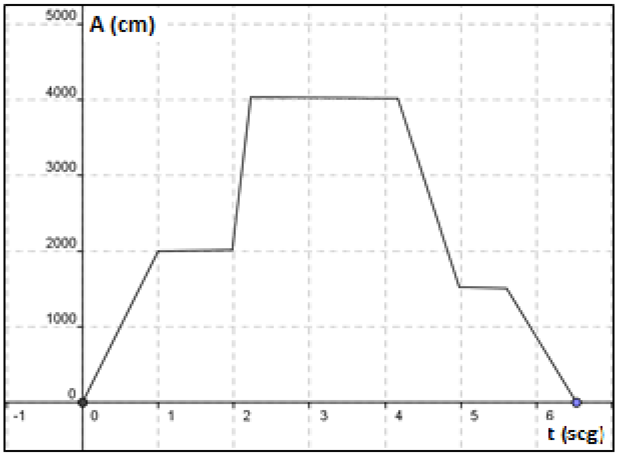
Nota: Los ejercicios con (*) están resueltos al final de este trabajo práctico.

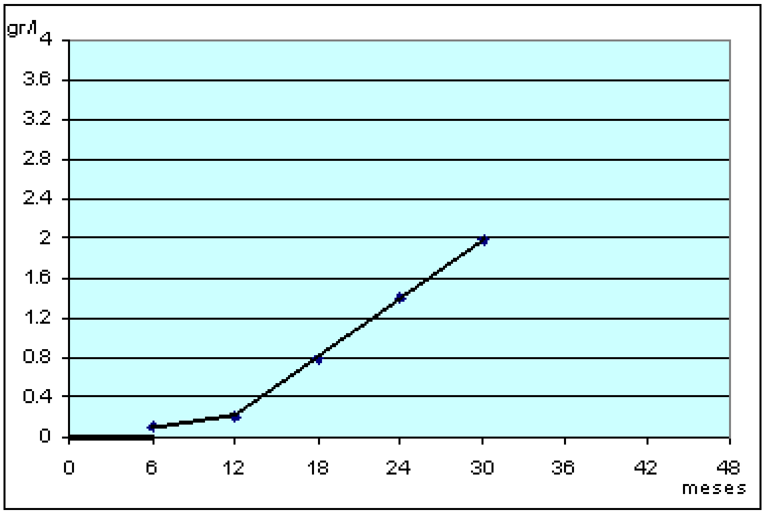
1. El siguiente gráfico representa la amplitud (en cm) de una señal de radio en función del tiempo (en segundos).



A partir del gráfico, responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la amplitud máxima alcanzada?
b. ¿En qué instantes la señal tuvo 3000 cm de amplitud?
c. ¿Qué amplitud se produce a los dos segundos?
d. ¿En qué intervalos de tiempo la amplitud de la señal se mantuvo constante?

2. El siguiente gráfico representa el nivel de contaminación de un lago, medido en gramos de contaminante por litro de agua, en función del tiempo, medido en meses, desde el momento de la instalación de una planta industrial cuyos desechos no están siendo debidamente procesados. Parte de ellos son volcados a un arroyo que desagua en el lago en cuestión.



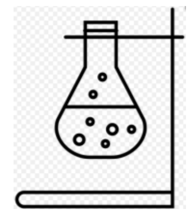
Se pide:

a) Elaborar un escenario posible que permita interpretar el cambio que se produce en el gráfico a partir del primer año.
b) En el caso de mantenerse estable en el tiempo el escenario ideado en el ítem a), estimar, a partir de los datos del gráfico, el nivel de contaminación que tendrá el lago en tres años.
c) Proponer otro escenario diferente para los años siguientes y representar gráficamente la situación.

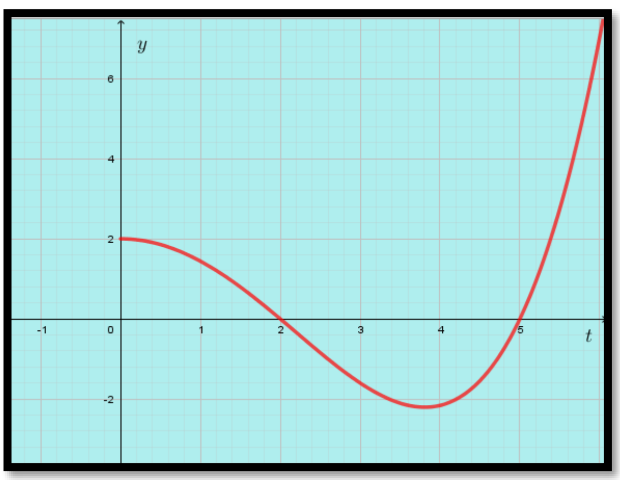
3. Realizar el gráfico de una función y = f(x) que represente cada una de las siguientes situaciones

