Operaciones entre vectores

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de vector, las operaciones entre vectores (suma, producto escalar, producto vectorial) y su interpretación geométrica, la definición de norma de un vector, la definición de ángulo entre dos vectores y la definición de distancia entre dos puntos.

1. a. Sean los vectores $\overrightarrow{v_1} = (3,2), \overrightarrow{v_2} = (0,-2)$ y $\overrightarrow{v_3} = (-1,1)$. Realizar las siguientes operaciones y representarlas gráficamente. ¿Cómo se interpreta geométricamente de cada una de las operaciones dadas?

i. $3\overrightarrow{v_1}$ ii. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{v_2}$ iii. $\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ iv. $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}$ v. $-2\overrightarrow{v_3} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v_1}$

b. Dados los vectores $\overrightarrow{w_1} = (1,2,0), \overrightarrow{w_2} = (3,0,0)$ y $\overrightarrow{w_3} = \left(2,-1,\frac{1}{2}\right)$ realizar las siguientes operaciones y representarlas gráficamente.

i. $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$
ii. $2\overrightarrow{w_3}$
iii. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{w_2}$

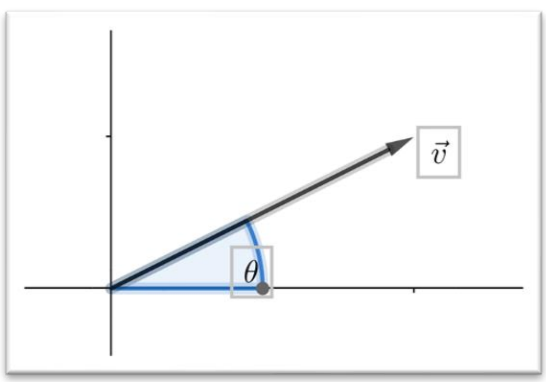
2. Vamos a distraernos un rato, jugando al Pacman con vectores.

3. Si θ es el ángulo que forma el vector $\vec{v}$ con el eje x. Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores en el plano:

a. $\vec{v}$ tiene norma 3 y $\theta = \frac{\pi}{4}$

b. $\vec{v}$ tiene norma 2 y $\theta = \frac{\pi}{3}$

c. $\vec{v}$ tiene norma 1 y $\theta = \frac{4\pi}{3}$



4. Dados los puntos $P = (1,-3), Q = (-3,-1), R = (2,3,1)$ y $S = (-2,3,0)$ se pide:

a. Calcular la longitud de los vectores $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}$, siendo O el origen de coordenadas.
b. Hallar la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$.
c. Hallar la distancia entre P y Q. Comparar con el ítem b.
d. Hallar la distancia entre R y S.
e. Hallar un vector unitario (versor) que tenga la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{OR}$.

5. En el siguiente applet se muestran vectores perpendiculares. En todos los casos, ¿a qué número es igual el producto escalar entre los vectores? Encontrar un vector ortogonal a (1, -1) de longitud 5. ¿Es único? Y si la longitud del vector es 1, ¿es único el vector hallado?

6. Sean los vectores $\vec{u} = (4,-2,1), \vec{v} = (3,1,-5)$ y $\vec{w} = (2,3,-1)$.

a. Hallar $\vec{v}.\vec{u}, \vec{w}.(2\vec{u} - \vec{v}), \vec{v}.(\vec{w} + \vec{u})$.

b. Obtener el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

c. Hallar $\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{w}$

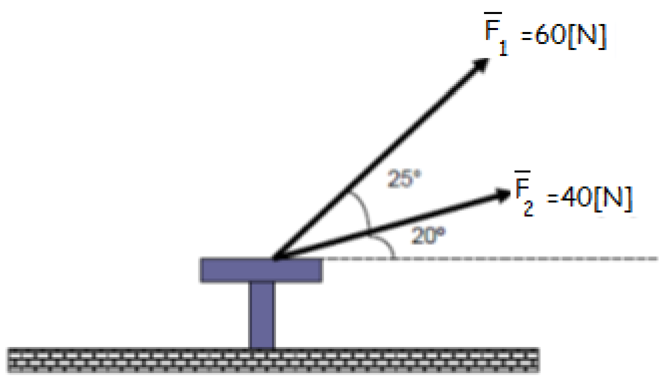
d. Obtener todos los vectores ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

7. Aplicaciones del producto cruz o producto vectorial

a. Calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{u} = (-1,1,-3)$ y $\vec{v} = (4,2,-4)$ como lados adyacentes.

b. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A = (2,0,0)$, $B = (2,3,0)$, $C = (1,2,4)$.

