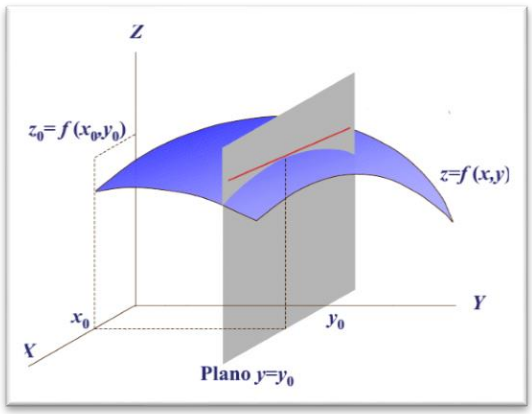
1. Hallar, por definición, la derivada direccional del campo escalar F según la dirección y el sentido dados por el vector $\vec{v}$ en el punto P_0 que se indica en cada caso.

   a. $F(x;y) = x + xy$ $\quad P_0 = (-2;1) \quad \vec{v} = (-2;2)$
   b. $F(x;y) = 2x^2 - y^2$ $\quad en\ P_0 = (-1;1)\ hacia\ P_1 = (2;3)$

2. Calcular en cada caso la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie $z = F(x,y)$ y el plano $x = x_0$ en el punto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Obtener también la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie $z = F(x,y)$ y el plano $y = y_0$ en el punto indicado anteriormente.

   a. $F(x;y) = 3x\ 2y - xy + 3 \quad x_0 = -1, y_0 = 2$
   b. $F(x;y) = -xy\ 2 + 3xy - x\ 2 \quad x_0 = 1, y_0 = 3$



3. Calcular las funciones derivadas parciales respecto de cada una de las variables, mediante reglas de derivación, de los siguientes campos escalares.

   a. $F(x;y) = 3y^2 + \sqrt{x^2 - y^2}$
   b. $F(x;y) = \frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$
   c. $F(x;y;z) = 5e^{\frac{x+y^2}{z}}$
   d. $F(r;s;t) = 3\sqrt[3]{rs + t^2 s^{1/2}} + rst\,.\,ln(2)$
   e. $F(x;y;z) = tg\left(\frac{x+y^2}{z^3}\right)$
   f. $F(u;v) = ln(e^u + e^v)$

1. Calcular la longitud de la curva C en cada uno de los siguientes casos:

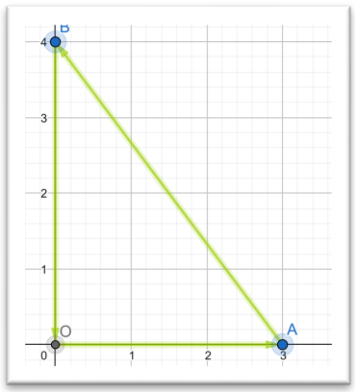
a) $\bar{r}(t) = (2t; 3\,sen\,t\,; 3\cos t)$, $\quad a \le t \le b$
$C = \operatorname{Im} \bar{r}$

b) $\bar{r}(t) = \left(6t\,; 3\sqrt{2}\,t^2\,; 2t^3\right)$, $\quad 0 \le t \le 1$
$C = \operatorname{Im} \bar{r}$

c) $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$

d) $C: \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t}\, sen\, t \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

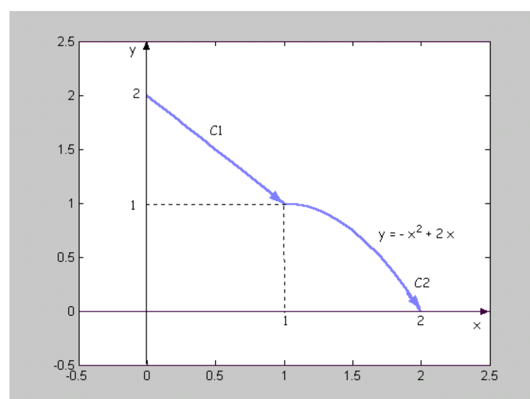
2. Calcular la integral curvilínea $\int_C (x+y)\,dS$ siendo C la curva constituida por los lados del triángulo AB0



