Tema 1: Operaciones y propiedades

¿Cómo obtenemos expresiones algebraicas?

Expresiones algebraicas tales como:

$$3x^3 - 4x^5 + 7 \qquad m\,x + b$$

$$\frac{2z^3 - 1}{z^2 + 4} \qquad \frac{4\,w - 1}{\sqrt{w + 2}}$$

Se obtienen a partir de **variables** como *x, y, z, w*; **constantes** como 3, -4, *m*, *b*, -1, 2 y la combinación de operaciones entre ellas.

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número en el conjunto de números reales (a menos que se indique lo contrario en el caso que se trate), mientras que una **constante** representa un número fijo (específico).

En ciertas ocasiones, las consideraciones físicas imponen restricciones sobre los valores que puede adoptar una variable; por ejemplo, si la variable ***x*** denota el número de mesas vendidas diariamente en un bazar de artículos para el hogar, entonces ***x*** debe ser un entero no negativo.

En otros casos hay que imponer restricciones sobre ***x*** para que una expresión tenga sentido; por ejemplo, en la expresión $\frac{1}{x+4}$ la variable ***x*** no puede tomar el valor -4 porque no está definida la división por cero.

¿Qué son los polinomios?

Los **polinomios** son una clase importante de expresiones algebraicas; los más sencillos comprenden una única variable.

La forma general de un polinomio de grado *n* (donde *n* es un entero no negativo) en la variable ***x*** es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$

Las expresiones $a_k x^k$ de la suma son los **términos del polinomio**. Los números a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son los **coeficientes** *de* x^n, x^{n-1}, x, x^0, respectivamente.

El entero no negativo *n* proporciona el **grado del polinomio** (indicado por el mayor grado que efectivamente aparece en el polinomio; esto tiene relación con $a_n \neq 0$) ; por ejemplo, si se considera el polinomio:

$$-3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x + 7$$

Entonces:

1. Los **términos** del polinomio son cuatro, a saber $-3x^4, \frac{1}{2}x^3, -5x, 7$
2. Los **coeficientes** de x^4, x^3, x, x^0 son $-3, \frac{1}{2}, -5, 7$ respectivamente.
3. El **grado** del polinomio es 4.

Un polinomio con un término único (como $4x^3$) se llama **monomio**, un polinomio con dos términos (como $3x^2 + 7x$) es un **binomio** y un polinomio con tres términos (como $9x^2 - 3x - 8$)es un **trinomio.**

La **suma y resta de expresiones algebraicas** o polinomios las realizamos teniendo en cuenta las propiedades de los números reales analizadas en el capítulo 1.

La idea es asociar los **términos semejantes** sumando algebraicamente los coeficientes de los mismos.

Términos de igual variable elevada a la misma potencia.

Ejemplo : $5x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{9}{2}x^4$

Ejemplos de mayor complejidad:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \left(x^3 - 6x^2 + 2x + 4\right) + \left(3x^3 + 5x^2 - 4x\right) = \\
& = \left(x^3 + 3x^3\right) + \left(-6x^2 + 5x^2\right) + \left(2x - 4x\right) + 4 \\
& = 4x^3 - x^2 - 2x + 4
\end{aligned}
$$

En este segundo paso se agrupan los términos semejantes

$$
\begin{aligned}
b)\quad & \left(x^3 - 6x^2 + 2x + 4\right) - \left(3x^3 + 5x^2 - 4x\right) = \\
& = x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x \\
& = \left(x^3 - 3x^3\right) + \left(-6x^2 - 5x^2\right) + \left(2x + 4x\right) + 4 \\
& = -2x^3 - 11x^2 + 6x + 4
\end{aligned}
$$

En este segundo paso aplicamos propiedad distributiva con el signo **-**

Para obtener el producto de expresiones algebraicas (como caso particular las expresiones polinómicas), necesitamos utilizar varias veces la propiedad distributiva. Luego se asocian los términos semejantes como en los ejemplos anteriores.

