Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

1. Calcular los siguientes límites aplicando adecuadamente la regla de L'Hopital, indicando el tipo de indeterminación que se presenta en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{tg(3h)}{2h}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$ (*)

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(1+e^x)}{3x} - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right)$

i) $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x^3)^{\frac{2}{x^3}}$

j) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{senx}$

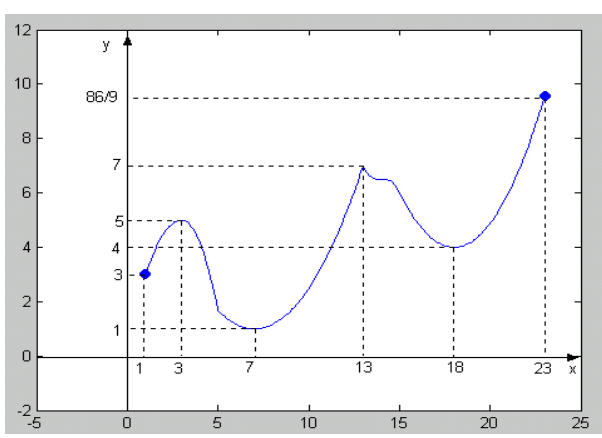
2. Hallar el valor de $a \in \Re$ de manera que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3e^{ax} + 2x - 3}{x} & si\, x \neq 0 \\ 7 & si\, x = 0 \end{cases}$ resulte continua en x = 0.

3. ¿Es x = 2 asíntota vertical de la función $f(x) = (x^2-4)\ln(x-2)$? Justificar la respuesta.

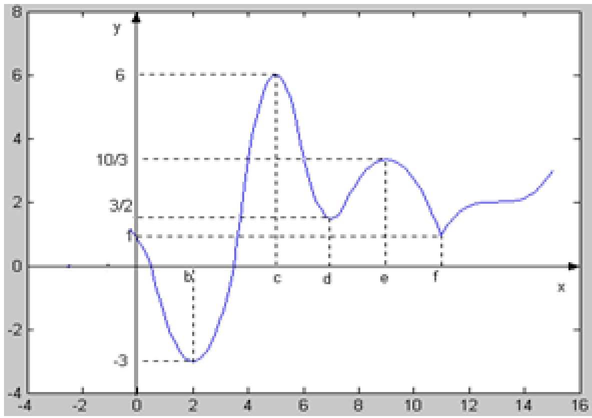
4. Para cada una de las funciones cuyo gráfico se presenta a continuación:

a) Indicar los extremos relativos y/o absolutos
b) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento

i) f: [1; 23] → R



ii) f: [0, ∞) → R describe la temperatura en función del tiempo de un proceso industrial



5. El uso de las derivadas nos permite analizar cambios marginales en las funciones, es decir, cuando la variable independiente tiene cambios muy pequeños. En este sentido la siguiente función hace referencia al costo de producción para la soja de una empresa agropecuaria, que depende de la cantidad (en toneladas) cosechada:

$$C(q) = 0.3q + 4 + (100/q)$$

a) Calcular el costo total de producir 30 toneladas de soja.
b) Derivar la función de costo para conocer la función de costo marginal (expresión que representa el cambio en el costo para cuando se producen variaciones muy pequeñas en la cantidad producida).
c) ¿Cuál es el costo marginal de una producción de 30 toneladas?
d) ¿Qué significa el valor anteriormente obtenido?
e) ¿Cuál sería el costo mínimo de producción?

6. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

c) $f(x) = \frac{ln(x-8)}{x-8}$

d) $f(x) = x\sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \;\; x \leq 1 \\ x-2 & si \;\; x > 1 \end{cases}$ (*)

7. Mauricio realiza un régimen para adelgazar. Ha podido establecer que la cantidad de kilos que adelgaza es función del tiempo durante el cual hace el régimen según la siguiente fórmula: $k(t) = \frac{24e^t}{3e^t+1} - 6$, t > 0

a) Probar que cuanto más tiempo persista más adelgazará.

b) Probar que con este régimen no podría adelgazar más de dos kilos.