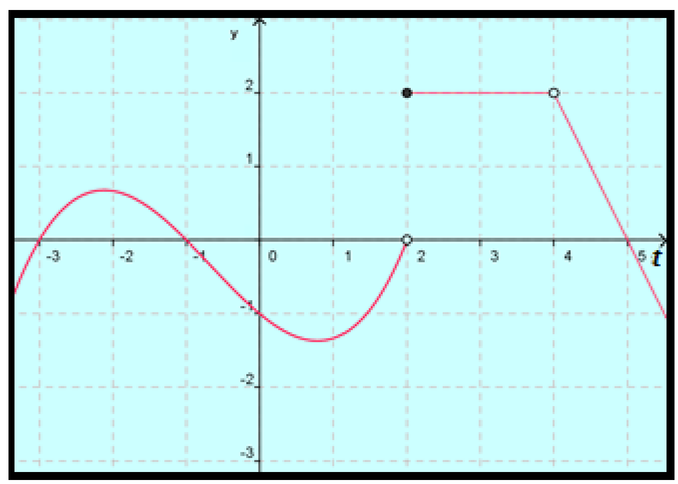
a. La cantidad de personas que asisten a la sucursal de un banco depende del tiempo transcurrido. El banco abre a las 10 horas y se estima que a las 10:30 hs hay 40 personas. A las 11:30 de la mañana hay aproximadamente 20 clientes. Entre las 12 y las 14 horas se estima que asisten un máximo de 50 personas. A partir de las 14 la cantidad de clientes comienza a descender, llegando a 15 clientes a las 14:30 y a 5 clientes a las 15 horas, momento en que se cierran las puertas de la sucursal.

b. Retiré del fuego un matraz con un compuesto químico a 100 grados centígrados. La temperatura comenzó a descender con rapidez: a los tres minutos estaba en 60 grados. Luego, fue enfriándose con lentitud: a los quince minutos de haberla retirado el fuego estaba en 35 grados y 20 minutos después tenía aproximadamente 20 grados, temperatura en la que se mantuvo por ser la que había en el ambiente.



4. Los siguientes gráficos de funciones representan el comportamiento de una corriente eléctrica (en watts) a medida que transcurre el tiempo (en segundos).
En uno de los casos en algún momento se produce un salto de voltaje al conectar un torno eléctrico y luego un corte de luz que produce la quema del aparato; ¿en cuál?
En ambos casos indicar para la función graficada: el dominio, el conjunto imagen, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad.





5. Dadas las siguientes funciones que expresan variación de temperatura dependiendo del tiempo, se pide:

a. Determinar el conjunto A = Dominio de f. (Tomar en cuenta la naturaleza de la variable t)

b. Determinar analíticamente en qué momentos la temperatura es nula.

i. $f(t) = 3(t-1)(t+2)$

ii. $f(t) = \sqrt[3]{t-7}$

iii. $f(t) = \frac{t+1}{t^2+9}$

iv. $f(t) = \frac{3(t-2)}{t^2-4}$

v. $f(t) = t^2 + \frac{1}{t}$ (*)

6. Un automóvil que se desplaza a velocidad constante recorre 25 km. en un cuarto de hora. Si en el instante t = 0 se encuentra a 2 km. de distancia:
a. Expresar la distancia que recorre el automóvil en función del tiempo transcurrido.
b. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 135 km?

7. Si la temperatura a nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a la altura de 1km es de 10°C.

a. Expresar la temperatura T (en °C) en términos de la altura h (en km), suponiendo que la expresión es lineal.
b. Representar gráficamente la función obtenida.
c. ¿Cuál es la temperatura a 2,5 km?

8. Las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ indican la posición del móvil 1 y el móvil 2 en el instante de tiempo t. El móvil 1 que se halla en la posición $x_1(0) = 0$ parte con movimiento rectilíneo uniforme y una rapidez $v_1 = 2$ hacia el móvil 2 que se encuentra, en el mismo instante, en reposo en la posición $x_2(0) = 3$. En el instante $t_1 = 1$ el móvil 2 se pone en movimiento rectilíneo uniforme en el mismo sentido que el móvil 1 pero con rapidez v_2, y es alcanzado en el instante $t_2 = 2$. Definir y graficar las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ y la función $f(t)$ que indica la distancia entre ambos en cada instante *t*.

