eNota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

1. Calcular los siguientes límites aplicando adecuadamente la regla de L'Hopital, indicando el tipo de indeterminación que se presenta en cada caso.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{tg(3h)}{2h}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$ (*)

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{senx}$ (*)

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^3)^{2x^{-3}}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$

2. Hallar el valor de $a \in \Re$ de manera que $f(x)=\begin{cases}\frac{3e^{ax}+2x-3}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 7 & si\ \ x=0\end{cases}$ resulte continua en x = 0.

3. ¿Es x = 2 asíntota vertical de la función f(x) = (x^2-4) ln(x – 2)? Justificar la respuesta.

4. Mauricio realiza un régimen para adelgazar. Ha podido establecer que la cantidad de kilos que adelgaza es función del tiempo durante el cual hace el régimen según la siguiente fórmula: $k(t)=\frac{24e^t}{3e^t+1}-6,$ t > 0

a) Probar que cuanto más tiempo persista más adelgazará.

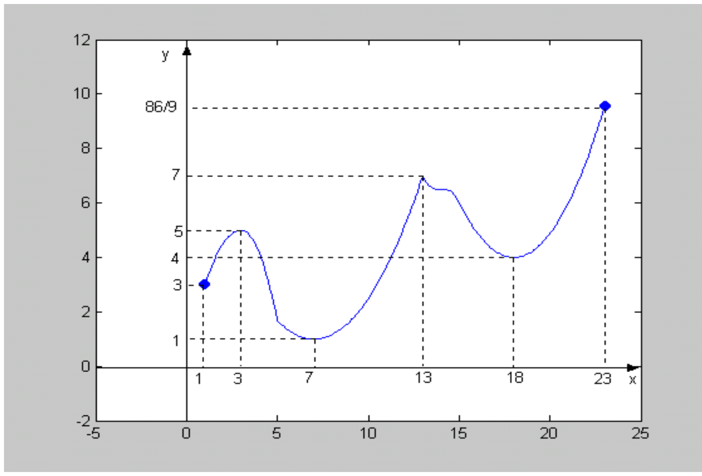
b) Probar que con este régimen no podría adelgazar más de dos kilos.

5. Para cada una de las funciones cuyo gráfico se presenta a continuación:

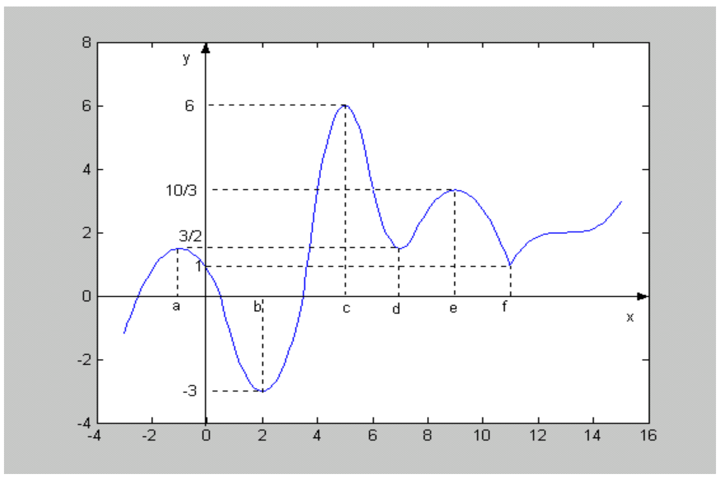
a) **Indicar los extremos** relativos y/o absolutos

b) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

i) $f: [1; 23] \to R$



ii) $f: R \to R$



6. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

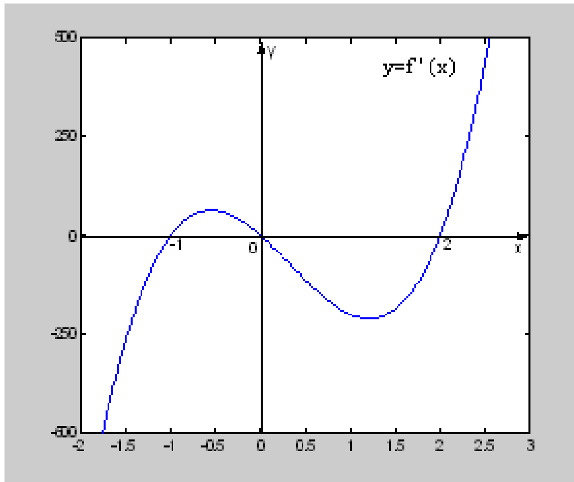
c) $f(x) = \dfrac{\ln(x-8)}{x-8}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \ x \leq 1 \\ x-2 & si \ x > 1 \end{cases}$ (*)

