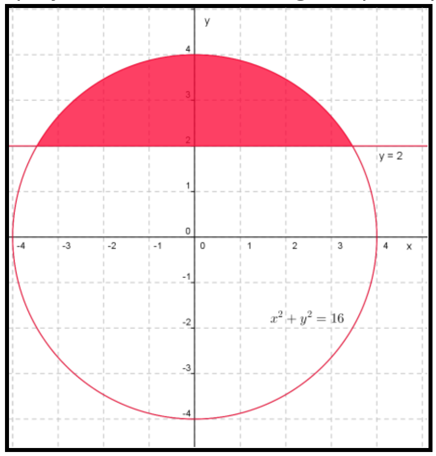
Ejercicio 1. a) Resolver en C la ecuación $z^3+9iz=0$

b) Dado el siguiente gráfico en el plano complejo, escribir en C la región que representa:




Ejercicio 2. Hallar las raíces y factorizar en Q[x], R[x] y C[x] el polinomio $p(x)=-2x^4+21x^3-74x^2+85x$, sabiendo que $4-i$ es raíz de p.

Ejercicio 3. a) Hallar k para que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 3k \\ -4 & k+5 & -5 \end{pmatrix}$ sea inversible.

b) Sabiendo que $A\in R^{3x3}$ y que $\det(A^{-1})=-\frac{1}{9} \wedge B=\frac{1}{3}A^2$, calcular $\det(2.A.B^t)$

Ejercicio 4. Analizar para qué valores de $\alpha$ el siguiente sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene soluciones: $\begin{cases} 2x-2y+z=-\alpha \\ -3x+y-4z=-2 \\ x-3y-2z=4 \end{cases}$

Ejercicio 5. a) Hallar una recta r que pasa por $A=(2,-1,3)$ y $B=(-3,0,1)$

b) Sabiendo que la recta s pasa por el punto $P_0=(2,-1,4)$ y es paralela a la recta $t:(x,y,z)=(-8,5,-7)+\lambda(15,-3,5)$, analizar si r y s son concurrentes, paralelas, coincidentes o alabeadas.

Resolución

Ejercicio 1.

a) Resolver en C la ecuación $z^3+9iz=0$

$z^3+9iz=0$ Sacando 'z' como factor común:

$z(z^2+9i)=0$

Si el producto de dos números complejos es cero, alguno de los factores tiene que ser cero. Por lo que z = 0 es una de las soluciones de la ecuación. Las soluciones restantes resultaran de resolver la ecuación $z^2 + 9i = 0$. De esta última ecuación se infiere que $z^2 = -9i$ por lo que tenemos que hallar las raíces cuadradas del número complejo $-9i$ .

Recordemos la expresión para hallar las raíces n-ésimas de un número complejo w (es decir, para hallar los números complejos z que verifican $z^n = w$):

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{siendo } \phi = \arg(w) \text{ y } k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

En nuestro caso, $w = -9i$ Entonces, $|w| = 9$ y su argumento es igual a $\frac{3}{2}\pi$. Por lo tanto, las dos raíces cuadradas de -9i son:

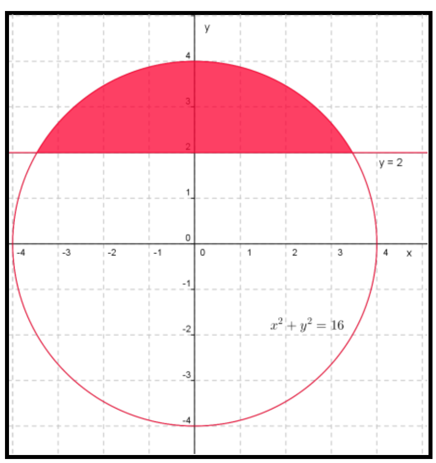
$$z_k = \sqrt{9}\left(\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{con } k = 0, 1$$

Si k = 0, entonces $z_0 = 3\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

