Cónicas

Para realizar los ejercicios propuestos en esta sección de la guía es necesario conocer la definición de las cónicas, sus ecuaciones canónicas, sus gráficos y sus elementos principales (focos, ejes, vértices, etc.)

1. La circunferencia es el conjunto de los puntos del plano que se encuentran a una distancia r (r > 0) de un punto fijo $P_0 = (x_0, y_0)$, denominado centro. Demostrar que la ecuación de una circunferencia centrada en $P_0 = (x_0, y_0)$ de radio $r > 0$ está dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
Determinar, siempre que exista, la ecuación de una circunferencia que verifique las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la circunferencia obtenida.

a. Centro en $P_0 = (-2,1)$ y radio $\sqrt{2}$.
b. Centro en $P_0 = (6,5)$ y pasa por $P_1 = (10,8)$.
c. Pasa por los puntos $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (-1,1)$.
d. Pasa por los puntos $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,3)$, $P_3 = (0,1)$.

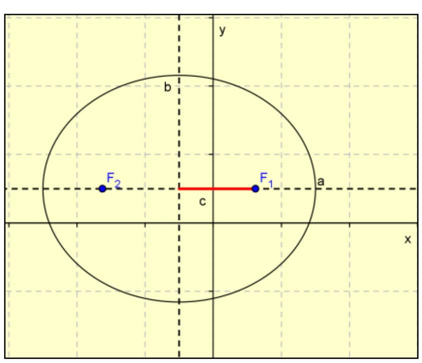
2. Parábola que pasa por tres puntos La ecuación de una parábola con eje de simetría vertical es $y = ax^2 + bx + c$ mientras que si el eje de simetría es horizontal la ecuación es $x = ay^2 + by + c$ (en ambos casos $a, b, c \in R$ con $a \neq 0$). Determinar, siempre que exista, la ecuación de una parábola que pase por los puntos indicados en cada caso. La ecuación de la parábola obtenida, ¿es la única posible? Graficar las parábolas obtenidas.

a. $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,5)$.
b. $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,3)$, $P_3 = (0,1)$.
c. $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (1,1)$.

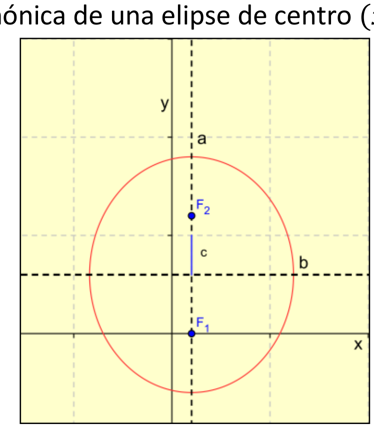
3. La parábola (como lugar geométrico) es el conjunto de los puntos P del plano cuya distancia a una recta fija L (llamada directriz) es igual a la distancia a un punto fijo F (llamado foco).

a. Sea p una constante positiva. Obtener la expresión analítica de una parábola de foco $F = (p, 0)$ y directriz $x = -p$.
b. Obtener la expresión analítica de la parábola de foco $F = (0, -p)$ y directriz $y = p$.
c. Obtener la expresión analítica de la parábola de foco $F = (-5,0)$ y directriz $x = 5$.

4. La elipse es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (denominados focos) es una constante positiva, $2a$.
Si se llama c a la distancia entre los focos y el centro de la elipse se verifica $b^2 = a^2 - c^2$. Notar que, F_1 y F_2 son los focos, el centro de la elipse es $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. La ecuación canónica de una elipse de centro (x_0, y_0) es:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