7. Determinar a $\in R$ tal que $f(x) = x^4 - 2a\,x^2 + \ln 3$ alcance un valor mínimo relativo en $x_0 = 1$. Para el valor de a hallado ¿alcanza f otros valores extremos relativos?

8. Sea f una función continua cuyo dominio es el conjunto de números reales. El gráfico de su función derivada es el que se muestra a continuación. Se pide:

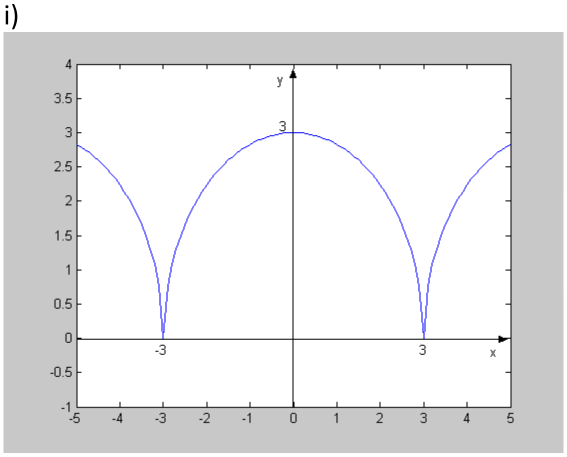
a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Determinar los extremos locales de f.



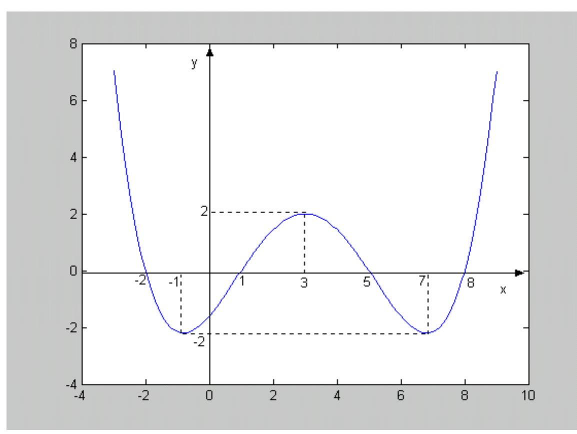
9. Para cada una de las funciones cuyas gráficas se representan a continuación:

a) Determinar su dominio de definición.
b) Indicar los extremos relativos y/o absolutos.
c) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
d) Indicar los puntos de inflexión.
e) Hallar los intervalos de concavidad positiva y de concavidad negativa

i)



ii)



10. Determinar los intervalos de concavidad positiva y negativa y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

b) $f(x)=\left(1+x^2\right)e^x$

c) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

11. Hallar el valor de a $\in R$, a $\neq 0$, para que la función $f(x)=e^{ax^2-ax+2}$ tenga al punto (1; f(1)) como punto de inflexión. (*)

12. Para cada una de las siguientes funciones se pide determinar:

a) el dominio.
b) los ceros.
c) su paridad.
a) sus asíntotas, si existen.
b) los puntos críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y/o absolutos, si existen.
c) los intervalos de concavidad positiva y negativa, y los puntos de inflexión , si existen.
d) un gráfico aproximado.
e) el conjunto imagen.

1) $f(t) = t^4 - 4t^3 + 1$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$

3) $f(x)=(x-4)^{2/3}$

4) $f(x)=e^{-x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

13. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) La gráfica de todo polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.
b) Si $f'(a) = 0$ entonces f alcanza un extremo relativo en x = a.
c) Si $f:[a;b]\to R$ es derivable en (a; b) y $f'(x) > 0$ para todo x $\in$ (a; b), entonces la función f no alcanza un extremo.

14. Desde un barco que se mueve a 20 kmh, se ve otro barco que está a 20 km cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de 15 kmh. ¿Después de cuánto tiempo la distancia que separa a los barcos es mínima?

