Unidad 3: Expresiones algebraicas fraccionarias

Introducción

En esta Unidad les proponemos repasar las **operaciones combinadas de producto y cociente, suma algebraica y simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.**

Se llaman **expresiones algebraicas fraccionarias** a **los cocientes de polinomios**.

Algunos ejemplos son:

$$\frac{4x+2}{3+7x} \quad y \quad \frac{4x^3-2xy+3}{5x-y}$$

Al no estar determinada la división por cero el denominador de una expresión algebraica fraccionaria o racional no puede ser igual a cero. Así sucede en el primer ejemplo, $x \neq -\frac{3}{7}$, y en el segundo, $y \neq 5x$.

Es importante tenerlo en cuenta para resolver ecuaciones fraccionarias de la Unidad 4.

Puesto que las expresiones racionales son cocientes en donde las variables representan números reales, las propiedades de este conjunto numérico se aplican también a las expresiones racionales. Por esta razón, las operaciones con las expresiones fraccionarias se realizan de la misma manera que las operaciones con las fracciones aritméticas.

Tema 1: Simplificación

En la **simplificación** de expresiones algebraicas **factorizamos** tanto **el numerador** como **el denominador** y utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\frac{A.C}{B.C}=\frac{A}{B} \quad siendo\ \ B.C\neq 0$$

con lo cual podemos simplificar factores comunes del numerador y del denominador.

Ejemplo

$$\frac{(x-1).(x+4)}{(x-2).(x+4)}=\frac{(x-1).\cancel{(x+4)}}{(x-2).\cancel{(x+4)}}=\frac{x-1}{x-2} \quad siendo\, x\neq 2\,,\ x\neq -4$$

Ejemplo de simplificación incorrecta :

¡Incorrecto!

$$\frac{5+7x}{5}=\frac{\cancel{5}+7x}{\cancel{5}}=1+7x$$

En lugar de esto, se escribe:

$$\boxed{\frac{5+7x}{5}=\frac{5}{5}+\frac{7x}{5}=1+\frac{7x}{5}}$$

Ejemplo: Simplificar

$$a)\ \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3} \qquad b)\ \frac{3-x-4x^2}{2x-1} \qquad c)\ \frac{(z+4)^2.(z-1)}{z^2-16}$$

Solución:

$$a)\ \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}=\frac{(x+3).(x-1)}{(x+3).(x+1)}=\frac{x-1}{x+1} \qquad (x\neq -3, x\neq -1)$$

Se **factorizan** el numerador y el denominador y se simplifican los factores comunes.

$$b)\ \frac{3-4x-4x^2}{2x-1}=\frac{(1-2x).(3+2x)}{2x-1}=\frac{-(2x-1).(2x+3)}{2x-1}=-(2x+3) \qquad \left(x\neq \tfrac{1}{2}\right)$$

Se rescribe el término *1-2 x* en la forma equivalente *– (2 x – 1)* y se simplifican los factores comunes.

$$c)\ \frac{(z+4)^2.(z-1)}{z^2-16}=\frac{(z+4)^2.(z-1)}{(z-4).(z+4)}=\frac{(z+4).(z-1)}{z-4} \qquad (z\neq -4,\ z\neq 4)$$

Tema 2: Operaciones combinadas

a) Producto y cociente

Las operaciones de producto y cociente de expresiones algebraicas fraccionarias se realizan **igual que en el caso de fracciones aritméticas**.

Veamos la siguiente tabla que ejemplifica la resolución de estas operaciones:

Si P, Q, R y S son polinomios, entonces:

Operaciones	Ejemplos
$\frac{P}{Q}.\frac{R}{S}=\frac{P.R}{Q.S} \quad (Q, S \neq 0)$	$\frac{2x}{y}.\frac{(x+1)}{(y-1)}=\frac{2x.(x+1)}{y.(y-1)} \quad (y\neq 0, y\neq 1)$
$\frac{P}{Q}:\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}.\frac{S}{R} \quad (Q, R, S \neq 0)$	$\frac{m^2+3}{y}:\frac{4m}{x}=\frac{m^2+3}{y}.\frac{x}{4m}=\frac{x.(m^2+3)}{4my} \quad (my\neq 0, x\neq 0)$

