Ejercicios

1. Sean p una proposición tal que su valor de verdad es verdadero, q una proposición cuyo valor de verdad es falso y r una proposición de la que no se conoce su valor de verdad. Determinar, si es posible, el valor de verdad de la siguiente proposición. Justificar.

$$-\left[\ (p \wedge -p) \vee -(p \vee r)\ \right]$$

2. Demostrar la validez del siguiente razonamiento utilizando reglas de inferencia y/o leyes lógicas. Justificar en cada paso la regla o ley utilizada.

$$\begin{array}{l} p \vee -q \\ q \wedge -r \\ \underline{s \rightarrow (-p)} \\ \therefore -s \end{array}$$

3. Demostrar (justificar cada paso) que en un álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , 0, 1) se verifica la siguiente propiedad:
Si x, y, z B son tales que x.y=x $\wedge$ y.z=y, entonces x.z = x

4. Sean A, B conjuntos contenidos en un conjunto universal U. Decidir si las siguientes proposición es son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) A $\subseteq$ P(A)
b) P(A $\cap$ B) = P(A) $\cap$ P(B)

5.
a) Si A, B y C son conjuntos contenidos en un universal U, representar mediante un diagrama de Venn el resultado de la operación: $[(A - B) \cup C] \cap B'$

b) Hallar una expresión que sea lógicamente equivalente a la que se da abajo y que comience con un cuantificador.

$$\neg[\forall x : (r(x) \rightarrow (p(x) \wedge q(x)))]$$

Resolución

Ejercicio 1.

Sean p una proposición tal que su valor de verdad es verdadero y r una proposición de la que no se conoce su valor de verdad. Determinar, si es posible, el valor de verdad de la siguiente proposición. Justificar.

$$-\left[\ (p \wedge -p) \vee -(p \vee r)\ \right]$$

Sabemos, por la ley del inverso, que $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$, por lo que v ($p \wedge \neg p$) = F. Por otro lado, por ser p una proposición cuyo valor de verdad es verdadero, deducimos que v ($p \vee r$) = V (dado que para que el “o” resulte verdadero, basta que alguna de las proposiciones que intervienen lo sea). En consecuencia, v ($\neg(p \vee r)$) = F.

Por lo tanto, dado que tanto $p \wedge \neg p$ como $-(p \vee r)$ resultan proposiciones falsas, v ($(p \wedge -p) \vee -(p \vee r)$) = F, de modo que v ($\neg \left[(p \wedge -p) \vee -(p \vee r)\right]$) = V

Ejercicio 2 Demostrar la validez del siguiente razonamiento utilizando reglas de inferencia y/o leyes lógicas. Justificar en cada paso la regla o ley utilizada.

$$\begin{array}{l} p \vee -q \\ q \wedge -r \\ \underline{s \rightarrow (-p)} \\ \therefore -s \end{array}$$

Demostremos la validez del razonamiento dado, para lo cual podemos utilizar las reglas de inferencia y las leyes lógicas.

1. $p \vee -q$ premisa
2. $q \wedge -r$ premisa
3. $s \rightarrow (-p)$ premisa
4. $\neg p \rightarrow \neg q$ equivalencia del condicional en 1.
5. $s \rightarrow \neg q$ silogismo hipotético entre 3 y 4
6. q simplificación conjuntiva en 3.
7. $\neg s$ modus tollens entre 5 y 6.

Observación: la que se muestra es una manera posible de demostrar la validez del razonamiento, pero no es la única forma de hacerlo.

Ejercicio 3 Demostrar (justificar cada paso) que en un álgebra de Boole (B, + , . , ‘ , 0, 1) se verifica la siguiente propiedad:
Si x, y, z B son tales que x.y=x $\wedge$ y.z=y, entonces x.z = x

La idea de la demostración es la siguiente: sabemos que x.y = x así como también que yz = y. Conociendo estos datos, queremos probar que xz = x.

Tenemos que xz = (xy) .z (por hipótesis, x = xy). Luego, por la ley asociativa que se verifica en cualquier álgebra de Boole: xz = (xy)z = x. (yz). Y, como por hipótesis, yz = y, deducimos que: xz = (xy)z = x. (yz) = xy = x (en la última igualdad volvimos a aplicar la hipótesis de que xy = x).

