SIA MATEMÁTICAS

Ejercicios para practicar:

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LA UNIDAD 1

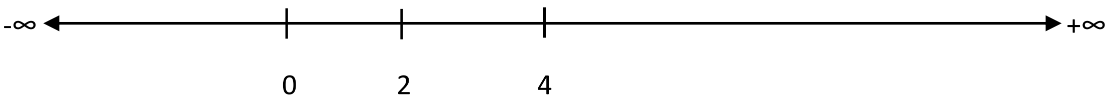
Ejercicio 1: Grafique en la recta de los reales los siguientes puntos y verifique la veracidad de las expresiones.

1.1. 2 > 4

o V

o F

Clave de Corrección:



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), 4 es mayor que 2. Por lo tanto la afirmación es FALSA.

1.2. $\frac{7}{6} > \frac{8}{5}$

o V

o F

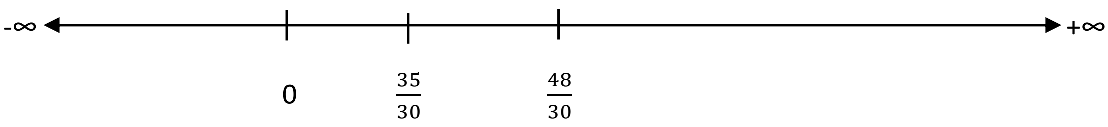
Clave de Corrección:

Para poder comparar ambos números, transformaremos las fracciones para que tengan el mismo denominador (el denominador común que podemos conseguir es 30):

$$\frac{7}{6} > \frac{8}{5}$$

$$\frac{7}{6} * \frac{5}{5} > \frac{8}{5} * \frac{6}{6}$$

$$\frac{35}{30} > \frac{48}{30}$$



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), $\frac{48}{30}$ es mayor que $\frac{35}{30}$. Por lo tanto la afirmación es FALSA.

1.3. $\frac{11}{12} < \frac{7}{3}$

o V

o F

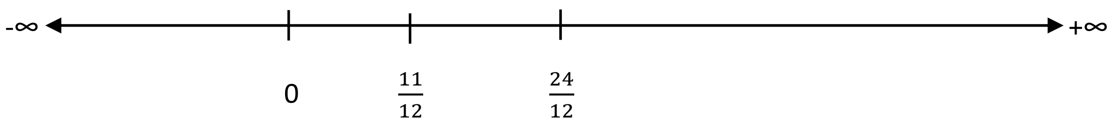
Clave de Corrección:

Para poder comparar ambos números, transformaremos las fracciones para que tengan el mismo denominador (el denominador común que podemos conseguir es 12):

$$\frac{11}{12} < \frac{7}{3}$$

$$\frac{11}{12} < \frac{7}{3} * \frac{4}{4}$$

$$\frac{11}{12} < \frac{24}{12}$$



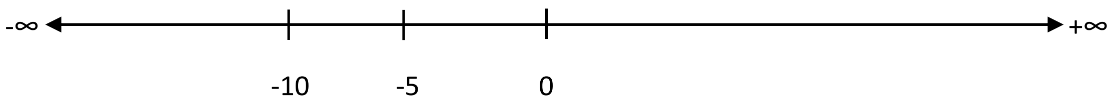
Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), $\frac{24}{12}$ es mayor que $\frac{11}{12}$. Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

1.4. -10 < -5

o V

o F

Clave de Corrección:



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), -5 es mayor que -10. Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

1.5. $-\frac{8}{9} < \ -3$

o V

o F

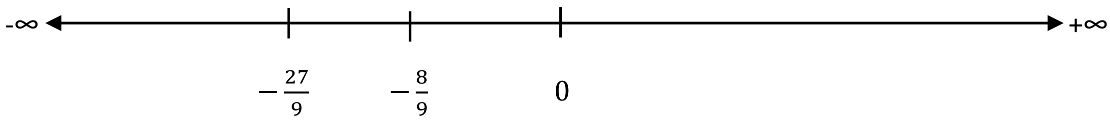
Clave de Corrección:

Para poder comparar ambos números, transformaremos las fracciones para que tengan el mismo denominador (el denominador común que podemos conseguir es 9):

$$-\frac{8}{9} < -3$$

$$-\frac{8}{9} < -3 * \frac{9}{9}$$

$$-\frac{8}{9} < -\frac{27}{9}$$



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), $-\frac{8}{9}$ es mayor que $-\frac{27}{9}$. Por lo tanto la afirmación es FALSA.

Ejercicio 2: Realice las siguientes operaciones matemáticas explicitando los procedimientos elegidos para llegar al resultado final.

2.1. $\frac{1}{3} * \left(-\frac{5}{3} - 2\right) + \left(1 + \frac{5}{9}\right) =$

- Desarrolle el ejercicio:
- Elija la opción correcta según su desarrollo:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $-\frac{5}{2}$

e) ninguna respuesta es correcta

- Clave de corrección:

$$\frac{1}{3} * \left(-\frac{5}{3} - 2\right) + \left(1 + \frac{5}{9}\right) =$$

$$\frac{1}{3} * \left(-\frac{5}{3} - 2 * \frac{3}{3}\right) + \left(1 * \frac{9}{9} + \frac{5}{9}\right) =$$

$$\frac{1}{3} * \left(\frac{-5-6}{3}\right) + \left(\frac{9+5}{9}\right) =$$

$$\frac{1}{3} * \left(\frac{-11}{3}\right) + \left(\frac{14}{9}\right) =$$

$$\frac{-11}{9} + \frac{14}{9} = \frac{3}{9} = \frac{3}{3 * 3} = \frac{1}{3}$$

2.2) $\frac{14}{4}:\frac{32}{16}=$

- Desarrolle el ejercicio:
- Elija la opción correcta según su desarrollo:
  a) $\frac{16}{3}$
  b) $\frac{7}{4}$
  c) No hay respuesta real
  d) Ninguna respuesta es correcta
  e) $\frac{1}{2}$

-Clave de corrección:

$$\frac{14}{4}:\frac{32}{16}=\frac{\frac{14}{4}}{\frac{32}{16}}=\frac{14*16}{4*32}=\frac{224}{128}=\frac{7*32}{4*32}=\frac{7}{4}$$

2.3) $\left[\frac{1}{5}*\left(1+\frac{6}{2}\right)\right]:\frac{d}{c}\ =$

- Desarrolle el ejercicio:
- Elija la opción correcta según su desarrollo:

  a) $3c*d$

  b) $\frac{4}{5}$

  c) $\frac{4*c}{5*d}$

  d) $-\frac{5*d}{4*c}$

- Clave de corrección:

$$\left[\frac{1}{5}*(1+\frac{6}{2})\right]:\frac{d}{c}$$

$$\left[\frac{1}{5}*\left(1*\frac{2}{2}+\frac{6}{2}\right)\right]:\frac{d}{c}$$

$$\left[\frac{1}{5}*\left(\frac{8}{2}\right)\right]:\frac{d}{c}$$

$$\left[\frac{8}{10}\right]:\frac{d}{c}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{d}{c}}=\frac{8*c}{10*d}=$$

$$\frac{4 * 2 * c}{5 * 2 * d} = \frac{4 * c}{5 * d}$$

<u>AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 1:</u>

Ejercicio 1: Grafique en la recta de los reales los siguientes puntos y verifique la veracidad de las expresiones.

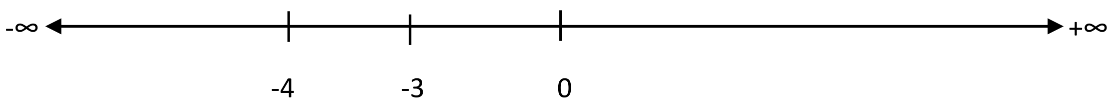
1.1) $-3 > -4$

o V

o F

Clave de Corrección:

Se grafican los puntos directamente sobre la recta de los Reales



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), -3 es mayor que -4. Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

1.2) $\frac{6}{4} > \frac{7}{9}$

o V

o F

Clave de Corrección:

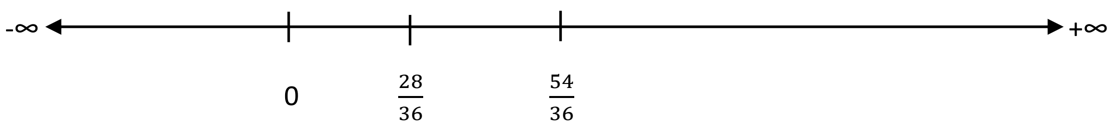
Para poder comparar ambos números, transformaremos las fracciones para que tengan el mismo denominador (el denominador común que podemos conseguir es 36:

$$\frac{6}{4} > \frac{7}{9}$$

$$\frac{6}{4} * \frac{9}{9} > \frac{7}{9} * \frac{4}{4}$$

$$\frac{54}{36} > \frac{28}{36}$$

Se grafican los puntos sobre la recta de los Reales



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), $\frac{54}{36}$ es mayor que $\frac{28}{36}$. Por lo tanto la afirmación es VERDADERA.

1.3) $5 < \frac{4}{5}$

Clave de Corrección:

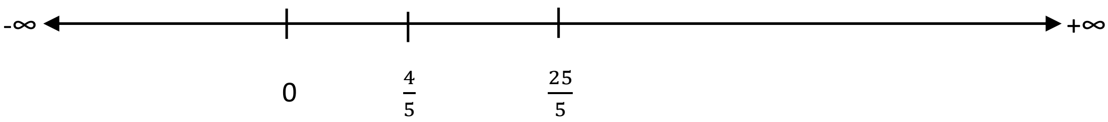
Para poder comparar ambos números, transformaremos las fracciones para que tengan el mismo denominador (el denominador común que podemos conseguir es 5.

$$5 < \frac{4}{5}$$

$$5 * \frac{5}{5} < \frac{4}{5}$$

$$\frac{25}{5} < \frac{4}{5}$$

Se grafican los puntos sobre la recta de los Reales



Al estar del lado de la derecha (hacia el extremo infinito positivo), $\frac{25}{5}$ es mayor que $\frac{4}{5}$. Por lo tanto la afirmación es FALSA.

Ejercicio 2: Realice las siguientes operaciones matemáticas explicitando los procedimientos elegidos para llegar al resultado final.

