1. Verificar que son correctos los siguientes resultados.

a.
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

b.
$$\int \frac{x^2-1}{x} dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$$

c.
$$\int 5^x 4^x dx = \frac{20^x}{\ln 20} + C$$

2. Resolver las siguientes integrales

a.
$$\int \left(xe^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$$

b.
$$\int \frac{\sqrt{t} + t^3 e^x + x^2}{t^3} dt$$

c.
$$\int \frac{z^2+1}{z} dz$$

d.
$$\int \left(2senx + \frac{4}{5}y + \sqrt{3}e^x\right) dy$$

c.
$$\int \frac{z^2 + 1}{z} dz$$
d.
$$\int \left(2senx + \frac{4}{5}y + \sqrt{3}e^x\right) dy$$
e.
$$\int \left(cos x + \frac{2}{x} - x^2 \sqrt{x}\right) dx$$
f.
$$\int \frac{1 - sen^2 x}{sen^2 x} dx$$
g.
$$\int \frac{1}{3 + 3x^2} + \frac{8}{cos^2 x} dx$$
h.
$$\int (1 - \sqrt[3]{x})^2 dx$$

f.
$$\int \frac{1-sen^2x}{sen^2x} dx$$

g.
$$\int \frac{1}{3+3x^2} + \frac{x^8}{\cos^2 x} dx$$

h.
$$\int (1 - \sqrt[3]{x})^2 dx$$

3. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con una velocidad v(t) = t(1+t) medida en m/s. Su posición en el instante t = 0 es dos metros.

- i. Hallar la posición del móvil a los diez segundos.
- ii. Hallar la distancia recorrida por el objeto en esos diez segundos.

4. Calcular las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de sustitución

a.
$$\int x^2 \operatorname{sen}(4x^3) dx$$

b.
$$\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$$

d.
$$\int \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)}$$

e.
$$\int r.\sqrt{h^2-r^2} dr$$

f.
$$\int \left[\frac{y^2 + 1}{y} - \frac{y}{(y^2 + 3)^5} \right] dy$$

5. Un cohete está en reposo en el instante t=0. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t)=(t+1)^{\frac{1}{2}}-1$, $\forall t\geq 0$, donde t se mide en segundos y la aceleración en m/s^2 . Si el movimiento del cohete es rectilíneo, ¿qué velocidad tiene en el instante t=63?

6. Resolver las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de integración por partes.

a.
$$\int x^3 \ln x \, dx$$

b.
$$\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx$$

c.
$$\int x \left(\cos x + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

d.
$$\int arccos z dz$$

e.
$$\int cos(\ln x)dx$$

f.
$$\int x^2 arctgx dx$$

7. Sean f, g, h funciones con derivada continua en R. Calcular:

a.
$$\int g(x)g'(x)dx$$

b.
$$\int \frac{h'(x)}{[h(x)]^2} dx$$

a.
$$\int g(x)g'(x)dx$$
 b. $\int \frac{h'(x)}{|h(x)|^2}dx$ c. $\int f'(x).\sqrt{r+f(x)}dx$

8. Calcular las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de descomposición en fracciones simples

a.
$$\int \frac{4h-1}{h^2-5h+6} \, dh \qquad \qquad \text{b. } \int \frac{dt}{t^4-t^2}$$

b.
$$\int \frac{dt}{t^4 - t^2}$$

$$c. \int \frac{kx^3 dx}{x^2 - 3x}$$

d.
$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$$

9. Hallar la expresión de f(x) sabiendo que:

b.
$$f''(x) = 2x^2 - 5x + 2$$
, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 2$

c.
$$f'(x) = \frac{e^{4x}}{3 + e^{4x}}$$
 y $f(0) = -\ln 3$

10. Resolver las siguientes integrales:

a.
$$\int \ln(x+2y) dy$$

b.
$$\int \frac{2 \ln(x) \cos(\ln(x))}{x} dx$$

c.
$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$$

d.
$$\int \frac{(\ln^2 x - 4)dx}{x(\ln^2 x + 2\ln x + 1)}$$

- 11. Hallar la ecuación del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante a desde una posición inicial x_0 y con una velocidad inicial v_0
- La aceleración de un móvil está dada por la fórmula $a(t)=\frac{-3v_0}{m}e^{-\frac{3t}{m}}$, siendo m la masa, v_0 la velocidad inicial y t el 12. tiempo. Si la posición inicial de dicho móvil es x₀, hallar una expresión para la velocidad v(t) y la posición x(t) del móvil en función del tiempo.

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 6.b)

Resolver las siguientes integrales aplicando convenientemente el método de integración por partes.

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx$$

Resolución

Recordemos el método de integración por partes:

$$\int u.\,dv = u.\,v - \int v.\,du$$

Primero reescribimos la función a integrar como un producto de funciones

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx = \int x^2 e^{-3x} dx$$

Tomando

$$u = x^2$$

$$dv = e^{-3x} dx$$

Tenemos

$$du = 2x dx$$

Para obtener v realizamos una pequeña sustitución t=-3t, dt=-3dx

$$v = \int dv = \int e^{-3x} dx = \int -\frac{1}{3} e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

Luego,

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx = \int x^2 e^{-3x} dx = x^2 \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) 2x \ dx = x^2 \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{2}{3} \underbrace{\int x \ e^{-3x} \ dx}_{Cálculo \ auxiliar}$$
(A)

Calculemos $\int x \, e^{-3x} \, dx$ mediante un cálculo auxiliar

Tomando

$$u = x$$

$$dv = e^{-3x} dx$$

Tenemos

$$du = dx$$
$$v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Luego

$$\int x e^{-3x} dx = x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int -\frac{1}{3} e^{-3x} dx = x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)$$
 (B)

Reemplazando (B) en (A),

$$\int \frac{x^2}{e^{3x}} dx = \int x^2 e^{-3x} dx = x^2 \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{2}{3} \left[x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) \right] + c$$

Ejercicio 5

Un cohete está en reposo en el instante t=0. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t)=(t+1)^{\frac{1}{2}}-1$, $\forall t\geq 0$, donde t se mide en segundos y la aceleración en m/s^2 . Si el movimiento del cohete es rectilíneo, ¿qué velocidad tiene en el instante t = 63?

Resolución

Dado que la aceleración de un móvil se obtiene derivando la velocidad, si conocemos la aceleración tendremos que integrar a fin de conocer la velocidad de este.

Como
$$a(t) = (t+1)^{1/2} - 1$$
,

$$V(t) = \int a(t)dt = \int [(t+1)^{1/2} - 1] dt$$

Utilizando el método de sustitución, llamamos z = t + 1. De modo que dz = dt. Luego:

$$\int \left[(t+1)^{1/2} \right] dt = \int \left(z^{\frac{1}{2}} \right) dz = \frac{2}{3} z^{3/2} + C = \frac{2}{3} (t+1)^{3/2} + C$$

Entonces:

$$\int \left[(t+1)^{1/2} - 1 \right] dt = \frac{2}{3} (t+1)^{3/2} - t + C$$

En t = 0, el cohete se encuentra en reposo, por lo que v(0) = 0. A partir de este dato, buscamos el valor de la constante C:

$$v(0) = \frac{2}{3} (0+1)^{3/2} - 0 + C = 0 \rightarrow C = -\frac{2}{3}$$

La velocidad del cohete en cualquier instante t de tiempo es $v(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} - t - \frac{2}{3}$.

En particular, a los 63 segundos la velocidad será de v (63) = $\frac{2}{3}$. $8^3 - 63 - \frac{2}{3}$. Aproximadamente, 277,6 m/s.