

# *PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA APLICADA*

# ÍNDICE

TEMA 1: INTERVALOS DE CONFIANZA SOBRE MEDIAS CON VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA.....	3
TEMA 2: ENSAYOS DE HIPOTESIS SOBRE MEDIAS CON VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA.....	4
TEMA 3: INFERENCIA SOBRE LA MEDIA CON VARIANZA DESCONOCIDA. DISTRIBUCION DE STUDENT. INTERVALOS DE CONFIANZA. ENSAYOS DE HIPOTESIS..	9
TEMA 4: INFERENCIA EN LOS PROCESOS DE BERNOULLI.....	11
TEMA 5:INFERENCIA SOBRE VARIANZAS.....	16
TEMA 6: MODELO LINEAL DE DOS VARIABLES.....	17
TEMA 7: MODELO LINEAL GENERAL.....	21
TEMA 8: COMPARACIÓN DE DOS POBLACIONES .COMPARACIÓN DE VARIANZAS - DISTRIBUCIÓN F DE FISHER-SNEDECOR. COMPARACIÓN DE DOS MEDIAS. MUESTRAS INDEPENDIENTES Y MUESTRAS APAREADAS.....	22
TEMA 9: CONTRASTE CHI-CUADRADO.....	26
EJERCICIOS INTEGRADORES:.....	29

**TEMA 1: INTERVALOS DE CONFIANZA SOBRE MEDIAS CON VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA.**

1) Una máquina llenadora de latas de café dosifica cantidades variables con distribución Normal de desvío estándar 15 gramos. A intervalos regulares se toman muestras de 10 envases con el fin de estimar la dosificación media. Una de estas muestras arrojó una media de 246 gramos.

- a) Estimar la dosificación media con un 90% de confianza.  
b) ¿Cuántos envases más habría que pesar para poder obtener una estimación cuyo error de muestreo fuera 5 gramos?

Resp: a) Entre 238 y 254 gramos. b) 15 envases más.

2) Una empresa dedicada a la fabricación de envases de vidrio, cuenta con un plantel numeroso de operarios, y desea estimar el tiempo medio de tardanza de los mismos. El estudio se realizará sobre la base de las tarjetas horarias, estableciendo que: a) El máximo error muestral admitido debe ser de 2 minutos; b) el nivel de confianza del 99%; c) el desvío estándar poblacional es de 5 minutos, conocido por ensayos anteriores.

- a) Calcular el tamaño adecuado de muestra.  
b) Se toma la muestra y se obtiene que la tardanza media es de 15 minutos. Estimar la tardanza media de todo el personal.

Resp: a) 42 tarjetas. b) Entre 13 y 17 minutos.

3) En una zona de Capital Federal se realizará un muestreo sobre una población compuesta por negocios minoristas, con el objeto de estimar el número medio de empleados por establecimiento. La experiencia en encuestas por muestreo indica que el desvío es de 1,2 empleados por establecimiento.

- a) Cuántos establecimientos habrá que incluir en la muestra si se pretende un error muestral de  $\pm 0,5$  empleados, y un nivel de confianza en la estimación del 95%?.  
b) Estimar el número medio de empleados para todos los negocios minoristas, teniendo en cuenta los siguientes resultados:

Empleados	Establecimientos
0	2
1	4
2	5
3	6
4	4
5	2

Resp: a) 23 establecimientos. b) Entre 2 y 3 empleados.

4) En una fábrica de materiales eléctricos se desea estimar el peso promedio del último lote de rollos de alambre de cobre salido de producción. Para ello se eligió al azar una muestra de 20 que arrojó un promedio de 38 kg. Se conoce además, de registros históricos, el desvío poblacional, que vale 4,2 kg.

- a) Estimar el peso medio de los rollos con un 95% de confianza.  
b) ¿Cuántos rollos más habría que pesar para poder obtener una estimación cuyo error de muestreo fuera 1 kg?.

Resp: a) Entre 36,2 y 39,8 kg. b) 48 rollos más.

## **TEMA 2: ENSAYOS DE HIPOTESIS SOBRE MEDIAS CON VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA.**

1) El control de recepción de las partidas de un tipo de hilo de coser industrial, se realiza pesando una muestra de 10 ovillos de cada partida, rechazando la partida si el peso medio de la muestra resulta inferior a cierto valor crítico. El valor mínimo admisible del peso medio de los ovillos de toda la partida es de 250gramos y la probabilidad máxima de rechazar una partida que cumple con dicha especificación es del 5%. Se sabe además, por disponer de registros históricos extensos, que el desvío estándar de esta variable es de 15gramos. Indicar la hipótesis nula apropiada a esta situación, su condición de rechazo y la regla de decisión.

Resp: Ho)  $\mu \geq \mu_0 = 250\text{grs}$ . CR:  $\bar{x}_c = 242\text{g}$ ; RD: Si se rechaza la hipótesis, se rechaza la partida.

2) Una carpintería de Capital Federal recibe periódicamente grandes partidas de madera de cedro procedentes de un aserradero de Salta. Una partida se considera aceptable si la longitud media de sus tablas es mayor o igual que 4 mts. Al examinar una muestra de 5 tablas de una partida recién recibida, se obtuvieron los siguientes resultados en metros: 3,8 - 3,74 - 3,98 - 4,1 - 3,9. Se sabe además que la longitud de las tablas se distribuye Normalmente con un desvío estándar de 0,15 metros. a) ¿Considera Ud. aceptable esta partida si se establece en 5% la probabilidad de rechazarla indebidamente? Justifique conceptualmente el planteo optimista de la hipótesis. b) ¿Cuál sería la probabilidad de aceptar una partida cuya longitud media fuera de 3,85 mts? c) Dibujar las curvas Característica Operativa y de Potencia. d) ¿Cuántas tablas habría que medir de cada partida para que dicha probabilidad anterior valga 0,1?

Resp: a) Sí. b) 0,277. d) 9.

3) El consumo de combustible de un automóvil para un determinado recorrido es una variable aleatoria de la cual se ha tomado una importante cantidad de datos que han arrojado una media de 11,2litros con un desvío estándar de 1,3litros, valores estos que pueden considerarse parámetros poblacionales. Se desea ensayar el efecto de un nuevo aditivo con el que se espera reducir el consumo medio y, de confirmarse esta suposición, se lanzará al mercado. Dados los costos implicados, se establece un riesgo del 5% de lanzar el producto cuando no produce el efecto deseado. Se realiza una prueba preliminar en la cual, sobre 10 corridas -de igual recorrido- se registra un consumo medio de 10,6litros. Parece razonable asumir que el desvío estándar no se modificará. a) ¿Considera Ud. que el resultado de la prueba es concluyente? b) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el producto cuando con él se tiene un consumo medio de 10,5 litros? c) ¿Cuántas corridas habría que efectuar para que la probabilidad anterior valga 90%? d) Dibujar las curvas Característica Operativa y de Potencia para ambos tamaños de muestra.

Resp: a) No. b) 0,524. c) 30.

4) Un cliente recibe habitualmente una partida de medidores eléctricos que, según las especificaciones del contrato, el promedio de las pérdidas debe ser menor o igual a 1 watt. Una muestra de 10 medidores, de una partida recién recibida, arroja una pérdida media de 1,06watts. Se sabe además, por experiencia anterior, que las pérdidas se distribuyen Normalmente con un desvío de 0,1watts. a) Asumiendo en un 10% la probabilidad de rechazarla indebidamente, ¿puede aceptarse la misma? b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar una partida cuya pérdida media sea de 1,05 watts? c) ¿Cuál debería ser el tamaño de muestra si se pretende que dicha probabilidad valga 10%?

Resp: a) No. b) 0,38. c) 27 medidores.

5) Una cadena de supermercados considera la posibilidad de cambiar sus máquinas registradoras por otras más modernas lanzadas al mercado recientemente. Se ha establecido la conveniencia de la inversión si se puede asegurar que el tiempo medio de atención por cliente ha de ser inferior a los 2 minutos y se desea que valga 5% la probabilidad de tomar una decisión errónea en tal sentido. Se sabe que, con las máquinas actuales, el desvío estándar respecto del tiempo de atención es de 1,5minutos, teniéndose razones fundadas para asumir que con las máquinas nuevas no ha de modificarse. Se realizó un ensayo con las máquinas nuevas, en el cual se atendieron 40 personas en 68 minutos. a) ¿Cuál sería, con esta información, la decisión recomendada? b) ¿Cuál sería la probabilidad de comprar las nuevas máquinas, si con ellas el tiempo medio de atención fuera de 1,8 minutos?

Resp: a) No comprar las nuevas máquinas. b) 0,21.

6) El consumo diario de combustible en una planta industrial es variable con distribución aproximadamente Normal y desviación estándar 23 litros. Se considera la posibilidad de introducir una modificación en el proceso tecnológico, que sólo se justificará si se logra obtener un consumo medio inferior a 200 litros. A efectos de tomar una decisión, se trabajó durante 5 días con el proceso modificado obteniéndose un consumo medio de 180 litros. a) ¿Aconsejaría Ud. efectuar tal modificación con probabilidad máxima de error del 5%? b) Estime con un 20% de riesgo el consumo medio de combustible con el proceso modificado.

Resp: a) Sí. b) Entre 167 y 193 litros.

7) En una curtiembre, el consumo diario de uno de los productos químicos principales es variable con una media de 580 litros y desvío estándar de 72 litros. El Jefe de Producción ha propuesto una modificación en una de las etapas del proceso, que implicará mayores costos, pero que se justificaría si se lograra una disminución del 10% en el consumo medio. Si así ocurriera, se desea un 90% de probabilidad de implementarla, pero si no se obtuviera resultado alguno, el riesgo se establece en un 5%. a) Indique la hipótesis nula apropiada a esta situación, calcule el tamaño de la muestra a tomar, indique la condición de rechazo y la regla de decisión correspondiente. b) Calcule la probabilidad de implementar la modificación si con ella se obtiene una disminución del 5% en el consumo medio y dibuje la curva de potencia del ensayo, marcando claramente los valores numéricos de abscisa y ordenada de 3 puntos al menos. c) Si se decidiera hacer el ensayo de hipótesis dos veces, cada una con una muestra de  $n$  días, y el consumo hubiera disminuído en un 5%, ¿cuál sería la probabilidad de que ninguna de las muestras lo detecte?

Resp: a)  $n = 14$ ;  $\bar{x}_c = 548$  litros; b) 0,436; c) 0,32

8) Un fabricante estudia la compra de un equipo para elaborar herramientas para la construcción. La compra será viable si se puede asegurar que el equipo no requiere en promedio más de 12 min de tiempo de preparación por cada hora de operación. El jefe de compras visita una empresa en donde está instalado el equipo y por la información que recibe comprueba que 25 horas de operación seleccionadas al azar, han requerido un total de 4 horas y 30 min de tiempo de preparación. Se sabe además, que el desvío estándar del tiempo de preparación por hora de operación es de 2 minutos. Si se establece en un 5% el riesgo de comprar equivocadamente el equipo: a) ¿Aconsejaría Ud. comprarlo? b) ¿Cuál es la probabilidad de no efectuar la compra si el tiempo medio es de 11 minutos? c) ¿Cuántas horas habría que operar el equipo si se pretende que la probabilidad anterior valga 10%?

Resp: a) Sí. b) 0,2. c) 35 horas.

9) Se desea establecer un sistema de muestreo periódico para controlar la resistencia a la rotura de unas piezas de Dural, de modo tal que se cumplan las siguientes condiciones: 1) Si la resistencia media es de 38 kg/mm<sup>2</sup>, detener el proceso productivo con probabilidad 0,1; 2) si dicho parámetro vale 37 kg/mm<sup>2</sup>, detener el proceso con probabilidad 0,95. Se sabe que esta variable tiene un desvío estándar de 1,3 kg/mm<sup>2</sup>. a) Indicar la hipótesis nula apropiada, su condición de rechazo, el tamaño de la muestra a tomar y la regla de decisión; b) calcular la probabilidad de detectar que la resistencia media vale 37,5 kg/mm<sup>2</sup>; c) dibujar la curva de potencia del ensayo.

