Ejercicios

1) Comprobar, mediante el uso de leyes lógicas, que las dos proposiciones que abajo se expresan simbólicamente son lógicamente equivalentes. Justificar cada paso indicando la ley lógica aplicada.

Proposición 1: $\left[(p \to \neg q) \vee (q \wedge p)\right] \wedge r$ Proposición 2: $\neg\left[(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)\right]$

2) Demostrar la validez del siguiente razonamiento utilizando leyes lógicas y reglas de inferencia. Justificar cada paso de la demostración indicando la ley o regla utilizada.

$$\begin{array}{l} (p \vee \neg r) \wedge q \\ \neg r \to \neg q \\ \hline \therefore \ p \end{array}$$

3) Si A, B y C son conjuntos contenidos en un universal U, demostrar, justificando adecuadamente, que es verdadera la siguiente afirmación:

$$(A - B)' \cap C = (C - A) \cup (B \cap C)$$

4) a) Simplificar la siguiente expresión utilizando las propiedades que se cumplen en un Álgebra de Boole. Indicar la propiedad aplicada en cada paso de la simplificación.

$$\left[(x'.z).x\right] + \left[\left[y + (y.z')\right].(x.z')'\right]$$

b) Representar la expresión obtenida utilizando compuertas

5) Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) $\forall A : \left[A \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B\right]$

b) $\neg\left[\forall x : (r(x) \to q(x))\right] \Leftrightarrow \exists x : \left[r(x) \wedge \neg q(x)\right]$

Resolución del parcial

1) Comprobar, mediante el uso de leyes lógicas, que las dos proposiciones que abajo se expresan simbólicamente son lógicamente equivalentes. Justificar cada paso indicando la ley lógica aplicada.

Proposición 1: $\left[(p \to \neg q) \vee (q \wedge p)\right] \wedge r$ Proposición 2: $\neg\left[(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)\right]$

Resolución

Una manera posible de demostrar la equivalencia lógica entre las dos proposiciones es partir de alguna de las dos y, mediante el uso de leyes lógicas, llegar a la otra. En este caso, procederemos de otra manera: trabajaremos con cada una de las proposiciones en forma separada y, aplicando leyes lógicas, demostraremos que amas proposiciones son lógicamente equivalentes a una misma proposición (la proposición “r” en este caso).

$$[(p \to \neg q) \vee (q \wedge p)] \wedge r$$

$\Leftrightarrow [(\neg p \vee \neg q) \vee (q \wedge p)] \wedge r$ equivalencia del condicional

$\Leftrightarrow [(\neg p \vee \neg q) \vee (q \wedge p)] \wedge r$ Ley de De Morgan

$\Leftrightarrow [\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] \wedge r$ Ley conmutativa del conectivo lógico "$\wedge$"

$\Leftrightarrow T_0 \wedge r$ Ley del inverso

$\Leftrightarrow r$ Ley del neutro

Por otro lado:

$$\neg[(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)]$$

$\Leftrightarrow \neg(\neg r \vee q) \vee \neg(\neg r \vee \neg q)$ Ley de De Morgan

$\Leftrightarrow (\neg(\neg r) \wedge \neg q) \vee (\neg(\neg r) \wedge \neg(\neg q))$ Ley de De Morgan

$\Leftrightarrow (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge q)$ Ley de doble contradicción

$\Leftrightarrow r \wedge (q \vee \neg q)$ Ley distributiva

$\Leftrightarrow r \wedge T_0$ Ley del inverso

$\Leftrightarrow r$ Ley del neutro

Luego, dado que $[(p \to \neg q) \vee (q \wedge p)] \wedge r \Leftrightarrow r \Leftrightarrow \neg[(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)]$, concluimos (por transitividad de la equivalencia lógica) que $[(p \to \neg q) \vee (q \wedge p)] \wedge r \Leftrightarrow \neg[(\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg q)]$, es decir que la proposición 1 y la proposición 2 son lógicamente equivalentes, como queríamos demostrar.

2) Demostrar la validez del siguiente razonamiento utilizando leyes lógicas y reglas de inferencia. Justificar cada paso de la demostración indicando la ley o regla utilizada.

$$\begin{array}{l} (p \vee \neg r) \wedge q \\ \neg r \to \neg q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Resolución

Para demostrar la validez de un razonamiento, podemos utilizar tanto las reglas de inferencia como las leyes lógicas. Probemos la validez del razonamiento dado en el ejercicio-

1. $(p \vee \neg r) \wedge q$ premisa
2. $\neg r \to \neg q$ premisa
3. q simplificación conjuntiva en 1.
4. r modus tollens 2. y 3
5. $p \vee \neg r$ simplificación conjuntiva en 1.
6. p silogismo disyuntivo 4 y 5

3) Si A, B y C son conjuntos contenidos en un universal U, demostrar, justificando adecuadamente, que es verdadera la siguiente afirmación:

$$(A-B)'\cap C=(C-A)\cup(B\cap C)$$

Demostremos la igualdad dada teniendo en cuenta las leyes de la teoría de conjuntos. Algunas definiciones que podrían resultar de utilidad para resolver este tipo de ejercicios son las siguientes:

- $A - B = A \cap B'$
- $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

Probemos la igualdad del enunciado:

$(A - B)' \cap C = ((A \cap B')' \cap C$ por definición de diferencia
$= (A' \cup B) \cap C$ por ley de De Morgan y doble complementación
$= (A' \cap C) \cup (B \cap C)$ por propiedad distributiva
$= (C \cap A') \cup (B \cap C)$ por conmutatividad de la intersección
$= (C - A) \cup (B \cap C)$ por definición de diferencia

Luego, $(A - B)' \cap C = (C - A) \cup (B \cap C$, como queríamos probar.