2.1) $$\frac{2*\left(\frac{1}{2}+4-\frac{3}{2}+2\right)}{\left(3-\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\right)*\left(1+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)}=$$

- Desarrolle el ejercicio:
- Elija la opción correcta según su desarrollo:
  - f) $\frac{1}{3}$
  - g) $-\frac{3}{8}$
  - h) $\frac{5}{8}$
  - i) No está definida dentro de los números Reales
  - j) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

$$\frac{2*\left(\frac{1}{2}+4-\frac{3}{2}+2\right)}{\left(3-\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\right)*\left(1+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{2*\left(\frac{1}{2}+4*\frac{2}{2}-\frac{3}{2}+2*\frac{2}{2}\right)}{\left(3*\frac{3}{3}-\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\right)*\left(1*\frac{2}{2}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{2*\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{2}-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right)}{\left(\frac{9}{3}-\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\right)*\left(\frac{2}{2}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{2*\left(\frac{1+8-3+4}{2}\right)}{\left(\frac{9-5+8}{3}\right)*\left(\frac{2+7-1}{2}\right)}$$

$$\frac{2*\frac{10}{2}}{\left(\frac{12}{3}\right)*\left(\frac{8}{2}\right)}=\frac{2*\frac{10}{2}}{\left(\frac{4*3}{3}\right)*\left(\frac{4*2}{2}\right)}$$

$$\frac{10}{4*4}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

2.2) $\frac{\frac{a*(6+7-5)}{2*(3*a+2-a*3)}}{\frac{7*a}{a}-\frac{14}{2}}=$

- Desarrolle el ejercicio:
- Elija la opción correcta según su desarrollo:
  - k) $-a$
  - l) $2a$
  - m) $\frac{1}{a}$
  - n) No está definida dentro de los números Reales
  - o) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

$$\frac{\frac{a*(6+7-5)}{2*(3*a+2-a*3)}}{\frac{7*a}{a}-\frac{14}{2}}$$

$$\frac{\frac{a*(8)}{2*(3*a+2-a*3)}}{\frac{7*a}{a}-\frac{7*2}{2}}$$

$$\frac{\frac{a * (4 * 2)}{4}}{7 - 7}$$

$$\frac{a * 2}{7 - 7} = \frac{a * 2}{0}$$

Este resultado no está definido en la recta de los Reales, ya que ningún número Real puede ser dividido por cero.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LA UNIDAD 2

En todos los ejercicios que se planteen en este curso, es de suma importancia que se explicite el desarrollo de todos los pasos realizados para llegar a la respuesta o conclusión solicitada. Los evaluadores del examen de ingreso harán hincapié en cómo ha llegado a la respuesta además de si llegó a la respuesta correcta. Por eso les pido que desarrollen cuidadosamente cada explicación antes de ver la clave de corrección.

Utilice TODAS las herramientas y estrategias aprendidas en la unidad 1 y 2 para resolver los siguientes ejercicios. En todos los casos deberás reducir las expresiones a otras más simples utilizando las propiedades de las potencias, de la suma y multiplicación y estrategias de factoreo.

Ejercicio 1: Reducir a una expresión más simple.

$$\frac{(m.n)^{-\frac{1}{4}}.\left(\frac{n^3}{m^2}\right)}{2.\sqrt[3]{m.n^{-2}}}$$

a) $2.m^{41}.n^{31}$
b) $\frac{1}{2}.\sqrt[12]{\frac{n^{41}}{m^{31}}}$
c) $\frac{1}{2}.\sqrt[2]{\frac{n^3}{m^4}}$
d) $2.\sqrt[2]{\frac{n^3}{m^4}}$
e) Ninguna respuesta es correcta

<u>-Clave de corrección:</u>

$$\frac{(m.n)^{-\frac{1}{4}}.\left(\frac{n^3}{m^2}\right)}{2.\sqrt[3]{m.n^{-2}}}$$

Primero aplicaremos la propiedad distributiva de las potencias y transformaremos la raíz en potencias fraccionarias:

$$\frac{m^{-1/4}.n^{-1/4}.n^3.m^{-2}}{2.m^{1/3}.n^{-2/3}} =$$

El número 2 del denominador no es una variable a despejar, lo único que significa es que toda la expresión está multiplicada por $\frac{1}{2}$. El siguiente paso será escribir las variables del denominador en el numerador cambiando el signo de sus potencias.

$$\frac{1}{2}.m^{-1/4}.n^{-1/4}.n^3.m^{-2}.m^{-1/3}.n^{2/3} = \frac{1}{2}.m^{-\frac{1}{4}-2-\frac{1}{3}}.n^{-\frac{1}{4}+3+\frac{2}{3}}$$

Finalmente sumaremos los exponentes fraccionarios de cada variable para obtener las potencias finales. Usaremos el método aprendido en la unidad anterior:

$$para\ \text{"m"}:\quad -\frac{1}{4}-2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}*\frac{3}{3}-2*\frac{12}{12}-\frac{1}{3}*\frac{4}{4}=\frac{-3-24-4}{12}=-\frac{31}{12}$$

$$para\ \text{"n"}:\quad -\frac{1}{4}+3-\frac{2}{3}=-\frac{1}{4}*\frac{3}{3}+3*\frac{12}{12}+\frac{2}{3}*\frac{4}{4}=\frac{-3+36+8}{12}=\frac{41}{12}$$

Entonces escribimos las variables con las potencias fraccionarias sumadas. Luego volvemos a expresar las potencias fraccionarias como raíz para identificar la respuesta correcta.

$$\frac{1}{2}*n^{\frac{41}{12}}*m^{-\frac{31}{12}}=\frac{1}{2}*\sqrt[12]{n^{41}*m^{-31}}=$$

$$=\frac{1}{2}*\sqrt[12]{\frac{n^{41}}{m^{31}}}$$

Ejercicio 2: Reducir a una expresión más simple.

$$x^{\frac{3}{2}}.(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})$$

a) $x-1$
b) x^2
c) x^2-x
d) $\sqrt{x}$
e) Ninguna respuesta es correcta

<u>Clave de corrección:</u>

El primer paso a seguir es escribir las raíces como potencias para poder operar con las propiedades vistas en esta unidad.

$$x^{\frac{3}{2}}.\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x^{\frac{3}{2}}.\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$x^{\frac{3}{2}}.\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=x^2-x$$

Ejercicio 3: Resolver la división de polinomios utilizando las estrategias de factoreo vistas en esta unidad.

$$\frac{3x^5-6x^4-3x+6}{x^3-2x^2+x-2}=M(x)$$

a) x^2-1
b) $2x^2+3$
c) $x-1$
d) $3x^2-3$
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

El primer paso es factorear ambos polinomios para poder simplificar factores que se repiten en el numerador y denominador utilizando las estrategias que vimos en la presente unidad:

Primer polinomio:

$$3x^5 - 6x^4 - 3x + 6 =$$

$3(x^5 - 2x^4 - x + 2) =$ Se sacó 3 como factor común entre los términos

$$3(x^5 - 2x^4 - x + 2) =$$

$$3(x^4(x-2) - x + 2) =$$

Se sacó factor común x^4 entre los dos primeros términos del polinomio que está dentro del paréntesis.

$$3(x^4(x-2) - x + 2) =$$

$$3(x^4(x-2) - 1(x-2)) =$$

Se sacó Factor Común -1 entre los dos últimos términos de polinomio dentro del paréntesis para generar deliberadamente un factor $(x-2)$ para que éste sea un factor común con la primer parte del polinomio.

$$3(x^4(x-2) - 1(x-2)) =$$

$$3.(x-2).(x^4 - 1) =$$

Se sacó $(x-2)$ como factor común, dejando un nuevo factor $(x^4 - 1)$ que es una *Diferencia de Cuadrados*. La misma se puede factorear de la siguiente manera:

$$3.(x-2).(x^2+1).(x^2-1) =$$

Observe que $(x^2 - 1)$ es también una diferencia de cuadrados, la cual puede escribirse de la siguiente manera:

$$\boxed{3.(x-2).(x^2+1).(x+1).(x-1) =}$$

Esta es la forma completamente factoreada del polinomio que aparece en el numerador.

Segundo polinomio: observe como se utilizan estrategias similares.

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 =$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 =$$

$$x^2(x-2) + x - 2 =$$

$$\boxed{(x-2).(x^2+1) =}$$

En este paso se sacó como factor común $x - 2$, dejando un factor $(x^2 + 1)$. Así obtuvimos la forma final del polinomio factoreado

De esta manera, la forma final de la división de polinomios original es:

$$\frac{3x^5 - 6x^4 - 3x + 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{3.(x-2).(x^2+1).(x+1).(x-1)}{(x-2).(x^2+1)} = M(x)$$

Procedemos a simplificar los factores que se repiten en el numerador y denominador para obtener el resultado M(x).

$$\frac{3.\cancel{(x-2)}.\cancel{(x^2+1)}.(x+1).(x-1)}{\cancel{(x-2)}.\cancel{(x^2+1)}} = 3.(x+1).(x-1) = 3x^2 - 3 = M(x)$$

Ejercicio 4: Reducir a una expresión más simple.

$$\frac{2a^2 + 2a + 1}{a^2 - a} - \frac{a+4}{a-1}$$

a) $a - 1$
b) $a^2 - a$
c) $\frac{a-1}{a}$
d) No existe una respuesta en los Reales
e) Ninguna respuesta es correcta

<u>Clave de corrección:</u>

Primero intentaremos factorear todo lo que podamos:

$$\frac{2a^2 + 2a + 1}{a^2 - a} - \frac{a+4}{a-1} =$$

$$\frac{2a^2 + 2a + 1}{a.(a-1)} - \frac{a+4}{a-1} =$$

Observe que si intentamos hallar las raíces del polinomio $2a^2 + 2a + 1$ para poder factorearlo, nos encontramos con que éste polinomio no tiene raíces Reales, por lo cual no podemos hacerlo de manera directa. Intentaremos unir ambos términos cambiando la forma del segundo término sin afectar su identidad:

$$\frac{2a^2 + 2a + 1}{a.(a-1)} - \frac{(a+4)}{(a-1)}.\frac{a}{a} =$$

$$\frac{2a^2 + 2a + 1 - (a+4).a}{a.(a-1)} =$$

$$\frac{2a^2 + 2a + 1 - a^2 - 4a}{a.(a-1)} =$$

$$\frac{2a^2 + 2a + 1 - a^2 - 4a}{a.(a-1)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a.(a-1)} =$$

Observe que el polinomio superior $a^2 - 2a + 1$ ahora sí posee raíces. Tiene dos raíces iguales que valen +1. De esta manera podemos factorearlo según lo que vimos en el punto 6 de esta ficha técnica. Así podremos simplificar los factores que se repiten en el numerador y denominador para obtener nuestro resultado final:

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a.(a-1)} = \frac{(a-1).\cancel{(a-1)}}{a.\cancel{(a-1)}} = \frac{a-1}{a}$$

Ejercicio 5: Reducir a una expresión más simple.

$$\frac{1 + \frac{y}{x}}{x^2.y^{-1}.(x^2 - y^2)}$$

a) $\frac{y}{x}$
b) $x^3.(x-y)$
c) $\frac{y}{x^3.(x-y)}$
d) No existe una respuesta en los Reales
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Para resolver este ejercicio debemos sumar los términos del numerador y factorear la diferencia de cuadrados del denominador:

$$\frac{1 + \frac{y}{x}}{x^2.y^{-1}.(x^2 - y^2)} = \frac{1.\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{x^2.(x^2 - y^2)}{y}} = \frac{1.\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{x^2.(x+y).(x-y)}{y}} =$$

$$\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x^2.(x+y).(x-y)}{y}} = \frac{\cancel{(x+y)}.y}{x^3.\cancel{(x+y)}.(x-y)} = \frac{y}{x^3.(x-y)}$$

Ejercicio 6: Racionalizar el denominador de la siguiente expresión.

$$\frac{y-2}{\sqrt[3]{x}}$$

a) $\frac{3\sqrt[3]{y}}{x}$
b) $\frac{3-x}{y^3}$
c) $\frac{(y-2).\sqrt[3]{x^2}}{x}$
d) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Para poder racionalizar el denominador, escribiremos las raíces como potencias para multiplicar y dividir la expresión de manera que el denominador quede con potencia +1.

$$\frac{y-2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{(y-2)}{x^{\frac{1}{3}}}.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{(y-2).x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{(y-2).\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2:

Ejercicio 1: Reducir a una expresión más sencilla.

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{a^2}}{(a^{-2})^{\frac{3}{4}}.\frac{-2}{a^3}}$$

a) a^2
b) $\frac{a}{-2}$
c) $\frac{-2}{a}$
d) $-\frac{1}{2}.a^2$
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{a^2}}{(a^{-2})^{\frac{3}{4}}.\frac{-2}{a^3}}=-\frac{1}{2}.\frac{a^{-\frac{1}{2}}.a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}.a^{-3}}=-\frac{1}{2}.a^{-\frac{1}{2}}.a^{-2}.a^{\frac{3}{2}}.a^3=-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}+3}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}-2.\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+3.\frac{2}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}a^{\frac{-1-4+3+6}{2}}=-\frac{1}{2}a^{\frac{4}{2}}=-\frac{1}{2}a^2$$

Ejercicio 2: Reducir a una expresión más sencilla:

$$\frac{x^2-36}{x^2-6x+5}:\frac{x^2+12x+36}{x-1}$$

a) $\frac{x-6}{2}$
b) $\frac{(x-6)}{(x-5).(x+6)}$
c) $(x-5).(x+6)$
d) $\frac{(x-5).(x-6)}{(x+6)}$
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Observe que aparece un signo de división, por lo cual escribiremos la expresión como una fracción.

$$\frac{x^2-36}{x^2-6x+5}:\frac{x^2+12x+36}{x-1}=\frac{\frac{x^2-36}{x^2-6x+5}}{\frac{x^2+12x+36}{x-1}}=\frac{x^2-36}{x^2-6x+5}.\frac{x-1}{x^2+12x+36}=$$

Ahora procedemos a factorizar la diferencia de cuadrados x^2-36 y ambos polinomios de grado 2 hallando sus raíces.

$$\frac{x^2-36}{x^2-6x+5}.\frac{x-1}{x^2+12x+36}=\frac{(x+6).(x-6)}{(x-1).(x-5)}.\frac{(x-1)}{(x+6).(x+6)}=$$

Ahora podremos simplificar los factores que multiplican y dividen la expresión:

$$\frac{\cancel{(x+6)}.(x-6)}{\cancel{(x-1)}.(x-5)}.\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+6)}.(x+6)}=\frac{(x-6)}{(x-5).(x+6)}$$

Ejercicio 3: Reducir a una expresión más sencilla.

$$\frac{2x+1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

a) $x+1$
b) $1-x$
c) $2x+2$
d) x^2-2
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Para resolver este problema, buscaremos denominadores comunes de las expresiones fraccionarias sumadas de forma ordenada:

$$\frac{2x+1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2x+1}{1+\frac{1}{1.\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}}=\frac{2x+1}{1+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{2x+1}{1+\frac{x}{x+1}}=$$

$$\frac{2x+1}{1.\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}}=\frac{\frac{2x+1}{1}}{\frac{x+1+x}{x+1}}=\frac{\frac{2x+1}{1}}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{(\cancel{2x+1})}{1}.\frac{(x+1)}{(\cancel{2x+1})}=x+1$$

Ejercicio 4: Racionalice el denominador de la siguiente expresión:

$$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$$

a) $\frac{\sqrt{3}-y}{y}$
b) $3-y$
c) $\frac{(y-2).(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3}$

d) $\frac{y.(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$

e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Para racionalizar el denominador, multiplicaremos la expresión con el binomio del denominador en su versión conjugada ($(\sqrt{3}-\sqrt{y})$, para utilizar la estrategia de diferencia de cuadrados y deshacernos de las raíces.

$$\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}=\frac{y}{(\sqrt{3}+\sqrt{y})}\cdot\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{(\sqrt{3}-\sqrt{y})}=\frac{y.(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LA UNIDAD 3

En todos los ejercicios que se planteen en este curso, es de suma importancia que se explicite el desarrollo de todos los pasos realizados para llegar a la respuesta o conclusión solicitada. Los evaluadores del examen de ingreso harán hincapié en cómo ha llegado a la respuesta además de si llegó a la respuesta correcta. Por eso les pido que desarrollen cuidadosamente cada explicación antes de ver la clave de corrección.

Utilice TODAS las herramientas y estrategias aprendidas en las unidades anteriores para resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1:

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$$

a) $x_1 = 2\,;\, x_2 = \frac{1}{2}$
b) $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 2$
c) $x = 2$
d) No existe una respuesta en los Reales
e) Ninguna respuesta es correcta

Clave de corrección:

Como dijimos en la primera sección de esta unidad, matendremos la igualdad con cero para que queden explícitas las restricciones:

$$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$$

$$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}.\frac{x}{x} - 2.\frac{x^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{2 + 3x - 2x^2}{x^2} = 0$$

De esta manera queda claro que la restricción es $x = 0$, es decir, si una respuesta llegara a ser cero, la expresión original sería indefinida ya que nada puede ser dividido por cero.

El siguiente paso es hallar las raíces. Debemos encontrar qué valores de x hacen que el numerador sea igual a cero:

$$2 + 3x - 2x^2 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación cuadrática son a=-2,b=3 y c=2

Las respuestas son: $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 2$. Ninguna de las respuestas es igual a la restricción así que ambas son válidas y la opción b es la correcta.

Ejercicio 2:

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{(x-3)^3 - 9(x-3)}{(x-6)} = 0$$

a) $x_1 = 3\,; x_2 = 0, x_3 = 6$
b) $x_1 = 3; x_2 = 6$
c) $x_1 = 3\,; x_2 = 0$
d) No existe una respuesta en los Reales
e) Ninguna respuesta es correcta

<u>Clave de corrección:</u>

Si observamos el denominador, podremos hallar la restricción para este problema.

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Si alguna de las soluciones es $x = 6$, deberá ser descartada ya que la expresión inicial será indefinida al ser dividida por cero.

Ahora hallaremos las raíces de la ecuación. Aquellos valores que hagan que el numerador sea cero, serán nuestras respuestas. Utilizaremos el método de factoreo:

$$(x-3)^3 - 9(x-3) = 0$$

$$(x-3).\left((x-3)^2 - 9\right) = 0$$

Observe que $(x-3)^2 - 9$ es una diferencia de cuadrados que puede ser escrita como $(x - 3 + 3).(x - 3 - 3) = (x).(x - 6)$. Por lo tanto:

$$(x-3).\left((x-3)^2 - 9\right) = 0$$

$$(x-3).(x-3+3).(x-3-3) = 0$$

$$(x-3).(x).(x-6) = 0$$

En esta versión factoreada, vemos que hay 3 valores de x que hacen que el polinomio sea igual a cero. $x_1 = 3$ (hace cero el primer factor); $x_2 = 0$ (hace cero el segundo factor) $y\ x_3 = 6$ (hace cero el tercer factor). Como $x = 6$ coincide con la restricción, la respuesta correcta a este problema es: $x_1 = 3\ y\ x_2 = 0$ (Respuesta C)

<u>**Ejercicio 3**</u>: Hallar el intervalo respuesta y graficar sobre la recta de los reales:

$$\boldsymbol{A = \{x \in R / 2x - 3 < x + 3\}}$$

a) (6; +∞)
b) (-∞;6)
c) [6; +∞)

d) (-∞;6]
e) [-∞;6]

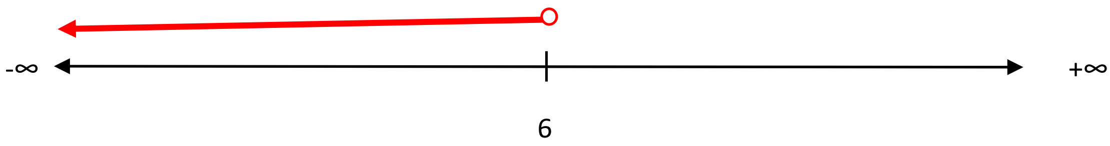
Clave de corrección:

$$2x - 3 < x + 3$$

$$2x - x - 3 < 3$$

$$x < 3 + 3$$

$$x < 6$$



Respuesta: (-∞;6)

Ejercicio 4: Hallar el intervalo respuesta y graficar sobre la recta de los reales:

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \;/\; \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{2} - \boldsymbol{x}}{\mathbf{3}} \geq \mathbf{1} \right\}$$

a) [-2;2]
b) (-∞;2]
c) (-∞;2)
d) [2;+∞)
e) (2;+∞)

