ificación en los principios básicos que sustentan la experimentación, y aún es preciso entrenarse en tales principios. En realidad, hoy día quizá sea aún más necesario de lo que era hace veinticinco años hacer hincapié en estos principios, teniendo en cuenta la posibilidad actual de que el experimentador quede totalmente aislado del fenómeno que investiga por una barrera casi impenetrable de equipos de procesamiento de datos y de nuevos procedimientos de análisis. En estas nuevas circunstancias, fallas del todo inadvertidas pueden producir resultados finales de poco o ningún significado. A menos que tengamos una comprensión clara y completa de todas las fases de nuestro experimento y su análisis de datos, dejaremos, a nuestro riesgo, la conducción del proceso completamente en manos de la computadora.

El plan de este libro es, en su mayor parte, el mismo que en la edición anterior, aunque el texto ha sido reescrito casi por completo. El capítulo 1 ofrece un enfoque del trabajo en el laboratorio de física superior introductoria que facilita el encuentro con la naturaleza esencial de la experimentación científica. Los capítulos 2, 3 y 4 proporcionan la información básica sobre los procedimientos científicos, estadísticos y de medición en los que está fundado el diseño de experimentos. El capítulo 5 presenta paso a paso los requerimientos prácticos para diseñar un experimento, y el capítulo 6 describe los procedimientos correspondientes para la evaluación de los resultados experimentales una vez efectuadas las mediciones del caso. Al cabo del cuerpo principal del libro del capítulo 7 ofrece algunas sugerencias para redactar informes de laboratorio.

Los apéndices tratan temas que, si bien pertinentes por su contenido, de haberse incluido en el cuerpo principal del texto, hubiesen entorpecido el desarrollo natural de éste. Esto incluye la deducción matemática de algunas de las ecuaciones consideradas en el texto principal. Con todo detalle, además se presenta un experimento de muestra, empezando por el diseño del experimento en sí, describe la conducción real del mismo y la evaluación de sus resultados y concluye con el informe final.

Los contenidos temáticos aquí presentados han conformado, durante muchos años, el núcleo de enseñanza en nuestro laboratorio de física, para primer año en la universidad y estoy agradecido a las generaciones de estudiantes cuya experiencia no siempre grata con este material, nos ha dado la oportunidad de mejorarlo continuamente. Por último, quiero dar las gracias a Jill Hodgson y Rachel Desrosiers por su generosa e inapreciable ayuda en la preparación del manuscrito.

D. C. Baird

D. C. Baird. Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos: 2da Ed. Prentice-Hall. Hispanoamericana. 1988).

1

Enfoque del trabajo de laboratorio

La finalidad primera de este libro es que se use en cursos superiores introductorios al laboratorio de física. Sin embargo, fue escrito con la esperanza de que sirva para un propósito mucho más amplio: el de proporcionar una introducción al estudio de la experimentación en general, independientemente del área en la que se realizan los experimentos. Algunos de los que estudian introducción al laboratorio de física podrán proseguir carreras con investigación en física, por lo que este libro puede servirles como una introducción adecuada para la continuación de sus estudios. Muchos otros seguirán carreras en áreas completamente diferentes, o quizá en otras ciencias. Cualquiera que sea su necesidad, el laboratorio de física puede proporcionarles una introducción útil a los principios fundamentales en que se basan los experimentos de cualquier tipo.

Para nuestros fines, la experimentación tiene una definición muy amplia: por experimentación entendemos el proceso completo de identificar una porción del mundo que nos rodea, obtener información de ella e interpretarla. Esta definición cubre una variedad muy grande de actividades: desde un biólogo con bata blanca que divide moléculas de ADN hasta un fabricante que hace una encuesta para determinar las preferencias individuales de crema dental. Se pretende que este libro satisfaga las necesidades de todos aquellos que se encuentran ocupados en cualquier clase de estudio sobre el mundo que nos rodea.

Eso incluye a los que no están realmente involucrados en la experimentación. Con frecuencia todos nos enfrentamos con el requisito de por lo menos expresar un juicio sobre la información experimental que otros proporcionan, aun cuando no estemos conectados activamente con el proceso de generarla. Por ejemplo: nuestro trabajo profesional puede requerir que tomemos una decisión entre ofertas competitivas de equipos que cumplen con ciertas especificaciones o, como miembros del público en general, se nos puede pedir que tengamos una opinión sobre temas como los posibles riesgos para la salud que implican las plantas nucleoeléctricas, cuán seguros son los aditivos en los alimentos, el impacto de la lluvia ácida sobre el medio ambiente o la influencia de las políticas monetarias nacionales sobre el desempleo. Lo que todos estos ejemplos tienen en común es el papel prominente que tiene en ellos la información experimental. Esos problemas públicos nos imponen la responsabilidad de tomar nuestras propias decisiones, y éstas deben de basarse en nuestra evaluación de la confiabilidad de la información experimental. Aun en asuntos menos importantes oímos repetidamente afirmaciones como la de que las pruebas científicas han demostrado que podemos controlar la caries o los dolores de cabeza en un $x\%$ utilizando ciertos productos. Nuestra elección de un nuevo automóvil puede depender de la evaluación que hagamos de la exactitud de los valores de consumo de combustible que se le atribuyen. Todos por igual, los científicos y los profanos, nos enfrentamos diariamente con el requisito de estar enterados con respecto a la naturaleza de la información experimental y las formas en que ésta se obtiene para poder ser adecuadamente escépticos con respecto a su confiabilidad.

Para regresar a nuestra afirmación de que un curso de laboratorio en física puede proporcionar una introducción al tema de la experimentación en general, es natural que nos preguntemos cómo puede usarse para ese propósito un laboratorio típico, con sus experimentos acostumbrados. La respuesta se encuentra no tanto en los experimentos mismos, como en la actitud con que los abordemos. Esto quedará claro conforme proceda nuestro estudio de los métodos experimentales, pero en este punto puede ser útil ilustrar la propuesta con unos cuantos ejemplos.

Para ofrecer dichos ejemplos debemos anticipar un poco el trabajo del capítulo 4, y hacer notar que veremos todo lo que sea susceptible de experimentación en términos de "sistemas". Por un sistema entenderemos, en general, cualquier entidad definida y aislada que funciona de una manera específica. Suponemos que podemos influir o controlar el sistema, y nos referimos a los métodos que tenemos al alcance para hacerlo como las "entradas". También suponemos que el sistema realizará alguna o algunas funciones identificables, y nos referiremos a ellas como las "salidas". Los diversos ejemplos que siguen aclararán el uso de esa terminología. Por ejemplo, un economista puede ver la economía de un país como un sistema con un extenso conjunto de entradas y la correspondiente variedad de salidas. El sistema mismo incluirá la capacidad productiva total de bienes y servicios, medios de transporte, suministro de materias primas, habitantes, oportunidades para el comercio exterior, estado del tiempo y muchas otras cosas. Las entradas son aquellas cosas que podemos controlar: la oferta de dinero, las tasas de impuestos, el gasto público, los aranceles a las importaciones, etc. Las salidas son las cosas que no podemos controlar directamente; sus magnitudes las determina el sistema y no nosotros. Las salidas de un sistema económico incluirán el producto interno bruto, el índice de desempleo, el índice de inflación, la balanza de comercio exterior, etc. Sería muy reconfortante y conveniente si pudiéramos asegurar los valores deseados de esas salidas mediante una manipulación sencilla, pero no podemos hacerlo. No importa lo deseable que eso sea, no podemos ordenarle al producto interno bruto o al índice de desempleo de un país que tenga un cierto valor; estamos restringidos a controlar nuestras entradas, y aun así tenemos problemas. En un sistema tan complejo como una economía nacional, las conexiones entre las salidas y las entradas son intrincadas e indirectas. Un cambio en una variable de entrada es probable que tenga efecto en un gran número de variables de salida, en vez de la única salida en la que estamos interesados. Por ejemplo, un intento de aumentar el producto interno bruto de un país reduciendo las tasas impositivas es posible que tenga al menos un éxito parcial, pero el efecto simultáneo sobre otras salidas puede ser igualmente prominente y no tan deseable, como puede ser un posible incremento de la tasa de inflación. Los métodos de que disponemos para manejar tales situaciones son complicados, pero, con un sistema de tal complejidad, el grado de éxito alcanzado por los políticos y economistas demuestra que todavía hay lugar para hacer mejoras substanciales.