8. Determinar los máximos y mínimos absolutos, en caso de que existan, para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 7$ en [0; 3]

b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ en [1; 2]

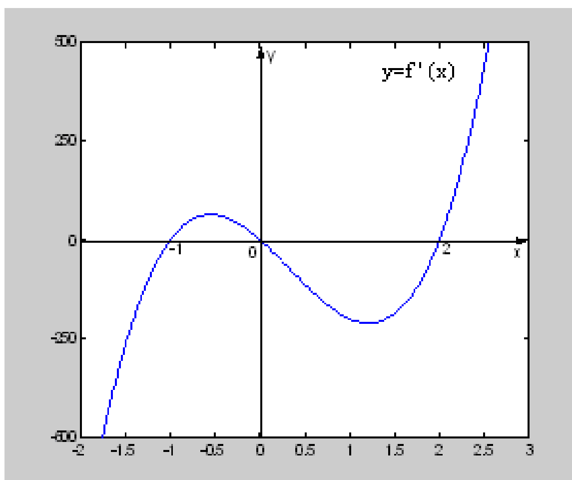
9. Determinar a $\in R$ tal que $f(x) = x^4 - 2a\,x^2 + \ln 3$ alcance un valor mínimo relativo en $x_0 = 1$. Para el valor de a hallado, ¿alcanza f otros valores extremos relativos?

10. Dado todos los rectángulos de perímetro fijo A (A > 0), ¿cuál es el que tiene área máxima?

11. Un rectángulo de perímetro 18 cm se hace girar alrededor de uno de sus lados generando un cilindro. De todos los rectángulos que se sujetan a la condición de perímetro dado, ¿cuál es el que genera un cilindro de volumen máximo?

12. Sea f una función continua cuyo dominio es el conjunto de números reales. El gráfico de su función derivada es el que se muestra a continuación. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Determinar los extremos locales de f.



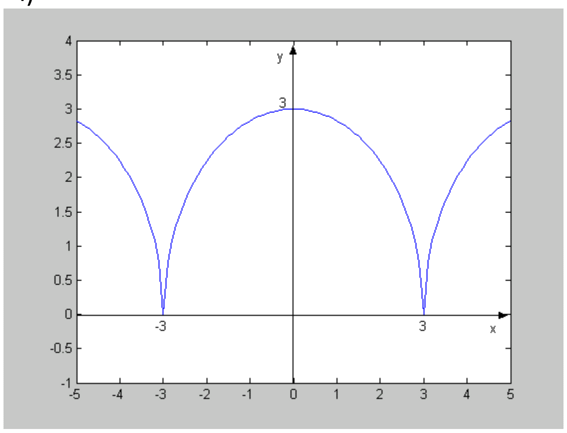
13. La velocidad v de una onda de longitud L en agua profunda es $v = v(L) = K\sqrt{\dfrac{L}{C} + \dfrac{C}{L}}$, donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de onda que da lugar a la velocidad mínima?

14. Un generador de corriente tiene una fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohms, donde E y r son constantes positivas. Si R ohms es la resistencia externa conectada a la máquina, la resistencia total es (r + R) ohms y si P watts es la potencia entonces $P = P(R) = \dfrac{E^2 R}{(r+R)^2}$. Demostrar que el consumo máximo de potencias se presenta cuando la resistencia externa es igual a la interna.

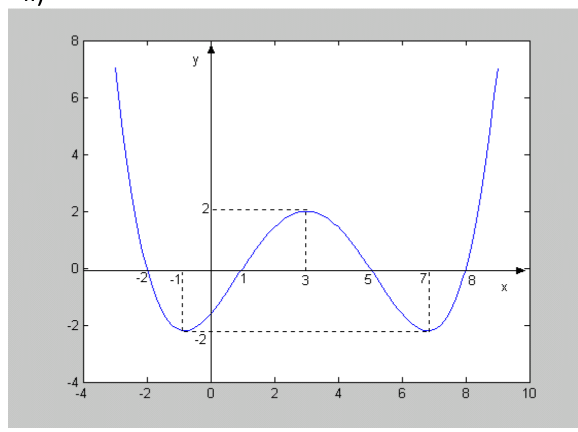
15. Para cada una de las funciones cuyas gráficas se representan a continuación:

a) Determinar su dominio de definición.
b) Indicar los extremos relativos y/o absolutos.
c) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.
d) Indicar los puntos de inflexión.
e) Hallar los intervalos de concavidad positiva y de concavidad negativa

i)



ii)



