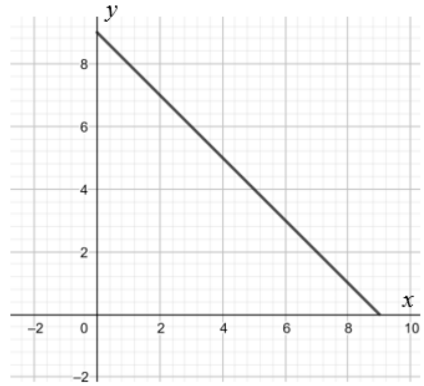
Nota: Los ítems indicados con (*) se encuentran resueltos al final de este trabajo práctico.

1. La función $\bar{f}$: $[0,3] \to R^2/\bar{f}(t) = (t^2, -t^2+9)$ describe la posición de un objeto en cada instante t de tiempo (t en segundos). La trayectoria del móvil se presenta en el siguiente gráfico:



a) ¿Cuál es la posición inicial del objeto? ¿Y su posición final?
b) ¿Cuál es su posición a los dos segundos?
c) Indicar sobre el gráfico el sentido de recorrido del móvil.
d) ¿En qué instante de tiempo se encontraba en la posición (4, 5)? ¿Y en la posición (16, -7)?
e) ¿De qué manera se podría describir el conjunto de puntos (x, y) recorridos por el móvil (ecuación cartesiana de la curva)?

2. Para cada una de las siguientes funciones vectoriales con imágenes en R ^{2} o R ^{3}, se pide obtener, si es posible, la ecuación cartesiana de la curva C = Im$\bar{f}$ (eliminación del parámetro). Considerar las restricciones sobre las variables x e y. Graficar la curva C = Im$\bar{f}$, indicando el sentido del recorrido

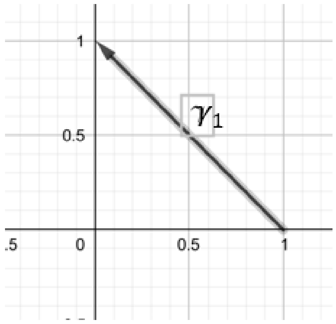
1) $\bar{f}$: [0; π] → R ^{2}; $\bar{f}(t)$ = (2 cos(t); 3 sen(t))
2) $\bar{f}(t)$ = (t^2; t^2); t ∈ Dom$\bar{f}$
3) $\bar{f}(t)$ = (3 cos(t); 3 sen(t)) para i. t ∈ R
ii. t ∈ [-π/2; π/2]
4) $\bar{f}(t) = (e^t, -e^{2t}+1)$; t ∈ Dom$\bar{f}$ (*)
5) $\bar{f}(t) = (\sqrt{t} - 1; t+2)$; t ∈ Dom$\bar{f}$
6) $\bar{f}(t)$ = (cos(t); sen(t); 2); t ∈ [0; 2π]
7) $\bar{f}(t)$ = (0; t; 1); t ∈ [0; 1]

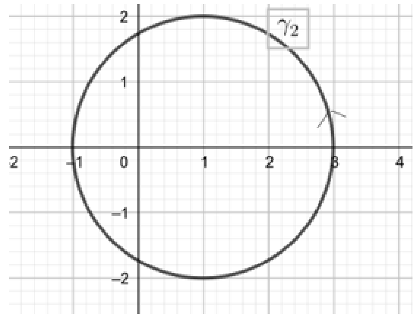
3. Asignar, si en posible, a cada parametrización $\bar{f}$ su curva imagen γ. Una misma curva puede tener más de una parametrización.

