1. Demuestre que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in N$:

a) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

c) $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!=(n+1)!-1$

d) $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2^i}=1-\dfrac{1}{2^n}$

e) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$

f) $\sum_{i=1}^{n} i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

g) $\sum_{i=1}^{n} 3^i=\dfrac{3(3^n-1)}{2}$

h) $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

i) $\sum_{i=0}^{n}[i^2-(i-1)^2]=n^2-1$

j) $\prod_{k=1}^{n}k^2=(n!)^2$

k) $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=10-\dfrac{5}{2^n}$

l) $\sum_{i=1}^{n} i\,2^{i-1}=1+(n-1)2^n$

2. Demuestre que $\forall n \in N$:

a) 5^n-1 es múltiplo de 4

b) 7^n-2^n es múltiplo de 5

c) n^2+n es múltiplo de 2

d) $3^{2n+2}-2^{n+1}$ es múltiplo de 7

e) $10^{n+1}+10^n+1$ es múltiplo de 3

f) $(1+a)^n \geq 1+na$ con $a \in R \wedge a \geq 0$

g) $4^n-1 \geq 3n$

h) $n^2+1>n$

3. Demuestre que si $n \in N$ y:

a) $n \geq 4$ entonces $n+12 \leq n^2$

b) $n>3$ entonces $2^n<n!$

c) $n \geq 2$ entonces $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$

4. Demuestre por inducción la fórmula del binomio de Newton para $n \in N$, $a, b \in R$:

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 1, ítem k) Demuestre que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in N$

$$\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$$

Sea el predicado p(n) : $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$. Para demostrar que esta igualdad es válida para todo $n \in N$, por el principio de inducción tenemos que ver que:

- p(1) es verdadera
- Si p(n) es verdadera, entonces p(n+1) también lo es

- p(1) : $\sum_{i=0}^{1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{1}}$ Veamos que esta igualdad es verdadera.

Trabajando con el lado izquierdo de la igualdad:

$$\sum_{i=0}^{1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

Trabajando con el lado derecho

$$10 - \frac{5}{2^{1}} = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

Al verificarse la igualdad entre ambos miembros, concluimos que p(1) es verdadera.

- Sabemos que p(n) es verdadera, es decir, que $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$. Esta es la hipótesis inductiva.

  Conociendo este dato, queremos probar que p(n+1) es verdadera, es decir, que $\sum_{i=0}^{n+1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n+1}}$.

  Para demostrarlo, partiremos del lado izquierdo de esta última igualdad y, usando la hipótesis inductiva, llegaremos al lado derecho de la misma:

$\sum_{i=0}^{n+1} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ separamos la suma: los primeros n términos y luego el término $n+1$

$= 10 - \frac{5}{2^{n}} + 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ usamos la hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$

$= 10 - \frac{5}{2^{n}} + 5.\frac{1}{2^{n+1}}$ por propiedad distributiva de la potencia: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$

$= 10 + \frac{-10+5}{2^{n+1}}$ sumamos $\frac{5}{2^{n+1}} - \frac{5}{2^{n}}$

$= 10 - \frac{5}{2^{n+1}}$ que es a lo que queríamos llegar.

Hemos demostrado, por el principio de inducción, que para todo $n \in N$ se verifica la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n} 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 10 - \frac{5}{2^{n}}$$

Ejercicio 2, ítem b) Demuestre que para todo $n \in N$ $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5

Sea p(n): $7^n - 2^n = 5k$, con $k \in Z$. Usaremos el principio de inducción Aclaramos igualmente que la que se muestra a continuación es una posible resolución, no la única.

