Números complejos

Para resolver los ejercicios propuestos en esta sección de la práctica es necesario conocer las definiciones básicas de los números complejos, las diferentes operaciones definidas en el conjunto de números complejos, las diferentes formas de expresar un número complejo y su representación gráfica.

Para trabajar con los ejercicios de esta guía, te proponemos visualizar antes los siguientes videos:

- Relaciones trigonométricas
- Pasaje al primer cuadrante
- Pasaje al primer cuadrante. Ejemplos

1. Dados $z = 2 + i,\ w = -3i, v = 1 + \frac{1}{2}i$, efectuar las siguientes operaciones y representar gráficamente el resultado obtenido en el plano complejo.

a. $z.w$

b. $\bar{v} - w$

c. $(2w - \bar{z}).(i - v)$

d. $2(-z + 3v)$

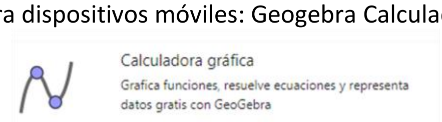
ii. Escribir el resultado de cada operación del ítem anterior en forma exponencial y en forma polar o trigonométrica.

2. Probar cada una de las siguientes identidades, válidas para cualquier par de números complejos z, w

a. $|z.w| = |z|.|w|$
b. $|z^n| = |z|^n, con\ n \in N.$
c. $|z| = |\bar{z}|$

3. ¿Cómo se interpreta geométricamente la suma de dos números complejos? Te proponemos construir tu propia simulación para responder esta pregunta. Utilizaremos la aplicación GeoGebra

- Para dispositivos móviles: Geogebra Calculadora Gráfica



- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

Interpretación geométrica de la suma de dos números complejos

¿Cómo graficar un vector en Geogebra?

1. Con el comando **punto**, marcar en el plano dos puntos cualesquiera: A y B

2. Construir dos vectores: uno cuyo extremo inicial es el origen de coordenadas, (0,0), y cuyo extremo final es el punto A y el otro con el mismo extremo inicial y B como extremo final. El comando para construir los vectores desde el origen es:

Vector(<Punto>)

3. Si el punto A = (a, b) representa al número complejo z = a + bi y el punto B = (c, d) representa a w= c + di, la suma de z y w estaría dada por A+B. Construir, siguiendo el paso 2, el vector A+B.

a. Dados los números complejos $z = -1 + 3i, w = 1 - i$, calcular la longitud de cada diagonal del paralelogramo determinado por los vectores que representan a z y w.

b. Geométricamente, ¿cuál es el efecto que se produce en z al multiplicarlo por w?

Raíces n-ésimas de un número complejo

4. Determinar todos los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones.

a. $z^2 + 2 = 3z$
b. $z^3 + 8 = 0$
c. $z^4 + \sqrt{3}i = 1$
d. $z^6 = 1 + i$
e. $z^4 - 81 = 0$
f. $(z^2 - 4).(z^2 - 2z + 5) = 0$

5. Graficar cada una de las siguientes regiones en el plano complejo.

a. $R = \{z \in C: |z| < 2\}$

b. $R = \{z \in C: Re(z) \geq 1\}$

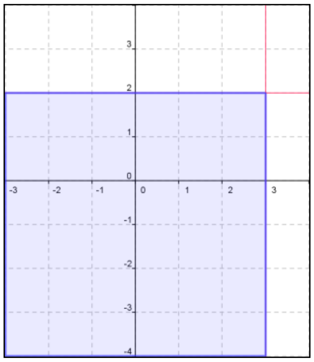
c. $M = \{z \in C: |z^2| + Re(z^2) + Im(z^2) \geq 0\}$

Nota: Más adelante se encuentra la resolución de este ítem.

