Ejercicio 1

Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,-3,7)+\lambda(-1,-3,5)$,
a) halle la ecuación del plano π que pasa por $A=(3,-2,1)$ y es perpendicular a r

b) halle el punto simétrico de A respecto de la recta r.

Ejercicio 2

Dado el subespacio $S=\{(x,y,z,t)\in R^4 /\ x-4y+z=0 \ \wedge \ t=0\}$, halle una base de S, dim S, una base de $S^{\perp}$ complemento ortogonal de S y dim $S^{\perp}$.

Ejercicio 3
¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.

a) Si las coordenadas de $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$ en la base $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ de R^{2x2} son $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $k=-3$.

b) El subespacio $S=gen\{(-1,3,5),(2,1,0)\}\subset R^3$ representa una recta que pasa por el origen.

Ejercicio 4:

Dada la transformación lineal $T:R^3\to R^2 \ /\ T(x,y,z)=(x-2y,3y-z)$, hallar una base de $Nu(T)$, $\dim Nu(T)$, una base de $Im(T)$ y $\dim Im(T)$.

Ejercicio 5

Hallar la expresión analítica de la transformación lineal $F:R^2\to R^3$ sabiendo que $M(F)_{B,B'}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $B=\{(2,-1),(0,1)\}$ base de R^2 y $B'=\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-1,0)\}$ base de R^3.

Resolución

Dada la recta $r:(x,y,z)=(1,-3,7)+\lambda(-1,-3,5)$,
a) halle la ecuación del plano π que pasa por $A=(3,-2,1)$ y es perpendicular a r

Como el plano Π que buscamos es perpendicular a la recta r, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, por lo que podemos tomar como vector normal a (-1 ; -3; 5). La ecuación del plano π es de la forma:

$$-x - 3y + 5z + k = 0$$

Dado que pasa por el punto A, este unto verifica la ecuación:

$$-3 - 3.(-2) + 5 + k = 0 \rightarrow k = -8$$

El plano pedido es π : -x - 3y + 5z - 8 = 0

b) halle el punto simétrico de A respecto de la recta r.

Para hallar el simétrico de A respecto de la recta r necesitamos encontrar la intersección entre el plano y la recta.

Teniendo en cuenta la ecuación de r: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 7 + 5\lambda \end{cases}$

Remplazando en la ecuación del plano obtenemos que:

$$\begin{aligned} -(1 - \lambda) - 3(-3 - 3\lambda) + 5(7 + 5\lambda) - 8 &= 0 \\ 35 + 35\lambda &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

Por lo que x = 2, y = 0, z = 2. Por lo que A' (proyección de A sobre el plano Π es el punto A' = (2; 0 ; 2). Para hallar el simétrico de A respecto de la recta r, A'', usamos que A' es el punto medio del segmento AA'' por lo que
A'' = 2 A' - A, es decir, A'' = 2 (2; 0 ; 2) - (3 ; -2; 1) = (1 ; 2 ; 3).

<u>Ejercicio 2</u>

Dado el subespacio $S = \{(x,y,z,t) \in R^4 / \ x - 4y + z = 0 \ \wedge \ t = 0\}$, halle una base de S, dim S, una base de $S^\perp$ complemento ortogonal de S y dim $S^\perp$.

De la ecuación x - 4y + z = 0 deducimos, por ejemplo, que x = 4y - z. Los puntos del subespacio son entonces de la forma:
(x ; y ; z; t) = (4y - z ; y ; z; 0) = y(4 ; 1 ; 0; 0) + z (-1; 0; 1; 0) con y, z $\in$R. Una base posible para S es entonces el conjunto
B = {(4 ; 1; 0; 0), (-1; 0; 1; 0)}. Por lo tanto, dim(S) = 2.
El complemento ortogonal de S está formado por los vectores (x; y; z; t) que son ortogonales a los elementos de la base.
Por lo tanto, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (x \ ; y \ ; z \ ; t).\ (4 ; 1 ; 0 \ ; 0) = 0 \ \rightarrow \ 4x + y = 0 \\ (x \ ; y \ ; z \ ; t).(-1; 0 \ ; 1 \ ; 0) = 0 \rightarrow -x + z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que y = -4x mientras que de la segunda x = z. Por lo tanto, los vectores que componen el complemento ortogonal de S son de la "pinta":

(x ; y; z; t) = (x ; -4x; x; t) = x (1 ; -4 ; 1; 0) + t (0; 0; 0; 1) con x, t $\in$R.