- En primer lugar, tenemos que ver que p(1) es verdadera:

p(1): $7^1 - 2^1 = 5k$, con $k \in Z$ lo cual es verdadero (basta tomar k = 1)

- Sabiendo que p(n) es verdadera, queremos ver que p(n+1) también lo es. Es decir, queremos ver que $7^{n+1} - 2^{n+1} = 5k$, con $k \in Z$ Partimos del lado izquierdo de esta última igualdad:

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7^n.7 - 2^n.2 && \text{por propiedades de la potencia}\\
&= 7^n.(5+2) - 2^n.2 && \text{como queremos probar que la expresión es mútiplo de 5, escribimos } 7 = 5+2\\
&= 7^n.5 + 2.7^n - 2^n.2 && \text{aplicamos la propiedad distributiva}\\
&= 5.7^n + 2.(7^n - 2^n) && \text{sacamos el 2 de factor común}\\
&= 5.7^n + 2.5k, \text{ con } k \in Z && \text{usamos la hipótesis inductiva}\\
&= 5.\left(7^n + 2k\right) \text{ con } k \in Z
\end{aligned}$$

Dado que $5.\left(7^n + 2k\right)$ con $k \in Z$ es múltiplo de 5, probamos que $7^{n+1} - 2^{n+1}$ es múltiplo de 5, que es lo que queríamos ver.
Luego, por el principio de inducción. para todo $n \in N$ se verifica que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5

Ejercicio 3, ítem a) Demuestre que si $n \in N$ y $n \geq 4$ entonces $n + 12 \leq n^2$

Sea p(n): $n + 12 \leq n^2$, $n \geq 4$.
Notemos que el predicado está definido para valores de n mayores o iguales a 4. La única modificación que tendríamos que hacer en el principio es probar que p(4) es verdadera (en lugar de ver que p(1) lo es).
Entonces:

- p(4) es verdadera

p(4): $4 + 12 \leq 4^2$. Nos quedaría $16 \leq 16$, lo cual es verdadero.

- Sabiendo que p(n) es verdadera, queremos ver que p(n+1) es verdadera. Es decir, que $n + 1 + 12 \leq (n+1)^2$. Partimos del lado izquierdo de la desigualdad:

$$n + 1 + 12 = (n + 12) + 1 \leq n^2 + 1 \leq n^2 + 1 + 2n = (n + 1)^2$$

Por hipótesis inductiva, $n + 12 \leq n^2$

Dado que n es positivo, 2n también lo es. Por lo que $n^2 + 1 \leq n^2 + 1 + 2n$

Por la propiedad de transitividad de la desigualdad, llegamos a que $n + 1 + 12 \leq (n + 1)^2$
Luego, por el principio de inducción, probamos que si $n \geq 4$ entonces $n+12 \leq n^2$.

Ejercicio 4: Demuestre por inducción la fórmula del binomio de Newton para $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in R$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Sea p(n): $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

- Vemos que p(1) es verdadera

p(1): $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$

$(a + b)^1 = a + b$

$$\sum_{k=0} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$$

Al cumplirse la igualdad entre ambos miembros, se cumple que p(1) es verdadera.

- Supongamos que p(n) es verdadera, es decir que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Veamos que p(n+1) es verdadera: queremos ver que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b) \qquad \text{por hipótesis inductiva}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \qquad \text{por propiedad distributiva}$$

$$= \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \qquad \text{separamos el término } k=0$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$$

$$= \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j \qquad \text{en la segunda sumatoria,}$$

llamamos $j = k+1$.

$$= \binom{n+1}{0} \cdot a^{n+1} \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j + \binom{n}{(n+1)-1} \cdot a^{n-(n+1-1)} \cdot b^{n+1}$$

Dado que $\left[\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1\right]$

$$= \binom{n+1}{0} . a^{n+1} . b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j + \binom{n+1}{n+1} . a^0 . b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} . a^{n+1} . b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} . a^0 . b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} . a^{n+1} . b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] . a^{n+1-k} . b^k + \binom{n+1}{n+1} . a^0 . b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} . a^{n+1} . b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} . a^{n+1-k} . b^k + \binom{n+1}{n+1} . a^0 . b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} . a^{n+1-k} . b^k$$

Probamos entonces que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

Por el principio de inducción, hemos demostrado que para $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in R$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$