16. Determinar los intervalos de concavidad positiva y negativa y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

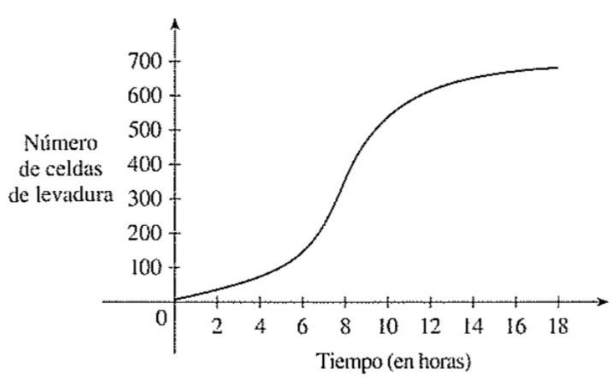
a) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^x$

c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

17. La siguiente gráfica corresponde a una población de células de levadura en un cultivo de laboratorio como una función del tiempo (medido en horas)



a. Describir cómo varía la rapidez de incremento de población.
b. ¿Cuándo es más alta la rapidez?
c. Indicar en el gráfico de forma aproximada dónde la función de población es cóncava positiva o cóncava negativa.
d. Ubicar, de manera aproximada, el punto de inflexión del gráfico.

18. Hallar el valor de $a \in R, a \neq 0$, para que la función $f(x) = e^{ax^2-ax+2}$ tenga al punto $(1, f(1))$ como punto de inflexión. (*)

19. Para cada una de las siguientes funciones se pide determinar:

a) el dominio.
b) los ceros.
c) su paridad.
c) sus asíntotas, si existen.
d) los puntos críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y/o absolutos, si existen.
e) los intervalos de concavidad positiva y negativa, y los puntos de inflexión, si existen.
f) un gráfico aproximado.
g) el conjunto imagen.

1) $f(t) = t^4 - 4t^3 + 1$

2) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x-1}$

3) $f(x) = (x-4)^{2/3}$

4) $f(x) = 9x^{-3} - 3x^{-1}$

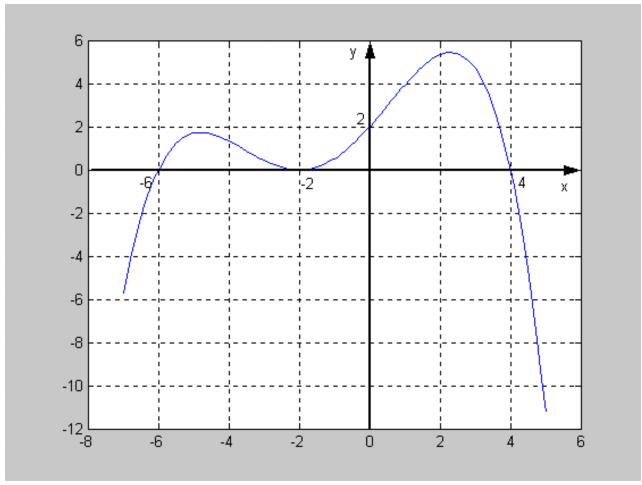
5) $f(x) = e^{-x^2}$

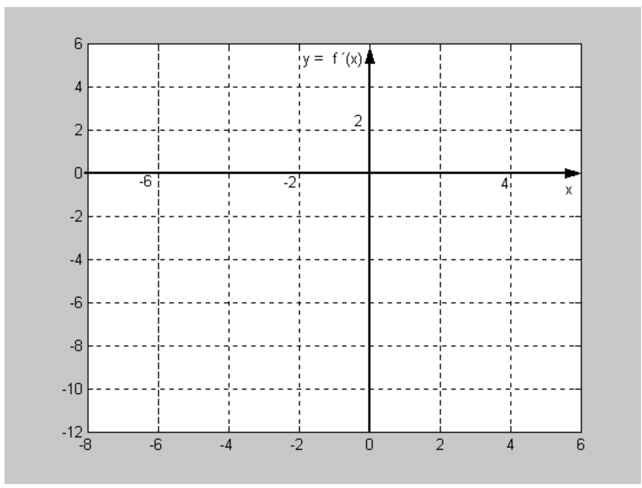
6) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