Resp.: a)  $H_0: \mu \geq 38 \text{ Kg} / \text{mm}^2$ . CR:  $\text{si } \bar{X} \leq \bar{X}_c = 37.57 \text{ Kg} / \text{mm}^2$  RHo  $n=15$ , b) 0.583

10) Se desea diseñar un sistema de muestreo periódico para controlar el rendimiento de un proceso químico, cuyo valor estándar es del 80%; la probabilidad de detenerlo y revisarlo equivocadamente debe ser 0,05, pero cuando baja al 75% se desea una probabilidad 0,9 de detectarlo. Entre distintas pruebas, los valores de rendimiento se distribuyen Normalmente con un desvío del 6%. a) Indicar la hipótesis nula apropiada, su condición de rechazo y la regla de decisión. b) Calcular la probabilidad de detener el proceso cuando su rendimiento es del 76%. c) Dibujar las curvas Característica Operativa y de Potencia. d) Si en un ensayo de prueba se obtuvo un rendimiento medio de 0,75. Qué decisión tomaría?

Resp: a)  $H_0: \mu \geq 0.8$ . CR: Si  $\bar{x} \leq \bar{x}_c = 77,3\%$  se revisa. b) 0,776.

11) La resistencia a la rotura de cierto tipo de alambre tiene distribución Normal con media 280 kg y desvío estándar 20 kg. Se cree que un proceso de fabricación recién desarrollado puede aumentar la resistencia sin modificar el desvío estándar, pero sólo se lo implantará si se tiene una razonable seguridad de que efectivamente es así. Se ha establecido en un 5% la probabilidad de implantar el nuevo método cuando en realidad la resistencia no se modifica, y en un 15% la probabilidad de no implantarlo si se incrementa en 10 kg. a) Establezca la hipótesis nula, la condición de rechazo y la regla de decisión. b) ¿Cuál es la probabilidad de implantar el nuevo método si la resistencia media aumenta en 5 kg?

Resp: a)  $H_0) \mu \leq 280 \text{Kgrs.}$  CR: Si  $\bar{x} \geq \bar{x}_c = 286,11 \text{ kg.}$  se implanta el nuevo método. b) 0,38.

12) Una compañía desea diseñar un sistema de muestreo periódico para controlar la recepción de grandes partidas de un producto. El proveedor desea tener la seguridad de que le rechacen a lo sumo el 5% de las partidas buenas, que son aquellas que cumplen con la especificación de que la resistencia media mínima es de 1250kg. A su vez, el cliente desea rechazar al menos el 90% de las partidas malas, que son aquellas cuya resistencia media es inferior a 1100kg. Ambos firman un contrato en el cual constan las condiciones anteriores y se establece que la decisión de rechazar o aceptar una partida se tomará en función del resultado de una muestra de  $n$  unidades elegidas al azar de la misma. Existen registros históricos por los cuales se sabe que el desvío de la resistencia a la rotura es de 180kg. a) Indicar la hipótesis nula apropiada, su condición de rechazo y la regla de decisión. b) Calcular la probabilidad de detectar que una partida dada resiste en promedio 1200 kg.

Resp: a)  $H_0) \mu \geq 1250 \text{Kg.}$  CR: Si  $\bar{x} \leq \bar{x}_c = 1.168 \text{ kg.}$  se rechaza. b) 0,261.

13) La resistencia a la rotura de un tipo de látex es una variable Normal con media 4,5kg y desvío estándar 0.3kg. Se cree que un aditivo recientemente desarrollado por los técnicos puede incrementar la resistencia media y, si así no ocurriera, se desea un 5% de probabilidad de tomar la decisión incorrecta. Si la resistencia se incrementa en 0,2kg, se desea un 99% de adoptar el aditivo. a) Indicar la hipótesis nula apropiada a esta situación, el tamaño de la muestra a tomar, la condición de rechazo y **la regla de decisión**. b) Calcular tablas de valores para las curvas operativa y de potencia y graficarlas

Resp.: a)  $H_0) \mu \leq 4,5 \text{Kg.}$  CR: si  $\bar{X} \geq \bar{X}_c = 4,58 \text{Kg}$  RHO  $n=36$

14) El tipo de aceite usado en las unidades de una empresa transportista es una variable que incide sensiblemente en el costo de mantenimiento. En la actualidad se tiene un costo por unidad de 250 \$ por mes y se desea realizar un experimento con otro tipo de aceite más costoso que el actual a los efectos de comprobar una posible disminución del costo total de mantenimiento. Se ha establecido un presupuesto experimental de 6 meses y una probabilidad del 1% de tomar una decisión equivocada en caso de que el costo mensual no disminuya. Se sabe que el costo mensual tiene un desvío estándar de 30 \$, valor este que se ha mantenido muy estable con el tiempo y seguramente no se modificará con el nuevo aceite. Se realizó la prueba durante los 6 meses y se obtuvo un costo por unidad de 232 \$ por mes. a) Establezca la hipótesis nula apropiada, realice el ensayo e **indique la decisión recomendada**; b) Calcule la probabilidad de tomar una decisión equivocada para el caso en que el costo baje en un 10% y dibuje la curva operativa del ensayo indicando claramente las variables que se llevan en los ejes y los valores numéricos de abscisa y ordenada de dos puntos al menos.

Resp.: a)  $H_0) \mu \geq 250 \$.$  CR:  $232 \geq 221,5$  : No RHO b) 0.61409

15) Un fabricante de pilas para linternas afirma que la vida media de ellas excede las 30 horas y las ofrece en condiciones muy ventajosas. Una empresa desea comprar una cantidad muy grande de pilas si la afirmación es cierta, y a efectos de evaluarla se plantean en la gerencia 2 alternativas: 1.- Algunos sostienen que, en principio, no hay motivos para dudar del fabricante deseando considerar la oferta, estableciendo en un 10% la probabilidad de no concretar la operación cuando la vida media exceda las 30hs, y en un 5% la probabilidad de concretarla si la vida media es de 27hs. 2.- Otros en cambio consideran, por las condiciones tan ventajosas, que la afirmación del fabricante debe tomarse con cautela, siendo conveniente establecer una probabilidad del 5% de concretar la operación si la vida media no supera las 30hs, y un 90% de concretarla si la vida media es de 32hs. Se sabe que la duración de las pilas se distribuye normalmente con una desviación estándar de 5,5hs. Indicar, para cada una de las alternativas, la hipótesis nula apropiada, la condición de rechazo y la regla de decisión.

Resp: 1.-  $H_0) \mu \geq 30$  . CR: Si  $\bar{x} \leq \bar{x}_c = 28,7 \text{hs.},$  no comprarlas

2.-  $H_0) \mu \leq 30$  . CR: Si  $\bar{x} \geq \bar{x}_c = 31,1 \text{ hs.},$  comprarlas.

16) El control de recepción de las partidas de hilado que llegan a una tejeduría se efectúa a través de una muestra de 10 ovillos midiéndose en cada uno la resistencia del hilado, cuyo valor medio para toda la partida debe ser de 25 kg por lo menos. El proveedor acepta un riesgo máximo del 5% de recibir de vuelta una partida buena y el comprador, a su vez, desea rechazar el 99% por lo menos de las partidas malas. Se sabe que la resistencia a la rotura de este hilado es una variable Normal con un desvío de 2,2 kg. a) ¿Cuál es la resistencia media muestral mínima para aceptar una partida? b) Cuál es la resistencia media **poblacional** de las partidas consideradas malas por el comprador? c) Dibujar la curva que describe las probabilidades de detectar partidas malas.

Resp: a) 23,86 kg. b) 22,2 kg.

17) El departamento de Ingeniería de una empresa ha desarrollado un modelo modificado de su contactor AX-2. Luego de algunas pruebas experimentales, se piensa que el nuevo modelo tendrá una vida útil promedio de por lo menos un 10% superior al actual. De acuerdo con registros históricos, la vida del AX-2 tiene una media de 10.000.000 contactos con un desvío de 2.300.000. Después de algunas discusiones, la Gerencia General decide fabricar una serie de prototipos y someterlos a pruebas exhaustivas. Como el contactor actual está muy bien posicionado en el mercado y si bien el nuevo modelo tendría el mismo costo, el Gerente Comercial opina que le parece razonable aceptar un riesgo del 15% de poner en el mercado el nuevo modelo en caso de que su vida media sea exactamente un 10% superior a la actual. Dado el costo de los prototipos, se recomienda además al Jefe de Ingeniería, que limite la cantidad a ensayar de modo que la probabilidad de recomendar el cambio si la vida media no aumentó sea a lo sumo de un 5%. Se asumirá además que el desvío estándar no se modificará. a) Indicar la hipótesis nula, la condición de rechazo y la regla de decisión. b) Dibujar la curva de potencia del ensayo.

Solución: Por tratarse de una inversión con riesgo económico, se recomienda ensayar una hipótesis pesimista, adoptando como  $\mu_0$  el valor peor, es decir 10 (millones de contactos), o sea:

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = 10$$

la condición de rechazo es:

$$\bar{x} \geq \bar{x}_c = \mu_0 + Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De acuerdo con el enunciado, el valor de  $\alpha$  es 0,05. Para calcular el valor de  $n$ , utilizamos el dato del 15% de probabilidad de poner en el mercado el nuevo modelo en caso de que su vida media alcance los 11 millones de contactos. Dicho 15% es entonces la probabilidad de **rechazar** la hipótesis nula siendo falsa ( $\mu_1=11$ ), o sea es  $1-\beta=0,15$ , esto es  $Z_{1-\beta}=Z_{0,15}=-Z_{0,85}=-1,0364$ . Calculamos ahora  $n$  con la fórmula:

$$n = \left[ \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta})\sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right]^2 = n = \left[ \frac{(Z_{0,95} + Z_{0,15})2,3}{11 - 10} \right]^2 = 2$$

de donde resulta el valor de  $\bar{x}_c = 12,68$  millones de contactos. Es decir, se realizará una prueba con 2 prototipos del nuevo modelo y se calculará el promedio de sus duraciones; si este supera a  $\bar{x}_c$ , se adoptará el nuevo modelo.

18) La recaudación mensual de un club en concepto de cuotas de socios es variable con media \$128.000 y desvío \$12.500. A efectos de aumentarla, se contratan los servicios de una compañía de cobranzas que obtiene, en los primeros 4 meses una media de \$ 140.000; esta compañía cobra \$ 5.000 por sus servicios.

a) Asumiendo que el desvío estándar no se modifica y con un riesgo del 10%, ¿continuaría Ud. contratando a esta compañía?

b) ¿Cuál sería la probabilidad de no detectar que la recaudación media -sin descontar lo que cobra- aumenta a \$ 145.000 (bruto)?

c) ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta a) si la compañía cobrara por sus servicios una comisión del 2% sobre el monto recaudado?

Solución: a) Ensayamos la hipótesis

$$H_0) \mu \leq \mu_0 = 128.000$$

que se rechazará si la compañía de cobranzas obtiene una recaudación media neta

$$\bar{x} \geq \bar{x}_c = \mu_0 + Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 136.010$$

Como obtuvo  $\bar{x}_{bruto} = 140.000$ , es  $\bar{x}_{neto} = 135.000$ , la hipótesis no se rechaza y no se recomienda continuar con esta compañía. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado con valores brutos tomando  $\mu_0 = 133.000$ , con lo cual sería  $\bar{x}_c = 141.010$ .

b) La probabilidad de no detectar el aumento es el tamaño del error de tipo II para  $\mu_{bruto} = 145.000$ , o sea  $\mu_{neto} = 140.000$ :

$$\beta = \phi\left(\frac{(X_c - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \phi(-.638) = 0.262$$

c) Nuevamente ensayamos la hipótesis

$$H_0) \mu \leq \mu_0 = 128.000$$

que se rechazará si se obtiene una recaudación media neta tal que

$$\bar{x} \geq \bar{x}_c = \mu_0 + Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 136.010$$

pero como cobra el 2%, la recaudación bruta deberá superar a  $136.010/0,98 = 138.786$ . En este caso, la hipótesis nula se rechazaría y convendría continuar con la compañía.