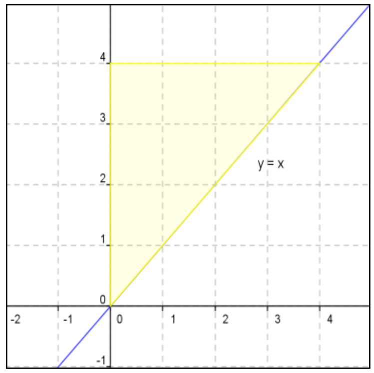
d. $N = \left\{z \in C: \frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \pi, 1 < |z - 2i| < 3\right\}$

6. Escribir en la notación de complejos y de pares ordenados de números reales cada uno de los conjuntos que se representan en los siguientes gráficos.

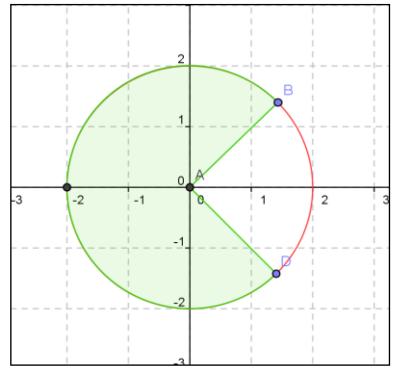
a.



b.



c.



Polinomios

Para realizar los ejercicios de esta sección, además de saber lo referido a números complejos, es necesario conocer las definiciones básicas sobre polinomios (definición de polinomio, igualdad de polinomios, grado de un polinomio, raíz de un polinomio, multiplicidad algebraica de una raíz), las operaciones suma y producto de polinomios, la descomposición factorial de polinomios la relación entre multiplicidad de una raíz real y el orden de contacto de su gráfico con el eje de abscisas, el comportamiento del gráfico según el signo del coeficiente principal y su grado, el algoritmo de la división de polinomios.

7. Para repasar algunos conceptos relacionados a polinomios, te sugerimos realizar la siguiente actividad.

8. Sean los polinomios $p(x) = x$, $q(x) = x^2 + 1$, $r(x) = -x^3 + 5x - 2$

a. Realizar las operaciones que se indican a continuación.

b. Indicar, en cada caso, el grado y el coeficiente principal del polinomio que se obtiene como resultado.

i. $p(x) + r(x)$
ii. $q(x) - r(x)$
iii. $p(x).q(x)$
iv. $p(x) + 2.r(x) - q(x)$

Factorización de polinomios

9. Para los siguientes polinomios:

a. Hallar el conjunto de sus raíces $\sigma(p)$, $\sigma(p) = \{t \in C: p(t) = 0\}$.

b. Escribir su descomposición factorial en $Q[t]$, $R[t]$ y $C[t]$.

i. $p_1(t) = t^3 - t$
ii. $p_2(t) = -t^3 + t^2$
iii. $p_3(t) = t^4 - 4$
iv. $p_4(t) = t^5 - 13t^3 + 36t$
v. $p_5(t) = p_1 + p_2$
vi. $p_6(t) = p_1 . p_2$

10. Hallar los coeficientes desconocidos para los siguientes polinomios, de modo tal que en cada caso se cumplan las condiciones indicadas.

a. $p(x) = a(x-2)(x+1), p(4) = 2$. ¿Cuáles son las raíces de p?

b. $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b,\ x = 2$ es raíz y $q(5) = 1$.

c. $r(t) = t^4 - 4t^3 + 7t^2 + at + b,\ t = 2i$ es raíz con $a, b \in R$.

