En los ejercicios que se presentan a continuación se sugiere utilizar algún graficador, por ejemplo, sugerimos:

- Aplicaciones gratuitas para iOS o Android:

Geogebra Calculadora Gráfica (en R^2)	Geogebra Calculadora 3D (en R^3)

- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

Cónicas

En este archivo [1] podés encontrar un resumen sobre las cónicas y sus aplicaciones.

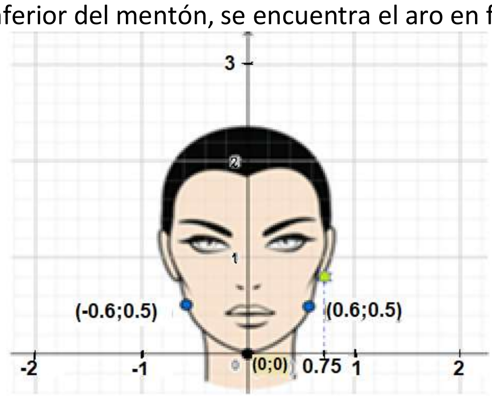
1. Determinar, siempre que exista, la ecuación de una circunferencia que verifique las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la circunferencia obtenida.

a. Centro en $P_0 = (-2, 1)$ y radio $\sqrt{2}$.
b. Centro en $P_0 = (6, 5)$ y pasa por $P_1 = (10, 8)$.
c. Pasa por los puntos $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (0, 2)$, $P_3 = (-1, 1)$.

2.

a. Sea p una constante positiva. Obtener la expresión analítica de una parábola de foco $F = (p, 0)$ y directriz $x = -p$.
b. Sea p una constante positiva. Obtener la expresión analítica de la parábola de foco $F = (0, -p)$ y directriz $y = p$.
c. Obtener la expresión analítica de la parábola de foco $F = (-5, 0)$ y directriz $x = 5$.

3. Para el diseño de un software de reconocimiento facial puede utilizarse la definición de parábola, que se parece a la forma del mentón. Se toma como origen de coordenadas el punto inferior del mentón. Dado el siguiente caso, ¿a qué altura, respecto del punto inferior del mentón, se encuentra el aro en forma de estrella?



[1] Para acceder a este archivo deberás iniciar sesión en Google.

4. Hallar, siempre que exista, la ecuación de la elipse que verifica las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la elipse obtenida, indicando sus elementos principales.

a. Centro en el origen de coordenadas, pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{4})$.
b. Pasa por el punto $(4, 0)$ y sus focos son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.
c. Sus focos son $(1, 1)$ y $(-3, 1)$ y pasa por el punto $(0, 1)$.

5. Un río es atravesado por una autopista a través de un puente cuyo arco tiene forma de media elipse. Se sabe que el ancho total del arco elíptico es de 100m. y que en el centro del arco la altura es de 30m. Si un automóvil recorre 70 metros (de izquierda a derecha) sobre el puente y pasa por debajo de una cámara colocada en el arco, ¿a qué altura se encuentra la cámara?

6. Obtener, siempre que exista, la ecuación de la hipérbola que verifica las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la hipérbola obtenida, indicando sus elementos principales.

a. Centro en el origen de coordenadas que pasa por los puntos $(0, -4)$ y $(2, \sqrt{32}\ )$
b. Sus focos son $(1,8)$ y $(1, -12)$, pasa por el punto $(1, 6)$.
c. Sus focos son $(1, 1)$ y $(-3, 1)$ y pasa por el punto $(0, 2)$.

7. Completando cuadrados: Expresar las siguientes ecuaciones en forma canónica. En el caso en que la ecuación represente una cónica, identificarla y representarla gráficamente, indicando previamente los principales elementos.

a. $y^2 - 4x - 12y + 28 = 0$
b. $4x^2 - y^2 - 8x - 6y = 5$
c. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 90y + 193 = 0$
d. $9x^2 - 18x - 4y^2 - 8y - 31 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 2x = 0$
f. $4y^2 - \frac{x^2}{9} - \frac{2}{9}x = \frac{10}{9}$

Nota: Podes visualizar los gráficos realizados utilizando alguna aplicación gratuita, por ejemplo: GeoGebra (Android, IOs) o QuickGraph, Desmos (IOs).
Escaneando el siguiente código podrás visualizar las curvas del ejercicio 6

Cuádricas

8. Te proponemos la siguiente actividad [2] introductoria.

En este archivo [2] podés encontrar un resumen sobre las cuádricas y sus aplicaciones.