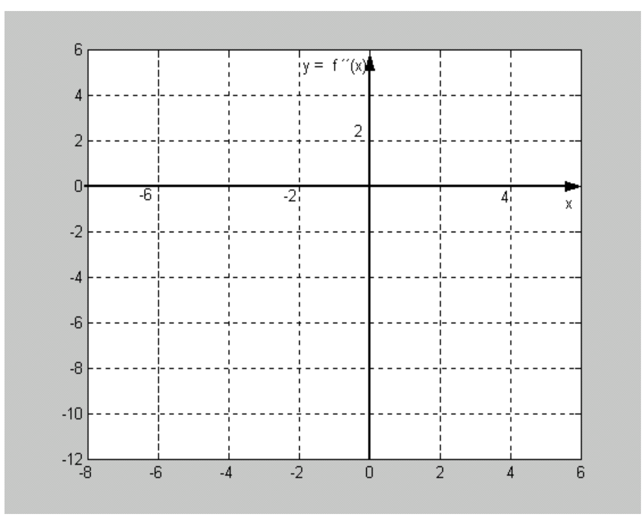
7) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

8) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

20. Dada la siguiente gráfica de función, obtener las gráficas aproximadas de sus funciones derivada primera y segunda trazando rectas tangentes por los puntos que considere convenientes.







21. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) La gráfica de todo polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.
b) Si $f'(a) = 0$ entonces f alcanza un extremo relativo en $x = a$.
c) Si $f: [a; b] \to R$ es derivable en (a; b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a; b)$, entonces la función f no alcanza un extremo.

22. Desde un barco que se mueve a 20 kmh, se ve otro barco que está a 20 km cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de 15 kmh. ¿Después de cuánto tiempo la distancia que separa a los barcos es mínima?

23. En cierto modelo epidemiológico (Verhulst), la población $x(t)$ que se ha contagiado en un instante t, si inicialmente el número de afectados es α, viene dado por $x(t) = \frac{\alpha N}{\alpha+(N-\alpha)e^{-kt}}$, siendo k una constante positiva (tanto mayor cuanto más virulenta la enfermedad) y N es el tamaño de la población, $0 < \alpha < N$.

a) Probar que el gráfico de x(t) tiene a la recta x = N como asíntota horizontal, e interpretarlo (la curva recibe el nombre de 'logística').
b) Probar que la máxima velocidad de propagación es $\frac{kN}{4}$, y determinar la población en ese instante.
c) Un segundo modelo (Gompertz) postula $y(t) = e^N e^{(ln(\alpha)-N)e^{-kt}}$, siendo k, α, N como antes. Probar que el gráfico de y(t) tiene a la recta y = N como asíntota horizontal, y que la máxima velocidad de propagación es k $e^{(N-1)}$. Determinar la población en ese instante.

24. Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo. Recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo. (*)

25. Calcular valores aproximados de: $\sqrt[3]{126}$, $\sqrt{140}$, $\ln(1,3)$ utilizando la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función f elegida convenientemente en un punto adecuado.

26. Dadas las funciones

a) $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 1$
b) $f(x) = \ln(x-2)+1$ $\quad x_0 = 3$

i) Obtener, para cada una de ellas, la expresión $\Delta f - df$ en función de Δx.
ii) Verificar que $\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta f - df) = 0$. ¿Qué interpretación geométrica tiene $\Delta f - df$?
iii) Considerando $\Delta x = -0,4$ para la función del ítem a) y $\Delta x = 0,5$ para la del ítem b), representar gráficamente cada una de las siguientes funciones y señalar en el gráfico Δx, Δf, df y $\Delta f - df$

27. Mediante diferenciales calcular en forma aproximada: $\sqrt[3]{126}$, $\sqrt{140}$, $\ln(1,3)$. Comparar el resultado obtenido con los del ejercicio 23.

