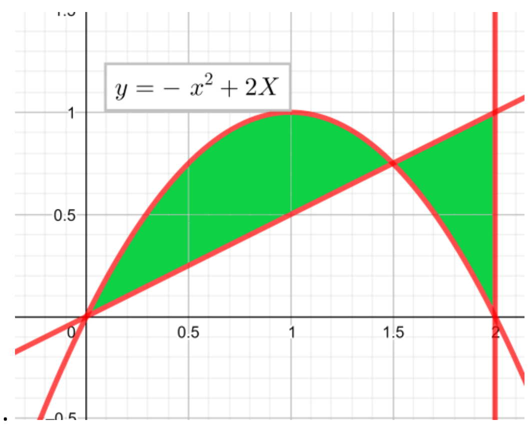
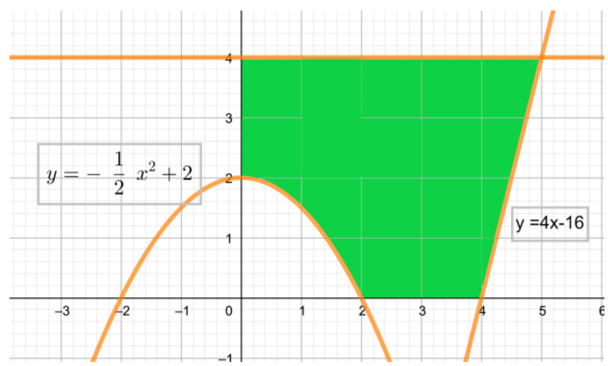
Integrales dobles

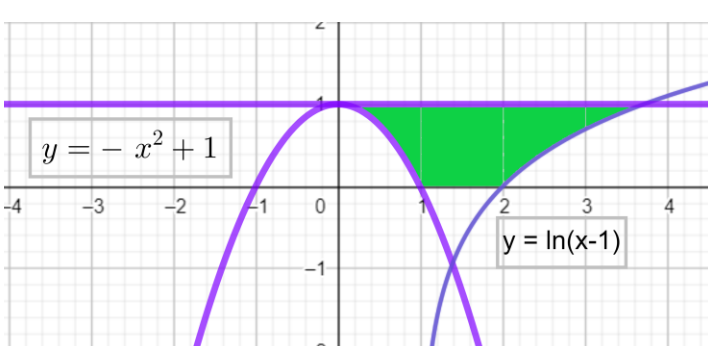
1. Calcular, la integral doble $I(f,\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dx\,dy$ en el recinto $\mathcal{R}\subset\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$. Graficar el recinto $\mathcal{R}$ en el que se integra.

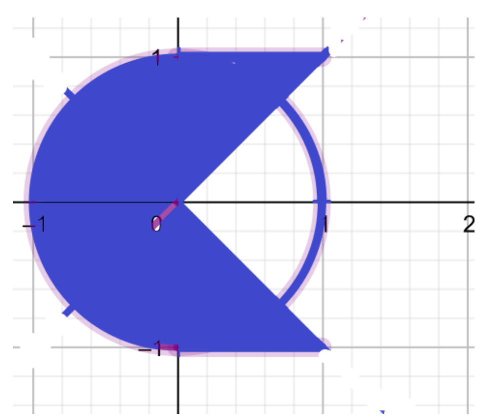
a. $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,2], f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = 3x^2 + 2y$
b. $\mathcal{R} = [0,1]\times[1,2], f\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = 2\,(x+2y)^{-1}$
c. $\mathcal{R}$ es la región acotada del plano comprendida entre las curvas de ecuación $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2,\ f\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}/\ f(x,y) = 4\frac{x^2}{y^2}$
d. $\mathcal{R}$ es la región acotada del plano definida por las imágenes de las funciones $\bar{\gamma}\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{\gamma}(t) = (2\cos(t), 2-2\cos(t))\,, \bar{h}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{h}(t) = (2-4\,t, 0), \bar{w}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2\ tal\ que\ \bar{w}(t) = (-2, 4\,t)$ siendo $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y) = -3x$

2. Para cada uno de los siguientes recintos, calcular el valor de su área planteando las integrales dobles en las coordenadas más apropiadas.