En este link a Geogebra podrás visualizar distintas superficies y sus trazas.

9. Dada la superficie cuádrica $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$

a. Hallar e identificar su intersección con el eje y, con el plano $y=9$ y con el plano yz.
b. Identificar y graficar la superficie, señalando en el gráfico realizado las intersecciones halladas en el ítem a.

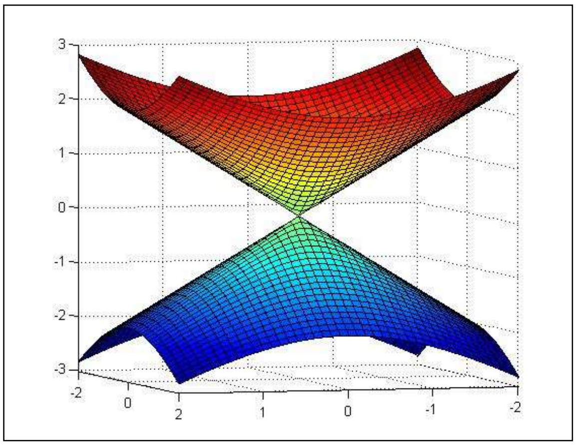
10. A continuación, se dan las ecuaciones de distintas cuádricas y el gráfico de algunas de ellas. Se pide relacionar la ecuación con el gráfico correspondiente. Una sugerencia que te ayudará a identificar de qué cuádrica se trata es calcular las intersecciones de las superficies con diferentes planos.
Para aquellas fórmulas que no se corresponden con ninguno de los gráficos dados, se pide realizar un gráfico aproximado de la superficie correspondiente.

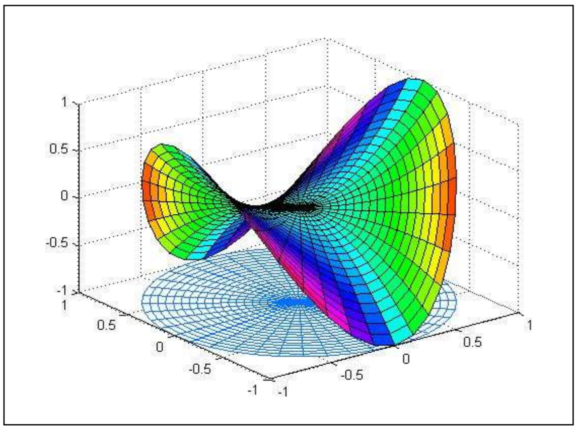
Ecuaciones

i. $z=x^2+y^2$ ii. $4x^2+9y^2+36z^2=1$ iii. $z=x^2-y^2$

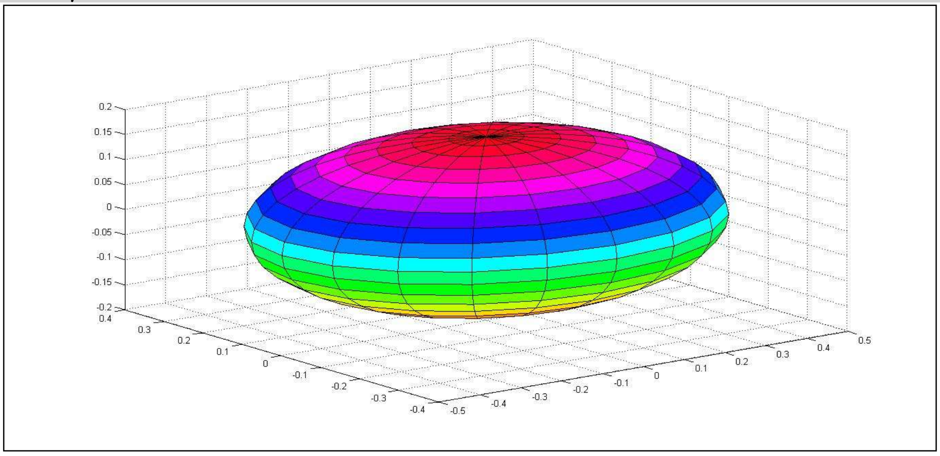
iv. $x^2+y^2-z^2=1$ v. $x^2+y^2+z^2=4$ vi. $z^2=x^2+y^2$