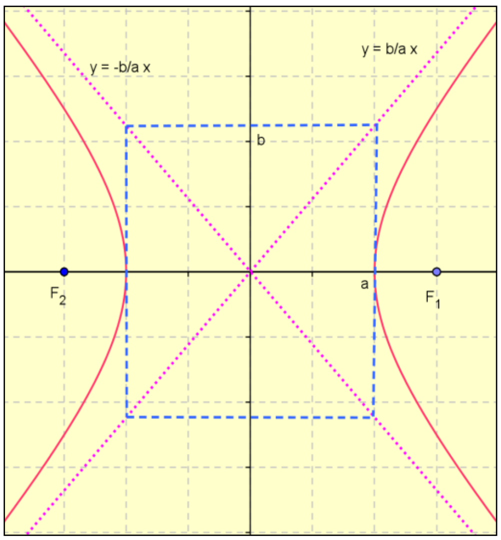


$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

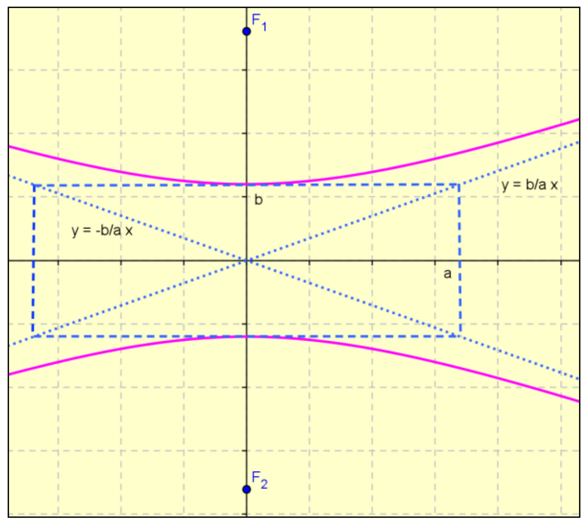
Hallar, siempre que exista, la ecuación de la elipse que verifica las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la elipse obtenida, indicando sus elementos principales.

a. Centro en el origen de coordenadas, pasa por los puntos $(2,0)$ y $(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{4})$.
b. Pasa por el punto $(4,0)$ y sus focos son $(2,0)$ y $(-2,0)$.
c. Sus focos son $(1,1)$ y $(-3,1)$ y pasa por el punto $(0,1)$.

5. La hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante positiva, $2a$. Si se llama c a la distancia entre los focos y el centro de la hipérbola se verifica $b^2 = c^2 - a^2$. Además. notar que, si F_1 y F_2 son los focos, el centro de la hipérbola es el punto medio del segmento determinado por los focos, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$.
La ecuación canónica de la hipérbola es:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Obtener, siempre que exista, la ecuación de la hipérbola que verifica las condiciones pedidas en cada caso. Graficar la hipérbola obtenida, indicando sus elementos principales.

a. Centro en el origen de coordenadas que pasa por los puntos $(0,-4)$ y $(2, \sqrt{32})$.
b. Sus focos son $(1,8)$ y $(1,-12)$, pasa por el punto $(1,6)$.
c. Sus focos son $(1,1)$ y $(-3,1)$ y pasa por el punto $(0,2)$.

6. Expresar las siguientes ecuaciones en forma canónica En el caso en que la ecuación represente una cónica, identificarla y representarla gráficamente, indicando previamente los principales elementos.

a. $y^2 - 4x - 12y + 28 = 0$
b. $4x^2 - y^2 - 8x - 6y = 5$
c. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 90y + 193 = 0$
d. $9x^2 - 18x - 4y^2 - 8y - 31 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 2x = 0$
f. $4y^2 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x = \frac{10}{9}$

Nota: En la página 5, encontrarás resuelto un ejercicio similar al 6. Podes visualizar los gráficos realizados utilizando alguna aplicación gratuita, por ejemplo: GeoGebra (Android, IOs) o QuickGraph, Desmos (IOs).

Cuádricas

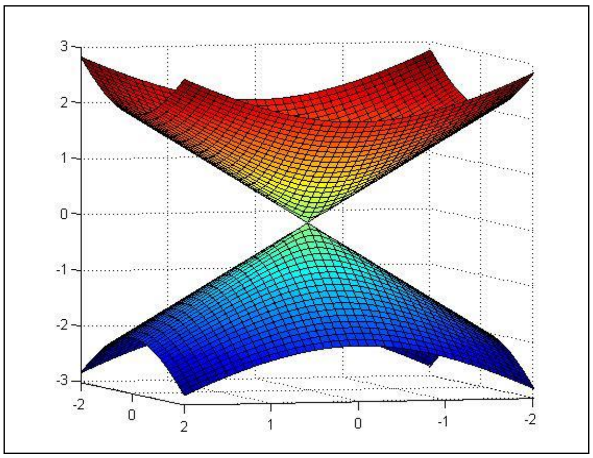
Para resolver los ejercicios de esta sección de la guía, se requiere conocer las formas canónicas de las diferentes superficies cuádricas (elipsoides, paraboloides, hiperboloides, cono, cilindro).