Existen otros sistemas que, aunque todavía son complejos, son lo bastante sencillos para que los podamos controlar con un éxito razonable. Consideremos, por ejemplo, un reactor nuclear. Aquí el sistema tiene un número menor de controles de entrada y de salidas, y la situación está definida con más claridad. Las entradas incluyen la posición de las barras de control, la cantidad y el tipo de combustible, la rapidez de flujo del refrigerante, etc. Las salidas incluyen cantidades como la densidad de flujo de neutrones, la potencia total producida, la vida útil de los elementos de combustible, etc. En este caso la conexión entre las entradas y las salidas es lo suficientemente sencilla (aunque todavía no es directamente de uno a uno) para que sea posible un nivel razonable de control. En otro nivel más familiar, todo supermercado es un sistema con entradas y salidas cuya manipulación constituye un experimento sobre el sistema. Cada vez que el gerente del supermercado altera el precio de las papas (una de sus entradas) de hecho está realizando un experimento, porque quiere detectar un cambio consecuente en una o más de sus salidas (por ejemplo, sus utilidades al final de la semana). Si no es capaz de percibir la alteración deseada en sus salidas, se le puede requerir que revise su decisión original, y de nuevo altere el precio de las papas. En otras palabras, está ensayando continuamente las propiedades de su sistema por medio del experimento, y su habilidad para detectar los resultados experimentales puede hacer toda la diferencia entre pérdidas y ganancias.

De manera incidental, debemos hacer notar también que, en el ejemplo del gerente del supermercado, algunas de sus entradas y salidas tienen que ver con la gente (horarios de trabajo, salarios, moral, productividad, etc.); y en caso de que este uso del enfoque de sistemas en todos los problemas, tanto humanos como mecánicos, suene como un enfoque demasiado mecanicista de la vida, debemos hacer notar que mucho de nuestro trabajo subsecuente se ocupará de los límites en la validez de los métodos experimentales. Todos hemos escuchado la frase: "se ha demostrado científicamente" presentada como un argumento irrefutable, y debemos estar alertas a los peligros de una confianza equivocada en la infalibilidad científica.

Pero, volviendo a nuestros sistemas, ¿cómo se aplica todo esto al curso de laboratorio de física? De hecho, si vamos a preparar personas para que se incorporen a una población científicamente letrada, ¿no sería mejor atacar los problemas importantes de una buena vez, y empezar a decidir si el contenido de mercurio del pescado hace que no sea seguro comerlo? Sin embargo, lo malo es que estos son problemas en extremo difíciles. La evidencia no es fácil de obtener y su interpretación normalmente es incierta; hasta los mismos expertos están en desacuerdo, a veces en forma enérgica y pública. Es casi imposible hacer una contribución significativa a la solución de problemas tan complejos sin desarrollar primero nuestras habilidades utilizando situaciones más sencillas. Para iniciarnos en ello, vamos a pensar en algunos de estos sistemas más sencillos.

Un motor de gasolina es un sistema que es sencillo en comparación con cualquiera de los ejemplos anteriores. El sistema incluye el motor, el suministro de combustible, la estructura, la atmósfera circundante, etc. Las entradas pueden ser los controles obvios como el suministro de combustible, la relación combustible/aire, la sincronía del encendido, etc., y las salidas, como siempre, son los factores cuyo valor lo determina el sistema: el número de revoluciones por minuto, la cantidad de calor producido, la eficiencia, la composición de los gases de escape, etc. Este es todavía un sistema un tanto complejo, pero empezamos a ver que pueden existir relaciones relativamente simples entre las entradas y las salidas. Por ejemplo, la relación de entrada y salida entre la posición del acelerador y las revoluciones por minuto en un motor de gasolina es lo suficientemente directa y predecible para que la mayoría de las personas la observemos todos los días. Sin embargo, notemos que el efecto de esa entrada no está restringido a la única salida en la que estamos interesados (revoluciones por minuto); otras salidas, como el calor producido, la composición de los gases de escape y la eficiencia, también son alteradas por esa entrada, aunque en general estemos predispuestos para ignorar ese acoplamiento.

En este ejemplo empezamos a llegar a la etapa en la que nuestro sistema es lo bastante sencillo para que comencemos a trabajar en la teoría de la experimentación. Avancemos un paso más y consideremos el ejemplo de un péndulo simple. Ese es también un sistema; sin embargo, es un sistema que incluye algunas cosas más que el hilo, la masa, el soporte y el aire que lo rodea. Más aún, sólo tiene dos entradas inmediatamente obvias: la longitud del hilo y las condiciones iniciales según las cuales empieza el movimiento. Las salidas son también reducidas en número. Aparte de pequeños efectos secundarios, incluyen sólo la frecuencia de oscilación y la amplitud de las oscilaciones. Por último, la conexión entre las entradas y las salidas es relativamente directa y reproducible. Alterar la longitud del hilo del péndulo nos dará pocas sorpresas cuando midamos la frecuencia de oscilación. Aquí, por lo tanto, tenemos un sistema en el que los principios de experimentación serán claramente visibles. Si lo usamos para desarrollar la capacidad de controlar sistemas y evaluar sus salidas, desarrollaremos la competencia necesaria para atacar luego problemas más importantes, pero también más complejos. Esto nos da la clave para por lo menos darle algún uso constructivo al curso de laboratorio de física. Hay una razón real para trabajar con un péndulo, pero sólo si lo visualizamos en forma adecuada. Si lo vemos sólo como el péndulo que todos hemos "hecho" antes, nuestra única reacción será de total aburrimiento. Sin embargo, si lo vemos como un sistema, igual que un supermercado, un aeropuerto, un reactor nuclear o la economía nacional, pero que difiere de ellos sólo en que es lo bastante sencillo para que lo podamos entender relativamente bien, proporcionará una excelente simulación de los problemas del mundo real.