8. Dos fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ actúan sobre un tornillo, tal como se muestra en la siguiente figura (la fuerza está medida en Newton, N). Determinar la magnitud de la fuerza resultante $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.



9. Hallar el valor de $k \in R$ de modo tal que se verifiquen las condiciones pedidas en cada caso.

a. Los vectores $(2,-1,3)$ y $\left(\frac{k}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ son paralelos.

b. Los vectores $(1,2,3)$ y $(k, 1,5)$ son ortogonales.

Ecuación de la recta y del plano

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía se requiere conocer las definiciones relativas a rectas y planos (vector director, normal) y las distintas representaciones de la ecuación de una recta y de un plano, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas, entre planos y entre rectas y planos.

10. Escribir una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en R^2 y representar gráficamente cada recta.

i. $x + 2y = 4$

ii. $y = -x + 3$

iii. L es la recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$.

iv. L es la recta que pasa por el origen de coordenadas, paralela a la recta $x - 3y = 1$.

11. Obtener en cada caso las ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de la recta L en R^3 que verifica las siguientes condiciones. Representar gráficamente.

i. L es la recta que pasa por el punto $(1,3,-1)$ y tiene dirección $(0,1,2)$.

ii. L es la recta que pasa por los puntos $(1,2,-1)$ y $(2,1,1)$.
iii. L es la recta que pasa por los puntos $(3,2,-1)$ y $(2,-2,5)$.
iv. L es una recta ortogonal a $\vec{X} = (0,0,1) + t(-1,2,-2), t \in R$, y pasa por el punto $(-3,2,1)$. ¿Es única?

12. Posiciones relativas entre rectas: Decidir si las siguientes rectas son concurrentes, coincidentes, paralelas o alabeadas.

i. $\vec{X} = (3,1,4) + \lambda(-2,-3,1), \lambda \in R;\ \vec{X} = (6,-1,2) + t(-5,-1,3), t \in R$.
ii. $\vec{X} = (0,-1,2) + \beta(1,3,1), \beta \in R;\ \vec{X} = (1,1,2) + t(2,-1,0), t \in R$.
iii. $\vec{X} = (1,0,0) + \alpha(1,0,-1), \alpha \in R;\ \vec{X} = (3,1,1) + t(-2,0,2), t \in R$.
iv. $x + 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-3};\ \vec{X} = (-1,-3,-1) + \lambda(2,4,-6), \lambda \in R$.

13. En la siguiente figura señala:

- Dos rectas alabeadas
- Dos rectas concurrentes
- Dos planos que no se intersequen
- Dos planos que se corten en una recta

14. Dado el plano de ecuación $\pi: 3x + y + 2z = 1$.

a. Hallar dos puntos distintos que pertenezcan a π.
b. Hallar un versor normal a π.
c. Hallar la intersección del plano π con cada uno de los ejes coordenados.
d. Hallar la intersección del plano π con cada uno de los planos coordenados.
e. Hallar la ecuación de un plano paralelo a π que pase por el punto $(1,0,-1)$.
f. Hallar la ecuación de la recta normal a π que pasa por el punto $(1,-1,0)$.

15.

a. Hallar, en cada uno de los siguientes casos, las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano normal al vector $\vec{n}$ que pasa por el punto P
   i. $\vec{n} = (-1,3,-6); P = (5,3,-2)$
   ii. $\vec{n} = (0,-2,1); P = (2,-1,4)$
b. Hallar las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano que contiene a los puntos P, Q y R si:

i. $P = (1,0,0); Q = (0,1,1); R = (-1,0,2)$
ii. $P = (2,-1,3); Q = (3,3,2); R = (-1,-2,0)$

c. Hallar la ecuación del plano π que contiene al eje z y al eje x.
d. Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos $(1,-2,4)$ y $(1,1,8)$ y es normal al plano de ecuación $x - 2y - 2z + 7 = 0$.
e. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $P = (0,3,-4)$ y contiene a la recta de ecuación
$$\vec{X} = (2,-3,1) + t(2,-2,1), \qquad t \in R$$
f. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{4}$ y que pasa por el punto $Q = (-1,3,2)$.