9. Representar gráficamente las siguientes rectas, sin utilizar tabla de valores. Indicar en cada caso la intersección de la recta con cada eje coordenado.

a) $y = -\frac{1}{3}x + 5$ (*)
b) $y = \frac{1}{2}x - 4$
c) $y = 2$
d) $y = -x$
e) x = 4

De todas las rectas representadas, ¿hay alguna que no corresponda al gráfico de una función?

10. Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones indicadas en cada caso. Representarlas gráficamente.

a) Pendiente 3 y abscisa al origen 2.
b) Pasa por los puntos (1; 2) y (4; 1).
c) Es paralela a la recta $x + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} = 0$ y pasa por el punto (1; 0).
d) Es perpendicular a la recta $y = \frac{x}{2} + 1$ y pasa por el punto (2; 3). (*)
e) Es perpendicular a la recta $x = 2$ y pasa por el punto (-3; 1).

11. Un brazo mecánico tira una pelota verticalmente hacia arriba; en ausencia de rozamiento la ecuación horaria (altura alcanzada en función del tiempo) es $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, donde v_0 es el valor de la velocidad inicial y *g* la gravedad.

Determinar el tiempo que la pelota tarda en regresar al punto de partida y la altura máxima que alcanza. Graficar la función *y* (t) cuando $v_0 = 29,4 \frac{m}{seg}$, $g = 9,8 \frac{m}{seg^2}$ y el tiempo está medido en segundos.

12. Graficar las siguientes parábolas y determinar en cada caso su eje de simetría, su vértice y las intersecciones con los ejes.

a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

b) $y = -x^2 + 4x - 3$

c) y = 2 (x - 1)(x + 3)

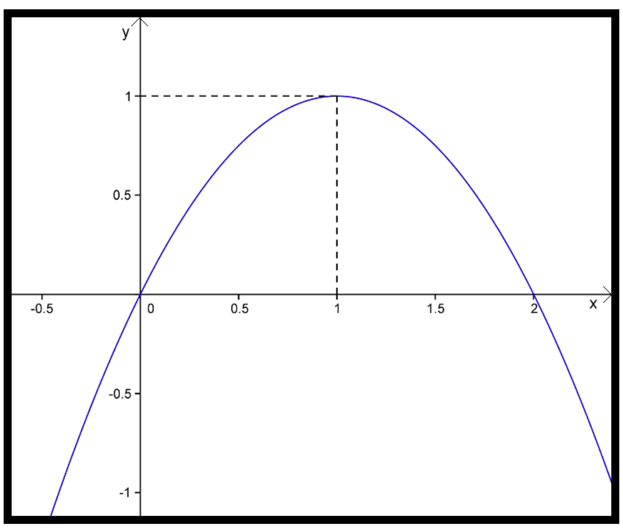
d) $y = x^2 - 2x + 1$

e) $y = (x+1)^2 + 3$

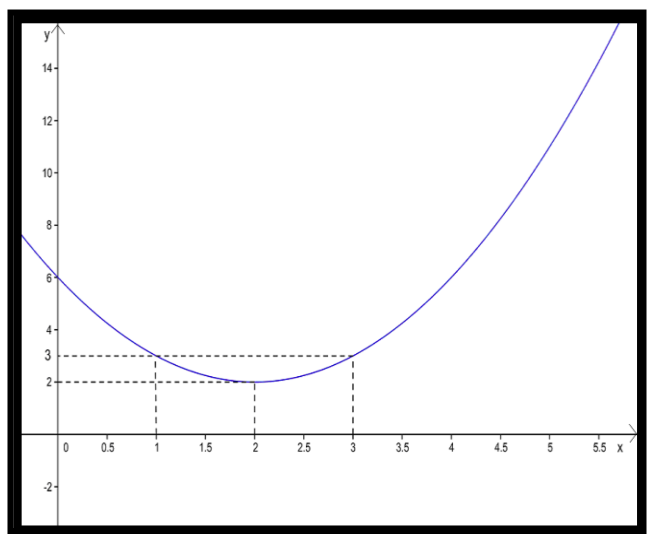
13. Para cada una de las parábolas representadas a continuación:

a) Determinar las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
b) Escribir la función cuadrática correspondiente exhibiendo las coordenadas del vértice de la parábola.
c) Determinar, a partir del gráfico, el conjunto de ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de la correspondiente función cuadrática.
d) Determinar el conjunto imagen de la correspondiente función cuadrática.

i.

