Transformaciones lineales

Para realizar los ejercicios de esta guía hace falta conocer la definición de transformación lineal, las definiciones de núcleo e imagen de una transformación lineal, matriz asociada a una transformación lineal en una base, el teorema fundamental de las transformaciones lineales y la noción de diagonalización.

1. Analizar si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a. $f: R^2 \to R^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.

b. $f: R^2 \to R^2, f(x_1, x_2) = (x_1 . x_2 - 3, 1)$.

c. $T: R^3 \to R^2, T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 2x_1, \frac{4x_1+2x_3}{3})$.

d. $T: R^3 \to R^4, T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, 2x + y + z, 0)$.

2. Analizar si existe una transformación lineal T que satisfaga las condiciones dadas. En caso afirmativo, encontrar una expresión para T.

a. $T: R^2 \to R^2: T(1,0) = (3, -1); T(0,1) = (-2,4)$

b. $T: R^2 \to R^2: T(2,1) = (-1,2); T(3,0) = (-1,2)$

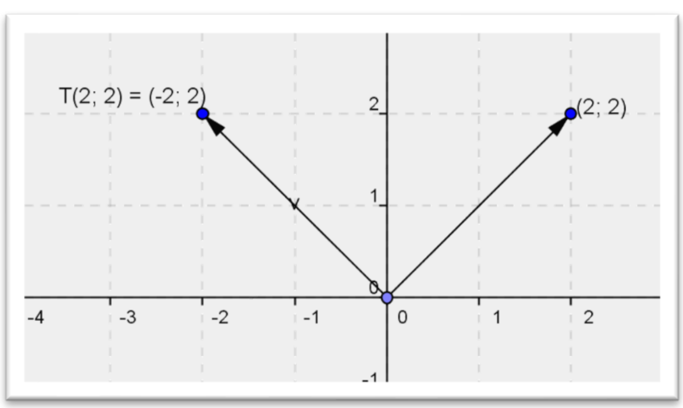
c. $T: R^2 \to R^2: T(1, -1) = (0,7); T\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -1)$

d. $T: R^3 \to R^2: T(1,0,-1) = (2,0); T(0,-1,2) = (3,-1); T(1,-1,0) = (-1,4)$

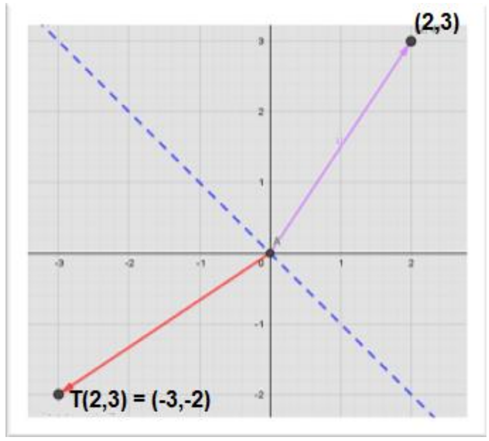
e. $T: R^3 \to R^3: T(1,1,1) = (1,0,0); T(1,1,0) = (0,1,0); T(0,0,-1) = (-1,1,0)$

3. Dar la expresión analítica de una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ que produzca los efectos geométricos indicados en cada caso.

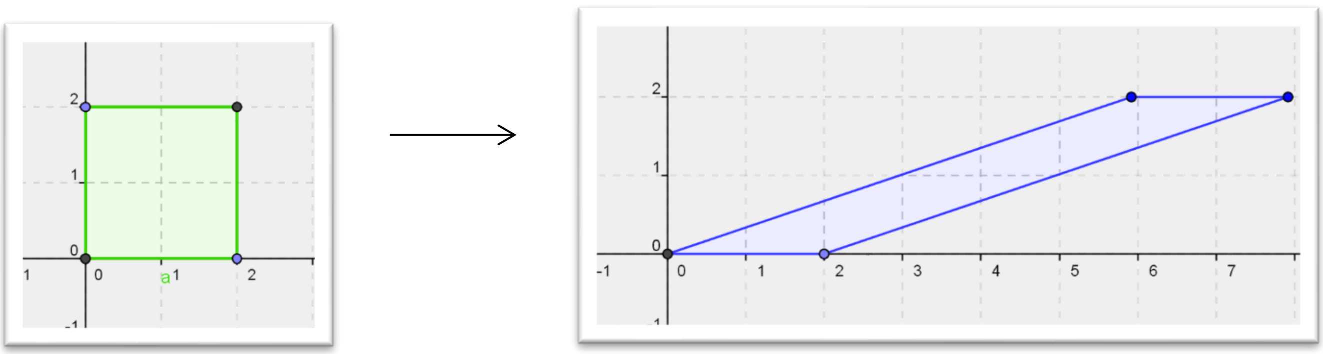
a. Reflexión respecto del eje y



b. Reflexión respecto de la recta y = - x



c. Transformación de un cuadrado en un paralelogramo



4. Núcleo e imagen de una transformación lineal

Sea $T: R^2 \to R^2$ la transformación lineal dada por $T(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, -6x_1 + 4x_2)$

