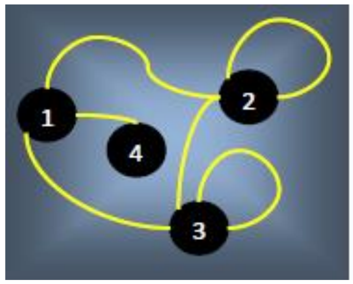
Álgebra matricial

1. Los diagramas de redes de interconexión o grafos son una descripción gráfica compuesta por nodos o vértices, unidos entre sí por ramas o aristas. En algunos problemas, los nodos representan ciudades y las líneas o aristas caminos entre ellas. Un problema clásico consiste en asignarle un peso a las aristas (que puede representar costo o distancia) y encontrar el camino de mínimo costo (o de mínima distancia) entre dos o más ciudades
Todo grafo puede representar mediante una matriz de adyacencia A, cuyo orden es el número de nodos y cuyo elemento de la fila i columna j es 1 si una línea conecta el nodo i con el nodo j, mientras que es 0 en caso contrario.

a. Determinar la matriz de adyacencia del grafo dado

b. Si la matriz A^n en la posición ij indica la cantidad de caminos de longitud n que conectan el nodo i con el nodo j, ¿cuántos caminos de longitud dos conectan el vértice 2 con el 4? ¿Cuáles son?



2. En el siguiente link podes practicar sumas y restas de matrices.

3. Supongamos que (x,y) es una de las posiciones en la que está ubicado un determinado objeto. Si queremos modificar dicha posición (x,y) en c_x unidades horizontalmente y en c_y unidades verticalmente, podemos hacerlo usando multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Siendo (x’,y’) la nueva posición.
Por ejemplo, si queremos duplicar el tamaño de un objeto basta modificar cada punto en el que está ubicado el objeto de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si queremos reducir a la mitad el tamaño de un cuadrado de vértices $(0{,}0), (1{,}0), (0{,}1)$ y $(1{,}1)$, ¿cuál es la matriz diagonal que tenemos que utilizar? Si a partir de los mismos puntos queremos construir un rectángulo cuyos lados tengan longitudes 5 y 3, ¿cuál sería la matriz diagonal?

4. La rotación de un objeto ubicado en la posición (x, y) en un ángulo de amplitud θ radianes está dada por

$$R(x\ y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a. Si rotamos el segmento de extremos $(0{,}0)$ y $(1, -3)$ en un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{4}$, ¿Cuáles son los extremos del segmento rotado?

b. Utilizando el comando Rota de GeoGebra, girar la siguiente figura en un ángulo de amplitud $\frac{3}{2}\pi$

5. Para las unidades de tres alimentos, la siguiente matriz indica los correspondientes contenidos de vitaminas en unidades apropiadas

Vitaminas / Alimentos	A	B	C	D
1	0,5	0,3	0.1	0
2	0,3	0,1	0	0,3
3	0,2	0,4	0,6	0,1

a. ¿Qué alimento no contiene vitamina C? ¿Y vitamina D? ¿Qué alimento contiene igual cantidad de vitamina A y D?
b. ¿Cuánto se consume de cada tipo de vitamina si se comen 4 unidades del alimento 1; 5 unidades del alimento 2 y 12 unidades del alimento 3?
c. Si sólo se paga por el contenido vitamínico de cada alimento y se han abonado respectivamente 15 unidades monetarias (u.m.), 10 u.m., 18 u.m. y 20 u.m. por las unidades de las cuatro vitaminas, ¿cuánto cuesta la unidad de cada tipo de alimento?

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \Re^{2x3}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \Re^{3x2}$ realizar, si es posible, las siguientes operaciones:

a. $2A$
b. $A + B$
c. $A + B^T$
d. $A^T - 3B$
e. $A.B$ Calcular $tr(A.B)$
f. $B.A$ Calcular $tr(B.A)$

Nota: A lo largo de esta práctica podrás comprobar los cálculos realizados utilizando alguna de las siguientes aplicaciones gratuitas para móviles:

Editex Determinantes (Android y IOS)

Matrices (Sólo Android) https://es.symbolab.com/

7. Calcular los valores de x, y de modo tal que se verifique la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 3x & 2 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

a. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

9. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $det(A) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3k & 1 & 2 \\ 0 & k^2 - 4 & 3 \\ 0 & 0 & k^2 - 3k \end{pmatrix}$.

10. Propiedades del determinante

a. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ se pide calcular los siguientes determinantes: $det(A)$, $det(B^T)$, $det(A.B)$, $det(2A)$, $det(A^{10})$, $det(A^5.B - A^5)$.

b. Si $A, B \in \mathbb{R}^{3\,x\,3}$ tales que $det(A) = -3$, $det(B) = 5$, calcular $det(2A^2.B^T)$

11. i. Decidir si las siguientes matrices son inversibles.
ii. En caso afirmativo, hallar la matriz inversa. Podés ayudarte con las apps ☺

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d. $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

12. Sean A y B las matrices del ejercicio 10. Hallar todas las matrices $X \in \mathfrak{R}^{3x3}$ tales que verifican cada una de las siguientes ecuaciones matriciales.

i. $AX = B$
ii. $XA = 4A + 2B$

Ejercicio resuelto

7. Calcular los valores de x, y de modo tal que se verifique la siguiente igualdad.

$$(3x \quad 2 \quad -y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (5 \quad -2)$$

Resolución:
Debemos calcular los valores de x, y para los cuales se cumple que el producto entre las matrices

$$(3x \quad 2 \quad -y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(A)}$$

resulte igual a la matriz

$$(5 \quad -2)$$

Como en (A) tenemos una matriz de orden 1x3 multiplicando a una matriz de orden 3x2, la matriz producto quedará de orden 1x2. Recordemos que el producto es posible siempre que la cantidad de columnas de la primera matriz coincida con la cantidad de filas de la segunda matriz.
Realicemos el producto:

$$(3x \quad 2 \quad -y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (3x.1 + 2.(-2) + (-y).5 \quad 3x.2 + 2.1 + (-y).(-1)) = (3x - 4 - 5y \quad 6x + 2 + y)$$

Luego

$$(3x \quad 2 \quad -y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = (5 \quad -2)$$

$$(3x - 4 - 5y \quad 6x + 2 + y) = (5 \quad -2)$$

Para que esta última igualdad entre matrices se verifique, tienen que ser iguales los elementos correspondientes:

$$\begin{matrix} 3x - 4 - 5y = 5 \\ 6x + 2 + y = -2 \end{matrix} \qquad \text{(B)}$$

Para calcular x, y debemos resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (B), equivalentemente:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 6x + y = -4 \end{cases}$$

Podemos despejar y de la segunda ecuación y reemplazar en la primera:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ y = -4 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5(-4 - 6x) = 9 \\ y = -4 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 20 + 30x = 9 \\ y = -4 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 33x = -11 \\ y = -4 - 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -4 - 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \end{cases}$$

Luego, los valores serán $x = -\frac{1}{3}, y = -2$