Nota: A lo largo de esta práctica podrás ayudarte con algunos de los siguientes recursos: Podrán comprobar los cálculos realizados utilizando la aplicación gratuita para móviles EDITEX-Matemáticas-Determinantes o Matrices

Editex Sistemas de ecuaciones lineales

Matrices (Sólo Android)

https://es.symbolab.com/

- http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/

Sistemas de ecuaciones lineales
Aplicaciones

1. Una fábrica de alimentos produce dos tipos de mezclas para sus galletitas, ambos a base de harina y salvado.
La mezcla clásica lleva 7kg. de harina por cada 3 kg. de salvado.
La mezcla diet lleva 4kg de harina por cada 6kg de salvado.
Si la fábrica dispone en este momento de 35kg de harina y 30 kg de salvado, ¿cuántos kg de cada mezcla puede fabricar hasta agotar el stock?

2. Determinar todos los $X \in R^2$ tales que $AX = B$, con $A \in R^{nx2}$, $B \in R^n$ y clasificar cada sistema según la cantidad de soluciones que posee. Representar gráficamente usando GeoGebra cada ecuación del sistema e interpretar geométricamente. Podés comprobar la solución obtenida usando las aplicaciones sugeridas.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

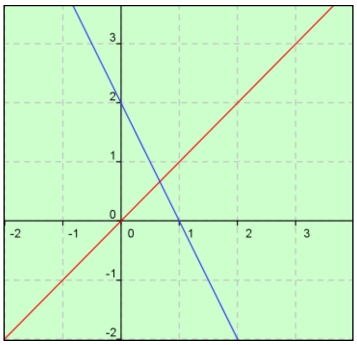
c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

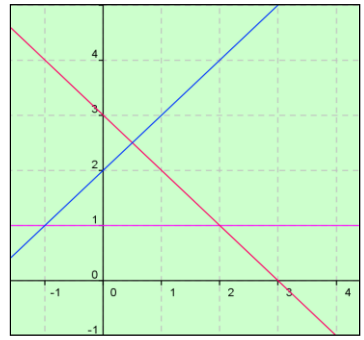
e. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Proponer, siempre que sea posible, una matriz $A \in R^{nx2}$ y una matriz $B \in R^{n}$ tal que el sistema lineal $AX = B$, con $X \in \mathrm{R}^2$, tenga una interpretación geométrica consistente con los gráficos que se dan a continuación. Hallar, en cada caso, el conjunto solución.

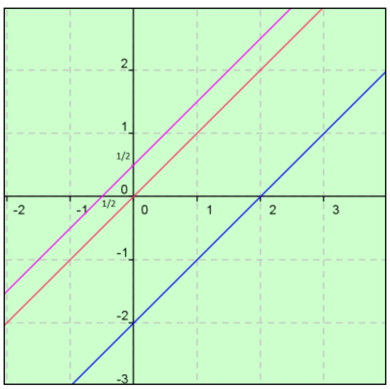
a.



b.



c.



4. Determinar todos los $X \in R^{m}$ tales que $AX = B$, con $A \in R^{nxm}$, $B \in R^{n}$. Clasificar cada sistema según la cantidad de soluciones que posee.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para los problemas 5 a 8 te pedimos que en cada caso realices las siguientes indicaciones:

- La identificación de las variables del problema
- El sistema de ecuaciones que surge del problema
- La matriz ampliada
- La respuesta del problema

5. Una compañía de transporte de sustancias alimenticias tiene 19 camiones, los cuales son de tres tipos: A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de dos clases de alimentos (tipo I y tipo II).

Los camiones del tipo A pueden transportar dos toneladas del alimento I, los camiones del tipo B pueden transportar una tonelada de cada clase de alimento y los camiones de tipo C pueden transportar una tonelada del alimento I y dos toneladas del alimento II.

La empresa debe transportar 32 toneladas del alimento I y 10 del alimento II. Determinar cuántos camiones de cada tipo se requieren para transportar todo el pedido, suponiendo que cada camión debe ir con la carga completa.

6. Un carpintero ha aceptado el encargo de construir alacenas, escritorios, mesas y sillas. Para ello cuenta con tres máquinas.

Producir una alacena requiere una hora de uso de la máquina uno, dos horas de uso de la máquina dos y una hora de la máquina tres.

Para producir un escritorio, se requieren dos horas de la máquina uno y dos horas de la máquina tres.

Producir una mesa requiere una hora de uso de la máquina uno, una hora de la máquina dos y tres horas de la máquina tres.

Para producir una silla se requieren dos horas de la máquina uno y una hora de la máquina dos.

Determinar cuántas unidades de cada mueble puede fabricar el carpintero en un día de ocho horas, suponiendo que cada máquina se utiliza ocho horas corridas.

7. Una fábrica produce 3 artículos, A, B y C, que son procesados por 3 máquinas, I, II y III.

Una unidad del artículo A requiere 2 horas de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 3 horas en la máquina III.

Una unidad del artículo B requiere una hora en cada máquina.

Una unidad del artículo C requiere 1 hora de procesamiento en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 4 horas en la máquina III.

Se dispone de la máquina I por 68 horas, de la máquina II por 53 horas y de la máquina III por 146 horas.

¿Cuántas unidades de cada artículo deberán producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas?

8. María viajó a Europa y visitó Barcelona, Roma y Paris.

En Barcelona gastó 25 euros diarios en hospedaje y 30 euros por día en alimentos;

En Roma gastó por día 30 euros en hospedaje y 15 euros por día en alimentos;

En Paris gastó por día 40 euros en hospedaje y 45 euros en alimentos.