Una posible base para $S^\perp$ es B' = {(1; -4; 1; 0), (0; 0; 0; 1)} y dim($S^\perp$) = 2.

<u>Ejercicio 3</u>

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta.

a) Si las coordenadas de $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$ en la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de R^{2x2} son $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $k = -3$.

b) El subespacio $S = gen\{(-1,3,5), (2,1,0)\} \subset R^3$ representa una recta que pasa por el origen.

a) Dado que conocemos las coordenadas de $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$, planteamos una combinación lineal de este elemento usando los vectores de la base B:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} -1\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando las operaciones correspondientes, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \to 2k = -6 \to k = -3$$

Por lo que la afirmación es verdadera.

b) Los vectores (-1 ; 3; 5) y (2 ; 1; 0) son linealmente independientes. Como estamos trabajando en R^3, el subespacio S genera un plano (que pasa por el origen) y no una recta (dim(S) = 2) por lo que la afirmación es falsa.

En efecto, gen{ (-1; 3; 5) , (2; 1; 0)} = $\{ X \in R^3 \ / \ X = \alpha(-1 ; 3 ; 5) + \beta(2; 1; 0) \text{ con } \alpha, \beta \in R\}$ que es la ecuación paramétrica de un plano.

Ejercicio 4:

Dada la transformación lineal $T: R^3 \to R^2 \ / \ T(x,y,z) = (x-2y, 3y-z)$, hallar una base de $Nu(T)$, $\dim Nu(T)$, una base de $Im(T)$ y $\dim Im(T)$.

Para hallar una base del núcleo tenemos que encontrar los (x; y; z) tales que T(x; y; z) = (0; 0). Luego $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$. De la primera ecuación obtenemos que x = 2y mientras que de la segunda z = 3y: Por lo tanto, (x; y; z) $\in$ Un(T) si y sólo si (x; y; z) = (2y ; y ; 3y) = y(2; 1; 3) con y $\in$R. Luego, N u (T) = gen {(2; 1; 3)} Una base del núcleo es B= {(2; 1; 3)} y su dimensión es igual a uno.

Por el teorema de las dimensiones para transformaciones lineales, sabemos que dim(Im(T)) = 2. Para hallar una base del conjunto imagen, transformamos la base canónica de R^3: T(1; 0; 0) = (1 ; 0), T(0: 1: 0) = (-2; 3) , T(0; 0; 1) = (0; -1). Notemos que (-2; 3) es combinación lineal de los vectores (1; 0) y (0; -1) por lo una base para el conjunto imagen es B' = {(1; 0), (0; -1)}.

Ejercicio 5

Hallar la expresión analítica de la transformación lineal $F: R^2 \to R^3$ sabiendo que $M(F)_{B,B'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $B = \{(2,-1),(0,1)\}$ base de R^2 y $B' = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-1,0)\}$ base de R^3.

Sabemos que la matriz de una transformación lineal en las bases BB' tiene como columnas a las coordenadas de los transformados de los elementos de la base B en la base B'. Es decir:

T(2; -1) = 3(1; 0; -1) + 0(0; 1; 1) -4(1; -1; 0) = (-1; 4; -3)
T(0; 1) = -1(1; 0; -1) + 2(0; 1; 1) + 0(1; -1; 0) = (-1; 2; 3)

Luego, buscamos la transformación lineal T: $R^2 \rightarrow R^3$ / T(2; -1) = (-1; 4; -3) y T(0 ; 1) = (-1; 2; 1). Escribimos un vector (x; y) de R^2 como combinación lineal de los elementos de la base B:

$$(x; y) = a(2 ; -1) + b(0 ; 1) \rightarrow x = 2a,\quad y = -a + b. \text{ Por lo que } a = \frac{x}{2},\ b = y -+a = y + \frac{x}{2}$$

Luego:

$$(x ; y) = \frac{x}{2}(2 ; -1) + \left(y + \frac{x}{2}\right)(0 ; 1)$$

Aplicando la transformación lineal T y la definición de linealidad:

$$T(x ; y) = \frac{x}{2}T(2 ; -1) + \left(y + \frac{x}{2}\right)T(0 ; 1)$$

$$T(x ; y) = \frac{x}{2}(-1; 4; -3) + \left(y + \frac{x}{2}\right)(-1 ; 2 ; 3)$$

$$T(x ; y) = (-y - x ; 3x + 2y ; -3x + 3y)$$