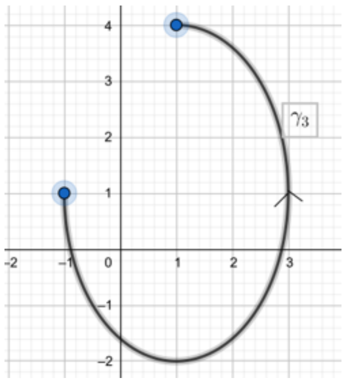
<u>Parametrizaciones</u>

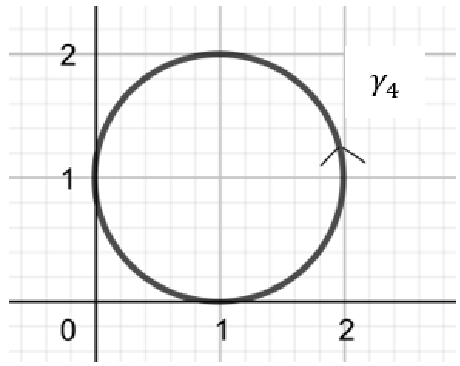
1) $\bar{f}\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to R^2 \,/\, \bar{f}(t) = (1+\cos(2t), 1+sen(2t))$
2) $\bar{f}$: $[0, 2\pi] \to R^2 \,/\, \bar{f}(t) = (1+2\cos(t), 2sen(t))$
3) $\bar{f}$: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R^2 \,/\, \bar{f}(t) = (1-\cos(t), \cos(t))$
4) $\bar{f}$:$[0,1] \to R^2/\,\bar{f}(t) = (1-t^2, t^2)$
5) $\bar{f}$: $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to R^2/\,\bar{f}(t) = (1-2cos(t), 1-3sen(t))$
6) $\bar{f}$: $[0,\pi] \to R^2/\,\bar{f}(t) = (-1+cos^2(t), \cos(t))$

<u>Curvas</u>



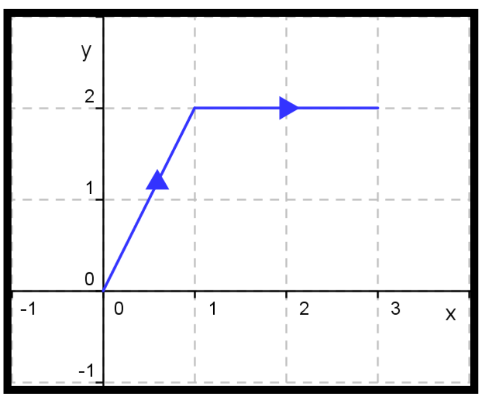




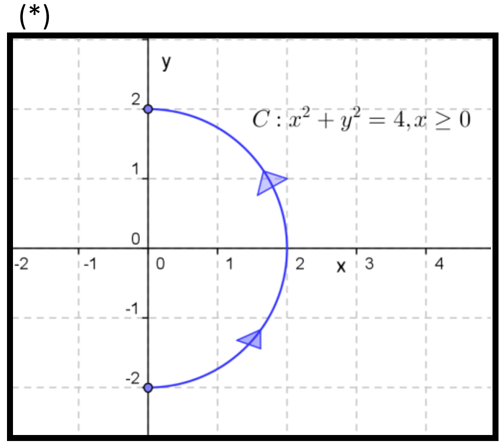


4. Parametrizar las siguientes curvas dadas por sus gráficos, respetando el sentido de recorrido que se indica en cada caso.

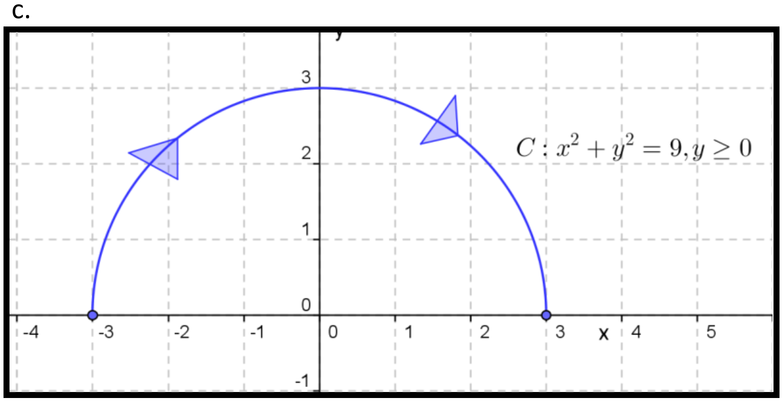
a.



b. (*)



c.



5. Describir mediante ecuaciones de la forma x(t) = f(t), y(t) = g(t) la trayectoria de una partícula que se desplaza de acuerdo a las siguientes condiciones:

a. parte del punto (0; 1) y recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ dos veces en el sentido contrario a las agujas del reloj.
b. recorre el cuarto de circunferencia unitaria desde (1; 0) hasta (0; 1).

