1. Establezca cuales de las siguientes oraciones son proposiciones:
a) 87 es un número par
b) ¿Qué día es hoy?
c) Marte es un planeta pero la Luna no lo es.
d) $x+2=7$
e) Hay algún número entero que satisface la ecuación $x+2=7$.
f) Ordena tu habitación.

2. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son compuestas y exprésela de manera simbólica:
a) Si peso más de 60 kg, me voy a inscribir en el gimnasio.
b) Si me prometes guardar el secreto, entonces te cuento lo ocurrido.
c) La primera computadora digital completamente electrónica fue construida en el siglo XX.
d) $2+3>1$ ó $2+3<1$ ó $4-6=-2$
e) Aprobarás si y sólo si estudias mucho.
f) Si llueve vamos al cine, en cambio si hay sol vamos al parque.

3. Sean p, q, r, los siguientes enunciados:
p: En 1956 comenzó a funcionar la primera computadora electrónica, la ENIAC.
q: El uso de las computadoras se masificó hace 25 años con la llegada de las computadoras personales.
r: En la actualidad, la mayoría de las actividades humanas tienen algún soporte informático.

Enuncie en forma coloquial las siguientes expresiones simbólicas:
a) $p \wedge q$
b) $\neg q \rightarrow \neg r$

4. Exprese en forma simbólica y determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
a) Si $7>5$ entonces $-7<-5$
b) Si $4-2=8$ ó 6 es par, entonces $6>10$.
c) O 2 es un entero positivo o bien $\sqrt{2}$ es un número irracional.
d) Si Roma es la capital de España, entonces Buenos Aires es una ciudad.
e) 4 es un número par y 26 es divisible por 13.

5. Construya las tablas de verdad de las siguientes formas proposicionales; indique en cada caso si se trata de una tautología, una contradicción o una contingencia:
a) $p \wedge \neg q$
b) $p \wedge \neg p$
c) $(p \vee p) \leftrightarrow p$
d) $(p \wedge q) \vee \neg p$
e) $q \rightarrow (p \vee q)$
f) $\neg p \rightarrow \neg q$

6. Si v(p) = v(s) = V y v(q) = v(r) = F, determine el valor de verdad de:
a) $\neg[(p \wedge r) \leftrightarrow \neg q]$
b) $(\neg p) \vee [\neg(q \wedge s) \wedge (r \vee s)]$

7. Si $v((p \vee q) \rightarrow r) = F$ y $v(q) = V$ ¿puede conocerse el valor de verdad de p y de r?

8. Exprese la forma recíproca, contraria y contrarrecíproca de la siguiente proposición: "Si mañana es feriado, entonces estudio matemática"

9. a) Explique la diferencia entre $p \rightarrow q$ y $p \Rightarrow q$

b) Idem con $p \leftrightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$

c) ¿Toda equivalencia lógica es una tautología?

d) ¿Toda tautología es una equivalencia lógica?

e) Si p implica lógicamente a q, ¿son p y q lógicamente equivalentes?

10. Verifique que las siguientes formas son tautológicas, sin usar tablas de verdad. Justifique.

a) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

b) $[\neg(p \rightarrow q)] \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

d) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

11. Compruebe que las proposiciones $p_1 : \neg [p \rightarrow (q \vee (t \wedge r))]$ y $p_2 : \neg(p \rightarrow q) \wedge (t \rightarrow \neg r)$ son lógicamente equivalentes. Justifique la ley lógica utilizada en cada caso.

12. Utilizando leyes lógicas, simplifique las siguientes proposiciones:

a) $\neg(\neg p \rightarrow q)$

b) $\neg(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$

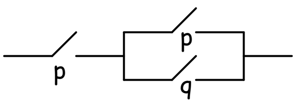
c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

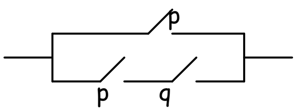
d) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

e) $(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$

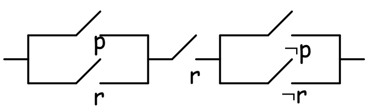
f) $\neg \{ \neg [(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q \}$

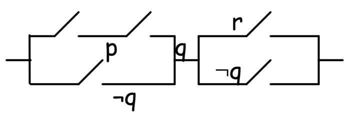
13. Escriba las expresiones simbólicas correspondientes a los circuitos lógicos dados y construya la correspondiente tabla de verdad:

a) 

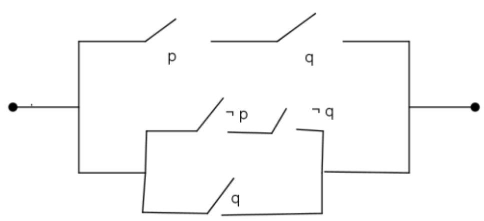
b) 

14. Simplifique los siguientes circuitos lógicos a través de la simplificación de las proposiciones asociadas a ellos:

a) 

b) 

c)



15. Dada la proposición $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg t \vee r)$

a) Diseñe un circuito que represente la expresión simbólica dada.
b) Encuentre una red de conmutación que sea equivalente a la original mediante la simplificación de la expresión dada.
c) Represente la red simplificada

16. Exprese los siguientes razonamientos en forma simbólica y determine su validez:
a) Si fumar es saludable, entonces los cigarrillos son recetados por los médicos. Fumar es saludable. Por lo tanto, los cigarrillos son recetados por los médicos.
b) Si no soy famoso, entonces no soy actor, Soy famoso. Luego, soy actor.
c) Si el índice de inflación aumenta, los precios también lo hacen. La inflación no está aumentando. Por lo tanto, los precios tampoco aumentan.

17. Indique las reglas de inferencia o equivalencias lógicas utilizadas en cada paso de la prueba de validez dada para el razonamiento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

Prueba de validez:

Paso :	Justificación:
1) $p \vee q$	
2) $(\neg p) \rightarrow q$	
3) $p \rightarrow r$	
4) $(\neg r) \rightarrow (\neg p)$	
5) $(\neg r) \rightarrow q$	
6) $[\neg(\neg r)] \vee q$	
7) $r \vee q$	
8) $q \vee r$	

18. Utilice las reglas de inferencia para demostrar la validez de los siguientes razonamientos:

a)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow (\neg q) \\ p \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow q \\ (\neg r) \vee (\neg q) \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ p \rightarrow r \\ \hline \therefore q \rightarrow r \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \\ q \wedge \neg r \\ s \rightarrow (\neg p) \\ \hline \therefore \neg s \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l} (p \rightarrow \neg q) \wedge q \\ \neg (r \rightarrow s) \\ \hline \therefore r \wedge \neg (p \vee s) \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge r \\ q \rightarrow \neg r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

19. Demuestre con un contraejemplo que los siguientes razonamientos no son válidos:

a)

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg p \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \to p \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c} p \\ \neg p \to q \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

20. Indique cuáles de las expresiones siguientes son esquemas proposicionales:

a) $x+2=8$

b) $3x-5$

c) x es un número natural múltiplo de 5 y menor que 20.

d) $p(a) \wedge q(b)$

e) $(\forall x : p(x)) \vee q(x)$

f) $\exists x : [p(x) \to (q(x) \vee r(x))]$

21. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, considerando el universo dado en cada caso:

a) $\exists x : x+3=5$ $\quad U=\{1,2,3\}$

b) $\forall x : x+3=5$ $\quad U=\{1,2,3\}$

c) $\forall x : x+3 \leq 10$ $\quad U=\{1,2,3,4\}$

d) $\forall x : x+3 \leq 10$ $\quad U=R$

e) $\exists x : x^2=5$ $\quad U=R$

f) $\exists x : x^2=5$ $\quad U=N$

22. Exprese en forma simbólica los siguientes enunciados:

a) Hay gatos que no son mimosos.

b) Algunos números son múltiplos de tres.

c) Para todo número real x, si $x \geq 0$, entonces $x^2+1 \geq 1$.

23. Niegue las siguientes proposiciones:

a) $\forall x : (p(x) \vee q(x))$

b) $(\forall x : p(x)) \wedge (\exists y : q(y))$

c) $\exists x : \exists y : x+y=1$

d) $\forall y : [p(y) \to (\exists x : \neg q(x))]$

24. Sea U el conjunto de los números enteros. Se definen en U las siguientes funciones proposicionales:

p(x) : x es múltiplo de 15 ; q(x): x es múltiplo de 5 ; r(x): x es múltiplo de 10

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar.

a) $\forall x \in U : (p(x) \vee \neg q(x))$

b) $\forall x \in U: (p(x) \to q(x))$

c) $\exists x \in U : (r(x) \to q(x))$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 12

Compruebe que las proposiciones $p_1 : \neg[p \to (q \vee (t \wedge r))]$ y $p_2 : \neg(p \to q) \wedge (t \to \neg r)$ son lógicamente equivalentes. Justifique la ley lógica utilizada en cada caso.