3. Graficar el macizo $\mathcal{M}$ y calcular su volumen V($\mathcal{M}$), mediante integrales dobles, adoptando el sistema de coordenadas más conveniente.

a. $\mathcal{M} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le z\le 4-x-y, x\ge 0, y\ge 0\}$.

b. $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2 - y^2,\ \ 0 \le x \le 1\}$.

c. $\mathcal{M}$ es el conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ por encima del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y por debajo del plano de ecuación $z = 4$

d. $\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ 1 \le x^2 + y^2\right\}$

4. Una piscina circular tiene un diámetro de 40 metros. La profundidad es constante de este a oeste y se incrementa de forma lineal desde 2 metros en el extremo sur hasta 7 metros en el extremo norte. Determinar el volumen del agua en la piscina.

5. *Masa de una lámina plana. Si* δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, su masa es $m(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} \delta\, dA$, y su densidad media es el valor medio de δ en $\mathcal{R}$. Determinar la densidad media de una lámina circular centrada en el origen de coordenadas, de radio α, si su densidad es $\delta(x, y) = k(\alpha + x)$.

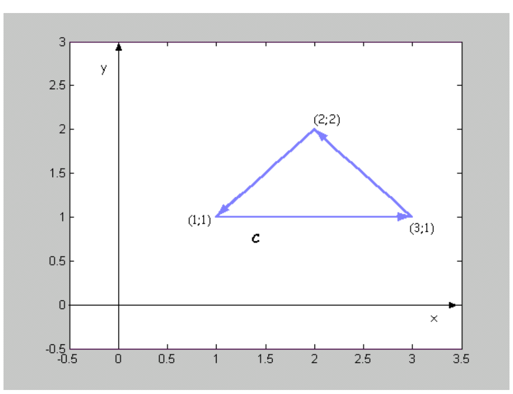
6. *Centro de masa de una lámina plana*. Si δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, entonces su centro de masas[1] $G_0 = (x_0, y_0)$ se obtiene de $x_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x\delta\, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\, dS}, y_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y\delta\, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\, dS}$. Determinar el centro de masas de la lámina dada por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y > 0, a > 0\}$ con densidad $\delta(x, y) = ky$, siendo k una constante positiva. Graficar la lámina $\mathcal{R}$ y el centro de masas obtenido.

7. *Centro de masa de una lámina plana*. Si δ es la densidad superficial de una lámina $\mathcal{R}$, entonces su centro de masas[2] $G_0 = (x_0, y_0)$ se obtiene de $x_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} x\delta\, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\, dS}, y_0 = \frac{\iint_{\mathcal{R}} y\delta\, dS}{\iint_{\mathcal{R}} \delta\, dS}$. Determinar el centro de masas de la lámina dada por $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2, y > 0, a > 0\}$ con densidad $\delta(x, y) = ky$, siendo k una constante positiva. Graficar la lámina $\mathcal{R}$ y el centro de masas obtenido.

