Operaciones entre vectores

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de vector, las operaciones entre vectores (suma, producto escalar, producto vectorial) y su interpretación geométrica, la definición de norma de un vector, la definición de ángulo entre dos vectores y la definición de distancia entre dos puntos.

1. a. Sean los vectores $\bar{v}_1 = (3, 2)$, $\bar{v}_2 = (0, -2)$ y $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Realizar las siguientes operaciones e interpretarlas gráficamente.

   i. $3\bar{v}_1$ ii. $-\frac{1}{2}\bar{v}_2$ iii. $\bar{v}_2 + \bar{v}_3$ iv. $\bar{v}_1 - \bar{v}_3$ v. $-2\bar{v}_3 + \frac{1}{3}\bar{v}_1$

   b. Dados los vectores $\bar{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{w}_2 = (3, 0, 0)$ y $\bar{w}_3 = (2, -1, ½)$ realizar las siguientes operaciones y representarlas geométricamente.

   i. $\bar{w}_1 + \bar{w}_2$ ii. $2\bar{w}_3$ iii. $-\frac{1}{3}\bar{w}_2$

2. Dados los puntos P= (1, -3), Q = (-3, -1), R = (2, 3, 1) y S = (-2, 3, 0) se pide:

a. Calcular la longitud de los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ siendo O el origen de coordenadas.
b. Hallar la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$.
c. Hallar la distancia entre P y Q. Comparar con el ítem b.
d. Hallar la distancia entre R y S.
e. Hallar un vector unitario (versor) que tenga la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{OR}$.

3. a. Encontrar un vector ortogonal a (1, -1) de longitud 5. ¿Es único?

   b. Hallar el ángulo que forman $\bar{u}$ y $\bar{v}$ si $\bar{u} = (1, \sqrt{3})$ y $\bar{v} = (-2, 2\sqrt{3})$.

   c. Sea $\bar{w} = (-1, 0)$. Hallar un vector $\bar{v}$ de norma dos sabiendo que el ángulo comprendido entre $\bar{v}$ y $\bar{w}$ es $\frac{\pi}{3}$.

4. Sean los vectores $\bar{u} = (4, -2. 1)$, $\bar{v} = (3, 1, -5)$ y $\bar{w} = (2, 3, -1)$

a. Hallar $\bar{v} . \bar{u}$; $\bar{w} .(2\bar{u} - \bar{v})$; $\bar{v} .(\bar{w} + \bar{u})$.
b. Obtener el ángulo comprendido entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ y entre $\bar{v}$ y $\bar{w}$.
c. Hallar $\bar{u} \times \bar{v}$, $\bar{u} \times \bar{w}$.
d. Obtener todos los vectores ortogonales a $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

5. Hallar el valor de k $\in$ R de modo tal que se verifiquen las condiciones pedidas en cada caso.

a. Los vectores (2, -1, 3) y $(\frac{k}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ son paralelos.
b. Los vectores (1, 2. 3) y (k, 1, 5) son ortogonales.

Ecuación de la recta y del plano

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía se requiere conocer las definiciones relativas a rectas y planos (vector director, normal) y las distintas representaciones de la ecuación de una recta y de un plano, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos y entre rectas y planos.

6. Escribir una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en R^2 y representar gráficamente cada recta.

i. $x + 2y = 4$
ii. $y = -x + 3$
iii. L es la recta que pasa por los puntos $(1, \frac{2}{3})$ y $(-2, -\frac{1}{3})$.
iv. L es la recta que pasa por el origen de coordenadas, paralela a la recta $x - 3y = 1$.

7. Obtener en cada caso las ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de la recta L en R^3 que verifica las siguientes condiciones. Representar gráficamente.

i. L es la recta que pasa por el punto (1, 3, -1) y tiene dirección (0, 1, 2).
ii. L es la recta que pasa por los puntos (1, 2, -1) y (2, 1, 1).
iii. L es la recta que pasa por los puntos (3, 2, -1) y (2, -2, 5).
iv. L es una recta perpendicular a $X = (0, 0, 1) + t(-1, 2, -2)$, $t \in R$, y pasa por el punto (-3, 2, 1). ¿Es única?