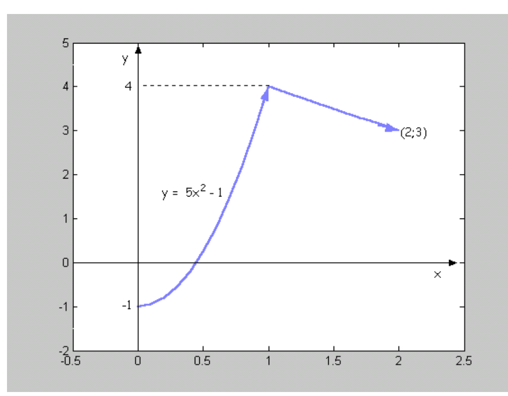
3. Calcular:

a. $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$ $\qquad$ C: y = 2x , con $0 \le x \le 2$

b. $\int_C x^2 y\,dx + y^2\,dy$ $\qquad$ $C = C_1 \cup C_2$



c. $\int_{(0;-1)}^{(2;3)} e^x y^3 dx + 3y^2 e^x dy$



g. $F(u\,;v) = u^v$ h. $F(x;y) = (3 - x)^{3y}$

4. Calcular $F'(\bar{x}_0;\check{r})$ (la derivada direccional de F en $\bar{x}_0$según dirección y sentido dados por $\check{r}$), mediante la fórmula de cálculo (regla práctica).
   a. $F(x;y) = x^2y - 2x^4y \quad en \;\; \bar{x}_0 = (1;\ 2)\ \ si\ \ \check{r} = (1/2;\ -\sqrt{3}/2)$
   b. $F(x;y) = x^y \quad en \;\; \bar{x}_0 = \ (\,1;\ 1)\ \ si\ \ \bar{r} = (2;\ 1)$
   c. $F(x;y;z) = \ x^2 + xy - 3z^2 \quad en \;\; \bar{x}_0 = (1;\ -1;\ 1)\ \ si\ \ \bar{r} = (3;\ 4;\ 5)$

5. Hallar el valor y la dirección de la derivada direccional máxima y de la derivada mínima para los siguientes campos escalares, en los puntos indicados.
   a. $F: A\ \subseteq\ R^2 \to R;\ F(x;y) = 2 + ln(7x) - \frac{2y\sqrt{y}}{3}\ \ en\ \ P_0 = (1;\ 1)$
   b. $F: R^3 \to R;\ \ F(x;y;z)\ =\ xy\ +\ yz\ +\ xz\ \ en\ P_0 = (2;\ 1;\ 3)$
   c. $F: A\ \subseteq\ R^2 \to R;\ F(x;y) = x^2 + \frac{5}{y^3}\ \ en\ P_0 = (2;\ -1)$

6. Dados los siguientes campos escalares: $F(x;\ y) = x^2\ + 5y - 2xy$, $G(x;y) = e^{y-x}$, $H(x;y) = \frac{x}{y} - 3y$, hallar, para cada uno de ellos, el valor y la dirección de las derivadas direccionales máxima y mínima , en $P_0 = (1; 1)$. Además, dar las direcciones en que se obtiene derivada direccional nula de cada campo escalar en P_0.

7. La superficie de cierto lago se representa por una región D de tal manera que la profundidad (en m) debajo del punto $(x;\ y)$ está dada por $F(x;\ y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Si un hombre se encuentra en el agua en la posición $(4; 9)$, ¿en qué dirección debe nadar para que la profundidad debajo suyo disminuya lo más rápido posible? ¿En qué dirección no cambia la profundidad?