He aquí la justificación para apoyarnos en este curso de laboratorio de física para enseñar experimentación. Los sistemas que incluye son lo bastante sencillos para que estén cerca de ser comprensibles, y la práctica con ellos nos preparará para proseguir más adelante con nuestro trabajo real en sistemas importantes y complicados. Sin embargo, debemos tener cuidado con la manera en que practiquemos con estos sistemas sencillos. Obtendremos sólo un beneficio muy limitado si nos restringimos a conjuntos de instrucciones que nos dicen cómo hacer experimentos particulares. Si es nuestra intención proporcionar una base para proceder a *cualquier* tipo de análisis de información en la ciencia, la tecnología, los negocios o cualquiera de las ciencias sociales, tendremos que dar una preparación para una gran variedad de circunstancias experimentales. En algunas áreas dominan las fluctuaciones al azar, como en las ciencias biológicas; en otras, como la astronomía, las mediciones deben de ser precisas, pero el control sobre la materia del experimento es limitado. El alcance es enorme. Como dijimos antes, trataremos de identificar los principios generales de la experimentación, con la esperanza de que sean válidos y útiles, sin importar el objeto futuro o el tipo de la experimentación. El resto de este libro se ocupará de esos principios, y supondremos de aquí en adelante que los experimentos de laboratorio se considerarán como ejercicios para ilustrar esos principios.

Puede ser obvio ahora que muchos de los procedimientos tradicionales en los primeros cursos de laboratorio sean inadecuados para nuestros propósitos. Por ejemplo, evitamos pensar en un experimento como un procedimiento para reproducir cierto resultado "correcto", cualquier desviación del cual hace que estemos "equivocados". En lugar de eso, simplemente evaluamos de manera imparcial las propiedades de nuestro sistema en particular y tomamos los resultados como vengan. Además, no tiene caso buscar algún "procedimiento" a seguir: eso no es más que pedirle a alguien que nos diga cómo hacer el experimento. En la vida real rara vez hay alguien dispuesto a decirnos qué hacer o cuál debe de ser nuestro resultado; nuestra utilidad dependerá de la capacidad para tomar nuestras *propias* decisiones sobre cómo manejar la situación. Toma gran cantidad de práctica y experiencia desarrollar la confianza en nuestras propias decisiones sobre la conducción de cualquier procedimiento experimental, y este curso de laboratorio de física no es demasiado pronto para empezar. Pondremos, por lo tanto, mucho énfasis en la planeación del experimento, porque ésta es la etapa en la cual se necesita mucha de la habilidad para experimentar. Es importante evitar la tentación de considerar la planeación preliminar como una pérdida de tiempo o una distracción de la tarea que se supone más importante de hacer las mediciones. Se debe contar con tiempo reservado explícitamente para un análisis y una planeación adecuada del experimento antes de que se inicie el verdadero proceso de medición.

Además, es necesario que aprendamos a trabajar dentro del marco de los aparatos disponibles. Toda experimentación profesional está sujeta a limitaciones sobre los recursos, y gran parte de la habilidad para la experimentación consiste en optimizar el rendimiento experimental a partir de esos recursos. Además, las restricciones en el tiempo simplemente simulan las circunstancias en las que se hace la mayor parte de la experimentación real. El aparato mismo nunca será ideal. Sin embargo, esto no debe verse como un defecto sino como un reto. El verdadero trabajo de evaluar resultados experimentales consiste en separar el grano de los resultados útiles de la paja de los errores y la incertidumbre. El experimentador debe aprender a identificar las fuentes de error por sí mismo y, de ser posible, eliminarlas o hacer las correcciones que requieran. Sin embargo, aun con el mayor cuidado, siempre habrá un residuo irreducible de incertidumbre, y es responsabilidad del experimentador evaluar la precisión del resultado final, cantidad que es tan importante como el resultado mismo. La capacidad de cumplir tales requisitos se puede adquirir solamente por el verdadero contacto con unas condiciones de trabajo realistas, y es una injusticia común que se comete con los estudiantes de los primeros cursos de laboratorio de física, proporcionarles aparatos que están ajustados con demasiado cuidado, o darles, en otras formas, la impresión de que los experimentos son ideales. Eso es lamentable, porque los fundamentos de la futura destreza están en la respuesta constructiva a las limitaciones experimentales.

En resumen, el uso del tiempo de laboratorio resultará más fructífero cuando los experimentos se acepten como problemas que deben resolverse por el estudiante mismo. Ciertamente se cometerán errores de juicio, pero podemos aprender de manera más eficiente de la experiencia personal con las consecuencias de nuestras decisiones, que de seguir rígidamente algún procedimiento "correcto" establecido. Lo que aprendemos es más importante que lo que hacemos. Esto no quiere decir, sin embargo, que debamos mostrar indiferencia complaciente con el resultado del experimento. El desarrollo de nuestras habilidades experimentales sólo se logrará si tomamos en serio el reto de obtener el mejor resultado posible de cada experimento.

La redacción de los informes de laboratorio debe enfrentarse con el mismo espíritu constructivo. En la vida profesional tiene muy poco caso dedicar tiempo y esfuerzo a un experimento a menos que podamos comunicar en forma conveniente el resultado a los demás. Tenemos la obligación con nuestros lectores de expresarnos de manera clara, si no elegante, sí con claridad. Es incorrecto considerar que ésa es la responsabilidad de los expertos de la facultad de letras, y redactar informes en un laboratorio científico elemental debe de aceptarse como una oportunidad de ejercitarse en la composición descriptiva. La elaboración de un informe que degenera en una mera indicación de que el experimento se realizó es poco menos que una pérdida de tiempo y de oportunidades para una práctica necesaria. La redacción de informes al nivel que se sugiere aquí es casi inútil sin una crítica y una revisión adecuadas. Las oportunidades de mejorarla se hacen mucho más obvias en retrospectiva, y esa revisión detallada debe considerarse como una parte indispensable del trabajo en un laboratorio de docencia.

2

Medición e incertidumbre

2-1 NATURALEZA BASICA DEL PROCESO DE MEDICION

La medición es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior. El científico escocés del siglo XIX, Lord Kelvin, dijo alguna vez: "Cuando uno puede medir aquello de lo que está hablando y expresarlo en números, sabe algo acerca de ello; pero cuando no puede medirlo, cuando no puede expresarlo en números, su conocimiento es escaso e insatisfactorio: podrá ser un principio de conocimiento, pero escasamente ha avanzado su conocimiento a la etapa de una ciencia". Aunque ésta pueda parecer una afirmación un poco exagerada, sigue siendo cierto que las mediciones constituyen uno de los ingredientes básicos de la experimentación. No alcanzaremos un nivel satisfactorio de competencia en la experimentación sin un conocimiento de la naturaleza de la medición y lo que significa el enunciado de las mediciones.

Es obvio que el proceso de cuantificación casi invariablemente trae consigo la comparación con alguna cantidad de referencia (¿cuántos pasos mide de largo el patio?). De igual manera, es obvio que el buen orden en la sociedad requiere de un acuerdo extendido sobre la elección de cantidades de referencia. El problema de esos patrones de medición, definidos por la legislación y sujetos a convenciones internacionales, es amplio e importante. Nadie que esté interesado seriamente en la medición puede ignorar el problema de definir y realizar patrones en su área de trabajo. Sin embargo, exponer aquí ese importante tema nos distraería de nuestra preocupación principal, que es el proceso de medición. Por lo tanto, dejaremos el tema de los patrones sin ninguna otra mención posterior, excepto para hacer referencia a los textos que se indican en la bibliografía, y abordaremos el estudio del proceso mismo de medición.