8. Determinar si las rectas dadas son coincidentes, paralelas, concurrentes o alabeadas. Indicar en cada caso el conjunto intersección

i. $X = (3, 1, 4) + \lambda(-2, -3, 1)$ $\lambda \in R$; $X = (6, -1, 2) + t(-5, -1, 3)$, $t \in R$.
ii. $X = (0, -1, 2) + t(1, 3, 1)$; $X = (1, 1, 2), + t(2, -1, 0)$, $t \in R$
iii. $X = (1, 0, 0) + t(1, 0, -1)$; $X = (3, 1, 1) + t(-2, 0, 2)$ $t \in R$
iv. $x + 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-3}$; $X = (-1, -3, -1) + \lambda(2, 4, -6)$, $\lambda \in R$.

9. Dado el plano de ecuación $\Pi : 3x + y + 2z = 0$
a. Hallar dos puntos distintos que pertenezcan a Π .
b. Hallar un versor normal a Π .
c. Hallar la intersección del plano Π con cada uno de los ejes coordenados.
d. Hallar la ecuación de un plano paralelo a Π que pase por el punto (1, 0, -1).
e. Hallar la ecuación de la recta normal a Π que pasa por el punto (1, -1, 0).

10.
a. Hallar, en cada uno de los siguientes casos, las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano normal al vector $\bar{n}$ que pasa por el punto P
   i. $\bar{n} = (-1, 3, -6)$; $P = (5, 3, -2)$
   ii. $\bar{n} = (0, -2, 1)$; $P = (2, -1, 4)$
b. Hallar las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano que contiene a los puntos P, Q y R si:

i. P = (1, 0, 0) ; Q = (0, 1, 1) ; R = (-1, 0, 2)
ii. P = (2, -1, 3) ; Q = (3, 3, 2) ; R = (-1, -2, 0)

c. Hallar la ecuación del plano Π que contiene al eje z y al eje x.
d. Hallar la ecuación del plano Π que pasa por los puntos (1, -2, 4) y (1, 1, 8) y es normal al plano de ecuación $x - 2y - 2z + 7 = 0$.
e. Hallar la ecuación del plano Π que pasa por el punto P = (0, 3, -4) y contiene a la recta de ecuación $X = (2, -3, 1) + t(2, -2, 1), t \in R$
f. Hallar la ecuación del plano Π perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{4}$ y que pasa por el punto Q = (-1, 3, 2).

11.
a. Hallar, si existe, la intersección entre los planos Π_1: $2x - y + z = 1$ y Π_2: $-x - y + 2z - 2 = 0$.
b. Hallar, si existe, la intersección entre los planos Π_1: $2x - y + 3z = 5$ y Π_2: $x + 3y - z = 2$.
c. Hallar, si existe, la intersección entre los planos Π_1: $-x + y + z = 1$ y Π_2: $-5x + 5y + 5z = 3$.
d. Hallar, si existe, la intersección entre el plano Π : $x + 3y - z = 2$ y la recta L: $t(1, -1, -1) + (1, 0, -2), t \in R$.
e. Hallar, si existe, la intersección entre el plano Π : $2x + y + z = 0$ y la recta L: $t(-2, -1, -1) + (1, -1, 2), t \in R$.

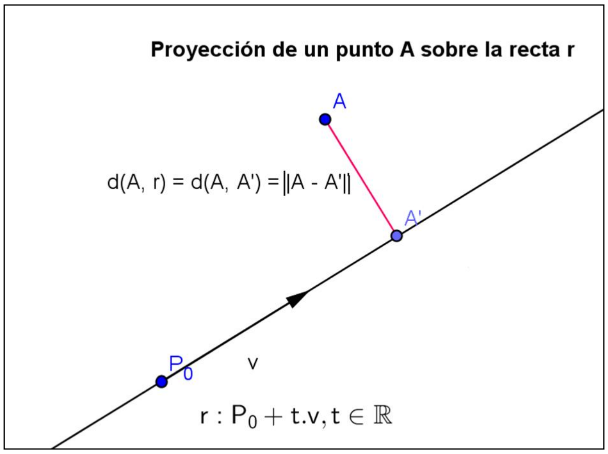
12. Sea Π el plano que pasa por los puntos P = (1, 0, 2); Q = (0, -1, 3) y R = (-1, 5, 2). Sea B = (3, 4, 5) y sea r la recta perpendicular al plano Π que pasa por B.
a. Determinar las ecuaciones del plano Π y de la recta r.
b. Determinar las coordenadas del punto M, intersección de la recta r con el plano Π .

