1. Completar la siguiente tabla y representar gráficamente en un mismo sistema de ejes cartesianos cada fila de la misma. ¿Qué efecto geométrico produce conjugar un número complejo? ¿Y multiplicarlo por -1? Te sugerimos revisar el trabajo realizado utilizando la simulación dada aquí (o el código QR que se muestra a continuación)

z	$-z$	$\bar{z}$	$z^{-1} = \frac{1}{z}$
$z = 2 + i$			
$z = -1 + 3i$			
$z = -i$			
$z = -3 + 4i$			

2. Dados $z = 2 + 2\,i$, $w = -i$, $v = 1 + \sqrt{3}i$, efectuar las siguientes operaciones y representar gráficamente el resultado obtenido en el plano complejo.

a. $z.w$

b. $\bar{v} - w$

c. $(2w - \bar{z}).(i - v)$

d. $2(-z + 3v)$

3. a. ¿Cómo se interpreta geométricamente la suma de dos números complejos? Te proponemos construir tu propia simulación para responder esta pregunta. Utilizaremos la aplicación GeoGebra

- Para dispositivos móviles: Geogebra Calculadora Gráfica

- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

Interpretación geométrica de la suma de dos números complejos

¿Cómo graficar un vector en Geogebra?

1. Con el comando **punto**, marcar en el plano dos puntos cualesquiera: A y B

2. Construir dos vectores: uno cuyo extremo inicial es el origen de coordenadas, (0,0), y cuyo extremo final es el punto A y el otro con el mismo extremo inicial y B como extremo final. El comando para construir los vectores desde el origen es:

Vector(<Punto>)

3. Si el punto A = (a, b) representa al número complejo z = a + bi y el punto B = (c, d) representa a w= c + di, la suma de z y w estaría dada por A+B. Construir, siguiendo el paso 2, el vector A+B.

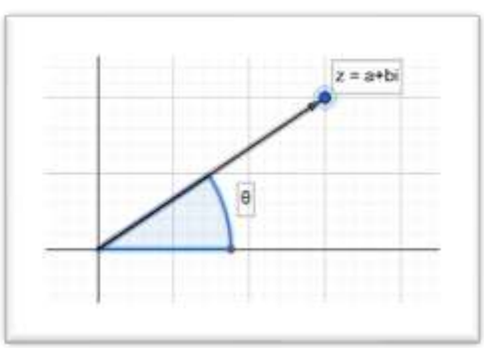
b. Dados los números complejos z = -1 + 3i, w= 1 – i, calcular la longitud de cada diagonal del paralelogramo determinado por los vectores que representan a z y w.

4. ¡A practicar las diferentes operaciones con números complejos!

Para continuar con la práctica, te recomendamos que mires los siguientes videos

Relaciones trigonométricas
Pasaje al primer cuadrante
Pasaje al primer cuadrante: Ejemplos
Ecuaciones trigonométricas

5. Un número complejo $z = a + bi$ puede expresarse en términos de su módulo ($|z|$ =: longitud del vector que une el origen de coordenadas con el par ordenado (a, b)) y su argumento θ (ángulo que forme el vector con el semieje positivo del eje horizontal)



Teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas, expresar z en términos de su módulo y argumento. ¿Entre qué valores se encuentra el argumento de acuerdo al cuadrante al cual pertenece el número complejo? ¿Cuál es el valor del argumento si a =0?

6. Calcular módulo y argumento de los números complejos z, v, w del ejercicio 2 y expresarlos en forma trigonométrica y exponencial. ¿Cuál es el efecto geométrico que se produce en z al multiplicarlo por w? Para responder, puedes ayudarte con la siguiente simulación (o el código QR que se muestra a continuación)

7. Se sabe que el número complejo $z = a - \sqrt{3}i$ pertenece al tercer cuadrante y tiene módulo igual a 2.

a. Determinar el valor de a, parte real del número complejo z.
b. Determinar el valor del argumento de z. ¿Cuál es el ángulo del primer cuadrante que se utiliza para realizar el pasaje?