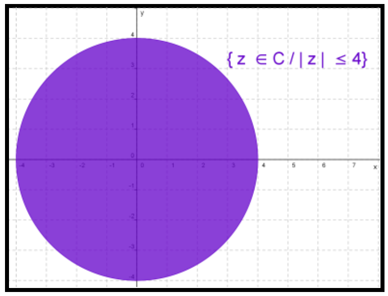
Si k = 1, entonces $z_k = 3\left(\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{2}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

Por lo yanto, el conjunto solución de la ecuación $z^3 + 9iz = 0$ es $S = \left\{0\,,\, -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\,,\, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}$

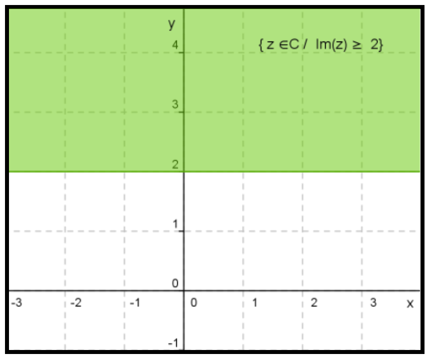
b) Dado el siguiente gráfico en el plano complejo, escribir en C la región que representa:



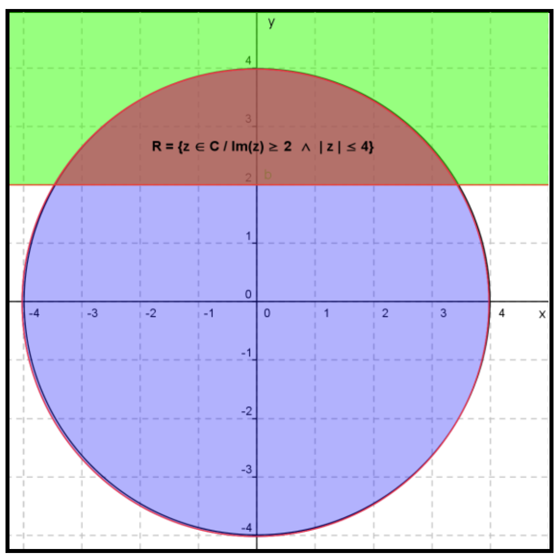

La ecuación de la circunferencia representada es $x^2 + y^2 = 4^2$. Si z = x + iy, siendo x = Re(z), y = Im(z) sabemos que su módulo está dado por la expresión $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ por lo que los números complejos que están sobre la circunferencia son aquellos cuyo módulo es igual a cuatro; los puntos que se encuentran en el interior de la circunferencia son aquellos cuyo módulo es menor o igual a cuatro:




Por otro lado, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0 ; 2) es la recta ecuación y = 2: sobre esta recta se hallan todos los números complejos cuya parte imaginaria es igual a dos. Por lo tanto, la región por encima de esta recta está dada por $\{z \in C / \ \mathrm{Im}(z) \geq 2\}$ :




La región sombreada verifica ambas condiciones a la vez: se encuentra dentro de la circunferencia y por sobre la recta, por lo que $R = \{z \in C \ / |z| \leq 4 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) \geq 2\}$ :




<u>Ejercicio 2.</u> Hallar las raíces y factorizar en Q[x], R[x] y C[x] el polinomio $p(x) = -2x^4 + 21x^3 - 74x^2 + 85x$ , sabiendo que $4 - i$ es raíz de p.

Factoricemos el polinomio p: dado que en todos los términos del polinomio aparece la variable x, podemos sacar factor común:

$$p(x) = -2x^4 + 21x^3 - 74x^2 + 85x \; = x(-2x^3 + 21x^2 - 74x + 85)$$

El poder extraer 'x' como factor común nos permite conocer otra de las raíces del polinomio p: x = 0.

