## Números complejos

Para resolver los ejercicios propuestos en esta sección de la práctica es necesarioconocer las definiciones básicas de los números complejos, las diferentes operaciones definidas en el conjunto de números complejos, las diferentes formas de expresar un número complejo y su representación gráfica.

1. i. Dados $z = 2 + i$, $w = -3i$, $v = 1 + \frac{1}{2}i$ efectuar las siguientes operaciones y representar gráficamente el resultado obtenido en el plano complejo.

a. $z.w$

b. $\bar{v} - w$

c. $(2w - \bar{z}).(i - v)$

d. $|w|(-z + 3v)$

ii. Escribir el resultado de cada operación del ítem anterior en forma exponencial y en forma polar o trigonométrica.

2. Interpretar geométricamente las siguientes identidades válidas para cualquier par de números complejos.

a. $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w)$

b. $\arg(z) = - \arg(\bar{z})$

3. Probar cada una de las siguientes identidades, válidas para cualquier par de números complejos z, w (con la restricción w no nulo en los cocientes en que interviene).

a. $|zw| = |z||w|$ , $|z / w| = |z| / |w|$

b. $|z^n| = |z|^n$ , con $n \in N$.

c. $|z| = |\bar{z}|$

d. $z^{-1} = \bar{z} / |z|^2$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

4.

a. Geométricamente, ¿qué efecto se produce en un número complejo z al sumarle $2 - i$? ¿y si a z se lo multiplica por $-3i$?

b. ¿Qué efecto produce geométricamente la multiplicación de un número complejo z por $1 + i$?

c. Si a un número complejo z se lo multiplica por $-i$ y luego se le resta 2 ¿qué efecto se produce geométricamente sobre z?

5.

Efectuar las siguientes operaciones en C, utilizando el sistema de representación más adecuado en cada caso. Por $\sqrt[n]{z}$ con $n$ natural, entender el conjunto de todos los números complejos w tales que $w^n = z$

a. $\sqrt[3]{1+i}$

b. $\sqrt[4]{16}$

c. $\sqrt{-i}$

d. $\sqrt[5]{i}$

e. $[(1 + 2i) + (3 - 4i)]\,(2 - i)^2$

f. $(1 + 3i) / (3 – i)$
g. $(1 + i)^{14}$
h. $i^{84}$
i. $(-i)^{35}$

6. Determinar todos los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones.

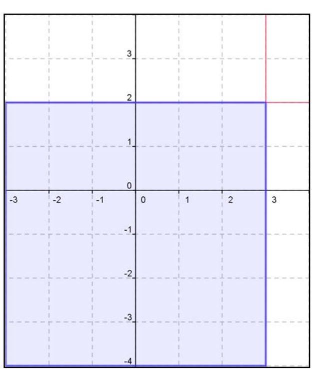
a. $z^2 + 2 = 3z$
b. $z^3 + 8 = 0$
c. $z^4 + \sqrt{3}\, i = 1$
d. $z^6 = 1 + i$
e. $z^4 – 81 = 0$
f. $(z^2 – 4)(z^2 – 2z + 5) = 0$

7. Graficar cada una de las siguientes regiones en el plano complejo.

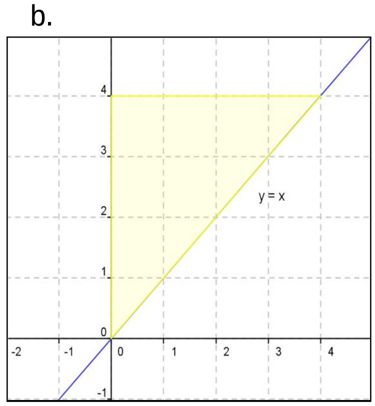
a. $R = \{z \in C \ / \ |z| < 2\}$
b. $R = \{z \in C \ / \ |z^2| + Re(z^2) + Im(z^2) \geq 0\}$
c. $R = \{ z \in C \ / \ arg(z) = \frac{\pi}{4} \}$
d. $R = \{z \in C: |z| = |i| \wedge arg\ z = 3\pi/2 \}$
e. $R = \{ z \in C: \frac{\pi}{2} < arg(z) \leq \pi \wedge 1 < |z| < 3\}$
f. $R = \{z \in C : Re(z) \geq 1\}$

8. Escribir en la notación de complejos y de pares ordenados de números reales cada uno de los conjuntos que se representan en los siguientes gráficos.