28. Calcular *df* para $x_1 = -3$ y $\Delta x = 1/2$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x_1 = -3$ es $3y + 9x = 8$

29. Para la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

a) Calcular el error que se comete si se reemplaza $f(2,96)$ mediante diferenciales.

b) Calcular $\Delta f=f(3+\Delta x)-f(3)$ e identificar $df(3;\Delta x)$ como la parte lineal del incremento Δf.

30. Sean f y g dos funciones derivables. Demostrar que d(f.g) = g. df + f. dg

31. Dada $f(x)=sen(x)$

a) Obtener una expresión que permita aproximar f para x en un entorno de 0, mediante el uso del diferencial.

b) Obtener una expresión que permita aproximar f para x en un entorno de 0, mediante el uso de un polinomio de Taylor de orden 2. ¿Se hubiese obtenido la misma aproximación si se utilizaba un polinomio de Taylor de grado 2?

32. i) Hallar el polinomio de grado n que mejor aproxima a cada una de las siguientes funciones en un entorno de x_0

a) $f(x)=\sqrt{1+2x}$ n = 2 $x_0 = 4$

b) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ n = 3 $x_0 = 0$

c) $f(x)=e^{2(x-1)}$ n = 3 $x_0 = 1$

ii) Utilizar el polinomio correspondiente para calcular un valor aproximado de $\sqrt{8{,}8}$, $\frac{1}{0{,}8}$, $e^{0{,}1}$

33. Aproximar cos(x) mediante un polinomio de Mac Laurin de orden cuatro.

34. Sea P una función polinómica tal que su desarrollo en potencias de (x + 1) es
$P(x) = -4 + 3(x+1) - 8(x+1)^2 + 5(x+1)^3$. Hallar el coeficiente principal y el término independiente de la función P.

35. Dada la función $f(x)=x^{5/2}$, justificar si existe o no el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f.

36. Analizar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, e intervalos de concavidad de las funciones que tienen las siguientes características:

a) $f´(x)=\frac{x-1}{x^2}$ sabiendo que Dom f = R - {0}

b) $df(x;dx)=\frac{x^2-1}{x \quad +3}dx$ sabiendo que Dom f = Dom $f´$

37. Sea $\Delta f = 3x^3(\Delta x)^2 - (x^2+3x-1)^2\,\Delta x + (-x+1)\,\Delta x + (x^2+3)^2(\Delta x)^3$ el incremento de la función *f* al pasar de **x** a **x + Δx**.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función *f* en el punto (0, 3).

b) ¿Es x = 1 un punto crítico de la función *f*? Justificar.

38. Un recipiente esférico de radio R = 12 cm, por efecto de una variación de temperatura aumenta de volumen, creciendo su radio en 1,5 mm. Determinar:

a) El aumento real de volumen.
b) El aumento aproximado de volumen mediante diferenciales.

Nota: V esfera: $\frac{4}{3}\pi R^3$

39. El período de oscilación de un péndulo, medido en segundos, se determina a través de la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo L la longitud del péndulo (en cm) y g = 9,8 m/s^2 la aceleración de la gravedad. Si la longitud del péndulo es de 20 cm, calcular cuánto se debe alterar la longitud para que el período T aumente 0,05 segundos mediante una aproximación de primer orden.

