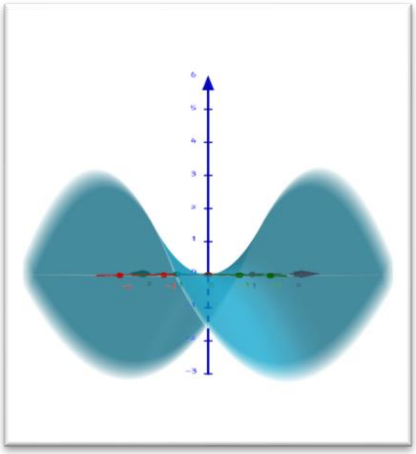
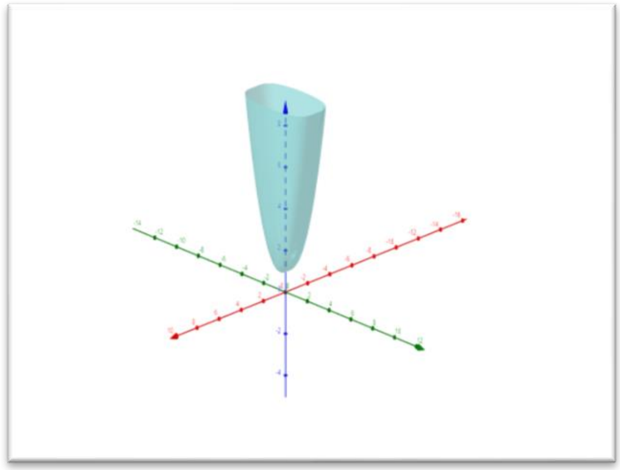
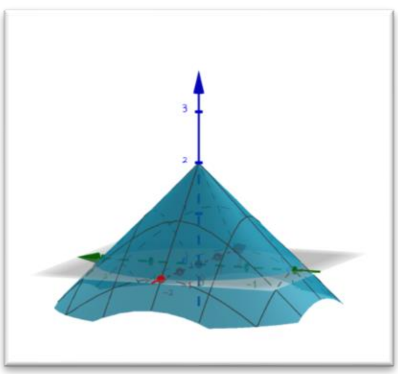
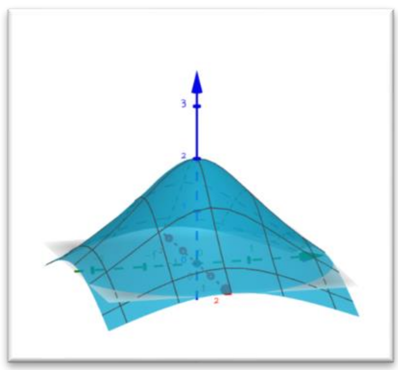
Extremos libres y condicionados

1. Se presentan a continuación los gráficos de algunos campos escalares $z = F(x, y)$. En cada uno de ellos, identificar los puntos críticos y representar gráficamente el plano tangente (si existe) a la superficie en los correspondientes puntos del conjunto gráfico.









2. Una fábrica produce dos tipos de productos: A y B. Los ingresos por la venta de x unidades del producto A e y unidades del producto B están dados por la expresión $I(x, y) = 42x + 102y - 2xy - 5x^2 - 8y^2$. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben vender para maximizar el ingreso? (*)

3. La temperatura en cada punto $(x\,, y)$ de una placa metálica es $\mathrm{T(x;y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2}$. Hallar los puntos en los que la temperatura es mínima. ¿Cuál es el valor de la temperatura en cada caso?

4. Dados los campos escalares *F*: A ⊆ R^2 → R, hallar, si es que existen, extremos locales.

a. $F(x;y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

b. $F(x;y) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + (y-2)^2$

c. $F(x;y) = x^2\,y - 2x^2 - \frac{4}{3}y^3$

d. $F(x;y) = 2e^{xy} + xy + 1$

5. Determinar a $\in$ R para que $(1;0;F(1;0))$ sea un punto de ensilladura para $F(x;y) = \mathrm{ax}^2\mathrm{y} - 3\mathrm{xy} + 2\mathrm{y} - \mathrm{y}^2$. Para el valor de a determinado, ¿presenta *F* extremos relativos? Justificar.

6. Si $P(x;y) = 5 - 4(x-2)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^2$ es el polinomio de Taylor de orden dos del campo escalar F, decidir si $F(2;-1)$ es un mínimo relativo de F.

