EL PRINCIPIO DE FERMAT EN ÓPTICA GEOMÉTRICA

Principio de Fermat en óptica:

La trayectoria real que sigue un haz de luz entre dos puntos es la que recorre en el tiempo mínimo.

Reflexión de la luz

En la figura 1 se muestran dos “posibles”trayectorias de un rayo de luz que emerge del punto F y que incide en el espejo E. Se indica que $FB + BA < FB' + B'A$ para cualquier punto B' que se encuentre en el espejo. Veamos un argumento a partir de la geometría. Los puntos F y F' son simétricos con respecto al espejo y la única trayectoria seguida por el rayo es FBA, pues los puntos $F'BA$ son colineales, lo cual implica que $< EBF \cong < ABB'$.

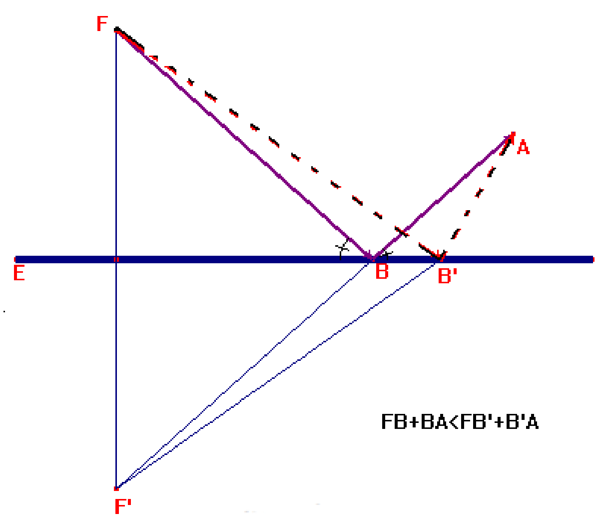


Figura 1.

Veamos, a partir del cálculo diferencial, que la condición de que el tiempo emplea- do por el rayo de luz sea m´ınimo, implica que, cuando el rayo de luz se refleja en un espejo, los ángulos de incidencia (i) y de reflexión (r) son congruentes (Figura 2).

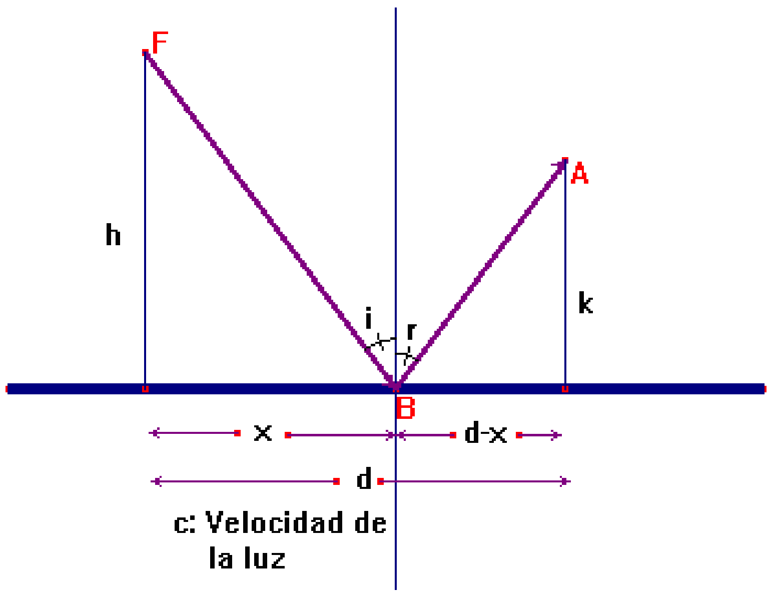


Figura 2.

El tiempo empleado por el rayo de luz en seguir la trayectoria *FBA* se expresa mediante

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}{c}$$

Al derivar la función que representa el t con respecto a la distancia x, se obtiene

$$t' = \frac{1}{c}\left(\frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{2(d - x)}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}\right)$$

Como el tiempo debe ser mínimo, se cumple que

$$\frac{1}{c}\left(\frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{2(d - x)}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}\right) = 0$$

Por tanto,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}$$

Luego

En consecuencia,

$\text{sen}\ i$

$=$

$senr$

$< \boldsymbol{i}$

$\cong< \boldsymbol{r}$

Es decir, que el ángulo de incidencia (*i*) es congruente con el ángulo de reflexión (*r*).