8. Raíces n- ésimas de un número complejo

Dado $z \in C$, buscamos todos los números complejos w tales que $w^n = z$. A partir del siguiente applet (o el código QR que se muestra a continuación) responder:

a. Las raíces n-ésimas de un número complejo se encuentran sobre una circunferencia. ¿Cuál es el centro y el valor del radio de la misma? ¿Cuántas números complejos w son soluciones de la ecuación $w^n = z$?
b. Además, las raíces son los vértices de un polígono regular. ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo que queda determinado? Considerar $n = 3$ y calcular el argumento de las raíces cúbicas de $z = 1 + i$.
c. Considerando el módulo y el argumento de cada raíz, deducir una expresión que permita calcular las n raíces n-ésimas de un número complejo z

9. Determinar todos los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $z^2 + 2 = 3z$
b. $z^3 + 2i = 0$
c. $(z^2 - 4).(z^2 - 2z + 5) = 0$
d. $z^3 + 8 = 0$
e. $z^4 + \sqrt{3}i = 1$
f. $z^6 = 1 + i$
g. $z^4 - 81 = 0$

10. Graficar cada una de las siguientes regiones en el plano complejo.

a. $R = \{z \in C : |z| < 2\}$

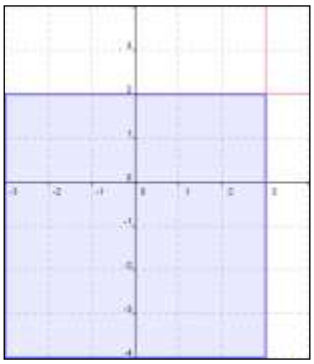
b. $R = \{z \in C : Re(z) \geq 1\}$

c. $M = \{z \in C: |z-1|^2 + Re(z^2) - [Re(z)]^2 \leq 1\}$

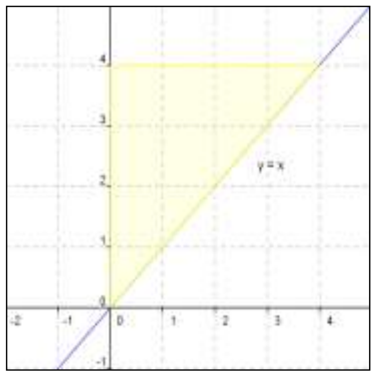
d. $N = \{z \in C: Re(iz) + |z^2| + Re(z^2) \leq 0\}$

11. Escribir en la notación de complejos y de pares ordenados de números reales cada uno de los conjuntos que se representan en los siguientes gráficos.

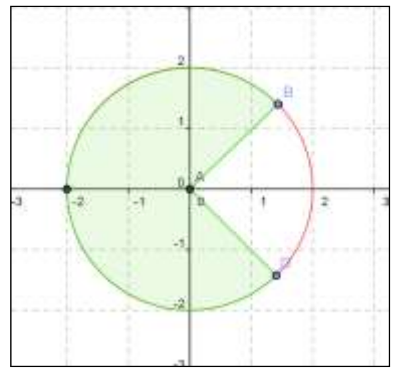
a.



b.



c.



Ejercicios resueltos

Ejercicio 9

Determinar todos los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones:

c. $(z^2-4).(z^2-2z+5)=0$

Resolución:

Buscamos los números complejos z que satisfacen la ecuación

$$(z^2-4).(z^2-2z+5)=0$$

Como tenemos un producto igualado a cero, alguno de los factores deberá ser igual a cero:

$$(z^2-4)=0 \quad o \quad (z^2-2z+5)=0$$

Luego, los números complejos que buscamos serán aquellos que sean solución de

$$(z^2-4)=0 \quad (A) \;\; o \quad (z^2-2z+5)=0 \quad (B)$$

Luego, resolveremos (A)

$$(z^2-4)=0$$

Usaremos diferencia de cuadrados (podríamos utilizar fórmula resolvente o despejar z)

$$(z-2).(z+2)=0$$

$$(z-2)=0 \quad o \quad (z+2)=0$$

Soluciones de (A)

$$\boxed{z=2\,, \quad z=-2}$$

Y resolveremos (B),

$$(z^2-2z+5)=0$$

Utilizando la fórmula resolvente:

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.5}}{2.1}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}\overset{\substack{\sqrt{-16}\ tiene\ soluciones -4i,4i \\ ya\ que\ (4i)^2=-16\ y\ (-4i)^2=-16}}{\triangleq}\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$$

Soluciones de (B)

$$z=1-2i, \qquad z=1+2i$$

Luego, los números complejos que satisfacen la ecuación

$$(z^2-4).(z^2-2z+5)=0$$

Son

$$\{-2,2,1+2i,1-2i\}$$

d. $z^3+8=0$

Resolución:

Buscamos los números complejos z que satisfacen la ecuación

$$z^3+8=0$$

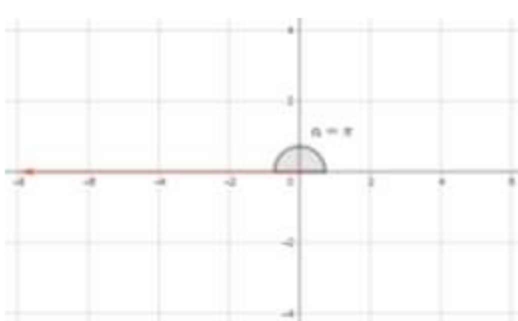
$$z^3=-8$$

Las soluciones de la ecuación serán las raíces cúbicas de -8.