13. Dados los puntos P_0= (4, -1, 2) , P_1= (k, 0, -1) y la recta r_1: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$
a. Hallar la ecuación del plano Π determinado por P_0 y r_1.
b. Obtener, si es posible, el valor de $k \in R$ para que el punto P_1 pertenezca a Π .

14. Sean r: $\alpha(k, k^2 + 2, k + 11)$, $\alpha \in R$ y Π : $x + y - 2z = 4$. Determinar todos los valores de k para los cuales $r \cap \Pi = \varnothing$.

<u>Distancia de un punto a una recta, proyecciones y simetrías respecto de una recta</u>

Sea r la recta (en R^2 o R^3) de ecuación $X = P_0 + t\bar{v}$, $t \in R$ (P_0, $\bar{v} \in R^2$ ó R^3 según corresponda) y sea A un punto cualquiera (de R^2 ó R^3 según corresponda). El punto A' perteneciente a la recta r más próximo al punto A se denomina **proyección de A sobre la recta r**. Se define la **distancia entre el punto A y la recta r** como $d(A, r) = ||A - A'||$



Conociendo la ecuación de la recta r y el punto A, ¿cómo hallar A'? Notar que el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a la recta r, por lo que para encontrar A' basta hallar la intersección entre la recta r y la recta perpendicular a r que pasa por A. En R^2 o R^3 se verifica que $A' = P_0 + \dfrac{(A - P_0)\cdot\bar{v}}{\left\|\bar{v}\right\|^2}\cdot\bar{v}$

15.

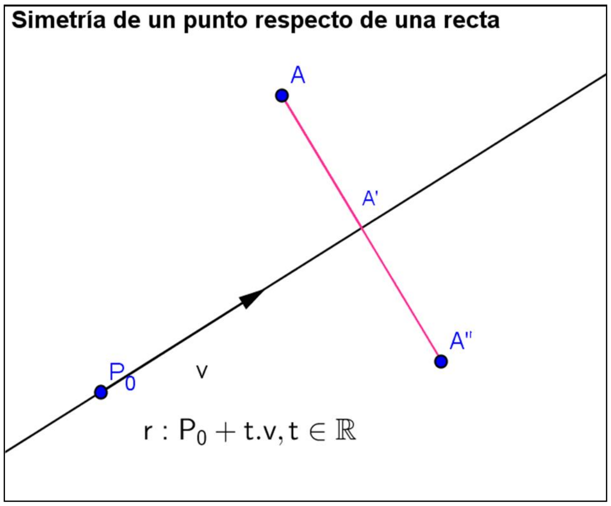
a. Hallar la proyección del punto A = (-1, 1) sobre la recta de ecuación X = t (0, 3) + $(\frac{1}{2}, -4)$, t $\in$ R. Calcular la distancia entre el punto A y la recta dada.

b. Hallar la proyección del punto A = (3, 2, -1) sobre la recta r que pasa por los puntos (2, 0, 1) y (5, 6, -5). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

Sea r la recta (en R^2 o R^3) de ecuación $X = P_0 + t\bar{v}$, t $\in$ R (P_0, $\bar{v} \in R^2$ ó R^3 según corresponda) y sea A un punto cualquiera (de R^2 ó R^3 según corresponda). La posición de A'', **simétrico de A respecto de la recta r** está dada por

$$A'' = 2.\frac{(A - P_0).\bar{v}}{\left\|\bar{v}\right\|^2}.\bar{v} + 2P_0 - A.$$

Esta fórmula se deduce teniendo en cuenta que el punto A' (la proyección de A sobre r) es el punto medio del segmento AA''. Es decir, dado que $A' = \frac{1}{2}(A + A'')$, se tiene que A'' = 2 A' – A. Considerando la expresión vista anteriormente para calcular A´, se obtiene la fórmula dada.



16.

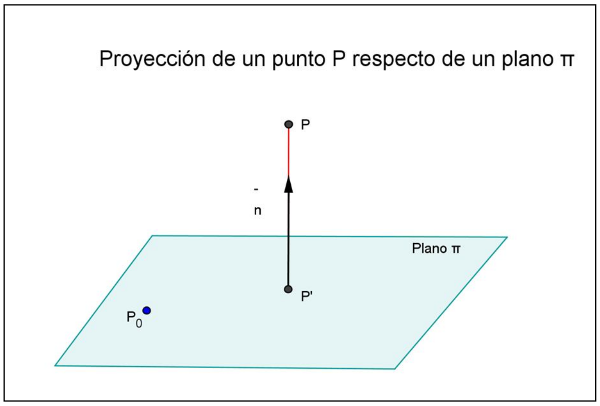
a. Hallar el simétrico del punto A = (-3, -1) respecto de la recta de ecuación 2x + y = 1. Representar gráficamente.

b. Hallar el simétrico del punto A = (-2, 2, $\sqrt{3}$) respecto de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$

Distancia de un punto a un plano, proyecciones y simetrías respecto de un plano

Sea $\bar{n} \in R^3$, $P_0 \in R^3$, Π el plano de ecuación $\bar{n}\,.\,(X - P_0) = 0$ y sea P un punto cualquiera de R^3. El punto $P' \in \Pi$ más próximo a P se denomina **proyección de P sobre el plano** Π y está determinado por la expresión $P' = P + \dfrac{(P_0 - P)\,.\,\bar{n}}{\left\|\bar{n}\right\|^2}\bar{n}$.

La **distancia del punto P al plano** Π se define como d(P, Π) = ||P – P'||.

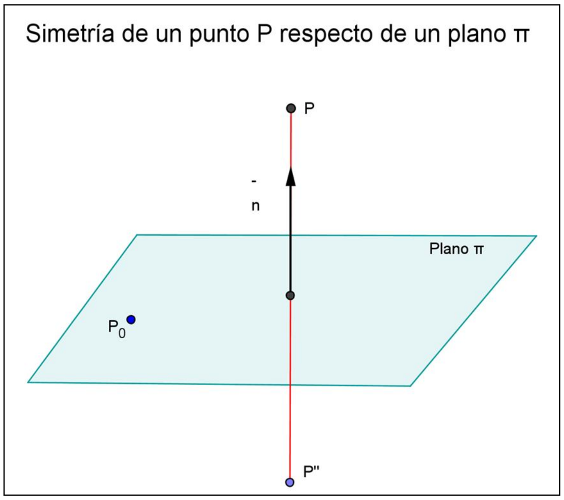


La expresión para P' se deduce calculando la intersección entre el plano Π y la recta perpendicular a Π que pasa por P.

17.

a. Hallar la proyección del punto P = (2, 3, 1) sobre el plano de ecuación –x + y = 2. Hallar la distancia del punto P al plano.
b. Hallar la proyección del punto P = (-5, 0, 4) sobre el plano de ecuación x + 3y + z = -1. Hallar la distancia del punto P al plano.

Si Π es el plano de ecuación $\bar{n}\,.\,(X - P_0) = 0$ ($\bar{n} \in R^3$, $P_0 \in R^3$) y P es un punto cualquiera de R^3, la posición de P'', **simétrico de P respecto del plano** Π, está dada por $P'' = P - 2\dfrac{(P - P_0)\,.\,\bar{n}}{\left\|\bar{n}\right\|^2}\bar{n}$.



La expresión anterior se obtiene teniendo en cuenta que el punto P' (proyección de P sobre el plano Π) es el punto medio del segmento PP''. Es decir, dado que P' = $\frac{1}{2}(P + P'')$, se tiene que P'' = 2 P' – P. Considerando la expresión vista anteriormente para calcular P', se obtiene la fórmula dada.

18.

a. Hallar el simétrico del punto P = (-2, 0, 1) respecto del plano que pasa por los puntos (3, 1, -2) , (1, 0, -1) y (0, 0, 0).
b. Hallar el simétrico del punto P = (0, 3, 1) respecto del plano de ecuación -5x + 3y – 2z = 7.

19.

a. Si el simétrico del punto A = (1, 2, 3) respecto de alguna recta r es A' = (3, -2, 1) mientras que el simétrico del punto B =(4, 5, 6) respecto de la misma recta r es B' = (6, -5, 4) determinar, si existe, la ecuación vectorial de la recta r.
b. Si el simétrico del punto A = (1, 2, 3) respecto de alguna recta r es A' = (2, 4, 3) mientras que el simétrico respecto de la misma recta r del punto B = (4, 5, 6) es B' = (-1, 3, 2) determinar, si existe, la ecuación de la recta r.
c. Dado el punto A = (3, 1) se sabe que su simétrico respecto de una cierta recta r es A' =(7, -3). Representar gráficamente y hallar la ecuación vectorial de la recta r.

20. Sabiendo que el punto B = (-2, 0, 3) es el simétrico del punto A = (-4, 6, -1) respecto de un plano Π :

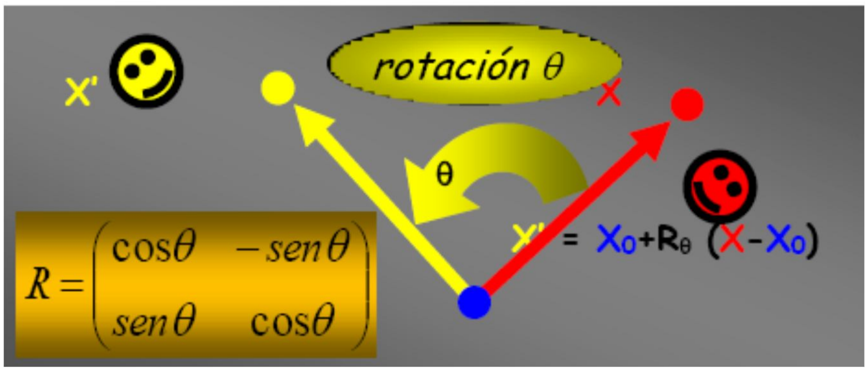
a. Hallar la ecuación del plano Π .
b. Hallar la distancia de A al plano Π .

21. Dado el punto A = (3, 1, -2) se sabe que su proyección sobre cierto plano Π es el punto M = (-2, 0, 1), Sean los puntos B = (9, -3, -5) y C = (-2, 0, 1).

a. Determinar las proyecciones de B y C respecto del plano Π .
b. Hallar la distancia de B a Π y de C a Π .
c. Determinar los puntos A', B' y C' simétricos de los puntos A, B, C respecto del plano Π .

Rotación en el plano

22. Si P = (x, y) es un punto del plano y se efectúa una rotación de intensidad θ en sentido antihorario respecto del centro $P_0 = (x_0, y_0)$, la posición del punto ahora es $P' = P_0^T + R_\theta (P - P_0)^T$ siendo R_θ la matriz de rotación de intensidad θ dada por $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.



Determinar la posición transformada del segmento AB, con A = (1, 0), B = (-1, 1) si se efectúa una rotación de intensidad $\frac{\pi}{4}$ alrededor del punto A.

Espacios vectoriales, subespacios y bases

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de subespacio vectorial y los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, base, dimensión, coordenadas y complemento ortogonal de un subespacio.

23. Determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial en el que están incluidos.

a. $V = \{ (x_1, x_2) \in R^2 / 3x_1 - x_2 = 0\}$
b. $V = \{ (x_1, x_2) \in R^2 / x_1 + 2x_2 = 1\}$
c. $V = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 / 2x_1 - \frac{1}{3} x_2 = 6x_3\}$
d. $V = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 = z^2\}$
e. $V = \left\{ X \in R^2 / \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . X = \bar{0} \right\}$
f. $V = \left\{ A \in R^{3x3} / tr(A) = 0 \right\}$
g. $V = \{ z \in C / Re(z) + Im(z) = 0\}$. (Considerar C como espacio vectorial con R como cuerpo de escalares)