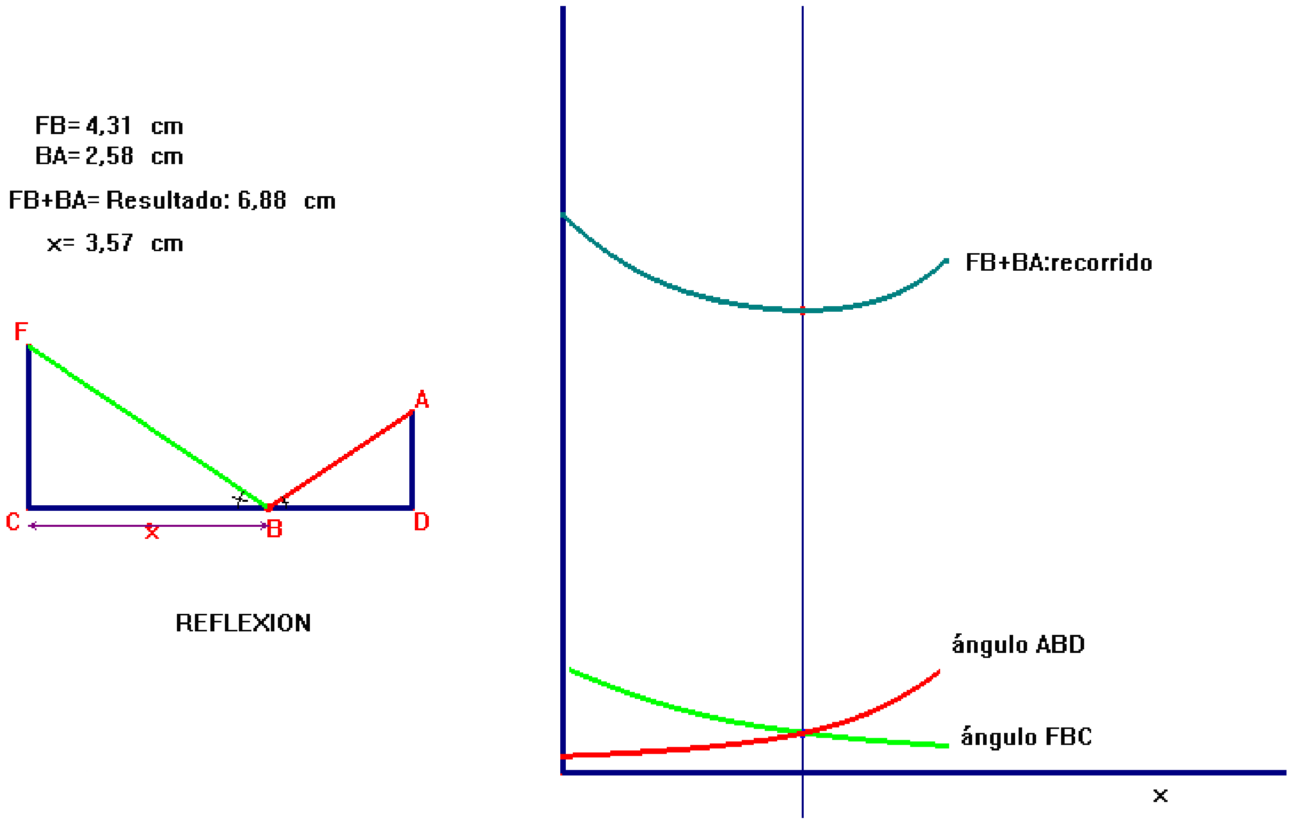


Figura 3.

En la figura 3 se muestra una imagen de una construcción en CABRI, mediante la cual, al mover el punto B a lo largo del segmento CD, se observa que las medidasde los ángulos ABD y FBC son iguales cuando el recorrido FB+BA es mínimo.

Refracción de la luz

El fen´omeno de refraccio´n se puede analizar a partir del Principio de Fermat. En la figura 4, se muestra la trayectoria de un rayo de luz que emerge del punto F e incide en la superficie de separacio´n entre dos medios o´pticamente diferentes. Este hecho implica que en el medio 1 (el no sombreado) la velocidad de la luz es v1, mientras que en el medio 2 (sombreado) la velocidad de la luz es v2.