Tenemos que factorizar el polinomio dado por q(x) = $-2x^3 + 21x^2 - 74x + 85$, para lo cual usaremos los datos del enunciado: sabemos que 4 - i es una raíz del polinomio p y, por lo tanto, 4 - i es una raíz de q (puesto que p(x) = xq(x) y el polinomio r(x) = x tiene únicamente al cero como raíz). Como q tiene todos sus coeficientes reales, 4 + i también es raíz de q, lo que significa que q es divisible por los polinomios $q_1(x) = x - (4 - i)$ y $q_2(x) = x - (4 + i)$. Al ser divisible tanto por $q_1$ como por $q_2$, q es divisible por el polinomio que resulta de realizar el producto entre ambos:

$$\begin{aligned} q_1(x).\, q_2(x) &= \big(x - (4 - i)\big)(x - (4 + i)) \\ &= x^2 - x(4 + i) - x(4 - i) + (4 - i)(4 + i) \\ &= x^2 - 4x - xi - 4x + xi + (16 - i^2) \\ &= x^2 - 8x + 17 \end{aligned}$$

Realicemos la división entre el polinomio q y el polinomio $x^2 - 8x + 17$ (podemos anticipar que, como el primer polinomio es divisible por el segundo, el resto de la división es igual a cero).

$$\begin{array}{rrrr|l} -2x^3 & +21x^2 & -75x & +85 & x^2 - 8x + 17 \\ \cline{5-5} + & & & & -2x + 5 \\ 2x^3 & -16x^2 & +34x & & \\ \hline & 5x^2 & -40x & +85 & \\ & + & & & \\ & -5x^2 & +40x & -85 & \\ \cline{2-4} & & 0 & & \end{array}$$

En consecuencia, q(x) = $(x^2 - 8x + 17)(-2x + 5) = -2(x^2 - 8x + 17)(x - \frac{5}{2})$

Sacamos -2 de factor común en el segundo paréntesis

Estamos ahora en condiciones de hallar las raíces de p y su expresión factorizada en Q[x], R[x] y C[x]. Para hallar las raíces, debemos resolver la ecuación p(x) = 0. O sea:

$$-2x^4 + 21x^3 - 75x^2 + 85x = 0$$

$$x(-2x^3 + 21x^2 - 74x + 85) = 0 \qquad \text{Como } -2x^3 + 21x^2 - 74x + 85 = -2(x^2 - 8x + 17)(x - \frac{5}{2})$$

$$-2x(x^2 - 8x + 17)(x - \frac{5}{2}) = 0$$

El conjunto de raíces de p entonces es $\sigma(p) = \left\{0,\ 4 - i,\ 4 + i,\ \frac{5}{2}\right\}$ y las correspondientes factorizaciones son:

- En Q[x]: p(x) = $-2x(x^2-8x+17)(x-\frac{5}{2})$
- En R[x]: $-2x(x^2-8x+17)(x-\frac{5}{2})$
- En C[x]: $p(x)=-2x(x-(4-i))(x-(4+i))(x-\frac{5}{2})$

Ejercicio 3. a) Hallar k para que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 3k \\ -4 & k+5 & -5 \end{pmatrix}$ sea inversible.

Una matriz es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero. Calculamos entonces el determinante de A, para lo cual utilizaremos el método de Laplace, desarrollando por la primera fila (no es la única forma posible de calcular el determinante ya que al ser la matriz de orden tres se podría aplicar el método de Sarrus).

$$\begin{aligned} |A| &= -(-2)\begin{vmatrix} -4 & 3k \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & k+5 \end{vmatrix} \\ &= 2(20+12k)+[-4(k+5)+20] \\ &= 40+24k-4k \\ &= 40+20k \end{aligned}$$

Para que la matriz A resulte inversible, $40+20k\neq 0$ es decir $k\neq -2$.

b) Sabiendo que $A\in R^{3x3}$ y que $\det(A^{-1})=-\frac{1}{9}\wedge B=\frac{1}{3}A^2$, calcular $\det(2.A.B^t)$

Usamos las propiedades de los determinantes para hallar el valor de los determinantes de las matrices A y B:

- Como $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}=-\frac{1}{9}\rightarrow \det(A)=-9$
- $B=\frac{1}{3}A^2\rightarrow \det(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^3.\det(A^2)=\frac{1}{27}(\det A)^2=\frac{1}{27}(-9)^2=\frac{1}{27}81=3$

Si k es una constante, det(kA) = $k^n$det(A) siendo n el orden de la matriz.