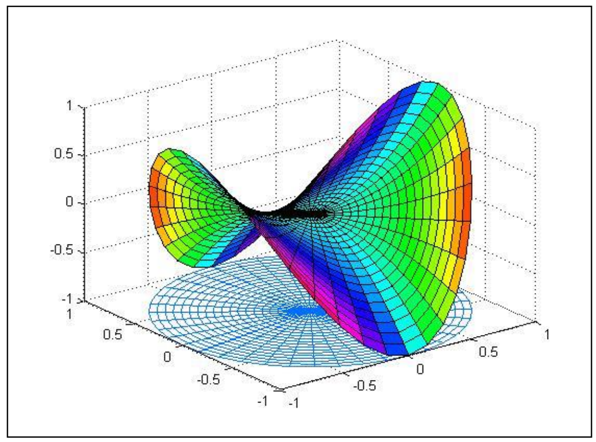
7. A continuación, se dan las ecuaciones de distintas cuádricas y el gráfico de algunas de ellas. Se pide relacionar la ecuación con el gráfico correspondiente. Una sugerencia que te ayudará a identificar de qué cuádrica se trata es calcular las intersecciones de las superficies con diferentes planos.
Para aquellas fórmulas que no se corresponden con ninguno de los gráficos dados, se pide realizar un gráfico aproximado de la superficie correspondiente.

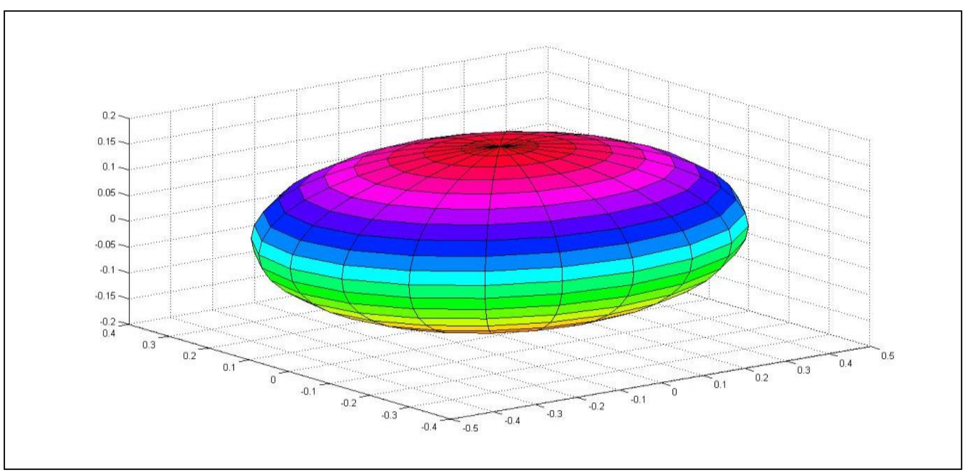
Ecuaciones

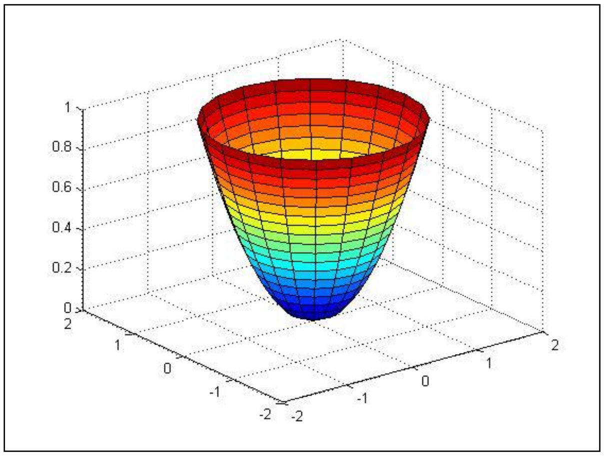
i. $z = x^2 + y^2$	ii. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 1$	iii. $z = x^2 - y^2$
iv. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$	v. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	vi. $z^2 = x^2 + y^2$

Gráficos









8. Para cada una de las siguientes superficies cuádricas:

a. Hallar analíticamente sus trazas con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos.
b. Realizar un gráfico aproximado de la superficie.

i. $z = 4x^2 + y^2$
ii. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
iii. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
iv. $36x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$
v. $z^2 = x^2 + 9y^2$
vi. $z = 1 - x^2 - y^2$
vii. $x^2 + y^2 = 2y$
viii. $x^2 + 4y^2 = 16$
ix. $y^2 - 4(z-1)^2 = 1$

9. Dada la superficie cuádrica $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$

a. Hallar e identificar su intersección con el eje y, con el plano $y = 9$ y con el plano yz.
b. Identificar y graficar la superficie, señalando en el gráfico realizado las intersecciones halladas en el ítem a.