19) En una pieza fabricada que ha de acoplarse a otras piezas, hay una dimensión crítica cuyo valor debe ser aproximadamente de 11,5cm. La variabilidad del proceso de fabricación está dada por un desvío estándar de 0,1cm. El proceso se considera bajo control si con una muestra de n piezas, no hay motivos para pensar que la media es diferente de 11,5 cms. a) ¿Cuál deberá ser el tamaño de la muestra si se establece en un 10% la probabilidad de revisar el proceso equivocadamente y en un 5% la probabilidad de no revisarlo cuando la media es de 11,4 cm? b) ¿Cuáles serán los límites de control? c) ¿Cuál es la probabilidad de revisar el proceso cuando la media es de 11,46cm?

Resp: a) 11 piezas. b) 11,45 y 11,55cm. c) 0,37

20) Un torno automático produce una pieza cuya longitud tiene distribución Normal con un desvío estándar de 0,1cm. Si está bien ajustado, la media es de 2cm, pero cuando la herramienta de corte adopta una posición incorrecta, dicho promedio se altera, aumentando o disminuyendo, sin llegar a modificarse el desvío estándar; en ese caso debe corregirse la posición de la herramienta. Una muestra de 10 piezas arrojó una longitud media de 2,04cm. a) Si se establece en un 10% la probabilidad de concluir erróneamente que el torno está desajustado, ¿cuál sería su conclusión? b) Si estuviera desajustado y la longitud media fuera de 1,95cm, ¿cuál sería la probabilidad de no efectuar el ajuste? c) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra si se desea reducir dicha probabilidad al 20%? d) Dibujar las curvas Característica Operativa y de Potencia para ambos tamaños de muestra.

Resp: a) El torno no necesita ajuste. b) 0,525. c) 25 piezas.



**TEMA 3: INFERENCIA SOBRE LA MEDIA CON VARIANZA DESCONOCIDA. DISTRIBUCION DE STUDENT. INTERVALOS DE CONFIANZA. ENSAYOS DE HIPOTESIS.**

1) Las ventas de una revista semanal han sido las siguientes (en miles) en las últimas cuatro semanas: 15,4 - 18,5 - 16,3 - 19,2. a) Estimar la venta media semanal con un 95% de confianza. b) ¿Cuántos datos más harían falta para poder dar un intervalo con un error de muestreo de  $\pm 1$  (1.000 ejemplares)?

Resp: a) Entre 14.500 y 20.200 ejemplares. b) 11 datos más.

2) En una zona de Capital Federal se realizó un muestreo sobre una población compuesta por negocios minoristas, con el objeto de estimar el número medio de empleados por establecimiento, obteniéndose los siguientes resultados:

Empleados: 0 1 2 3 4 5

Establecimientos: 2 4 5 6 4 2

a) ¿Cuántos establecimientos habrá que incluir en la muestra adicional si se pretende un error muestral de  $\pm 0,5$  empleados, y un nivel de confianza en la estimación del 95%?

Resp: 12.

3) En una fábrica de alfombras se desea estimar el peso promedio de los rollos que salen a despacho, que es muy variable pues su longitud está determinada por la aparición de fallas en el material. Una muestra de 60 rollos arrojó un peso medio de 48,5kg con un desvío estándar de 42kg. Estimar el peso medio de los rollos con un 10% de riesgo.

Resp: Entre 39,4 y 57,6 kg.

4) Las ventas mensuales de un producto son variables con media 700.000 unidades. Durante 5 meses se ha desarrollado una campaña publicitaria registrándose los siguientes volúmenes de venta en miles de unidades: 607; 725; 784; 790 y 810. a) ¿Considera Ud. que estos datos arrojan una concluyente evidencia para poder afirmar con un riesgo máximo del 1% que la campaña ha sido efectiva? b) Estimar el volumen medio de ventas con un 95% de confianza. c) ¿Durante cuántos meses más habría que continuar con la campaña si se pretende disminuir en un 50% el error muestral de la estimación anterior?

Resp: a) No. b) Entre 640.814 y 845.586 unidades. c) 8.

5) El departamento de producción de una empresa ha resuelto instalar un nuevo dispositivo en el proceso productivo si existe una razonable seguridad de que la producción por hora aumenta en un 10 % como mínimo. Actualmente la producción media es de 100 unidades por hora. Se establece en un 5% el riesgo máximo de instalar equivocadamente el nuevo dispositivo y, a efectos de tomar una decisión, se realiza una prueba durante 50 horas obteniéndose un promedio de 120 unidades con un desvío estándar de 10 unidades. ¿Qué decisión tomaría Ud.?

Resp: Instalar el nuevo dispositivo.

6) Una pequeña fábrica de pinturas ha desarrollado un producto que puede competir en calidad y precio con el de la empresa líder del ramo. Se ha establecido la conveniencia de su lanzamiento si se puede asegurar una venta media mínima de 100lt por cliente y por año. A tal efecto, se enviaron muestras gratis a 16 posibles clientes, interrogándolos luego sobre el volumen anual de pintura que estarían dispuestos a comprar. Se obtuvo así una media muestral de 114lt con un desvío estándar de 18lt. a) Asumiendo un riesgo del 10%, ¿cuál sería la decisión recomendada?. b) Calcular los límites de confianza del 90% para el volumen medio de pintura. c) ¿A cuántos clientes más habría que enviar muestras para poder dar un intervalo cuya amplitud sea la mitad del anterior?

Resp: a) Lanzar el producto; b) 106; 122; c) 41.

7) Una empresa radicada en el interior del país comenzará una campaña de ventas si el ingreso medio de las familias de la zona supera los \$1000 por mes. A efectos de tomar una decisión se toma una muestra de 100 familias registrándose un ingreso medio en el último mes de \$1100 y un desvío estándar de \$923. Asumiendo un 1% de probabilidad de comenzar la campaña equivocadamente: a) ¿Aconsejaría Ud. comenzar la campaña de

ventas? b) Calcule límites de confianza del 90% para el ingreso medio de esta zona. c) Recalcule tamaño de muestra para reducir a la mitad el error muestral del intervalo hallado.

Resp: a) No; b) 946,75;1253,25; c) 395.

8) Una empresa que produce galletitas desea controlar el funcionamiento de una máquina empaquetadora que, en condiciones normales, el peso medio de los paquetes debe ser 250 g. Se tomó una muestra de 20 paquetes obteniéndose un peso medio de 280 g y una desviación estándar de 15 g, y se establece en un 1% el riesgo máximo de detener y revisar la máquina si funciona correctamente. Luego de evaluar los resultados de la muestra se decide detener la máquina y revisarla. a) ¿Considera Ud. que la decisión tomada es correcta? b) Estime con un 1% de riesgo el peso promedio de los paquetes? c) ¿Cómo disminuiría el error de la estimación anterior en un 30%?

Resp: a) Sí. b) Entre 270,4 y 289,6gr. c) Aumentando el tamaño de la muestra a 37 paquetes

#### TEMA 4: INFERENCIA EN LOS PROCESOS DE BERNOULLI.

1) El *rating* de un programa de televisión se mide como el porcentaje de hogares que está viendo el programa en un momento dado. Una compañía medidora de *rating* cuenta con un panel de 600 hogares colaboradores, en los cuales ha instalado un *people meter* (dispositivo que registra cada minuto si el televisor está encendido y en qué canal, y envía telefónicamente la información a la base de datos durante la noche). Se ha registrado el *rating* del programa *Padre Coraje* en 25 puntos. Es decir que el 25% de los hogares del panel vio todo el programa ese día. a) Calcular un intervalo de confianza del 90% para el *rating* de *Padre Coraje*. b) Sabiendo que cada *people meter* cuesta \$3200, calcular la inversión adicional en dispositivos necesaria para medir el *rating* con un error de muestreo de  $\pm 1\%$ .

Resp: a) 0.22;0.28. b) \$14.316.800

2) Una empresa comercializadora de cosméticos ha diseñado un nuevo catálogo para promocionar un producto, con el cual espera aumentar el porcentaje de clientes compradores en 2 puntos. Con el catálogo actual, se sabe que cada vez que el mismo se envía a potenciales clientes, el porcentaje de compradores es del 8%. Para probar la efectividad del nuevo catálogo se envían 100 a posibles clientes y al tiempo se reciben 14 pedidos. a) Calcular el intervalo de confianza del 90% para  $p$ . b) Calcular el nuevo tamaño de muestra para  $E=0,02$ . c) ¿Considera que la prueba ha sido concluyente para cambiar de catálogo asumiendo un 5% de riesgo?; es decir, ¿considera Ud. que la prueba permite asegurar que con el nuevo catálogo el porcentaje de clientes compradores es superior al 10%? d) ¿Cuál es la probabilidad de cambiar de catálogo si con el nuevo se logra una efectividad de respuesta del 12%?

Resp: a) 0,083;0,197. b) 816. c) No. d) 0,184.

3) Una empresa productora de bebidas gaseosas iniciará una campaña publicitaria televisiva si el porcentaje de televidentes que ven programas deportivos en forma continuada es superior al 60%. A efectos de tomar una decisión se analiza una muestra de 500 televidentes comprobando que 325 de ellos ven programas deportivos en forma continuada, y se establece en un 10% el riesgo máximo de iniciar la campaña cuando el porcentaje no supera el 60%. a) ¿Aconsejaría Ud. iniciar la campaña? b) ¿Cuál es la probabilidad de no iniciar la campaña cuando el porcentaje de televidentes es del 66%? c) ¿Cuál es la probabilidad de iniciar la campaña cuando dicho porcentaje es del 68%? d) Dibujar las curvas Característica Operativa y de Potencia.

Resp: a) Sí. b) 0,065. c) 0,994.

4) El director de un instituto superior de enseñanza no está conforme con la inscripción obtenida en los cursos a distancia, que actualmente es sólo del 5% sobre las cartas enviadas. Decide entonces encomendar la tarea de reorganizar dichos cursos a uno de sus profesores, quien ha de proponer los temas y programas. Se van a enviar  $n$  cartas a posibles interesados, tal que valga 0,2 la probabilidad de concluir erróneamente que la proporción aumentó y 0,9 la probabilidad de detectar que aumentó 2 puntos porcentuales. a) Indicar la condición de rechazo y la regla de decisión. b) Hallar la probabilidad de detectar que la proporción aumentó 1 punto porcentual. c) Suponga que se envían las cartas y responden favorablemente el 5,2%. ¿Puede concluir Ud. que la proporción aumentó? d) Hallar la probabilidad de no detectar que la proporción aumentó en 2 puntos porcentuales.

Resp: a) CR: Si en  $n=652$  cartas hay 38 o más inscriptos, se concluye que aumentó. b) 0,618. c) No. d) 0,1.

5) El proceso productivo de una pieza trabaja en condiciones normales con un 12% de unidades defectuosas. Este porcentaje se controla periódicamente tomando muestras de 50 unidades y contando cuántas defectuosas hay. Si el proceso está bajo control, la probabilidad de detenerlo y revisarlo debe valer 0,05. a) ¿Cuántas defectuosas se deberán encontrar en la muestra de 50 para detener el proceso y revisarlo? b) ¿Cuál es la probabilidad de no detener el proceso cuando el porcentaje de defectuosas es del 14%? Dibuje la curva característica de operación. c) ¿Cuántas unidades se deberán controlar si se pretende disminuir al 50% la probabilidad anterior?

Resp: a) Por lo menos 10. b) 0,87. c) 715.

6) **Problema fundamental del Control de Recepción.** - En una empresa industrial se desea diseñar un sistema periódico de muestreo para el control de recepción de una pieza que es suministrada en grandes cantidades. El proveedor admite que, como máximo, le rechacen el 5% de las partidas buenas, que son aquellas que tienen un 11% de unidades defectuosas. A su vez, el comprador desea rechazar el 99% de las partidas malas, que son aquellas cuyo porcentaje defectuoso es del 16%. a) ¿Cuántas unidades deberán revisarse de cada partida y cuántas defectuosas deberán encontrarse en la muestra de control para rechazar la partida? b) ¿Cuál es la probabilidad de rechazar una partida que tiene un 14% de unidades defectuosas? Trace la Curva de Potencia.

Resp: a) 750; por lo menos 96. b) 0,81.