$\det(A^n)=(\det A)^n$

Entonces: $\det(2AB^t)=(2)^3\det(AB^t) = 8\det(A)\det(B^t) = 8.(-9).3=-216$

$\det(A^n)=(\det A)^n$

$\det(AB)=(\det A)(\det B)$

$\det(B)=\det B^t$

Ejercicio 4. Analizar para qué valores de $\alpha$ el siguiente sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o no tiene soluciones: $\begin{cases} 2x-2y+z=-\alpha \\ -3x+y-4z=-2 \\ x-3y-2z=4 \end{cases}$

La matriz ampliada del sistema es $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -\alpha \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right)$ Diagonalizamos la matriz B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -\alpha \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad F_1 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -\alpha \end{array}\right) \quad 3F_1+F_2 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & -10 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & -\alpha \end{array}\right) \quad 2F_1-F_3 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & -10 & 10 \\ 0 & -4 & -5 & 8+\alpha \end{array}\right) \quad F_2-2F_3 \to F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -6-2\alpha \end{array}\right)$$

Si -6 - 2 $\alpha$ = 0, o sea $\alpha$ = -3, el sistema resulta compatible indeterminado. Si $\alpha \neq -3$el sistema no tiene solución (es incompatible). No hay valores de $\alpha$ de modo que el sistema admita única solución.

Ejercicio 5. a) Hallar una recta r que pasa por $A=(2,-1,3)$ y $B=(-3,0,1)$

El vector director de la recta es (-5, 1, -2) (vector que resulta re realizar la diferencia entre los puntos B y A). Por lo tanto, una posible ecuación para la recta r es $r:(x;y;z)=\lambda(-5,1,-2)+(2,-1,3) \quad \lambda\in R$.

b) Sabiendo que la recta s pasa por el punto $P_0=(2,-1,4)$ y es paralela a la recta $t:(x,y,z)=(-8,5,-7)+\lambda(15,-3,5)$, analizar si r y s son concurrentes, paralelas, coincidentes o alabeadas.

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos. Podemos tomar entonces como vector director de la recta s al vector (15, -3, 5). Como sabemos que s pasa por el punto $P_0$ su ecuación está dada por $s:(x,y,z)=t(15,-3,5)+(2,-1,4)$ con $t\in R$.

Busquemos la intersección entre las rectas r (hallada en el ítem anterior) y s:

$$r: (x; y; z) = \lambda(-5, 1, -2) + (2, -1, 3) \quad \lambda \in R \rightarrow \begin{aligned} x &= -5\lambda + 2 \\ y &= \lambda - 1 \\ z &= -2\lambda + 3 \end{aligned}$$

$$s: (x, y, z) = t(15, -3, 5) + (2, -1, 4) \text{ con } t \in R \rightarrow \begin{aligned} x &= 15t + 2 \\ y &= -3t - 1 \\ z &= 5t + 4 \end{aligned}$$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{aligned} -5\lambda + 2 &= 15t + 2 \qquad (1) \\ \lambda - 1 &= -3t - 1 \qquad (2) \\ -2\lambda + 3 &= 5t + 4 \qquad (3) \end{aligned}$$

De (1) obtenemos que $\lambda = -3t$. Remplazando esta igualdad en (2) obtenemos: $\begin{aligned} \lambda - 1 &= -3t - 1 \\ -3t - 1 &= -3t - 1 \end{aligned}$ o sea, una igualdad que es verdadera cualquiera sea el valor de t. Remplazamos la igualdad en la ecuación (3):

$$-2\lambda + 3 = 5t + 4 \rightarrow -2(-3t) + 3 = 5t + 4 \rightarrow 6t + 3 = 5t + 4 \rightarrow t = 1$$

por lo que $\lambda = -3$. Remplazando por $\lambda = -3$ en la ecuación de la recta r o por t = 1 en la ecuación de la recta s obtenemos que las rectas se intersecan en el punto (17; -4; 9) por lo que r y s son coincidentes.