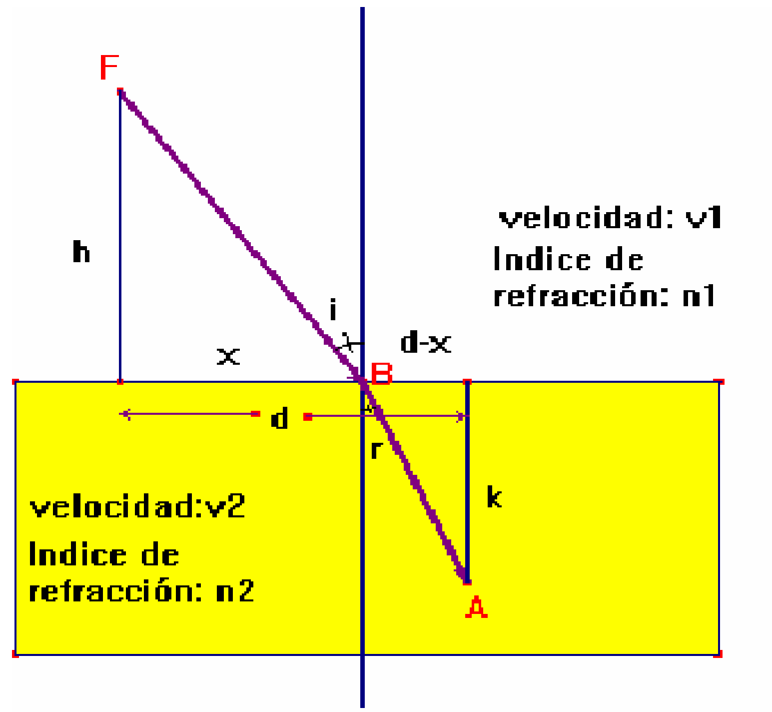


Figura 4.

El tiempo empleado por la luz mientras sigue la trayectoria FBA se expresamediante

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

Al derivar la función que representa el tiempo con respecto a la distancia x, se obtiene

$$t' = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{2(d - x)}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}$$

Puesto que el tiempo empleado por el rayo de luz es mínimo, se cumple que

$$\frac{1}{v_1} \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{2(d - x)}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{d-x}{\sqrt{k^2+(d-x)^2}}$$

Luego,

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v_1}{v_2}$$

Esta igualdad muestra la relación entre los ángulos de incidencia (i) y de refracción (r) con las respectivas velocidades de la luz en los dos medios, conocida como laley de Snell.En la figura 5 se muestra una imagen de una construcció́n en CABRI, mediante la cual al mover el punto B a lo largo de la frontera entre los dos medios, y se observa geométricamente la validez de tal ley, cuando el tiempo del recorrido es mínimo.

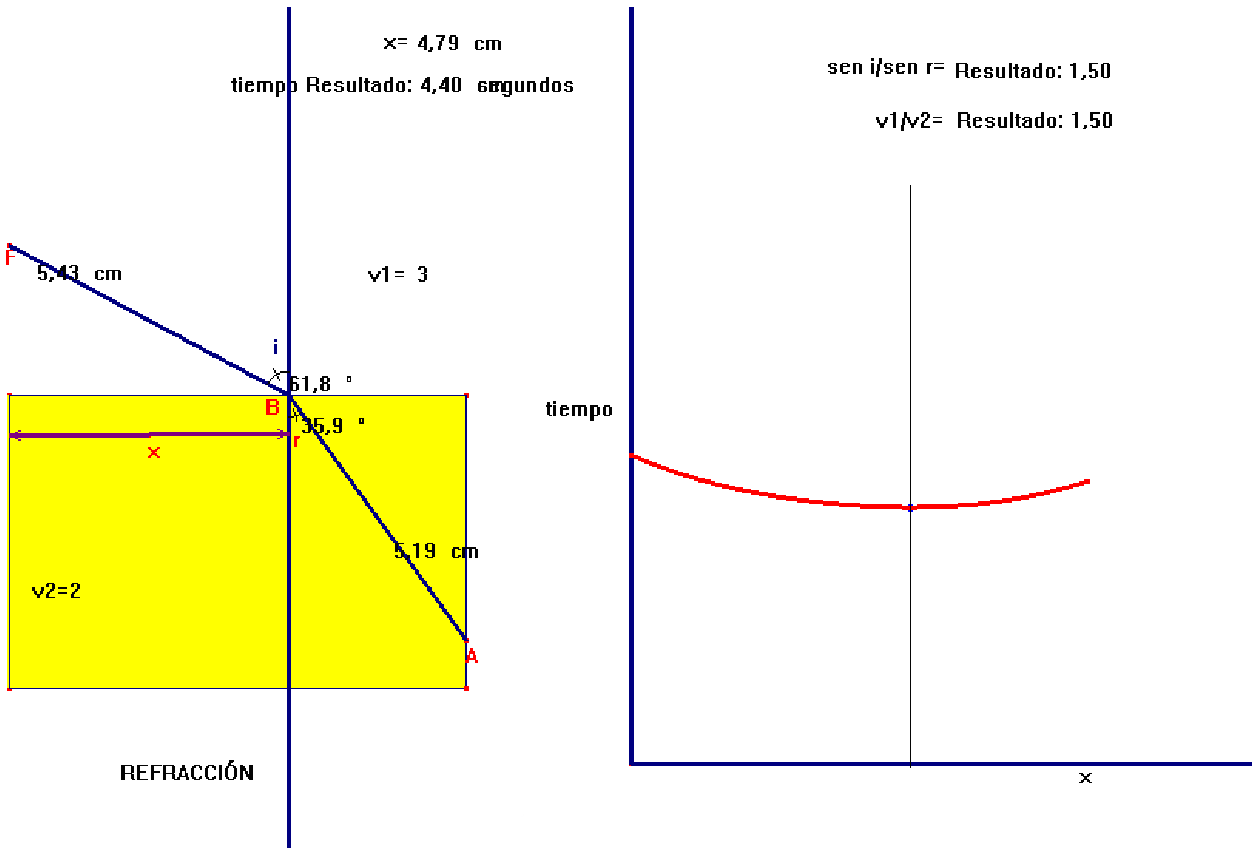
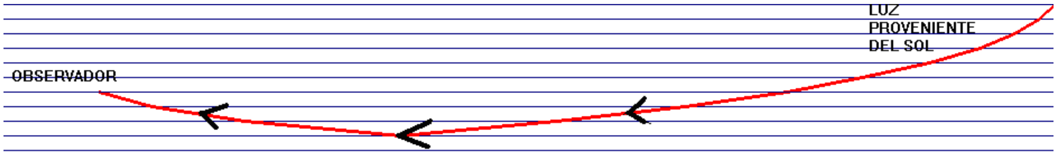


