Nota: Los ejercicios indicados con (*) se encuentran resueltos al final de la guía.

1. La posición de un móvil a los t segundos de su partida está dada por la expresión $s(t) = 3t^2$. Una estrategia para calcular la velocidad del móvil a los 5 segundos de partir consiste en calcular la velocidad media del móvil en diferentes intervalos de tiempo.
Teniendo en cuenta que la velocidad media se calcula como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido en recorrer dicha distancia, completar la siguiente tabla. ¿Cuál es la velocidad del móvil en t = 5?

Intervalo de tiempo	Distancia recorrida	Velocidad media
[4,9 ; 5]		
[4,99; 5]		
[5; 5,1]		
[5; 5,01]		
[5; 5,001]		

2.
i) Calcular, aplicando la definición de derivada de una función en un punto:
$f'(2)$ siendo $f(x) = x^3 + 2x$

ii) Hallar f´(x) aplicando la definición de función derivada si:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (*)

b) $f(x) = 5$

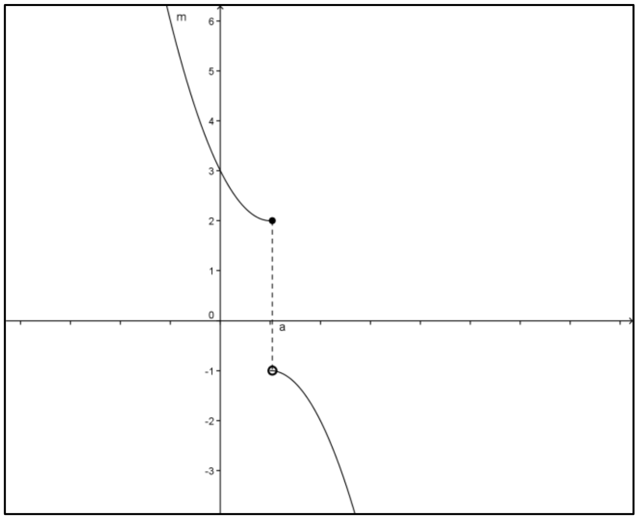
3. Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal al gráfico de la función f en el punto de abscisa x_0 dado. Representar gráficamente la función y las correspondientes rectas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ $x_0 = 1$

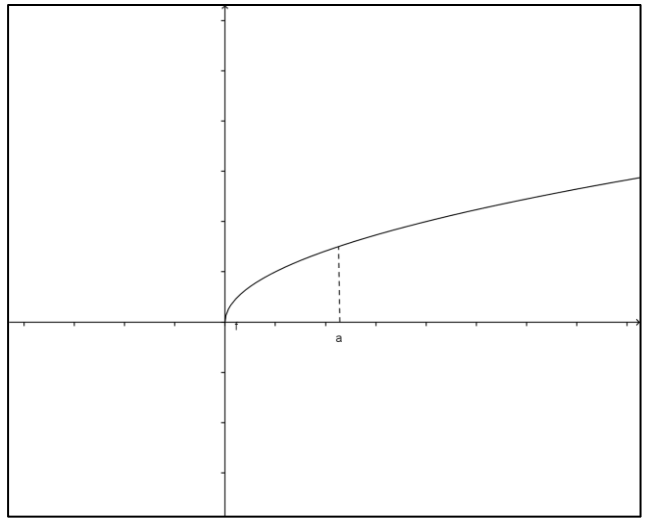
b) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ $x_0 = 3$ (*)

4. ¿Cuáles de las siguientes gráficas consideras que no admiten recta tangente en el punto correspondiente a x = a? ¿Por qué?

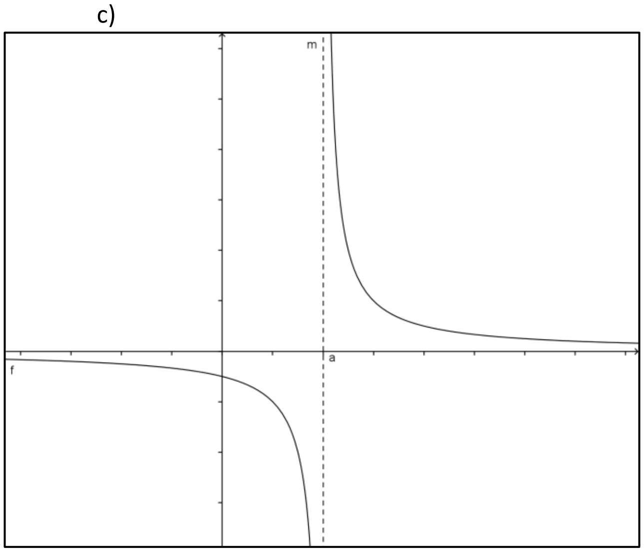
a)