**Notas importantes:** 1) El porcentaje defectuoso que el comprador está dispuesto a aceptar con frecuencia, en este caso  $p_0=11\%$  se denomina **Nivel de Calidad Aceptable** y se abrevia **AQL (Acceptable Quality Level)**. 2) La probabilidad de rechazar un lote cuyo porcentaje defectuoso es el AQL es el nivel de significación del ensayo -o tamaño del error de tipo I - (en este caso  $\alpha=5\%$ ) y en la terminología industrial se denomina **riesgo del proveedor**. 3) El porcentaje defectuoso que el comprador está dispuesto a aceptar sólo por excepción, en este caso  $p_1=16\%$ , se denomina **Tolerancia Porcentual de Defectuosos en el Lote** y se abrevia **LTPD (Lot Tolerance Percent Defective)**. 4) La probabilidad de aceptar un lote cuyo porcentaje defectuoso es el LTPD (en este caso  $\beta=0,01$ ) es el tamaño del error de tipo II y en la terminología industrial se denomina **riesgo del comprador**.

7) El control de recepción de una pieza seriada se realiza revisando 100 unidades, rechazando el lote si se encuentran 9 ó más defectuosas. De este modo, el comprador afirma que es pequeño el riesgo del proveedor - probabilidad de que le rechacen un lote que contiene el 5% defectuoso admitido por contrato- y tiene en cambio un riesgo del 15% de aceptar un lote "malo". a) Indique la hipótesis nula que se está ensayando y calcule el riesgo del proveedor. b) Calcule el porcentaje defectuoso poblacional del lote definido como malo. c) Dibuje la curva de potencia del ensayo, marcando claramente las variables que lleva en los ejes y los valores numéricos de abscisa y ordenada de dos puntos al menos.

Solución.- Se ensaya la hipótesis nula

$H_0) p \leq p_0 = 0,05$

siendo  $p$  la verdadera fracción defectuosa del lote. Aplicando la aproximación Normal a la distribución Binomial, la condición de rechazo es:

$$\hat{p} \geq \hat{p}_c = p_0 + Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

Ahora, en nuestro caso, tenemos el valor de  $r_c$ , que ha sido establecido en 9 (9 o más defectuosas en la muestra de 100). El riesgo del proveedor, que debemos calcular, es precisamente el valor de  $\alpha$ , es decir, el nivel de significación del ensayo. Su valor exacto es

$$\alpha = G_b(r_c; n; p_0) = G_b(9; 100; 0,05) = 0,063$$

Este resultado se obtiene fácilmente con el programa DIS o con la función  
=1- DISTR.BINOM(8;100;0,05;verdadero) del EXCEL.

b) El porcentaje defectuoso poblacional del lote definido como malo es el valor de  $p_1$  que satisface:

$$\beta = 0,15 = P(\text{Aceptar lote de porcentaje defectuoso } p_1) = F_b(8; 100; p_1)$$

Si aplicamos la aproximación Normal, obtenemos:

$$\beta = \phi \left[ \frac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right]$$

es decir

$$Z\beta = \left[ \frac{p_c - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}} \right]$$

Reemplazando los valores numéricos, tenemos:

$$(1) \quad Z(0.15) = -1.0364 = \left[ \frac{0.09 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{100}}} \right]$$

La incógnita  $p_1$  aparece bajo la raíz y también en el numerador, por lo tanto, para obtener su valor, después de trabajar la última expresión llegaremos a una ecuación de segundo grado. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(-1.0364)^2 = \left[ \frac{(0.09 - p_1)^2}{\frac{p_1(1-p_1)}{100}} \right]$$

$$1,0741 p_1(1-p_1) = 100(0,09 - p_1)^2$$

$$1,0741 p_1 - 1,0741 p_1^2 = 100 (0,09^2 - 2 \times 0,09 \times p_1 + p_1^2)$$

$$101,0741 p_1^2 - 19,0741 p_1 + 0,81 = 0$$

La última expresión es una ecuación de segundo grado en la incógnita  $p_1$ . Sus soluciones son:

$$p_1 = \frac{19,0741 \pm \sqrt{19,0741^2 - 4 * 101,074 * 0,81}}{2 * 101,0741} = \frac{19,0741 \pm 6,0284}{202,1482} = 0,0944 \pm 0,0298$$

Es decir que tenemos las soluciones  $p_1=0,124$  y  $p_1=0,065$ . Sin embargo sólo la primera ( $0,124=12,4\%$ ) es correcta, porque sólo ella satisface la ecuación de partida (1). La otra solución es extraña y se introdujo al elevar al cuadrado dicha expresión. La solución exacta, obtenida con el programa DIS es  $p_1=0,1183=11,83\%$ .

8) Para una pieza que se produce en grandes cantidades, se estudia la posibilidad de cambiar la materia prima por otra más costosa, si es posible asegurar una disminución importante en el porcentaje de defectuosas, que actualmente llega al 14%. Si se logra disminuir dicho porcentaje al 10%, se desea un 95% de probabilidad de cambiar la materia prima, pero si no hubiera disminución alguna, se establece en un 1% dicha probabilidad. a) Indicar la hipótesis nula apropiada a esta situación, el tamaño de la muestra, la condición de rechazo y **la regla de decisión**. b) Calcular la probabilidad de no efectuar el cambio, cuando con él se obtiene un porcentaje defectuoso del 12% y dibujar una curva que dé probabilidades de no efectuar el cambio en función del parámetro de ensayo, marcando los valores numéricos de abscisa y ordenada de 3 puntos al menos.

Resp: a)  $n=1058$  piezas; si se rechaza  $H_0$ , se cambia la materia prima. b) 0,684

9) Una empresa forestal ha resuelto explotar un monte de eucaliptus si se puede asegurar que el porcentaje de árboles mayor de 5m supera el 70%. Se eligieron 30 al azar y se hallaron 25 mayores de 5 m. Se ha fijado en un 5% el riesgo de explotarlo erróneamente. a) ¿Aconsejaría Ud. la explotación del monte? b) Si se eligieran 100, cuántos deberían superar los 5m para aconsejar la explotación? c) Estimar con 5% de riesgo el porcentaje de árboles mayor de 5m. d) ¿Cuántos árboles deberían seleccionarse si se pretende disminuir en un 50% el error de la estimación anterior?

Resp: a) No. b) Por lo menos 78. c) Entre 70% y 97%. d) 116.

10) En una empresa productora de artículos de consumo masivo se ha lanzado una campaña publicitaria sobre un jabón en polvo cuya penetración en el mercado era del 12%. Se desea ahora realizar una encuesta para comprobar si la campaña ha sido efectiva, en cuyo caso se realizará una campaña similar sobre otro de los productos. A tal efecto, si no se ha conseguido el resultado deseado, se establece una probabilidad del 1% de tomar una decisión errónea, y en cambio, un aumento en la penetración de 3 puntos se considera un resultado razonablemente bueno, en cuyo caso la probabilidad de tomar una decisión equivocada se establece en un 10%. a) Indicar la hipótesis nula apropiada a esta situación, la condición de rechazo y la regla de decisión. b) Calcular la probabilidad de efectuar otra campaña cuando con ésta se ha obtenido un aumento de 2 puntos. c) ¿Qué tamaño de muestra se debería tomar si se pretende que la probabilidad anterior valga 90%? ¿Cuál sería en este caso la regla de decisión? d) Dibujar la curva que representa dichas probabilidades en función de la penetración obtenida en el mercado, teniendo en cuenta ambos tamaños de muestra.

Resp: a)  $H_0: p \leq 0,12$ . CR: Si  $\hat{p} \geq \hat{p}_c = 0,1387$  o bien  $r \geq r_c = 228$  en  $n=1637$ , hacer otra campaña. b) 0,56. c) 3604.

11) La fórmula del látex utilizado para profilácticos es un secreto industrial de cada fabricante. En una fábrica de estos artículos se tiene un porcentaje de defectuosos (pinchados) del 6%, pero se está considerando cambiar la formulación actual por otra más costosa, con la esperanza de disminuir el porcentaje de pinchados. Si bajara al 4%, se desearía un 90% de cambiar, pero si no bajara, la probabilidad de cambio debe valer un 1%. a) Indicar la hipótesis nula apropiada, el tamaño de la muestra a tomar, y enunciar claramente la regla de decisión. b) Calcular la probabilidad de adoptar la nueva fórmula cuando con ella se obtiene un 5% de unidades defectuosas y dibujar una curva que dé probabilidades de adoptar la nueva fórmula en función del parámetro de ensayo, marcando claramente los valores numéricos de abscisa y ordenada de 3 puntos al menos.

Resp: a)  $H_0: P \geq 0,06$ . CR: si  $\hat{p} \leq \hat{p}_c = 0,04678$ :  $RH_0$   $n=1615$  b) 0.28774

12) Una persona denunció que en un casino privado había una ruleta adulterada pues había observado que el cero se producía con frecuencia excesiva. El juez solicitó entonces la asesoría de un consultor estadístico para que elevara el informe correspondiente. Registró datos de 1000 bolas en las cuales el cero se presentó 42 veces. a) ¿Considera Ud. que la denuncia tiene fundamento estadístico?. b) Si el cero tuviera una probabilidad del 5%, ¿cuál sería con ese tamaño de muestra la probabilidad de detectar la anomalía?. (Nota: En una ruleta equilibrada la probabilidad de cero es 1/37).

Resp. a) Existe evidencia estadística de que la ruleta está adulterada. b) 0.01786

13) En un taller metalúrgico se controla diariamente la fracción defectuosa de un tipo de biela, tomando una muestra de 25 unidades y sometiénolas a un ensayo de ultrasonido, para detectar si no tienen poros de fundición. En una de estas muestras se encontraron 3 unidades defectuosas. Calcular: a) Los límites de confianza del 95% para la fracción defectuosa. b) La fracción defectuosa máxima que hay en la población con 95% de probabilidad.

Solución: a) Aplicando la solución clásica, tenemos:

$$\hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}} = \frac{3}{25} \pm Z_{0.975} \sqrt{\frac{(3/25)(1-3/25)}{25-1}} = 0.12 \pm 0.13$$

El resultado obtenido no es razonable debido a que el límite inferior es negativo. Debemos entonces recurrir a la denominada ***solución exacta del problema***, como sigue. El intervalo de confianza para  $p$  es:

$$P(A \leq p \leq B) = 1 - \alpha$$

Los límites de confianza  $A$  y  $B$  son las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} G_b(r;n; p=A) &= \alpha/2 \quad (\text{Probabilidad acumulada derecha de la distribución Binomial}) \\ F_b(r;n; p=B) &= \alpha/2 \quad (\text{Probabilidad acumulada izquierda de la distribución Binomial}) \end{aligned}$$

que en este caso resultan:

$$\begin{aligned} G_b(5;25; p=A) &= 0,025 \\ F_b(5;25; p=B) &= 0,025 \end{aligned}$$

cuya solución exacta, obtenida con el programa DIS es  $A=0,068$  y  $B=0,407$ .

## TEMA 5: INFERENCIA SOBRE VARIANZAS

1) Una máquina envasadora de botellas de gaseosas dosifica volúmenes variables cuyo desvío estándar no debe superar los  $15 \text{ cm}^3$ . Se controla periódicamente tomando muestras de 10 envases y midiendo los volúmenes dosificados. Una de las muestras arrojó un desvío de  $18,2 \text{ cm}^3$ . a) ¿Recomendaría Ud. detener la máquina y revisarla con un riesgo máximo del 5%? b) Estimar con un riesgo del 5% la desviación estándar de los volúmenes dosificados.

Resp: a) No. b) Entre  $12,52$  y  $33,23 \text{ cm}^3$ .

2) Una compañía embotelladora considera la posibilidad de comprar una nueva máquina dosificadora si se puede asegurar que el desvío estándar de los volúmenes dosificados es menor que  $15 \text{ cm}^3$ , y a efectos de tomar una decisión se realiza una prueba con 20 envases arrojando un desvío estándar de  $12,5 \text{ cm}^3$ . a) ¿Recomendaría comprar la máquina con un riesgo máximo del 5%? b) Estimar con un riesgo del 5% la desviación estándar máxima de los volúmenes dosificados.

Resp: a) No. b)  $17,13 \text{ cm}^3$ .