Nota: Los ejercicios 15e) y 15f) y uno similar al 15b) los encontrarás resueltos a partir de la página 6.

16. Intersección entre planos

a. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: 2x - y + z = 1, \pi_2: -x - y + 2z - 2 = 0$.
b. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: 2x - y + 3z = 5, \pi_2: x + 3y - z = 2$.
c. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: -x + y + z = 1, \pi_2: -5x + 5y + 5z = 3$.
d. Hallar, si existe, la intersección entre el plano $\pi: x + 3y - z = 2$ y la recta $L: \vec{X} = t(1,-1,-1) + (1,0,-2)$, $t \in R$.
e. Hallar, si existe, la intersección entre el plano $\pi: 2x + y + z = 0$ y la recta $L: \vec{X} = t(-2,-1,-1) + (1,-1,2)$, $t \in R$.

Nota: Los ejercicios 16b) y 16d) se encuentran resueltos en la página 11 de esta guía de trabajos prácticos. Para visualizar la representación gráfica de planos, podes utilizar aplicaciones gratuitas como el GeoGebra 3D (Android) y Quick Graph (IOs)

17. Sea π el plano que pasa por los puntos $P = (1,0,2); Q = (0,-1,3)$ y $R = (-1,5,2)$. Sea $B = (3,4,5)$ y sea r la recta perpendicular al plano π que pasa por B.

a. Determinar las ecuaciones del plano π y de la recta r.
b. Determinar las coordenadas del punto M, intersección de la recta r con el plano π.

18. Dados los puntos $P_0 = (4,-1,2), P_1 = (k,0,-1)$ y la recta $r_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

a. Hallar la ecuación del plano π determinado por P_0 y r_1.
b. Obtener, si es posible, el valor de $k \in R$ para que el punto P_1 pertenezca a Π.

Subespacios vectoriales

Para realizar los ejercicios de esta sección de la guía es necesario conocer la definición de subespacio vectorial y los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, base, dimensión y complemento ortogonal de un subespacio.

19. Analizar si los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial en el que están incluidos.

a. $V = \{(x_1, x_2) \in R^2: 3x_1 - x_2 = 0\}$
b. $V = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 + 2x_2 = 1\}$
c. $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: 2x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 6x_3\right\}$
d. $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x^2 + y^2 = z^2\}$

20. Analizar en cada caso si es posible escribir el vector **u** como combinación lineal de los elementos del conjunto S.

a. $S = \{(1,-2),(-3,0)\}; \vec{\boldsymbol{u}} = (-1,4)$.
b. $S = \{(0,0),(2,-4),(1,5)\}$; $\vec{\boldsymbol{u}} = (-1,4)$.
c. $S = \{(2,1,0),(-1,3,2)\}$; $\vec{\boldsymbol{u}} = (2,3,-4)$.
d. $S = \{(3,1,0),(2,4,1),(1,2,2)\}$; $\vec{\boldsymbol{u}} = (2,3,-4)$.

21. Dependencia e independencia lineal. Base de un subespacio

Analizar si los siguientes conjuntos de vectores son o no linealmente independientes.

a. $\{(1,2,-3),(1,2,2),(0,1,1)\}$
b. $\{(1,0,1),(0,0,1),(1,-2,1),(0,0,0)\}$
c. $\{(1,-2,4)\}$
d. $\{(1,2,4,-1),(2,5,3,0)\}$

22.

a. Hallar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el conjunto $\{(-1,-1,1),(2,3,0),(4,1,k)\}$ es linealmente independiente.
b. Hallar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el vector $(4,1,k)$ es combinación lineal de $(-1,-1,1)$ y $(2,3,0)$.

23. Hallar base y dimensión de cada uno de los siguientes subespacios. ¿Qué objeto geométrico representa cada uno de los subespacios?

a. $S = \{(x,y) \in R^2: 3x - 2y = 0\}$
b. $S = \{(x,y,z) \in R^3: 2x + 3y - 4z = 0\}$
c. $S = \{(x,y,z) \in R^3: x + 2y - z = 0, x + z = 0\}$
d. $S = gen\{(-1,1,3),(0,5,-1)\}$

Nota: Los ejercicios 23b) y 23c) se encuentran resueltos en la página 12.