8. La temperatura aproximada de una caja rectangular está dada por $T(x;\ y;\ z)\ =\ xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z)$. Si un mosquito se encuentra en la posición $\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$, ¿en qué dirección debe volar para enfriarse lo más rápido posible?

9. Al calentar una superficie, la temperatura (en °C) en cada punto $(x;\ y;\ z)$ de la superficie está dada por
$$F(x;\ y;\ z) = \frac{x}{y} +\ z^2$$
¿Cuál es la dirección en la que la temperatura aumenta más rápido si el foco de calor está en el punto (0, 1, 1) ?

10. Para los campos vectoriales dados, hallar la matriz jacobiana en los puntos indicados.
   a. $\bar{F}: R^2 \to R^2\ ;\ \bar{F}(x;y) = (\,x^2 + y; 2xy) \qquad P_0 = (1;2)$
   b. $\bar{F}: R^2 \to R^2\ ;\ \bar{F}(x;y) = (\,x + 2y;\ x - y;\ x^3 + y^2) \qquad P_0 = (-1;0)$
   c. $\bar{F}: R^3 \to R^3\ ;\ \bar{F}(x;y;z) = (\,x^2\,y\ ;\ x + y; z) \qquad P_0 = (0;0;0)$

11. Analizar si es posible realizar la composición que se pide, en caso afirmativo efectuarla. Indicar que tipo de función es la función compuesta.
   a. $F: R^2 \to R: F(x\,;y) = x^2 - 3xy \qquad (\bar{g} \circ F\,),\ (F\ \circ \bar{g})$

      $\bar{g}: R \to R^2\ :\ \bar{g}\ (t\ )\ =\ (\sqrt[3]{t}; t)$

   b. $F: A \subseteq R^2 \to R: F(x\,;y) = x^2 + xy \qquad (g\ \circ F\ )$
      $g\ :\ B\ \subseteq\ R\ \to R: g(t) = 2^{-t}\ \ln(t)$

c. $\bar{f}: A \subseteq R \to R^2: \bar{f}\,(t) = (\ln(t); t^2)$ $(\bar{G} \circ \bar{f})$
$\bar{G}: B \subseteq R^2 \to R^3 / \bar{G}\,(u\,; v) = (u; v; u + v)$

12. Hallar la derivada de la función compuesta (en los casos en que existe), usando regla de la cadena.

a. $\bar{f}: R \to R^3;\ \bar{f}(t) = (3t^3; 4; sen(2t))$
$G: R^3 \to R;\ G(x; y; z) = xz - y$

b. $\bar{f}: R \to R^2;\ \bar{f}(t) = (cos(t); t^2 + t)$
$G: R^2 \to R;\ G(x; y) = e^{3x+2y}$

c. $\bar{f}: R \to R^2;\ \bar{f}(t) = (cos(t); \sqrt{t})$
$G: R^2 \to R\,;\ G(x; y) = x.tg(y)$

13. Sean $\bar{G}: R^2 \to R^3;\ \bar{G}(x; y) = (x + y; xy; x^2 - y), F: R^3 \to R\,; F(t; u; v) = tu + v\ \ y\ P_0 = (2; 3)$. Se define $H = F\boldsymbol{o}\bar{G}$.
Hallar $\bar{\nabla}H\,(P_0)$

14. Para los campos vectoriales dados, hallar su divergencia y rotor

a. $\bar{F}: R^3 \to R^3;\ \bar{F}(x; y; z) = (\,x^2 + y; x + y; z)$
b. $\bar{F}: R^3 \to R^3;\ \bar{F}(x; y; z) = xyz\breve{\imath} + x^2y^2z^2\breve{\jmath} + yz^2\breve{k}$
c. $\bar{F}: R^3 \to R^3;\ \bar{F}(x; y; z) = ln(2)\breve{\imath} + cos(\,xy + z)\breve{\jmath} - 5z\breve{k}$