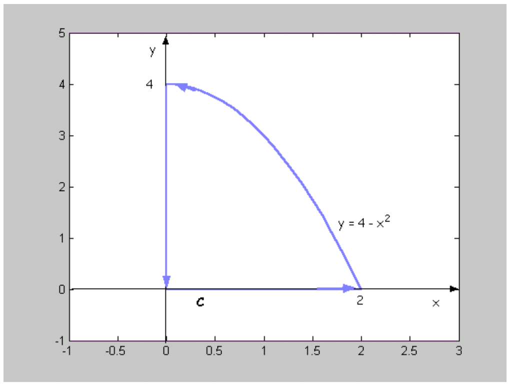
<u>Teorema de Green</u>

8. Aplicando el Teorema de Green, calcular:

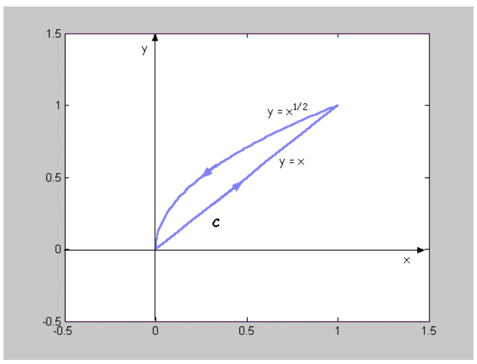
a) $\oint_c 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$



b) $\oint_c - x^2 y\, dx + xy^2\, dy$

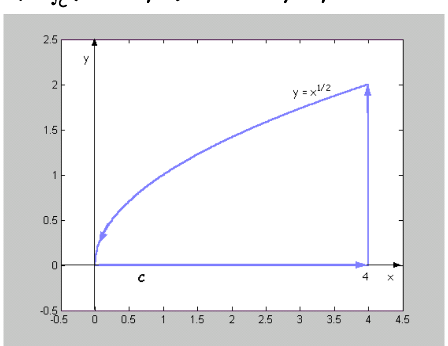


c) $\oint_c x\, dx + xy\, dy$

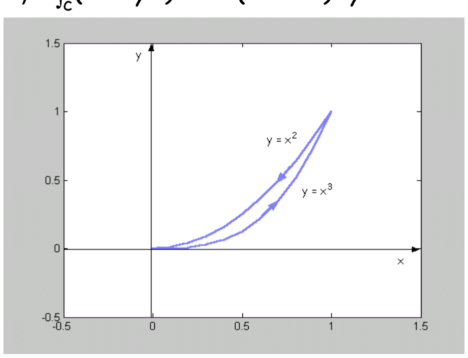


9. Verificar el Teorema de Green en los siguientes casos:

a) $\oint_c (x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy$



b) $\oint_c (x + y^2)dx + (1 + x^2)dy$



Integrales triples

10. Calcular, siempre que exista, la integral triple $I(f,\mathcal{M}) = \iiint_{\mathcal{M}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ en el recinto $\mathcal{M}\subset\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$ del campo escalar $f\colon\mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Graficar el recinto $\mathcal{M}$ en el que se integra y calcular su volumen V($\mathcal{M}$)

a. $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x \leq 2-y, x^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}, f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z) = 3$

b. $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, y \geq 0\}, f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z) = x + z$

c. $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}, f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x,y,z) = x + y + z + 1$

11. B*aricentro de un macizo*. Si δ es la densidad volumétrica de un macizo $\mathcal{M}$, entonces su baricentro es el punto $G_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x\delta\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\, dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y\delta\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\, dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z\delta\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}} \delta\, dV}$. Graficar $\mathcal{M}$ y determinar su baricentro, siendo $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in R^3 \colon x^2 + z^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0,\ a > 0\}$ con densidad $\delta(x,y,z) = kz$, donde $k$es una constante positiva.

12. *Centro geométrico de un macizo $\mathcal{M}$*. Es $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ siendo $x_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} x\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}}\, dV}, y_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} y\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}}\, dV}, z_0 = \frac{\iiint_{\mathcal{M}} z\, dV}{\iiint_{\mathcal{M}}\, dV}$ (coincide con el baricentro si el macizo es homogéneo). Determinar el centro geométrico del macizo) $\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in R^3 \colon \frac{h}{a}\sqrt{z^2 + y^2} \leq x \leq h, h > 0, a > 0\right\}$

13. Los depósitos para granos a granel son silos de metal, hormigón o madera. Generalmente tienen un fondo cónico que permite la descarga del silo por la gravedad. Determinar el volumen del silo determinado por el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el cilindro de altura 2 de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.