3) La desviación estándar de la resistencia a la rotura de una partida de 30 piezas producidas por una compañía fue de  $200 \text{ kg}$ . Estimar con un nivel de confianza del 95% el desvío estándar de la resistencia a la rotura de todas las piezas.

Resp: Entre  $159,3$  y  $268,9 \text{ kg}$ .

4) En una muestra de 15 tubos fluorescentes pertenecientes al último lote de producción, se obtuvo que la desviación estándar de la duración ha sido de  $120 \text{ hs}$ . Estimar el desvío estándar de la duración de todos los tubos con un riesgo del 10%.

Resp: Entre  $92,3$  y  $175$  horas.

5) La volatilidad de una acción está dada por el desvío estándar de su cotización diaria. A mayor volatilidad mayor riesgo, pero también mayor posibilidad de obtener ganancias en el corto plazo. Durante los últimos 20 días se obtuvo, para una acción dada, un desvío estándar de  $\$0,25$ . a) ¿Puede asegurar, con 10% de error, que el desvío verdadero es superior a  $\$0,20$ ? b) Establezca un intervalo de confianza del 80% para el desvío verdadero.

Resp: a) Si. b)  $0,2089$ ;  $0,3192$

6) Se han tomado datos de tensión de rotura, en  $\text{Kg/mm}^2$ , de una aleación de aluminio, obteniéndose:  $37,6$ ;  $38,4$ ;  $38,8$ ;  $37,9$ . a) Calcular los límites de confianza del 90% para el desvío estándar. b) ¿Cuántos datos más habría que tomar para que el límite superior -del intervalo para el desvío estándar- sea el doble que el límite inferior?.

Resp: a)  $0,3293$ ;  $1,55$  b) 10 datos más.

7) El peso de los ovillos de hilo que salen de una ovilladora tiene distribución Normal con un desvío estándar que se controla periódicamente con muestras de 20 ovillos. Una de dichas muestras arrojó un desvío de 15 gramos. a) Calcular los límites de confianza del 95% para el desvío; b) ¿qué tamaño de muestra habría que tomar para tener intervalos cuyo límite superior sea un 50% mayor que el inferior?.

Resp: a)  $11,41$ ;  $21,91$  b) 49

8) El control de la variabilidad de los pesos de suelas de goma se realiza tomando muestras periódicas de 10 unidades, deteniendo el proceso tecnológico en caso de que el desvío  $S$  de los pesos tome un valor anormalmente alto. El valor considerado normal para el desvío de la población es de  $\sigma_0 = 5$  gramos como máximo y, de ser así, la probabilidad de detener el proceso se ha establecido en un 5%. Calcular el valor crítico del desvío estándar  $S$  de las muestras.

Resp: 6,86 gramos



## TEMA 6: MODELO LINEAL DE DOS VARIABLES

1) Se desea establecer una ecuación para pronosticar el Producto Bruto Interno de Argentina correspondiente al Sector Agropecuario, Silvicultura y Pesca en función del área sembrada X de las 5 oleaginosas principales (soja, maní, girasol, algodón y lino), a partir de los siguientes datos (datos reales):

Año	Area en 10 <sup>6</sup> Hs	PBI en millones de \$ley18188 constantes a precios de 1960
1974	3,0402	8,014
1975	2,9819	7,891
1976	3,0934	8,207
1977	3,805	8,31
1978	5,423	8,45

que, luego de procesados arrojan

$$\sum X_i = 18,3435 \quad \sum X_i^2 = 71,590621 \quad \sum Y_i = 40,872 \quad \sum Y_i^2 = 334,30553$$

$$\sum X_i Y_i = 150,72577$$

- a) Calcular el pronóstico del año 1979, cuyo PBI observado fue 8,88 para un área sembrada de 5,401.  
b) Analizar el ajuste de los datos al modelo lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \xi$$

mediante el coeficiente de correlación y ensayando la hipótesis  $H_0: \beta_1 = 0$ .

- c) Establecer límites del 90% para dicho pronóstico.

Resp: a) 8,49. b)  $R = 0,837$ . c) 8,03; 8,95

2) Los siguientes datos han sido tomados para estudiar la relación entre las ventas de un producto (Y en miles de unidades) y la relación X Precio del competidor/Precio del propio producto:

X:	0,80	0,75	0,60	0,92	0,86
Y:	36,4	32,1	32,3	40,3	37,1

- a) Investigue la asociación lineal mediante los dos criterios básicos. b) Suponiendo que exista relación, calcule la venta mínima que se obtendrá con 90% de probabilidad en un mes en que la relación X es igual a 0,8.

Resp: a) Hay buena asociación lineal, ya que el coeficiente de correlación vale  $R = 0,882$  b) 32,6

3) Un ensayo de marketing se realizó para estudiar la relación entre el tiempo que requiere un comprador para decidirse en su compra y el número de presentaciones distintas del producto exhibidas. Las marcas se eliminaron de los productos para neutralizar el efecto de las preferencias. Los compradores seleccionaron los artículos basados exclusivamente en las descripciones y diseños de las presentaciones de cada producto. El tiempo utilizado hasta llegar a una selección fue registrado para los 15 participantes en el estudio:

Tiempo (seg.):	5	8	8	7	9	7	9	8	9	10	10	11	10	12	9
Presentaciones:	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4

- a) Hallar la recta de mínimos cuadrados.  
b) ¿Presentan los datos suficiente evidencia que indique que el tiempo requerido para decidir está linealmente relacionado al número de presentaciones?

Resp: a)  $\hat{Y} = 4,3 + 1,5X$ . b) Sí.

4) En un estudio de distintos fondos para inversión se desarrolló un procedimiento consistente en construir la llamada *recta característica* para cada posible fondo. Esta es la recta de regresión de la rentabilidad del fondo considerado sobre la rentabilidad promedio del mercado bursátil. Si para un fondo de inversión la pendiente de su recta es significativamente distinta de cero, se dice que el fondo es muy sensible a las fluctuaciones de la bolsa de valores y por ende es una inversión riesgosa. Si el fondo tiene una recta con pendiente cercana a cero se dice que es una inversión estable y de poco riesgo. La rentabilidad del fondo "Penn Square Mutual" y la rentabilidad promedio en el mercado bursátil se han observado en el período 1964 á 1973 y se dan en la siguiente tabla:

Año	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
Fondo	18,4	29,7	-12,3	10,8	23,6	-16,2	5,8	7,2	7,7	-8,8
Bolsa	12,9	9,1	-13,1	20,1	7,7	-11,4	0,1	10,8	15,6	-17,4

Fuente: Wiesenber Financial Services; Investment Companies, Mutual Funds and Other Types, 1974.

a) Hallar la recta de regresión de la rentabilidad del fondo "Penn Square Mutual" en función de la rentabilidad promedio en el mercado bursátil.

b) Hallar un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de regresión.

Resp: a)  $Y = 3,5504 + 0,8836X$

b)  $0,2713 \leq \beta \leq 1,4959$ .

5) Considere una compañía distribuidora de gas natural que desea predecir la demanda diaria de una ciudad, de un día para el siguiente, a partir del pronóstico de la temperatura media. A tal efecto, registró datos de 10 días que, luego de procesados, arrojaron

Pronóstico de Temperatura media ( $^{\circ}\text{C}$ ):  $\sum X_i = 97$ ;  $\sum X_i^2 = 1169$

Demanda de Gas ( $10^5 \text{ m}^3$ ):  $\sum Y_i = 21,16$ ;  $\sum Y_i^2 = 48,68$   
 $\sum X_i \cdot Y_i = 180,9326$

a) ¿Puede asegurar que por cada grado que desciende la temperatura, la demanda de gas aumenta en más de  $7000\text{m}^3$ ? b) Si para un día el pronóstico es de  $5^{\circ}\text{C}$ , qué demanda mínima de gas puede asegurarse con 90% de probabilidad?.

Resp: a) Si b)  $199.823 \text{ m}^3$

6) Un Jefe de Producto desea convencer a la Gerencia de que, por cada dólar que se invierte en publicidad, pueden esperar un aumento de 3 dólares al menos en las ventas. A tal efecto, presenta la siguiente tabla de datos (en miles de dólares)

Gastos en

publicidad 5 - 7,2 - 6,3 - 4,2 - 5,4 - 6,8  $\sum X_i = 34,9$ ;  $\sum X_i^2 = 209,57$

Ventas 72 - 79 - 73 - 59 - 67 - 69  $\sum Y_i = 419$ ;  $\sum Y_i^2 = 29485$

$\sum X_i \cdot Y_i = 2467,5$

¿Considera Ud. que los datos confirman la afirmación del Jefe de Producto?.

Resp: No.

7) El continuo aumento en el precio del petróleo en los últimos años ha originado un aumento en los costos para el industrial que tiene que transportar sus bienes al mercado. Para abatir esos costos de transporte, el industrial ha sustituido los medios usuales de transporte por otros más baratos; por ejemplo el flete ferroviario en lugar de carga aérea. En un estudio hecho en una compañía para estudiar los costos de transporte aéreo, se seleccionaron al azar 9 facturas para estimar la relación entre el costo por unidad transportada y la distancia recorrida. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Distancia (por 100 Km.)	6	13	27	15	9	11	21	14	12
Costo (\$/unidad transportada)	49	93	159	115	66	90	139	98	88

- a) Hallar la recta de mínimos cuadrados.  
 b) Estime el costo medio de transporte por unidad para aquellas cargas que se enviarán a 1.700 km. con un 90% de confianza.  
 c) Por lógica, si la distancia recorrida fuese 0 Km, entonces el costo debiera ser \$0. Explique por qué la recta de mínimos cuadrados no pasa por el origen? ¿Debería pasar por el origen?

^

Resp: a)  $Y = 24,7125 + 5,2702X$ . b)  $\$109,4 \leq E(Y/X=17) \leq \$119,2$ .

8) Se condujo un experimento en un supermercado para estudiar la relación entre la cantidad de espacio destinado a un determinado café y su volumen de ventas semanales. La cantidad de espacio destinado en la estantería se varió en exhibidores de 3, 6 y 9 anaqueles al azar durante 12 semanas, mientras que para las otras marcas de café, se mantuvieron constantes en exhibidores de 3 anaqueles. Los datos del experimento se dan a continuación:

Ventas semanales:	526	421	581	630	412	560	434	443	590	570	346	672
Exhibidores:	6	3	6	9	3	9	6	3	9	6	3	9

- a) Hallar la recta de mínimos cuadrados.  
 b) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la venta media semanal de café si se presenta en exhibidores de 6 anaqueles.  
 c) Suponga que durante la semana entrante se presentará el café en un exhibidor de 6 anaqueles. Halle un intervalo de predicción del 95% para las ventas semanales. Explique la diferencia entre este intervalo y el obtenido en el punto anterior.

^

Resp: a)  $Y = 307,9 + 34,6X$ .  
 b)  $482,2 \leq E(Y/X=6) \leq 548,6$ . c)  $395,7 \leq Y \leq 635,1$ .

9) ¿Existe relación entre el consumo de energía de un país y su PBI? Uno estaría dispuesto a suponer que un país con mayor ingreso per capita requeriría de mayor consumo de energía. Para examinar esta cuestión se eligieron al azar 12 países obteniendo para ellos el consumo per capita (en libras) y el PBI per capita (en u\$s), cuyos valores se presentan en la siguiente tabla:

PAIS	CONSUMO DE ENERGIA	PBI
E. E. U. U.	25.598	5.515
Canadá	23.715	4.704
Australia	12.568	3.370
Dinamarca	12.273	3.978
Noruega	10.227	3.779
Francia	9.156	3.810
Japón	7.167	2.757
Italia	6.164	2.170
Venezuela	5.452	1.291
Grecia	3.543	1.382
Brasil	1.173	513
India	410	98

Fuente: U. N. Statistical Yearbook, 1973, y U. S. Statistical Abstract, 1974.

- a) Determine mediante un coeficiente adecuado el grado de relación lineal entre el consumo de energía y el PBI.  
 b) ¿Presentan los datos suficiente evidencia sobre la existencia de una relación lineal entre ambas variables?

Resp: a)  $R = 0,915$ . b) Sí.