24. Dado el subespacio $S = gen\{(-1,0,1,3),(2,1,0,5),(0,4,8,-4)\}$

a. Hallar una base y la dimensión de S. ¿Qué elemento geométrico representa S?
b. Hallar, si existe, el valor de $k \in R$ para que $(0,k,-4,2) \in S$.

25. Para cada uno de los siguientes subespacios S hallar una base y la dimensión de su complemento ortogonal, $S^{\perp}$.

a. $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3: x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
b. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4: x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_4 = 0\}$
c. $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3: (x_1,x_2,x_3) = t(1,-2,1), t \in R\}$
d. $S = gen\{(1,2,3),(1,0,1),(0,0,1)\}$

26. Sea π el plano que pasa por los puntos $A = (1,-2,1), B = (4,-6,2)$ y $C = (9,-5,-4)$. ¿Es π un subespacio de R^3? En caso afirmativo, hallar una base y la dimensión de su complemento ortogonal.

Algunos ejercicios resueltos

Enunciado:

Hallar las ecuaciones vectorial, cartesiana y paramétrica del plano que contiene a los puntos P_0 , P_1 y P_2 si

$$\begin{cases} P_o = (-6; 6; 2) \\ P_1 = (-2; 3; 1) \\ P_2 = (4; 0; -1) \end{cases}$$

Solución:

“Tres puntos no alineados determinan un plano al cual pertenecen” expresa uno de los postulados de Euclides. Al plano que debemos determinar lo denominamos π .

Tomando los puntos de a pares formamos dos vectores incluidos en el plano:

$P_0P_1 = \vec{a}$ A este vector formado por los puntos P_0 y P_1 lo denominamos $\vec{a}$ y se obtiene restando extremo menos origen.

$\vec{a} = P_1 - P_0$

$\vec{a} = (-2; 3; 1) - (-6; 6; 2)$

$\vec{a} = (4; -3; -1)$

De la misma forma se determina el vector $\vec{b}$

$\vec{b} = P_2 - P_0$

$\vec{b} = (4; 0; -1) - (-6; 6; 2)$

$\vec{b} = (10; -6; -3)$

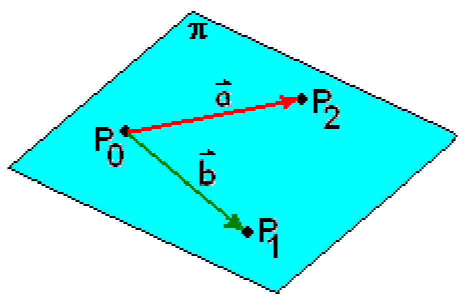


figura de análisis

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos pues sus componentes no forman proporción, esto refuerza la idea de que los puntos no están alineados y garantiza que podamos obtener las ecuaciones del plano π .

Con estos dos vectores incluidos en el plano $\vec{a} \subset \pi$ y $\vec{b} \subset \pi$ y uno de los tres puntos dados como datos, por ejemplo P_0 = (-6; 6; 2) podemos armar la ***ecuación vectorial del plano***:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + q. \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + q. \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{con } t, q \in R}$$

con t y q reales

Desarrollando el segundo miembro de esta expresión, es decir, multiplicando los escalares t y q por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y sumando los vectores, se obtienen las ***ecuaciones paramétricas del plano***:

$$\begin{cases} x = -6 + 4.t + 10.q \\ y = 6 - 3.t - 6.q \qquad \text{con } t, q \in R \\ z = 2 - t - 3.q \end{cases}$$

Volviendo a la figura de análisis, al realizar el producto vectorial entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se obtiene un vector $\vec{n}$ perpendicular a ambos y en consecuencia también es perpendicular al plano donde están incluidos estos vectores. Esto se puede verificar aplicando la condición de perpendicularidad entre vectores, el producto escalar debe dar cero.

