Matemática Discreta

Clase 1

Lógica Proposicional

La lógica proposicional estudia la estructura de los enunciados, tratando de simbolizarlos. Luego intenta ver si estos enunciados tienen sentido. También estudia la estructura de los razonamientos (cosa que veremos un poco más adelante en esta misma unidad).
Empecemos con los enunciados más simples.

Elementos de la lógica proposicional

Esencialmente, tiene dos elementos: proposiciones y conectivos (también llamados conectores).
Veamos qué características tiene cada uno.

Proposición: Una proposición es todo enunciado declarativo para el cual tiene sentido determinar su verdad o falsedad. Se las simboliza con las letras: p, q, r, etc…

Ejemplos:

a) El primer mes del año es Enero
   Es una proposición pues hace una declaración. La simbolizamos por ejemplo, con la letra "p" y decimos que su valor de verdad es verdadero, así que escribimos: V(p)=V
b) 2 + 3 = 4
   También es una proposición, pues es una declaración. La simbolizamos con, por ejemplo, con la letra "q" , pero en este caso, la declaración es falsa, así que decimos que su valor de verdad es falso, y lo escribimos : V(q)=F
c) Mañana llueve
   No es proposición pues no es posible saber su valor de verdad. Entonces no se simboliza.
d) ¿De qué color es el agua?
   Tampoco es una es proposición, puesto que no declara nada, sino que hace una pregunta. En general, las preguntas no son proposiciones.
e) Vengadores reúnanse (o en su versión original "Avengers assemble")
   No es una proposición puesto que no declara, sino que es una orden. En general, los enunciados imperativos no son proposiciones.
f) X+3=4
   No es una proposición pues si bien hace una declaración, no podemos conocer su valor de verdad ya que depende del valor que tome la variable "x".
g) Existe un número real tal que X+3=4
   Es una proposición pues hace una declaración y es verdadera (puesto que X=1 es un número real y satisface la ecuación). Debemos señalar que aunque, como en el caso anterior, hay una variable (la "x") ésta se encuentra afectada por un "cuantificador" (el cuantificador "existencial"

que estudiaremos al final de esta unidad) De esta forma, podemos simbolizar la proposición con la letra "r" y decir que $V(r)=V$

h) El rojo es un color primario y la luna es un planeta.
Es una proposición, pues hace dos declaraciones de las que se puede decir su valor de verdad (la primera declaración es verdadera, pero la segunda es falsa). Cuando una proposición está formada por dos o más proposiciones simples se dice que es una "proposición compuesta", y su valor de verdad dependerá tanto del valor de verdad de las proposiciones simples, como de lo que las une. En este caso las une la palabra "y", que se identifica con el conector "conjunción".

- Una ***proposición compuesta*** se construye con proposiciones simples vinculados por operadores llamados conectivos lógicos.
  Su valor de verdad dependerá entonces de los valores de las proposiciones simples que la componen y del valor de verdad de los conectivos que las unen.

A continuación, estudiaremos los conectivos lógicos.

<u>Conectivos lógicos (u operadores lógicos) y sus tablas de verdad</u>

Sean p y q dos proposiciones, definimos:

1) **Negación**: se escribe $\neg p$ y se lee "no p" (o "no es cierto que p")
   (es la única operación unitaria)

   Por ejemplo:
   "No es cierto que 6 sea múltiplo de 3"
   La proposición p sería "6 es múltiplo de 3", y la estaríamos negando. De forma que su simbolización es $\neg p$
   Como $V(p)=V$ entonces su negación es falsa, o sea $V(\neg p)=F$

   En general, al negar una proposición se cambia el valor de verdad, por esto, la tabla quedaría así:

p	$\neg p$
V	F
F	V

   Para interpretar la tabla pensamos que en la columna debajo de "p" están todos los posibles valores de verdad que puede tomar una proposición. En la columna siguiente, están los valores de verdad que tomaría la negación de "p".

2) **Conjunción:** se escribe $p \wedge q$ y se lee "p y q"
   (es una operación binaria, es decir, necesita dos proposiciones para realizarse)

   Por ejemplo:

"El rojo es un color primario y la luna es un planeta."
Está formada por las proposiciones simples "El rojo es un color primario" (la simbolizamos como "p") y "la luna es una planeta" (que simbolizamos como "q"). Por lo tanto, la simbolización de la proposición compuesta sería $p \wedge q$

Para que una conjunción sea verdadera, ambas premisas deben ser verdaderas.