Ejemplo: Realizar las operaciones indicadas y simplificar

$$a)\ \frac{(2x-8)}{x+2}.\frac{x^2+4x+4}{x^2-16} \qquad b)\ \frac{x^2-6x+9}{3x+12}:\frac{x^2-9}{6x^2+18x}$$

Solución:

$$a)\ \frac{(2x-8)}{x+2}.\frac{x^2+4x+4}{x^2-16}=\frac{2.(x-4)}{x+2}.\frac{(x+2)^2}{(x-4).(x+4)}$$

Se factorizan los numeradores y denominadores

$$=\frac{2(x-4).(x+2)^2}{(x+2).(x-4).(x+4)}$$

$$=\frac{2.(x+2)}{x+4} \qquad (x\neq 4,\ x\neq -2,\ x\neq -4)$$

$$b)\ \frac{x^2-6x+9}{3x+12}:\frac{x^2-9}{6x^2+18x}=\frac{x^2-6x+9}{3x+12}\cdot\frac{6x^2+18x}{x^2-9}$$

$$=\frac{(x-3)^2}{3.(x+4)}\cdot\frac{6x.(x+3)}{(x+3).(x-3)}$$

Luego de factorear se simplifican los factores comunes

$$=\frac{(x-3)^2.6x.(x+3)}{3.(x+4).(x+3).(x-3)}$$

$$=\frac{2x.(x-3)}{x+4}\qquad (x\neq -3,\ x\neq 3,\ x\neq -4,\ x\neq 0)$$

b) Suma algebraica (suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias)

Para denominadores iguales se tiene en cuenta que:

Si P, Q, R y S son polinomios, entonces:

Operaciones

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q}\qquad (Q\neq 0)$$

$$\frac{P}{Q}-\frac{R}{Q}=\frac{P-R}{Q}\qquad (Q\neq 0)$$

Ejemplos

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{2x+3x}{x+1}=\frac{5x}{x+1}\qquad (x\neq 1)$$

$$\frac{4y}{y-2}-\frac{y}{y-2}=\frac{4y-y}{y-2}=\frac{3y}{y-2}\qquad (y\neq 2)$$

Para realizar la suma algebraica con denominadores diferentes, primero se determina un denominador común. Este se obtiene al factorizar cada denominador y tomar el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Realizar las operaciones indicadas y simplificar

$$a)\ \frac{3}{x-2}+\frac{x}{x-1} \qquad\qquad b)\ \frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

Solución:

$$a)\ \frac{3}{x-2}+\frac{x}{x-1}=\frac{3.(x-1)+x.(x-2)}{(x-2).(x-1)}$$

$$=\frac{3x-3+x^2-2x}{(x-2).(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+x-3}{(x-2).(x-1)} \qquad (x\neq 2, x\neq 1)$$

- Escribir las fracciones utilizando el común denominador.
- Sumar las fracciones
- Sumar términos semejantes en el numerador

$$b)\ \frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x-1).(x+1)}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)-3.(x-1)}{(x-1).(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-3x+3}{(x-1).(x+1)^2}$$

$$=\frac{-2x+4}{(x-1).(x+1)^2} \qquad (x\neq -1, x\neq 1)$$

- Factorizar.
- Sumar las fracciones utilizando el denominador común.
- Propiedad distributiva en el numerador.
- Sumar términos semejantes en el numerador.

c) Simplificación de una fracción compuesta

Ejemplo. **Realizar las operaciones indicadas y simplificar**

$$a)\ \frac{1+\frac{1}{x+1}}{x-\frac{4}{x}} \qquad b)\ \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}$$

Solución:

$$a)\ \frac{1+\frac{1}{x+1}}{x-\frac{4}{x}} = \frac{1.\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}}{x.\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x+1+1}{x+1}}{\frac{x^2-4}{x}}$$

$$= \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{(x+2).(x-2)}$$

$$= \frac{x}{(x+1).(x-2)} \qquad (x \neq -2, x \neq 0, x \neq -1)$$

- Se expresa el numerador y el denominador como único cociente.
- El denominador común en el numerador es *x +1* y en denominador es *x.*
- Se invierte la fracción del denominador y se efectúa el producto.
- Factorizar los polinomios.
- Simplificar los factores comunes.