10. Dada la superficie cuádrica $x - 1 = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$

a. Hallar y representar su intersección con los planos coordenados.
b. Hallar y representar su intersección con el plano $x = 2$.
c. Identificar y graficar la superficie dada, identificando en el gráfico realizado las intersecciones halladas en los ítems anteriores.

Sugerencia: En Web Campus, en la sección de recursos digitales de Álgebra y Geometría Analítica, encontrarás un archivo power point en el que se muestran algunas aplicaciones de los temas trabajados en esta guía. Podrás visualizar los gráficos realizados utilizando alguna aplicación gratuita, por ejemplo: GeoGebra 3D(Android) o QuickGraph (IOs).

Ejercicio sobre cónicas

Enunciado

Expresar la siguiente ecuación en forma canónica. En el caso en que la ecuación represente una cónica, identificarla y representarla gráficamente, indicando previamente los principales elementos.

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$$

Solución:

A fin de poder identificar la cónica, reagrupamos los términos por variables, teniendo como objetivo llegar a la ecuación canónica de la misma:

$$\left(9.x^2 - 54.x\right) + \left(25.y^2 + 50.y\right) - 119 = 0$$

En cada expresión encerrada entre paréntesis, extraemos factor común el coeficiente del término cuadrático, de tal forma que ese término quede con coeficiente igual a uno.

$$9.\left(x^2 - 6.x\right) + 25.\left(y^2 + 2.y\right) - 119 = 0$$

En cada expresión encerrada entre paréntesis, aplicamos el procedimiento de completar cuadrados, que tiene como objetivo llegar a un trinomio cuadrado perfecto para escribirlo como cuadrado del binomio: $a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2$

A los términos lineales que se encuentran en cada una de estas expresiones, los multiplicamos y dividimos por dos, de modo tal de no modificar la expresión. Esto se debe a que el trinomio cuadrado perfecto tiene un término que es el doble del producto de las bases.

$$9.\left(x^2 - 2\,\frac{6.x}{2}\right) + 25.\left(y^2 + 2\,\frac{2.y}{2}\right) - 119 = 0$$

Si es posible, simplificamos el dos del denominador con el coeficiente que ya existía.

$$9.\left(x^2 - 2\,\frac{\overset{3}{\cancel{6}}.x}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) + 25.\left(y^2 + 2\,\frac{\overset{1}{\cancel{2}}.y}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) - 119 = 0$$

$$9.\left(x^2 - 2.\underbrace{3}_{\text{2° base del trinomio}}.x\right) + 25.\left(y^2 + 2.\underbrace{1}_{\text{2° base del trinomio}}.y\right) - 119 = 0$$

El cuadrado de la segunda base deberá aparecer. Con el mismo criterio anterior para no modificar a la expresión, restamos el mismo término.

$$9.\left(x^2 - 2.3.x + 3^2 - 3^2\right) + 25.\left(y^2 + 2.1.y + 1^2 - 1^2\right) - 119 = 0$$

$$9.\left(\underbrace{x^2 - 2.3.x + 9}\, - 9\right) + 25.\left(\underbrace{y^2 + 2.1.y + 1}\, - 1\right) - 119 = 0$$

Trinomio cuadrado perfecto: el cuadrado de una base, mas (o menos) el doble producto de las bases, más el cuadrado de la segunda base.

A estos trinomios los podemos escribir como cuadrados de binomios, considerando las bases antes mencionadas.

$$9.\left[\ (x-3)^2-9\ \right]+25.\left[\ (y+1)^2-1\ \right]-119=0$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$9.(x-3)^2\ -81+25.(y+1)^2\ -25-119=0$$

Agrupamos los términos independientes

$$9.(x-3)^2\ +25.(y+1)^2\ =225$$

Dividimos por el término independiente miembro a miembro para que quede igualada a la unidad.

$$\frac{9.(x-3)^2\ +25.(y+1)^2}{225}\ =\ 1$$

Simplificamos

$$\frac{9(x-3)^2}{225}+\frac{25(y+1)^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

La expresión cartesiana buscada es:

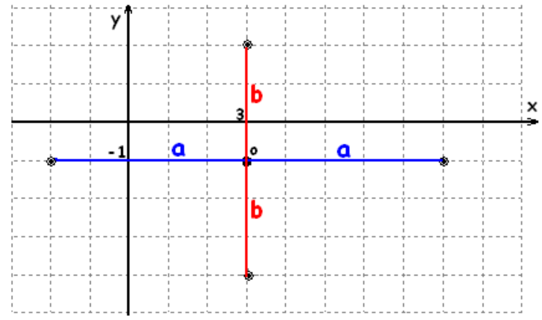
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1}$$