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
a)\quad & 3.\left(2x + 4\right).\left(x^3 - 4x\right) = \\
& = 3.\,(2.x^4 - 8x^2 + 4x^3 - 16x) \\
& = 6\,x^4 + 12\,x^3 - 24\,x^2 - 48x
\end{aligned}
$$

Ordenar los términos de la expresión resultante en forma decreciente

$$
\begin{aligned}
b)\quad & \left(2x^5 - 3x\right).\left(x^2 - 5x\right) = \\
& = 2.x^7 - 10\,x^6 - 3x^3 + 15\,x^2
\end{aligned}
$$

Aplicar propiedad de las potencias de igual base vista en unidad 1.

- Producto de expresiones algebraicas.

Ejemplo

$$c)\quad \sqrt{x}.\left(x^2+2x+\sqrt{x}\right)=$$
$$=x^2.\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+\sqrt{x}.\sqrt{x}$$
$$=x^{5/2}+2\,x^{3/2}+x$$

$x \geq 0$

No es un polinomio puesto que la potencia de la variable no es entero no negativo.

- Producto de polinomios con más de una variable

Ejemplo

$$d)\quad \left(x^2-x\,y+y^2\right).\left(x-y\right)=$$
$$=x^2.\,x-x^2.y-x.\,x.y+x.\,y.y+y^2.x-y^2.y$$
$$=x^3-x^2y+x\,y^2-x^2y+x\,y^2-y^3$$
$$=x^3-2\,x^2y+2\,x\,y^2-y^3$$

Ciertos tipos de productos u operaciones se presentan con tanta frecuencia que es recomendable recordar algunas fórmulas especiales.

Para eso presentamos a continuación una tabla ilustrativa.

$$1)\ \left(a-b\right).\left(a+b\right)=a^2-b^2$$

$$2)\ \left(a+b\right)^2=a^2+2.a.b+b^2$$

$$3)\ \left(a+b\right)^3=a^3+3.a^2.b+3.a.b^2+b^3$$

Ejemplo de la fórmula 1. Consideramos $a = 3x \quad b = \sqrt{y}$

$$\left(3x - \sqrt{y}\right).\left(3x + \sqrt{y}\right) = (3x)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = 9x^2 - y$$

Los ejemplos de las fórmulas 2 y 3 ya fueron planteados en la Unidad 1

Ejercicio 1: Resolver en cada caso las expresiones dadas

$a)\ \left(3x^2 - 2\right)^3.\left(-2x + 3\right) =$

$b)\ \left(2x + 3\right).\left(-x\right)^2 + \left(x + 2\right)^3 - \frac{1}{2}x =$

$c)\ \left(x - 1\right)^2 + 2.x^3.\left(x^2 - 3\right) - 5.\left(-x^2 + 1\right) =$

$d)\ \sqrt{x}.\left(x - \sqrt{x}\right) =$

$e)\ \sqrt[3]{y}.\left(y^2 - 1\right) =$

$f)\ x^{3/2}.\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$

a) $-54x^7 + 81x^6 + 108x^5 - 162x^4 - 72x^3 + 108x^2 + 16x - 24$

b) $3x^3 + 9x^2 + \frac{23}{2}x + 8$

c) $2x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 2x - 4$

d) $x\sqrt{x} - x$

e) $\sqrt[3]{y^7} - \sqrt[3]{y}$

f) $x^2 - x$

Tema 2: Factorizacion

¿Qué es factorizar una expresión algebraica?

La **factorización** de una **expresión algebraica** es el proceso de expresarla como un producto de dos o más polinomios; por ejemplo, al aplicar la propiedad distributiva, se puede escribir:

$$\boxed{3x^2 - x = x.(3x-1)}$$

Estos son los factores del polinomio del primer miembro

Esto se generaliza para cualquier expresión algebraica. Es conveniente seguir en orden algunos pasos como se detalla a continuación.

Factores comunes

El **primer paso** en la **factorización** de un polinomio es ver si contiene **factores comunes**.