a. ¿Pertenecen los siguientes vectores al núcleo de T? Justificar.
   i. $(0,0)$ ii. $(2,3)$ iii. $(3,-2)$ iv. $\left(1,\frac{1}{3}\right)$

b. Los siguientes vectores, ¿pertenecen a la imagen de T? Justificar.
   i. $(3,-6)$ ii. $(2,3)$ iii. $(1,-2)$ iv. $(4,-3)$

5. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales hallar, si existe, una base del núcleo y una base de la imagen.

a. $T: R^2 \to R^3 : T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -5x_2, 0)$.

b. $T: R^3 \to R^3 : T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_1 - x_3, -x_2 + x_3, x_1)$.

c. $T: R^4 \to R^3 : T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (9x_3 - 3x_1 + 6x_2, x_4, 3x_3 - x_1 + 2x_2)$.

6. Hallar, si existe, la expresión analítica de una transformación lineal que verifique las condiciones dadas en cada caso.

a. $T: R^2 \to R^3$ tal que $T(1,-2) = (-1,3,4)$ y $(0,-5) \in Nu(T)$. Sin obtener el conjunto imagen, ¿puede ser $Im(T) = R^3$?

b. $T: R^3 \to R^3$ tal que $Nu(T) = \{(x,y,z) \in R^3 : x + y - 2z = 0\}$, $Im(T) = gen\{(-1,0,0)\}$.

c. $T: R^3 \to R^4$ tal que $Im(T) = R^4$.

7. Decidir si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Justificar.

"Si $T: R^4 \to R^3$ es una transformación lineal tal que $\dim \mathrm{Nu}(\mathrm{T}) = 1$, entonces $Im(T) = R^3$"

Matriz de una transformación lineal

8. Escribir la matriz asociada en la base canónica de cada una de las siguientes transformaciones lineales.

a. $T: R^2 \to R^2, T(x,y) = (\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y, 5y - x)$

b. $T: R^3 \to R^4, T(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1 + x_2 + x_3, \frac{x_1+x_2}{2}, -\frac{x_3}{4}, x_2 - x_3\right)$

c. $T: R^2 \to R^3, T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, -4x_1)$

Nota: En la página 5 de esta guía encontrarás resuelto un ejercicio integrador sobre transformaciones lineales.

9. Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Hallar $T(1,-5,3), T(0,0,0), T(1,-1,1)$.

b. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen.

c. Hallar la expresión analítica de la transformación lineal T.

10. En el siguiente applet podrás visualizar distintas transformaciones que produce en una figura una transformación lineal. ¿Qué valores tienen que tomar a, b, c y d para que la figura se refleje con respecto al eje x? ¿Y para que se transforme en un paralelogramo ubicado en el tercer cuadrante?

11. Teniendo en cuenta la siguiente animación describe con tus palabras qué efecto geométrico se produce en la figura si la matriz de la transformación lineal en la base canónica es:

a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b. $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c. $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Diagonalización

12. Hallar los autovalores y autovectores de cada una de las siguientes transformaciones lineales.

a. $T: R^2 \to R^2, T(x,y) = (3x+y, x+3y)$

b. $T: R^2 \to R^2, T(x,y) = (4x+y, 4y)$

c. $T: R^3 \to R^3, T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2-x_3, -5x_2-4x_3, 8x_2+7x_3)$

d. $T: R^3 \to R^3, T(X) = AX$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

13. Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Hallar todos los valores de $k \in R$ de modo tal que $\lambda = 1$ sea un autovalor de T.

b. Para los valores de k hallados, calcular todos los autovalores de T.