7. Hallar la ecuación de la recta normal al gráfico de $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en todos los puntos de ensilladura, si existen.

8. Hallar los máximos y/o mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones indicadas.

a. $F(x;y) = 3x^2 + 4y^2 - xy$ si $2x + y = 21$
b. $F(x;y) = x + y$ con $x^2 + y^2 = 1$

9. Hallar la distancia mínima desde el origen de coordenadas al cono de ecuación $z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

10. Hallar el producto máximo de tres números positivos sabiendo que la suma de los cuadrados de dos de ellos es uno y que la diferencia entre uno de esos dos y el tercero debe ser cero.

11. Se quiere construir una caja rectangular de 180cm^3 de volumen empleando tres tipos de materiales diferentes. El costo del material para el fondo y la tapa es de 70$ por cm^2. El costo del material para los laterales es de 50$ por cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones que tiene que tener a caja para que el costo sea mínimo? ¿Cuál es dicho costo?

12. En cada caso, hallar los extremos absolutos de

a. $F(x,y) = 2xy$ sobre $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$. (*)
b. $F(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ sobre $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.
c. $F(x,y) = y(-x^2 + 2y^2 + 1)$ sobre la frontera de $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

<u>Algunos ejercicios resueltos</u>

<u>Ejercicio 2</u>

Una fábrica produce dos tipos de productos: A y B. Los ingresos por la venta de x unidades del producto A e y unidades del producto B están dados por la expresión $I(x,y) = 42x + 102y - 2xy - 5x^2 - 8y^2$. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben vender para maximizar el ingreso?

Las derivadas parciales de la función ingreso son:

$$I'_x(x,y) = 42 - 2y - 10x.$$
$$I'_y(x,y) = 102 - 2x - 16y$$

Al igualar a cero las derivadas parciales, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 10x + 2y = 42 \\ 2x + 16y = 102 \end{cases}$$

Este sistema tiene como única solución $(x,y) = (3,6)$

Verifiquemos que se trata de un máximo- La matriz hessiana está dada por:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Notemos que $det(H) > 0$, $I'_{xx}(3,6) > 0$ por lo que se trata de un máximo. En consecuencia, para maximizar el ingreso deben venderse 3 unidades del producto A y 6 del producto B.

<u>Ejercicio 12 ítem a)</u> Hallar los extremos absolutos de $F(x,y) = 2xy$ sobre $D = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Busquemos, en primer lugar, los puntos críticos del campo escalar F en el interior de la región D, es decir, aquellos puntos (x,y) que verifican la inecuación $x^2 + y^2 < 9$. El único punto crítico de F que cumple esta última desigualdad es (0, 0), La matriz hessiana nos queda

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $det(H) = -4 < 0$, el punto $(0, 0, F(0,0))$ es un punto de ensilladura.

En segundo lugar, vamos a buscar los extremos de F sobre la frontera de la región D, $\{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 = 9\}$. Para ello, utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Consideramos $L(x,y,\lambda) = 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$. Calculamos las derivadas parciales,

$$L'_x\,(x,y,\lambda) = 2y + 2x\lambda$$
$$L'_y\,(x,y,\lambda) = 2x + 2y\lambda$$
$$L'_x\,(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 9$$

Igualando a cero las derivadas parciales, nos queda para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2y + 2x\lambda = 0 \\ 2x + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $y = -x\lambda$.

Reemplazando en la segunda ecuación, nos queda que $x - \lambda x \lambda$ =0. Luego, $x(1 - \lambda^2) = 0$. El caso $x = 0, y = 0$ lo estudiamos anteriormente. Nos queda entonces que $1 - \lambda^2 = 0$, por lo que $\lambda = 1 \; o \; \lambda = -1$. En el primer caso, $y = -x$. Mientras que si $\lambda = -1$, nos queda $y = x$. Reemplacemos estas condiciones en la tercera ecuación (consideramos el caso y =x. El caso y =-x es análogo por estar elevadas al cuadrado las incógnitas en la tercera ecuación)

$$x^2 + x^2 = 9$$
$$2x^2 = 9$$
$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Los extremos de F en la frontera de D son $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) y \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. Evaluamos la función F en cada uno de estos puntos:

- $F\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = F\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 2.\frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{3}{\sqrt{2}} = 9$
- $F\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = F\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -9$

Luego, en $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ se alcanza el máximo absoluto que es 9 y en $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ se alcanza el mínimo absoluto que es -9.