Clave de Corrección:

$$\frac{2x + 1}{5} - \frac{2 - x}{3} \geq 1$$

$$\frac{(2x + 1)}{5} . \frac{3}{3} - \frac{(2 - x)}{3} . \frac{5}{5} \geq 1$$

$$\frac{(2x + 1). 3 - (2 - x). 5}{15} \geq 1$$

$$6x + 3 - 10 + 5x \geq 15$$

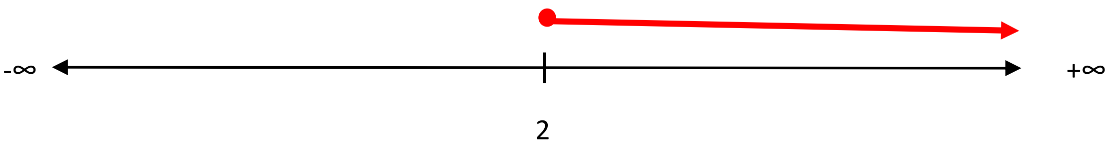
$$6x + 5x \geq 15 + 10 - 3$$

$$11x \geq 15 + 10 - 3$$

$$11x \geq 22$$

$$x \geq \frac{22}{11}$$

$$x \geq 2$$



Respuesta: [2;+∞)

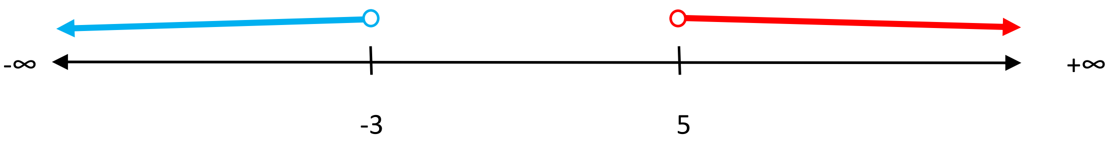
Ejercicio 4: Hallar el intervalo respuesta y graficar sobre la recta de los reales:

$$[-\infty; -\mathbf{3}) \cap (\mathbf{5}; +\infty]$$

a) [-3;5]
b) (-3;-5)
c) [-∞;+∞)
d) [-∞;+∞)
e) Ø

Clave de corrección:

$$[-\infty; -\mathbf{3}) \cap (\mathbf{5}; +\infty]$$



No existen valores que aparezcan en ambos intervalos, así que el resultado de este problema es vacío (Ø).

Ejercicio 5: En el mes de Agosto, el alquiler de un departamento fue de $55000. ¿Cuánto abonaron en el mes de Septiembre, si hubo un del 5,3%?¿Cuál es el factor por el cual debe multiplicar el alquiler de Agosto para calcular el alquiler de Septiembre?

a) 52085; 0,947
b) 29150; 0,53
c) 57915; 1,053
d) 84150;1,53
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Clave de Corrección:

El precio de Agosto debe ser multiplicado por el factor $\frac{105,3}{100} = 1,053$ para obtener el precio con el aumento.

$$55000 * 1,053 = 57915$$

<u>Ejercicio 6:</u> Un fabricante de refrescos produce uno de naranja que es anunciado como de “sabor natural” aunque sólo contiene 5% de jugo. Una nueva reglamentación estipula que para que una bebida se anuncie como “natural” deberá contener por lo menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja debe agregar el fabricante a 900 litros de refresco de naranja, antes de fraccionar para su venta, para cumplir con la reglamentación?

a) 40 L
b) 90 L
c) 45 L
d) 50 L
e) Ninguna de las respuestas anteriores

<u>Clave de Corrección:</u>

El fabricante de refrescos posee 900 litros de refresco que contiene 5% de jugo puro.

$$900L.\frac{5}{100} = 900L\,.\,0,05 = 45L$$

En los 900 L de refresco se hallan disueltos 45L de jugo puro. El fabricante debe agregar un volumen x de jugo puro para que el volumen final de refresco contenga un 10% de jugo puro. Hay que tener en cuenta que el volumen final de refresco aumentará conforme agregue el jugo puro. Por lo tanto, el planteo debe hacerse de la siguiente manera:

$$(Volumen\ de\ refresco\ final) * (porcentaje\ de\ jugo) = Volumen\ de\ jugo\ puro$$

$$(900\ L + x\ ) * \left(\frac{10}{100}\right) = 45\ L + x$$

$$(900\ L + x\ ) * \left(\frac{1}{10}\right) = 45\ L + x$$

$$900\ L + x\ = (45\ L + x\ ) * 10$$

$$900\ L + x = 450\ L + 10x$$

$$900\ L - 450\ L = 10x\ - x$$

$$450\ L = 9x$$

$$\frac{450\ L}{9} = x$$

$$x = 50\ L$$

Ejercicio 7: Si $a \in R$ de modo tal que el polinomio $ax^2 + 3x = 2$ tiene $x = 1$ como solución. ¿Tiene la ecuación alguna otra solución?

a) $x = -2$
b)
c)
d)
e) No tiene otra respuesta.

Clave de Corrección:

La siguiente ecuación debe tener $x = 1$ como solución. Por lo tanto

$$ax^2 + 3x = 2$$

$$ax^2 + 3x - 2 = 0$$

Reemplazo $x = 1$ y, al ser solución, debería ser igual a cero. Entonces despejo a.

$$a.1^2 + 3.1 - 2 = 0$$

$$a + 3 - 2 = 0$$

$$a = -1$$

Si $a = -1$, entonces la ecuación puede escribirse como:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

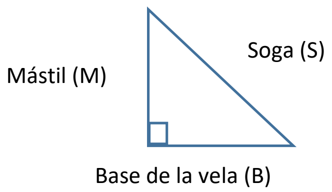
Los coeficientes para hacer la fórmula resolvente son: a=-1 ; b=3 y c=-2.

Las respuestas del problema son: $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$

Ejercicio 8: Usted posee un velero con una sola vela que, según le dijeron, tiene 30 m^2 de área. Necesita atar con una soga la punta superior de la sección de la vela atada al mástil con la punta más alejada de la sección horizontal de la vela. El único dato que conoce de la vela es que la sección vertical mide 12m de altura. ¿Cuál es el largo de la soga que debe comprar?

a) 5m
b) 12m
c) 13m
d) 15m
e) Ninguna de las anteriores

Clave de corrección:



Realizamos un diagrama de la vela como un triángulo rectángulo. Sabemos que el área de la vela debe ser de 30 m^2, por lo tanto.

$$\frac{Base\ *\ Altura}{2} = \frac{B*M}{2} = \frac{B*M}{2} = 30m^2$$

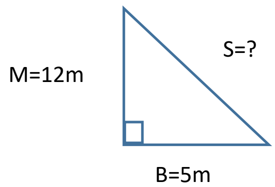
$$\frac{B*12m}{2} = 30m^2$$

$$B*12m = 2*30m^2$$

$$B = \frac{2*30m^2}{12m}$$

$$B = 5m$$

Con este dato de la base podemos resolver el triángulo rectángulo que representa a la vela.



Sólo queda calcular el lado S (la hipotenusa), que lo haremos con el teorema de Pitágoras:

$$S^2 = M^2 + B^2$$

$$S^2 = (12m)^2 + (5m)^2$$

$$S^2 = 144m^2 + 25m^2 = 169m^2$$

$$S^2 = 169m^2$$

$$\sqrt{S^2} = \sqrt{169m^2}$$

$$S = 13m$$

Nos quedamos únicamente con el valor positivo que es el único que tiene correlación con la realidad. El largo de la soga debe ser de 13m.

AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 3:

Ejercicio 1:

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{2-x} = 0$$

a) $x_1 = 2\,;\, x_2 = 1, x_3 = 0$
b) $x_1 = -1; x_2 = -2$
c) $x_1 = 1\,;\, x_2 = 2$
d) No existe una respuesta en los Reales.
e) Ninguna respuesta es correcta.

Clave de corrección:

$$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+1}{2-x}=0$$

$$\frac{(x+2)}{(x-1)}\cdot\frac{(2-x)}{(2-x)}+\frac{(x+1)}{(2-x)}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)}=0$$

$$\frac{(x+2).(2-x)+(x+1)(x-1)}{(x-1).(2-x)}=0$$

$$\frac{2x-x^2+4-2x+x^2-1}{(x-1).(2-x)}=0$$

$$\frac{3}{(x-1).(2-x)}=0$$

Observamos que no hay valores de x que hagan que esta ecuación se haga cero. Por lo tanto, la respuesta es la d.

Ejercicio 2:

Resuelva la siguiente inecuación y grafique el intervalo respuesta sobre la recta de los Reales:

$$\mathbf{5x-2\leq\frac{1}{2}.x+2(x-1)+3}$$

a) [3;5]
b) [3; +∞)
c) (-∞;$\frac{6}{5}$)
d) (-∞;+∞)
e) Ø

Clave de corrección:

Utilizaré las reglas de despeje vistas en la presente unidad:

$$5x-2\leq\frac{1}{2}.x+2(x-1)+3$$

$$5x-2\leq\frac{1}{2}.x+2x-2+3$$

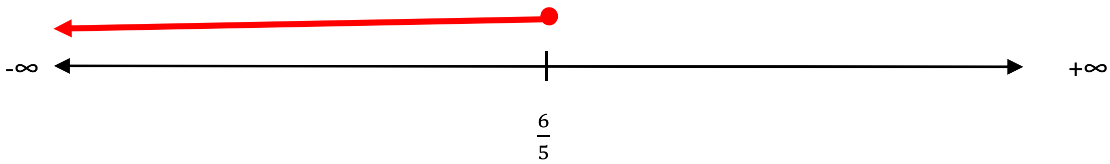
$$5x-\frac{1}{2}x-2x\leq-2+3+2$$

$$5.\frac{2}{2}x-\frac{1}{2}x-2\,.\frac{2}{2}x\leq 3$$

$$\frac{10x-x-4x}{2}\leq 3$$

$$5x\leq 3.2$$

$$x \leq \frac{6}{5}$$



Respuesta: (-∞;$\frac{6}{5}$)

<u>Ejercicio 3:</u>

Determinar los valores de $k \in R$ para que las soluciones de la ecuación sean iguales.

$$x^2 - (k-8).x + k = 0$$

a) $k = 16$
b) $k = 4$
c) $k_1 = 16\,;\ k_2 = 4$
d) $k = \frac{4}{16}$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

<u>Clave de corrección:</u>

Para que las soluciones de la ecuación sean iguales, el determinante de la fórmula resolvente para esta ecuación grado 2 para x, debe ser igual a cero.

$$x^2 - (k-8).x + k = 0$$

Los coeficientes son: $a = 1\,;\ b = -(k-8)\,;\ c = k$.