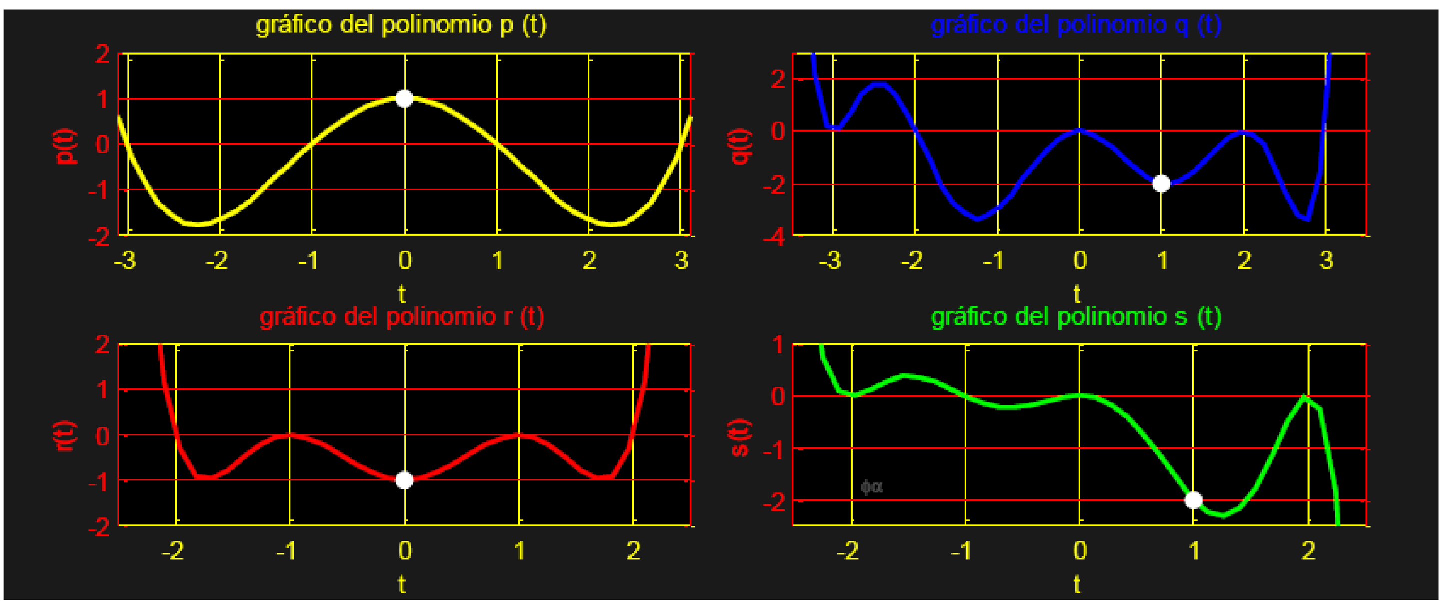
11.

Algoritmo de división de polinomios
Dados cualesquiera dos polinomios p y q es posible encontrar otros dos (únicos) polinomios c (cociente) y r (resto) tal que $p = q.c + r$ con el grado de r menor que el de q. Si r es el polinomio nulo, decimos que p es divisible en q o que q divide a p o q es un factor de p.

Determinar, para cada uno de los siguientes polinomios, el cociente y el resto que se obtiene al hacer p dividido q.

i. $p(w) = w^4 - 1; q(w) = w^3 - 25w$
ii. $p(u) = u^3 - 25u; q(u) = u^4 - 1$
iii. $p(t) = t^7 - t^5 + t^3 + t - 2; q(t) = t^3 - 1$
iv. $p(t) = t^8 - 1; q(t) = t^2 - 1$
v. $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 66x + 120; q(x) = x^2 - 6x + 8$

12. Determinar la expresión analítica del único polinomio de grado mínimo cuyo gráfico en la zona relevante, en cada caso, se indica en la siguiente figura.



13. Dados los siguientes polinomios, efectuar su descomposición factorial en $R[t]$ y $C[t]$. Graficarlos en su zona relevante.

i. $p(t) = t^4 - 7t^3 + 17t^2 - 17t + 6$, sabiendo que es divisible en $q(t) = (t-1)^2$.
ii. $p(t) = t^4 - 5t^3 + 13t^2 - 19t + 10$, sabiendo que $1 - 2i$ es una raíz.
iii. $p(t) = t^5 - 5t^3 + 4t$.
iv. $p(t) = t^5 - 10t^4 + 35t^3 - 50t^2 + 24t + k$, sabiendo que es divisible en $q(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$.

v. p es tal que $gr(p) = 3, \sigma(p) = \{-2\text{i}, 2\text{i}, 3\}$ y $p(1) = 20$.
vi. p es tal que $gr(p) = 7, \sigma(p) = \{-2(\text{doble}), 2(\text{doble}), 0(\text{triple})\}, p(-1) = 27$.