40. Decidir si las siguientes funciones $f: D \to R$ satisfacen o no las hipótesis del Teorema de Rolle, en los intervalos [a; b] que se indican en cada caso. En caso afirmativo, hallar $c \in (a;b)/f'(c) = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \le 1 \\ 0{,}5x & si\ x > 1 \end{cases}$ en [0; 2]

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ 2x-1 & si\ x > 1 \end{cases}$ en [-3; 5]

41. Determinar si es posible o no aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o Teorema de Lagrange) a las siguientes funciones $f: D \to R$ en los puntos indicados. En caso afirmativo, hallar $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) $f(x) = x^3 + 1$ en [1; 2]
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si\ x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si\ x > 1 \end{cases}$ en [-3; 3] (*)

42. a) Dado el polinomio $P(x) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 2$, decidir si existe al menos un x perteneciente a (1; 3) tal que $P'(x) = 6$. Justificar.

b) Para las funciones $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ y $g(x) = 3x^2 + 1$, decidir si existe $c \in (0; 1)$ tal que g'(c).(f(1) – f(0)) = f '(c).(g(1) – g(0)). Justificar. En caso de que exista determinar el valor de c.

43. Aplicar el Teorema de Lagrange para demostrar que si f y g son dos funciones que tienen la misma función derivada entonces f(x) = g(x) + c, con c constante.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 1: Calcular los siguientes límites aplicando adecuadamente la regla de L'Hopital, indicando el tipo de indeterminación que se presenta en cada caso.

Antes de resolver algunos ítems de este ejercicio, recordemos que la regla de L´Hopital establece que, dadas dos funciones derivables f y g, con g' (x) $\neq 0$ tales que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ ($c \in$) o bien $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to \infty} g(x) = 0$, si $\lim_{x\to c(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x\to c(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Si $\lim_{x\to c(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty (o -\infty)$, entonces $\lim_{x\to c(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\ (-\infty)$ respectivamente.

c) $\lim_{x\to -\infty} xe^x$

Dado que $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$ y $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ se trata de una indeterminación del tipo $0.\infty$. Para aplicar la regla de L'Hopital, necesitamos trabajar con indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ por lo cual tendremos que reescribir la función para obtener alguna de estas indeterminaciones. Observemos que $x.\,e^x = \frac{x}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x}{e^{-x}}$

Multiplicar por e^x es igual a dividir por $\frac{1}{e^x}$

Luego, tenemos que $\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$. Dado que este último límite es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (recordar que $\lim_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty$), entonces estamos en condiciones de aplicar la regla de L´Hopital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to -\infty} x.\,e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Aplicamos la regla de L'Hopital, para lo cual derivamos el numerador y el denominador de la función.

Por lo tanto, $\lim_{x \to -\infty} x.\, e^{x} = 0$.

Otro ejemplo: $\lim_{x\to 0^+} x^x$

En este caso, tenemos una indeterminación del tipo 0^0 Para poder utilizar la regla de L'Hopital y salvar estas indeterminaciones (así como también 1^∞ , ∞^0), tenemos que ayudarnos con la función y = ln(x) como sigue:

Llamemos L al límite que queremos calcular, es decir, L = $\lim_{x\to 0^+} x^x$. Notemos que como x es positivo, estamos calculando el límite de dos funciones positivas por lo que L>0. Podemos aplicar entonces la función logaritmo a ambos lados de la igualdad. Tenemos que;

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) \qquad \text{Dado que el logaritmo es una función continua:}$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln\left(x^x\right)\right) \qquad \text{Por propiedad del logaritmo: } \ln(a^b) = b.\ln(a)$$

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x)$$

Calculemos este último límite utilizando la regla de L'Hopital. Notemos que se trata de una indeterminación del tipo $0.\infty$ por lo que tendremos que expresar la función y = x.ln(x) como un cociente a fin de poder aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.\frac{x^2}{-1} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Aplicamos la regla de L'Hopital por tratarse de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Luego, $\ln(L) = \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = 0$. Por lo que ln(L) = 0 y, despejando, L = $e^0 = 1$. Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

Ejercicio 6: Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

e) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & si\ x\le 1 \\ x-2 & si\ x>1 \end{cases}$