6. Dada la ecuación de cada una de las siguientes curvas en forma cartesiana, se pide dar la expresión de una función vectorial que tenga a dicha curva como imagen (es decir, dar una parametrización de la curva).

a. $y = x^2 - 3x$
b. $x^2 + y^2 = 25,\ x \le 0$
c. $9x^2 + y^2 = 1$
d. El arco de parábola $x=y^2$, desde (1,-1) hasta (1,1)
e. $(x+1)^2 + y^2 = 1$
f. $3x^2 + 2y^2 = 6$, con $y<0$, $x<0$ (*)
g. $y-2x=0$, con $x^2 + y^2 < 25$

7. Parametrizar las siguientes curvas en el espacio.

h. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$

i. $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36 \end{cases}$

j. C es la curva intersección del plano x + y + z = 1 con el plano y = 0.
k. La curva cuyos puntos verifican: $z=4-x^2$, $y=4-x$
l. La curva ubicada en el primer octante cuyos puntos verifican: $z=4-x^2$, $y=4-x$

8. Si $\bar{x}(t)$ representa la posición de un móvil en cada instante de tiempo t, hallar la velocidad y la aceleración del móvil en el instante que se indica en cada caso. De acuerdo a lo obtenido, clasificar el movimiento en rectilíneo uniforme (velocidad constante), uniformemente variado (aceleración constante), según corresponda.

a. $\bar{x}(t) = (t^2 - 3;\ t + 2)$ $\quad t_0 = 1$

b. $\bar{x}(t) = (2t;\ -t + 3)$ $\quad t_0 = 3$

c. $\bar{x}(t) = (1;\ -4t^2;\ 3t^2)$ $\quad t_0 = 4$

9. Un móvil se desplaza según la trayectoria descripta por $f(t) = (1+\cos(t);\ \text{sen}(t))$ y otro por $g(t) = (\cos(t);\ 1+\text{sen}(t))$, con $t \in [0; 4\pi]$. Determinar si estos móviles se encuentran en algún instante t. Representar gráficamente las trayectorias. (*)

10. Un móvil se desplaza según la trayectoria descripta por $f(t) = (t;\ t + 1)$ y otro por $g(t) = (t;\ -t^2 + 3)$, con $t \in [0; 3]$. Determinar si estos móviles se encuentran en algún instante t, de ser afirmativa la respuesta dar el instante y la velocidad que lleva cada uno al encontrarse. Representar gráficamente las trayectorias.

11. Para cada una de las siguientes funciones vectoriales, hallar las ecuaciones vectorial y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

a. $\bar{f}(t) = (e^t; e^{2t})$ $\quad P_0 = \bar{f}(0)$
b. $\bar{f}(t) = (2\,cos(t)\,; 2\,sen(t))$ $\quad P_0 = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$
c. $\bar{f}(t) = (r\cos(t)\,; 4; r\,sen(t))$ $\quad P_0 = (r; 4; 0)$ (*)
d. $\bar{f}(t) = (2\,cos(t)\,; 2\,sen(t); 1)$ $\quad P_0 = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$

12. Proponer la expresión de una función vectorial $\bar{g}: R \to R^2$ cuya imagen sea la circunferencia de centro (-1, 3) y radio dos. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto (1, 3).

13. a. Determinar $\bar{f}: D \subseteq R \to R^2$ tal que $\bar{f}'(t) = \left(\frac{1}{t^2}; sen(2t-2)\right)$ y $\bar{f}(1) = (3; -1)$

b. Determinar $\bar{f}: D \subseteq R \to R^3$ tal que $\bar{f}'(t) = \left(\frac{-2}{t^5}; t\sqrt[3]{t^2+7}; ln(t)\right)$ y $\bar{f}(1) = (1{,}7{,}0)$.

14. Obtener el área de la región limitada entre el gráfico de la función escalar $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1\text{-}x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y la curva imagen de la función vectorial $\bar{g}: [-\frac{1}{3}, +\infty) \to R^2$, $\bar{g}(t) = (3t, 18t^2 - 2)$ y la recta $x = -1$.

