1. Un corredor especializado en los 100 metros llanos, desarrolla una velocidad dada por $v(t) = 11(1 - e^{-2t})$ siendo la distancia medida en metros y el tiempo en segundos. ¿Cuál es la distancia que recorre el atleta durante los primeros ocho segundos de carrera?

2. La aceleración de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea en cada instante de tiempo (medido en segundos), está dada por la función $a(t) = 4t - 16$. Se sabe que su velocidad inicial es de 30 $\frac{m}{s}$ y que su posición inicial es $x(0) = 0$. Hallar la distancia recorrida por el móvil entre los dos y los cuatro segundos.

3. Calcular las siguientes integrales definidas.

a. $\int_1^2 \left(3\sqrt[5]{x} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

b. $\int_0^a \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx$

c. $\int_{-3}^{2} (-2x+1)e^{-x}\, dx$

4. Calcular

a. $\int_0^4 f(x)\, dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 2 \\ 3x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

b. $\int_0^3 f(x)\, dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 1 \\ 2 & si\ 1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

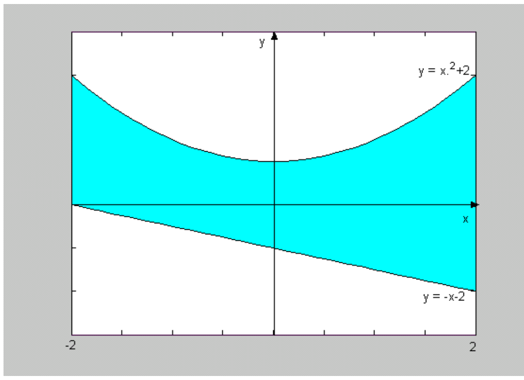
c. $\int_{-\pi/2}^{\pi} |f(x)|\, dx$ si $f(x) = \cos(x)$

5.

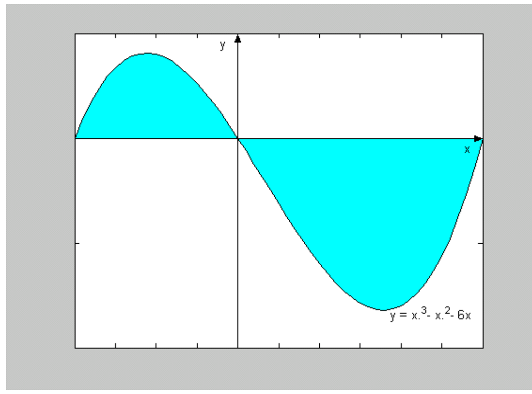
a. Sea la función $g(x) = \begin{cases} kx - 2 & si\, x \leq 0 \\ -4x^3 & si\, x > 0 \end{cases}$. Determinar el valor de la constante k para que se verifique $\int_{-1}^{2} g(x)\, dx = 1.$

b. Dada $h(x) = \begin{cases} k + 3^x & x > -2 \\ \frac{1}{x^3} & x < -2 \end{cases}$ se pide determinar el valor de la constante k para que resulte $\int_{-3}^{0} h(x)\, dx = 1.$

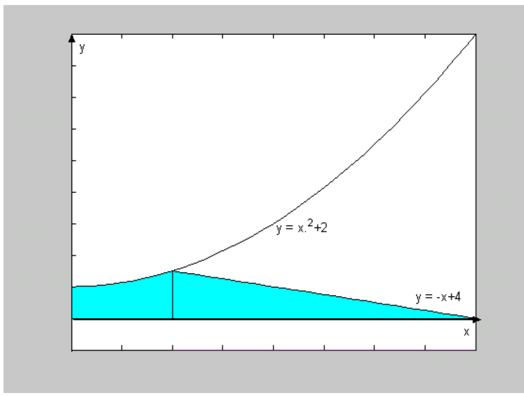
6. Calcular el área de la región sombreada a.



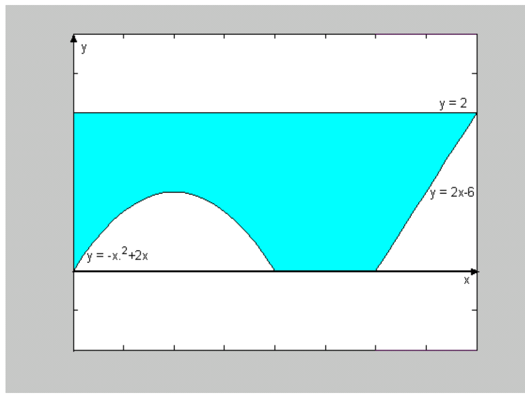
b.



c.



d.