14. Para cada una de las siguientes matrices, determinar su espectro y autoespacios. Decidir si son o no diagonalizables. En caso afirmativo, hallar una matriz regular P tal que $D = P^{-1}.A.P$ sea una matriz diagonal.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

15.

a. Demostrar que si A es una matriz de orden n inversible, entonces $\lambda = 0$ no es autovalor de A.

b. Sea A una matriz de orden n. Demostrar que A y A^T tienen los mismos autovalores. ¿Es cierto que tienen los mismos autovectores?

Nota Para conocer algunas aplicaciones de autovalores y autovectores, te sugerimos visitar la siguiente página

Ejercicio sobre transformaciones lineales

Enunciado:

Dada la aplicación $T: R^3 \to R^2 \,/\, T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; -x_3)$. Se pide:

1) Demostrar que T es una transformación lineal
2) Obtener el núcleo y la imagen de la transformación.
3) Interpretar geométricamente lo anterior y obtener una base de cada una.
4) Hallar la matriz asociada a la transformación en la base canónica.

Solución:

Vamos a interpretar qué significa aplicar la transformación T a un vector cualquiera $(x_1; x_2; x_3)$ de R^3,

Interpretación

$$T: R^3 \to R^2 \,/\, T\underbrace{(x_1; x_2; x_3)}_{\text{La transformación se aplica a cualquier vector del espacio vectorial } R^3} = \underbrace{(x_1 + x_2; -x_3)}_{\text{Se obtiene un vector del E.V. } R^2}$$

Por ejemplo: ¿Cómo se obtiene el transformado del vector (1; -2; 4) Є R^3?

$$T(1; -2; 4) = \left(1 + (-2); -4\right)$$

$T(1; -2; 4) = (-1; -4)$, donde (-1;-4) Є R^2

1) Para demostrar que T es una transformación lineal, tenemos que aplicar la definición:

"Sea T una aplicación de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W. T es una transformación lineal si cumple dos propiedades:

a) El transformado de la suma de dos vectores cualesquiera de V es igual a la suma de sus transformados. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ siendo $u \in V$ y $v \in V$

Consideramos a u y v dos vectores cualesquiera de R^3. Deben ser genéricos, no podemos particularizar en valores concretos porque sino estaríamos probando sólo para esos valores y no en general. Sean $u = (u_1; u_2; u_3)$ y $v = (v_1; v_2; v_3)$

Queremos ver que se cumple la siguiente igualdad:

$$\underbrace{T(u+v)}_{1} = \underbrace{T(u) + T(v)}_{2}$$

Trabajando con el primer miembro:

$T(u+v) = T\left[(u_1; u_2; u_3) + (v_1; v_2; v_3)\right]$ escribimos a u y v como dos ternas ordenadas.

$T(u+v) = T\left[\left(u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3\right)\right]$ por suma de vectores (suma de ternas)

$T(u+v) = \left((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2); -(u_3 + v_3)\right)$ aplicamos la transformación T

① $T(u+v) = \left(u_1 + v_1 + u_2 + v_2; -u_3 - v_3\right)$ operamos algebraicamente en cada componente.

Trabajando con el segundo miembro:

$T(u)+T(v)=T(u_1;u_2;u_3)+T(v_1;v_2;v_3)$ escribimos a u y v como dos ternas ordenadas

$T(u)+T(v)=(u_1+u_2;-u_3)+(v_1+v_2;-v_3)$ aplicamos la transformación T

② $T(u)+T(v)=(u_1+u_2+v_1+v_2\,;-u_3-v_3)$ operamos algebraicamente en cada componente.

Como las expresiones ① y ② son iguales, se cumple la primera condición.

b) El transformado de un escalar por un vector cualquiera del espacio vectorial V es igual al escalar multiplicado por el transformado del vector. Es decir, $T(k.u)=k.T(u)$ siendo $u \in V$ y $k \in R$

Consideramos a $u=(u_1;u_2;u_3)$ un vector cualquiera de R^3 y $k \in R$. Tendríamos que ver que

$$\underbrace{T(k.u)}_{1}=\underbrace{k.T(u)}_{2}$$

Trabajando con el primer miembro:

$T(k.u)=T\left[k.(u_1;u_2;u_3)\right]$ escribimos a u como una terna.

$T(k.u)=T\left[(k.u_1;k.u_2;k.u_3)\right]$ por producto entre escalar y vector (terna).

① $T(k.u)=(k.u_1+k.u_2\,;-k.u_3)$ aplicamos la transformación T.

Trabajando con el segundo miembro:

$k.T(u)=k.T(u_1;u_2;u_3)$ escribimos a u como una terna.