El determinante de la fórmula resolvente es la siguiente expresión. Debe ir igualada a cero para hallar el valor de k que cumple esa condición:

$$b^2 - 4.a.c = 0$$
$$\left(-(k-8)\right)^2 - 4.1.k = 0$$
$$(-1)^2.(k-8)^2 - 4k = 0$$
$$1.(k^2 - 16k + 64) - 4k = 0$$
$$k^2 - 16k + 64 - 4k = 0$$
$$k^2 - 20k + 64 = 0$$

Debemos hacer una fórmula resolvente para hallar el o los valores de k que hacen que el determinante sea cero. Los coeficientes son: $a = 1\,;\ b = -20\,;\ c = 64$.

$$\frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4*1*64}}{2*1} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} =$$

$$k_1 = \frac{20+12}{2} = 16 \qquad k_2 = \frac{20-12}{2} = 4$$

Las respuestas a este problema son los valores $k_1 = 16\ y\ k_2 = 4$.

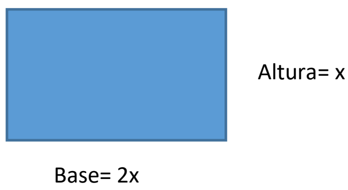
Ejercicio 4:

Desea ampliar una ventana rectangular de una habitación y debe presupuestar el vidrio que cubre la superficie. Sabe que la base de la ventana rectangular es el doble de la altura y que el área actual es 512 cm^2. Si planea ampliar la base un 65% y la altura un 37%, ¿Cuál sería la nueva área de la ventana?

a) $512cm^2$
b) $1157{,}38cm^2$
c) $123{,}14cm^2$
d) $2000{,}32cm^2$
e) $ninguna\ de\ las\ anteriores\ es\ correcta.$

Clave de corrección:

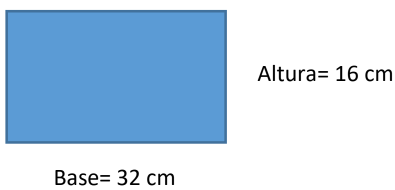
Realizamos un diagrama de la ventana actual:



Sabiendo el área actual, podemos saber las medidas de sus lados:

$$base * altura = área$$
$$2x * x = 512\ cm^2$$
$$2x^2 = 512\ cm^2$$
$$x^2 = \frac{512\ cm^2}{2}$$
$$x^2 = 256\ cm^2$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{256\ cm^2}$$
$$x = 16cm$$

Las dimensiones actuales de la ventana son:



Se quiere ampliar la base un 65% y la altura un 37%, lo que tendrá una nueva área. El cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$base * altura = área$$
$$\left(32cm * \frac{165}{100}\right) * \left(16cm * \frac{137}{100}\right) = (32cm * 1{,}65) * (16cm * 1{,}37) = 1157{,}38cm^2$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LA UNIDAD 4:

En todos los ejercicios que se planteen en este curso, es de suma importancia que se explicite el desarrollo de todos los pasos realizados para llegar a la respuesta o conclusión solicitada. Los evaluadores del examen de ingreso harán hincapié en cómo ha llegado a la respuesta además de si llegó a la respuesta correcta. Por eso les pido que desarrollen cuidadosamente cada explicación antes de ver la clave de corrección.

Utilice TODAS las herramientas y estrategias aprendidas en las unidades anteriores para resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1:

Obtenga la ecuación de la recta y grafíquela en un sistema de ejes cartesianos.

1.1

$$x - 2y = 4$$

a) $y = 2x + 3$
b) $y = \frac{1}{2}x - 2$
c) $y = ½\, x$
d) $y = x - 1$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es verdadera.

Clave de corrección:

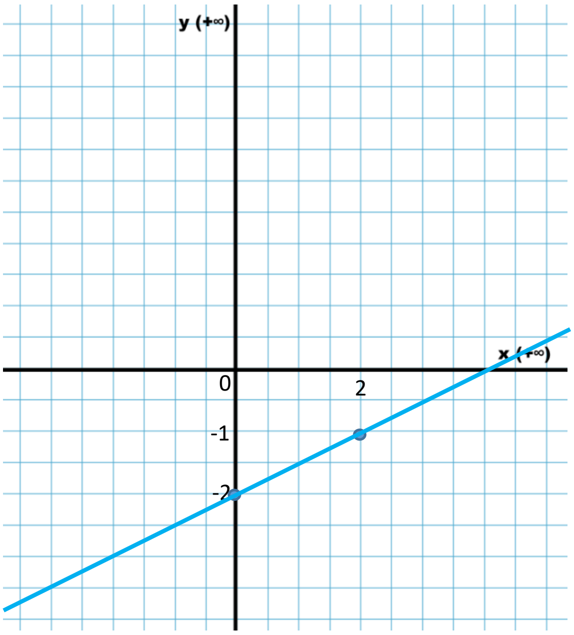
Debemos despejar la variable dependiente (y) para que quede en función de la variable independiente (x).

$$x - 2y = 4$$
$$x - 4 = 2y$$
$$\frac{1}{2}x - 2 = y$$
$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

Tabla de valores:

x	y
0	-2
2	-1

Gráfico:



1.2. Su pendiente es 2/5 y la intersección con el eje de ordenadas es en 4.

a) $y = \frac{5}{2}\ x + 4$

b) $y = \frac{1}{4}x - 1$

c) $y = \frac{2}{5}\ x + 4$

d) $y = 2x + 4$

e) Ninguna de las respuestas anteriores es verdadera.

Clave de corrección:

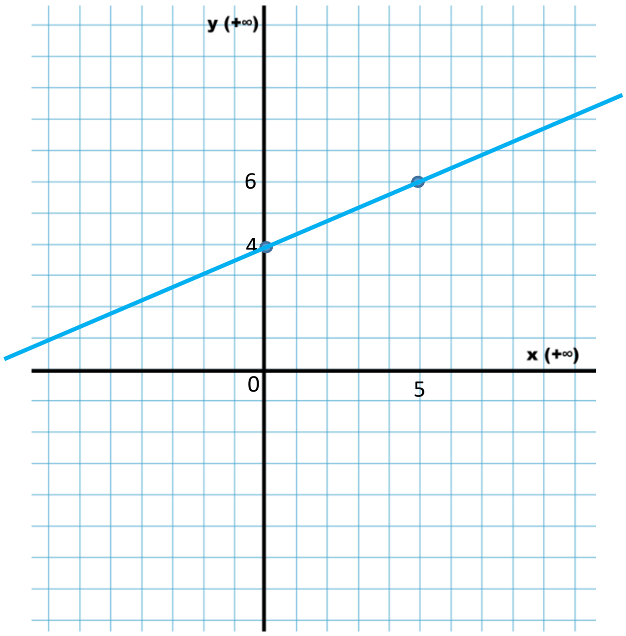
Si su pendiente es 2/5 y la intersección con el eje de ordenadas es en 4, su ecuación es:

$$y = \frac{2}{5}\ x + 4$$

Tabla de valores:

x	y
0	4
5	6

Gráfico:



1.3. Se intersecta con el eje de ordenadas en -3 y con el eje de abscisas en 1.

a) $y = \ x + 3$

b) $y = 3x - 3$

c) $y = 3\,x + 3$

d) $y = x + 3$

e) Ninguna de las respuestas anteriores es verdadera.

Clave de corrección:

Si se intersecta con el eje de ordenadas en -3 y con el eje de abscisas en 1, nos están dando dos pares ordenados: (0,-3) y (1;0)

$$y = m\,x + b$$

$$y = m\,x - 3$$

$$0 = m\,1 - 3$$

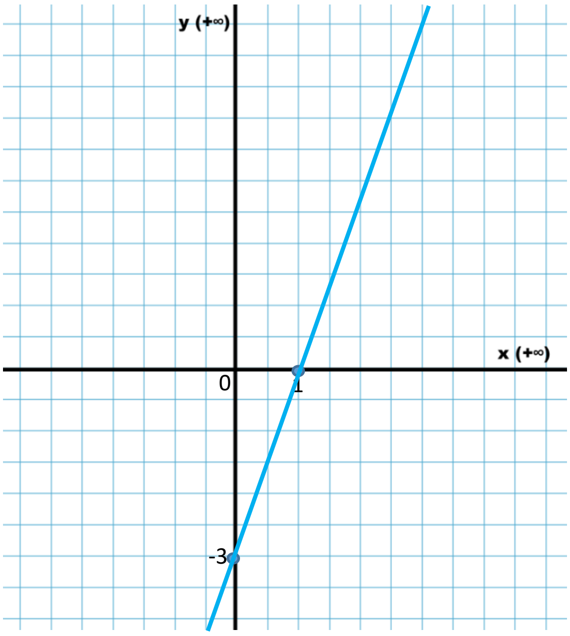
$$m = 3$$

$$y = 3\,x - 3$$

Tabla de valores:

x	y
0	-3
1	0

Gráfico:



1.4. Se intersecta con el eje de ordenadas en 6 y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{4}{3}$

b) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

c) $y = \frac{2}{3}\ x + 6$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 6$

e) Ninguna de las respuestas anteriores es verdadera.

Clave de corrección:

Es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$. De esta recta sacaremos la pendiente.

$$2x + 3y + 4 = 0$$

$$3y = -2x - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}.x - \frac{4}{3}$$

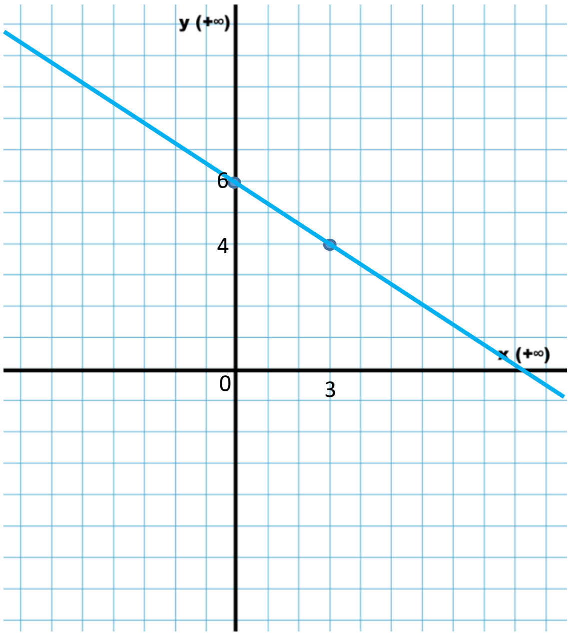
La pendiente de la recta problema es $-\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es 6. Por lo tanto la ecuación es:

$$y = -\frac{2}{3}.x + 6$$

Tabla de valores:

x	y
0	6
3	4

Gráfico:



1.5. Hallar la solución al siguiente sistema y graficar.

$$\begin{cases} -3x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

a) (1;2)
b) (-1;-1)
c) (-1;2)
d) (2;-1)
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