10) Una variable independiente que muestre una asociación negativa fuerte con la variable dependiente es tan útil como una que muestre una asociación positiva. El hecho importante es que la relación sea fuerte, esto es, la magnitud absoluta del coeficiente de correlación entre las 2 variables. Considere por ejemplo a las tasas de interés y el número de nuevas construcciones. Las tasas de interés ( $X$ ) son indicadores clave para predecir el

número de construcciones ( $Y$ ). Suponga que los datos de la siguiente tabla representan las tasas de interés en hipotecas y el registro de nuevas construcciones iniciadas en los 8 años referidos.

Año:	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Tasa de Interés:	6,5	6,0	6,5	7,5	8,5	9,5	10,0	9,0
Licencias de Const.:	2165	2984	2780	1940	1750	1535	962	1310

- a) Halle la recta de mínimos cuadrados.  
b) Calcule el coeficiente de correlación.  
c) Si los indicadores económicos indican que la tasa de interés para hipotecas será del 8,5% el próximo año, pronostique el número de licencias de construcción que se otorgarán durante el año entrante mediante un intervalo de predicción del 95%.

Resp: a)  $Y = 5.344,22 - 430,358X$ . b)  $R = -0,94$ . c)  $1.015 \leq Y \leq 2.358$ .

11) En el problema de la distribución de la energía eléctrica se trabaja con la relación entre el consumo de los usuarios y su máxima demanda de potencia. Considere al respecto los siguientes datos:

Consumo (Kwh):	110	- 568	- 245	- 324	- 76
Potencia (Kw):	.70	- 2,41	- 1,19	- 1,53	- 0,53

- a) Suponiendo que la relación es del tipo  $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ , donde  $X$  es el consumo e  $Y$  la potencia, estime los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  e investigue la validez del modelo. b) Si el consumo de un usuario es de 450Kwh, ¿cuál es la potencia superada con 5% de probabilidad?

Resp.: a)  $b_0 = 0.02099$ ;  $b_1 = 0.743$   $R = 0.9987$ ,  $T_{calc} = 33,91$  b) 2,57Kw

## TEMA 7: MODELO LINEAL GENERAL

1) (*Producción anual de trigo en una región agrícola*).- Considere los siguientes datos de las variables, que se han registrado en los últimos 10 años

$X_1$ : Área sembrada de trigo en una región agrícola (miles de hs)  
 $X_2$ : Lluvia caída en los meses de setiembre y octubre (mm)  
 $Y$ : Producción de trigo de la región (miles de tn)

$X_1$	24.81	15.71	14.58	34.04	27.09	49.7	20.37	25.75	36.09	28.05
$X_2$	46	35	135	11	57	14	12	96	32	45
$Y$	43.127	16.653	92.322	38.084	61.939	92.376	24.373	74.029	70.772	68.749

Efectúe la estimación de los parámetros del modelo lineal general y su validación.

2) (*Tiempo de una prueba de atletas*).- Se han tomado datos de 6 atletas, de las siguientes variables

$X_1$ : Estatura en cm  
 $X_2$ : Peso en kg  
 $X_3$ : Edad en años  
 $Y$ : Tiempo en segundos para realizar una prueba atlética

$X_1$	165	175	180	200	195	183
$X_2$	64	68	68	72	70	68
$X_3$	25	40	30	42	28	45
$Y$	15	25	17	30	25	32

a) Estime los parámetros del modelo lineal general y efectúe la validación. b) Considere el modelo con las variables  $X_1$  y  $X_3$  solamente y compárelo con el modelo completo; ¿cuál elegiría?

3) Se llevó a cabo un experimento para determinar la dureza de pastillas de freno, en función de los porcentajes de dos componentes fundamentales, azufre y neoprene, obteniéndose los siguientes datos:

$X_1$ (% de azufre)	5	5	5	5,26	5,26	5,26	5,51	5,51	5,51
$X_2$ (% de neoprene)	3	4,23	5,57	3	4,23	5,57	3	4,23	5,57
$Y$ (dureza shore)	64,36	61,92	60,68	63,76	63,5	62,64	69,04	63,88	64,75

a) Investigue la validez del modelo lineal general para la relación entre estas variables.

**TEMA 8: COMPARACIÓN DE DOS POBLACIONES .COMPARACIÓN DE  
VARIANZAS - DISTRIBUCIÓN F DE FISHER-SNEDECOR. COMPARACIÓN DE  
DOS MEDIAS. MUESTRAS INDEPENDIENTES Y MUESTRAS APAREADAS**

1) En un taller metalúrgico se han incorporado dos nuevos tornos automáticos de distinta marca. Se hace la misma pieza con ambos, a fin de compararlos. Sobre la base de las medidas (en décimas de mm) de los diámetros de dos conjuntos de piezas hechos en cada uno, se han calculado:  $S_1=3,6$ ;  $n_1=13$ ;  $S_2=5,4$ ;  $n_2=25$ . Calcular los límites de confianza del 90% para la relación entre los desvíos poblacionales.

Resp: 0,45; 1,05

2) En un taller de manufactura de una pieza de Dural, se considera la posibilidad de cambiar la composición por otra más costosa a efectos de disminuir el desvío estándar de la dimensión crítica, estableciéndose en 0,1 la probabilidad de cambio si el desvío disminuye sólo en un 20%. Se hizo una prueba con 21 piezas del material actual, obteniéndose un desvío de 0,084mm y luego otra prueba con 13 piezas de la aleación propuesta, que arrojó un desvío de 0,06mm. a) ¿Cuál es la decisión recomendada?. b) Calcule un intervalo de confianza del 90% para la relación entre los desvíos.

Resp: a) No cambie. b) 0,8778 ; 2,1129

3) Una empresa agropecuaria posee dos establecimientos de invernada para engorde de novillos Angus, denominados *La Providencia* y *Casablanca*. Los lotes que salen a venta en ambos presentan pesos promedio razonablemente controlados, pero hay dudas en la variabilidad, pues parece, por lo que se aprecia visualmente, que no son todos igual de parejos, lo cual se debe, probablemente, a distintos criterios de selección por parte de los capataces. A efectos de la comparación, se registraron los pesos de 50 animales terminados de cada establecimiento, con los siguientes resultados:

Establecimiento	<i>La Providencia</i>	<i>Casablanca</i>
<i>n</i>	50	50
Media	428kg	432kg
Desvío	12kg	18kg

a) ¿Puede asegurar con 5% de error que los desvíos difieren?. b) Calcule los límites de confianza del 90% para la relación de desvíos. c) Recalcule tamaño de muestra para un intervalo cuyo límite superior sea un 50% mayor que el inferior.

Resp: a) Si. b) 1,18 ; 1,90 c)  $n=68$

3 Se han efectuado 16 determinaciones del punto de fusión de la hidroquinona, 8 de ellas por un analista A y las otras 8 por el analista B, con los siguientes resultados:

A: 174 - 173,5 - 173 - 173,5 - 171,5 - 172,5 - 173,5 - 178,5  
B: 173 - 173 - 172 - 173 - 174 - 172 - 171 - 172

Asumiendo que existen buenas razones para suponer que los desvíos son iguales, ¿aseguraría Ud. al 5% que hubo una tendencia del analista A a obtener resultados más altos que el B?

Resp: No

4) De desea comparar dos raciones R1 y R2 para la crianza de productos sangre pura de carrera a efectos de lo cual se seleccionó un conjunto de 12 potrillos machos, todos hijos de un mismo semental, para el experimento. Se eligieron 6 al azar y se les asignó la ración R1, en tanto que a los restantes se les asignó la ración R2. Se les suministraron las raciones durante un el mismo lapso y se registraron los siguientes aumentos de alzada en cm:

R1: 1,5 - 2,5 - 3,5 - 2 - 3 - 3,5  
R2: 2,5 - 2 - 4,5 - 4 - 3,5 - 4

Se asumirá que, dadas las condiciones del experimento, existen razones para suponer que los desvíos son iguales. a) ¿Considera Ud. que este experimento es concluyente para poder afirmar, con probabilidad máxima de error del 5%, que las raciones difieren?; b) ¿cómo plantearía Ud., a priori de los datos, la hipótesis nula apropiada, si le advirtieran que la ración R2 es más cara que la R1 y que sólo se la adoptaría si pudiera asegurarse al 10% que con ella la alzada media supera a la que se obtendría con R1 en 0,5 cm al menos?.

Resp: a) No. b)  $\mu_2 \leq \mu_1 + 0.5$ , no se rechaza

5) En una hilandería se considera la posibilidad de reparar a nuevo las hiladoras, si es posible asegurar con la

reparación, con un riesgo máximo del 5%, un aumento estadísticamente discernible en la producción media por máquina. Se eligieron entonces 4 máquinas al azar y se las reparó, registrándose luego la producción de cada una para un período dado; se obtuvo así una media de 1470 metros de hilado con un desvío estándar de 132 metros. Como se desconocía la producción de las máquinas sin reparar, se registró la producción de 16 de ellas en el mismo período, obteniéndose una media de 1208 con un desvío de 354 metros. Independientemente de las diferencias observadas entre los desvíos, parece indudable que los valores poblacionales no deben considerarse iguales. a) ¿Aconsejaría Ud. la reparación de todas las máquinas?; b) calcular los límites de confianza del 90% para la diferencia entre las producciones medias.

Resp: a) Si. b) 68 ; 456

6) Se desea estudiar la efectividad de un nuevo aditivo para combustible, a efectos de lo cual se realizó una prueba sobre 10 corridas en distintos automóviles que arrojaron un consumo medio de 4,2 litros con un desvío estándar de 0,58 litros. Además, se efectuó una prueba similar, también sobre 10 corridas, con otros automóviles de la misma marca y modelo y el mismo trayecto pero sin el aditivo, obteniéndose un consumo medio de 5,25 litros con un desvío de 0,63 litros. Se tienen fundadas razones (no certeza) para creer que los desvíos son iguales. a) ¿Aseguraría Ud. que el aditivo reduce el consumo en 0,5 litros al menos para el recorrido dado?; b) ¿y que lo reduce en un 10% al menos?.

Resp: a) Si b) Si

7) Se desea comparar la efectividad para el engorde de novillos de dos variedades de cebada forrajera como pastoreo, a efectos de lo cual se seleccionó un lote lo más parejo posible, dividiéndolo en dos grupos de 15 animales cada uno, que se pastorearon durante el mismo lapso de tiempo en potreros sembrados con dichas variedades, registrándose los aumentos de peso en Kg. de todos los novillos, datos que, luego de procesados, arrojaron los siguientes resultados:

Variedad A: = 25 Kg.  $S = 3,4$  Kg

Variedad B: = 26,2 Kg.  $S = 2,8$  Kg

a) ¿Considera Ud. que estos datos son concluyentes al 5%?

b) ¿Cuál es la diferencia de aumento de peso mínima que puede garantizarse para la variedad B con 5% de riesgo?.

Resp: a) No. b) -0,73

8) Se tienen dos enconadoras de hilo de coser cuyas producciones se desean comparar, a efectos de lo cual se realizó un experimento en el que se midió la cantidad de metros de hilo enconados durante el mismo lapso de tiempo ( $n=5$  días), obteniéndose los siguientes resultados (en miles de Km)

Máquina 1  $\bar{x}_1 = 1,62$ .  $S_1 = 0,17$

Máquina 2  $\bar{x}_2 = 1,81$ .  $S_2 = 0,22$

Se tiene la presunción, no la certeza, de que los desvíos son iguales. a) ¿Aseguraría Ud. que con la máquina 2 se obtiene como mínimo una producción superior en un 10% a la de la otra? b) ¿Cuál es la diferencia de producción mínima, en Miles de Km que puede garantizarse para la máquina 2 con 5% de riesgo? c) ¿Qué diferencia porcentual mínima puede garantizarse para la máquina 2 con 5% de riesgo?

Resp: a) No. b) -0,04 c)  $h=0.97$ , no se puede asegurar una diferencia mínima a favor de la máquina dos, sino una disminución del 3%.