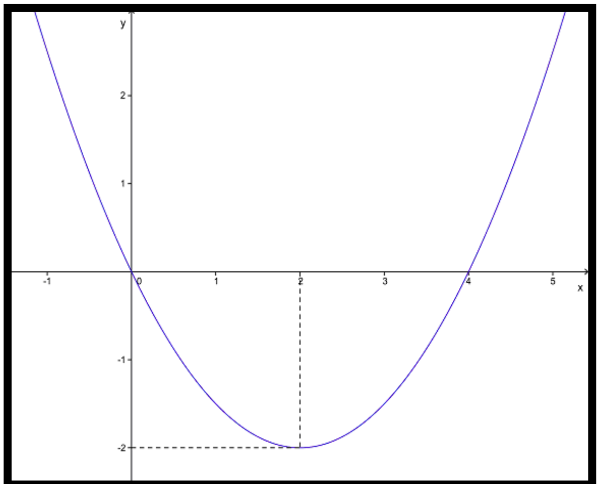


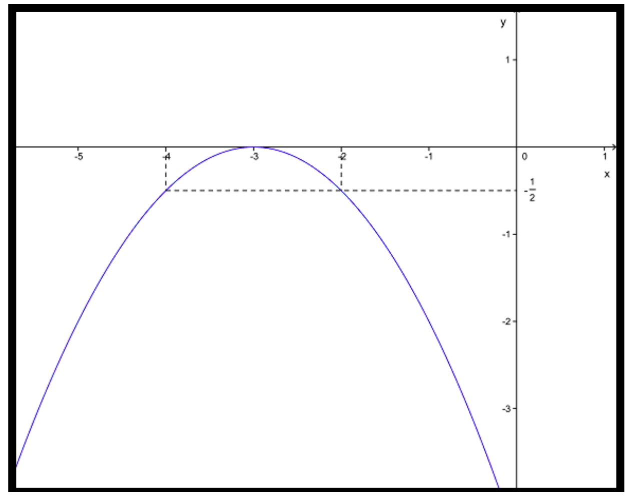
ii.



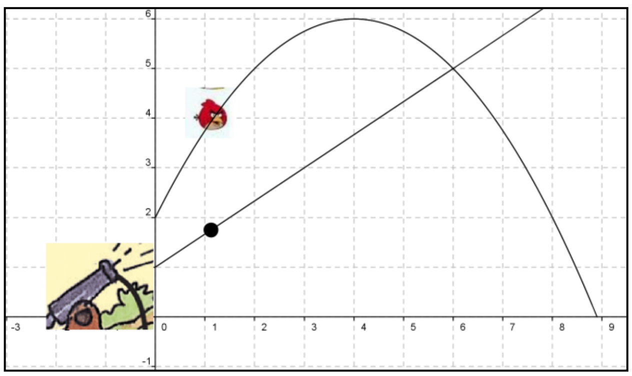
iii.

iv.





14. Un angry bird es lanzado desde los 2 metros de altura. Se sabe que a los 4 segundos se encuentra a los 6 m de altura. Por otro lado, como se muestra en la figura, un proyectil es lanzado para atrapar al angry bird. La altura del proyectil en cada instante de tiempo está dada por $s(t) = \frac{2}{3}t + 1$



a. Hallar la expresión de la función cuadrática f que representa la altura del angry bird de acuerdo al tiempo transcurrido.

b. ¿En qué instante de tiempo el proyectil alcanza al angry bird? ¿A qué altura se produce el encuentro? Justificar analíticamente.

15. i) Utilizar algún graficador, como por ejemplo:

- Aplicaciones gratuitas para iOS o Android:

Geogebra Calculadora Gráfica	Funciones-EDITEX Matemáticas	Funciones

- Página web: https://www.geogebra.org/graphing

para representar las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$ y $j(x) = \frac{1}{x}$

ii) Representar gráficamente las siguientes funciones y analizar vínculos con alguna de las representadas en i)

a) $f(x) = -x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ - 2

d) $f(x) = -\sqrt{-x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$
f) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$
g) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
h) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 3$

iii) Tomar en cuenta las conclusiones que se hayan podido obtener a partir del trabajo del ítem anterior para representar en forma aproximada las siguientes funciones (se sugiere hallar previamente dominio y conjunto de ceros):

a) $f(x) = (x+1)^3 - 8$
b) $f(x) = 2x^3 + 2$
c) $f(x) = -\sqrt{x+4} + 2$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
e) $f(x) = \frac{2}{x}$
f) $f(x) = -\frac{1}{x-3} - 1$