Notemos, en primer lugar, que el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales. Para encontrar los máximos y mínimos locales de la función, necesitamos hallar el conjunto de puntos (o valores) críticos, que son los posibles extremos de la función. Recordemos que este conjunto se define como $\left\{ x \in \mathrm{Dom} f \,/\, f'(x) = 0 \text{ o no existe } f'(x) \right\}$. Busquemos entonces la derivada de la función f, teniendo en cuenta que, dado que se trata de una función definida por ramas, en x = 1 tendremos que utilizar la definición de derivada. Tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Igualando la derivada a cero, obtenemos que x = 0 es un punto crítico (este valor de x pertenece a la rama correspondiente, dado que 0 < 1). Analicemos aparte que sucede con la derivabilidad de la función en x = 1. Dado que la función es continua en x = 1 (comprobarlo) tenemos que utilizar la definición de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{-x^2 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} \\ \displaystyle = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ \displaystyle = \lim_{x \to 1^-} -(x+1) = -2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 2 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \end{cases}$$

Luego,

como los límites laterales no coinciden, concluimos que la función no es derivable en x = 1. Por lo que el conjunto de puntos críticos (y posibles extremos) de f es {0 ; 1}. Analizamos a continuación el signo de la derivada para hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos (si existen) de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dom f	(- ∞ ; 0)	0	(0 : 1)	1	(1; + ∞)

f'(x)	f '(-1) = 2>0	0	f' (1/2) =-1 < 0	∄	f' (2) = 1 > 0
f(x)	↗	M	↘	m	↗

Luego, la función es creciente en $(-\infty\ ;0)$; $(1\ ;\ +\infty)$. Es decreciente en el intervalo (0 ; 1)l Tenemos que la función alcanza un máximo relativo en f(0) = 0 y un mínimo relativo en f(1) = -1

Ejercicio 18: Hallar el valor de a $\in$ R , a $\neq$ 0, para que la función $f(x)=e^{ax^2-ax+2}$ tenga al punto (1; f(1)) como punto de inflexión.

El conjunto de los posibles puntos de inflexión de una función está dado por $\{x \in \text{Dom } f \ / \ f''(x) = 0 \text{ o } \nexists\ f''(x)\}$. Por lo que tenemos que calcular la derivada segunda de la función f:

$$f(x)=e^{ax^2-ax+2}$$

$$f'(x) = e^{ax^2-ax+2}.(2ax-a)$$

Usando la regla para derivar un producto de funciones:

$$f''(x) = e^{ax^2-ax+2}(2ax-a).(2ax-a)+e^{ax^2-ax+2}.2a$$

$$f''(x) = e^{ax^2-ax+2}.\left[(2ax-a)^2+2a\right]$$

En el último paso, sacamos la función exponencial como factor común.
Dado que (1 ; f(1)) es un punto de inflexión de la función y tanto el dominio de f como el de su segunda derivada es todo el conjunto de números reales, se verifica que f''(1) = 0. Esta condición nos permitirá hallar el valor de "a" que buscamos:

$$f''(x) = e^{ax^2-ax+2}.\left[(2ax-a)^2+2a\right]$$

$$f''(1) = e^{a-a+2}.\left[(2a-a)^2+2a\right] = 0 \rightarrow$$

$$e^{2}.\left(a^2+2a\right) = 0 \quad \text{Como } e^2 \neq 0$$

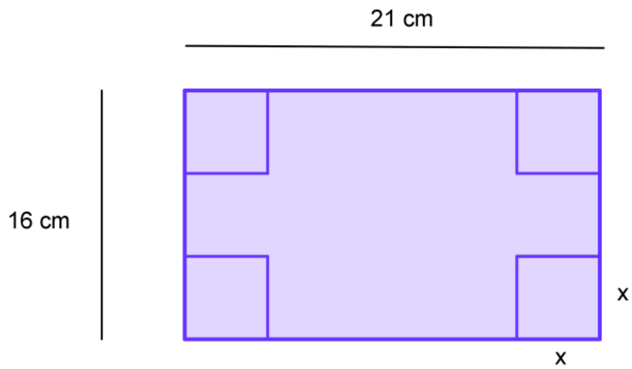
$$a^2+2a = 0$$

$$a(a+2)=0 \rightarrow \quad a = 0 \text{ o } a=-2$$

Como en e enunciado del ejercicio tenemos que a no puede ser igual a cero, el valor de a para qe (1; f(1)) sea punto de inflexión es a = -2.