$k.T(u)=k.(u_1+u_2;-u_3)$ aplicamos la transformación T.

$k.T(u)=\left(k.(u_1+u_2);k.(-u_3)\right)$ por producto entre escalar y vector (par ordenado)

② $k.T(u)=\left(k.u_1+k.u_2\,;-k.u_3\right)$ operamos algebraicamente en cada componente.

Como las expresiones ① y ② son iguales, se cumple la condición.

Conclusión: Al cumplirse las condiciones a) y b), podemos afirmar que T es una transformación lineal.

2) Como probamos que es una transformación lineal, podemos obtener el núcleo y la imagen de la misma. En una transformación lineal $T:R^3 \to R^2$ el núcleo es el subespacio formado por los vectores de R^3 cuya imagen a través de T es el vector nulo de R^2.

Para cualquier $(x_1;x_2;x_3)\in R^3$

$T(x_1;x_2;x_3)=(0;0)$ por definición de núcleo de una transformación

$(x_1+x_2\,;-x_3)=(0;0)$ aplicamos la transformación al vector

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$ por igualdad de pares ordenados

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ operando algebraicamente en cada componente

Armamos la expresión del núcleo, reemplazando las componentes obtenidas

$(x_1;x_2;x_3) = (-x_2\,;x_2;0)$

$(x_1;x_2;x_3) = x_2.(-1\,;1;0)$ por definición (recíproca) de escalar por vector

$(x_1;x_2;x_3) = t.(-1\,;1;0)$ como x_2 es un real cualquiera lo sustituimos por el parámetro "t"

El núcleo de la transformación queda:

$$\boxed{N(T) = \left\{ (x_1;x_2;x_3) \in R^3 \;/\; (x_1;x_2;x_3) = t.(-1\,;1;0) \text{ con } t \in R \right\}}$$

En una transformación lineal $T : R^3 \to R^2$ la imagen de la transformación es el subespacio formado por los vectores de R^2 que son imagen, a través de T, de algún vector de R^3.

Para cualquier $(x_1;x_2;x_3) \in R^3$

$$T(x_1;x_2;x_3) = (x_1 + x_2\,; -x_3)$$

$$(x_1 + x_2\,; -x_3) = (x_1;0) + (x_2;0) + (0;-x_3)$$

$$(x_1 + x_2\,; -x_3) = x_1\,(1;0) + x_2\,(1;0) - x_3\,(0;1)$$

La imagen de la transformación queda:

$$\boxed{Im(T) = \left\{ (y_1;y_2) \in R^2 \;/\; (y_1;y_2) = p(1;0) + q(0;1) \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ reales} \right\}}$$

No es la única forma de escribir a la imagen de la transformación, también se puede expresar:

$Im(T) = gen\{(1;0)\,;\ (0;1)\}$ y en este caso en particular podemos decir que $Im(T) = R^2$

3) Tanto en núcleo de la transformación como la imagen son sub-espacios de los espacios vectoriales donde están incluidos.

En el caso del núcleo de esta transformación, incluido en R^3, tiene por dimensión 1, pues tiene un solo vector asociado y por lo tanto responde geométricamente a una recta que pasa por el origen de coordenadas.

$$N(T) = \{(x_1;x_2;x_3) = t.\underbrace{(-1\,;1;0)}_{\text{Vector director}}\} \qquad \underbrace{B_{N(T)} = \{(-1\,;1;0)\}}_{\text{Base del núcleo}}$$

La imagen de la transformación está generada por dos vectores de R^2, tiene dimensión 2, representando geométricamente a todo el plano R^2.

$$Im(T) = gen\{(1;0)\ ,\ (0;1)\} \qquad \underbrace{B_{Im(T)} = \{(1;0)\ ,\ (0;1)\}}_{\text{Base de la imagen}}$$

4) Para hallar la matriz de la transformación en la base canónica se deben calcular los transformados de los vectores canónicos del espacio de partida, en este caso R^3.

Para nuestro caso: $T: R^3 \to R^2 \ / \ T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; -x_3)$. La matriz que buscamos es de orden 2x3.

Los transformados de los vectores canónicos de R^3 según la transformación T, son:

$$T(x_1; x_2; x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$T(1;0;0) = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0;1;0) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0;0;1) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz A, queda formada por: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Notemos que podemos expresar nuestra transformación como el producto entre la matriz A y un vector genérico de R^3:

$$T(x_1 \ x_2 \ x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$ que es la transformación dada.