1. Un alpinista se encuentra sobre una montaña con forma de un paraboloide elíptico, la cual puede describirse mediante la ecuación $z = 5000 - 4x^2 - 3y^2$, siendo x e y las coordenadas este-oeste y norte-sur respectivamente y z la altitud sobre el nivel del mar (medidas en metros). Si alpinista se encuentra parado en el punto (1; 1) y quiere escalar hacia un refugio, siguiendo la dirección dada por el vector $\vec{v} = (1,3)$, ¿cuál es la variación o tasa de cambio en la altitud de la montaña?

2. a. Demostrar, usando la definición de derivada respecto a un vector, que para todo campo escalar cuya derivada $F'(\bar{a};\bar{r})$ existe, se verifica que $F'(\bar{a};\bar{r}) = \|\bar{r}\| F'(\bar{a};\check{r})$.

b. Calcular, por definición, la derivada direccional del campo escalar $F(x;y) = x + xy$, según la dirección y sentido dados por el vector $\bar{r} = (-2;2)$, en el punto $P_0 = (-2;1)$.

3. Calcular, en cada caso, la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie $z = F(x,y)$ y el plano $x = x_0$ en el punto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Obtener también la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie $z = F(x,y)$ y el plano $y = y_0$ en el punto indicado anteriormente.

a. $F(x;y) = 3x^2y - xy + 3$ $\quad x_0 = -1, y_0 = 2$
b. $F(x;y) = -xy^2 + 3xy - x^2$ $\quad x_0 = 1, y_0 = 3$

4. Calcular las funciones derivadas parciales respecto de cada una de las variables, mediante reglas de derivación, de los siguientes campos escalares. En los ítems a, b y g, evaluar las derivadas parciales del campo en el punto indicado.

a. $F(x;y) = 3y^2 + \sqrt{x^2 - y^2}$, $P_0 = (1,0)$
b. $F(x;y) = \frac{2x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, $P_0 = (0,2)$
c. $F(x;y;z) = 5e^{\frac{x+y^2}{z}}$
d. $F(u;v) = ln(e^u + e^v)$
e. $F(u;v) = u^v$
f. $F(x;y) = (3 - x)^{3y}$
g. $F(x;y) = e^{x.sen(y)}$, $P_0 = (1,0)$
h. $F(s;u;v) = u^3 \cos\left(\frac{s}{v}\right)$
i. $F(x;y) = ln\,(2x + y)$. Hallar, en este caso, dominio de F y dominio de $F'_x(x;y), F'_y(x;y)$

5. Comprobar que para $F(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ se verifica que $F'_x(0;0) = F'_y(0;0) = 0$.

6. Obtener el vector gradiente de cada uno de los siguientes campos escalares en los puntos indicados.
a. $F(x;y) = x^3y - \frac{y}{\sqrt[6]{x}}$ $\quad en\ P_0 = (1;-1)$
b. $F(x;y) = x^2y - 2y^2x$ $\quad en\ P_0 = (-1;2)$
c. $F(x;y;z) = xz + yz + xyz$ $\quad en\ P_0 = (1;1;1)$

7. Dado el campo escalar $F: R^2 \to R$, demostrar:

a. Si F es constante, $\bar{\nabla} F = \vec{0}$.

b. Si existen las derivadas parciales de F en todos los puntos de R^2 entonces $\bar{\nabla}(aF) = a\bar{\nabla} F$ con $a \in R$.

8. Calcular la derivada direccional de F en $\bar{x}_0$ según dirección y sentido dados por $\check{r}$, sin utilizar la definición.

a. $F(x;y) = x^2y - 2x^4y$ en $\bar{x}_0 = (1;2)$ si $\check{r} = \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $F(x;y) = x^y$ en $\bar{x}_0 = (1;1)$ si $\bar{r} = (2;1)$

c. $F(x;y;z) = x^2 + xy - 3z^2$ en $\bar{x}_0 = (1;-1;1)$ si $\bar{r} = (3;4;5)$

9. Hallar el valor y la dirección de la derivada direccional máxima y de la derivada mínima para los siguientes campos escalares, en los puntos indicados. Para los casos a, c y e hallar las direcciones en que se obtiene la derivada direccional nula del campo en el punto dado.

a. $F: A \subseteq R^2 \to R;\ F(x;y) = 2 + ln(7x) - \frac{2y\sqrt{y}}{3}\ \ en\ P_0 = (1;1)$

b. $F: R^3 \to R;\ F(x;y;z) = xy + yz + xz\ \ en\ P_0 = (2;1;3)$

c. $F: A \subseteq R^2 \to R;\ F(x;y) = x^2 + \frac{5}{y^3}\ \ en\ P_0 = (2;-1)$

d. $F: R^2 \to R;\ F(x;y) = x^2 + 5y - 2xy\ \ en\ P_0 = (1;1)$

e. $F: R^2 \to R;\ F(x;y) = e^{y-x}\ \ en\ P_0 = (1;1)$

f. $F: A \subseteq R^2 \to R;\ F(x;y) = \frac{x}{y} - 3y\ \ en\ P_0 = (1;1)$

10. El alpinista del ejercicio 1 decidió sentarse a descansar. Se encuentra ahora en la posición (10,12). Si saca una bolita de su mochila y la tira sobre la montaña, ¿en qué dirección comenzará a rodar? Para continuar su ascenso, ¿en qué dirección deberá caminar para que la altitud aumente más rápidamente?

11. La función $C(x,y,z) = \frac{\ln(xy)}{2z}$ expresa la concentración de una sustancia C en relación a la concentración de otras tres sustancias x, y, z en una reacción química. Si las concentraciones de x, y z son iguales a uno, ¿en qué dirección aumentará lo más rápido posible la concentración de C?

12. La superficie de cierto lago se representa por una región D de tal manera que la profundidad (en m) debajo del punto $(x;\ y)$ está dada por $F(x;\ y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Si un hombre se encuentra en el agua en la posición $(4;9)$, ¿en qué dirección debe nadar para que la profundidad debajo suyo disminuya lo más rápido posible? ¿En qué dirección no cambia la profundidad?

13. Al calentar una superficie, la temperatura (en °C) en cada punto $(x;\ y;\ z)$ de la superficie está dada por

$$F(x;\ y;\ z) = \frac{x}{y} + z^2$$

¿Cuál es la dirección en la que la temperatura aumenta más rápido si el foco de calor está en el punto $(0,1,1)$?

14. Hallar las funciones derivadas parciales segundas de los siguientes campos escalares.

a. $F(x;y) = ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

b. $F(x;y) = (3x)^y$

c. $F(x;y) = y^2 ln(xy)$

d. $F(x;y;z) = x + 8z^2 - y^3z$. En este caso, calcular las derivadas parciales de orden tres.