14.
Sea P el conjunto de los polinomios con coeficientes en R. Demostrar las siguientes propiedades:

i. $\forall\, p, q \in P:\ gr\,(p.q) = gr(p) + gr(q)$

ii. $\forall\, p, q \in P:\ gr(p + q) \leq max\{gr(p), gr(q)\}$

Sugerencia: Podrán revisar el trabajo realizado en los ejercicios de polinomios utilizando algún graficador, como por ejemplo:

- Aplicaciones gratuitas:

Geogebra Calculadora Gráfica	Funciones-EDITEX Matemáticas	Funciones
GeoGebra Calcula International GeoGebra	EDITEX matemáticas Funciones EDITORIAL EDITEX, S.A	f(x) matemáticas daboApps

- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

Algunos ejercicios resueltos

Enunciado:
5. Graficar cada una de las siguientes regiones en el plano complejo.

a. c) $M = \{z \in C: |z^2| + Re(z^2) + Im(z^2) \geq 0\}$

Solución:

M representa una región del plano complejo, es decir del plano (xy). Es un conjunto formado por números complejos $z \in C$ que cumplen una condición:

$$\boxed{\left|z^2\right| + \operatorname{Re}\left(z^2\right) + \operatorname{Im}\left(z^2\right) \geq 0}$$

Debemos obtener la expresión cartesiana de la región ***M*** y para eso definimos al complejo **z** de alguna de las cinco formas (par ordenado, coordenadas polares, binómica, trigonométrica o exponencial). En este caso, por la forma en que viene expresada la región M, será conveniente utilizar la forma binómica de un número complejo para la representación gráfica:

$$\boxed{z = x + y.i \quad \text{forma binómica de un número complejo}}$$

En la condición: $\left|z^2\right| + \operatorname{Re}\left(z^2\right) + \operatorname{Im}\left(z^2\right) \geq 0$ se necesita z^2

La forma de obtenerlo es:

$z = x + y.i$

Elevando al cuadrado a ambos miembros

$z^2 = (x + y.i)^2$

Desarrollando el cuadrado del binomio

$z^2 = x^2 + 2.x.y.i + (y.i)^2$

En el último término se distribuye la potencia respecto al producto

$z^2 = x^2 + 2.x.y.i + y^2.i^2$

Donde $i^2 = -1$

$z^2 = x^2 + 2.x.y.i + \underbrace{y^2.(-1)}$

$z^2 = x^2 + 2.x.y.i - y^2$

Agrupando las partes real e imaginaria por separado

$z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + (2.x.y).i$

Donde su parte real es $\operatorname{Re}\left(z^2\right) = \left(x^2 - y^2\right)$ **(1)**

Y su parte imaginaria es $\operatorname{Im}\left(z^2\right) = (2.x.y)$ **(2)**

<u>Observación</u>: un error común en este paso es considerar la unidad imaginaria i como parte imaginaria del número complejo.

La notación $\left|z^2\right|$ hace referencia al módulo de z^2, que podemos resolverlo de dos formas:

- Una de ellas es $\left|z^2\right| = \left|\left(x^2 - y^2\right) + (2.x.y).i\right|$ Recordando que el módulo de un complejo está dado por $\boxed{|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}}$, aplicado a nuestro caso:

$\left|z^2\right| = \sqrt{\left(x^2 - y^2\right)^2 + (2.x.y)^2}$, desarrollando la potencia en cada término,

$\left|z^2\right| = \sqrt{\left(x^4 - 2.x^2.y^2 + y^4\right) + \left(4.x^2.y^2\right)}$, sumando los términos de igual parte literal,

$\left|z^2\right| = \sqrt{x^4 + 2.x^2.y^2 + y^4}$, en el radicando queda la expresión de un trinomio cuadrado perfecto de bases x^2 e y^2, si lo factoreamos queda el cuadrado del binomio

$\left|z^2\right| = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ como el radicando es la suma de dos cuadrados, es decir de dos números no negativos, se puede simplificar la potencia con la raíz.