7. En cada uno de los siguientes ítems graficar y calcular el área de la región limitada por:

a. $y = x^2 - 1$; el eje x; $-1 \leq x \leq 2$

b. $y = x^3$; $y = x$

c. $y = \text{sen}(x)$; $x = 0$; $x = 2\pi$

d. La curva $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva $(2, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}; 2)$ respectivamente.

8. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias. En caso de ser convergentes, hallar el valor al cual convergen.

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$, siendo $g(x) = \begin{cases} x.e^x, \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \text{si } x > 1 \end{cases}$

d. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{3x+1}{x^2-1}\,dx$

9. ¿Para qué valores de p la integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente?

10. Comprobar que $\int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = 1$

11. Determinar el área de la región ubicada por debajo de la curva $y = e^{x}$ y por sobre la recta $y = 0$, con $x \leq 0$.

12. Calcular el área de la región del plano limitada por la recta y = 0 por debajo; y las curvas $y = 2^{x}$; $x + y = 1$ por arriba.

Volumen de un sólido de revolución

Supongamos que f es una función no negativa y continua en [a, b]. Si giramos la región por debajo de la gráfica de f alrededor del eje x, obtenemos un sólido. El volumen de este sólido viene dado por la fórmula $V = \int_{a}^{b} \pi [f(x)]^2 dx$

13. Deducir, a través de la fórmula correspondiente, la ecuación del volumen de los siguientes sólidos:

a. El interior de un cono, cuyo radio de la base es r y tiene altura h. (Sugerencia: el cono se genera haciendo girar una recta convenientemente hallada, alrededor del eje x).

b. El interior de una esfera de radio r.

14. Hallar el volumen del sólido definido al hacer girar la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ alrededor del eje x

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 4 b): Calcular $\int_{0}^{3} f(x)\, dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 1 \\ 2 & si\ 1 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

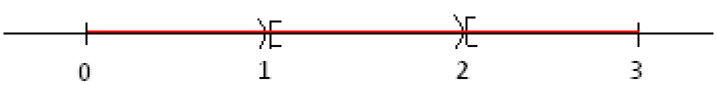
Resolución:

Recordemos la siguiente propiedad de la integral definida:

$$\text{(B)} \qquad \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx, \quad c \in (a,b)$$

Como la función a integrar está dada por tramos tendremos que considerarlos al momento de calcular la integral definida de f entre 0 y 3.

$y = x^2 + 1$ $\qquad$ $y = 2$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x + 3$



Luego, por (B),

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 \left(-\tfrac{1}{2}x+3\right)dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}+1-0\right)+\left(4-2\right)+\left(-\tfrac{9}{4}+9-\left(-1+6\right)\right)$$

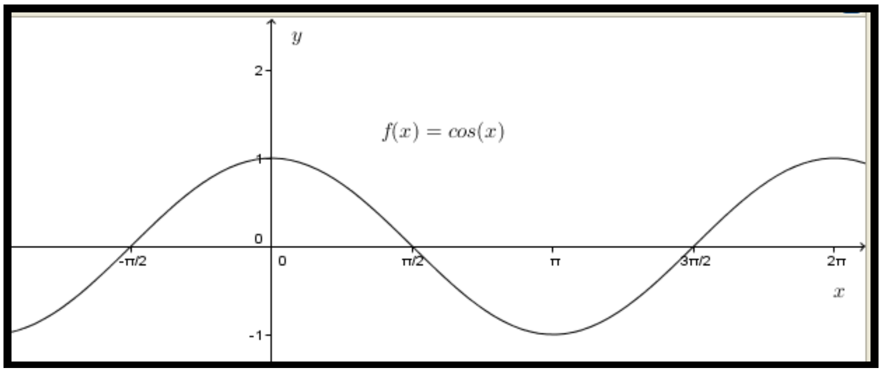
$$= \frac{61}{12}$$

Ejercicio 4 c): Calcular $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x)|\,dx$, si $f(x)=\cos(x)$

Resolución:

Tenemos que calcular la integral definida entre $-\frac{\pi}{2}$ y π del módulo de la función coseno.

Realicemos un gráfico:



En el gráfico podemos observar que en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ la función es positiva y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ la función es negativa, por lo tanto en el intervalo de integración tendremos

$$|f(x)| = |\cos(x)| = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

Luego, utilizando la propiedad (B),

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(-\operatorname{sen}(x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right] + \left[-\operatorname{sen}(\pi) - \left(-\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[1-(-1)\right] + \left[0+1\right] = 3$$