15. En cierto modelo epidemiológico (Verhulst), la población $x(t)$ que se ha contagiado en un instante t, si inicialmente el número de afectados es α, viene dado por $x(t)=\dfrac{\alpha N}{\alpha+(N-\alpha)e^{-kt}}$, siendo *k* una constante positiva (tanto mayor cuanto más virulenta la enfermedad) y N es el tamaño de la población, $0 < \alpha < N$.

a) Probar que el gráfico de x(t) tiene a la recta x = N como asíntota horizontal, e interpretarlo (la curva recibe el nombre de 'logística').

b) Probar que la máxima velocidad de propagación es $\dfrac{kN}{4}$, y determinar la población en ese instante.

16. Dado todos los rectángulos de perímetro fijo A (A > 0) ¿Cuál es el que tiene área máxima?

17. Un rectángulo de perímetro 18 cm se hace girar alrededor de uno de sus lados generando un cilindro. De todos los rectángulos que se sujetan a la condición de perímetro dado, ¿cuál es el que genera un cilindro de volumen máximo?

18. Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo. Recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo. (*)

19. La velocidad v de una onda de longitud L en agua profunda es $v=v(L)=K\sqrt{\dfrac{L}{C}+\dfrac{C}{L}}$, donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de onda que da lugar a la velocidad mínima?

20. Calcular valores aproximados de: $\sqrt[3]{126}$, $\sqrt{140}$, $\ln(1{,}3)$ utilizando:

a. la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función f elegida convenientemente en un punto adecuado.

b. el diferencial de una función f elegida convenientemente en un punto adecuado.

21. Para la función $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$

a) Calcular el error que se comete si se reemplaza $f(2{,}96)$ mediante diferenciales.

b) Calcular $\Delta f=f(3+\Delta x)-f(3)$ e identificar $df(3;\Delta x)$ como la parte lineal del incremento Δf.

22. Dada $f(x)=\operatorname{sen}x$

a) Obtener un valor aproximado de f(0,2) mediante diferenciales.

b) Obtener un valor aproximado de f(0,2) mediante recta tangente.

c) Aproximar f(0,2) utilizando un polinomio de Taylor de orden 2. ¿Se hubiese obtenido el mismo valor si se utilizaba un polinomio de Taylor de grado 2?

Sugerencia: Podrás revisar el trabajo realizado en este ejercicio en el siguiente link https://www.geogebra.org/m/rscnzuq2

23. i) Hallar el polinomio de grado n que mejor aproxima a cada una de las siguientes funciones en un entorno de x_0

a) $f(x)=\sqrt{1+2x}$ n = 2 $x_0 = 4$

b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ n = 3 $x_0 = 0$

c) $f(x)=e^{2(x-1)}$ n = 3 $x_0 = 1$

ii) Utilizar el polinomio correspondiente para calcular un valor aproximado de $\sqrt{8{,}8}$, $\dfrac{1}{0{,}8}$, $e^{0{,}1}$

24. Calcular un valor aproximado de cos(0,3) , mediante un polinomio de Mac Laurin de orden cuatro.

25. Dada la función $f(x)=x^{5/2}$, justificar si existe o no el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f.

26. Sea $\Delta f = 3x^3(\Delta x)^2 - (x^2 + 3x - 1)^2\,\Delta x + (-x + 1)\,\Delta x + (x^2 + 3)^2\,(\Delta x)^3$ el incremento de la función *f* al pasar de x a x + Δx.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función *f* en el punto (0, 3).
b) ¿Es x = 1 un punto crítico de la función *f*? Justificar.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 1: Calcular los siguientes límites aplicando adecuadamente la regla de L'Hopital, indicando el tipo de indeterminación que se presenta en cada caso.