$\left|z^2\right| = x^2 + y^2$ **(3)**

- Otra forma de obtener $\left|z^2\right|$ es aplicando propiedades del módulo

$\left|z^2\right| = |z.z|$

$\left|z^2\right| = |z|.|z|$ el módulo del producto entre dos números complejos es igual al producto de sus módulos.

$\left|z^2\right| = |z|^2$ y recordando que el módulo de un complejo está dado por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, aplicado a nuestro caso

$\left|z^2\right| = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$ como el radicando es la suma de dos cuadrados, es decir de dos números no negativos, se puede simplificar la potencia con la raíz.

$\left|z^2\right| = x^2+y^2$ **(3)**

Volviendo a la condición: $\left|z^2\right| + \operatorname{Re}\left(z^2\right) + \operatorname{Im}\left(z^2\right) \geq 0$, reemplazamos por las expresiones **(1) , (2) y (3)**

$x^2+y^2+x^2-y^2+2.x.y \geq 0$. Cancelando los términos opuestos

$x^2+\cancel{y^2}+x^2-\cancel{y^2}+2.x.y \geq 0$

$x^2+x^2+2.x.y \geq 0$

$2.x^2+2.x.y \geq 0$, factoreando

$2.x.(x+y) \geq 0$, Queda el producto entre dos factores mayor o igual que cero, por regla de signos las opciones son ambos positivos o iguales a cero ó ambos negativos o iguales a cero.

$$\left(2.x \geq 0 \wedge (x+y) \geq 0\right) \vee \left(2.x \leq 0 \wedge (x+y) \leq 0\right)$$

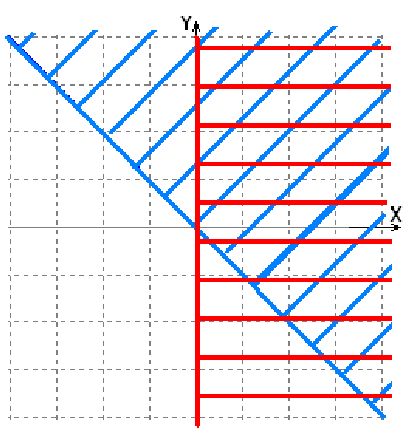
Despejando en cada desigualdad

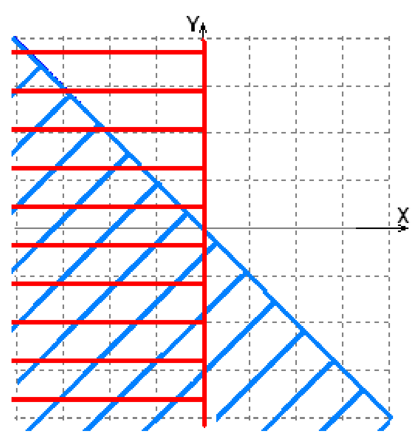
$$\left(x \geq 0 \wedge y \geq -x\right) \vee \left(x \leq 0 \wedge y \leq -x\right)$$

Cada desigualdad representa un semi-plano relacionada con la conjunción "$\wedge$" que indica la intersección entre los dos semi-planos. Así quedan determinadas las soluciones parciales $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$

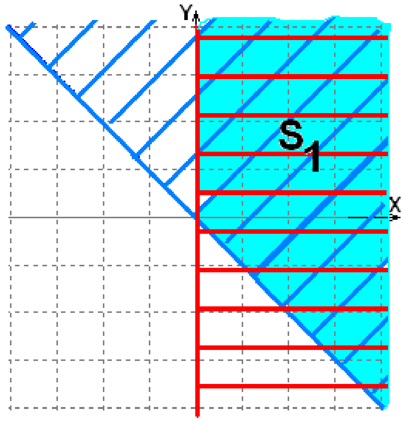
$\mathbf{S_1} = \left(x \geq 0 \wedge y \geq -x\right)$ $\vee$ $\mathbf{S_2} = \left(x \leq 0 \wedge y \leq -x\right)$

