LA ECUACION DE ONDA.

Consideremos una perturbación, generada en una cuerda, que viaja hacia la derecha con una rapidez constante u (fig. 6.1). Si convenimos en denotar por x a las diferentes posiciones a lo largo de la dirección de propagación de la perturbación y por y a las posiciones perpendiculares a ésta, la forma de la perturbación quedará descrita por una función $y = f(x,t)$. Si durante la propagación de la perturbación no existe disipación de energía, la forma y el tamaño de la perturbación no cambiarán a medida que ésta se desplaza. (En particular, la propagación de la luz en el espacio vacío cumple con este requisito.) En tal caso se debe cumplir necesariamente que

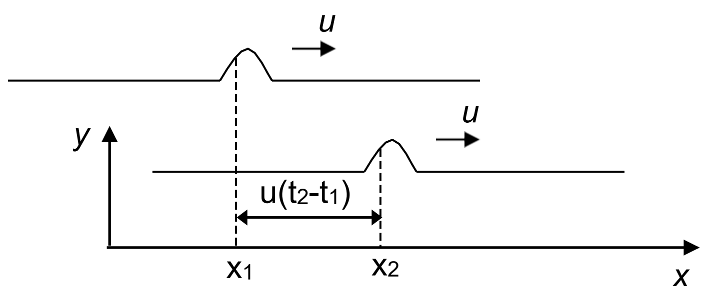

Figura 6.1. Una perturbación ondulatoria en una cuerda.

$$f(x_1,t_1) = f(x_2,t_2) \tag{6-1}$$

en donde $x_2 = x_1 + u(t_2 - t_1)$, ya que $u(t_2 - t_1)$ es la distancia que ha avanzado la perturbación en el intervalo $t_2 - t_1$. Este requisito se cumple si la función que describe a la perturbación tiene la forma

$$f(x,t) = y(x - ut) \tag{6-2}$$

ya que entonces,

$$f(x_2,t_2) = y(x_2 - ut_2) = y[x_1 + u(t_2 - t_1)- ut_2] = y(x_1 - ut_1) = f(x_1,t_1) \tag{6-3}$$

Desde luego, si la perturbación viaja hacia la izquierda, la forma de la función debe ser

$$f(x,t) = y(x + ut) \tag{6-4}$$

Es importante recalcar que si el argumento de la función que describe a la perturbación tiene la forma 6-2, o la 6-4, entonces se cumple el requisito de que la perturbación no cambia de forma a medida que se desplaza y se puede demostrar que esa es la única forma posible de cumplir con ese requisito. En todo caso, lo importante es que la función $f(x,t)$ puede ser cualquiera, con tal de que su argumento contenga a x y a t solamente como combinaciones de la forma $x - ut$, ó $x + ut$.

De todas las formas posibles en que puede oscilar transversalmente un punto de la cuerda (es decir, moverse a lo largo de la dirección y, que es perpendicular a la dirección de propagación), solo consideraremos un tipo de movimiento, llamado armónico simple, el cual está descrito por una variación sinusoidal de la función y. En particular, consideremos que en el origen de la cuerda ($x = 0$) se genera una secuencia de perturbaciones armónicas periódicas con un desplazamiento máximo (amplitud) y_0. En ese caso, el movimiento transversal del origen quedara descrito por la ecuación:

$$y = y_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (6\text{-}5)$$

en donde ω es una constante -llamada frecuencia angular, cuyas unidades son segundos inversos (s^{-1} = hertz)- que está relacionada con la frecuencia ν del movimiento a través de $\omega = 2\pi\nu$. La función

$$y = f(x - ut) = y_0 \operatorname{sen} [\omega(x - ut)/u] \qquad (6\text{-}6)$$

describe el movimiento transversal del origen de la cuerda (ya que $x = 0$), pero también describe el movimiento de cualquier punto x de la perturbación. Si definimos una nueva constante, llamada número de onda k, como $k = \omega/u = 2\pi\nu/u$, la onda armónica queda descrita por:

$$y = y_0 \operatorname{sen} (kx - \omega t) \qquad (6\text{-}7)$$

Recordando que una función sinusoidal es cíclica, con "periodo" 2π, podemos obtener unas relaciones importantes. En primer lugar, consideremos que estamos observando a la perturbación en una posición fija. Para que el argumento de la función cambie en 2π, tiene que transcurrir tiempo T tal que $\omega(t + T) - \omega t = 2\pi$; en ese caso, $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, que es la relación que ya habíamos mencionado. Por otra parte, si "examinamos" una fotografía de la onda (esto es, si fijamos el tiempo), el argumento de la función cambia en 2π cuando la perturbación se desplaza una distancia λ (llamada longitud de onda) tal que $k(x + \lambda) - (kx) = 2\pi$, es decir cuando $k = 2\pi/\lambda$. Como $k = 2\pi\nu/u$, entonces $\lambda\nu = u$.

Aunque ya contamos con una expresión para la rapidez de la perturbación en términos de la frecuencia angular y del número de onda, conviene considerar un cálculo explicito de ésta rapidez. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ la perturbación recorre una distancia $\Delta x = x_2 - x_1$. Si consideramos dos puntos de la perturbación viajera con el mismo valor de y en las dos posiciones x_1 y x_2, entonces los argumentos de la función y(x,t) para estos puntos deben iguales; es decir:

$$kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) \qquad (6\text{-}8)$$

así que

$$\Delta x/\Delta t = \omega/k \qquad (6\text{-}9)$$

en el límite cuando $t \rightarrow 0$, obtenemos la velocidad de fase

$$u = dx/dt = \omega/k \qquad (6\text{-}10)$$

También podemos llegar a este resultado calculando

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_y = -\frac{(\partial y/\partial t)_x}{(\partial y/\partial x)_t} = \frac{\omega}{k} \qquad (6\text{-}11)$$

LA ECUACIÓN DE ONDA.

Partiendo de la Ec 6-1 podemos calcular

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = u\frac{\partial f}{\partial x}$$

y también, si la velocidad de propagación u de la onda es constante,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial f}{\partial x}\right) = u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} = u^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}12)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (6\text{-}13)$$

Esta es la ecuación diferencial que buscábamos. Conviene recalcar que la única suposición importante que hicimos para llegar a esta ecuación fue que la perturbación que no cambia de tamaño ni de forma conforme se propaga a lo largo de la cuerda, y que esto implica que tal propagación se lleva a cabo sin disipación de energía.