Empecemos en el nivel más básico con una medición aparentemente sencilla: tratemos de averiguar de qué tipo de proceso se trata y qué tipo de afirmación se puede hacer. Si le doy a alguien el cuaderno en el que escribo esto y le pido que mida su longitud con una regla, la respuesta es invariable: la longitud del cuaderno es de 29.5 cm. Pero esa respuesta nos debe hacer pensar; ¿en realidad se nos pide que creamos que la longitud del cuaderno es de exactamente 29.50000000 . . . . cm? Seguro que no; es claro que esa afirmación está fuera de los límites de la credibilidad. Entonces, ¿cómo vamos a interpretar el resultado? Un momento de reflexión en presencia del cuaderno y de una regla nos hará darnos cuenta de que, lejos de determinar el valor "correcto" o "exacto", lo único que podemos hacer en forma realista es acercarnos al borde del cuaderno sobre la escala, diciéndonos conforme avanzamos: "¿Puedo asegurar que el resultado es menos de 30 cm?, ¿menos de 29.9 cm?, ¿menos de 29.8 cm?". La respuesta a cada una de estas preguntas indudablemente será "Sí". Pero conforme avancemos sobre la escala, llegaremos a un punto en el cual ya no podremos dar con confianza la misma respuesta. En ese punto debemos detenernos, y de ese modo identificamos un extremo del intervalo que se convertirá en nuestro valor medido. De manera semejante podríamos acercarnos al borde del cuaderno por abajo, preguntándonos a cada paso: "¿Estoy seguro de que el resultado es mayor de 29.0 cm? ¿29.1 cm?", y así sucesivamente. Una vez más debemos de llegar a un valor en el cual nos tendremos que detener, porque ya no podremos decir con seguridad que el resultado es mayor. Mediante la combinación de esos dos procesos identificamos un intervalo sobre la escala. Ese es el intervalo más pequeño que, hasta donde podemos estar seguros, contiene el valor deseado; sin embargo, no sabemos en qué punto del intervalo está ese valor. Esta es la única consecuencia realista del proceso de medición. No podemos esperar resultados exactos y tendremos que contentarnos con medidas que toman la forma de intervalos. Este ejemplo no sólo ilustra la naturaleza esencial del proceso de medición sino que también nos proporciona una guía para hacer las mediciones mismas. El proceso de aproximarse al valor que buscamos acotándolo por ambos lados nos recuerda la necesidad de dar el resultado como un intervalo, y también hace más fácil identificar los extremos del mismo.

Lo que resulta al final de nuestra discusión es muy importante. Cuando hagamos mediciones e informemos de sus resultados debemos tener siempre en cuenta este punto clave y fundamental: las medidas no son simples números exactos, sino que consisten en intervalos, dentro de los cuales tenemos confianza de que se encuentra el valor esperado. El acto de la medición requiere que determinemos tanto la localización como el ancho de ese intervalo, y lo hacemos utilizando con cuidado la percepción visual cada vez que hacemos una medición. No existen reglas para determinar el tamaño del intervalo, porque dependerá de muchos factores del proceso de medición. El tipo de medición, la figura de la escala, nuestra agudeza visual, las condiciones de iluminación, todas tomarán parte en determinar la anchura del intervalo de medición. El ancho, por lo tanto, debe determinarse explícitamente cada vez que se haga una medición. Por ejemplo, es un error común creer que, cuando se hace una medición usando una escala graduada, el "error de lectura" es automáticamente la mitad de la división de la escala más pequeña. Esta es una simplificación excesiva y errónea de la situación. Una escala con divisiones muy finas que se use para medir un objeto con bordes mal definidos puede dar un intervalo de medición más grande que varias de las divisiones más pequeñas; por otra parte, un objeto bien definido con buenas condiciones visuales puede permitir la identificación de un intervalo de medición mucho menor que la división más pequeña de la escala. Cada situación debe evaluarse en forma individual.

-2 PRESENTACION DIGITAL Y REDONDEO

Hay otros aspectos que también pueden confundir el problema. Considere, por ejemplo, un instrumento que da una lectura digital. Si un voltímetro digital indica que cierta diferencia de potencial es de 15.4 V, ¿quiere eso decir que el valor es exactamente de 15.40000. . .? Por supuesto que no, pero, ¿qué significa? Eso depende de las circunstancias. Si el instrumento se fabrica de manera que lea 15.4 V porque el valor real es más cercano a 15.4 de lo que es 15.3 o 15.5, entonces lo que significa es: esta lectura está entre 15.35 y 15.45. Por otra parte, se puede hacer un reloj digital de manera que cambie su indicación de 09.00 a 09.01 exactamente a las 9.01. Entonces, si vemos que marca las 09.00, sabemos que la hora está entre las 9.00 y las 9.01; ésta es una interpretación un poco diferente de la que es adecuada para el voltímetro digital. De nuevo, cada situación debe juzgarse por sí misma.

Estos dos ejemplos de representación digital ilustran un concepto más general: la inexactitud inherente al proceso de "redondear". Aun cuando no surja una inexactitud de la capacidad limitada para hacer mediciones, el simple enunciado de una cantidad numérica puede contener inexactitudes. Consideremos la afirmación:

$$\pi = 3.14$$

Todos sabemos que no es así, porque podemos recordar, al menos, algunas de las cifras siguientes: 3.14159. . . ; entonces, ¿qué queremos decir cuando citamos π como 3.14? Sólo puede significar que π tiene un valor más cercano a 3.14 de lo que es a 3.13 o 3.15. Por lo tanto, nuestra afirmación es que π está entre 3.135 y 3.145. Este margen de posibilidad representa lo que algunas veces se conoce como "el error de redondeo". Esos errores pueden ser pequeños e irrelevantes, o pueden volverse significativos. Por ejemplo, en un cálculo largo, hay la posibilidad de que los errores de redondeo se acumulen, y resulta más sensato, especialmente en esta época de gran disponibilidad de calculadoras, llevar el cálculo con más cifras de las que se podría pensar que son necesarias. Un error semejante de redondeo puede aparecer en enunciados sobre mediciones. Algunas veces oímos decir que alguien ha realizado una medición en una escala que "se aproximó al milímetro", o alguna otra frase parecida. Esa no es una manera correcta de citar una medida, ya que hace confuso el valor real del intervalo de la misma. Sin embargo, nos encontramos con tales afirmaciones y, si nos vemos obligados a tratar con medidas representadas en esa forma, sólo podemos suponer que la división de la escala que se cita representa algún tipo de valor mínimo del tamaño del intervalo de medición.

2–3 INCERTIDUMBRE ABSOLUTA Y RELATIVA

Cualquiera que sea el medio por el que hayamos hecho una medición, el resultado final deberá ser un intervalo que representa, hasta donde nuestra capacidad lo garantice, los límites dentro de los que se encuentra el valor deseado. En el ejemplo que usamos al principio, el experimentador únicamente puede ser capaz de afirmar con seguridad que la longitud del cuaderno está entre 29.4 y 29.6 cm. Aunque el único resultado significativo de un proceso de medición consiste en un intervalo o segmento como ése, con frecuencia es deseable, para propósitos de descripción o de cálculo posterior, enunciar de otra forma el valor citado. Tomamos el intervalo de 29.4 a 29.6 y lo *renombramos* 29.5 $\pm$ 0.1 cm. Aunque obviamente no es más que una expresión del intervalo original con el nombre cambiado, esa nueva forma tiene ciertas ventajas. Nos da un valor central, de 29.5, que podemos utilizar en cálculos posteriores. También nos da otro valor, $\pm$ 0.1, que se conoce como "la incertidumbre" de la medida, con el que podemos juzgar la calidad del proceso de medición y puede usarse en cálculos separados de incertidumbres. Una desventaja de esta forma de expresarlo es que se podría citar únicamente el valor central de 29.5. A menos que recordemos claramente que sólo la cantidad completa (29.5 $\pm$ 0.1) sirve como una expresión correcta del resultado, y podemos ser desordenados al hacer mediciones o reportes sobre ellas, olvidando la presencia esencial de la incertidumbre. Todos deberíamos convertir en una práctica invariable asociar un valor de incertidumbre con una lectura, tanto al momento de hacer la medición como después de este proceso, siempre que se cite su valor o se utilice para cálculos posteriores.