$\vec{a} = (4; -3; -1)$

$\vec{b} = (10; -6; -3)$

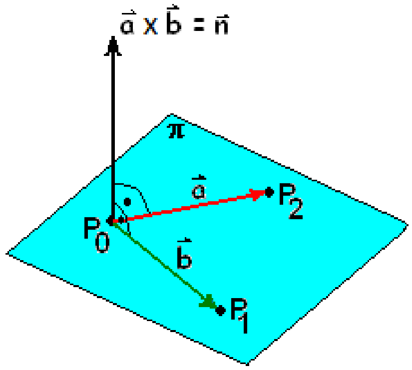


figura de análisis

El vector normal es $\vec{n} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 10 & -6 & -3 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{n} = 3.\breve{i} + 2.\breve{j} + 6.\breve{k}$

Verificamos si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{n}$:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ \vec{b}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.3 - 3.2 - 1.6 = 0 \text{ verifica } \vec{a} \perp \vec{n} \\ 10.3 - 6.2 - 3.6 = 0 \text{ verifica } \vec{b} \perp \vec{n} \end{cases}$$

Elegimos un punto P = (x;y;z) genérico del plano. Con él y el punto P_0 formamos el vector del plano $\overrightarrow{P_0P}$ que como todo vector del plano es perpendicular al vector normal $\vec{n}$.

Entonces por la condición de perpendicularidad se verifica que:

$\vec{n}.\overrightarrow{P_0P} = 0$ ***Ecuación vectorial normal del plano***

$(3; 2; 6).(x + 6; y - 6; z - 2) = 0$

$3.(x + 6) + 2.(y - 6) + 6.(z - 2) = 0$

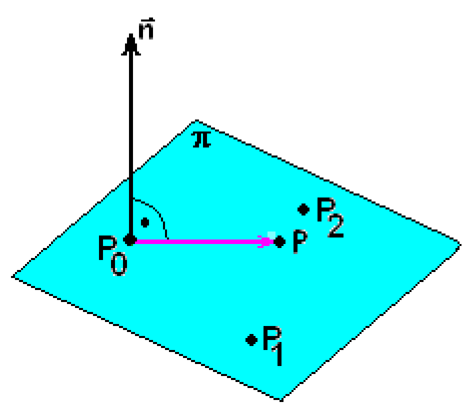


figura de análisis

$$3x+18+2y-12+6z-12=0$$

$$\boxed{3x+2y+6z-6=0}$$

Ecuación general del plano

Como en este caso el plano no pasa por el origen de coordenadas ya que el (0 ; 0 ; 0) no satisface la ecuación se puede obtener la expresión segmentaria del plano:

$$3x+2y+6z-6=0$$
$$3x+2y+6.z=6$$

Dividimos miembro a miembro por 6

$$\frac{3x+2y+6.z}{6}=\frac{6}{6}$$

Distribuimos el denominador:

$$\frac{3x}{6}+\frac{2y}{6}+\frac{6.z}{6}=1$$

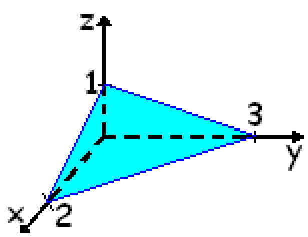
Simplificando:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$$ ***Ecuación segmentaria del plano***

Esta ecuación resulta útil para graficar al plano. Anulando de a dos a las variables obtenemos el punto de intersección entre el plano y el eje de la variable restante:

Si x = 0 y = 0 z = 1
Si x = 0 z = 0 y = 3
Si y = 0 z = 0 x = 2

Estos valores coinciden con los denominadores respectivos de la ecuación.



Tarea: verificar que la ecuación obtenida es correcta, es decir, que el plano obtenido pasa por los puntos indicados.

Enunciado:

15-e. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $P=(0,3,-4)$ y contiene a la recta de ecuación

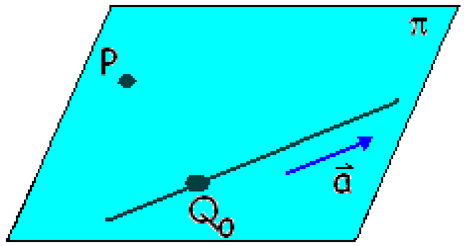
$$\vec{X}=(2,-3,1)+t(2,-2,1), \qquad t\in R$$

Solución:

De la ecuación de la recta podemos leer un punto de la misma y un vector director

$$X=\underbrace{(2;-3;1)}_{\text{Punto de la recta } Q_0}+t.\underbrace{(2;-2;1)}_{\text{Vector asociado } \vec{a}} \quad \text{con } t\in R$$

Como la recta está contenida en el plano, el vector asociado y el punto forman parte del plano



Con los puntos Q_0 de la recta y P del plano formamos un vector $\overrightarrow{Q_0P}$ incluido en el plano.