16. Determinar analíticamente los puntos de intersección entre los gráficos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = -x^2 - x$
$g(x) = -x^2 - 5$ (*)

b. $f(x) = \sqrt{x+1} - 4$
$g(x) = x - 5$

c. $f(x) = \frac{1}{x-5} - 1$
$g(x) = x - 6$

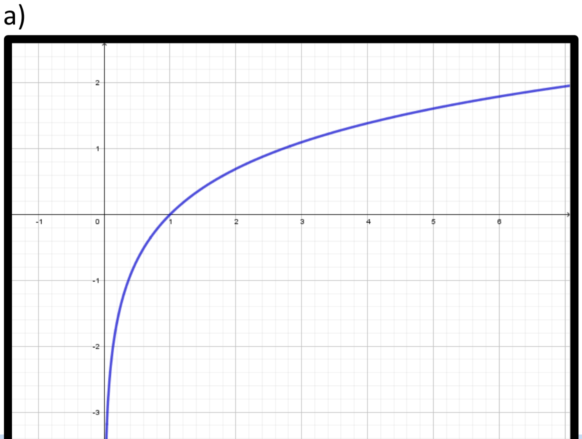
17. Un modelo para describir la cantidad de bacterias P en un cultivo en función del tiempo t, es $P(t) = P_0\, e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial (comprobar que es el valor que se obtiene para t=0) y *k* una constante.
Si en 3 horas se observa que hay 400 bacterias y luego en 10 horas del inicio hay presentes 2000 bacterias

a) ¿Cuál es la cantidad inicial de bacterias en este caso particular?
b) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que se triplique la población inicial? (*)

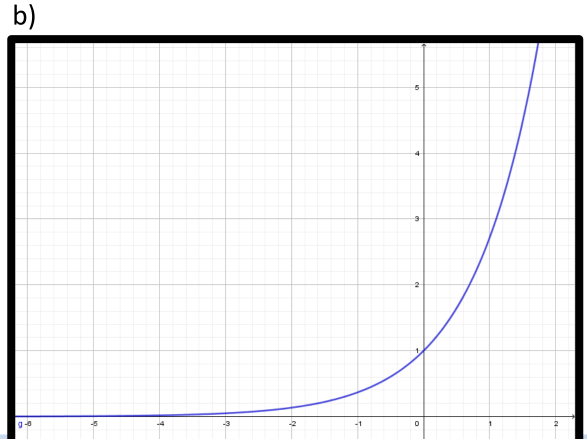
18. Relacionar la fórmula de cada función con el gráfico correspondiente

- $f(x) = \ln(x)$
- $g(x) = e^x$
- $h(x) = 10^x$
- $l(x) = \log(x)$
- $s(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $w(x) = e^{-x}$
- $r(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

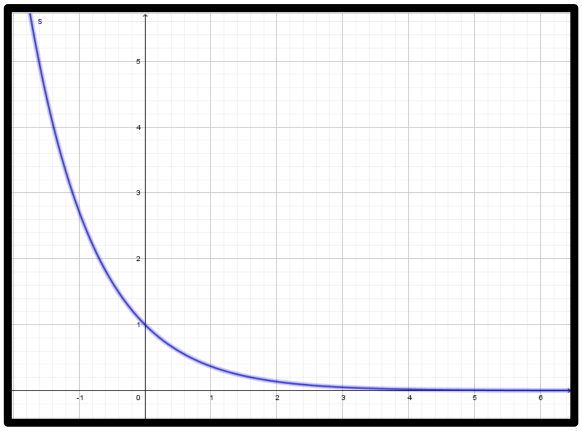
a)



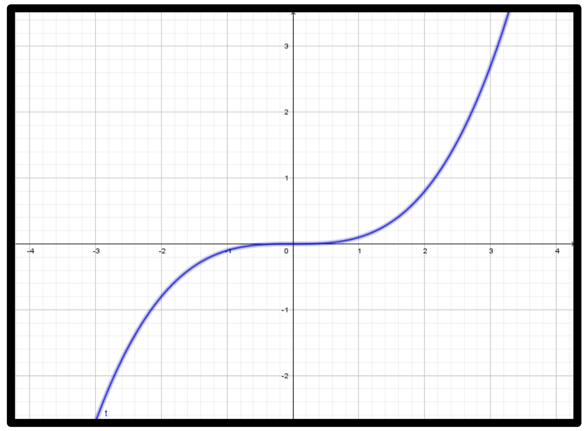
b)