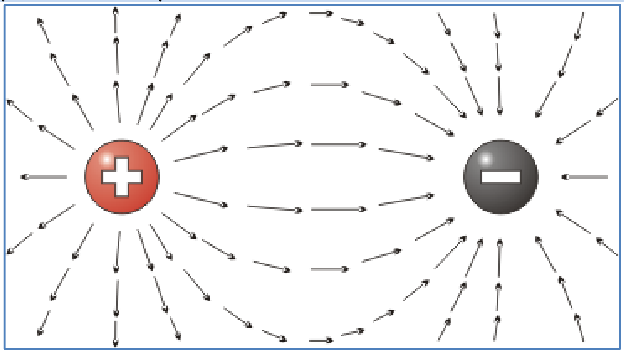
15. Para los siguientes campos vectoriales $\bar{F}$ determinar, de ser posible, un campo escalar F tal que grad F = $\bar{F}$.

a) $\bar{F}(x; y) = xe^x\breve{\imath} + (1 + cos\,y)\breve{\jmath}$
b) $\bar{F}(x; y) = (seny + 2xy)\breve{\imath} + (x\,cos\,y + x^2)\breve{\jmath}$
c) $\bar{F}(x; y) = \frac{1}{x-1}\breve{\imath} + (y^2 + 2)\breve{\jmath}$ tal que F(2;1) = 0
d) $\bar{F}(x; y) = (y^2 + x)\breve{\imath} + (2xy + y)\breve{\jmath}$ tal que F tenga nivel 3 en (1;-5)

16. La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q (ubicada en el origen) y q ubicada en el punto (x, y, z) puede ser atractiva (cuando ambas cargas tienen signos opuestos) o repulsiva (cuando tienen el mismo signo). Según la ley de Coulomb, la fuerza que sufre la carga q debido a la carga Q es el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = \varepsilon Qq\,\frac{x\breve{\imath} + y\breve{\jmath} + z\breve{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Siendo ε una constante. Mostrar que se trata de un campo conservativo. ¿Cuál es la función potencial?

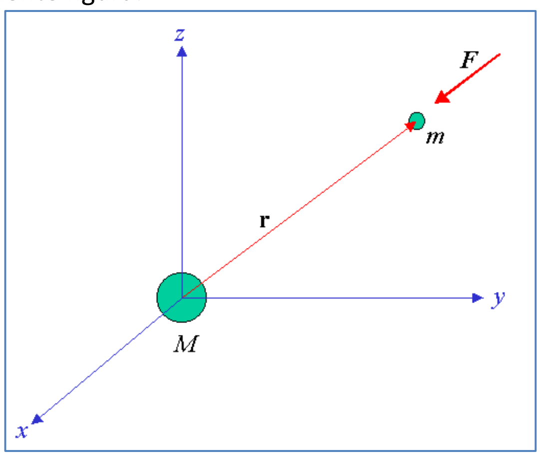


Líneas del campo eléctrico producido por un dipolo (dos cargas puntuales de igual magnitud pero de signos opuestos)

17. Consideremos la fuerza gravitacional dada por

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{|r|^3}.\vec{r}$$

que actúa como se detalla en la siguiente figura:



G es la constante de gravitación. El vector $\vec{r}$ está orientado desde el origen donde se encuentra el cuerpo de masa M hacia la posición dónde se encuentra el cuerpo de masa m siendo entonces $\vec{r} = (x, y, z)$ de modo que

$$\vec{F}(x, y, z) = -GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Demostrar que $\vec{F}$ es un campo conservativo. Hallar la función potencial.

18. Determinar si las siguientes formas diferenciales son o no exactas

a. $(2xy-y^2e^x)dx + (x^2-2e^xy)dy$
b. $\left(2x+\frac{5}{3}y+2\right)dx + \left(\frac{5}{3}x-3y^2\right)dy$
c. $(x^2y\cos(x)+2xy\,\mathrm{sen}\,x-y^2e^x)dx + (x^2\mathrm{sen}\,x-2ye^x)dy$