9) Se ha desarrollado una nueva variedad de maíz híbrido que tendrá un costo de producción mayor que la actual. Para efectuar la comparación se sembraron 10 parcelas al azar con cada variedad, obteniéndose los siguientes rendimientos en quintales por parcela:

Actual:  $\bar{x}_1 = 15,2$  ;  $S_1 = 1,63$

Nueva :  $\bar{x}_2 = 17,1$  ;  $S_2 = 1,43$

Dada la índole del experimento, se tiene la certeza de que los desvíos son iguales (¿Por qué?). Para lanzar el nuevo producto al mercado, se desea tener un 95% de seguridad de que su rendimiento supera en un 10% al menos al actual. Establecer la hipótesis nula apropiada, efectuar el ensayo e indicar la decisión a tomar.

Resp: a)  $H_0 : \mu_2 \leq 1,1 \mu_1$  , no se rechaza la hipótesis y no se recomienda el lanzamiento del producto.

10) Se realizó un experimento para probar la eficacia de un aditivo en la fórmula de un tipo de látex, que se espera aumente la resistencia media a la tracción del producto. Se realizaron 21 ensayos con el aditivo, que arrojaron una resistencia media de 8,5kg con un desvío estándar de 1,2kg. Con respecto al comportamiento del producto sin el aditivo, jamás se había realizado un experimento diseñado para analizarlo, razón por la cual se aprovechó la oportunidad para realizar 61 ensayos que arrojaron una resistencia media de 7,6kg, con un desvío estándar de 1,25kg. a) ¿Cuál es la diferencia mínima en la resistencia media que se obtiene con el aditivo, con 90% de probabilidad?. b) ¿Aseguraría Ud. con 10% de riesgo de equivocarse que el aditivo aumenta la resistencia media en un 10% al menos. c) ¿Cuál es el porcentaje mínimo de aumento en la resistencia media que se obtiene con el aditivo con 90% de probabilidad?.

Resp: a) 0,54 Kg b) No. c) 7,06% ( $h=1,0706$ )

11) Se realizó un experimento para comparar dos marcas de máquinas cosechadoras, John Deere y Vasalli, tomando 5 máquinas elegidas al azar de cada marca y registrando los volúmenes cosechados en toneladas durante un día, con los siguientes resultados:

John Deere: 3,2 - 2,8 - 2,4 - 3,6 - 2,7  
Vasalli : 2,5 - 2,2 - 3,7 - 2,1 - 2,9

Aceptamos que la variabilidad en los resultados se debe a las siguientes causas: 1) Diferencia entre las parcelas cosechadas; 2) contingencias de la tarea -roturas, paradas, etc.-; 3) diferencia entre las máquinas. Entonces, las causas 1) y 2) influyen igual para ambas marcas, pero no tenemos información sobre la causa 3), es decir que las diferencias entre máquinas podrían ser distintas para John Deere y Vasalli, no existen razones fuertes para pensar que las varianzas poblacionales son iguales. a) ¿Es posible asegurar con 10% de error que los volúmenes medios cosechados son diferentes?. b) Calcule un intervalo de confianza del 80% para la diferencia entre los volúmenes medios cosechados.

Resp: a) No. b)  $0,26 \pm 0,506$

12) En una empresa productora de artículos de consumo masivo se ha lanzado una campaña publicitaria sobre un jabón en polvo a efectos de incrementar las ventas mensuales. Se desea ahora comprobar si la campaña ha sido efectiva, en cuyo caso se realizará una campaña similar sobre otro de los productos. A tal efecto, si no se ha conseguido el resultado deseado, se establece una probabilidad del 5% de tomar una decisión equivocada. Se registraron las ventas durante los cuatro meses que duró la campaña obteniéndose un promedio de 642 con un desvío estándar de 73 (miles de unidades). Con respecto a las ventas anteriores a la campaña, no se disponía de registros históricos extensos que permitieran conocer su valor exacto, pero pudo obtenerse los datos correspondientes a los últimos 12 meses que arrojaron un valor medio de 570 con un desvío estándar de 45. Se tiene la razonable presunción de que los desvíos son iguales. a) ¿Cuál sería su decisión si se deseara tener la casi seguridad de que con la campaña las ventas se incrementan en 50 unidades por lo menos?; b) ídem a) si se deseara asegurar un incremento del 10% por lo menos; c) alguien ensayó la hipótesis de que las ventas medias con la campaña eran inferiores a 580 y la rechazó; calcule la probabilidad de que se haya equivocado.

Resp: a) No lanzar campaña b) No lanzar campaña c) 0,049

13) Para ensayar dos nuevas variedades de trigo bajo condiciones agrícolas normales, una sociedad de cereales eligió al azar 8 fincas plantando ambas variedades en parcelas experimentales de cada finca. La producción de las 8 fincas fue la siguiente:

Finca:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Variedad A:	86	87	56	93	84	93	75	79
Variedad B:	80	79	58	91	77	82	74	66

Estimar la diferencia entre las producciones medias con un intervalo confidencial del 90% .

Resp:  $5,75 \pm 3,43$



14) A efectos de determinar el poder calorífico de un combustible se propone un método simplificado que se supone dará buenos resultados. Se efectúa una serie de mediciones de distintas muestras, usando el método propuesto y el clásico (calorímetro de combustión), obteniéndose los siguientes resultados:

Muestra	Propuesto	Clásico	Muestra	Propuesto	Clásico
1	164,65	165,2	8	199,95	199,2
2	178,6	179,2	9	160,9	161,2
3	188,2	189,2	10	155,1	155,2
4	200,6	201,3	11	131,15	133,15
5	188,5	189,2	12	174,15	174,2
6	145,6	145,2	13	129,75	130,1
7	130,25	131,15	14	156,4	158,3

¿Puede asegurar que las diferencias son significativas?

Resp: Si

15) Se supone que una tinta especial para calzado puede producir un aumento en la duración media, a efectos de lo cual se diseñó un experimento suministrando a 8 personas un par de zapatos, uno de los cuales fue tratado y el otro no. De este modo se espera eliminar la fuerte variabilidad existente entre las personas. Se obtuvieron así los siguientes resultados de duración en semanas, llamando duración al lapso comprendido entre el comienzo de uso y el momento en que aparecen las primeras grietas del cuero:

Persona:	1	2	3	4	5	6	7	8
Zapato sin tratar:	12	7	18	15	20	8	13	13
Zapato tratado:	14	7	21	14	23	9	14	12

¿Considera Ud. que el resultado ha sido concluyente?.

Resp: Si

16) Se considera la posibilidad de cambiar la aleación de un material por otra más costosa, siempre que el porcentaje de defectuosas de las piezas se reduzca en 2 puntos porcentuales. Dado que se desconoce el porcentaje actual, se tomó una muestra con cada aleación, la actual y la propuesta, con los siguientes resultados:

	Aleación actual	Aleación Nueva
Piezas producidas	1000	200
Piezas defectuosas	94	12

¿Puede asegurar al 5% de error que se ha obtenido el resultado deseado?

Resp.: No

## TEMA 9: CONTRASTE CHI-CUADRADO

1) Se desea verificar si un dado está cargado. A tal efecto se lo arrojó 60 veces, obteniendo los siguientes resultados:

<i>Resultado</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Nº de ocurrencias</i>	14	6	6	13	16	5

¿Aseguraría, con probabilidad de error del 5% que este dado está cargado?

Resp: Sí

2) Una persona denunció que en un casino privado había una ruleta adulterada. Basaba su presunción en el hecho de haber observado que el 0 se producía con frecuencia excesiva y que los colores colorado y negro no se presentaban por igual. El juez solicitó entonces la asesoría de un consultor estadístico para que elevara el informe correspondiente. Registró datos de 1000 bolas, con los siguientes resultados: 0: 42 bolas; negro: 520 bolas; colorado: 438 bolas. Indique las conclusiones del consultor.

Resp. Existen evidencias concluyentes para decir que la ruleta esta desequilibrada.

3) Un distribuidor de acondicionadores de aire tiene dividida su región en 4 localidades. El mismo afirma que las instalaciones del equipo están igualmente distribuidas entre las 4 localidades. Un posible representante ensaya una muestra de 40 instalaciones realizadas el año anterior, y comprueba lo siguiente:

<i>Zonas</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>Cantidad</i>	6	12	14	8

¿Rechazaría Ud. la afirmación del distribuidor.

Resp: No hay motivo para rechazar la afirmación

4) Históricamente, un fabricante de televisores ha vendido sus productos en la siguiente forma: 40% de 14", 40% de 16" y 20% de 20". Con el objeto de programar su producción para los próximos períodos, toma una muestra de 200 ventas recientes y encuentra los siguientes resultados: 85 TV de 14", 65 TV de 16" y 50 TV de 20". Verificar si realmente hubo cambios respecto del patrón histórico de ventas con riesgo 10%.

Resp: Si

5) En una fábrica de automotores se han recibido reclamos por fallas de pintura en los automóviles. Se supone que todo cliente que detecta una falla efectúa el reclamo en fábrica. La producción del último año fue: 550 autos blancos, 450 azules, 480 rojos y 320 verdes. Se han presentado 300 reclamos de los cuales el 30% es propietario de autos blancos, otro 30% de azules, el 25% de rojos y el 15% de verdes. ¿Considera Ud. que los resultados son una prueba concluyente para afirmar que existe asociación entre el color de los autos y el porcentaje de fallas de pintura?. Asuma un riesgo del 5%.

Resp: No

6) Con el objeto de orientar su publicidad para neutralizar el efecto de la competencia, una empresa productora de artículos de consumo masivo ha realizado un ensayo sobre la preferencia del público en las distintas zonas del país, obteniendo estos resultados:

<i>PREFERENCIA</i>	<i>ZONAS</i>		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>Empresa</i>	36	20	28
<i>Competencia</i>	44	30	12

¿Considera Ud. que existe evidencia para afirmar que ambas variables están asociadas?

Resp: Sí

7) Una cadena de perfumerías tiene en exclusividad los productos "Íntimo". Uno de ellos, un desodorante íntimo para dama, se ofrece en 4 fragancias: *Delirio*, *Fuego*, *Ensueño* y *Pasión*. Se registraron las preferencias de las clientas en 3 locales, con los siguientes resultados:

	<i>Delirio</i>	<i>Fuego</i>	<i>Ensueño</i>	<i>Pasión</i>
<i>Local 1</i>	32	45	23	28
<i>Local 2</i>	14	51	15	14
<i>Local 3</i>	14	14	12	8

¿Aseguraría Ud. con 10% de probabilidad de equivocarse que las preferencias difieren entre los locales?  
**Indique claramente la hipótesis nula que ensaya.**

Resp: Si

8) Los datos de la tabla siguiente son consumos diarios de agua en una curtiembre. Se desea ensayar la hipótesis de que responden a una distribución Normal.

X (Miles de l) Días

20 - 30	.....	6
30 - 40	.....	90
40 - 50	.....	232
50 - 60	.....	192
60 - 70	.....	66
70 - 80	.....	12
80 - 90	.....	2
Total		600

Resp: Se  $H_0$ , hay evidencias para decir que los consumos diarios de agua en la curtiembre no poseen una distribución normal.

9) Se desea ensayar la hipótesis de que la cantidad diaria de levantacristales de un modelo de automóvil que llegan reclamados a fábrica por defectos responde a un proceso de POISSON. A tal efecto, se registraron los siguientes datos de reclamos:

Reclamos ( $r$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de días	26	62	120	145	131	101	61	27	9	1	1
$P(r)$	0.03	0.1037	0.1829	0.215	0.1895	0.1336	0.079	0.04	0.017	0.01	0.002
$E_i$	20.12	70.94	125.09	147.03	129.62	91.42	53.73	27.07	11.93	4.67	1.65

Resp.: no hay evidencias para dudar del ajuste a una distribución de Poisson.

10) El modelo de VILFREDO PARETO (1896) suele utilizarse para representar salarios de una empresa y también ofertas de licitaciones. El cálculo de la función de probabilidad acumulada no requiere el uso de tablas, pues tiene la siguiente expresión sencilla:

$$F(x) = 1 - (\theta/x)^b$$

siendo  $\theta$  el valor mínimo de la variable (salario mínimo), que generalmente se conoce, y  $b$  un parámetro que puede calcularse en función de la media de la variable mediante:

$$b = \frac{\mu}{\mu - \theta}$$

Considere los siguientes datos de salarios de una empresa, en la cual el salario mínimo es de \$400 y ensaye la hipótesis de que responden al modelo de PARETO.