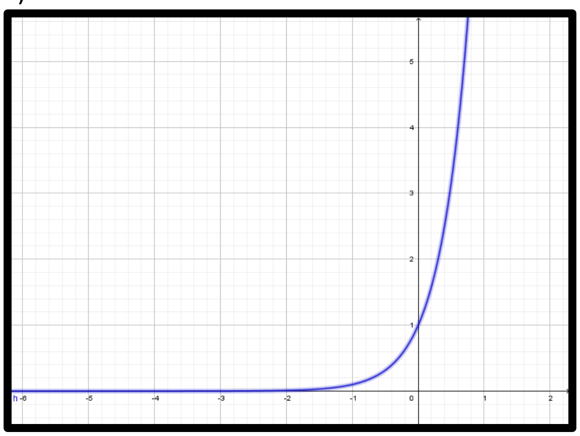
c)



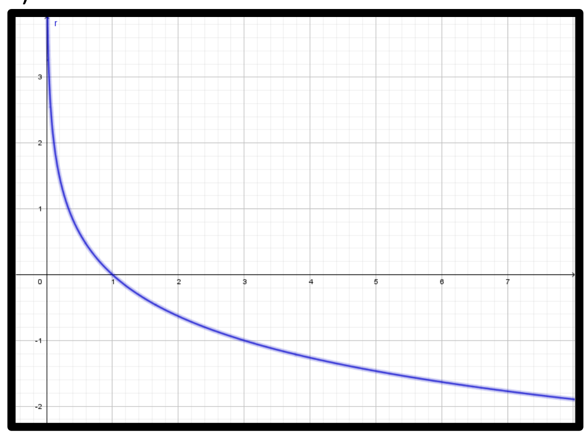
d)



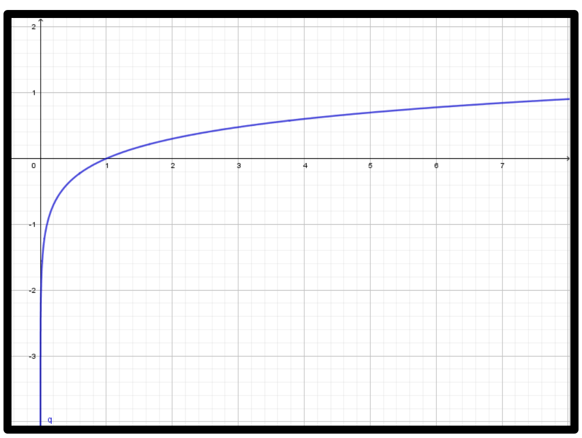
e)



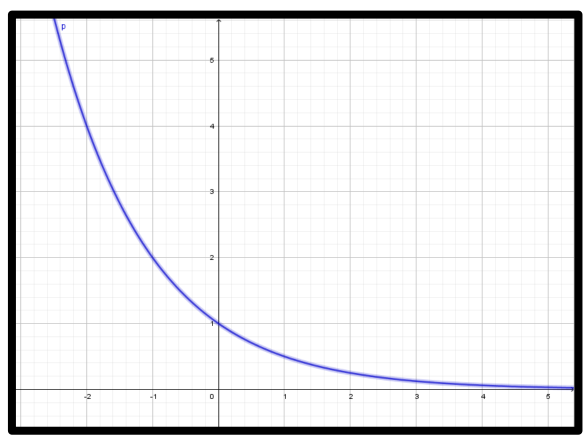
f)



g)



h)



19. Una empresa de energía eléctrica cobra a las pequeñas industrias un cargo fijo mensual de \$200 y un cargo variable según su consumo mensual. Este cargo variable es de \$1.5 por Kwh por los primeros 50 Kwh. consumidos; \$0.8 por Kwh. que excedan los 50 Kwh.

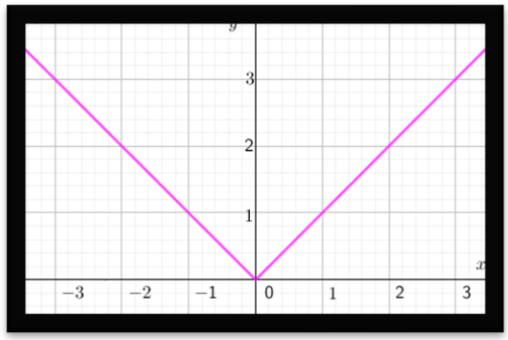
a. Expresar la función de costo de la energía eléctrica para las industrias en función del consumo.

b. ¿Cuál es el costo en energía eléctrica si se consumen 200 Kwh? ¿Y si se consumen 43 Kwh?

c. ¿Cuántos Kwh se consumieron si el costo fue de $363,8?

d. Representar gráficamente la función.