$\overrightarrow{Q_0P} = P - Q_0 = (0;3;-4) - (2;-3;1) \rightarrow \overrightarrow{Q_0P} = (-2;6;-5)$ lo llamamos $\vec{b}$

Con los datos obtenidos hasta ahora:

Los vectores $\vec{a} = (2;-2;1)$ y $\vec{b} = (-2;6;-5)$ y el punto P = (0, 3, -4) podemos armar la ecuación vectorial del plano

$$\pi \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \text{con t y q reales}$$

Como el enunciado no especifica una ecuación particular del plano, podríamos tomar a la anterior por respuesta. Sin embargo, en general, se expresa al plano con su ecuación general. Para esto necesitamos un punto, que lo tenemos, es P, y un vector normal al plano que lo calculamos con el producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4.\breve{i} + 8.\breve{j} + 8.\breve{k}$ este vector es perpendicular al plano π, pero cualquier vector que sea múltiplo de él (paralelo) podemos usarlo como vector normal, por ejemplo a $\vec{n} = (1;2;2)$

Reemplazamos en la ecuación general del plano: $n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$

$$x + 2.y + 2.z + k = 0$$

Como el punto P = (0, 3, -4) pertenece al plano

$$1.0 + 2.3 + 2.(-4) + k = 0$$

Despejamos k:

$$k = 2$$

Reemplazamos en la ecuación el valor de k:

$$\pi \rightarrow x + 2.y + 2.z + 2 = 0$$

Respuesta: el plano buscado es $\boxed{\pi \rightarrow x + 2.y + 2.z + 2 = 0}$

Enunciado:

13-f. Hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-4}{4}$ y que pasa por el punto $Q=(-1,3,2)$.

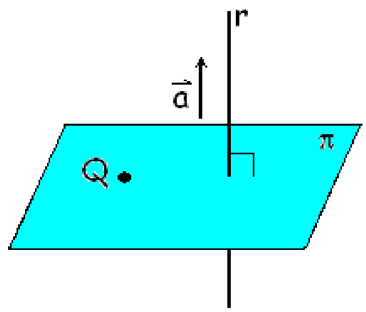
Solución:

De la ecuación de la recta podemos leer un punto de la misma y un vector asociado o vector director

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-4}{4}$$

Vector director
$\vec{a}=(2;-1;4)$

Un punto perteneciente a la recta es P = (1; -6 ; 4).
La recta es perpendicular al plano, por lo que su vector asociado también lo es y lo usamos como vector normal al plano



Con el vector normal $\vec{a}=\vec{n}=(2;-1;4)$, armamos la ecuación general del plano: $n_1x+n_2y+n_3z+k=0$

Reemplazando:

$$2.x-y+4.z+k=0$$

Como el punto Q = (-1, 3, 2) pertenece al plano

$$2.(-1)-3+4.2+k=0$$

Despejando k :

$$k=-3$$

Reemplazamos en la ecuación el valor de k:

$$\pi\rightarrow 2x-y+4z-3=0$$

Respuesta: La ecuación del plano buscado es: $\boxed{\pi\rightarrow 2x-y+4z-3=0}$

Enunciado:

16. b. Hallar, si existe, la intersección entre los planos $\pi_1: 2x-y+3z=5, \pi_2: x+3y-z=2$.

Solución:

Si los planos se cortan pueden suceder dos cosas: una es que los planos sean coincidentes, y la otra es que se intersequen en una recta. La forma de averiguarlo es resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde el sistema nunca puede dar compatible determinado (es imposible que dos planos que se corten den por resultado un único punto). Además al aplicar el teorema de clasificación de los sistemas a través del rango, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada (como máximo 2) no pueden valer igual al número de incógnitas (3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) F_1\text{-}2.F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) -\tfrac{1}{7} F_1 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$F_2\text{-}3.F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \end{array}\right)$$

Volviendo a las variables: $\begin{cases} y - \frac{5}{7}z = -\frac{1}{7} \\ x + \frac{8}{7}z = \frac{17}{7} \end{cases}$ despejando: $\begin{cases} y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z \\ x = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}z \end{cases}$

Armamos el conjunto solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} - \frac{8}{7}z \\ -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{7}z \\ \frac{5}{7}z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{7}.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Llamamos a $t = \frac{z}{7}$ y queda: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t \in R$, que es la ecuación vectorial de la recta resultado de la intersección de los dos planos $\boldsymbol{\pi_1}$ **y** $\boldsymbol{\pi_2}$

Respuesta: $\boldsymbol{\pi_1 \cap \pi_2 =} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in R \right\}$

Enunciado:

16. d. Hallar, si existe, la intersección entre el plano $\pi: x + 3y - z = 2$ y la recta $L: \vec{X} = t(1,-1,-1) + (1,0,-2),\ t \in R$.