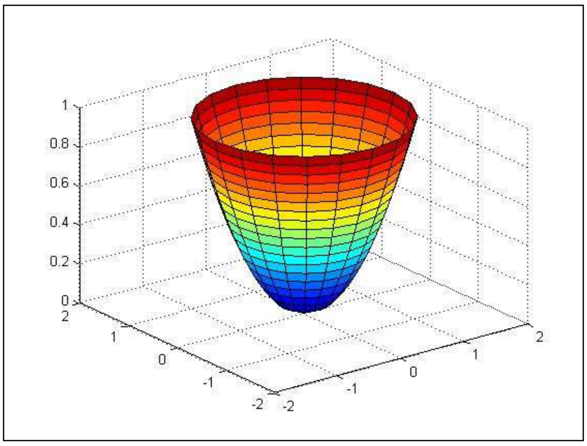
Gráficos





[2] Para acceder a este archivo deberás iniciar sesión en Google.





11. Dada la superficie cuádrica $x - 1 = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$

a. Hallar y representar su intersección con los planos coordenados.
b. Hallar y representar su intersección con el plano $x = 2$.
c. Identificar y graficar la superficie dada, identificando en el gráfico realizado las intersecciones halladas en los ítems anteriores.

12. Para cada una de las siguientes superficies cuádricas:
a. Hallar analíticamente sus trazas con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos.
b. Realizar un gráfico aproximado de la superficie. Podés ayudarte utilizando GeoGebra 3D.

i. $z = 4x^2 + y^2$
ii. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
iii. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
iv. $36x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$
v. $z^2 = x^2 + 9y^2$
vi. $z = 1 - x^2 - y^2$
vii. $x^2 + y^2 = 2y$
viii. $x^2 + 4y^2 = 16$
ix. $y^2 - 4(z-1)^2 = 1$

13. A continuación, se dan las ecuaciones de distintas superficies cuádricas y un bosquejo de la representación gráfica de algunas de ellas a partir de algunas trazas. Se pide establecer las correspondencias entre ecuaciones y gráficos.

Ecuaciones

a) $(z-2)^2 = x^2 + (y-1)^2$

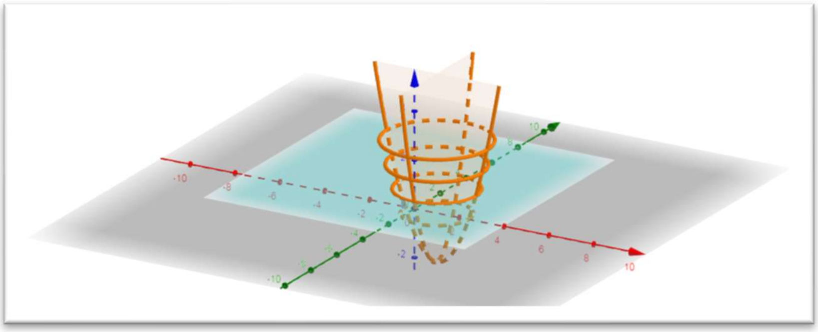
b) $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$