Clave de corrección:

Como primer paso, despejaremos "y" de cada ecuación:

$$-3x - y = 1$$
$$-3x - 1 = y$$

$$x + 2y = 3$$
$$2y = -x + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Ahora igualaremos las "y" de ambas ecuaciones y despejaremos la coordenada "x" de la solución.

$$-3x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2} - 1 = 3x - \frac{1}{2}x$$
$$-\frac{3}{2} - 1.\frac{2}{2} = 3.\frac{2}{2}x - \frac{1}{2}x$$
$$-\frac{5}{2} = \frac{5}{2}x$$
$$x = -1$$

Sabiendo que $x = -1$, calculamos la otra coordenada de la solución con la ecuación $y = -3x - 1$.

$$y = -3x - 1 = -3.(-1) - 1 = 2$$

El par ordenado solución es (-1;2)

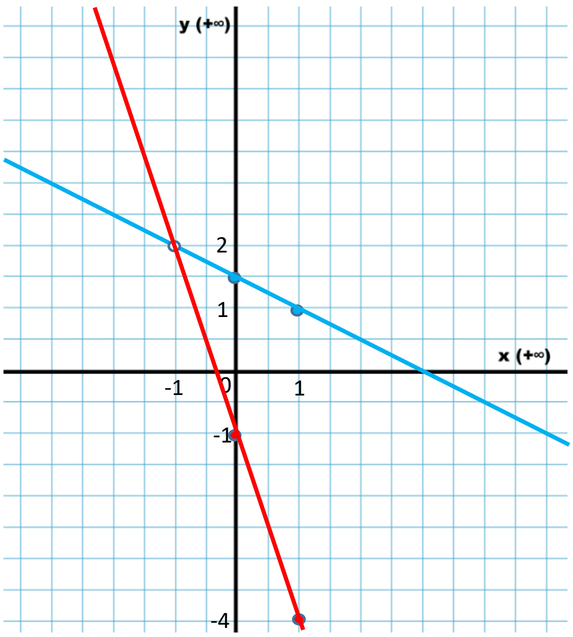
Tabla de valores para $y = -3x - 1$:

x	y
0	-1
1	-4

Tabla de valores para $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$:

x	y
0	3/2
1	1

Gráfico:



Ejercicio 2:

Durante una tormenta se puede ver el rayo antes de oír el trueno porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia entre usted y el centro de la tormenta varía directamente con la longitud del intervalo de tiempo entre el rayo (luz) y el trueno (sonido). Suponga que la tormenta está a 2400m de distancia de usted y tarda 5 segundos en escucharlo. Calcule la constante de proporcionalidad.

a) 3 km/h

b) 480 m/seg

c) 2400 m/seg

d) 480 seg/m

e) Ninguna de las anteriores

Clave de corrección:

La idea es encontrar una constante de proporcionalidad entre el tiempo de viaje del sonido y la distancia recorrida.

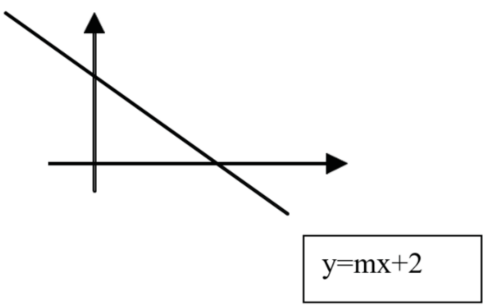
$$2400\ m = \propto .\, 5seg$$

$$\frac{2400\ m}{5\ seg} = \propto = 480\,\frac{m}{seg}$$

La constante de proporcionalidad es la velocidad $\propto = 480\,\frac{m}{seg}$

Ejercicio 3:

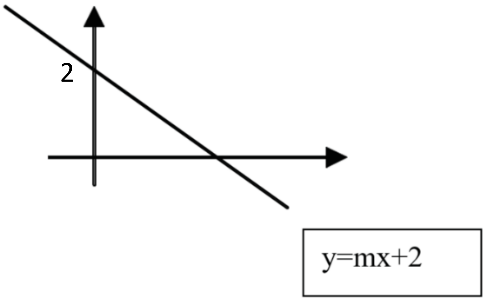
Obtener m para que el área del triángulo rectángulo determinado entre la recta y los ejes coordenados resulte ser 16.



a)
b)
c)
d) -1
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Clave de Corrección:

Observando el gráfico de la consigna y la recta que define el triángulo, sabemos que la altura del triángulo coincide con la ordenada al origen de la recta Y=mx+2



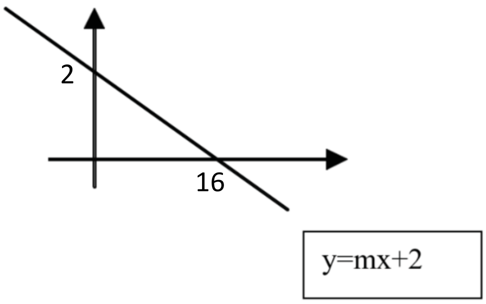
El área de un triángulo es $\frac{base.altura}{2}$. Por lo tanto, si el área debe resultar 16, podré despejar la base que coincidirá con la abscisa al origen.

$$\frac{base.altura}{2} = 16$$

$$\frac{base.2}{2} = 16$$

$$base = 16$$

Sabiendo que la base es 16, el gráfico quedaría completo de la siguiente manera



Por lo tanto:

$$y = m.x + 2$$

$$0 = m.16 + 2$$

$$-2 = m.16$$

$$m = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

La pendiente es -1/8.

AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4:

Ejercicio 1:

Los puntos A=(2.r ; t) y B= (t ; r) pertenecen a la recta R. Se sabe que R es perpendicular a la recta $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{5}$ y tiene su misma ordenada al origen. Encontrar los valores reales de r y t.

a) $r = -11 \; y \; t = 33$
b) $r = -\frac{11}{7} \; y \; t = \frac{33}{7}$
c) $r = -\frac{33}{7} \; y \; t = \frac{11}{7}$
d) $No\ existen\ valores\ Reales\ para\ r\ y\ t.$
e) $Ninguna\ de\ las\ respuestas\ anteriores\ es\ correcta.$

Clave de corrección:

La recta R es perpendicular a $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{5}$ y tiene su misma ordenada al origen.

Si hay dos rectas y_1 e y_2 que tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente y son perpendiculares entre sí, sabemos que $m2 = -\frac{1}{m1}$. Por lo tanto, la recta R tiene pendiente $m = -\frac{4}{5}$.

Ademas sabemos que su ordenada al origen b=$\frac{11}{5}$.

La ecuación de la recta R es:

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$$

Si A=(2.r ; t) y B= (t ; r) son puntos de la recta, entonces satisfacen la ecuación de la recta.

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{5}.2r + \frac{11}{5} \\ r = -\frac{4}{5}t + \frac{11}{5} \end{cases}$$

Tengo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para r y t. Comenzaré despejando t de la ecuación de abajo:

$$r = -\frac{4}{5}t + \frac{11}{5}$$

$$\frac{4}{5}t = -r + \frac{11}{5}$$

$$4t = -5r + 11$$

$$t = -\frac{5}{4}r + \frac{11}{4}$$

Ahora igualaré las t en ambas ecuaciones:

$$-\frac{5}{4}r + \frac{11}{4} = -\frac{4}{5}.2r + \frac{11}{5}$$

$$-\frac{5}{4}r+\frac{11}{4}=-\frac{8}{5}.r+\frac{11}{5}$$

$$\frac{8}{5}.r-\frac{5}{4}r=\frac{11}{5}-\frac{11}{4}$$

$$\frac{8}{5}.\frac{4}{4}r-\frac{5}{4}.\frac{5}{5}r=\frac{11}{5}.\frac{4}{4}-\frac{11}{4}.\frac{5}{5}$$

$$\frac{32r-25r}{20}=\frac{44-55}{20}$$

$$7r=-11$$

$$r=-\frac{11}{7}$$

Sabiendo que $r=-\frac{11}{7}$, despejaré t de la ecuación superior

$$t=-\frac{4}{5}.2\left(-\frac{11}{7}\right)+\frac{11}{5}=\frac{88}{35}+\frac{11}{5}.\frac{7}{7}=\frac{88+77}{35}=\frac{165}{35}=\frac{33}{7}$$

Las respuestas son $r=-\frac{11}{7}\ y\ t=\frac{33}{7}$

Ejercicio 2:

La recta R1 tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$ y ordenada al origen 1. La recta R2 pasa por los puntos A=(1;2) y B=(3;-2). Decidir, justificando la respuesta, si las rectas R1 y R2 son paralelas, perpendiculares, o ninguna de las dos opciones.

a) Son Paralelas
b) Son perpendiculares
c) No son ni paralelas ni perpendiculares
d) R2 no es una recta
e) Ninguna de las opciones es válida.

Clave de corrección:

La ecuación de R1 se escribe directamente del enunciado:

$$y1=\frac{1}{2}x+1$$

R2 pasa por los puntos A=(1;2) y B=(3;-2). Con estos puntos puedo calcular la pendiente:

$$m2=\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}=\frac{-2-2}{3-1}=-\frac{4}{2}=-2$$

La pendiente de R1 es $\frac{1}{2}$. La pendiente de R2 es -2. Sabemos que si ambas rectas son paralelas deberían tener la misma pendiente y resulta NO SER ASÍ.

Si resultasen perpendiculares $m1 = -\frac{1}{m2}$, entonces:

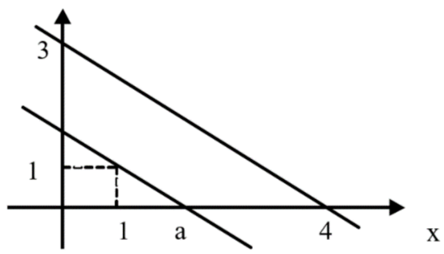
$$m1 = -\frac{1}{m2}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Ambas pendientes cumplen con la condición para que las rectas sean perpendiculares.

Ejercicio 3:

Obtener el valor de "a" en el gráfico siguiente, sabiendo que las rectas representadas son paralelas.



a) $a = \frac{7}{3}$
b) $a = \frac{7}{4}$
c) $a = \frac{3}{4}$
d) $a = -\frac{3}{4}$
e) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Clave de corrección:

De la recta superior podemos calcular la pendiente. Tenemos dos puntos (0;3) y (4;0).

$$Pendiente = \frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4}$$

Si ambas rectas son paralelas deben tener la misma pendiente. La recta de abajo entonces tiene pendiente $= -\frac{3}{4}$ y el punto (1;1) forma parte de la recta.

