Guía de problemas 3

Series y transformada de Fourier

Ejercicio 1
Probar que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ortogonales en el intervalo dado:

a) $f_1(x) = e^x$ $\quad f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ intervalo (0,2)

b) $f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = 1 - 3x^2$ intervalo (-1,1)

c) $f_1(x) = x$ $\quad f_2(x) = c_1 x + c_2 x^3$ intervalo (-1,1), determine c_1 y c_2

Ejercicio 2
Hallar el período de las siguientes funciones y grafique en Matlab/Octave:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$

b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \cos(4x)$

c) $f(x) = (\operatorname{sen}(x))^2$

Ejercicio 3
Obtener la serie de Fourier para aproximar las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi \\ 1 & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ período=2π=T

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x < 2 \\ 1 + x & -2 \le x < 0 \end{cases}$ período=4=T

utilice las propiedades para hallar a_n y b_n

Compare gráficamente (Matlab/Octave) la función y su aproximación, para diferentes términos de la sumatoria.

Ejercicio 4
Obtener la transformada de Fourier de:

a) $f(x)=\begin{cases}1 & 2<x<4\\ 0 & x<0 \quad o \quad x>4\end{cases}$

b) $f(x)=e^{-\alpha x}u(x)$

$u(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

c) $f(x)=\cos(\alpha x)$

Ejercicio 5
Dada una lámina delgada, calcular la distribución en ella de la temperatura de régimen permanente u(x,y), cuando ésta debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

a)

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<y<10 \qquad 0<x<\infty\\ u(x,0)=u(0,10)=0 & u(0,y)=y\\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,y)=0\end{cases}$$

b)

$$\begin{cases}\nabla^2 T=0 & 0<x<\infty \qquad 0<y<\infty\\ T(x,0)=\begin{cases}100-x & 0<x<10\\ 0 & x>10\end{cases}\\ T(0,y)=0 & \lim\limits_{y\to\infty}T(x,y)=0\end{cases}$$

c)

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 & 0<x<\pi \qquad 0<y<\pi\\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 & 0<y<\pi\\ u_y(x,0)=2\cos(x) & u_y(x,\pi)=0 \qquad 0<x<\pi\end{cases}$$

Ejercicio 6
Obtener la serie de Fourier que aproxima a las siguientes funciones:

a) $f(x)=4-x^2$ en $(-\pi,\pi)$

b) $f(x)=-x$ en $(-\pi,\pi)$

c) $f(x)=e^x$ en $(-\pi,\pi)$, con $f(x)=f(x+2n\pi)$, n entero

Ejercicio 7
Obtenga la solución para conducción transitoria unidimencional, con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & k = 0{,}16 \quad 0 < y < \infty \qquad 0 < x < 100 \\ T_x(0,t) = T_x(100,t) = 0 & T(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 60 & 0 < x < 50 \\ 40 & 50 < x < 100 \end{cases}$$

Interprete físicamente el problema.

Ejercicio 8
Dado un cilindro infinito de radio unitario con:

$$\begin{cases} T(1,t) = 0 \\ T(r,0) = f(r) \end{cases} \qquad f(r) = 100$$

La solución general es:

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-k\lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r)$$

Obtenga a_n y la solución particular. Utilice las propiedades de las funciones de Bessel.

Ejercicio 9
Resuelva la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales (pde) utilizando el método de separación de variables:

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) = 0$$

$C(0,z) = 0$

$C(x,0) = 0$

$C(x,1) = 0$

$C(1,z) = 1$

Grafique en Matlab/Octave la solución, aproximando la serie de Fourier con 10 términos.