24. Sea $A \in R^{mxn}$. Demostrar que el conjunto $S = \{X \in R^{nx1} / AX = 0\}$ es un subespacio de R^{nx1}.

25. Decidir en cada caso si es posible escribir el vector **u** como combinación lineal de los elementos del conjunto S.

a. S = {(1, -2), (-3, 0)} ; **u** = (-1, 4).
b. S = {(0, 0), (2, -4), (1, 5)} ; **u** = (-1, 4).
c. S = {(2, 1, 0) , (-1, 3, 2)} ; **u** = (2, 3, -4).
d. S = {(3, 1, 0), (2, 4, 1), (1, 2, 2)} ; **u** = (2, 3, -4).
e. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$; $U = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. Describir geométricamente el subespacio S y decidir en cada caso si $\mathbf{w} \in S$.

a. S = gen {(2, -3)} $\mathbf{w} = (-\frac{5}{2}, \frac{15}{4})$.
b. S = gen {(1, -1, 3)} **w** = (0, -1, 2).
c. S = gen {(-1, 0, 1), (0, 1, -2)} $\mathbf{w} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$.
d. S = gen {(1, 2, 6), $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ } $\mathbf{w} = (-1, \frac{1}{2}, 3)$.

27. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son o no linealmente independientes.

a. {(1, 2, -3) , (1, 2, 2), (0, 1, 1)}
b. {(1, 0, 1) , (0, 0, 1), (1, -2, 1), (0, 0, 0)}
c. {(1, -2, 4)}
d. {(1, 2, 4, -1), (2, 5, 3, 0)}
e. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

28.

a. Hallar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el conjunto {(-1, -1,1), (2, 3, 0), (4, 1, k)} es linealmente independiente.
b. Hallar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el vector (4, 1, k) es combinación lineal de (-1, -1, 1) y (2, 3, 0)

29. Hallar base y dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.

a. $S = \{(x, y) \in R^2 / 3x - 2y = 0\}$.
b. $S = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + 3y - 4z = 0\}$.
c. $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 2y - z = 0 , x + z = 0\}$.
d. $S = \text{gen } \{(-1, 1, 3), (0, 5, -1)\}$.
e. $S = \text{gen } \{(2, 6, 9), (-1,-3, -\frac{9}{2})\}$.
f. $S = \left\{ X \in R^{3x1} / \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

g. $S = \text{gen } \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

30. Dado el subespacio $S = \{ X \in R^4 / 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 0\}$, hallar dos bases distintas de S que contengan al vector (1, 4, -2, -1).

31. Dado el subespacio S = gen {(-1, 0, 1, 3), (2, 1, 0, 5), (0, 4, 8, -4)}
a. Hallar una base y la dimensión de S.
b. Hallar, si existe, el valor de $k \in R$ para que $(0, k, -4, 2) \in S$.

32. Sean B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, B' = {(1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, -1)} y B'' = {(-1, 1, 0), (4, -1, 1), (0, 0, 3)} bases de R^3. Hallar las coordenadas con respecto a las bases B, B' y B'' de:
a. (-1, 2, 3)
b. (0, 5, 2)
c. (x_1, x_2, x_3)

33. Si las coordenadas del vector $X \in R^2$ en la base B = {(1, -3), (2, 0)} son $C_B(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, hallar las coordenadas de X
a. en la base canónica
b. en la base B', siendo B' = {(-3, 3), (4, 1)}

34. Hallar una base B de R^3 en la cual el vector (2, -2, 4) tenga coordenadas (1, -1, 1) y el vector (1, -1, 1) tenga coordenadas (2, -2, 4).

35. Para cada uno de los siguientes subespacios S hallar una base y la dimensión de su complemento ortogonal, $S^{\perp}$.

a. $S = \{ X \in R^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.
b. $S = \{X \in R^4 / x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \ x_1 + x_4 = 0\}$.
c. S = gen {(1, -1, 0, 0, 0)(0, 2, 0, 1, -1)}.
d. $S = \{X \in R^3 / X = t(1, -2, 1), t \in R\}$
e. S=gen {(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 0, 1)}.

36. Sea Π el plano que pasa por los puntos A = (1, -2, 1) , B = (4, -6, 2) y C = (9, -5, -4). ¿Es Π un subespacio de R^3? En caso afirmativo, hallar una base y la dimensión de su complemento ortogonal.