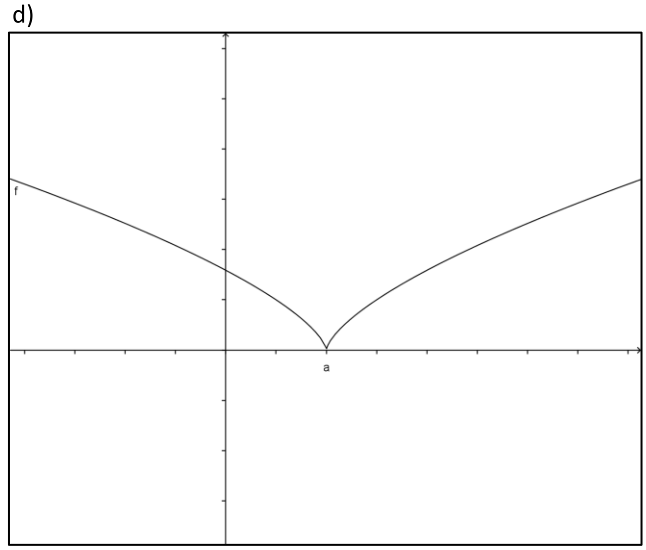
b)



c)



d)



5. Estudiar en forma analítica la continuidad y la derivabilidad de cada una de las siguientes funciones. Graficar.

a) $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ (2-x)^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

6. Usando las reglas de derivación, hallar las funciones derivadas de:

a) $f(x)=x^3+6x+1$ b) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+\ln 3$

c) $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x^{3/2}}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x}+3x^5\cos x$

e) $f(x)=\dfrac{2-\operatorname{sen}x}{2-\cos x}$ f) $f(x)=mx+b$

g) $f(x)=\operatorname{tg}x\ \ln x+\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ h) $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{\sqrt{2}}$

i) $f(x)=\cos x+\dfrac{\operatorname{sen}x}{2^x}$ j) $f(x)=(2+\sqrt{x})x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

k) $f(h)=\dfrac{ah}{h^5+6h^3+2}$ l) $f(x)=(\sqrt{x}+x)(x^2+3x-2)$

7. Hallar el punto de la gráfica de $f(x)=x^3-9x-9$ en el que la recta tangente es $y-3x=7$. (*)

8. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba. Su posición en cada instante de tiempo está dada por la expresión $x(t)=v_0\,t-\dfrac{1}{2}g\,t^2$, siendo $v_0>0$ el valor de la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad ¿En qué instante de tiempo la velocidad del proyectil fue nula?

9. Dadas las siguientes funciones, hallar los dominios de f y de g, para que sea posible efectuar las composiciones $f\circ g, g\circ f$. Luego, hallar dichas funciones compuestas.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$ $g(x)=3x+1$

b) $f(x)=e^x$ $g(x)=4x-3$

c) $f(x)=\log x$ $g(x)=2x-3$

d) $f(x)=\sqrt{-x}$ $g(x)=x-5$

10. Hallar $f'(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)=(3x+x^4)^3$ b) $f(t)=\operatorname{sen}(2t)+\operatorname{sen}2\,.\,t$

c) $f(x)=\ln\sqrt{4-x^2}$ d) $f(x)=\ln^2 x+\ln(x^2)$

e) $f(x)=\ln(\operatorname{sen}x^3)+\cos\sqrt[3]{\ln(2x)}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x^2\operatorname{sen}(3x)}+2^{\pi}$

11. Un móvil posee la siguiente ecuación de movimiento $x(t)=\dfrac{v_0\,m}{3}(1-e^{-\frac{3t}{m}})+x_0$, dónde *m* es la masa, v_0 el valor de la velocidad inicial, x_0 la posición inicial y t el tiempo. Determinar el valor de la velocidad v(t) del móvil en función del tiempo.