María estima que, por conceptos varios, gastó 20 euros diarios en cada una de las tres ciudades.

A su regreso, el registro de gastos indicaba en total, 485 euros en hospedaje, 480 euros en alimentos y 300 euros en gastos varios. Calcular cuántos días estuvo el turista en cada una de las tres ciudades.

9. Hallar, si existen, los valores de $k \in R$ de modo tal que el siguiente sistema de ecuaciones lineales resulte:

a. compatible determinado
b. compatible indeterminado
c. incompatible

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -x + ky = 0 \end{cases}$$

10. Analizar y clasificar (según su conjunto solución) el sistema de ecuaciones dado para todos los valores reales de k

a. $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ (k^2 - 1)y + (k+1)z = 1 \\ kx + (k^2 + 2)y + z = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - ky - z = -1 \\ -kx + 2y = 2 \\ -2x + (k-1)y + 4z = 0 \end{cases}$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 6 Un carpintero ha aceptado el encargo de construir alacenas, escritorios, mesas y sillas. Para ello cuenta con tres máquinas.
Producir una alacena requiere una hora de uso de la máquina uno, dos horas de uso de la máquina dos y una hora de la máquina tres.
Para producir un escritorio, se requieren dos horas de la máquina uno y dos horas de la máquina tres.
Producir una mesa requiere una hora de uso de la máquina uno, una hora de la máquina dos y tres horas de la máquina tres.
Para producir una silla se requieren dos horas de la máquina uno y una hora de la máquina dos.
Determinar cuántas unidades de cada mueble puede fabricar el carpintero en un día de ocho horas, suponiendo que cada máquina se utiliza ocho horas corridas.

Resolución

Llamemos:

X= cantidad de alacenas que fabrica en un día de 8 horas
Y= cantidad de escritorios que fabrica en un día de 8 horas
Z= cantidad de mesas que fabrica en un día de 8 horas
W= cantidad de sillas que fabrica en un día de 8 horas

Notemos, por el contexto del problema, que las soluciones son números enteros mayores o iguales a cero. Planteemos las ecuaciones. Dato: todas las máquinas trabajan 8 horas:

Máquina 1: 1x+2y+1z+2w=8
Máquina 2: 2x+0y+1z+1w=8
Máquina 3: 1x+2y+3z+0w=8

Ingresando la matriz del sistema en la app:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+w=4 \\ y+w=2 \\ z-w=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4-w \\ y=2-w \\ z=w \end{cases} \quad w \in R$$

$$3\,w=0 \rightarrow x=4 \rightarrow y=2 \rightarrow z=0$$

$$w=1 \rightarrow x=3 \rightarrow y=1 \rightarrow z=1$$

$$w=2 \rightarrow x=2 \rightarrow y=0 \rightarrow z=2$$

Ejercicio 10, ítem a)

El sistema está compuesto de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde sus coeficientes ordenados, los podemos escribir así:

X
Y
Z
Variables

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-1 & k+1 & 1 \\ k & k^2+2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Términos independientes

Como el sistema es cuadrado (igual número de ecuaciones que de incógnitas), para resolver el ejercicio usaremos la propiedad que afirma que un sistema de este tipo tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz asociada es distinto de cero. Planteamos el determinante:

$\Delta = \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k+1 \\ k & k^2+2 & 1 \end{vmatrix}$ que al desarrollado por la columna 1 (Laplace) queda:

$$\Delta = k \cdot \begin{vmatrix} k^2-1 & k+1 \\ k^2+2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k^2+2 & 1 \end{vmatrix} + k. \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k^2-1 & k+1 \end{vmatrix}$$

$\Delta = k\left[\left(k^2-1\right)-(k+1)\left(k^2+2\right)\right]+k.\left[-1.(k+1)-\left(k^2-1\right)\right]$ factor común k

$\Delta = k\left[\cancel{\left(k^2-1\right)}-(k+1)\left(k^2+2\right)-(k+1)-\cancel{\left(k^2-1\right)}\right]$ cancelamos los términos opuestos

$\Delta = k\left[-(k+1)\left(k^2+2\right)-(k+1)\right]$ factor común (-1) .(k+1)

$$\Delta = -(k+1).\, k\left[\left(k^2+2\right)+1\right]$$

$$\Delta = -k.\,(k+1).\,(k^2+3)$$

Este determinante se anula para los valores reales de k = 0 y k = -1 y en ese caso el sistema no sería compatible determinado.

Primera conclusión:

Si $k \in \Re - \{-1;0\}$ el sistema es compatible determinado.

¿Qué ocurre cuando k toma esos valores?

- Para k = 0, triangulamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_2\text{-}F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_3\text{-}F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$⅓\, F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \quad F_1\text{+}F_3 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Rango de la matriz de coeficientes es 2

Rango de la matriz ampliada es 3

Como los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son distintos el sistema para el valor de k = 0 es incompatible.

- Para k = -1 buscamos los vectores canónicos para clasificar el sistema por comparación de rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad F_3\text{-}F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad ¼\, F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$F_1\text{+}F_3 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Rango de la matriz de coeficientes es 2

Rango de la matriz ampliada es 3

Como los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada son distintos, el sistema para el valor de k = -1 es incompatible.

Segunda conclusión:

Si $k=-1 \vee k=0$ **el sistema es incompatible.**

Respuesta del ejercicio:

- **S.C.D.** si $k \in \Re - \{-1;0\}$
- **S.I.** si $k=-1 \vee k=0$
- **S.C.I.** ∄ k