c) $z = (x-1)^2 + y^2 - 2$

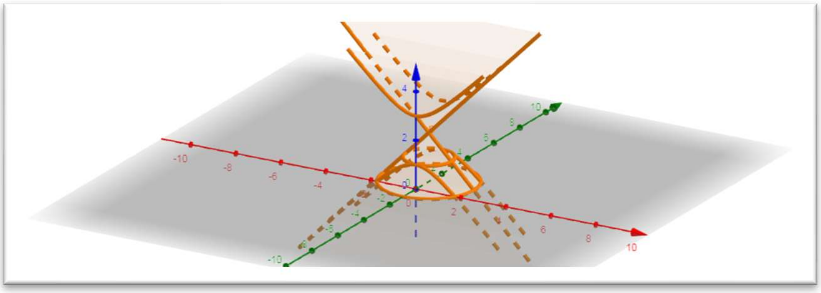
d) $z = (x+2)^2$

Gráficos

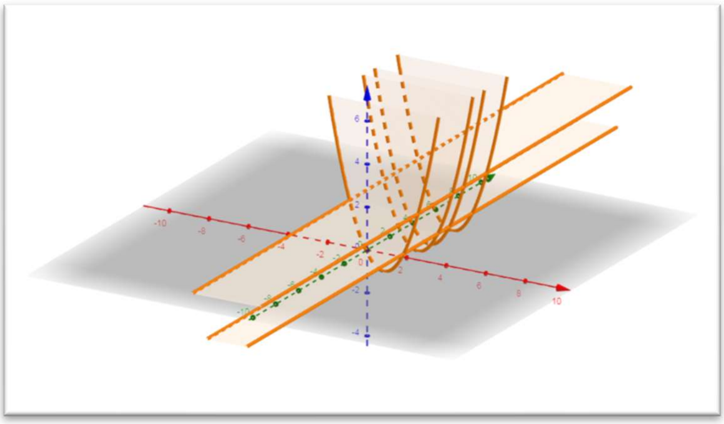
I.



II.



III.



14. A continuación, se dan las ecuaciones de distintas superficies cuádricas y el gráfico de algunas de sus trazas. Se pide relacionar la ecuación con el gráfico correspondiente. De una misma superficie puede aparecer graficada más de una traza.

Ecuaciones

a) $z = x^2 + y^2 - 4$

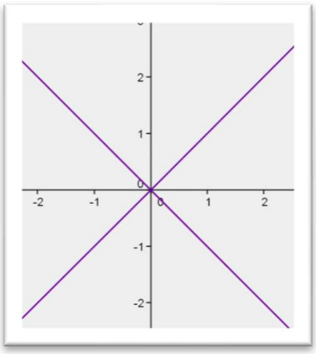
b) $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$

c) $z^2 = x^2 - y^2$

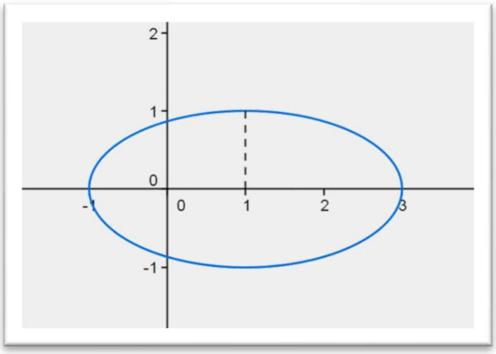
d) $x = y^2 - z^2$

Algunas trazas

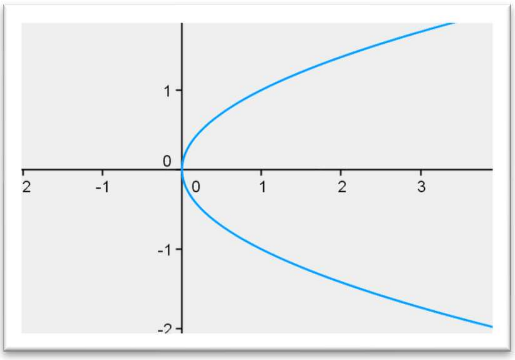
1.



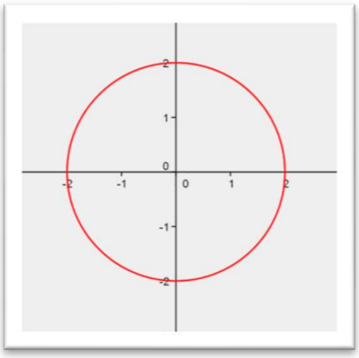
2.



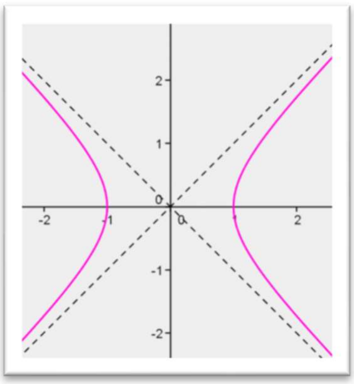
3.