Ejercicio 4 Sean A, B conjuntos contenidos en un conjunto universal U. Decidir si las siguientes proposición es son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) A $\subseteq$ P(A)
Esta proposición es falsa. Para demostrarlo, basta considerar un contraejemplo. Sea A = {1 ; 2; luego, su conjunto de partes es P (A) = $\left\{\varnothing ; \{1\} : \{2\} ; \{1 ; 2\}\right\}$. Tenemos que A $\not\subset$ P(A): el “1” es un elemento que pertenece al conjunto A y no pertenece a su conjunto de partes. La proposición que resultaría verdadera es A $\in$ P (A)

b) P(A $\cap$ B) = P(A) $\cap$ P(B)

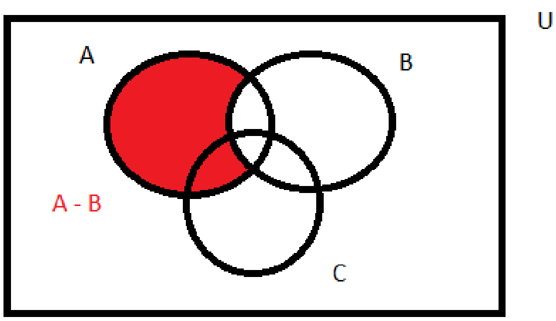
Esta proposición es verdadera. Sean A, B dos conjuntos contenidos en un conjunto universal U. Sea C $\in P(A \cap B)$. Entonces:

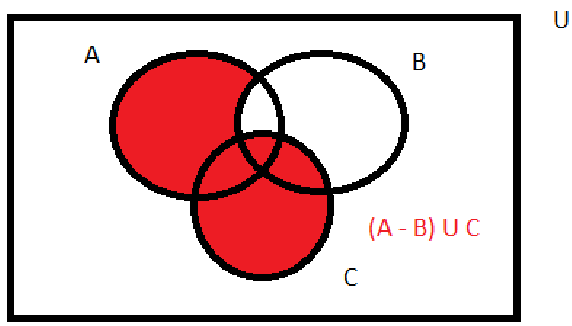
$$C \in P(A \cap B) \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow C \in P(A) \wedge C \in P(B) \Leftrightarrow C \in P(A) \cap P(B).$$

Por definición de conjuntos de partes; por definición de intersección; por definición de conjunto de partes; definición de intersección

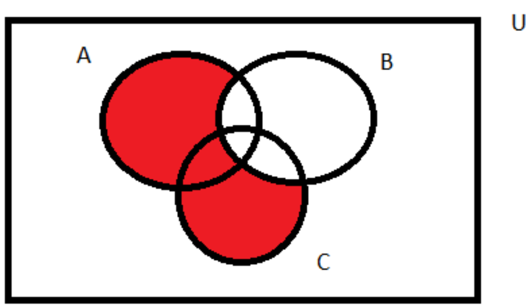
Ejercicio 5

a) Si A, B y C son conjuntos contenidos en un universal U, representar mediante un diagrama de Venn el resultado de la operación: $[(A-B)\cup C]\cap B'$





$[(A-B)\cup C]\cap B'$



b) Hallar una expresión que sea lógicamente equivalente a la que se da abajo y que comience con un cuantificador.

$$\neg[\forall x : (r(x) \to (p(x) \wedge q(x)))]$$

$$\neg[\forall x : (r(x) \to (p(x) \wedge q(x)))] \Leftrightarrow \exists x : \neg (r(x) \to (p(x) \wedge q(x)))$$ negación de un cuantificador universal

$$\Leftrightarrow \exists x : \neg (\neg r(x) \vee (p(x) \wedge q(x))$$ equivalencia del condicional

$$\Leftrightarrow \exists x : (r(x) \wedge \neg (p(x) \wedge q(x))$$ ley de De Morgan / doble contradicción

$$\Leftrightarrow \exists x : (r(x) \wedge (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$$ ley de De Morgan

Por lo tanto, una proposición lógicamente equivalente a la dada que comience con un cuantificador podría ser $\exists x : (r(x) \wedge (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$.