Para hallar los $z\in C$ tales que $z^n=w$, la siguiente fórmula nos permitirá obtener la n raíces enésimas de w

$$z_k=\sqrt[n]{|w|}.e^{\left(\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}\right)i}, \quad 0\le k\le n-1$$

En nuestro caso, $n=3, w=-8$.



En este caso, $\arg(w) = \pi$ (ángulo positivo que forma el vector que representa al complejo -8 con el semieje real positivo) y $|w| = 8$ (longitud del vector que une el (0,0) con el (8,0)).

Luego, las raíces cúbicas de -8 serán

$$z_k = \sqrt[3]{8}.e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)i}, \quad 0 \le k \le 2$$

$$z_k = 2.e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)i}, \quad 0 \le k \le 2$$

Reemplazando k por $0, 1\ y\ 2$, obtendremos las soluciones de la ecuación $z^3 + 8 = 0$:

$$z_0 = 2.e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$z_1 = 2.e^{\left(\frac{4\pi}{3}\right)i}$$

$$z_2 = 2.e^{\left(\frac{5\pi}{3}\right)i}$$

Ejercicio 10

d. $\boldsymbol{N = \{z \in C: Re(iz) + |z^2| + Re(\,z^2) \le 0\}}$

Resolución:

El conjunto N representa una región del plano complejo, es decir del plano (xy).
Este conjunto está formado por números complejos $z \in C$ que cumplen una condición:

$$Re(iz) + |z^2| + Re(\,z^2) \le 0 \quad (1)$$

Para obtener la expresión cartesiana de la región N será conveniente utilizar la forma binómica de un número complejo para la representación gráfica:

$$z = x + yi,\ donde\ x, y \in R \quad (2)$$

Iremos reescribiendo cada término de (1) según (2).

En el primer término se pide la parte real del número complejo iz

$$iz = i(x + yi) = xi + yi^2 = xi + y(-1) = xi - y = -y + xi$$

Entonces

$$Re(iz) = Re(-y + xi) = -y \quad (3)$$

En el segundo término, usaremos que $|z^n| = |z|^n, n \in N$

$$|z^2| = |z|^2 = |x + yi|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 \quad (4)$$

En el último término se pide la parte real del número complejo z^2, para ello, lo expresaremos en términos de (2)

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 + 2xyi + y^2(-1) = x^2 + 2xyi - y^2 \quad (5)$$

Observemos en (5) que los términos que no contienen la unidad imaginaria i son el primero y el último, por lo tanto, como $x, y \in R$, la parte real de z^2 será $x^2 - y^2$, es decir

$$Re(z^2) = x^2 - y^2 \ (6)$$

Reemplacemos (3), (4), (5) en (1),

$$Re(iz) + |z^2| + Re(\,z^2) \leq 0$$

$$-y + (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) \leq 0$$

$$-y + x^2 + \cancel{y^2} + x^2 - \cancel{y^2} \leq 0$$

$$-y + 2x^2 \leq 0$$

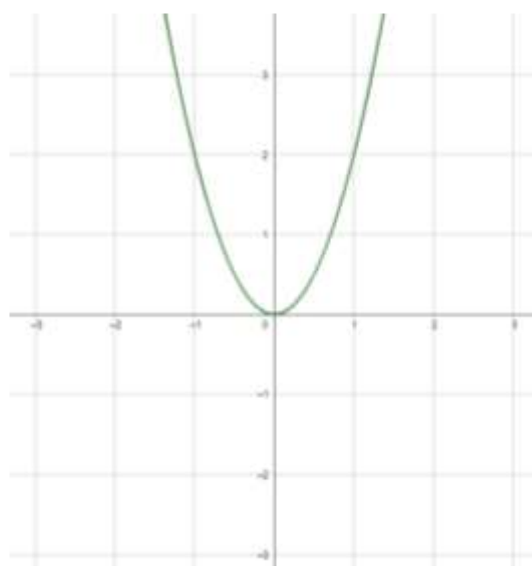
$$-y \leq -2x^2$$

$$y \geq 2x^2$$

Luego, la región N está formada por los puntos $(x, y) \in R^2$ que cumplen

$$y \geq 2x^2$$

Consideremos el borde de la región, es decir, los puntos $(x, y) \in R^2$ que cumplen $y = 2x^2$



Ahora los puntos (x, y) del plano que cumplen $y \geq 2x^2$ son los que se encuentran por encima de la parábola (basta tomar un punto, por ejemplo, el (1,3) y comprobar si se verifica o no la condición).

Luego, la región N será: