Investigacion de operaciones

Clase 2:
Formulación General de Programación Lineal

PL. Una primera definición…

Método matemático para determinar el valor óptimo de variables que se relacionan mediante ecuaciones lineales y que compiten por recursos limitados.

Aplicaciones ..., de las más diversas.

- Planeamiento Operacional: Producción, Comercial, Financiero
- Formulación de productos. Modelos de Composición. Mezclas. Armado.
- Nivelación de recursos. Asignación de dotaciones.
- Secuenciamiento de tareas. Asignación por lotes.
- Problemas de Distribución . Transporte y transbordo
- Redes. Comunicaciones.
- Selección de carteras de proyectos e inversiones.
- Planeamiento estratégico y macroeconómico.

El modelo matemático de PL

Optimizar un funcional:

Maximizar o minimizar **una** ecuación de la forma:

$$Z = \sum_j C_j X_j \qquad \text{Con } j = [1, \mathbf{n}]$$

Dónde:

- **Z**: Funcional. Ecuación económica. Función objetivo.
- $\mathbf{X_j}$: "**n**" variables reales "j" (de decisión). Con j = [1, **n**]
- $\mathbf{C_j}$: Contribución o Costo Marginal Con j = [1, **n**]

Sujeto a un conjunto de restricciones:

Expresadas mediante **"m"** inecuaciones de la forma:

$$\sum_j a_{ij} X_j \leq = \geq D_i \qquad \text{Con } j = [1, \mathbf{n}] \text{ y } i = [1, \mathbf{m}]$$

Dónde:

- $\mathbf{a_{ij}}$: Coeficientes Tecnológicos. Consumo específico de recurso "i" por unidad de producto "j". Con j = [1, **n**] y i = [1, **m**]
- $\mathbf{D_i}$: Disponibilidad del recurso "i". RHS *(Right Hand Side).* Con i = [1, **m**]

Objetivos y variables de control

- *Objetivos*:
  - Maximizar los beneficios?
  - Minimizar los costos?
  - Maximizar la calidad del servicio?
  - Otros?

- *Variables de control:*

  - Cuánto fabricar de cada producto?
  - A que precios vender?
  - Qué demanda satisfacer?
  - Otras?

Recomendaciones …

1. Entender el problema (objetivos, variables de control)
2. Definir claramente las variables
3. Entender el proceso y las restricciones
4. Organizar la información
5. Modelizar
    - Plantear ecuaciones de funciona y restricciones.
6. Resolver
7. Verificar
8. Análisis de sensibilidad
9. Límites de la solución
10. Revisar, desde el entender el problema

Diferentes modelos

- Plan de Operaciones
- Problema de Armado (Diferencia entre armado y mezcla)
- Formulación de productos (El problema de la dieta)
- Modelos Multiperíodo

Problema de armado

NEWWARE produce miniheladeras comprando subconjuntos y realizando el montaje en una línea diseñada especialmente. Se fabrican dos modelos de heladeras: Country (MHC) y Senior (MHS), que se venden a $1000 y $1250 respectivamente por heladera.

Ambas heladeras utilizan los mismos equipos de refrigeración y las mismas carcasas. El modelo senior incluye además un refrigerador especial de bebidas.

Los equipos de refrigeración son adquiridos a terceros a $400/u, las carcasas se fabrican internamente con un costo de $250/u y los refrigeradores de bebidas se importan a $120/u.

Actualmente la línea opera con un régimen de 200 horas/mes con un costo fijo operativo de $30.000 mensuales y una productividad de 5 heladeras/hora para los MHC o bien 3 heladeras/hora para MHS.

La demanda mensual de MHC es de 500 heladeras y la de MHS se estima en 350 heladeras. Los contratos actuales de abastecimiento permiten disponer de 750 equipos de refrigeración y 250 refrigeradores de bebidas.

La producción actual de carcasas totaliza 900 carcasas/mes.

Formular el modelo matemático para establecer la estrategia óptima de NEWWARE.

Objetivos & Supuestos

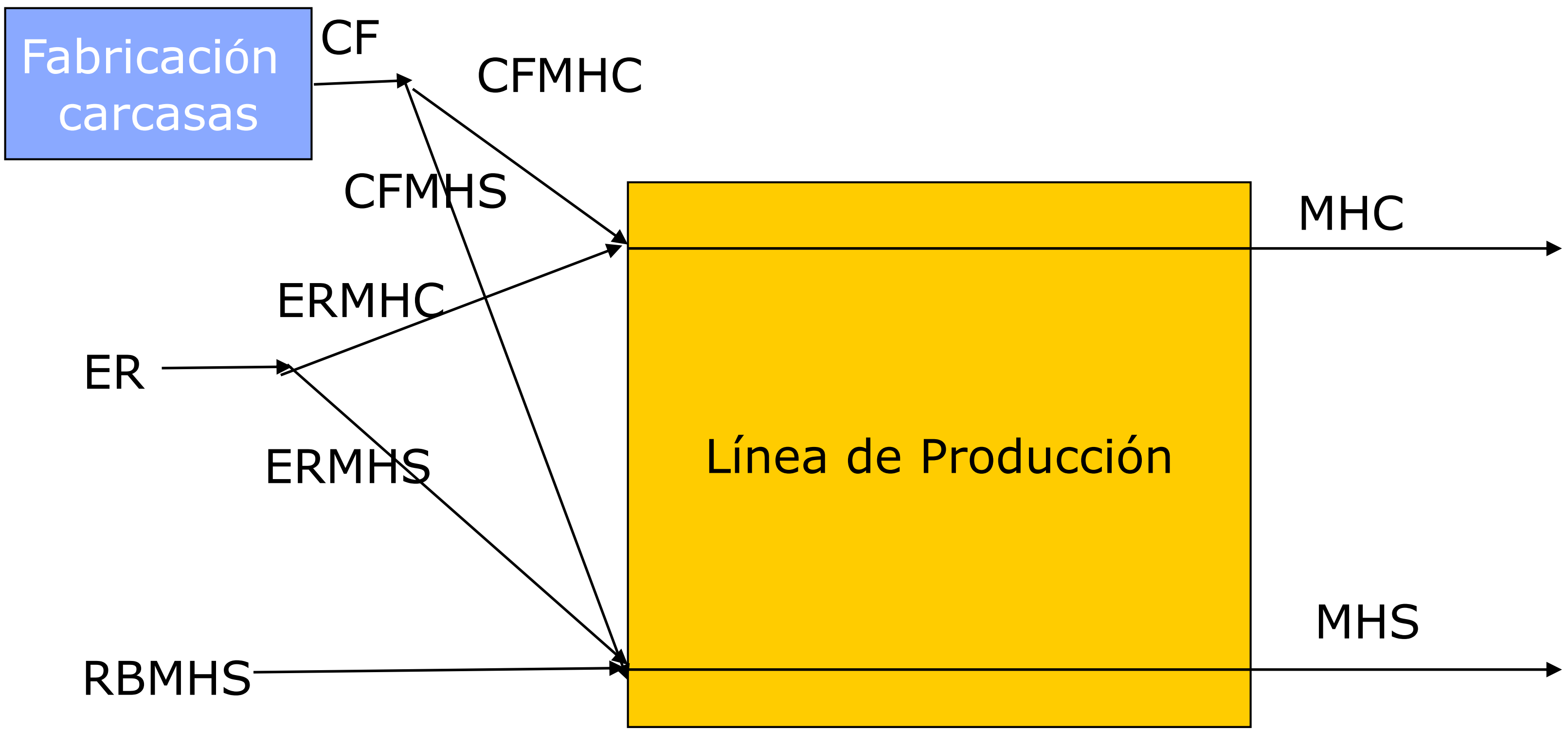
El objetivo es determinar la cantidad de heladeras a fabricar de modelo MHS y de modelo MHC, en el término de un mes, para maximizar las ganancias (ingresos menos costos).

Supuestos

- Todo lo producido se vende
- Calidad 100% en las partes fabricadas y compradas
- Se fabrican solamente las carcasas que se van a usar
- Solo se compran los equipos de refrigeración que se van a usar
- Se usa una carcasa por cada miniheladera
- No se puede fabricar en la línea los dos modelos de miniheladera al mismo tiempo
- La demanda es máxima
- Todo lo producido es de primera calidad
- Los tiempos de línea son netos

Qué más pueden agregar?.....

Esquema de proceso



A modelar...

Restricciones de abastecimiento:

carcasas) $CF \leq 900$
eqrefrig) $ER \leq 750$
refrigbeb) $RBMHS \leq 250$

Ecuaciones de continuidad:

carcasastotal) $CF = CFMHS + CFMHC$
eqrefrigtotal) $ER = ERMHS + ERMHC$
carcasasMHS) $CFMHS = MHS$
carcasaMHC) $CFMHC = MHC$
eqrefrigMHS) $ERMHS = MHS$
eqrefrigMHC) $ERMHC = MHC$
refrigbebMHC) $RBMHS = MHS$

Qué pasa si MHC llevara dos equipos de refrigeración?

Un error frecuente ...

- Este es un problema de ARMADO
- Es incorrecto plantear que la suma (carcasas + equipos) es igual la cantidad de heladeras a fabricar.

Es incorrecto plantear:

heladMHC) CFMHC + ERMHC = MHC

heladMHS) CFMHS + ERMHS + RBMHS = MHS

A modelar la restricción de capacidad ...

Línea de producción :

caplinea) $1/5 \quad MHC \quad + \; 1/3 \quad MHS \quad \leq \quad 200$

[hora/helad] [helad/mes] [hora/helad] [helad/mes] [horas/mes]

Por qué convertimos el 5 en 1/5 y el 3 en 1/3?

Por qué hicimos una restricción y no dos?

Qué significará la variable de holgura de esta restricción?

A modelar la demanda ...

- Restricciones de demanda:
- country) MHC $\leq$ 500
- senior) MHS $\leq$ 350

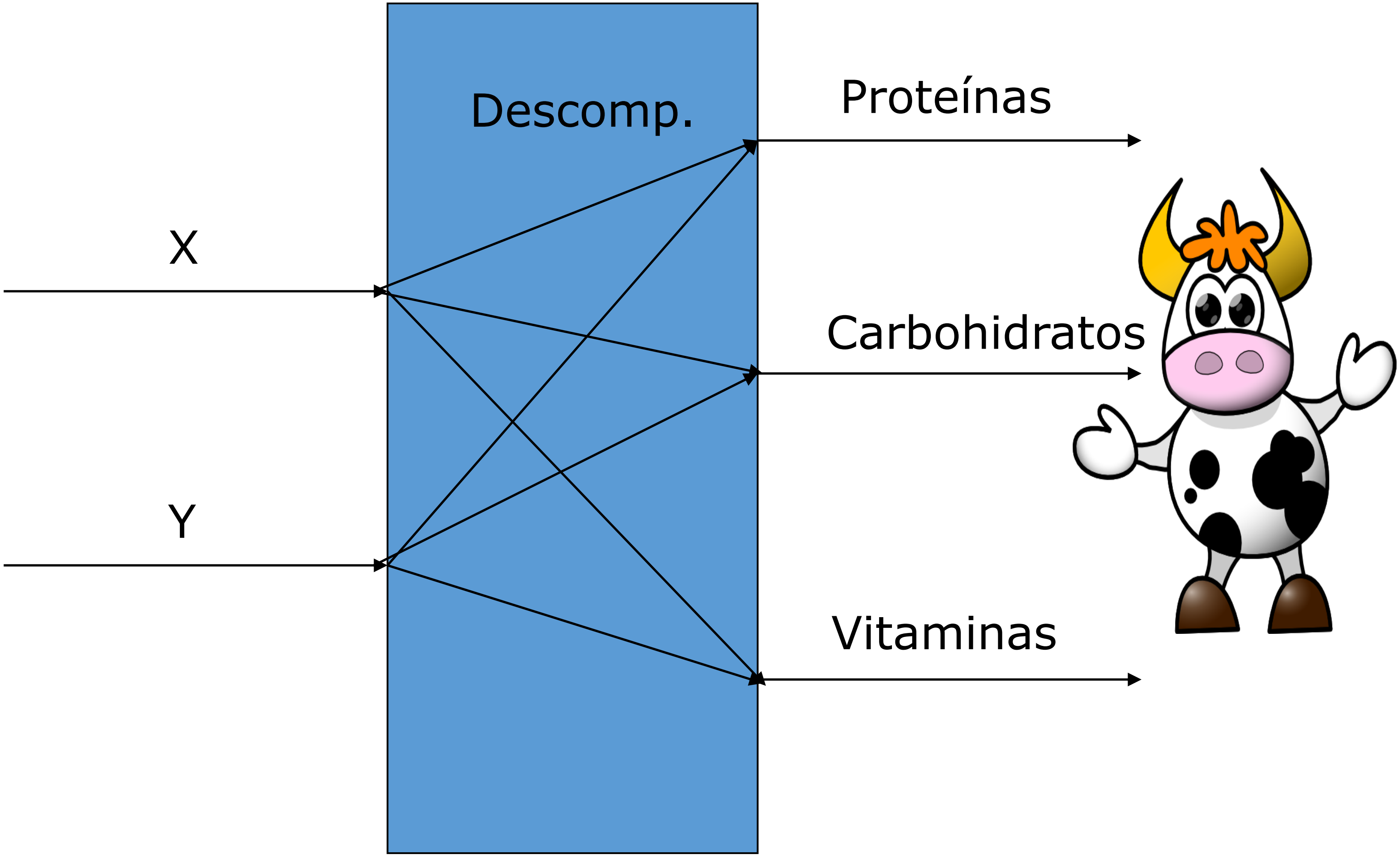
La restricción de demanda es < o >?

El problema de la dieta

Una explotación feedlock desea establecer la dieta óptima de alimentación del ganado. El alimento debe contener 3 tipos de nutrientes: proteína, carbohidratos y vitaminas. Se ha establecido que cada animal debe recibir en un período dado por lo menos 24 gramos de proteínas, 30 de carbohidratos y 400 unidades de vitaminas adicionales al pastoreo.

Existen 2 alimentos comerciales: X e Y, que pueden adquirirse a 8 y 6 $/kg respectivamente. El X suministra 6 gramos de proteína, 3 gramos de carbohidratos y 50 unidades de vitaminas, mientras que el Y provee 4 gramos de proteína, 10 de carbohidratos y 100 unidades de vitaminas, siempre por kilogramo de alimento.

Modelizando el problema de dieta ...



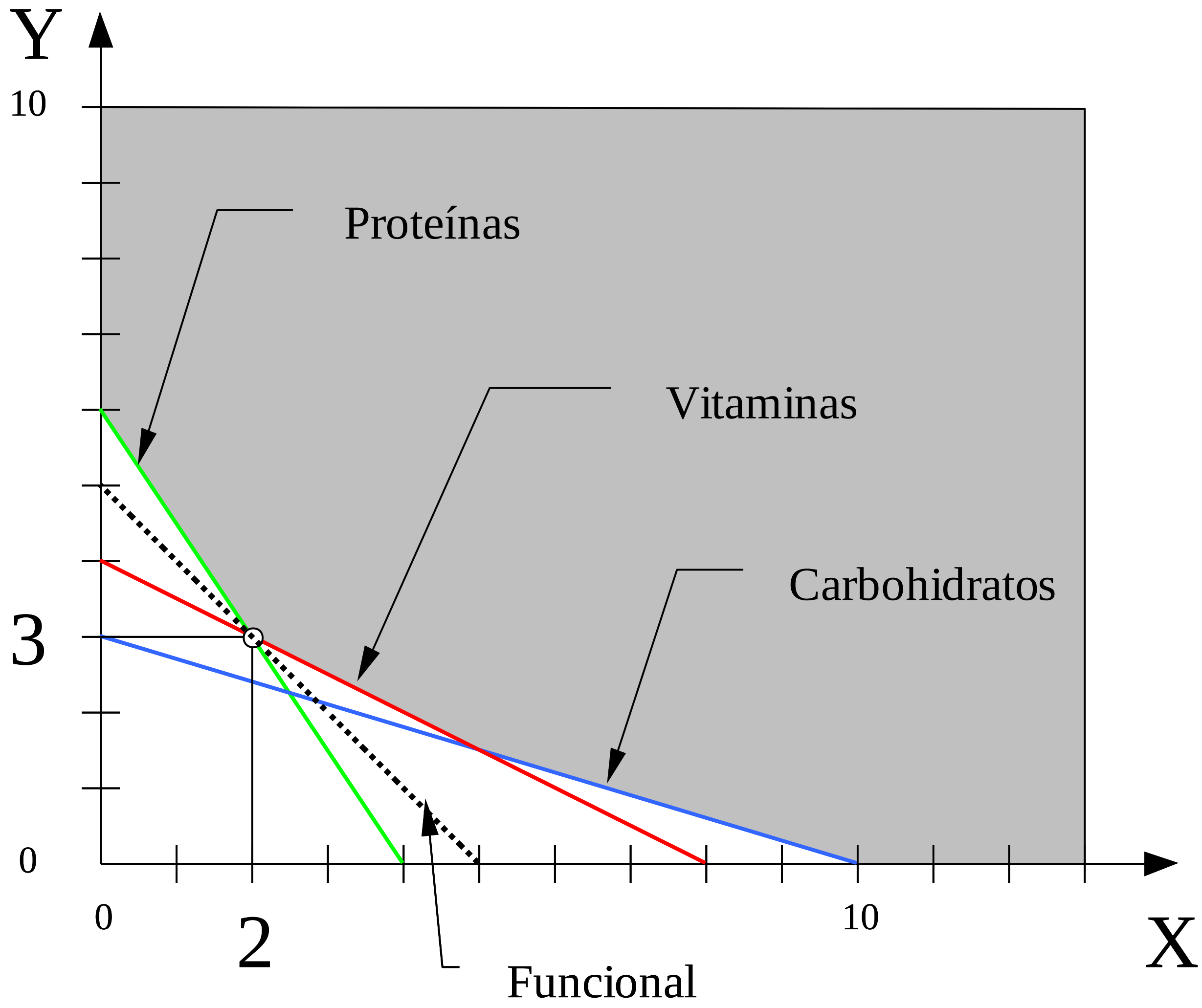
El modelo …

MIN $Z = 8X + 6Y$

Sujeto a las necesidades (por animal):

Proteinas	6	X	+	4	Y	$\geq$	24
	[gr/KG]	[KG/per]		[gr/KG]	[KG/per]		[gr/per]
CH	3	X	+	10	Y	$\geq$	30
	[gr/KG]	[KG/per]		[gr/KG]	[KG/per]		[gr/per]
Vitaminas	50	X	+	100	Y	$\geq$	400
	[un/KG]	[KG/per]		[un/KG]	[KG/per]		[un/per]

Gráficamente ...



Un problema multiperíodo ...

La compañía Walton se concentra en la reventa de un producto estacional. El negocio consiste en comprar a precio bajo en temporada, almacenar y luego revender a lo largo del año. Se trata de encontrar el programa de compra para maximizar las utilidades. Se ha estimado el siguiente esquema de precios para los próximos 4 meses (en $/unidad):

La empresa tiene 300 unidades en stock y desea mantener ese nivel al fin del mes 4. Por el tipo de operación, Walton no puede vender en el mes lo que compra en ese mismo mes, ya que los envíos se reciben hacia fines del mes. Se estima que el costo mensual de almacenamiento del producto es de 1 $/U y la capacidad máxima del almacén es de 500 U.

Mes	P. de Compra	P. de Venta
1	50	55
2	40	44
3	60	66
4	40	55

Objetivos & Supuestos

Se trata de encontrar las cantidades de producto a comprar y a vender cada mes, para maximizar las utilidades.

Supuestos

- Asumimos que consideramos continua la cantidad de producto
- No puede vender en el mes lo que compra en ese mismo mes
- Las ventas están igualmente distribuidas a lo largo del mes
- El costo de almacenamiento se basa en el stock promedio mensual

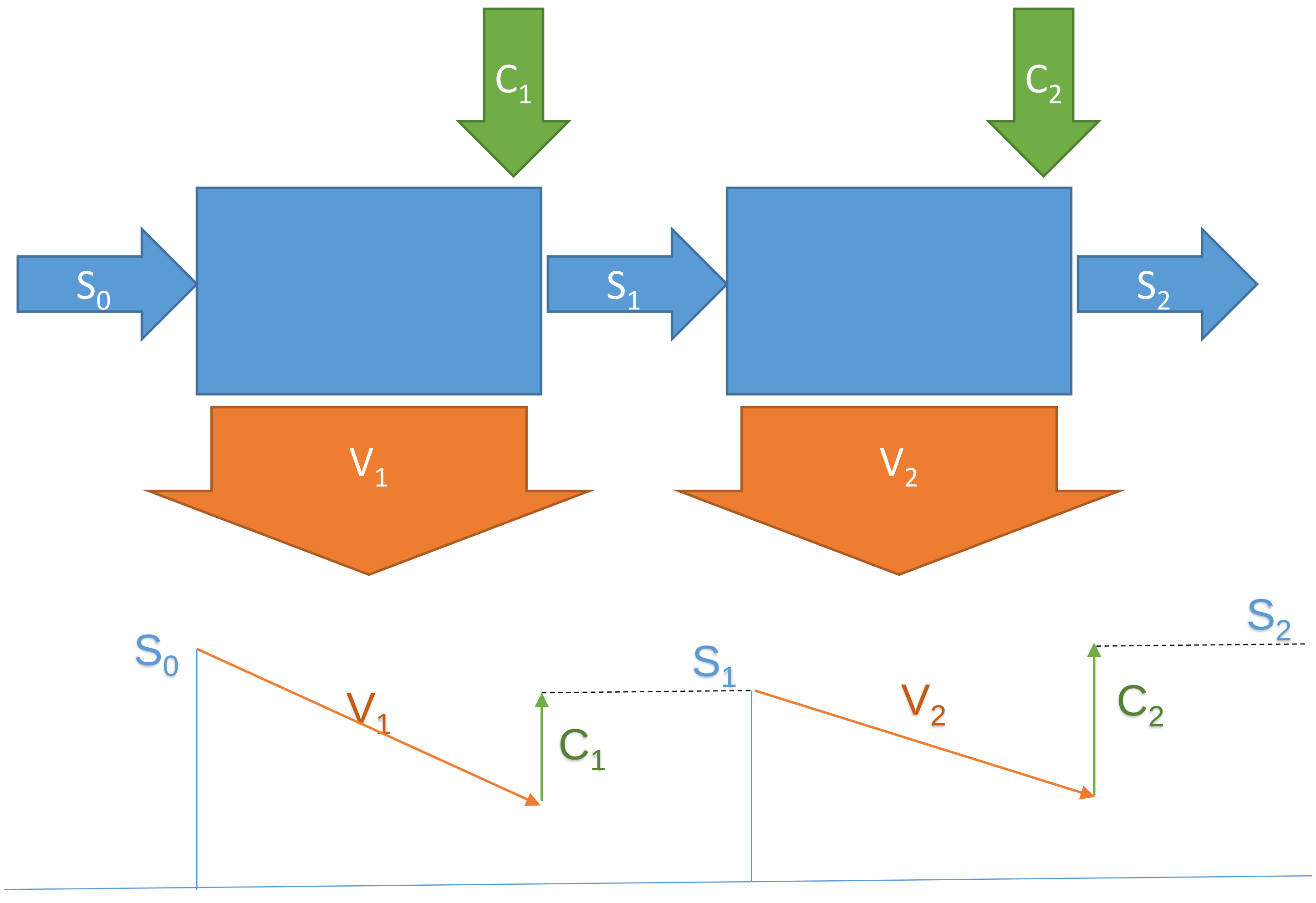
Qué más podemos agregar? .....

Variables

Ci: Compras del mes i Vi: Ventas en el mes i

Y también Si: Stock al final del mes i

Entendiendo el proceso



Un problema multiperíodo...

Veamos el manejo de stocks por mes:

Mes 1

$S1 = S0 + C1 – V1$

Mes 2

$S2 = S1 + C2 – V2 = S0 + C1 – V1 + C2 – V2$

Mes 3

$S3 = S2 + C3 – V3 = S0 + C1 – V1 + C2 – V2 + C3 – V3$

Mes 4

$S4 = 300$

$S4 = S3 + C4 – V4 = S0 + C1 – V1 + C2 – V2 + C3 - V3 + C4 – V4$

Un problema multiperíodo...

Restricciones de ventas:

Mes 1

$V1 <= S0$

Mes 2

$V2 <= S0 + C1 – V1$ es $V2 – C1 + V1 <= S0$

Mes 3

$V3 <= S0 + C1 – V1 + C2 – V2$

es $V3 – C1 + V1 – C2 + V2 <= 300$

Mes 4

$V4 <= S0 + C1 – V1 + C2 – V2 + C3 – V3$

Un problema multiperíodo...

Restricciones de almacenamiento:

Mes 1

$C1 - V1 <= 500 – S0$

Mes 2

$C1 – V1 + C2 - V2 <= 500 – S0$

Mes 3

$C1 – V1 + C2 – V2 + C3 - V3 <= 500 – S0$

Mes 4

$C1 + C2 + C3 + C4 – V1 – V2 – V3 – V4 = 0$

Un problema multiperíodo...

El funcional:

Maximizar Ventas – Compras – Costo almacenamiento

Ventas = 55 V1 + 44 V2 + 66 V3 + 55 V4

Compras = 50 C1 + 40 C2 + 60 C3 + 50 C4

¿Por qué ½?

Costo almacenamiento = (300-V1/2) +

(300+C1-V1-V2/2) +

(300+C1-V1+C2-V2+V3/2) +

(300+C1-V1+C2-V2+C3-V3-V4/2)=

1200+3C1-7V1/2-5V2/2-3V3/2-V4/2