Antes de resolver algunos ítems de este ejercicio, recordemos que la regla de L´Hopital establece que, dadas dos funciones derivables f y g, con g' (x) $\neq 0$ tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ $(c\in\mathbb{R})$ o bien $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, si $\lim\limits_{x\to c(\infty)} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim\limits_{x\to c(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. Si $\lim\limits_{x\to c(\infty)} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty(o\ -\infty)$, entonces $\lim\limits_{x\to c(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty\ (-\infty)$ respectivamente.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$

Dado que $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ se trata de una indeterminación del tipo $0.\infty$. Para aplicar la regla de L'Hopital, necesitamos trabajar con indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ por lo cual tendremos que reescribir la función para obtener alguna de estas indeterminaciones. Observemos que $x.\,e^x = \dfrac{x}{\left(\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{e^{-x}}$

Multiplicar por e^x es igual a dividir por $\dfrac{1}{e^x}$

Luego, tenemos que $\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$. Dado que este último límite es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (recordar que $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$), entonces estamos en condiciones de aplicar la regla de L´Hopital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x \to -\infty} x.\, e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Aplicamos la regla de L'Hopital, para lo cual derivamos el numerador y el denominador de la función.

Por lo tanto, $\lim_{x \to -\infty} x.\, e^{x} = 0$.

e) $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

En este caso, tenemos una indeterminación del tipo 0^0 Para poder utilizar la regla de L'Hopital y salvar estas indeterminaciones (así como también 1^{∞}, ∞^{0}), tenemos que ayudarnos con la función y = ln(x) como sigue:

Llamemos L al límite que queremos calcular, es decir, L = $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$. Notemos que como x es positivo, estamos calculando el límite de dos funciones positivas por lo que L>0. Podemos aplicar entonces la función logaritmo a ambos lados de la igualdad. Tenemos que;

$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} x^{x}\right)$ Dado que el logaritmo es una función continua:

$\ln(L) = \lim_{x \to 0^+} \left(\ln\left(x^{x}\right)\right)$ Por propiedad del logaritmo: $\ln(a^b) = b.\ln(a)$

$$\ln(L) = \lim_{x \to 0^+} x.\ln(x)$$

Calculemos este último límite utilizando la regla de L'Hopital. Notemos que se trata de una indeterminación del tipo $0.\,\infty$ por lo que tendremos que expresar la función y = x.ln(x) como un cociente a fin de poder aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}.\frac{x^2}{-1} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

Aplicamos la regla de L'Hopital por tratarse de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Luego, $\ln(L) = \lim_{x \to 0^+} x.\ln(x) = 0$. Por lo que ln(L) = 0 y, despejando, L = $e^0 = 1$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1$.

<u>Ejercicio 6</u>: Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si\ x \leq 1 \\ x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

Notemos, en primer lugar, que el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales. Para encontrar los máximos y mínimos locales de la función, necesitamos hallar el conjunto de puntos (o valores) críticos, que son los posibles extremos de la función. Recordemos que este conjunto se define como $\{x \in \operatorname{Dom} f \,/\, f'(x) = 0 \text{ o no existe } f'(x)\}$. Busquemos entonces la derivada de la función f, teniendo en cuenta que, dado que se trata de una función definida por ramas, en x = 1 tendremos que utilizar la definición de derivada. Tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Igualando la derivada a cero, obtenemos que x = 0 es un punto crítico (este valor de x pertenece a la rama correspondiente, dado que 0 < 1). Analicemos aparte que sucede con la derivabilidad de la función en x = 1. Dado que la función es continua en x = 1 (comprobarlo) tenemos que utilizar la definición de derivada: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2 \\ \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 2 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \end{cases}$$

Luego, como los límites laterales no coinciden, concluimos que la función no es derivable en x = 1. Por lo que el conjunto de puntos críticos (y posibles extremos) de f es {0 ; 1}. Analizamos a continuación el signo de la derivada para hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos (si existen) de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dom f	(- ∞ ; 0)	0	(0 : 1)	1	(1; +∞)
f'(x)	f '(-1) = 2>0	0	f' (1/2) =-1 < 0	∄	f' (2) = 1 > 0
f(x)	↗	M	↘	m	↗

Luego, la función es creciente en $(-\infty\ ;0)\ ;\ (1\ ;\ +\infty)$. Es decreciente en el intervalo (0 ; 1)l Tenemos que la función alcanza un máximo relativo en f(0) = 0 y un mínimo relativo en f(1) = -1

<u>Ejercicio 11</u>: Hallar el valor de a $\in$ R , a $\neq$ 0, para que la función $f(x)=e^{ax^2-ax+2}$ tenga al punto (1; f(1)) como punto de inflexión.