Solución:

La recta **L** dada por la ecuación en su forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Vector director la recta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Punto de la recta}} \qquad t \in R$$

A medida que cambiamos el valor del parámetro “t”se obtienen distintos puntos de la recta.

Expresamos sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = -t - 2 \end{cases}$

Reemplazamos en la ecuación general del plano **π**: x + 3 . y – z = 2

① $(t+1)+3.(-t)-(-t-2)=2$

Buscamos si existe o no un valor particular de "t" para el cual se verifique la ecuación ①

$t+1-3.t+t+2=2$

$-t+3=2$

$t=1$

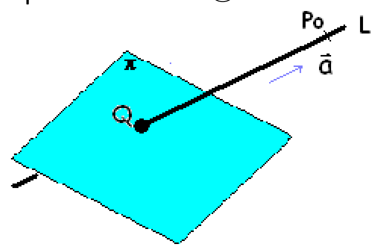


figura de análisis

Para obtener el punto de intersección, reemplazamos el valor de t obtenido en las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 - 2 = -3 \end{cases}$$

El punto Q de coordenadas (2; -1; -3) es común a la recta **L** y al plano **π.** Verificamos esto último reemplazando en la ecuación del plano: 2+ 3. (-1)- (-3) = 2.

Respuesta: L ∩ π = $\{(2;-1:-3))\}$

Observaciones:

1) En la expresión ① puede ocurrir que se cancelen todas las "t" y quede una igualdad. Esto significa que para todo valor real del parámetro "t" se verifica la igualdad, lo que geométricamente representa que no existe un único punto de intersección entre la recta y el plano, si no infinitos, es decir la recta está incluida en el plano.

2) En la expresión ① puede ocurrir que se cancelan todas las "t" y quede un absurdo. En este caso no existe ningún valor de "t" que cumpla con la condición: la recta es paralela exterior al plano y no hay intersección.

---

23. Hallar base y dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:
  b. $S = \{(x, y, z) \in R^3 : 2x + 3y - 4z = 0\}$
  c. $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x + 2y - z = 0, x + z = 0\}$

Solución 23 b.

La expresión $2x + 3y - 4z = 0$ corresponde a la ecuación general de un plano que pasa por el origen de coordenadas (el término independiente es nulo), despejando una de las variables (puede ser cualquiera):

$$x = \frac{-3y + 4z}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}.y + 2.z$$

Reemplazamos en la expresión:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ separando las variables en suma de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ escribiéndolo como escalar por vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{y}{2} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cambiando variables

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con t y q reales

Esta es la ecuación vectorial del mismo plano anterior. En la misma se leen dos vectores incluidos en el plano que se pueden utilizar para formar una base del mismo:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ como está formada por dos vectores la dimensión es 2.

Vale aclarar que la base no es única.

Solución 23 c.

Las expresiones $x + 2y - z = 0$, $x + z = 0$ representan cada una un plano. Por lo tanto, resolver el sistema equivale a hallar la intersección entre dos planos. Como los planos no son paralelos (sus vectores normales no lo son) ni coincidentes, esperamos que la intersección sea una recta. Como son dos condiciones que deben cumplir las ternas (x;y;z) para pertenecer al subespacio S, se deberá resolver el sistema formado por ellas:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Lo hacemos por el método de reducción de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_1 - 2.F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ volviendo a las variables: } \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

La variable "z" podemos considerarla como libre, despejamos a las otras dos en función de ella $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$ reemplazando:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ expresando como producto entre escalar y vector: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que es la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen de coordenadas. El vector asociado es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o cualquiera que sea combinación lineal de él.

La base tendrá a éste vector como único elemento por eso es de dimensión 1. $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$