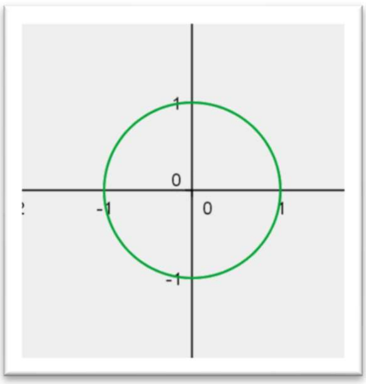
4.



5.



6.



Ejercicio sobre cónicas

Enunciado

Expresar la siguiente ecuación en forma canónica. En el caso en que la ecuación represente una cónica, identificarla y representarla gráficamente, indicando previamente los principales elementos.

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$$

Solución:

A fin de poder identificar la cónica, reagrupamos los términos por variables, teniendo como objetivo llegar a la ecuación canónica de la misma:

$$\left(9.x^2 - 54.x\right) + \left(25.y^2 + 50.y\right) - 119 = 0$$

En cada expresión encerrada entre paréntesis, extraemos factor común el coeficiente del término cuadrático, de tal forma que ese término quede con coeficiente igual a uno.

$$9.\left(x^2 - 6.x\right) + 25.\left(y^2 + 2.y\right) - 119 = 0$$

En cada expresión encerrada entre paréntesis, aplicamos el procedimiento de completar cuadrados, que tiene como objetivo llegar a un trinomio cuadrado perfecto para escribirlo como cuadrado del binomio: $a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2$

A los términos lineales que se encuentran en cada una de estas expresiones, los multiplicamos y dividimos por dos, de modo tal de no modificar la expresión. Esto se debe a que el trinomio cuadrado perfecto tiene un término que es el doble del producto de las bases.

$$9.\left(x^2 - 2\,\frac{6}{2}.x\right) + 25.\left(y^2 + 2\,\frac{2}{2}.y\right) - 119 = 0$$

Si es posible, simplificamos el dos del denominador con el coeficiente que ya existía.

$$9.\left(x^2 - 2\,\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}x\right) + 25.\left(y^2 + 2\,\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}y\right) - 119 = 0$$

$$9.\left(x^2 - 2.3.x\right) + 25.\left(y^2 + 2.1.y\right) - 119 = 0$$

2° base del trinomio

2° base del trinomio

El cuadrado de la segunda base deberá aparecer. Con el mismo criterio anterior para no modificar a la expresión, restamos el mismo término.

$$9.\left(x^2 - 2.3.x + 3^2 - 3^2\right) + 25.\left(y^2 + 2.1.y + 1^2 - 1^2\right) - 119 = 0$$

$$9.\left(\underbrace{x^2 - 2.3.x + 9}_{} - 9\right) + 25.\left(\underbrace{y^2 + 2.1.y + 1}_{} - 1\right) - 119 = 0$$

Trinomio cuadrado perfecto: el cuadrado de una base, mas (o menos) el doble producto de las bases, más el cuadrado de la segunda base.

A estos trinomios los podemos escribir como cuadrados de binomios, considerando las bases antes mencionadas.

$$9.\left[(x-3)^2-9\right]+25.\left[(y+1)^2-1\right]-119=0$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$9.(x-3)^2-81+25.(y+1)^2-25-119=0$$

Agrupamos los términos independientes

$$9.(x-3)^2+25.(y+1)^2=225$$

Dividimos por el término independiente miembro a miembro para que quede igualada a la unidad.

$$\frac{9.(x-3)^2+25.(y+1)^2}{225}=1$$

Simplificamos

$$\frac{9(x-3)^2}{225}+\frac{25(y+1)^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

La expresión cartesiana buscada es:

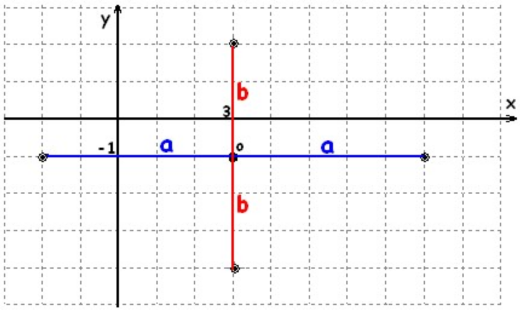
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1}$$

