1. Verificar que son correctos los siguientes resultados.

a. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$

b. $\int \frac{x^2-1}{x} dx = \frac{x^2}{2} - ln|x| + C$

c. $\int 5^x 4^x dx = \frac{20^x}{ln\,20} + C$

2. Resolver las siguientes integrales

a. $\int \left(xe^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$

b. $\int \frac{\sqrt{t}+t^3e^x+x^2}{t^3} dt$

c. $\int \frac{z^2+1}{z} dz$

d. $\int \left(2senx + \frac{4}{5}y + \sqrt{3}e^x\right) dy$

e. $\int \left(cos\,x + \frac{2}{x} - x^2\sqrt{x}\right) dx$

f. $\int \frac{1-sen^2x}{sen^2x} dx$

g. $\int \frac{1}{3+3x^2} + \frac{8}{cos^2 x} dx$

h. $\int (1-\sqrt[3]{x})^2 dx$

3. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con una velocidad $v(t) = t(1+t)$ medida en m/s. Su posición en el instante t = 0 es dos metros.

i. Hallar la posición del móvil a los diez segundos.
ii. Hallar la distancia recorrida por el objeto en esos diez segundos.

4. Calcular las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de sustitución

a. $\int x^2 sen(4x^3) dx$

b. $\int \frac{\sqrt{ln\,x}dx}{x}$

c. $\int tg(x)dx$

d. $\int \frac{dx}{(x+1)\,ln^2(x+1)}$

e. $\int r.\sqrt{h^2 - r^2}\, dr$

f. $\int \left[\frac{y^2+1}{y} - \frac{y}{(y^2+3)^5}\right] dy$

5. Un cohete está en reposo en el instante t=0. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = (t+1)^{\frac{1}{2}} - 1,\ \forall t \geq 0$, donde t se mide en segundos y la aceleración en m/s^2. Si el movimiento del cohete es rectilíneo, ¿qué velocidad tiene en el instante t=63?

6. Resolver las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de integración por partes.

a. $\int x^3\, ln\,x\, dx$

b. $\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx$

c. $\int x\left(cos\,x + \frac{ln\,x}{x}\right) dx$

d. $\int arccos\,z\,dz$

e. $\int cos(\,ln\,x)dx$

f. $\int x^2 arctgx dx$

7. Sean f, g, h funciones con derivada continua en R. Calcular:

a. $\int g(x)g'(x)dx$

b. $\int \frac{h'(x)}{[h(x)]^2} dx$

c. $\int f'(x).\sqrt{r + f(x)}\, dx$

8. Calcular las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de descomposición en fracciones simples

a. $\int \frac{4h-1}{h^2-5h+6}dh$ b. $\int \frac{dt}{t^4-t^2}$

c. $\int \frac{kx^3dx}{x^2-3x}$ d. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

9. Hallar la expresión de $f(x)$ sabiendo que:

a. $f'(x) = 2x - \cos x$ y $f(0) = 6$

b. $f''(x) = 2x^2 - 5x + 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 2$

c. $f'(x) = \frac{e^{4x}}{3+e^{4x}}$ y $f(0) = -\ln 3$

10. Resolver las siguientes integrales:

a. $\int \ln(x+2y)\, dy$ b. $\int \frac{2\ln(x)\cos(\ln(x))}{x}dx$

c. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$ d. $\int \frac{(\ln^2 x-4)dx}{x(\ln^2 x+2\ln x+1)}$

11. Hallar la ecuación del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante *a* desde una posición inicial x_0 y con una velocidad inicial v_0.

12. La aceleración de un móvil está dada por la fórmula $a(t) = \frac{-3v_0}{m}e^{-\frac{3t}{m}}$, siendo m la masa, v_0 la velocidad inicial y t el tiempo. Si la posición inicial de dicho móvil es x_0, hallar una expresión para la velocidad v(t) y la posición x(t) del móvil en función del tiempo.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 6.b)

Resolver las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de integración por partes.

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}}dx$$

Resolución

Recordemos el método de integración por partes:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Primero reescribimos la función a integrar como un producto de funciones

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}}dx = \int x^2e^{-3x}dx$$

Tomando

$$u = x^2$$

$$dv = e^{-3x}dx$$

Tenemos

$$du = 2x\,dx$$

Para obtener v realizamos una pequeña sustitución $t = -3t,\ dt = -3dx$

$$v = \int dv = \int e^{-3x}dx = \int -\frac{1}{3}e^{t}dt = -\frac{1}{3}e^{t} = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Luego,

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}}dx = \int x^2 e^{-3x}dx = x^2\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)2x\,dx = x^2\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \frac{2}{3}\underbrace{\int \boldsymbol{x\,e^{-3x}\,dx}}_{\boldsymbol{Cálculo\ auxiliar}} \qquad \textbf{(A)}$$

Calculemos $\int \boldsymbol{x\,e^{-3x}\,dx}$ mediante un cálculo auxiliar

Tomando

$$u = x$$

$$dv = e^{-3x}dx$$

Tenemos

$$du = dx$$
$$v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Luego

$$\int x\,e^{-3x}\,dx = x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int -\frac{1}{3}\,e^{-3x}\,dx = x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) \quad \text{(B)}$$

Reemplazando (B) en (A),

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}}dx = \int x^2 e^{-3x}dx = x^2\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \frac{2}{3}\left[x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\right] + \boldsymbol{c}$$

Ejercicio 5

Un cohete está en reposo en el instante t=0. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = (t+1)^{\frac{1}{2}} - 1,\ \forall t \geq 0$, donde t se mide en segundos y la aceleración en m/s^2. Si el movimiento del cohete es rectilíneo, ¿qué velocidad tiene en el instante t = 63?

Resolución

Dado que la aceleración de un móvil se obtiene derivando la velocidad, si conocemos la aceleración tendremos que integrar a fin de conocer la velocidad de este.
Como $a(t) = (t+1)^{1/2} - 1$,

V(t) = $\int a(t)dt = \int\left[(t+1)^{1/2} - 1\right]dt$

Utilizando el método de sustitución, llamamos z = t + 1. De modo que dz = dt. Luego:

$$\int\left[(t+1)^{1/2}\right]dt = \int\left(z^{\frac{1}{2}}\right)dz = \frac{2}{3}z^{3/2} + C = \frac{2}{3}\,(t+1)^{3/2} + C$$

Entonces:

$$\int \left[(t+1)^{1/2} - 1\right] dt = \frac{2}{3}\,(t+1)^{3/2} - t + C$$

En t = 0, el cohete se encuentra en reposo, por lo que v (0) = 0. A partir de este dato, buscamos el valor de la constante C:

$$v\,(0) = \frac{2}{3}\,(0+1)^{3/2} - 0 + C = 0 \ \rightarrow C = -\,\frac{2}{3}$$

La velocidad del cohete en cualquier instante t de tiempo es $v(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - t - \frac{2}{3}$.

En particular, a los 63 segundos la velocidad será de $v\,(63) = \frac{2}{3}.\,8^3 - 63 - \frac{2}{3}$. Aproximadamente, 277,6 m/s.