Comenzamos sabiendo que la ecuación de la recta inferior es:

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

Si (1;1) forma parte de la recta, entonces:

$$1 = -\frac{3}{4}.1 + b$$

$$1.\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = b$$

$$b = \frac{7}{4}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta inferior es:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

La abscisa al origen de esta recta tiene coordenadas (a;0) y satisface la ecuación de la recta. Entonces:

$$0 = -\frac{3}{4}a + \frac{7}{4}$$
$$\frac{3}{4}a = \frac{7}{4}$$

$$a = \frac{7}{3}$$

Ejercicio 4:

Una empresa de telefonía celular le ofrece dos planes para elegir según su consumo en minutos. La tarifa A es una tarifa plana donde debe pagar 3800 pesos mensuales sin límite de minutos. Con la tarifa B debe hacer un pago fijo mensual de 1470 pesos y el costo del minuto sale 2 pesos. ¿A partir de cuántos minutos consumidos por mes le conviene optar por la tarifa A en lugar de la B?

a) 843 min
b) 1050 min
c) 1165 min
d) 2130 min
e) Ninguna de las opciones anteriores son correctas.

Clave de corrección:

Se plantean dos rectas que modelan el pago mensual de telefonía en pesos como variable dependiente y el consumo de minutos telefónicos como variable independiente.

La tarifa A no depende del consumo de minutos así que la ecuación de esa recta será independiente de x. $y_a = 3800\ \$$

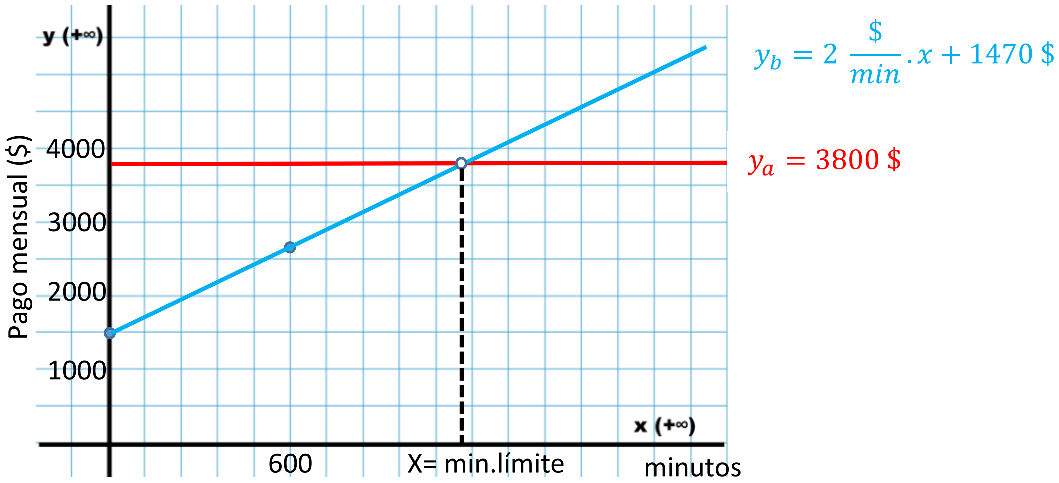
La tarifa B depende del consumo en minutos (2$/min=pendiente) y debe pagar de manera fija (aunque no haya consumido) un basal de 1470$ (ordenada al origen). La ecuación de la recta para la tarifa B será $y_b = 2\ \frac{\$}{min}.x + 1470\ \$$ con x en minutos.

$$y_a = 3800\ \$$$

$$y_b = 2\ \frac{\$}{min}.x + 1470\ \$$$

Tabla de valores para y_b

x	y
0	1470
600	2670



Para decidir cuál plan es mas conveniente debemos averiguar el valor de x de la intersección de las dos rectas.

$$y_a = y_b$$
$$3800\,\$ = 2\,\frac{\$}{min}.x + 1470\,\$$$
$$3800\$ - 1470\$ = 2\,\frac{\$}{min}.x$$
$$\frac{2330\$}{2\,\frac{\$}{min}} = x$$
$$x = 1165\,min$$

Respuesta: Hasta el consumo mensual de 1165 min, es conveniente el plan B. Si consumimos más de 1165 min mensuales nos conviene la tarifa plana.

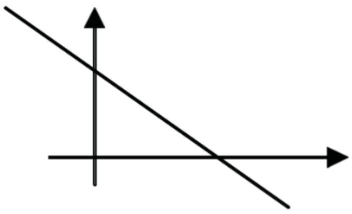
Ejercicio 5:

Obtener el área del triángulo rectángulo determinado en el primer cuadrante por debajo de la recta $y = -7x + 2$ si aumentamos su altura un 30% y disminuimos su base un 10%.

a) 0,28
b) 0,33
c) 2,00
d) 3,5
e) Ninguna de las opciones anteriores son correctas.

Clave de corrección:

La gráfica del problema sería como la siguiente:



$y = -7x + 2$

La altura del triángulo rectángulo sería la ordenada al origen de la recta (2) y la base sería su abscisa al origen:

$$y = -7x + 2$$
$$0 = -7x + 2$$
$$7x = 2$$
$$x = \frac{2}{7}$$

La base del triángulo vale 2/7.

si aumentamos su altura un 30%, el valor de la altura sería $altura = 2 * 1{,}3$ y disminuimos su base un 10%, sería $base = \frac{2}{7} * 0{,}9$. Por lo tanto el área sería:

$$\frac{base * altura}{2} = \frac{\left(\frac{2}{7} * 0{,}9\right) * (2 * 1.3)}{2} = 0{,}33$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LA UNIDAD 5

En todos los ejercicios que se planteen en este curso, es de suma importancia que se explicite el desarrollo de todos los pasos realizados para llegar a la respuesta o conclusión solicitada. Los evaluadores del examen de ingreso harán hincapié en cómo ha llegado a la respuesta además de si llegó a la respuesta correcta. Por eso les pido que desarrollen cuidadosamente cada explicación antes de ver la clave de corrección.

Utilice TODAS las herramientas y estrategias aprendidas en las unidades anteriores para resolver los siguientes ejercicios.

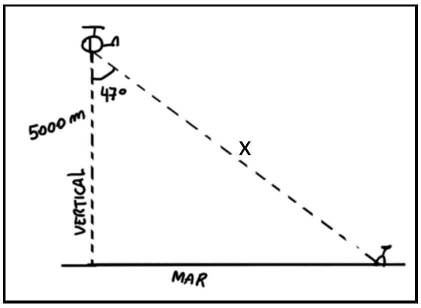
Ejercicio 1:

Desde un helicóptero que vuela sobre el mar a 5000 metros de altura se divisa una boya. La amplitud del ángulo que forman la visual y la vertical es 47º. Calcular a qué distancia de la boya se encuentra el helicóptero.

a) 5000m
b) 6836,6m
c) 4662,5m
d) 7331,4m
e) Ninguna de las anteriores es correcta

Clave de corrección:

Esquema del problema



La función trigonométrica que vincula el ángulo 47°, su adyacente (5000 m) y la hipotenusa (distancia entre la boya y el helicóptero, x) es COSENO.

$$\cos(47°) = \frac{5000m}{x}$$

$$x = \frac{5000m}{\cos(47°)} = 7331{,}4m$$

Respuesta: la distancia entre la boya y el helicóptero es 7331,4m

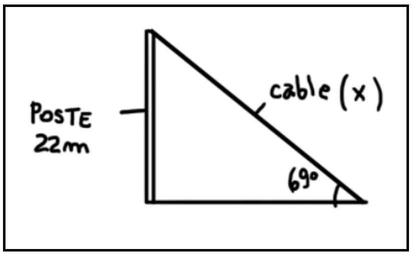
Ejercicio 2:

Para sostener un poste de 22 m de altura se utiliza un cable de acero fijado desde el extremo superior del poste al piso. Calcular la longitud del cable si forma con el piso un ángulo cuya amplitud es 69º.

a) 23,6m
b) 61,3m
c) 8,44m
d) 20,53m
e) Ninguna de las anteriores son correctas

Clave de corrección:

Esquema:



La función trigonométrica que vincula el ángulo 69°, su opuesto (poste de 22m de altura) y la hipotenusa (cable de acero, x) es SENO.

$$sen\ (69°) = \frac{22m}{x}$$

$$x = \frac{22m}{sen\ (69°)} = 23{,}6m$$

Respuesta: el cable debe medir 23,6m.

Ejercicio 3:

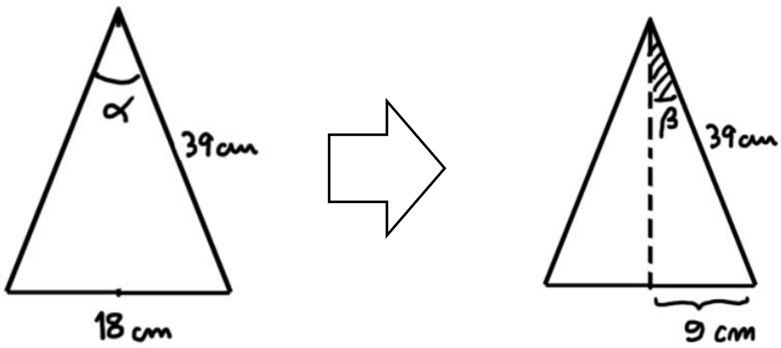
Calcular la amplitud del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles sabiendo que la longitud de cada lado congruente es 39 cm y la longitud de la base es 18 cm.

a) 13,3°
b) 26,6°
c) 76,6°
d) 38,3°
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

Clave de corrección:

Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno diferente. No es un triángulo rectángulo, pero si se traza una vertical desde el vértice superior, se transforma en dos triángulos rectángulos y podemos calcular el ángulo.

Esquema:



Vemos que si calculamos β de la imagen de la derecha y lo multiplicamos por 2, tendremos el valor de α. De la imagen de la derecha planteamos: la función trigonométrica que me vincula el ángulo β, su opuesto (9 cm) y la hipotenusa se el triangulo rectángulo formado (39cm) es SENO.

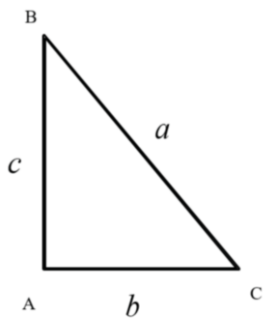
$$sen(\beta) = \frac{9\ cm}{39\ cm}$$
$$\beta = \text{arcoseno}\left(\frac{9}{39}\right) = 13{,}3°$$
$$\alpha = 2.\beta = 2.\,13{,}3° = 26{,}6°$$

<u>Respuesta</u>: la amplitud del ángulo opuesto a la base es 26,6°.

