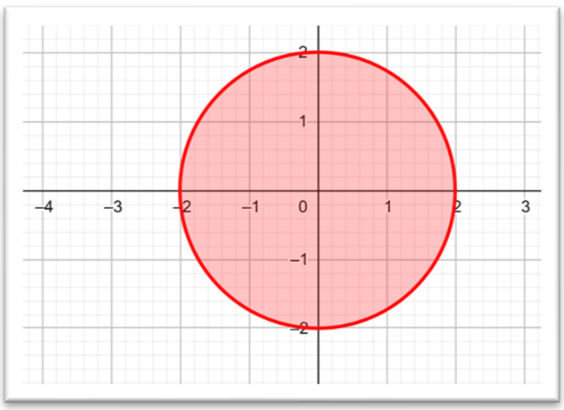
1. Para empezar, te proponemos repasar los contenidos relacionados con vectores realizando los ejercicios del siguiente link

2. Decidir si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales, considerando en todos los casos K = R. Justificar.

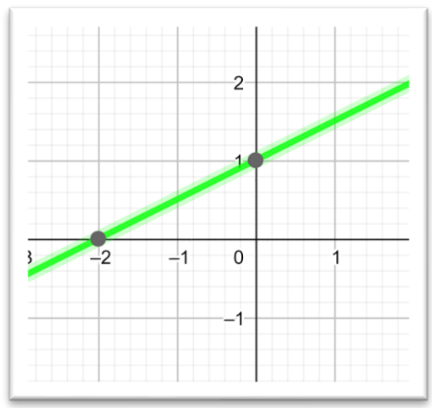
a. $R^2 = \{(x, y)/x \in R, y \in R\}$
b. R^{2x2}
c. El conjunto de polinomios con coeficientes reales.
d. $V = \{(x^2, y^2)/x \in R, y \in R\}$

Subespacios vectoriales

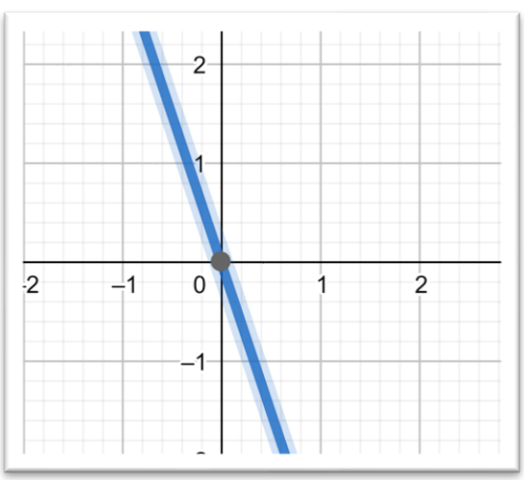
3. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos de R^2 son subespacios. Justificar.



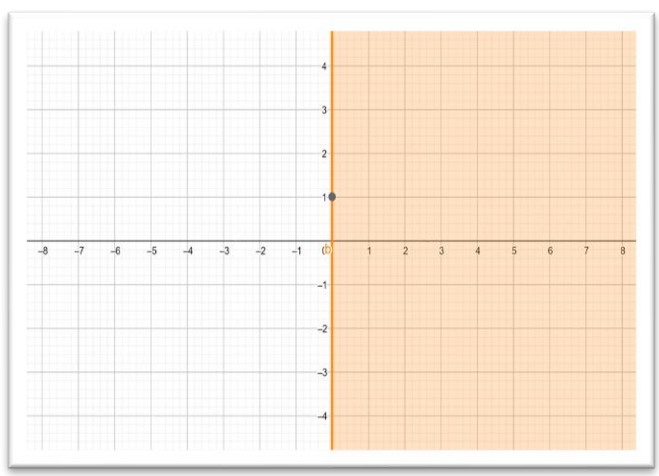
$S_1 = \{(x, y) \in R^2/x^2 + y^2 \leq 4\}$



$S_2 = \{(x, y) \in R^2/\ y = \frac{1}{2}x + 1\}$

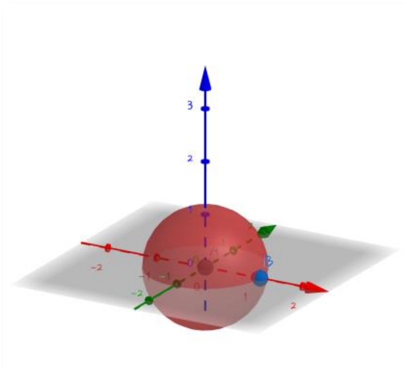


$S_3 = \{(x, y) \in R^2/x + \frac{1}{3}y = 0\}$

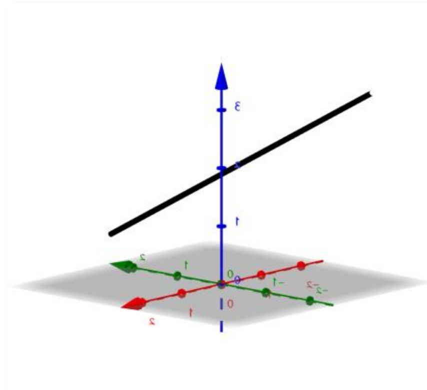


$S_4 = \{(x, y) \in R^2/x \geq 0\}$

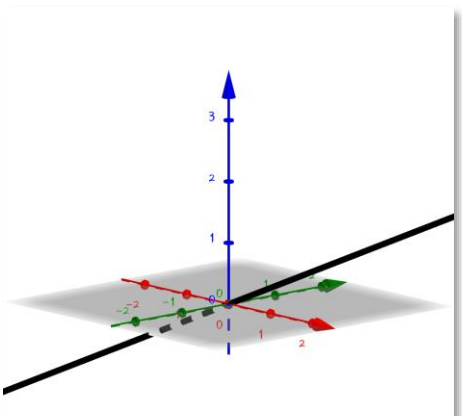
4. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos de R^3 son subespacios. Justificar.



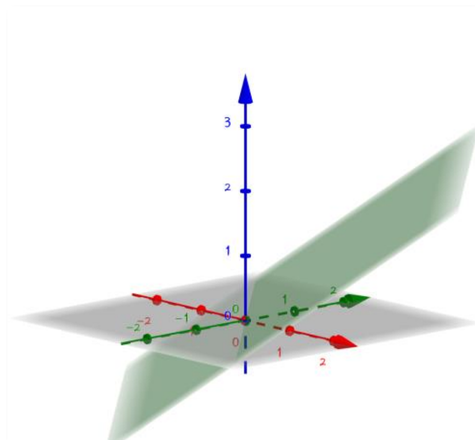
$S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$



$S_2 = ((x, y, z) \in R^3 / \ (x, y, z) = \ t(-1,4,-2) + (0,-2,3) \ t \in R\}$



$S_3 = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = t(2,1,1), t \in R\}$



$S_4 = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y - 2z = 0\}$

5. Analizar si los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial en el que están incluidos.

   a. $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 \ / \ 3x_1 - x_2 = 0\}$

   b. $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 \ / \ x_1 + 2\, x_2 = 1\}$

   c. $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \ / \ 2x_1 - \frac{1}{3}\, x_2 = 6x_3\}$

   d. $S = \{(x, y, z) \in R^3 / \ x^2 + y^2 = z^2\}$

   e. $S = \{ A \in R^{2x2} / \det(A) = 0\}$

6. Analizar en cada caso si es posible escribir el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los elementos del conjunto S.

   a. $S = \{(1, -2), (-3, 0)\}$; $\vec{u} = (-1, 4)$.

   b. $S = \{(0, 0), (2, -4), (1, 5)\}$; $\vec{u} = (-1, 4)$.

c. S = {(2, 1, 0), (-1, 3, 2)}; $\vec{u}$ = (2, 3, -4).

d. S = {(3, 1, 0), (2, 4, 1), (1, 2, 2)}; $\vec{u}$ = (2, 3, -4).

e. S=$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; $\vec{u}$ = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Hallar todos los valores de k $\in$ R para los cuales el vector (4, 1, k) es combinación lineal de (-1, -1, 1) y (2, 3, 0).

Subespacio generador

8. Decidir si los siguientes conjuntos generan al espacio vectorial V que los contiene

a. A = {(1,0), (-1,2)}, $V = R^2$

b. A = {(1,0,1), (2,-1,0)}, $V = R^3$

c. A = {(1,0,0), (0,1,1), (0, 1,0)}, $V = R^3$

d. A = $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V = R^{2x2}$

9. Hallar un conjunto de generadores para cada uno de los siguientes subespacios

a. $S = \{(x, y) \in R^2 / \; x - 2y = 0\}$

$b \; S = \{(x, y, z) \in R^3 / \; y + z = 0, x - y = 0\}$

c. $S = \{(x, y, z) \in R^3 /$ 2x + y -2z =0}

d. $S = \{ A \; \in R^{2x2} / \; a_{11} = 0\}$

Dependencia e independencia lineal. Base de un subespacio

10. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no linealmente independientes.

a. {(1, 2, -3), (1, 2, 2), (0, 1, 1)}

b. {(1, 0, 1), (0, 0, 1), (1, -2, 1), (0, 0, 0)}

c. {(1, -2, 4)}

d. {(1, 2, 4, -1), (2, 5, 3, 0)}

e. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

11. Hallar todos los valores de k $\in$ R para los cuales el conjunto {(-1,-1,1), (2,3,0), (4,1,k)} es linealmente independiente.