Como la cifra de $\pm$ 0.1 cm representa la magnitud o el intervalo en que la lectura de 29.5 es incierta, a menudo se le llama la "incertidumbre absoluta" de la medida, y usaremos con consistencia esta terminología. Además, otros aspectos pronto se vuelven importantes. ¿Cuán significativa es una incertidumbre de $\pm$ 0.1 cm? Cuando medimos la longitud de un cuaderño, es significativa hasta cierto punto. Si estamos midiendo la distancia entre dos ciudades, una incertidumbre de $\pm$ 0.1 cm es probable que sea completamente insignificante. Por otra parte, si estamos midiendo el tamaño de una bacteria microscópica, una incertidumbre de $\pm$ 0.1 cm haría que la medición careciera de sentido. Por esta razón, con frecuencia es deseable comparar la cifra de incertidumbre con el valor de la medición misma; haciéndolo así se puede evaluar en forma realista cuán significativa es la incertidumbre. Definimos la razón:

$$\textbf{incertidumbre relativa} = \frac{\textbf{incertidumbre absoluta}}{\textbf{valor medido}}$$

En el caso de nuestro ejemplo:

$$\text{incertidumbre relativa} = \pm\frac{0.1}{29.5} = \pm\, 0.003$$

Esta incertidumbre relativa con frecuencia se cita como un porcentaje, de modo que, en este caso, la incertidumbre relativa sería de $\pm$ 0.3%. Esa cantidad nos da un sentido mucho mejor de la calidad de la lectura, y a menudo la llamamos la "precisión" de la medida. Nótese que la incertidumbre absoluta tiene las mismas dimensiones y unidades que la medida básica (29.5 cm es incierto en 0.1 cm), en tanto que la incertidumbre relativa, por ser un cociente, no tiene dimensiones o unidades, y es un número puro.

-4 ERROR SISTEMATICO

El tipo de incertidumbre que hemos considerado surge de una insuficiencia que ocurre naturalmente en el proceso de medición. Hay un tipo de error diferente que puede aparecer cuando algo afecta todas las lecturas de una serie en forma igual o consistente. Por ejemplo, un voltímetro o un tornillo micrométrico pueden tener mal ajuste del cero, una regla de madera puede haberse encogido, una persona puede apretar sistemáticamente el botón de un cronómetro $\frac{1}{10}$ de segundo después del suceso, y así por el estilo. Esos errores se llaman "errores sistemáticos", de los cuales una subclase es la de los "errores de calibración".

Como esos errores sistemáticos no son visibles de inmediato cuando se hace una medición, es necesario estar alerta y recordar en todo momento la posibilidad de que se presenten. Por ejemplo, los ceros de las escalas deben verificarse automáticamente cada vez que se use un instrumento. Aunque puede ser más difícil verificar su calibración, la exactitud de los medidores eléctricos, cronómetros, termómetros y otros instrumentos no debe darse por buena y debe verificarse siempre que sea posible. La presencia de una pantalla de lectura digital con visibilidad precisa, con cuatro o cinco cifras supuestamente significativas, tampoco debe tomarse como prueba de precisión y ausencia de error sistemático en un instrumento. La mayor parte de un lote de cronómetros electrónicos que adquirimos en nuestro laboratorio para usarlos en la docencia, que supuestamente podían medir intervalos de tiempo con precisión de milisegundos, resultó tener errores de calibración hasta de un 14%. No se deje engañar; vea todos los instrumentos de medición con desconfianza y verifique su calibración siempre que sea posible.

2–5 INCERTIDUMBRE EN CANTIDADES CALCULADAS

En las secciones anteriores nos hemos ocupado sólo del concepto de incertidumbre de una sola medida. Sin embargo, es raro que el proceso se termine con una sola medición. Casi invariablemente el resultado que deseamos es una combinación de dos o más cantidades medidas, o es, por lo menos, una función calculada a partir de una sola medida. Podemos intentar, por ejemplo, calcular el área transversal de un cilindro a partir de la medida de su diámetro, o su volumen a partir de medidas tanto del diámetro como de la altura. Las diferentes mediciones serán a veces de diferentes tipos, como en el cálculo de g a partir de los valores de la longitud y el periodo de un péndulo. En esos casos, es obvio que la presencia de incertidumbre en las medidas originales traerá consigo la presencia de una incertidumbre en el valor final calculado, que es la que ahora tratamos de encontrar. Para los propósitos de esta sección, supondremos que nuestras incertidumbres tienen el carácter de alcances o intervalos dentro de los que estamos "casi seguros" que se encuentra el valor correcto. Para los valores, calculados, encontraremos intervalos dentro de los que, de nuevo, podamos estar "casi seguros" que ahí están los valores buscados. Eso significa que tenemos que hacer nuestros cálculos para el "peor caso" de combinación de incertidumbres. Esta tal vez sea una suposición pesimista, pero veremos más adelante, en el capítulo 3, cómo las probabilidades asociadas con varias combinaciones de errores nos permiten hacer una estimación más realista y menos pesimista. Sin embargo, por el momento vamos a suponer que queremos calcular, a partir de las incertidumbres de los valores originales, el máximo margen de posibilidad para el valor calculado.

2–6 INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

Consideremos una cantidad medida x_0 con una incertidumbre $\pm\ \delta x$, y consideremos un valor calculado z que es una función de la variable x. Sea:

$$z = f(x)$$

Esta función nos permite calcular el valor requerido z_0 a partir de un valor medido x_0. Más aún, la posibilidad de que x pueda variar de $x_0 - \delta x$ a $x_0 + \delta x$, implica un intervalo de posibles valores de z de $z_0 - \delta z$ a $z_0 + \delta z$. Ahora queremos calcular el valor de δz. Esa situación se ilustra gráficamente en la figura 2-1, en la cual, para una $f(x)$ dada, podemos ver cómo el valor medido x_0 da lugar al valor calculado z_0, y cómo el intervalo $\pm\ \delta x$ alrededor de x_0 produce un intervalo correspondiente $\pm\ \delta z$ alrededor de z_0.