En este caso, se extrae el factor común de máximo grado:

Ejemplo

$$a)\ -3t^2 + 9t = 3t.(-t+3)$$

$$b)\ 6a^4b^4c - 9a^2b^2 = 3a^2b^2.(2a^2b^2c-3)$$

✓ Se puede verificar la respuesta si al aplicar la **propiedad distributiva** en el segundo miembro se obtiene el enunciado

Fórmulas de factorización

¿Cuáles son las principales fórmulas de la factorización?

Fórmula	**Ejemplo**
Diferencia de cuadrados $(a^2 - b^2) = (a+b).(a-b)$	$16x^2 - y^2 = (4x-y).(4x+y)$
Trinomio cuadrado perfecto $a^2 + 2\,a\,b + b^2 = (a+b)^2$	$x^2 - 10\,x + 25 = (x-5)^2$ $4x^2 + 4\,x\,y + y^2 = (2\,x + y)^2$
Suma de dos cubos $a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - a\,b + b^2)$	$x^3 + 27 = (x+3).(x^2 - 3x + 9)$
Diferencia de dos cubos $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + a\,b + b^2)$	$8x^3 - y^6 = (2x - y^2).(4x^2 + 2x\,y^2 + y^4)$
Factorización de la expresión cuadrática $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1).(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ (Recuerda que x_1 y x_2 se obtienen de la fórmula resolvente: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a.c}}{2.\,a}$)	$3x^2 - x - 2 = 3\,(x-1)\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$

A veces, un polinomio se puede **factorizar mediante la reagrupación** y **reordenamiento** de sus términos, de modo que se pueda obtener un **factor común.**

Esta técnica se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$
\begin{aligned}
a)\ x^3 + x + x^2 + 1 &= x^3 + x^2 + x + 1 \\
&= x^2.(x+1) + (x+1) \\
&= (x+1).(x^2+1)
\end{aligned}
$$

Se factorizan los dos primeros términos y luego sacamos factor común *x+1*

$$
\begin{aligned}
b)\ 2\,ax + 2ay + b\,x + b\,y &= 2\,a.(x+y) + b.(x+y) \\
&= (x+y).(2\,a+b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ x^3 + 2x^2 + 3x + 6 &= (x^3 + 2x^2) + (3x+6) \\
&= x^2(x+2) + 3.(x+2) \\
&= (x+2).(x^2+3)
\end{aligned}
$$

La **factorización de polinomios** será de utilidad al resolver ecuaciones (unidad 4) o para simplificar expresiones algebraicas en determinados problemas (unidad 3).

Observación:

Se termina la factorización de polinomios si después de comprobar la existencia de factores comunes se observa que quedó expresado en factores que son polinomios primos.

El **segundo paso** en la factorización de un polinomio consiste en expresarlo como el producto de una constante y / o uno o más **polinomios primos.***

******Llamamos polinomio primo a aquél que no puede expresarse como producto de dos o más polinomios de grado entero positivo; por ejemplo,* x^2+2x+2.

<u>Ejercicio 1:</u> Resolver los siguientes ejercicios, ver en **Respuestas** y constatar la solución.

Factorizar las siguientes expresiones

$a)\ x^2+7x+6$

$b)\ 9x^2-36$

$c)\ m^3+1$

$d)\ 8x^3-125$

$e)\ 4r^2-12rs+9s^2$

a) $x^2+7x+6=\left(x-(-1)\right).\left(x-(-6)\right)=(x+1).(x+6)$

Se ha utilizado $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-4.1.6}}{2.1}=\dfrac{-7\pm 5}{2}$ entonces x =-6 ò x = -1

b) $9x^2-36=(3x)^2-6^2=(3x+6).(3x-6)$

c) $m^3+1=m^3+1^3=(m+1).(m^2-m+1)$

d) $8x^3-125=(2x)^3-5^3=(2x-5).(4x^2+10x+25)$

e) $4r^2-12rs+9s^2=(2r)^2+2(2r)(-3s)+(-3s)^2=(2r-3s)^2=(-2r+3s)^2$