12. Cierta población crece de acuerdo a la ecuación $y = 1 + 0{,}2\, e^{0{,}1\, t}$ siendo t el tiempo medido en meses e y es el número de individuos en miles. Calcular la tasa de crecimiento de la población después de un año.(*)

13. Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{\ln x}$ b) $f(x) = (\ln x)^x$

14. Hallar los puntos para los cuales la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{1}{4} x^2\, e^{-3x}$ es paralela al eje x. (*)

15. Hallar las funciones derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 3x$

b) $f(x) = e^{-2x^3+1}$

c) $f(x) = x \ln x$

Algunos ejercicios resueltos:

Ejercicio 2

ii) Hallar $f'(x)$ aplicando la definición de función derivada si:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$f'(x) = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}$$

Ejercicio 3, ítem B) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal al gráfico de la función f en el punto de abscisa x_0 dado. Representar gráficamente la función y las correspondientes rectas.

B) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ $x_0 = 3$

Si consideramos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto correspondiente a $x = a$ tiene la fórmula $y = f'(a).(x-a) + f(a)$ será necesario encontrar $f(a)$ y $f'(a)$.

$f(a) = f(3) = \sqrt{3+1} - 2 = 0$

$$f'(a) = f'(3) = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+1} - 2 - 0}{h} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

$$\text{Lím}_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} . \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \text{Lím}_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} =$$

$$\text{Lím}_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

Obtenemos entonces la ecuación de la recta tangente: $y = \frac{1}{4}(x-3) + 0$

Ejercicio 7 Hallar el punto de la gráfica de $f(x) = x^3 - 9x - 9$ en el que la recta tangente es $y – 3x = 7$.

La expresión explícita de la recta dada es $y = 3x + 7$ donde podemos observar que la pendiente es 3 y la ordenada al origen es 7.

Como sabemos la pendiente de la recta tangente en un punto es igual a la derivada de la función en el valor correspondiente a dicho punto.

Entonces $f'(a) = 3,$ lo planteamos $3x^2 - 9 = 3$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \qquad x = -2$$

Para decidir si la respuesta es el punto donde $x = 2$ o aquel donde $x = -2$ o bien ambas vamos a

* considerar la ecuación de la recta que quedaría determinada si $x = 2$

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$y = 3.(x-2) + (-19)$

$y = 3x-25$ esta no es la recta dada.

*considerar la ecuación de la recta que quedaría determinada si $x = -2$

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$y = 3.(x+2) + (1)$

$y = 3x + 7$ esta es la correspondiente

Entonces el punto de la gráfica donde la recta tangente es la dada es el correspondiente a $x = -2$ resultando ser $P = (-2;f(-2))$

$P = (-2;1)$

Ejercicio 12: Cierta población crece de acuerdo a la ecuación y = 1 + 0,2 $e^{0,1\,t}$ dónde t es el tiempo medido en meses e y es el número de individuos en miles. Calcular la velocidad de crecimiento de la población después de un año.

Obtenemos en primer lugar la velocidad de crecimiento de la población:

$$y' = 0 + 0{,}2.e^{0{,}1t}.0{,}1 = 0{,}02e^{0{,}1t}$$

Donde t es el tiempo medido en meses e y' es la velocidad de crecimiento de la población medida en miles de individuos por mes.
Ahora entonces consideramos como t=12 meses (un año) para obtener lo pedido:

$y' = 0{,}02e^{0{,}1.12} = \text{aprox } \ 0{,}066$ esto nos indica que la velocidad después de un año es de 0,066miles de individuos por mes o lo que resulta equivalente 66 individuos por mes aproximadamente.

Ejercicio 14 Hallar los puntos para los cuales la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{1}{4}x^2\, e^{-3x}$ es paralela al eje x.

El eje x es una recta horizontal, para obtener una recta paralela deberá tener pendiente cero.
Como la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiena $x = a$ es la derivada de la función en dicho punto, planteamos lo siguiente
$f'(a) = 0$ resultando

$$\frac{1}{2}xe^{-3x} + \frac{1}{4}x^2e^{-3x}.(-3) = 0$$

$$e^{-3x}x(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x) = 0$$

e^{-3x}nunca es igual cero, $x = 0$ es una posible solución; $x = -2$ es otra solución.

Armamos entonces los puntos de la gráfica que verifican lo pedido $P = (0;f(0)) = (0;0)$

$Q = (-2; f(-2)) = (-2; e^6)$