Para armar su tabla de verdad necesitamos tres columnas, una para cada proposición simple, y la tercera para la proposición compuesta.
Además, tenemos que considerar todas las posibles combinaciones de valores de verdad de "p" y de q" (2 valores de verdad para "p" y 2 valores de verdad para "q", lo que nos deja 2x2 combinaciones posibles). Una manera sencilla de no olvidarse ninguna combinación es armar la tabla de forma que los valores de verdad vayan alternando en cada columna de forma que:

- En la primera columna alternan de uno en uno.
- En la segunda columna alternan de dos en dos.

Dicho todo esto, la tabla de verdad de la conjunción queda:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Nótese que el único renglón donde la conjunción es verdadera es cuando ambas premisas simples son verdades.

3) **Disyunción inclusiva:** se escribe $p \vee q$ y se lee "p o q"
(también es una operación binaria)

Ejemplo:
"La recepción está siendo organizada por Lorena o está siendo organizada por Paula."
Las proposiciones simples que la componen son "La recepción está siendo organizada por Lorena" y "la recepción está siendo organizada por Paula".
Pensemos en el valor de verdad de esta proposición compuesta: supongamos que la recepción sólo la organiza Lorena, entonces la proposición compuesta es cierta (pues se afirma que sucederá una cosa u otra). Análogamente, sucedería si la recepción fuera organizada sólo por Paula. ¿Pero qué pasaría si ambas organizan la recepción? ¿Qué valor de verdad tendrá la proposición compuesta si las proposiciones simples son ambas verdaderas? Pues la proposición compuesta es verdadera.

Por lo tanto, la disyunción inclusiva es falsa sólo si las dos proposiciones simples son falsas
De esta forma, la tabla de verdad queda como se ve a continuación:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

4) **Disyunción exclusiva:** se escribe $p \veebar q$ y se lee "o bien p o bien q", "p o q, pero no ambos", "p en cambio q"

Por ejemplo
"O bien vienes tú, o bien voy yo"
Las proposiciones simples que la componen son "Vienes tú" y "voy yo".

La disyunción exclusiva es verdadera cuando sólo una de las proposiciones simples es veradera.
Por lo tanto, la tabla queda:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Observación: En general, en el lenguaje coloquial cotidiano, solemos confundir las dos disyunciones, pero en lógica proposicional la diferencia está bien marcada.

5) **Condicional o implicación:** se escribe $p \rightarrow q$
Llamamos a "p" el antecedente y a "q" el consecuente
Se lee "si p entonces q", "p implica q", "p es condición suficiente para q", "q es condición necesaria para p", "p sólo si q".

Ejemplo
"Si me saco un 7, entonces aprobé el parcial"
Las proposiciones simples que la componen son "Me saco un 7" y "aprobé el parcial".
Para entender la lógica de las implicaciones es necesario pensarlas como una promesa, en la que si se cumple el antecedente, debe cumplirse el consecuente para que la promesa sea cierta.
Analicemos el valor de verdad de esta proposición compuesta dependiendo de los valores de verdad de cada proposición simple.

- Si me saqué un 7 y aprobé el parcial, entonces la promesa (proposición compuesta) es verdadera.

- Si me saqué un 7 y no aprobé el parcial, entonces la proposición compuesta es falsa (es decir, no era verdad lo prometido)
- Si no me saqué un 7 pero aprobé el parcial (supongamos que me saqué un 8) la promesa sigue siendo verdadera (puesto que no decía “sólo si te sacás un 7 aprobás el parcial”)
- Si no me saqué un 7 pero tampoco aprobé el parcial, la promesa sigue siendo verdadera.

Por lo tanto, diremos que un condicional es siempre verdadero excepto en el caso que sea verdadero el antecedente y falso el consecuente.

Y por lo tanto, la tabla queda así:

p	q	p→q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

6) **Bicondicional o doble implicación:** se escribe “p↔q” y se lee “ p si y sólo si q”, “p es condición necesaria y suficiente para q” o “q es condición necesaria y suficiente para p”

Por ejemplo:
“Tomaré la medicación si y sólo si aparecen los síntomas.”
Las proposiciones simples que la componen son “Tomaré la medicación” y “Aparecen los síntomas”.

Un bicondicional es verdadero sólo en el caso de que las dos proposiciones simples que lo componen tengan el mismo valor de verdad.