4) a) Simplificar la siguiente expresión utilizando las propiedades que se cumplen en un Álgebra de Boole. Indicar la propiedad aplicada en cada paso de la simplificación.
$\left[(x'.z).x\right]+\left[\left[y+(y.z')\right].(x.z')'\right]$

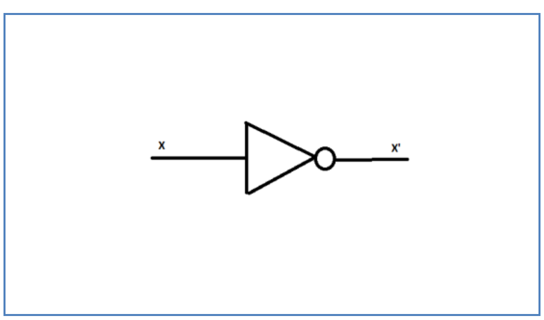
Para simplificar la expresión booleana propuesta, usaremos las leyes del Álgebra de Boole.

$\left[(x'.z).x\right]+\left[\left[y+(y.z')\right].(x.z')'\right] = \left[(zx')\,x\right]+\left[\left[y+(y.z')\right].(x.z')'\right]$ por conmutatividad del producto
$= \left[z.\,(x'x)\right] + \left[\left[\,y\,\right].(x.z')'\right]$ ley asociativa / ley de absorción
$= \left[z.\,0\right] + \left[\,y.\,(x' + (z')')\right]$ ley del inverso / Ley de De Morgan
$= 0 + \left[y.\,(x' + z)\right]$ ley de dominación / Ley de doble contradicción
$= y\,(x' + z)$ ley del identidad

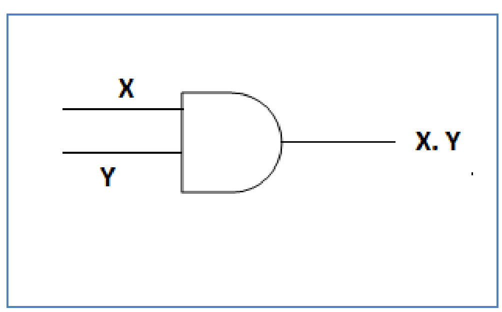
b) Representar la expresión obtenida utilizando compuertas

Para representar la expresión utilizando compuertas, recordemos que las compuertas con las que trabajamos son:

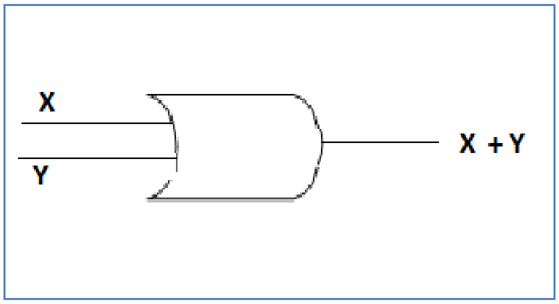
Compuerta NOT



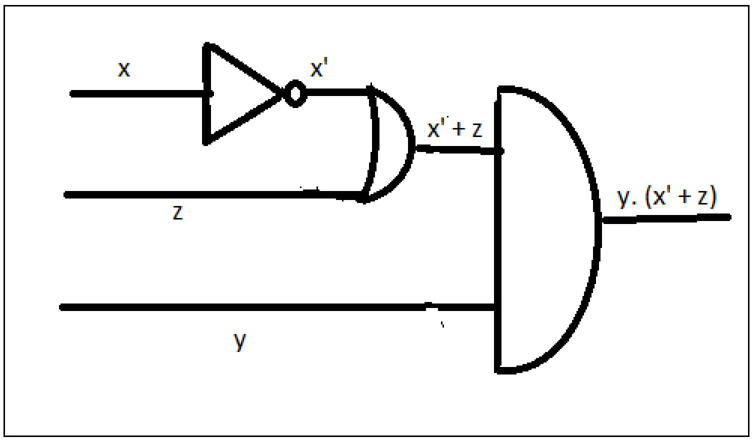
Compuerta AND



Compuerta OR



En este caso, el diagrama asociado a la expresión simplificada quedaría de la siguiente manera:



5) Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) $\forall A : \left[A \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B \right]$

La proposición es falsa. Para demostrarlo, basta considerar un contraejemplo.
Consideremos $A = \left\{ \{1\}, \{2\} \right\}$ y $B = \{1; 2; 3\}$. Se verifica que $A \subseteq P(B)$, pues todo elemento de A pertenece al conjunto P(B) (Recordemos que, en este caso, P (B) = $\left\{ \varnothing ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{1,2\} ; \{1,3\} ; \{2,3\} ; \{1. 2,3\} \right\}$) pero no se cumple que $A \subseteq B$.

b) $\neg\left[\forall x : \left(r(x) \to q(x) \right) \right] \Leftrightarrow \exists x : \left[r(x) \wedge \neg q(x) \right]$

La proposición dada es verdadera. En efecto:

$\neg\left[\forall x : \left(r(x) \to q(x) \right) \right] \Leftrightarrow \exists x : \neg \left(r(x) \to q(x) \right)$ por negación del cuantificador universal

$\Leftrightarrow \exists x : \neg (\neg r(x) \vee q(x))$ equivalencia del condicional

$\Leftrightarrow \exists x : (r(x) \wedge \neg q(x))$ ley de De Morgan/doble negación