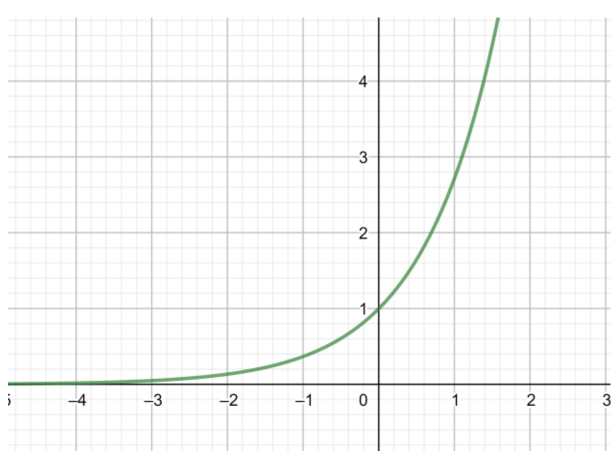
15. Hallar el área de la región limitada por: el gráfico de $f(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^2 + 9$, la curva imagen de la función vectorial $\bar{g}: R \to R^2$, $\bar{g}(t) = (e^t - 3, e^t)$, y el eje x. (*)

<u>Algunos ejercicios resueltos</u>

<u>Resolución ejercicio 2) ítem 4</u>

La función $\bar{f}(t) = (e^t, -e^{2t} + 1)$ tiene como dominio el conjunto de números reales. Grafiquemos las funciones componentes:

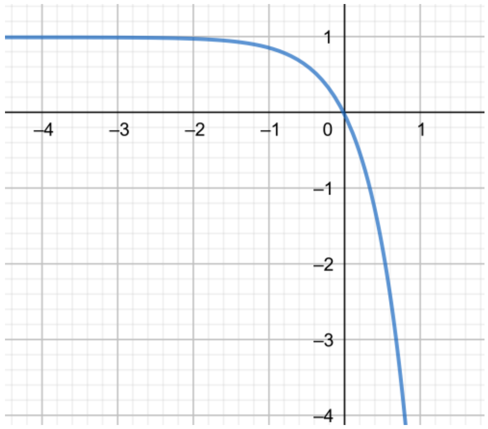
$$x(t) = e^t$$



Observemos que x >0.

Por otra parte:

$$y(t) = -e^{2t} + 1$$

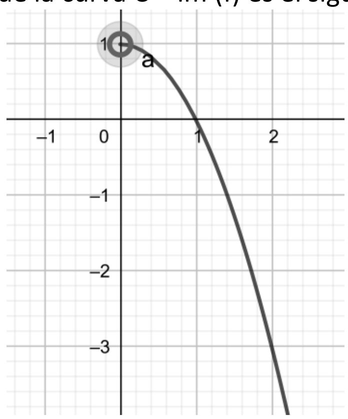


Tenemos que $y \in (-\infty, 1)$

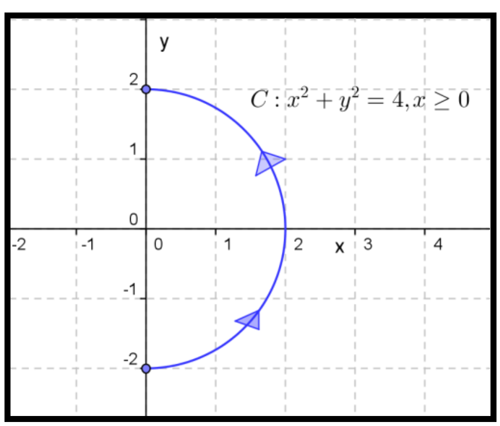
Para encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria necesitamos eliminar el parámetro t:3

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = -e^{2t} + 1 = -(e^t)^2 + 1 \end{cases}$$

Luego $y = -x^2 + 1, \ x \in (0, +\infty)$. El gráfico de la curva C = Im (f) es el siguiente:



Ejercicio 4 b Parametrizar las siguientes curvas dadas por sus gráficos, respetando el sentido que se indica en cada caso.



Resolución:

Buscamos una parametrización para la curva $C: \ x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0$ que la recorra en sentido antihorario. Es decir, una función vectorial cuya imagen sea la curva C y que respete el sentido que se indica en el gráfico.