Comparando con la ecuación $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Podemos afirmar que es una ***ELIPSE***, donde $\left.\begin{array}{l} x_0=3 \\ y_0=-1 \end{array}\right\}$ son las coordenadas del centro, $C=(3;-1)$

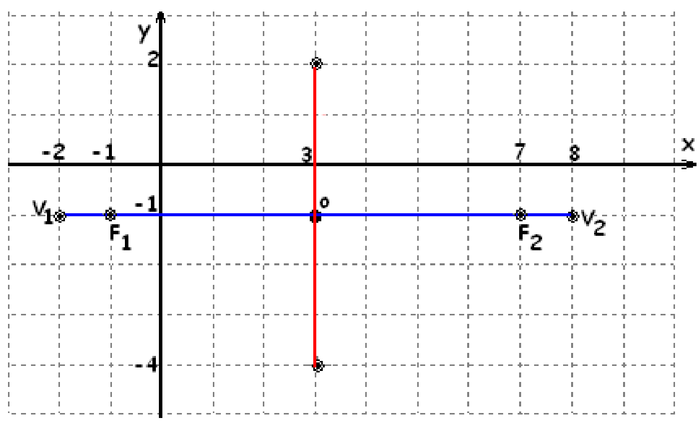
$a^2=25 \rightarrow a=5$ semi-diámetro mayor y $b^2=9 \rightarrow b=3$ semi-diámetro menor

Con la información obtenida hasta ahora podemos representar:



Para la distancia focal "c", aplicamos: $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{25-9} \rightarrow c = 4$

Para ubicar a los focos, tomamos la distancia focal desde el centro y sobre el eje donde se trazó el semi-diámetro mayor. Quedando vértices, focos y centro alineados.

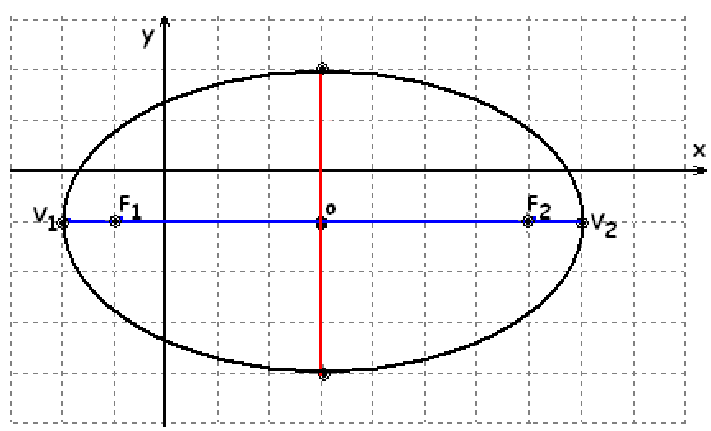


Observamos que las coordenadas de los vértices y focos de la elipse son:

$V_1 = (-2;-1) \quad V_2 = (8;-1) \qquad F_1 = (-1;-1) \quad F_2 = (7;-1)$

El gráfico de la elipse es:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



Podemos volcar en una tabla resumen la información obtenida:

Nombre de la cónica	***Elipse***	*Observaciones*
Ecuación polinómica	$9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$	Podemos predecir que es una elipse porque los

		coeficientes de los términos cuadráticos son del mismo signo y distinto valor absoluto.
Ecuación canónica	$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$	Cada semi-diámetro puede leerse en el denominador de cada variable y se traza en el eje respectivo.
Semi-diámetro mayor	a = 5	Medido sobre "X"
Semi-diámetro menor	b = 3	Medido sobre "y"
Distancia focal	c= 4	Se obtiene de: $c^2=a^2-b^2$
Excentricidad	$e=\frac{4}{5}$	Se obtiene de: $e=\frac{c}{a}$
Coordenadas del centro	$o=(3;-1)$	Se debe verificar que es el punto medio entre los focos: $C=(x_0;y_0)$; $C=\frac{F_1+F_2}{2}$
Coordenadas de los vértices	$V_1=(-2;-1)$ $V_2=(8;-1)$	$V=(x_0\pm a\,;y_0)$
Coordenadas de los focos	$F_1=(-1;-1)$ $F_2=(7;-1)$	$F=(x_0\pm c\,;y_0)$