12. Hallar base y dimensión de cada uno de los siguientes subespacios. ¿Qué objeto geométrico representa cada uno de los subespacios de los ítems a, b, c y d?

a. S = {(x, y) $\in$ R^2 / 3x – 2y = 0}.

b. S = {(x, y, z) $\in$ R^3 / 2x + 3y - 4z = 0}.

c. S = {(x, y, z) $\in$ R^3 / x + 2y – z = 0, x + z = 0}.

d. S = gen {(-1, 1, 3), (0, 5, -1)}

e. S = $\{A \in R^{2x2} / a_{11} = 0\}$

13. Dadas las siguientes bases de R^3, escribir las coordenadas de los vectores $\vec{v} = (-1, 2{,}4)$ y $\vec{w} = (0{,}1{,}1)$ en cada una de ellas

$$B_1 = \{(1{,}0{,}1), (1{,}1{,}1), (1{,}1{,}0)\}$$
$$\boldsymbol{B_2} = \{(2{,}1{,}-3), (1{,}0{,}0), (0{,}2{,}1)\}$$

14. Dado el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 0\}$, hallar dos bases distintas de S que contengan al vector (1, 4, -2, -1).

15. Si las coordenadas del vector $\vec{X} \in R^2$ en la base B = {(1, -3), (2, 0)} son $C_B(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, hallar las coordenadas de $\vec{X}$:

a. en la base canónica

b. en la base B’, siendo B’ = {(-3, 3), (4, 1)}

16. Dado el subespacio S = gen {(-1, 0, 1, 3), (2, 1, 0, 5), (0, 4, 8, -4)}

a. Hallar una base y la dimensión de S.

b. Hallar, si existe, el valor de k $\in$ R para que (0, k, -4, 2) $\in$ S.

17. Para cada uno de los siguientes subespacios S hallar una base y la dimensión de su complemento ortogonal, $S^\perp$.

a. S = { $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ / $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$}.
b. S = {$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ / $x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$, $x_1 + x_4 = 0$}.
c. S = {$\vec{X} \in R^3$ / $\vec{X}$ = t(1, -2, 1), t $\in$ R}.
d. S = gen {(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 0, 1)}.

18. Sea Π el plano que pasa por los puntos A = (1, -2, 1), B = (4, -6, 2) y C = (9, -5, -4). ¿Es Π un subespacio de R^3? En caso afirmativo, hallar, si existe, una base y la dimensión de su complemento ortogonal.

19. Para repasar los temas de esta unidad, te proponemos completar el siguiente crucigrama

Algunos ejercicios resueltos

22. Hallar base y dimensión de cada uno de los siguientes subespacios.
b. S = {(x, y, z) ∈ R^3/ 2x + 3y – 4z = 0}.
c. S = {(x, y, z) ∈ R^3 / x + 2y – z = 0, x + z = 0}.

Solución 12 b.

La expresión $2x+3y-4z=0$ corresponde a la ecuación general de un plano que pasa por el origen de coordenadas (el término independiente es nulo), despejando una de las variables (puede ser cualquiera):

$$x=\frac{-3y+4z}{2}$$

$$x=-\frac{3}{2}.y+2.z$$

Reemplazamos en la expresión:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}y+2z\\y\\z\end{pmatrix}$ separando las variables en suma de vectores $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2z\\0\\z\end{pmatrix}$ escribiéndolo como escalar por vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{y}{2}.\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+z.\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ cambiando variables

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t.\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+q.\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ con t y q reales

Esta es la ecuación vectorial del mismo plano anterior. En la misma se leen dos vectores incluidos en el plano que se pueden utilizar para formar una base del mismo:

$B=\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ como está formada por dos vectores la dimensión es 2.

Vale aclarar que la base no es única.

Solución 12 c.

Las expresiones $x + 2y - z = 0$, $x + z = 0$ representan cada una un plano. Por lo tanto, resolver el sistema equivale a hallar la intersección entre dos planos. Como los planos no son paralelos (sus vectores normales no lo son) ni coincidentes, esperamos que la intersección sea una recta. Como son dos condiciones que deben cumplir las ternas (x;y;z) para pertenecer al subespacio S, se deberá resolver el sistema formado por ellas:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ x+z=0\end{cases}$$

Lo hacemos por el método de reducción de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad -\tfrac{1}{2}F_2 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$F_1 - 2.F_2 \rightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ volviendo a las variables: $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

La variable "z" podemos considerarla como libre, despejamos a las otras dos en función de ella $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$ reemplazando:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ expresando como producto entre escalar y vector: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que es la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen de coordenadas. El vector asociado es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o cualquiera que sea combinación lineal de él.

La base tendrá a éste vector como único elemento por eso es de dimensión 1. $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$