La tabla, por lo tanto, queda de la siguiente forma:

p	q	p↔q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Observación (definición): $p \leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p)$
Es decir, un bicondicional puede pensarse como dos condicionales (de ahí su nombre)

Ejercicio: Reconocer proposiciones simples y expresar en forma simbólica los siguientes enunciados (las respuestas aparecen más abajo)

1) No soy fan de Batman ni de Superman, me gusta Wonderwoman
2) O bien apruebo el examen o bien busco trabajo.
3) Me gustan las remeras sólo si no son de color naranja.
4) Es suficiente que yo no cumpla con al menos el 75% de asistencia para desaprobar la materia.
5) Es necesario que yo no sea menor de edad y lleve DNI para que se me permita el ingreso a determinados establecimientos.
6) Es necesario y suficiente que apruebes los dos parciales con 7 o más y tengas al menos el 75% de asistencia para que promociones la materia.
7) No cometió el crimen si no se encontraron pruebas.

Respuestas:

1) p: Soy fan de Batman
   q: Soy fan de Superman
   r: Me gustan Wonderwoman $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
2) p: Apruebo el examen
   q: Busco trabajo $p \veebar q$
3) p: Me gustan las remeras
   q: Las remeras son color naranja $p \to \neg q$
4) p: Yo cumplo con al menos el 75% de asistencia
   q: Desapruebo la materia $\neg p \to q$
5) p: Yo soy menor de edad
   q: Yo llevo DNI
   r: Se me permite el ingreso a determinados establecimientos $q \to (\neg p \wedge r)$
6) p: Yo apruebo los dos parciales con 7 o más
   q: Yo tengo al menos el 75% de asistencia
   r: Yo promociono la materia $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
7) p: Cometió el crimen
   q: Se encontraron pruebas $\neg q \to \neg p$

Con lo visto hasta aquí puede hacer los ejercicios 1 al 4 del TP1

Ejercicio: Construir las tablas de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

(Recuerde que para cada proposición simple existen dos valores de verdad, y por lo tanto la cantidad de combinaciones posibles es 2x2x2x2… tantas veces como proposiciones simples haya)

a) $p \to (q \wedge \neg r)$

Resolución:

Como hay 3 proposiciones simples, hay 2x2x2 = 8 combinaciones posibles de valores de verdad, por lo tanto, la tabla tendrá 8 filas

- Primero se ubican en las 8 filas los valores de verdad de las proposiciones, alternando de 1 en 1, luego de 2 en 2, luego de 4 en 4 (siempre se duplica)

P	q	r	
V	V	V	
F	V	V	
V	F	V	
F	F	V	
V	V	F	
F	V	F	
V	F	F	
F	F	F	

- Luego se construye la reproposición compuesta, de a un conectivo por vez (empezando "de adentro hacia afuera"):

$\neg r$ luego $q \wedge \neg r$ y finalmente $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$

P	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V			
F	V	V			
V	F	V			
F	F	V			
V	V	F			
F	V	F			
V	F	F			
F	F	F			

- Para completar la columna de $\neg r$ se niega la columna de r

P	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F		
F	V	V	F		
V	F	V	F		
F	F	V	F		
V	V	F	V		
F	V	F	V		
V	F	F	V		
F	F	F	V		

- Para completar la columna de $q \wedge \neg r$ se piensa en la regla de la conjunción que sólo es verdadera en el caso de que las premisas que la componen sean verdaderas. Por lo tanto, esa columna tendrá valor de verdad "V" sólo si "q" y "$\neg r$" son verdaderas.

  Esto sucede en el quinto renglón y en el sexto. Los demás, son todos renglones de F

P	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	F	
F	V	V	F	F	
V	F	V	F	F	
F	F	V	F	F	
V	V	F	V	V	
F	V	F	V	V	
V	F	F	V	F	
F	F	F	V	F	

- Por último, para completar la columna final, debemos pensar en qué valores de verdad toma un condicional respecto de los valores de verdad de su antecedente y su consecuente. Como el condicional sólo es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, tenemos que buscar en la columna de "p" casos verdaderos que a su vez en la columna de $q \wedge \neg r$ sean falsos. Esto sucede en el primer renglón, en el tercero y en séptimo. Así que todos los demás renglones son verdaderos.
  Quedando la tabla final:

P	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V

b) $\neg(\neg p \vee q)$

c) $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

d) $q \rightarrow (p \vee q)$

e) $p \wedge \neg p$

Del ejercicio anterior podemos observar que en algunos casos el resultado final es siempre verdadero o siempre falso. Ese tipo de proposiciones tienen un nombre especial. Se definen a continuación

*Definición: Una proposición es **tautológica** si su valor de verdad es siempre verdadero, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la compongan*. (Como el ejemplo d)

*Definición: Una proposición es una **contingencia** si su valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la compongan*. (Como el ejemplo a)

Definición: *Una proposición es una **contradicción** si su valor de verdad es siempre falso, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen*. (Como el ejemplo e)

A continuación estudiaremos la nomenclatura (los nombres) que reciben ciertos condicionales, y la relación entre ellos.

Condicionales asociados a la implicación

Dado un condicional $p \to q$ al que llamaremos "directo", se definen los siguientes condicionales

- Recíproco $q \to p$
- Contrario $\neg p \to \neg q$
- Contrarrecíproco $\neg q \to \neg p$

Dejamos como ejercicio que hagan las tablas de verdad de los 4 condicionales y vean qué relación hay entre ellos.

Con lo visto hasta aquí puede usted resolver los ejercicios 5 al 8

Proposiciones Lógicamente Equivalentes

Dadas dos proposiciones compuestas p y q
Si el bicondicional $p \leftrightarrow q$ es tautológico decimos que p y q son proposiciones **lógicamente equivalentes**
Lo escribimos $p \Leftrightarrow q$ (observen que la notación es una flecha doble)

Por ejemplo: $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Basta hacer la tabla de verdad de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ para ver que es tautología.

(Nótese que cambió la flecha doble por la simple, para poder hacer la tabla)

Observación: Es lo mismo que decir que ante los mismos valores de verdad de las proposiciones simples que las componen, tienen el mismo valor de verdad

Ejercicio: Demostrar que $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(Haga la tabla de verdad de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ y observe que es una tautología)

Hay muchas proposiciones lógicamente equivalentes, y de ellas algunas revisten cierta importancia. A continuación invitamos al lector a leer la tabla de leyes lógicas (en archivo aparte), donde encontrará las equivalencias lógicas más conocidas (todas ellas con nombre)

Las leyes lógicas permiten pasar de una proposición compuesta a otra que resulta lógicamente equivalente a la primera.

Usaremos estas leyes con dos objetivos:

- Demostrar que otras proposiciones más complejas son equivalentes
- Simplificar proposiciones compuestas

<u>Ejercicio</u>: Demostrar que $(p \wedge q) \rightarrow r$ es lógicamente equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

a) haciendo la tabla de verdad (queda a cargo del lector hacer la tabla de verdad de $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ y ver que resulta una tautología)

b) usando leyes lógicas

Resolución del ítem b):

Queremos demostrar que $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ (nótese que se usa el símbolo de "equivalencia lógica", que es un bicondicional con la flecha doble)

Para esto partiremos de la proposición compuesta de la izquierda y llegaremos a la proposición compuesta de la derecha (podría hacerse en el sentido contrario, eso es a gusto del lector)

Para avanzar de una proposición a la siguiente, aplicaremos las leyes lógicas y <u>**siempre**</u> indicaremos qué ley usamos (sobre todo usted, cuando rinda un examen)

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow$ (usando la equivalencia del condicional leída de izquierda a derecha)

$[\neg(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow$ (usando la ley de De Morgan)

$[(\neg p \vee \neg q) \vee r] \Leftrightarrow$ (usando la ley de asociatividad

$[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \Leftrightarrow$ (usando la equivalencia del condicional sólo en el paréntesis, leída de derecha a izquierda)

$[\neg p \vee (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow$ (usando la equivalencia del condicional, leída de derecha a izquierda)

$[\rightarrow p \vee (q \rightarrow r)]$

De esta forma, como llegamos a la proposición deseada, hemos demostrado que ambas proposiciones son lógicamente equivalentes.

Ejercicio: Simplificar las siguiente proposición $\left[(p\wedge\neg p)\vee q\right]\rightarrow\neg\left[r\vee\neg(\neg r\vee q)\right]$

Resolución: Vamos a tomar la proposición e iremos aplicando las leyes lógicas para quedarnos con una versión más simple pero que sea lógicamente equivalente.