Proponemos $\bar{f}(t) = (2\cos(t); 2sen(t))$, es decir

$x(t) = 2\cos(t)$

$y(t) = 2sen(t)$

Recordemos la identidad

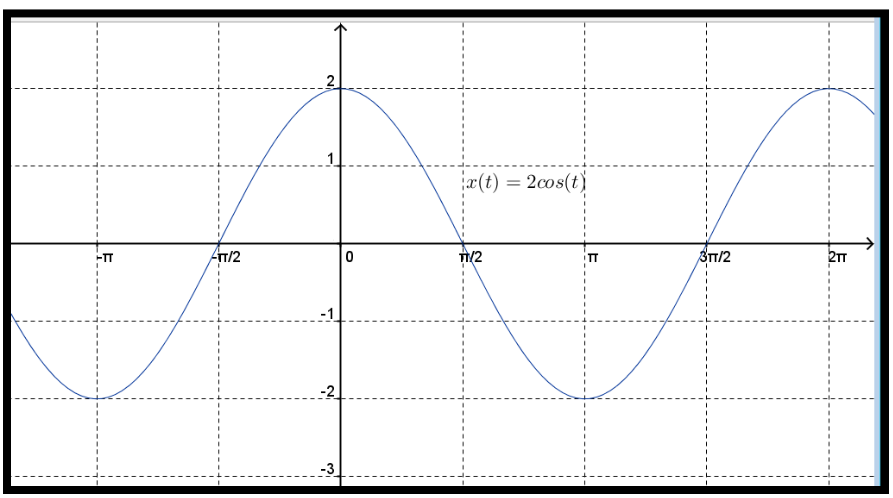
$\boxed{\cos^2(t) + sen^2(t) = 1}$

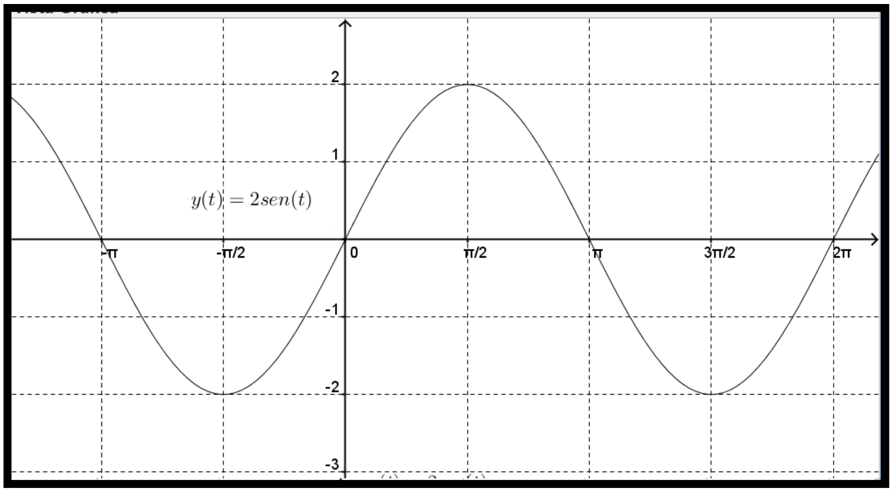
Las funciones escalares componentes verifican:

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = [2\cos(t)]^2 + [2sen(t)]^2 = 2^2\cos^2(t) + 2^2 sen^2(t) = 2^2[\cos^2(t) + sen^2(t)] = 2^2$$

Es decir, la curva imagen de la función vectorial forma parte de una circunferencia de centro (0,0) y radio 2.

Analicemos cuál deberá ser el dominio de definición de la función vectorial $\bar{f}(t)$ de modo que la curva imagen sea la semicircunferencia de centro (0,0) y radio 2 que comienza en el punto (0,-2), pasa por el punto (2,0) y finaliza en el punto (0,2). Para esto, podríamos ayudarnos de los gráficos de las funciones componentes.





A partir de los gráficos podemos observar que, siendo $\bar{f}(t)=(2\cos(t);2\text{sen}(t))$,

$$\left.\begin{array}{l} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2 \end{array}\right\} \bar{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=(0,-2) \qquad \left.\begin{array}{l} x(0)=2 \\ y(0)=0 \end{array}\right\} \bar{f}(0)=(2,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 \end{array}\right\} \bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,2)$$

Si consideramos como dominio de definición de la función vectorial al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se verifica además $x(t)\geq 0$.
Luego, $\bar{f}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow R\,/\,\bar{f}(t)=(2\cos(t),2sen(t))$ es una función vectorial cuya curva imagen es $C: x^2+y^2=4, \quad x\geq 0$, recorriéndola según el sentido indicado en el gráfico.