Figura 5.

La figura 6 ilustra la producción de espejismos. Las diferentes franjas represen- tan las capas de aire, cuya densidad es variable, de tal manera que las capas "muy delgadas"son ópticamente diferentes, por tanto, la luz experimenta sucesivos cambios de medio y, en consecuencia, cambia su trayectoria, lo que hace que el observador perciba brillo en la superficie del piso.

Figura 6.



Si los cambios entre capa y capa fueran discretos, podríamos considerar que el tiempo que emplea la luz en atravesar la i-ésima capa es el cociente entre la distancia recorrida, s_i, y la velocidad de la luz, v_i, en dicha capa. Por tal razón el tiempo en hacer en recorrido a través de n capas, se expresa como $t = \sum_{t=1}^{n} \frac{s_i}{v_i}$.

Definimos la longitud del camino óptico (L.C.O.) como

$$L.C.O = c \sum_{t=1}^{n} \frac{s_i}{v_i}$$

Como el cambio de capa a capa es un proceso continuo, tenemos que la longitudde camino óptico es

$$L.C.O = c \sum \frac{s_i}{v_i}$$

Podemos ahora enunciar el principio de Fermat como: *La luz al ir del punto A al punto B, sigue la trayectoria con longitud de camino óptico mínima.*

El Principio de Fermat se enuncia en forma más moderna como sigue: *Al ir un rayo de luz del punto A al punto B, debe recorrer una longitud de camino óptico que es estacionaria con respecto a las variaciones de ese camino.*

Ilustramos este resultado con el comportamiento de un espejo de forma elíptica (fig. 7). Se puede mostrar que un rayo de luz que emerge de uno de los focos dela elipse (A), al reflejarse en el espejo incide sobre el otro foco (B), este hecho ilustra que independientemente del punto de la elipse en el cual incida el rayo proveniente de uno de los focos, la trayectoria seguida por la luz se ajusta a una condición: ir de foco a foco.

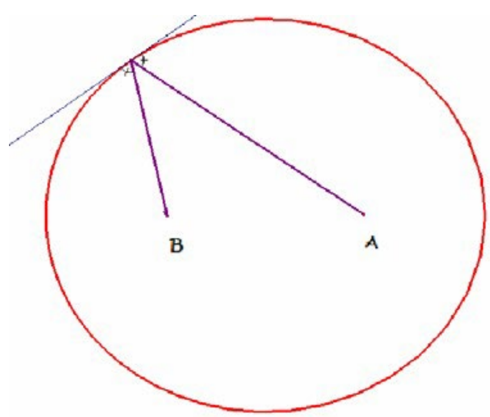


Figura 7.