$$b)\ \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}}$$

- Sumar los términos en el numerador para expresarlo en una única fracción. De igual manera se resuelve en el denominador.
- A continuación se invierte la fracción del denominador y se efectúa el producto.

$$=\frac{x+y}{y}.\frac{x}{x-y}$$

$$=\frac{x.(x+y)}{y.(x-y)} \qquad (x\neq 0, x\neq y, y\neq 0)$$

Tema 3: Racionalización

a) ¿Qué es la racionalización de un denominador?

Una expresión racional simplificada debería tener **un denominador sin radicales**; por ejemplo, $\frac{2}{\sqrt{7}}$ indica un cociente con un número irracional en el denominador, mientras que $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ no tiene radicales en su denominador.

Está claro que la expresión del denominador aparece luego de multiplicar por $\sqrt{7}$, ya que $\sqrt{7}\,.\,\sqrt{7}=\sqrt{49}=7$. Pero no se puede multiplicar el denominador de una fracción por un número distinto de 1 sin alterar la misma. Así, la solución consiste en multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{2}{\sqrt{7}}$ por $\sqrt{7}$. Es decir, se multiplica por $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ (que es igual a 1) y de esta forma la expresión no se altera.

$$\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{2.\sqrt{7}}{\sqrt{49}}=\frac{2.\sqrt{7}}{7}$$

Al procedimiento de eliminación del radical del denominador de una expresión algebraica se conoce como ***racionalizar el denominador***

Ejemplo: **Racionalizar el denominador**

$$a)\ \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad b)\ \frac{5\,x}{3\,\sqrt{x}} \qquad c)\ \frac{y}{\sqrt[5]{x^2}}$$

Solución:

$$a)\ \frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\ \sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\frac{2.\ \sqrt{5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$b)\ \frac{5\,x}{3\,\sqrt{x}}=\frac{5\,x}{3.\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{5\,x\,\sqrt{x}}{3.\sqrt{x^2}}=\frac{5\,x\,\sqrt{x}}{3.\,x}=\frac{5\,\sqrt{x}}{3}\qquad (x>0)$$

$$c)\ \frac{y}{\sqrt[5]{x^2}}=\frac{y}{\sqrt[5]{x^2}}.\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{y.\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{y.\sqrt[5]{x^3}}{x}\qquad (x\neq 0)$$

Se multiplicó el numerador y el denominador por $\sqrt[5]{x^3}$ para obtener $\sqrt[5]{x^5}$, que es igual a x. En general, para racionalizar un denominador que comprende una **raíz *n*-ésima**, se multiplican numerador y denominador por un factor que proporcione un producto en el denominador que

Para racionalizar denominadores en una expresión como $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$ en vez de multiplicar por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (lo cual no elimina el radical del denominador), se multiplica por $\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ para obtener:

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}}=\frac{2}{1-\sqrt{3}}.\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2.(1+\sqrt{3})}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2.(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{2.\,(1+\sqrt{3})}{-2}=-\left(1+\sqrt{3}\right)=-1-\sqrt{3}$$

En este paso se aplicó el resultado $(a-b).(a+b)=a^2-b^2$ visto en unidad 2.

En general para racionalizar un denominador de la forma $a+\sqrt{b}$, se multiplica por $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. De manera análoga, para racionalizar un denominador de la forma $a-\sqrt{b}$, se multiplica por $\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$. Se dice que las expresiones $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$ son conjugadas entre sí.

b) ¿Qué es la racionalización de un numerador?

Considerando el método anterior de racionalizar denominadores utilizando la expresión conjugada, podemos utilizar este procedimiento para los numeradores.

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+h})^2-1^2}{h.\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$=\frac{1+h-1}{h.\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$=\frac{h}{h.\left(\sqrt{1+h}+1\right)}\qquad (h\neq 0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

- Se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada.
- Se resuelve el producto del numerador aplicando la fórmula $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$
- Se simplifican los factores comunes según propiedades vistas en unidad 1.