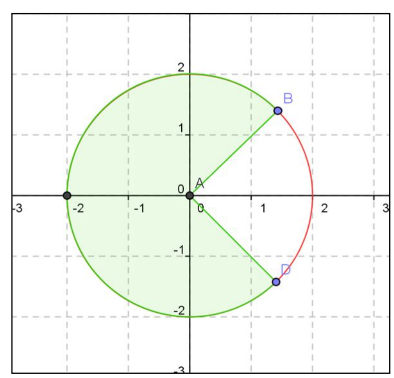
a.



b.




c.




Polinomios

Para realizar los ejercicios de esta sección, además de saber lo referido a números complejos, es necesario conocer las definiciones básicas sobre polinomios (definición de polinomio, igualdad de polinomios, grado de un polinomio, raíz de un polinomio, multiplicidad algebraica de una raíz), las operaciones suma y producto de polinomios, la descomposición factorial de polinomios la relación entre multiplicidad de una raíz real y el orden de contacto de su gráfico con el eje de abscisas, el comportamiento del gráfico según el signo del coeficiente principal y su grado, el algoritmo de la división de polinomios.

9. a. Sea los polinomios $p(x) = x$, $q(x) = x^2 + 1$, $r(x) = -x^3 + 5x - 2$ realizar las siguientes operaciones.
b. Indicar, en cada caso, el grado y el coeficiente principal del polinomio que se obtiene como resultado.

i. $p(x) + r(x)$
ii. $q(x) - r(x)$
iii. $p(x)q(x)$
iv. $p(x) + 2r(x) - q(x)$

10. Para cada uno de los siguientes polinomios:
a. Hallar el conjunto de sus raíces $\sigma(p)$, $\sigma(p) = \{t \in C : p(t) = 0\}$.
b. Escribir su descomposición factorial en Q[t], R[t] y C[t].
c. Realizar un gráfico en la zona relevante.

i. $p_1(t) = t^3 - t$
ii. $p_2(t) = -t^3 + t^2$
iii. $p_3(t) = t^4 - 4$
iv. $p_4(t) = t^5 - 13t^3 + 36t$
v. $P_5(t) = p_1 + p_2$
vi. $P_5(t) = p_1 . p_2$

11. Hallar los coeficientes desconocidos para los siguientes polinomios, de modo tal que en cada caso se cumplan las condiciones indicadas.

a. $p(x) = a(x - 2)(x + 1)$, $p(4) = 2$. ¿Cuáles son las raíces de p?
b. $q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, $x = 2$ es raíz y $q(5) = 1$.
c. $r(t) = t^4 - 4t^3 + 7t^2 + at + b$, $t = 2i$ es raíz con $a, b \in R$