Ejercicio 24 Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y 21 cm de largo. Recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.

Realicemos una figura de análisis para entender mejor la situación. Llamemos x al lado del cuadrado a recortar:



Dado que nos piden hallar cuánto debe valer x para que la caja tenga el máximo volumen, necesitamos construirnos la función volumen, que el el producto entre la superficie de la base de la caja y la altura de la misma. Es decir:

$V(x) = (21 - 2x).(16 - 2x).x$ siendo $(21 - 2x).(16 - 2x)$ el valor de la superficie de la base de la caja y x la altura de la Misma

Tenemos que encontrar el máximo de esta función. Para que resulte más simple derivar, aplcaremos previamente la propiedad distributiva:

$V(x) = (21 - 2x).(16 - 2x).x$
$= (336 - 74x + 4x^2).x$
$= 4x^3 - 74x^2 + 336x$

Derivando:

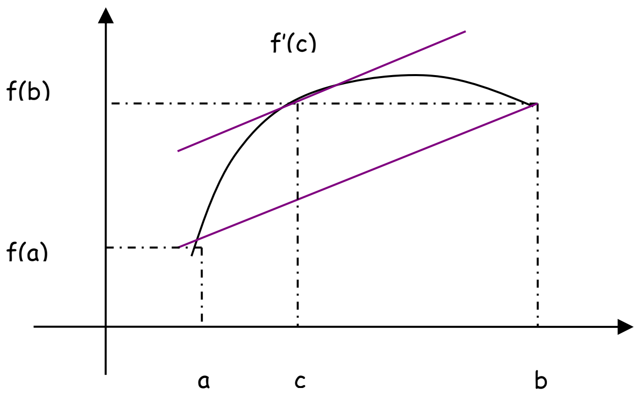
$V'(x) = 12x^2 - 148x + 336$

Planteamos la ecuación $V'(x) = 0$, es decir, $12x^2 - 148x + 336 = 0$ obteniendo como soluciones $x = \frac{28}{3}$ o $x = 3$. Notemos que, por el contexto del problema, x no puede ser igual a $\frac{28}{3}$ dado que este número es mayor a 9 y la altura del rectángulo es de 16 cm.
La solución posible es x = 3. Verifiquemos que en este valor hay un máximo, para lo cual utilizaremos el criterio de la derivada segunda:
$V''(x) = 24x - 148$
$V''(3) = 24.3 - 148 = -76 < 0$. Por lo tanto, el volumen se maximiza cuando x = 3.
Luego, el lado del cuadrado para que la caja tenga volumen máximo tiene que ser igual a 3 cm.

Ejercicio 41. Determinar si es posible o no aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o Teorema de Lagrange) a las siguientes funciones $f: D \to R$ en los puntos indicados. En caso afirmativo hallar c ε (a; b) / $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si\ x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si\ x > 1 \end{cases}$ en [-3; 3]

El teorema de Lagrange o del valor medio afirma que dada una función f, $f: [a;b] \to R$, continua en todo punto de [a ; b] y derivable en todo punto de (a ; b), entonces existe al menos un c $\in$ (a ; b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



Para determinar si es posible aplicar el teorema del valor medio, tenemos que ver si se cumplen o no las condiciones del teorema; es decir, si estamos trabajando con una función continua en un intervalo [a ; b] y derivable en (a ; b).

En este caso, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si\ x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si\ x > 1 \end{cases}$ y el intervalo dado es [-3; 3]. Como cada rama de la función es continua y derivable (se trata de funciones cuadráticas), la función podría tener problemas de continuidad en x = 1, que es el valor en el que se produce el cambio de rama (y pertenece al intervalo [-3; 3]). Analizamos entonces la continuidad de la función en x = 1:

- f (1) = 3

- Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 2x = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} -x^2 + 2x = 1 \end{cases}$$

Como los límites laterales son distintos, no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

- Al no existir $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, la función es discontinua esencial en x = 1.

Al no ser f una función continua en [-3; 3], concluimos que no se verifican las hipótesis del teorema de Lagrange.