOTÓN. CUANDO $\omega$ DECRECE LA NORMAL TAMBIÉN LO HACE Y ENTONCES LA FUERZA DE ROZAMIENTO MÁXIMA $\mu_e N$ DISMINUYE. CUANDO $\mu_e N$ IGUALA AL ROZAMIENTO EL BOTÓN CAE.

ES DECIR, EN LOS CASOS ANTERIORES EL ROZAMIENTO CRECÍA HASTA ALCANZAR EL VALOR MÁXIMO. AQUÍ ES AL REVÉS, EL ROZAMIENTO MÁXIMO DECRECE HASTA IGUALAR AL ROZAMIENTO $f_r = mg$.

CUANDO EL BOTÓN ESTÁ A PUNTO DE DESLIZAR:

$$z)\quad \mu_e N - mg = 0$$

$$n)\quad N = m\,\omega_{MIN}^2 R$$

LUEGO $\mu_e \cancel{m}\,\omega_{MIN}^2 R = \cancel{m}g$

$$\rightarrow \boxed{\omega_{MIN} = \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}}}$$