Antes de considerar los métodos generales de evaluar δz, es instructivo ver cómo se propagan las perturbaciones finitas en funciones sencillas. Consideremos, por ejemplo, la función:

$$z = x^2$$

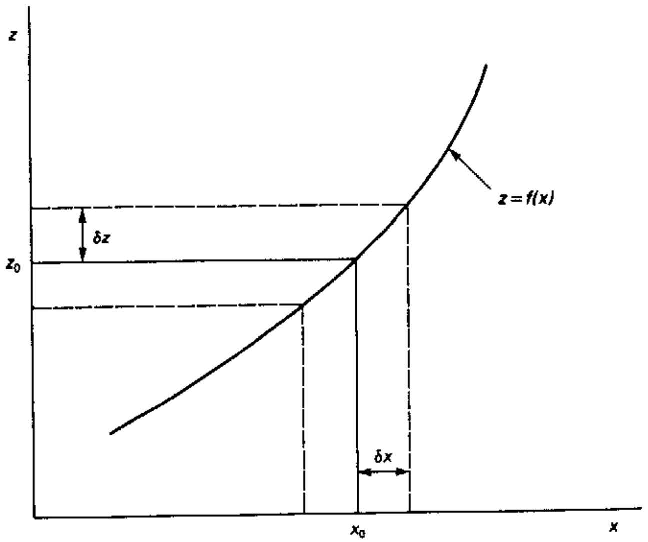

Figura 2-1 Propagación de incertidumbre de una variable a otra.

Si x puede variar entre $x_0 - \delta x$ y $x_0 + \delta x$, entonces z puede variar entre $z_0 - \delta z$ y $z_0 + \delta z$, donde:

$$\begin{aligned} z_0 \pm \delta z &= (x_0 \pm \delta x)^2 \\ &= x_0^2 \pm 2x_0\delta x + (\delta x)^2 \end{aligned}$$

Podemos ignorar $(\delta x)^2$, ya que δx se supone que es pequeña comparada con x_0, e igualar z_0 con x_0^2, lo que da para el valor de δz:

$$\delta z = 2x_0\delta x$$

Esto puede expresarse más convenientemente en términos de la incertidumbre relativa $\delta z/z_0$:

$$\frac{\delta z}{z_0} = \frac{2x_0\delta x}{x_0^2} = 2\frac{\delta x}{x_0}$$

Así pues, la incertidumbre relativa del valor calculado es dos veces la de la medición inicial.

Aunque es esencial tener en mente la naturaleza de la incertidumbre propagada, como lo ilustra el uso de diferencias finitas, puede lograrse una simplificación considerable de la formulación lograda usando cálculo diferencial.

2–7 METODO GENERAL PARA LA INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

De la sección anterior, las diferencias finitas δz y δx se pueden expresar en términos de la derivada dz/dx. Por lo tanto, podemos obtener el valor de δz usando primero las técnicas normales para obtener dz/dx en la siguiente forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$$

y escribiendo después:

$$\delta z = \frac{d(f(x))}{dx}\delta x \qquad (2\text{–}1)$$

Este es un procedimiento relativamente simple, y funcionará bien en los casos para los cuales el planteamiento de diferencias finitas llevaría a una excesiva complejidad algebraica. Así, por ejemplo, si

$$z = \frac{x}{(x^2 + 1)}$$

entonces:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

y finalmente:

$$\delta z = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\delta x$$

Este cálculo habría sido muy complicado con cualquier otro planteamiento. Más aún, nos da una expresión general para δz en función de x y δx; cualquier valor deseado en particular puede obtenerse haciendo $x = x_0$. Usemos ahora estas técnicas para evaluar incertidumbres de algunas funciones comunes.

a) Potencias

Consideremos:

$$z = x^n$$

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\delta z = nx^{n-1}\delta x$$

Lo significativo de este resultado se hace un poco más obvio cuando se expresa en términos de la incertidumbre relativa. Así,

$$\frac{\delta z}{z} = n\frac{\delta x}{x}$$

Por lo tanto, cuando se evalúan potencias, la *incertidumbre relativa* del resultado es la incertidumbre relativa de la cantidad original multiplicada por la potencia respectiva. Esto será válido tanto para potencias como para raíces, de modo que la precisión disminuye si una cantidad se eleva a potencias y mejora al sacar raíces. Esta situación debe vigilarse con cuidado en un experimento que implique potencias. Cuanto más alta es la potencia, mayor será la necesidad de una alta precisión inicial.

b) Funciones trigonométricas

Sólo trabajaremos un ejemplo, ya que los demás se pueden tratar de manera semejante. Consideremos

$$z = \operatorname{sen} x$$

Aquí se cumple

$$\frac{dz}{dx} = \cos x$$

y

$$\boxed{\delta z = (\cos x)\,\delta x}$$

Este es un caso en el que el método elemental de insertar $x_0 \pm \delta x$ muestra más claramente el resultado. Utilizando la aproximación

$$\cos \delta x = 1$$

obtenemos

aún dice.

$$\boxed{\delta z = \cos x \operatorname{sen} \delta x}$$

lo que muestra que la δx en el resultado anterior es en realidad sen δx en el límite, para ángulos pequeños. Sólo en el caso de una incertidumbre muy grande podrá ser significativa esta diferencia, pero es mejor entender la naturaleza del resultado. Es claro que δx deberá expresarse en radianes. Este resultado normalmente tendrá una aplicación directa cuando se trate de aparatos como los espectrómetros.

c) Funciones logarítmicas y exponenciales

Consideremos:

$$z = \log x$$

Aquí,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

y

$$\delta z = \frac{1}{x}\delta x$$

La incertidumbre relativa se puede calcular como de costumbre. Si

$$z = e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = e^x$$

y entonces:

$$\delta z = e^x \delta x$$

Este es un caso importante, ya que las funciones exponenciales ocurren frecuentemente en la ciencia y la ingeniería. Estas funciones pueden hacerse muy sensibles al exponente cuando toma valores mucho mayores que la unidad, y la incertidumbre δz puede volverse muy grande. Esto le parecerá familiar, por ejemplo, a cualquiera que haya observado las fluctuaciones de corriente en un diodo termoiónico que resultan de variaciones muy pequeñas en la temperatura del filamento.

Como se dijo antes, este método puede aplicarse fácilmente a cualquier función no enumerada arriba evaluando la derivada respectiva y usando la ecuación 2-1.

2–8 INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Si el resultado se debe calcular a partir de dos o más valores medidos, x, y, etc., la incertidumbre de ese resultado puede verse de dos maneras diferentes, como se mencionó en la sección 2-5. Podemos ser tan pesimistas como sea posible y suponer que las desviaciones reales de x y y ocurren combinándose de manera tal que desvíen el valor de z tan lejos como sea posible de su valor central. De esta manera, calcularíamos un valor de δz que da la anchura extrema del intervalo de posibles valores de z. Por otra parte, podemos argumentar que es más probable que se combinen las incertidumbres de las medidas básicas de una manera menos extrema, donde algunas harán contribuciones positivas a δz y otras contribuciones negativas, de modo que el valor resultante de δz será menor que el que da la suposición pesimista. Este argumento es válido, y más adelante nos ocuparemos del problema de la incertidumbre probable de cantidades calculadas. Sin embargo, por el momento vamos a calcular el valor de δz que representa el más amplio margen de posibilidad para z. Este enfoque, si bien es pesimista, ciertamente es seguro, ya que, si δx, δy, etc., representan límites dentro de los cuales estamos "casi seguros" que se encuentran los valores actuales, entonces el valor calculado de δz dará los límites dentro de los cuales también estamos seguros que se encuentra el valor actual de z.