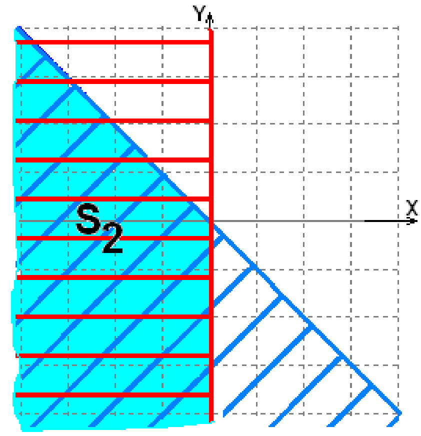
El doble rayado es donde se cumplen las dos desigualdades al mismo tiempo. Como todas las desigualdades consideran el igual, la recta borde del semiplano es completa, en caso que sea menor o mayor en forma estricta, esa recta borde se debe trazar punteada.



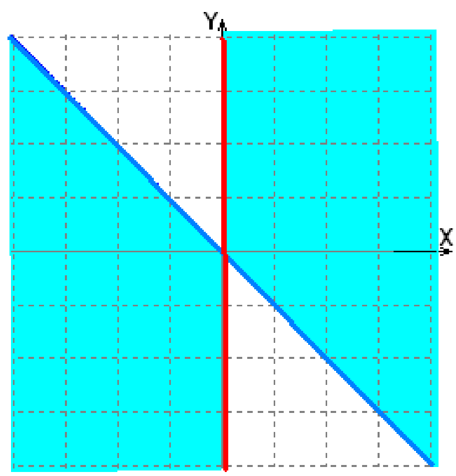


Las soluciones parciales son $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$:



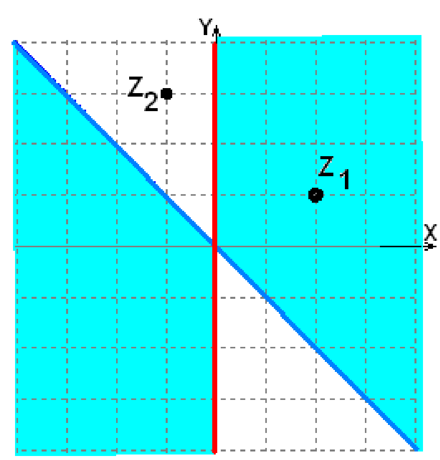


La solución se obtiene como la **unión** de $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$



$$\underbrace{\left(x \ge 0 \wedge y \ge -x\right)}_{S_1} \underset{\text{unión}}{\vee} \underbrace{\left(x \le 0 \wedge y \le -x\right)}_{S_2}$$

Con algunas pruebas sencillas podemos verificar el resultado. Elegimos los punto Z_1 =(2;1), Z_2= (-1; 3). El primero pertenece a la región sombreada, es decir es parte de la solución, debe verificar la desigualdad inicial. El segundo Z_2 no es parte de la solución.



- Para $z_1 = (2;1) = 2+i$, reemplazamos en

$$\left|z^2\right| + \operatorname{Re}\left(z^2\right) + \operatorname{Im}\left(z^2\right) \ge 0$$

$$\left|(2+i)^2\right| + \operatorname{Re}\left((2+i)^2\right) + \operatorname{Im}\left((2+i)^2\right) \ge 0$$

Elevando al cuadrado

$$\left|4+4.i-1\right| + \operatorname{Re}\left(4+4.i-1\right) + \operatorname{Im}\left(4+4.i-1\right) \ge 0$$

Agrupando

$$\left|3+4.i\right| + \operatorname{Re}\left(3+4.i\right) + \operatorname{Im}\left(3+4.i\right) \ge 0$$

Calculando el módulo, parte real e imaginaria

$\sqrt{3^2+4^2}+3+4\geq 0$

$5+3+4\geq 0$

$12\geq 0$ verifica la desigualdad, entonces Z_1 es parte de la solución.