$X$ (\$)	$N^{\circ}$ de empleados
400 - 500	59
500 - 600	34
600 - 700	26
700 - 800	20
800 - 1000	21
1000 - 1200	15
1200 - 1500	11
1500 - 2000	10
2000 - 3000	12
3000 - 5000	6

Resp.: No existen pruebas que permitan refutar el modelo de Pareto.

11) Los siguientes datos son consumos de electricidad (en Kwh) de 100 usuarios de Buenos Aires y Gran Buenos Aires. Ajustar a un modelo Lognormal.

$X$ (Kwh)	Usuarios
0 - 100	18
100 - 200	34
200 - 300	28
300 - 400	12
400 - 500	4
500 - 600	2
600 - 1400	2

Resp.: No hay evidencias para rechazar el modelo lognormal.

## ***EJERCICIOS INTEGRADORES:***

1) En los laboratorios de investigación de una compañía metalúrgica se ha desarrollado una nueva aleación para los rodillos con lo que se espera mejorar la duración de los mismos que, con la aleación actual es una variable aleatoria con media 520 y desvío 38 (millones de revoluciones). Después de algunas discusiones, la gerencia decide efectuar un experimento a efectos de verificar en forma definitiva las cualidades del nuevo producto. Dado que la aleación actual está sólidamente impuesta en el mercado, el gerente considera que le parece razonable una probabilidad del 20% de lanzar el nuevo producto en caso de que su duración media sea un 4% superior a la actual. Dado el costo de la nueva aleación, se solicita al jefe de ingeniería que si el nuevo producto tuviera la misma duración media que el actual, la probabilidad de lanzarlo sea muy pequeña, del 1 por mil, esto es 0,001.

- Indicar hipótesis nula apropiada a esta situación, su condición de rechazo, el tamaño de muestra a tomar y la regla de decisión
- ¿Cuál es la probabilidad de no lanzar el producto si tuviera una duración media 8% superior a la actual?
- Luego de tomar la muestra calculada en el punto a) se obtuvo un promedio de 555 con un desvío de 65 (millones de revoluciones) y se encontró que la tercera parte de los rodillos presentaban asperezas que perjudicaban al proceso. ¿Considera que la duración ha mejorado con la nueva aleación?
- Estimar el porcentaje de todos los rodillos que no poseen asperezas con una confianza del 80%.
- Estime el promedio de duración mínimo y la variabilidad máxima en la duración con la nueva aleación, asumiendo un riesgo del 5%.
- Si se desea reducir el error de la estimación promedio en un 40%, ¿cuántas muestras deberán tomarse?

Respuestas:

- $n = 17$ ; b) 0.077; c) No Rechazo la  $H_0$ , no hay pruebas de que haya mejorado la duración.
- 52%; 81%; e) 527.48 ; 92.14; f) 44

2) Una empresa dedicada a la fabricación de determinadas piezas se encuentra interesada en controlar su maquinaria con el fin de saber si su producción cumple los requisitos exigidos por sus compradores. Se sabe que tres son los factores para que una pieza sea considerada de primera calidad y resulte vendida al precio más elevado (5\$/pieza de primera):

- ◆ La dimensión promedio de las piezas no puede ser menor de 15cm.
- ◆ La variabilidad en la dimensión debe ser menor a los 2 cm.
- ◆ El porcentaje de piezas con defectos (rugosidad en la pieza) al final de un día cualquiera debe ser menor al 10%.

Si la máquina cumple todos los requisitos exigidos se considera que no es necesario detener el proceso. Por otra parte se estipula que si las máquinas producen piezas que cumplen la condición en cuanto a la variabilidad en la dimensión y al porcentaje de piezas defectuosas sin cumplir la condición del promedio, no sería necesario parar las máquinas. Esto se debe a que si bien las piezas producidas no corresponderán a las de primera calidad, podrían venderse a un precio levemente inferior (3.5\$/pieza de segunda), en cuyo caso el control de calidad se realizaría nuevamente en el día posterior. Sin embargo bajo cualquier otra situación que no diera lugar a piezas ni de primera ni de segunda, el proceso productivo debería detenerse y ser revisado. La empresa proporcionó información sobre el costo de las piezas con rugosidades (consideradas de descarte) que asciende a los 1.5\$/unidad defectuosa.

Para efectuar los controles pertinentes se tomaron muestras al azar de 100 piezas durante la producción del día y se encontró una dimensión promedio de 15.8 cm, una desviación estándar de 2.3 cm y 85 piezas que no presentaron rugosidad.

Con esta información la empresa lo contrata a Ud. en concepto de experto estadístico con el fin de tomar algunas decisiones:

- ¿Aconsejaría a la empresa detener el proceso productivo si la misma está dispuesta a asumir una probabilidad del 10% de detenerlo innecesariamente? Fundamente su decisión y realice sus justificaciones a través de los procedimientos estadísticos que considere necesario.
- ¿Cuál sería la probabilidad de no detener la máquina por no detectar que la proporción de piezas defectuosas se encontraba en el orden del 12%? Indique qué probabilidad calcula

- c) Estime la variabilidad de las maquinarias asumiendo un riesgo del 5%.
- d) Si bien la dimensión promedio no es uno de los factores mayormente condicionantes en la operatoria, la empresa solicita una estimación de la misma y para ello estipula que desea un error máximo de muestreo de 0,3cm ¿podría indicarle bajo qué condiciones podría generarse un intervalo con ese requisito? Justifique estadísticamente su procedimiento, (haga los supuestos que considere necesarios para llevar a cabo dichos procedimientos) y la elección que hace para el asesoramiento.
- e) Teniendo en cuenta el costo de la pieza defectuosa, si se sabe que al final del día en el cual se recolectaron los datos la empresa había producido un total de 2000 piezas, ¿cuál sería la pérdida estimada en concepto de piezas defectuosas, asumiendo una confianza del 90%?
- f) En base a los hallazgos evidenciados realice un pequeño análisis global, a nivel estadístico, de las condiciones de funcionamiento de la maquinaria de la empresa.

Resp.: a) Detener el proceso; b)  $\beta = 0.71226$ ; c) 2.03cm-2.67 cm; d) Puede para las 100 muestras de las que tiene dato (100) estimar con un nivel de confianza del 80.338%; e) \$273 - \$626

3) La regularidad en la dimensión de una pieza fabricada en serie, es de importancia para el fabricante, por tal motivo se efectúan controles periódicos con el fin de revisar el funcionamiento de una de las máquinas (X) que produce dichas piezas a fin de corregirlas si poseen una alta variabilidad. Una de las revisiones arrojó sobre una muestra de 65 piezas los siguientes resultados:

X ( mm)	Piezas
15 – 15,5	7
15,5 – 16	13
16 - 16,5	25
16,5 – 17	15
17 - 17,5	5

El fabricante considera que si el proceso estuviera dentro de control la dimensión de las piezas debería ajustarse razonablemente bien a una distribución normal.

Por otra parte es de interés realizar un seguimiento de las denominadas piezas de descarte que serían aquellas que poseen una dimensión inferior a los 15,5 mm. Si el proceso de producción tuviera más del 8% de piezas de descarte se considera que el mismo se encuentra fuera de control, en cuyo caso debería detenerse el proceso.

- a) ¿Aconsejaría al fabricante detener la máquina “x” debido a un mal funcionamiento en lo respectivo al porcentaje de piezas de descarte admisible dentro del proceso?. Indique en términos del problema que error podría estar cometiendo con su decisión. ( $\alpha = 5\%$ ).
- b) ¿Cuál sería la probabilidad de detener la máquina si el porcentaje de piezas defectuosas fuera del 13%? Indique cuál es la probabilidad calculada y grafique su comportamiento.
- c) Otra de las máquinas con las que trabaja este fabricante, a la que denominaremos máquina Y, ha arrojado en uno de los controles, sobre 38 piezas, una dimensión promedio de 16.6mm con un desvío de 1.2mm. ¿Considera que existen diferencias en las dimensiones promedio de las máquinas teniendo en cuenta que también se considera de vital importancia la regularidad de las mismas? ( $\alpha = 5\%$ ).
- d) Estime con una confianza del 90% la variabilidad en las dimensiones de las piezas para cada una de las máquinas.
- e) Estime la dimensión promedio de todas las piezas producidas con la máquina X, con una confianza del 90%.
- f) Si se desea reducir en un 30% el error de la estimación promedio anterior, ¿cuántas muestras más deberían tomarse?
- g) ¿Considera, asumiendo un nivel de significación del 10% que los datos siguen una distribución normal? Justifique estadísticamente su respuesta.

Resp: a) No, error de tipo II, b)  $1 - \beta = 0.45224$ , c) No, d) 0.476mm – 0.6383mm; 1.01mm - 1.488mm, e) 16.1178mm – 16.346mm, f) 68 muestras más, g) No existen evidencia para creer que los datos no sigan una distribución normal.

4) Un agricultor decide estudiar el comportamiento de la cosecha de maíz. Para ello obtuvo información de las variables que el consideró más influyentes, entre ellas, la cantidad de fertilizante utilizado, las lluvias semestrales caídas en la región y la cantidad de hectáreas sembradas. En una muestra de 6 años, se observaron los siguientes resultados:

Cosecha	Fertilizante(X1)	Lluvia(X2)	Ha(X3)
9870	598	98,5	70560
8930	595	83	71316
10990	649	114	79240
11173	946	112	82550
10685	688	110,7	87160
9060	525	97,2	88120

Por otra parte obtuvo información sobre la cosecha de maíz, de uno de sus principales competidores, obteniendo de una muestra de 5 años un promedio de 11000Kg/ha con un desvío estándar de 950 kg/ha.

VARIABLES	EXPLICATIVAS	DET	CP	R <sup>2</sup>	S <sup>2</sup>	PRESS
1	.....	1.000	50.9	.567	5.176E+05	1.161E+07
2	.....	1.000	14.2	.868	1.582E+05	1.954E+06
3	.....	1.000	111.1	.075	1.107E+06	1.029E+07
1, 2	.....	0.672	7.4	.940	9.641E+04	3.016E+06
1, 3	.....	0.968	50.4	.587	6.584E+05	1.476E+07
2, 3	.....	0.724	8.3	.932	1.002E+05	1.958E+06
1, 2, 3	.....	0.472	4.0	.984	3.918E+04	1.621E+06

- \* En función de los indicadores propuestos, indique al agricultor cuál sería el modelo más apropiado para pronosticar el rendimiento del maíz. Justifique estadísticamente dicha decisión.
- \*¿Considera que existen diferencias en los niveles de cosecha promedio del maíz entre los dos agricultores, asumiendo un riesgo del 5%?
- ¿Cuál es la diferencia máxima en el rendimiento promedio de maíz entre los agricultores, asumiendo una confianza del 95%?
- Estime con una confianza del 90% la variabilidad en las lluvias caídas en la región.
- \*Estime la cantidad promedio de fertilizante que se utiliza en las siembras, con una confianza del 90%.
- Si se desea reducir en un 50% el error de la estimación promedio anterior, ¿cuántas muestras deberían tomarse?
- \* El agricultor está dispuesto a comprar un nuevo fertilizante recientemente lanzado al mercado si es posible asegurar que el porcentaje de plantas con problemas de crecimiento es menor al 15%. Para verificarlo se tomó una muestra en 60 ha en un campo de similares características en las cuales se aplicó el fertilizante y se obtuvo un 8% de plantas con problemas en el crecimiento ¿aconsejaría la compra del nuevo fertilizante si se asume un riesgo del 5%? Indique el riesgo asociado a su decisión.
- \*¿Cuál es la probabilidad de no realizar la compra del nuevo fertilizante si el 10% de las plantas no presentaron problemas en el crecimiento? Indique que probabilidad calcula.

Resp.: a) El modelo es el 1,2,3. , b) No, c) 1954,2 kg/Ha, d) 8.03mm – 24.97 mm, e) 545,53 – 788,13 f) 18 muestras, g) No, Error de tipo II, h) 0.74857