El enfoque inicial más instructivo usa el método elemental de sustitución, y ése es el que usaremos para las primeras dos funciones.

a) Suma de dos o más variables

Consideremos:

$$z = x + y$$

La incertidumbre en z se obtiene a partir de:

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y)$$

y el valor máximo de δz se obtiene escogiendo signos semejantes todo el tiempo. Así pues:

$$\delta z = \delta x + \delta y$$

Como era de esperarse, la incertidumbre en la suma es solamente la suma de las incertidumbres individuales. Podemos expresarla en términos de la incertidumbre relativa:

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y}$$

pero no se logra una mayor claridad.

b) Diferencia de dos variables

Consideremos:

$$z = x - y$$

Como en el caso anterior, se obtendrá δz a partir de:

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y)$$

Pero aquí podemos obtener el valor máximo de δz escogiendo el signo *negativo* para δy, lo que da, una vez más:

$$\delta z = \delta x + \delta y$$

Podemos ver en esta ecuación que, cuando x_0 y y_0 son muy cercanas y $x - y$ es pequeña, la incertidumbre relativa puede adquirir valores muy grandes. Esto es, en el mejor caso, una situación insatisfactoria, y la precisión puede ser tan baja que anule el valor de la medición. Esa condición es en particular peligrosa, ya que puede pasar inadvertida. Es perfectamente obvio que, si fuera posible evitarlo, nadie intentaría medir la longitud de mi cuaderno midiendo la distancia de cada borde a un punto alejado un kilómetro para luego restar las dos longitudes. Sin embargo, puede suceder que el resultado deseado se obtenga por sustracción de dos medidas hechas por separado (en dos termómetros, dos relojes, etc.), y el carácter de la medición como diferencia puede no ser claro. En consecuencia, todas las mediciones que tengan que ver con diferencias deberán de tratarse con el mayor cuidado. Es claro que la forma de evitar esa dificultad es medir la diferencia de manera directa, en vez de obtenerla por sustracción de dos cantidades medidas. Por ejemplo: si uno tiene un aparato en el que dos puntos están a potenciales respecto a tierra de $V_1 = 1500$ V y $V_2 =$

1510 V, respectivamente, y la cantidad que se requiere es $V_2 - V_1$, sólo un voltímetro de muy alta calidad permitiría medir los valores de V_2 y V_1 con la exactitud requerida para lograr incluso un 10% de precisión en $V_2 - V_1$. Por otro lado, un voltímetro de banco ordinario de 10 V, conectado entre los dos puntos para medir $V_2 - V_1$ directamente, daría de inmediato el resultado deseado, con un 2 o 3% de precisión.

2–9 METODO GENERAL PARA LA INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Los últimos dos ejemplos, tratados por el método elemental, sugieren que, una vez más, el cálculo diferencial puede ofrecer una simplificación considerable a este tratamiento. Es claro que, si tenemos:

$$z = f(x, y)$$

la cantidad apropiada para calcular δz es la diferencial total dz, que está dada por:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{2–2}$$

Tomaremos esta diferencial y la trataremos como una diferencia finita δz que se puede calcular a partir de las incertidumbres δx y δy. Esto es:

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$$

y las derivadas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ normalmente se calcularán con los valores x_0 y y_0, para los que se necesita δz. Podemos encontrar que, dependiendo de la función f, el signo de $\partial f/\partial x$ o $\partial f/\partial y$ resulte ser negativo. En ese caso, utilizando nuestro requisito pesimista para el valor máximo de δz, escogeremos los valores negativos apropiados para δx o δy, obteniendo de ahí una contribución total positiva a la suma.

a) Producto de dos o más variables

Supongamos que:

$$z = xy$$

Para usar la ecuación 2-2 necesitamos los valores de $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ Estos son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

Por lo que el valor de δz está dado por:

$$\delta z = y\,\delta x + x\,\delta y$$

La significación de este resultado se ve con más claridad cuando se convierte a la incertidumbre relativa:

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

Así pues, cuando la cantidad deseada es el producto de dos variables, la incertidumbre relativa es la suma de las incertidumbres relativas de las componentes.

El caso más general de una función compuesta, que se encuentra muy comúnmente en la física, implica un producto algebraico que tiene componentes elevadas a diferentes potencias.

Sea

$$z = x^a y^b$$

en donde a y b pueden ser positivas o negativas, enteras o fraccionarias. En ese caso la formulación se simplifica de manera significativa tomando los logaritmos de ambos lados antes de diferenciar. Así:

$$\log z = a \log x + b \log y$$

de donde, diferenciando implícitamente, se obtiene:

$$\frac{dz}{z} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y}$$

Como de costumbre, tomamos las diferenciales como diferencias finitas, y obtenemos:

$$\frac{\delta z}{z} = a\frac{\delta x}{x} + b\frac{\delta y}{y}$$

Nótese que este proceso da la incertidumbre relativa de manera directa, y eso con frecuencia es conveniente. Si se requiere la incertidumbre absoluta δz, se puede evaluar simplemente multiplicando la incertidumbre relativa por el valor calculado z_0, que normalmente está disponible. Esta forma de diferenciación implícita sigue siendo el procedimiento más sencillo, aun cuando la misma z esté elevada a alguna potencia. Porque, si la ecuación es:

$$z^2 = xy$$

es innecesario reescribirla como:

$$z = x^{1/2} y^{1/2}$$

y partir de ahí, porque, si sacamos logaritmos:

$$2 \log z = \log x + \log y$$

de donde:

$$2\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

lo que da $\delta z/z$, como se requería.

b) Cocientes

Estos se pueden tratar como productos, en los cuales algunas de las potencias son negativas. Como antes, el valor máximo de δz se obtendrá despreciando los signos negativos de la diferencial y combinando todos los términos en forma aditiva.

Si se encuentra una función distinta a las ya enumeradas, funciona por lo general alguna forma de diferenciación. Con frecuencia es conveniente diferenciar una ecuación en forma implícita, evitando así el requisito de calcular explícitamente la cantidad desconocida en función de las otras variables. Por ejemplo, consideremos la ecuación para lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

en donde la distancia focal f es función de las cantidades medidas la distancia al objeto o y la distancia a la imagen i. Podemos diferenciar la ecuación implícitamente, y obtenemos:

$$-\frac{df}{f^2} = -\frac{do}{o^2} - \frac{di}{i^2}$$

Es posible ahora calcular de manera directa df/f, y con más facilidad que si se escribe f explícitamente como función de o e i y se diferencia. De esta forma podemos preparar una fórmula para la incertidumbre en la que se pueden insertar directamente todas las incógnitas. Asegúrese de que se usen los signos adecuados para que todas las contribuciones a la incertidumbre se sumen para dar los límites extremos de posibilidad del resultado.

Cuando la función sea tan grande y complicada que no se pueda obtener un valor general de δz, siempre podemos tomar los valores medidos x_0, y_0, etc., y encontrar z_0. Podemos entonces trabajar con dos resultados diferentes, uno utilizando los valores numéricos propios de $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$ (o $y_0 - \delta y$, si es el adecuado), etc., para obtener uno de los valores extremos de z, y el otro utilizando $x_0 - \delta x$, etc. Esos dos valores corresponderán a los límites de z, y así sabremos el valor de δz.