- Para $Z_2=(-1;3)=-1+3.i$, reemplazamos en $\left|z^2\right|+Re\left(z^2\right)+Im\left(z^2\right)\geq 0$

$\left|(-1+3.i)^2\right|+Re\left((-1+3.i)^2\right)+Im\left((-1+3.i)^2\right)\geq 0$

Elevando al cuadrado

$\left|1-6.i-9\right|+Re\left(1-6.i-9\right)+Im\left(1-6.i-9\right)\geq 0$

Agrupando

$\left|-8-6.i\right|+Re\left(-8-6.i\right)+Im\left(-8-6.i\right)\geq 0$

Calculando el módulo, parte real e imaginaria

$\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}-8-6\geq 0$

$10-8-6\geq 0$

$-4\geq 0$ ABSURDO que proviene de suponer que el complejo $Z_2=(-1;3)$ es parte de la solución. Por lo tanto la región donde está Z_2 no es solución.

Ejercicio integrador sobre polinomios

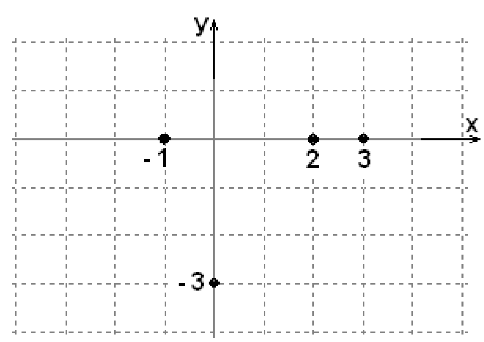
El polinomio P tiene por únicas raíces $\{-1;2;3\}$. La gráfica de y = p(x) corta al eje y en -3. Se sabe que x = -1, es una raíz de multiplicidad par. Para los valores de x = 2 y x = 3, la gráfica cambia de semiplano.

Se pide:

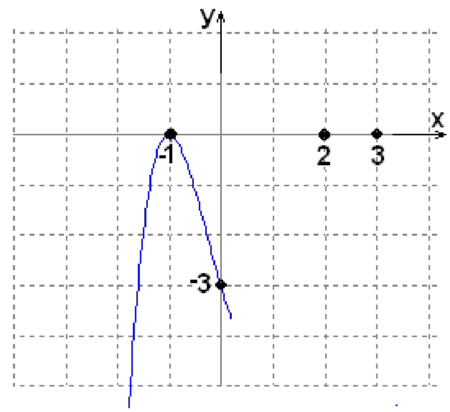
a) Proponer un gráfico aproximado de y = p(x) que responda a lo descripto.
b) Obtener la expresión factoreada del polinomio de grado mínimo que cumple las condiciones dadas.
c) Obtener la expresión polinómica desarrollada de p(x).
   c_1) ¿Cuál es el término de grado cero?
   c_2) ¿Cuál es el término cuadrático?
   c_3) ¿Cuál es el coeficiente del término lineal?
   c_4) ¿Cuál es el coeficiente del término de mayor grado?

Solución:

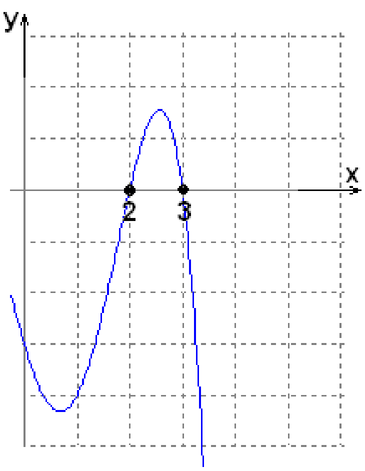
a) Teniendo en cuenta la información dada en el enunciado, podemos volcar en el gráfico cuatro puntos:
(-1;0) , (2;0) y (3;0) son los únicos puntos donde la gráfica corta al eje x.
(0;-3) es el punto de intersección de la gráfica con el eje y.