Comparando con la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Podemos afirmar que es una ***ELIPSE***, donde $\left.\begin{matrix} x_0=3 \\ y_0=-1 \end{matrix}\right\}$ son las coordenadas del centro, $C=(3;-1)$

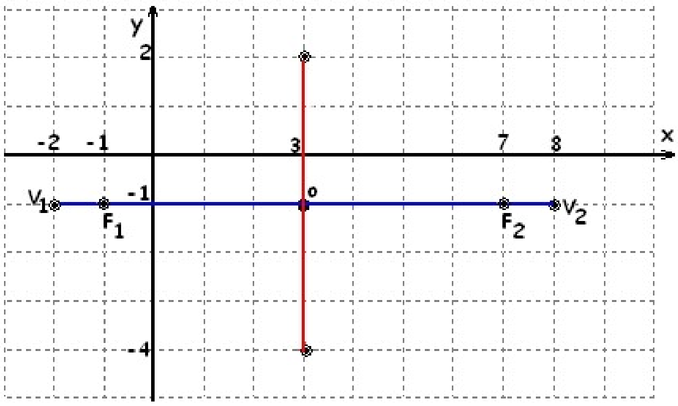
$a^2=25 \to a=5$ semi-diámetro mayor y $b^2=9 \to b=3$ semi-diámetro menor

Con la información obtenida hasta ahora podemos representar:



Para la distancia focal “c”, aplicamos: $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{25-9} \rightarrow c = 4$

Para ubicar a los focos, tomamos la distancia focal desde el centro y sobre el eje donde se trazó el semi-diámetro mayor. Quedando vértices, focos y centro alineados.

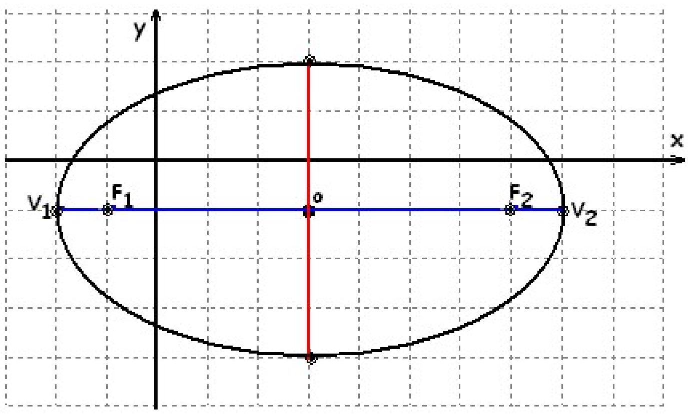


Observamos que las coordenadas de los vértices y focos de la elipse son:

$V_1 = (-2;-1) \quad V_2 = (8;-1) \qquad F_1 = (-1;-1) \quad F_2 = (7;-1)$

El gráfico de la elipse es:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



Podemos volcar en una tabla resumen la información obtenida:

Nombre de la cónica	***Elipse***	*Observaciones*
Ecuación polinómica	$9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$	Podemos predecir que es una elipse porque los

		coeficientes de los términos cuadráticos son del mismo signo y distinto valor absoluto.
Ecuación canónica	$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$	Cada semi-diámetro puede leerse en el denominador de cada variable y se traza en el eje respectivo.
Semi-diámetro mayor	a = 5	Medido sobre "X"
Semi-diámetro menor	b = 3	Medido sobre "y"
Distancia focal	c= 4	Se obtiene de: $c^2=a^2-b^2$
Excentricidad	$e=\frac{4}{5}$	Se obtiene de: $e=\frac{c}{a}$
Coordenadas del centro	$o=(3;-1)$	Se debe verificar que es el punto medio entre los focos: $C=(x_0;y_0)$; $C=\frac{F_1+F_2}{2}$
Coordenadas de los vértices	$V_1=(-2;-1)$ $V_2=(8;-1)$	$V=(x_0\pm a;y_0)$
Coordenadas de los focos	$F_1=(-1;-1)$ $F_2=(7;-1)$	$F=(x_0\pm c;y_0)$