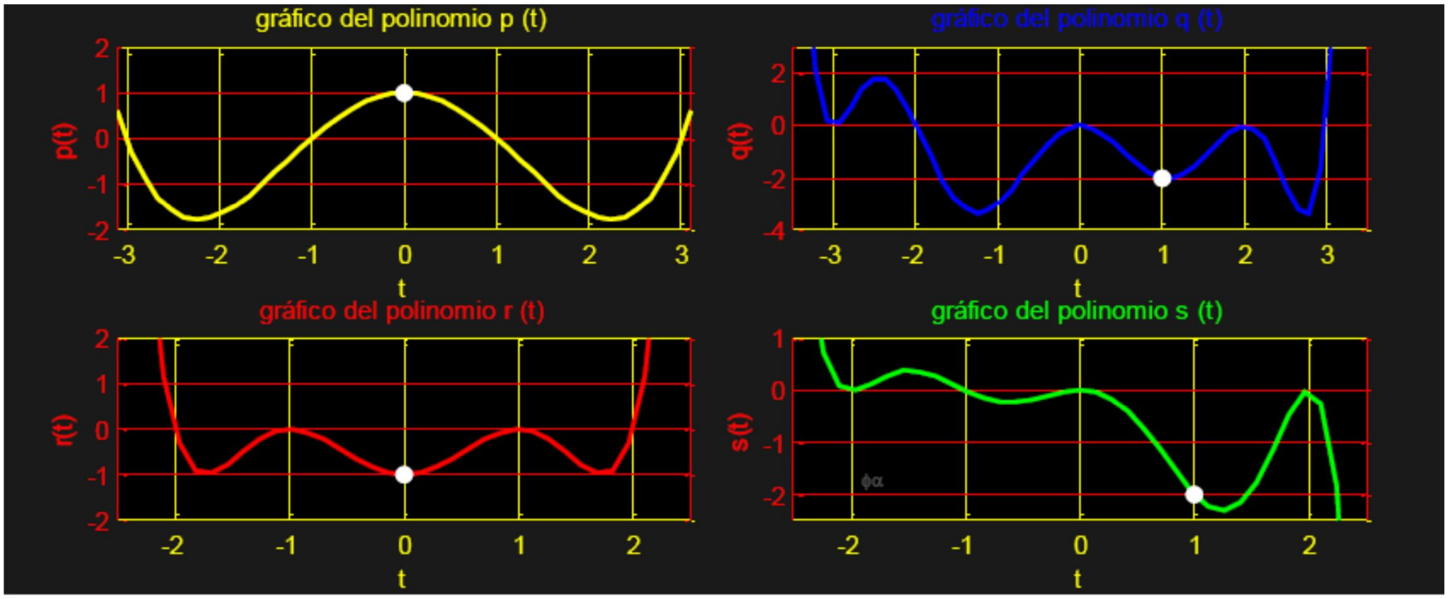
12.

| Algoritmo de división de polinomios |
|---|
| Dados cualesquiera dos polinomios p y q es posible encontrar otros dos (únicos) polinomios c (cociente) y r (resto) tal que p = qc + r con el grado de r menor que el de q. Si r es el polinomio nulo, decimos que p es divisible en q o que q divide a p o q es un factor de p. |

Determinar, para cada uno de los siguientes polinomios, el cociente y el resto que se obtiene al hacer p dividido q.

i. $p(w) = w^4 - 1$ ; $q(w) = w^3 - 25w$
ii. $p(u) = u^3 - 25u$ ; $q(u) = u^4 - 1$
iii. $p(t) = t^7 - t^5 + t^3 + t - 2$ ; $q(t) = t^3 - 1$
iv. $p(t) = t^8 - 1$ ; $q(t) = t^2 - 1$
v. $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 66x + 120$ ; $q(x) = x^2 - 6x + 8$

13.
Definir analíticamente el único polinomio de grado mínimo cuyo gráfico en la zona relevante, en cada caso, se indica en la siguiente figura.




14.

Dados los siguientes polinomios, efectuar su descomposición factorial en R[t] y C[t]. Graficarlos en su zona relevante.

i. $p(t) = t^4 - 7t^3 + 17t^2 - 17t + 6$, sabiendo que es divisible en $q(t) = (t-1)^2$
ii. $p(t) = t^4 - 5t^3 + 13t^2 - 19t + 10$, sabiendo que 1-2i es una raíz.
iii. $p(t) = t^5 - 5t^3 + 4t$
iv. $p(t) = t^5 - 10t^4 + 35t^3 - 50t^2 + 24t + k$, sabiendo que es divisible en $q(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$
v. p es tal que gr(p) = 3, $\sigma(p) = \{-2i, 2i, 3\}$ y p(1) = 20.
vi. P es tal que gr(p) = 7, $\sigma(p) = \{-2(\text{doble}), 2(\text{doble}), 0(\text{triple})\}$, p(-1) = 27

15.

Sea *P* el conjunto de los polinomios con coeficientes en R. Demostrar las siguientes propiedades:

i. $\forall$ p, q $\in P$ : gr (p.q) = gr(p) + gr(q)
ii. $\forall$ p, q $\in P$ : $\sigma(p.q) = \sigma(p) \cup \sigma(q)$
iii. $\forall$ p, q $\in P$ : gr(p + q) $\leq$ gr(p) + gr(q)

<u>Sugerencia:</u> Podrás profundizar los temas estudiados en esta guía de trabajos prácticos realizando las actividades interactivas que se proponen en Web Campus, en la sección de recursos digitales de Álgebra y Geometría Analítica.