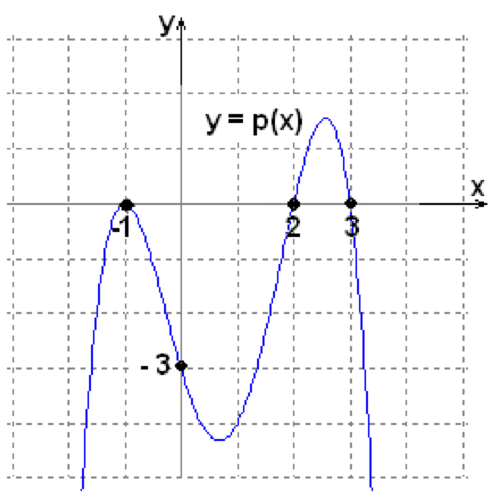
Un dato importante es el que afirma x = -1 es una raíz de multiplicidad par. En este caso tenemos dos alternativas: una es que el gráfica esté por debajo del eje x, es decir, que los valores de y = p(x) sólo tome valores negativos alrededor de x = -1; la otra alternativa sería que el gráfico se encuentre por encima del eje x, es decir, que alrededor del valor x = -1 sólo tome valores positivos. Pero esta opción la debemos descartar ¿por qué?



Para los valores de abscisas 2 y 3 el gráfico cambia de semiplano. Si continuamos con el gráfico anterior tenemos una única posibilidad



El gráfico definitivo es:



b) La expresión factoreada, responde al teorema de la factorización completa con la siguiente forma: $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)$ donde los x_i son las raíces del polinomio y a_n es el coeficiente principal. Para nuestro caso, las raíces son $\{-1; 2; 3\}$. Como el polinomio es de grado mínimo, consideramos x = -1 raíz de multiplicidad 2 y x = 2 , x = 3 raíces simples:

$$p(x) = a_n(x+1)(x+1)(x-2)(x-3)$$

O su equivalente:

$$p(x) = a_n (x+1)^2 (x-2)(x-3) \quad \textbf{(1)}$$

Para determinar el valor del coeficiente principal, utilizamos la información que dice: “La gráfica de y = p(x) corta al eje y en -3 ” Esto significa que la imagen de cero es 3, $p(0) = -3$. Lo evaluamos en la última expresión:

$$p(0) = a_n (0+1)^2 (0-2)(0-3)$$

$$-3 = a_n 1(-2)(-3)$$

Despejando

$$-\frac{1}{2} = a_n$$

Reemplazando en la **(1)** nos queda la expresión factoreada del polinomio.

$$\boxed{p(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 (x-2)(x-3)}$$

c) Para obtener la forma polinómica del mismo desarrollamos cuadrados y distribuimos en la expresión:

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 (x-2)(x-3)$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2.x.1 + 1^2)(x^2 - 3.x - 2.x + 6)$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2.x + 1)(x^2 - 5.x + 6)$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 5.x^3 + 6.x^2 + 2.x^3 - 10.x^2 + 12.x + x^2 - 5.x + 6)$$

Agrupando los términos semejantes:

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 5.x^3 + 6.x^2 + 2.x^3 - 10.x^2 + 12.x + x^2 - 5.x + 6)$$

$-3.x^3$ $\quad$ $-3.x^2$ $\quad$ $7.x$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 3.x^3 - 3.x^2 + 7.x + 6)$$

Última distributiva con el $-\frac{1}{2}$ y queda el polinomio buscado, además está ordenado en grado decreciente y completo:

$$\boxed{p(x) = -\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{3}{2}.x^3 + \tfrac{3}{2}.x^2 - \tfrac{7}{2}.x - 3}$$

Respondemos las preguntas sobre el mismo:

$$p(x) = \boxed{-\tfrac{1}{2}}x^4 + \tfrac{3}{2}.x^3 \boxed{+\tfrac{3}{2}.x^2} \boxed{-\tfrac{7}{2}}.x \boxed{-3}$$

c_1) Término de grado cero o término independiente

c_3) Coeficiente del término lineal.

c_4) Coeficiente principal o del término de mayor grado

c_2) Término de grado dos o término cuadrático