Ejercicio 1: Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2+\sqrt{7}}$

$b)\ \sqrt[3]{y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

$c)\ \dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

$d)\ \dfrac{3x^2}{2-\sqrt{x}}$

$e)\ \dfrac{5\,a\,x^2}{\sqrt{x}+2a}$

$f)\ \dfrac{y-2}{\sqrt[3]{x}}$

$g)\ \dfrac{3-x}{\sqrt[5]{x^2a}}$

$h)\ \dfrac{2x+3}{3\sqrt{x}-4}$

Respuestas:

a) $-\dfrac{1}{3}(1-\sqrt{5})(2-\sqrt{7})$

b) $\sqrt[3]{y}+\dfrac{\sqrt{y}}{y}$

c) $\dfrac{y(\sqrt{3}-\sqrt{y})}{3-y}$

d) $\dfrac{3x^2(2+\sqrt{x})}{4-x}$

e) $\dfrac{5ax^2(\sqrt{x}-2a)}{x-4a^2}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}(y-2)}{x}$

g) $\dfrac{(3-x)\sqrt[5]{x^3a^4}}{xa}$

h) $\dfrac{(2x+3)(3\sqrt{x}+4)}{9x-16}$

<u>Ejercicio 2:</u> Efectuar las operaciones indicadas y reducir a una expresión más simple, indicando las restricciones para su definición.

a) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x^3}{x+4}\cdot\dfrac{x-1}{3x+9}$

b) $\dfrac{x^2+5x+4}{2x^3+2}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{x^2-16}$

c) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

d) $\dfrac{x^2-36}{x^2-6x+5}:\dfrac{x^2+12x+36}{x-1}$

e) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}:\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$

f) $\dfrac{2a^2+2a+1}{a^2-a}-\dfrac{a+4}{a-1}$

g) $\dfrac{1}{3a^2x+3a^2}+\dfrac{2a-x}{3a^2-3a^3x+3a^4}$

h) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}}$

i) $\left(\dfrac{1-a}{1+a}-\dfrac{1+a}{1-a}\right).\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$

<u>Respuestas</u>

a) $\frac{1}{3}x^2$ $(x\neq 1, -1, -3, -4)$

b) $\frac{1}{2x-8}$ $(x\neq -1, -4)$

c) $\frac{x-2}{x+4}$ $(x\neq 1, 4)$

d) $\frac{x-6}{x^2-6x+5}$ $(x\neq 1, -6)$

e) $\frac{x-2}{x-1}$ $(x\neq 1, -2, 2)$

f) $\frac{a-1}{a}$ $(a\neq 1, a\neq 0)$

g) $\frac{a^2-x^2+ax+2a-x+1}{3a^2(x+1)(1-ax+a^2)}$

h) $-\frac{a^2+b^2}{2ab}$ $(a\neq b, a\neq -b, a.b\neq 0)$

i) $-\frac{4}{a+1}$ $(a\neq 0, a\neq 1)$

Ejercicio 3: **Indicar si las siguientes expresiones son idénticas o no para todo valor de la variable y justificar la respuesta.**

$$a)\ \frac{16+a}{16} = 1 + \frac{a}{16}$$

$$b)\ \frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$$

$$c)\ \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$$

$$d)\ \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$e)\ \frac{x^2+1}{x^2+x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$f)\ \frac{x+1}{y+1} = \frac{x}{y}$$

$$g)\ 2.\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2a}{2b}$$

$$h)\ \frac{1+x+x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + x$$

$$i)\ \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

$$j)\ \frac{b}{b-c} = 1 - \frac{b}{c}$$

Respuestas

a) Sí

b) $\frac{2}{4+x}$ (1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{x}$ (2) son expresiones distintas, puede verificarse reemplazando por un valor real, por ejemplo x =1. Si x = 0 la expresión (2) no está definida.

c) Las expresiones son distintas, puede verificarse reemplazando por un valor real las variables.

d) Sí, siempre que $b \neq 0$

e) No

f) No

g) No

h) Sí, siempre que $x \neq 0$

i) $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$, siempre que $x \neq 1$

j) No