<u>Ejercicio 6, ítem f)</u>

Tenemos que parametrizar la curva $3x^2+2y^2=6,\ x<0, y<0$. Dividiendo por 6 cada miembro de la ecuación nos queda:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1,\ \ x<0, y<0$$

Se trata de una "porción" que pertenece al tercer cuadrante de la elipse centrada en el origen de coordenadas, con $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$. Para parametrizar dicha curva llamamos:

$$x=\sqrt{2}\cos(t)\,, y=\sqrt{3}sen(t) \qquad t\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$$

Notemos que

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{2cos^2(t)}{2}+\frac{3sen^2(t)}{3}=\ cos^2(t)+sen^2(t)\text{=}1$$

Por lo que se verifica la ecuación de nuestra curva. Una parametrización es entonces:

$$\bar{f}:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)\rightarrow R\ /\ \bar{f}(t)=(\sqrt{2}\cos(t)\,,\sqrt{3}sen(t))$$

9. Un móvil se desplaza según la trayectoria descripta por *f*(t) = (1 + cos*t* ; sen*t*) y otro por *g*(t) = (cos*t* ; 1 + sen*t*), con *t* ∈ [0; 4π]. Determinar si estos móviles se encuentran en algún instante *t*. Representar gráficamente las trayectorias.

Resolución:

Para que ambos móviles se encuentren deberá existir algún valor de $t \in [0, 4\pi]$ para el cual

$$f(t) = g(t)$$

$$(1+\cos(t); sen(t)) = (\cos(t); 1+sen(t))$$

Planteamos las ecuaciones

$$1+\cos(t) = \cos(t) \Rightarrow 1 = 0$$
$$sen(t) = 1 + sen(t) \Rightarrow 0 = 1$$

Luego, no existe un instante $t \in [0, 4\pi]$ en el cual ambos móviles se encuentren.

Grafiquemos las trayectorias C_1 y C_2 descriptas por f(t) y g(t) respectivamente:
Como f(t) = (1 + cos$t$; sen$t$)

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = 1+\cos(t) \Leftrightarrow x(t) - 1 = \cos(t) \\ y(t) = sen(t) \end{cases}$$

Luego

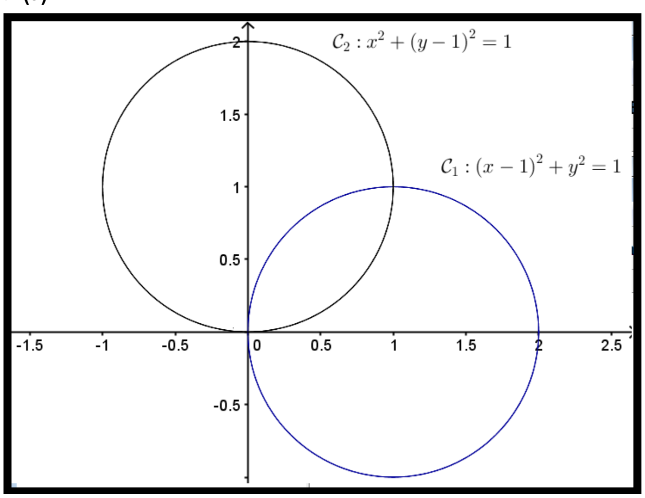
$$C_1 : [x(t)-1]^2 + [y(t)]^2 = \cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$

Como g(t) = (cos$t$; 1 + sen$t$)

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = 1+sen(t) \Leftrightarrow y(t) - 1 = sen(t) \end{cases}$$

Luego

$$C_2 : [x(t)]^2 + [y(t)-1]^2 = \cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$



Si bien en el gráfico se observa que las trayectorias de ambos móviles coinciden en los puntos (0,0) y (1,1), no lo hacen en el mismo instante.

Ejercicio 11 Para cada una de las siguientes funciones vectoriales, hallar las ecuaciones vectorial y cartesiana de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

c. $\bar{f}(t)$ = (r cos$t$; 4; r sen$t$) P_0 = (r; 4; 0)

Resolución:

Recordemos que la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva imagen de $\bar{f}(t)$ en el punto $\bar{f}(t_0)$ es

$$\overline{X}=\bar{f}(t_0)+\lambda\,\bar{f}(t_0),\quad \lambda\in R$$

Como la curva imagen de $\bar{f}(t)$ pasa por el punto P_0, existe $t_0\in R$ tal que $\bar{f}(t_0)=P_0$:

$$\left(r\cos(t_0);4;r\,sen(t_0)\right)=\left(r;4;0\right)$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l} r\cos(t_0)=r \\ 4=4 \\ r\,sen(t_0)=0 \end{array}\right\}\rightarrow t_0=0$$

Derivemos la función vectorial y luego evaluemos en $t_0=0$:

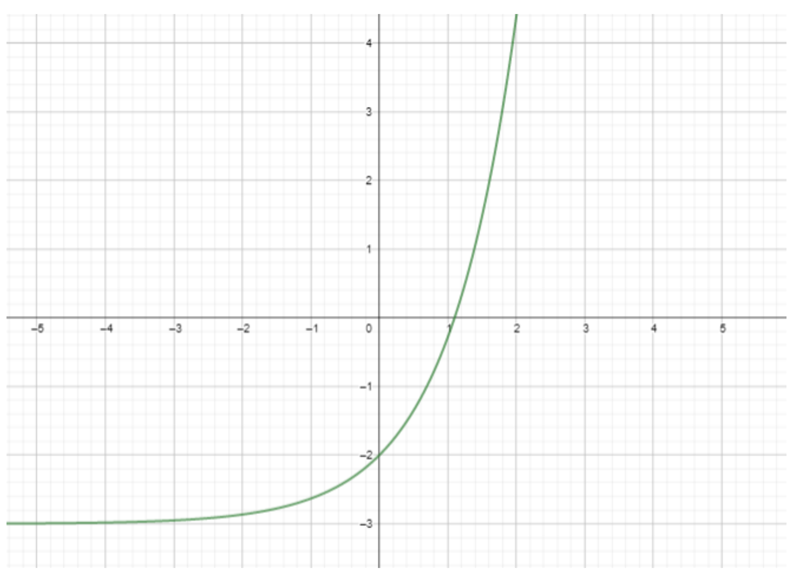
$\bar{f}'(t)=\left(r(-1)sen(t);0;r\cos(t)\right)=\left(-r\,sen(t);0;r\cos(t)\right)$ y $\bar{f}'(0)=\left(0;0;r\right)$.

Armemos la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva imagen de $\bar{f}(t)$ en el punto P

$$\overline{X}=\bar{f}(0)+\lambda\,\bar{f}(0),\quad \lambda\in R$$
$$\overline{X}=\left(r;4;0\right)+\lambda\left(0;0;r\right),\quad \lambda\in R$$

Ejercicio 15 Hallar el área de la región limitada por: el gráfico de $f(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^2+9$, la curva imagen de la función vectorial $\bar{g}: R\rightarrow R^2$, $\bar{g}(t)=(e^t-3,e^t)$, y el eje x.

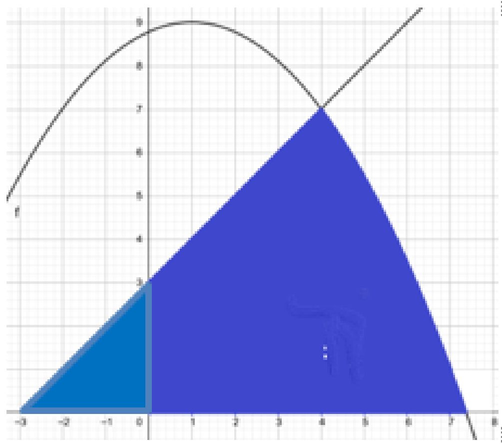
Busquemos la ecuación cartesiana de la curva imagen de la función vectorial. Graficamos x(t) $=e^t-3$.
Notemos que x > -3:



Luego: $\begin{cases} x=e^t-3 \\ y=e^t \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+3=e^t \\ y=e^t \end{cases}$

La ecuación cartesiana es $y=x+3, x>-3$.

Grafiquemos la región:



Buscamos la intersección entre las curvas:

$$-\frac{2}{9}(x-1)^2+9=x+3$$
$$-\frac{2}{9}(x^2-2x+1)=x-6$$
$$-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}=x-6$$
$$-\frac{2}{9}x^2-\frac{5}{9}x+\frac{52}{9}=0$$

La solución positiva de esta ecuación es x =4

La parábola interseca al semieje positivo de x en m = $\sqrt{40{,}5}$ + 1.

Dividiendo la región en 2 tenemos que:

- $A(R_1)= \int_{-3}^{4}(x+3)dx = \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)|_{-3}^{4} = 20-\left(\frac{9}{2}-9\right)=20+\frac{9}{2}=\frac{49}{2}$
- $A(R_2)= \int_{4}^{m}\left(-\frac{2}{9}(x-1)^2+9\right)dx$ = $\left[-\frac{2}{9}\frac{(x-1)^3}{3}+9x\right]|_{4}^{m} \cong 46{,}9-34=12{,}09$

El área pedida es aproximadamente igual a 36,59