<u>Ejercicio 4:</u>

Dado el triángulo rectángulo ABC, halle el valor de “x” según:

$$\begin{cases} \tan(C) = 4 \\ c = 2x \\ b = x - 2 \end{cases}$$



a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 8$
d) $x = 16$
e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

<u>Clave de corrección y respuesta:</u>

La función trigonométrica que vincula el ángulo C, su cateto opuesto (c) y su cateto adyacente (b) es TANGENTE.

$$\tan(C) = \frac{c}{b}$$

$$4 = \frac{2x}{x-2}$$

$$4.(x-2) = 2x$$

$$4x - 8 = 2x$$

$$4x - 2x = 8$$

$$2x = 8$$

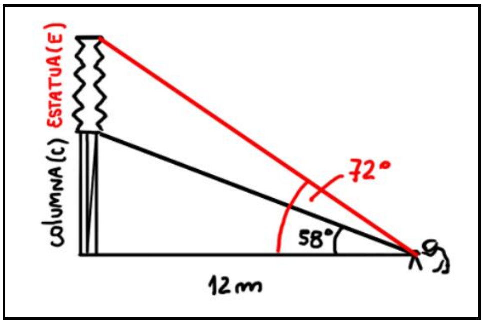
$$x = 4$$

Ejercicio 5:
Una columna sostiene una estatua. Con un teodolito situado a 12 metros del pie de la columna se ve el extremo superior de la estatua con un ángulo de elevación de 72º y el extremo inferior bajo un ángulo cuya amplitud es 58º. Calcular la altura de la estatua.
Nota: El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico que se utiliza para obtener ángulos verticales y horizontales con una precisión elevada.

a) 36,9 m
b) 19,2 m
c) 17,7 m
d) 12 m
e) Ninguna de las opciones es correcta

Clave de corrección:

Esquema:



Con la apertura superior del teodolito podemos calcular la altura de la columna más la estatua (C+E). La función trigonométrica que vincula el ángulo 72°, su lado adyacente (12m) y la altura (lado opuesto, C+E) es TANGENTE. Por lo tanto:

$$\tan(72°) = \frac{C+E}{12m}$$

$$C + E = 12m.\tan(72°)$$

La función trigonométrica que vincula el ángulo 58°, su lado adyacente (12m) y la altura de la columna (lado opuesto, C) es TANGENTE. Por lo tanto:

$$\tan(58°) = \frac{C}{12m}$$
$$C = 12m.\tan(58°)$$

La altura de la estatua será (C+E)-(C):

$$C + E - C = 12m.\tan(72°) - 12m.\tan(58°) = 17{,}7m$$

La altura de la estatua es 17,7 m.

AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 5:

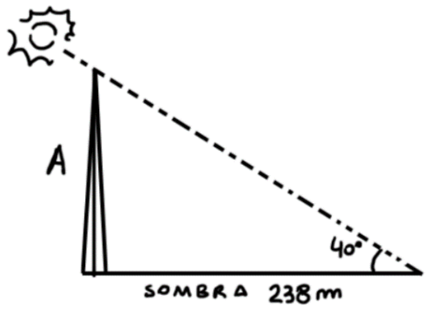
Ejercicio 1:

Calcular la altura de una antena utilizada en un sistema de comunicación sabiendo que su sombra mide 238 metros cuando los rayos del sol forman un ángulo de 40° con el suelo.

a) 153m
b) 182,3m
c) 200m
d) 238m
e) Ninguna de las opciones son correctas.

Clave de corrección:

Esquema:



La función que vincula el ángulo 40°, su adyacente (la sombra de 238m) y su opuesto (la altura de la antena A) es TANGENTE. Por lo tanto:

$$\tan(40°) = \frac{A}{238m}$$
$$A = 238m. \tan(40°) = 200m$$

Respuesta: la antena mide 200 m de altura.

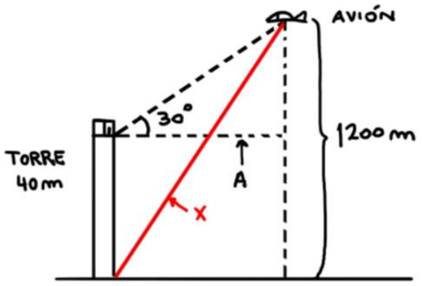
Ejercicio 2:

Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1.200 m y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30º. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de alto?

a) 2009m
b) 2340m
c) 1160m
d) 1200m
e) Ninguna de las opciones es correcta

Clave de corrección:

Esquema:



Para resolver este problema, primero calcularé el cateto A del triángulo rectángulo formado por el avión, la cabina de la torre y su horizontal. La función trigonométrica que me vincula 30° con su cateto opuesto (1200m – 40 m= 1160m) y su cateto adyacente (A) es TANGENTE. Por lo tanto:

$$\tan(30°) = \frac{1160m}{A}$$
$$\mathrm{A} = \frac{1160m}{\tan(30°)} = 2009m$$

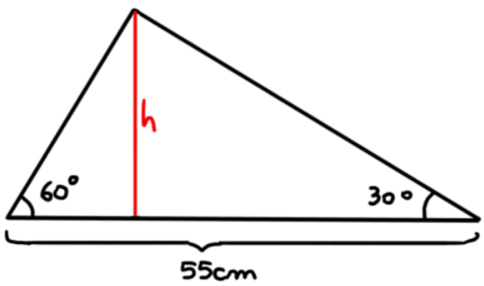
La distancia A es la misma para el cateto ubicado sobre el suelo al pie de la torre (ver esquema). En ese caso, tenemos la altura (1200 m), la base (2009m) y debemos hallar la hipotenusa (x). Para eso usaremos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1200^2 + 2009^2$$
$$x^2 = 5476081\ m^2$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{5476081\ m^2}$$
$$x = 2340m$$

Respuesta: el avión se encuentra a 2340m de la base de la torre.

Ejercicio 3:

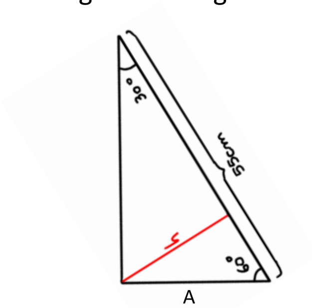
Determinar la longitud de h en el siguiente triángulo:



a) 23,8 cm
b) 27,5 cm
c) 47,6 cm
d) 55 cm
e) Ninguna de las opciones es correcta.

Clave de corrección:

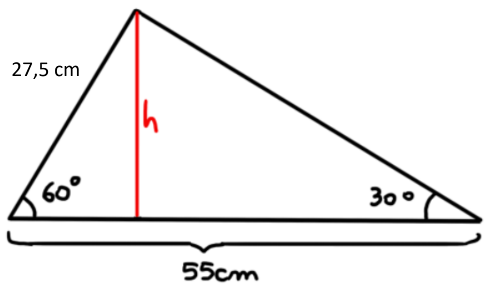
Si suma los ángulos internos del triángulo presentado, notará que es 180°, por lo que es un triángulo rectángulo. Si lo volteamos será más claro:



Si elijo el ángulo de 60°, tengo la hipotenusa de 55cm y necesito averiguar la base del triángulo (cateto adyacente, A), la función trigonométrica que me los vincula es COSENO. Por lo tanto:

$$\cos(60°) = \frac{A}{55cm}$$
$$A = 55cm\,.\cos(60°) = 27{,}5\ cm$$

Habiendo hallado el lado A, el esquema original tiene un nuevo dato:



La función trigonométrica que me vincula el ángulo 60°, su cateto opuesto (h) y su hipotenusa (27,5 cm) es SENO. Por lo tanto:

$$sen(60°) = \frac{h}{27{,}5cm}$$
$$h = 27{,}5cm\,.sen\ (60°) = 23{,}8cm$$

Respuesta: la altura h=23,8 cm.

Ejercicio 4:

Calcular la medida del ángulo determinado entre la base y la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base del mismo es el doble que la altura.

a) 30°

b) 60°

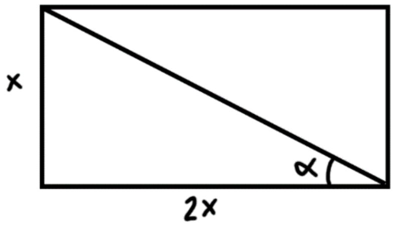
c) 26,6°

d) 15,3°

e) Ninguna de las opciones es correcta.

Clave de corrección:

Esquema:



En el esquema vemos el rectángulo cuya base (2x) es el doble de la altura (x). Debemos calcular α. La función trigonométrica que me vincula el ángulo α, su cateto opuesto (x) y su cateto adyacente (2x) es TANGENTE. Por lo tanto:

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{2x}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = arcotan(\frac{1}{2}) = 26{,}6°$$

Respuesta: el valor de α es 26,6°.

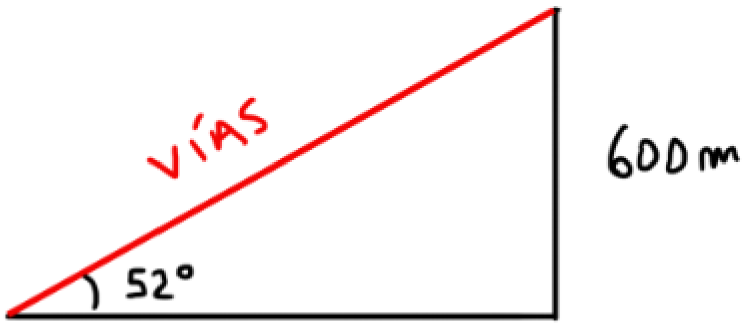
Ejercicio 5:

Se desea construir una vía de ferrocarril sobre una montaña. La cima de la montaña está elevada 600m sobre el nivel de la base y el ángulo de elevación será de 52°. ¿Cuántos metros de vía serán necesarios para el ascenso desde la base?

a) 974,56m
b) 468,77m
c) 761,41m
d) 820,15m
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Clave de corrección:

El esquema es el siguiente:



La función trigonométrica que me vincula el ángulo de 52°, con su cateto opuesto (altura de la montaña) y con la hipotenusa (vías del tren) es el SENO.

$$sen(52°) = \frac{600m}{Vías}$$
$$Vías = \frac{600m}{sen(52°)} = 761{,}41m$$

Respuesta: se necesitan 761,41m de vías.