El conjunto de los posibles puntos de inflexión de una función está dado por $\{x\in \text{Dom f} /\ f''(x)\ =0 \text{ o } \nexists\ f''(x)\}$. Por lo que tenemos que calcular la derivada segunda de la función f:

$$f(x)=e^{ax^2-ax+2}$$

$$f'(x)\ =e^{ax^2\ -ax+2}.(2ax-a)$$

Usando la regla para derivar un producto de funciones:

$$f''(x)=e^{ax^2\ -ax+2}\,(2ax-a).(2ax-a)+e^{ax^2\ -ax+2}.\ 2a$$

$$f''(x)=\ e^{ax^2\ -ax+2}.\left[(2ax-a)^2\ +2a\right]$$

En el último paso, sacamos la función exponencial como factor común.
Dado que (1 ; f(1)) es un punto de inflexión de la función y tanto el dominio de f como el de su segunda derivada es todo el conjunto de números reales, se verifica que f''(1) = 0. Esta condición nos permitirá hallar el valor de "a" que buscamos:

$$f''(x)=\ e^{ax^2\ -ax+2}.\left[(2ax-a)^2\ +2a\right]$$

$$f''(1)=\ e^{a-a+2}.\left[(2a-a)^2\ +2a\right]\ =\ 0\rightarrow$$

$$e^{2.}\left(a^2\ +2a\right)\ =\ 0\qquad \text{Como } e^2\neq 0$$

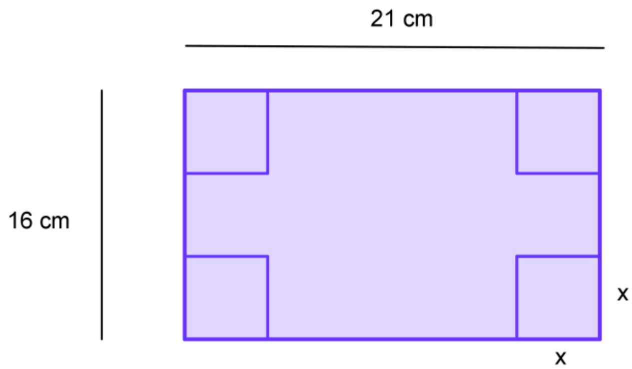
$$a^2\ +2a=\ 0$$

$$a(a+2)=0\rightarrow\quad a=\ 0\ \text{ o }\ a=-2$$

Como en e enunciado del ejercicio tenemos que a no puede ser igual a cero, el valor de a para qe (1; f(1)) sea punto de inflexión es a = -2.

<u>Ejercicio 18</u> Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo. Recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

Realicemos una figura de análisis para entender mejor la situación. Llamemos x al lado del cuadrado a recortar:



Dado que nos piden hallar cuánto debe valer x para que la caja tenga el máximo volumen, necesitamos construirnos la función volumen, que el el producto entre la superficie de la base de la caja y la altura de la misma.. Es decir:

$V(x) = (21 - 2x).(16 - 2x).x$ siendo $(21 - 2x).(16 - 2x)$ el valor de la superficie de la base de la caja y x la altura de la Misma

Tenemos que encontrar el máximo de esta función. Para que resulte más simple derivar, aplcaremos previamente la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} V(x) &= (21 - 2x).(16 - 2x).x \\ &= (336 - 74x + 4x^2).x \\ &= 4x^3 - 74x^2 + 336x \end{aligned}$$

Derivando:

$V'(x) = 12x^2 - 148x + 336$

Planteamos la ecuación $V'(x) = 0$, es decir, $12x^2 - 148x + 336 = 0$ obteniendo como soluciones $x = \frac{28}{3}$ o $x = 3$. Notemos que, por el contexto del problema, x no puede ser igual a $\frac{28}{3}$ dado que este número es mayor a 9 y la altura del rectángulo es de 16 cm.

La solución posible es $x = 3$. Verifiquemos que en este valor hay un máximo, para lo cual utilizaremos el criterio de la derivada segunda:

$V''(x) = 24x - 148$

$V''(3) = 24.3 - 148 = -76 < 0$. Por lo tanto, el volumen se maximiza cuando $x = 3$.

Luego, el lado del cuadrado para que la caja tenga columen máximo tiene que ser igual a 3 cm.