2–10 COMPENSACION DE ERRORES

Puede darse una situación especial cuando se trata con variables compuestas. Consideremos, por ejemplo, la relación bien conocida para el ángulo de mínima desviación D_m de un prisma con índice de refracción n y ángulo al vértice A:

$$n = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + D_m)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}$$

Si A y D_m son variables medidas con incertidumbres δA y δD_m, la cantidad n es el resultado requerido, con una incertidumbre δn. No obstante, sería falaz calcular la incertidumbre en $A + D_m$, luego en sen $\frac{1}{2}(A + D_m)$, y combinarla con la incertidumbre en sen $\frac{1}{2}A$, tratando la función como un cociente de dos variables. Eso se puede ver considerando el efecto en n de un incremento en A. *Tanto* sen $\frac{1}{2}(A + D_m)$ *como* sen $\frac{1}{2}A$ aumentan, y el cambio en n no es en consecuencia tan grande. La falacia consiste en aplicar los métodos de las secciones precedentes a variables que no son independientes (como son $A + D_m$ y A). El remedio sería reducir la ecuación a una forma en la que todas las variables sean independientes, o bien regresar a los principios básicos y usar directamente la ecuación 2-2. Los casos que tienen que ver con errores que se compensan deben de vigilarse con cuidado, ya que pueden, si se tratan en forma incorrecta, dar lugar a errores en los cálculos de incertidumbre que son difíciles de detectar.

2–11 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Como los cálculos tienen tendencia a producir resultados que consisten en largas filas de números, debemos de tener cuidado de citar el resultado final con sensatez. Si, por ejemplo, se nos da el voltaje a través de un resistor como 15.4 ± 0.1 V, y la corriente como 1.7 ± 0.1 A, podemos calcular el valor de la resistencia. La razón V/I que sale en mi calculadora es 9.0588235 ohms. ¿Es ésta la respuesta correcta?, claro que no. Un breve cálculo demuestra que la incertidumbre absoluta en la resistencia es cercana a 0.59 ohms. Así que, si las primeras dos cifras decimales del valor calculado son inciertas, es claro que el resto carece de sentido. Una afirmación como la de que $R = 9.0588235 \pm 0.59$ ohms es, por lo tanto, absurda. Debemos de dar nuestros resultados de manera tal que la respuesta y su incertidumbre sean consistentes, p. ej.: $R = 9.06 \pm 0.59$ ohms.

Pero, ¿esta afirmación es realmente válida? Recuerde que las incertidumbres citadas originalmente para V e I tenían el valor de $\pm$ 0.1, que contiene una cifra significativa. Si no conocemos esas incertidumbres con mayor precisión, no tenemos derecho a atribuirle dos cifras significativas a la incertidumbre en R. Nuestro enunciado final, válido y consistente en sí mismo es, por lo tanto, R = 9.1 $\pm$ 0.6 ohms. Sólo si tuviéramos verdaderas razones para creer que nuestra incertidumbre original era exacta hasta la segunda cifra significativa, podríamos pretender hasta dos cifras significativas en la incertidumbre final y un valor calculado que corresponda con más precisión a R. En términos generales, debemos estar seguros de que los valores dados a la incertidumbre sean consistentes con la precisión de las incertidumbres básicas, y que el número de cifras que se dan en el resultado final sea consistente con su incertidumbre. Debemos de evitar las afirmaciones del tipo $z = 1.234567 \pm 0.1$ o $z = 1.2 \pm 0.000001$.

PROBLEMAS

1. Al usar un metro de madera para medir la longitud de mi escritorio. Estoy seguro de que es no menos de 142.3 cm y no más de 142.6. Enuncie esta medición como un valor central $\pm$ incertidumbre. ¿Cuál es la incertidumbre relativa de la medición?

   142.45 ± 0.15 cm   0.11 %

2. Al leer un voltímetro y un amperímetro de aguja y escala, y evalúo visualmente el margen de incertidumbre. Estoy seguro de que la lectura del amperímetro está entre 1.24 y 1.25 A, y la del voltímetro entre 3.2 y 3.4 V. Exprese cada medida como un valor central $\pm$ incertidumbre, y evalúe la incertidumbre relativa de cada medición.

   1.245 ± 0.005 A   3.3 ± 0.1 V   .04 %   3.0 %

3. Un reloj digital da una lectura de la hora de 09:46. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la medida?

   0.5 min

4. Si se puede leer un metro de madera con una incertidumbre absoluta de $\pm$ 1 mm, ¿cuál es la distancia más corta que puedo medir para que la incertidumbre relativa no exceda el a) 1%, b) 5%?

   a) 10 cm   b) 2 cm

5. Al usar un termómetro graduado en $\frac{1}{5}$ grado Celsius para medir la temperatura del aire exterior. Medida con una aproximación de $\frac{1}{5}$ de grado, la temperatura de ayer fue de 22.4°, y la de hoy es de 24.8° Celsius. ¿Cuál es la incertidumbre relativa en la diferencia de temperaturas entre ayer y hoy?

   17 %

6. El reloj del laboratorio tiene un segundero que se mueve por pasos de un segundo. Lo uso para medir un cierto intervalo de tiempo. Al principio del intervalo marcaba las 09:15:22 (horas:minutos:segundos), y al final las 09:18:16. ¿Cuál es la incertidumbre relativa del intervalo medido?

   0.6 %

propagación

7. En el escritorio mencionado en el problema 1, se mide el ancho, y se está seguro de que la medida cae entre 78.2 y 78.4 cm. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta en el área calculada de la cubierta del escritorio?   26 cm²

8. Al medir la resistencia de un resistor, la lectura del voltímetro era de 15.2 $\pm$ 0.2 V, y la lectura del amperímetro era de 2.6 $\pm$ 0.1 A. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la resistencia calculada usando la ecuación $R = V/I$?

   0.30 Ω

9. Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de la gravedad, usando $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. El periodo T medido fue de 1.24 $\pm$ 0.02 seg y la longitud de 0.381 $\pm$ 0.002 m. ¿Cuál es el valor resultante de g con su incertidumbre absoluta y relativa?

   9.77 ± 0.04 m·seg⁻²   0.4 %

10. Un experimento para medir la densidad d de un objeto cilíndrico utiliza la ecuación $d = m/\pi r^2 l$, en donde:

m	=	masa	=	0.029 $\pm$ 0.005 kg
r	=	radio	=	8.2 $\pm$ 0.1 mm
l	=	longitud	=	15.4 $\pm$ 0.1 mm

?

¿Cuál es la incertidumbre absoluta del valor calculado de la densidad?

   1800 kg/m3

11. La distancia focal, f, de un lente delgado se va a medir usando la ecuación $1/o + 1/i = 1/f$, en donde:

o	=	distancia al objeto	=	0.154 $\pm$ 0.002 m
i	=	distancia a la imagen	=	0.382 $\pm$ 0.002 m

¿Cuál es el valor calculado de la distancia focal, su incertidumbre absoluta y su incertidumbre relativa?

   0.110 m   0.0012 m   1.08 %

12. Una rejilla de difracción se usa para medir la longitud de onda de la luz, usando la ecuación $d \operatorname{sen} \theta = \lambda$. El valor medido de θ es de 13° 34′ $\pm$ 2′. Suponiendo que el valor de d es de 1420×10^{-9} m y que se puede ignorar su incertidumbre, ¿cuál es la incertidumbre absoluta y la relativa en el valor de λ?

   0.8 nm   0.24 %

13. Se da un valor como 14.253 $\pm$ 0.1. Reescríbalo con el número adecuado de cifras significativas. Si el valor se diera como 14.253 $\pm$ 0.15, ¿cómo debería de escribirse?

   14,3 ± 0,1   14,25 ± 0.15.

14. Se da un valor como 6.74914 $\pm$ 0.5%. Enúncielo como un valor $\pm$ incertidumbre absoluta, ambos con el número adecuado de cifras significativas.

   6.75 ± 0.03