Resolución

La idea para resolver este ejercicio será la siguiente: comenzaremos trabajando con la proposición p_1 y, mediante la aplicación de las leyes lógicas, llegaremos a la proposición p_2.

$$
\begin{aligned}
\neg[p \to (q \vee (t \wedge r))] &\Leftrightarrow \neg\left[\neg p \vee \left(q \vee (t \wedge r)\right)\right] && \text{por equivalencia del condicional}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg\left(q \vee (t \wedge r)\right) && \text{por Ley de De Morgan}\\
&\Leftrightarrow p \wedge \neg\left(q \vee (t \wedge r)\right) && \text{por ley de doble contradicción}\\
&\Leftrightarrow p \wedge \left(\neg q \wedge \neg(t \wedge r)\right) && \text{por ley de De Morgan}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge \neg(t \wedge r) && \text{por ley asociativa para el conectivo "}\wedge\text{"}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (\neg t \vee \neg r) && \text{por ley de De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg t \vee \neg r) && \text{por ley de De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge (t \to \neg r) && \text{por equivalencia del condicional}
\end{aligned}
$$

Comprobamos luego que las proposiciones dadas en el enunciado son lógicamente equivalentes, es decir, $\neg[p \to (q \vee (t \wedge r))] \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge (t \to \neg r)$

Ejercicio (similar al ejercicio13)

Utilizando leyes lógicas, simplifique la siguiente proposición: $\neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$

Resolución

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q] &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \left[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)\right] && \text{por ley distributiva}\\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \left[(\neg p \vee \neg q) \wedge T_0\right] && \text{por ley del inverso}\\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg q) && \text{por ley del neutro}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q) && \text{por ley de De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \left[\neg p \vee (\neg p \vee \neg q)\right] \wedge \left[\neg q \vee (\neg p \vee \neg q)\right] && \text{por ley distributiva}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p) && \text{ley asociativa / ley conmutativa / ley de idempotencia}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q && \text{por ley de idempotencia}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 19, ítem e)

Utilice las reglas de inferencia para demostrar la validez de los siguientes razonamientos:

$$
\begin{array}{l}
(p \to \neg q) \wedge q\\
\neg(r \to s)\\
\hline
\therefore \quad r \wedge \neg(p \vee s)
\end{array}
$$

Resolución

1. $(p \rightarrow \neg q) \wedge q$ premisa
2. $\neg (r \rightarrow s)$ premisa
3. $(\neg p \vee \neg q) \wedge q$ equivalencia del condicional en 1.
4. $\neg p$ silogismo disyuntivo en 3.
5. $\neg(\neg r \vee s)$ equivalencia del condicional en 2.
6. $r \wedge \neg s$ ley de De Morgan / doble contradicción en 5.
7. $\neg p \wedge (r \wedge \neg s)$ regla de conjunción entre 4 y 6
8. $r \wedge (\neg p \wedge \neg s)$ ley conmutativa / ley asociativa del "$\wedge$" en 7.
9. $r \wedge \neg(p \vee s)$ ley de De Morgan en 8.

Ejercicio similar al ejercicio 24: Niegue la siguiente proposición:

$$\forall y : [p(y) \rightarrow (\exists x : \neg q(x))]$$

Resolución

$\neg(\forall y : \forall y : [p(y) \rightarrow (\exists x : \neg q(x))]) \Leftrightarrow \exists y : \neg [p(y) \rightarrow (\exists x : \neg q(x))]$ por negación del cuantificador universal

$\Leftrightarrow \exists y : \neg [\neg p(y) \vee (\exists x : \neg q(x))]$ por equivalencia del condicional

$\Leftrightarrow \exists y : [p(y) \wedge \neg (\exists x : \neg q(x))]$ por ley de De Morgan / ley de doble contradicción

$\Leftrightarrow \exists y : [p(y) \wedge (\forall x : q(x))]$ negación del cuantificador existencial / ley de doble contradicción