$\left[(p\wedge\neg p)\vee q\right]\rightarrow\neg\left[r\vee\neg(\neg r\vee q)\right]\Leftrightarrow$ (usando la ley del inverso en el primer paréntesis)

$\left[F_0\vee q\right]\rightarrow\neg\left[r\vee\neg(\neg r\vee q)\right]\Leftrightarrow$ (usando la ley del neutro en el primer corchete

$q\rightarrow\neg\left[r\vee\neg(\neg r\vee q)\right]\Leftrightarrow$ (usando la ley de De Morgan en el paréntesis)

$q\rightarrow\neg\left[r\vee\left(\neg(\neg r)\wedge\neg q\right)\right]\Leftrightarrow$ (usando la ley del contrarrecíproco)

$q\rightarrow\neg\left[r\vee(r\wedge\neg q)\right]\Leftrightarrow$ (usando la ley de absorción dentro del corchete)

$q\rightarrow\neg[r]\Leftrightarrow$ (y sacamos los corchetes porque no cumplen ninguna función)

$q\rightarrow\neg r$

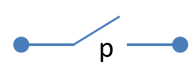
Así hemos llegado a la versión simplificada de la proposición compuesta inicial.

Ahora recomendamos al lector que resuelva los ejercicios 10 al 12 del TP.

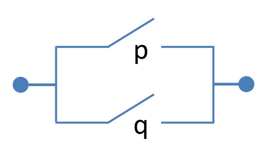
A continuación estudiaremos una representación de las proposiciones compuesta.

Circuitos Lógicos

Es una representación done podemos pensar que se trata de un cable con un interruptor por el que puede pasar la corriente eléctrica, o no (esto se identifica con el verdadero o falso)

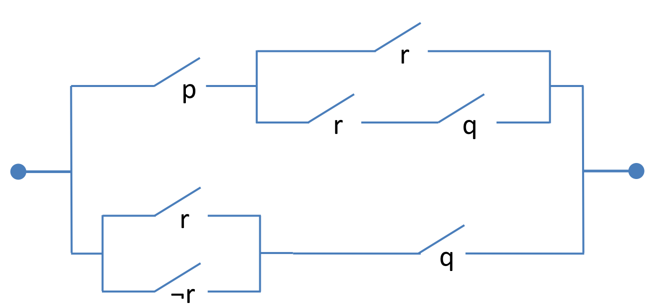
Una proposición simple p se representa: 

La conjunción se representa con un circuito en serie: 

La disyunción se representa con un circuito en paralelo: 

Ejercicio

Escribir la proposición compuesta que representa el siguiente circuito y simplificarla



Resolución

Iremos armando la proposición a medida que recorremos el circuito

- Al comienzo el circuito se bifurca, entonces se trata de dos proposiciones vinculadas con una disyunción.
  $$[\qquad\qquad]\vee[\qquad\qquad]$$

- Recorramos la rama de arriba del circuito, que sería la primera proposición
  Aparece la proposición "p" y en paralelo con "p" hay otro circuito más chico, entonces será algo así
  $$p\wedge(circuito)$$
  El circuito más chico es en paralelo (o sea una disyunción) pero una rama tiene dos proposiciones en serie (o sea una conjunción). Por lo tanto, quedaría
  $$p\wedge(r\vee(r\wedge q))$$
- La rama de abajo del circuito tiene un circuito en paralelo, y en serie tiene a "q". De forma que la expresión es:
  $$(r\vee\neg r)\wedge q$$
- Uniendo las dos ramas del circuito grande en paralelo, quedaría:
  $$\left[p\wedge(r\vee(r\wedge q))\right]\vee\left[(r\vee\neg r)\wedge q\right]$$

Para simplificarla, usaremos nuevamente las leyes lógicas

$$\left[p\wedge(r\vee(r\wedge q))\right]\vee\left[(r\vee\neg r)\wedge q\right]\Leftrightarrow$$ (usando la ley de absorción en el primer paréntesis)

$$[p\wedge r]\vee\left[(r\vee\neg r)\wedge q\right]\Leftrightarrow$$ (usando la ley del inverso en el paréntesis)

$$[p\wedge r]\vee[T_0\wedge q]\Leftrightarrow$$ (usando la ley del neutro en el segundo corchete)

$$[p\wedge r]\vee[q]\Leftrightarrow$$ (sacamos los segundos corchetes que no cumplen ninguna función

$$[p\wedge r]\vee q$$ Esta es la versión simplificada.

Con lo visto hasta aquí usted puede resolver del ejercicio 13 al 15.