20. A continuación, se presenta el gráfico de la función f: R → R/ f(x) = |x|.



Graficar las siguientes funciones e indicar su dominio, sus ceros y su conjunto imagen. Resolver, en cada caso, la ecuación *f*(*x*) = 2.

a) $f(x) = |x+5|$ b) $f(x) = -|x|$ c) $f(x) = 2|x| + 1$ d) $f(x) = |x+2| - 4$

21. Graficar las siguientes funciones y completar, en cada caso, amplitud máxima ($a_{máx}$), frecuencia (f), ángulo de fase (φ) y período (P). Sugerencia: utilizar alguna aplicación para graficar

a) $f(x) = 2sen\left(\frac{3}{2}x\right)$ $a_{máx} =$ $f =$ $\varphi =$ $P =$

b) $f(x) = cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ $a_{máx} =$ $f =$ $\varphi =$ $P =$

c) $f(x) = 5sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ $a_{máx} =$ $f =$ $\varphi =$ $P =$

d) $f(x) = \frac{1}{2}sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $a_{máx} =$ $f =$ $\varphi =$ $P =$

Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 5, ítem vi) Dadas las siguientes funciones $f : A \subseteq R \to R : y = f(t)$

i) Determinar el conjunto A = Dominio de f .

El dominio de la función es el conjunto de valores que puede tomar la variable t, en este caso al haber una división, debemos restringir el valor $t = 0$ (dado que no podemos dividir entre cero). Además, como t representa el tiempo, no podrá ser negativo. Con lo cual el dominio de la función resulta ser:

$$Domf = A = (0, +\infty)$$

ii) Determinar analíticamente en qué momentos la temperatura es nula.

La temperatura será nula en los instantes de tiempo t para los cuales $f(t)=0$, entonces igualamos la función a cero y despejamos t.

$$f(t)=t^2+\frac{1}{t}$$

$$t^2+\frac{1}{t}=0$$
$$t^2=-\frac{1}{t}$$
$$t^3=-1$$
$$t=-1$$

Como este valor no pertenece al Domf, podemos concluir que la temperatura no será nula en ningún instante de tiempo.

iii) Determinar analíticamente los intervalos de tiempo en que se producen temperaturas bajo cero y sobre cero.

La temperatura será sobre cero en los instantes de tiempo $t>0$ que hacen $f(t)>0$
Entonces, queremos encontrar los valores de t tales que $t^2+\frac{1}{t}>0$

$$t^2+\frac{1}{t}>0$$

$$\frac{t^3+1}{t}>0$$ Como $t>0$, el cociente será positivo cuando el numerador sea positivo:

$$t^3+1>0$$
$$t^3>-1$$
$$t>-1$$

Luego, la temperatura será sobre cero en el intervalo $(0,+\infty)$, que corresponde al dominio completo de la función, por lo tanto, en ningún momento la temperatura será bajo cero.

<u>Ejercicio 9, ítem a)</u> Representar gráficamente las siguientes rectas, sin utilizar tabla de valores

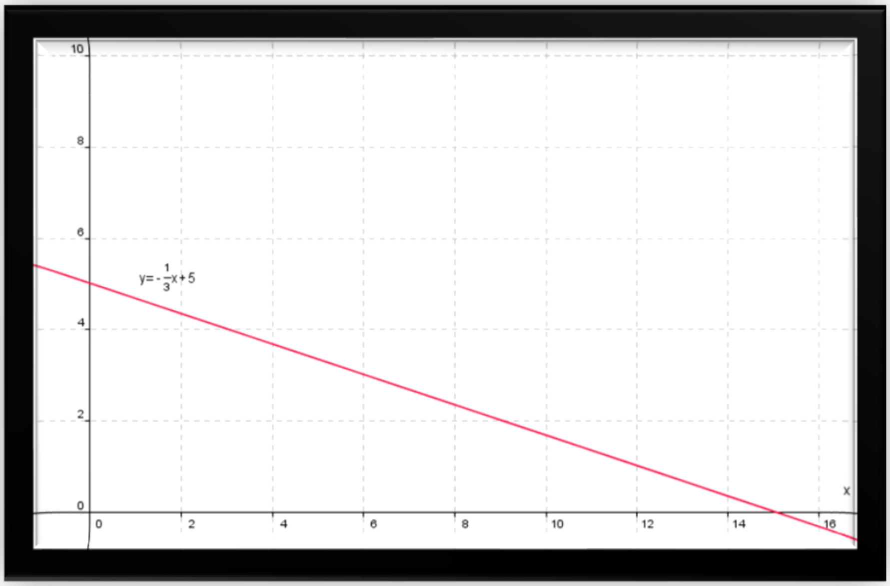
$$y=-\frac{1}{3}x+5$$

Ordenada al origen = 5

Pendiente = $-\frac{1}{3}$

Ubicamos la ordenada al origen y a partir de ese punto utilizamos la pendiente para encontrar otro punto de la recta. Recordemos que la pendiente de una recta se define como:

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Es decir, para nuestro caso, cada vez que los valores de *y* se desplazan 1 unidad hacia abajo, los valores de *x* se desplazan 3 unidades a la derecha, con lo que encontramos otro punto perteneciente a la recta (3;4). Ahora, por esos dos puntos queda definida una única recta.



Indicar la intersección con los ejes coordenados.

La intersección con el eje *y* es la ordenada al origen, es decir el punto (0;5)
La intersección con el eje *x* la encontramos haciendo $y=0$ y despejando el respectivo valor de *x*

$$y=-\frac{1}{3}x+5$$

$$0=-\frac{1}{3}x+5$$

$$\frac{1}{3}x=5 \quad \Rightarrow \quad x=15$$

La intersección con el eje *x* es el punto (15; 0)

Ejercicio 11, ítem d) Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones indicadas en cada caso. Representarlas gráficamente.

d) Es perpendicular a la recta $y=\frac{x}{2}+1$ y pasa por el punto (2;3)

La forma general de una recta es $y=mx+b$, nuestra recta es perpendicular a la recta dada, cuya pendiente es $\frac{1}{2}$.
Ahora, para que dos rectas sean perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser -1. Es decir, la pendiente m de nuestra recta debe satisfacer

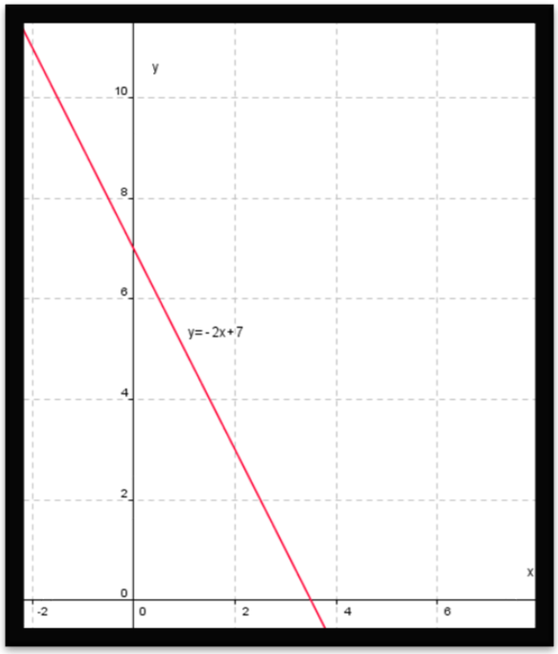
$$m*\frac{1}{2}=-1 \quad \Rightarrow \quad m=-2$$

Ya que conocemos el valor de la pendiente, utilizamos el punto por el que pasa la recta para encontrar el valor de *b*

$$y=-2x+b$$
$$3=-2(2)+b$$
$$3=-4+b$$

$7 = b$

Entonces la recta que buscamos tiene ecuación $y = -2x + 7$



<u>Ejercicio 22, ítem d)</u> Dadas las siguientes funciones $f : D_f \to I_f$ Analizar cuáles son biyectivas. Para aquellas que lo sean, hallar la fórmula de $f^{-1}(x)$ y luego graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos.

d) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

Dado que la raíz cúbica no tiene ninguna restricción para cualquier número real, el dominio de la función son todos los reales, y del gráfico base de una función raíz cúbica notamos que la imagen son todos los reales también.

$D_f = R \qquad I_f = R$

Para que f sea biyectiva, debe ser inyectiva y sobreyectiva.

- Para que f sea sobreyectiva, el conjunto de llegada debe ser igual a la imagen de la función, y lo cumple debido a la definición de f.
  $f : D_f \to I_f$
  El conjunto de llegada es la imagen de la función.

- f es una función "raíz cúbica" que es creciente en todo su dominio, lo que nos garantiza que diferentes puntos del dominio tendrán diferentes imágenes, es decir, es inyectiva.

Dado que f es inyectiva y sobreyectiva, f es biyectiva y admite función inversa. Para encontrarla seguimos el siguiente procedimiento.

$f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

$y = 2\sqrt[3]{x}$

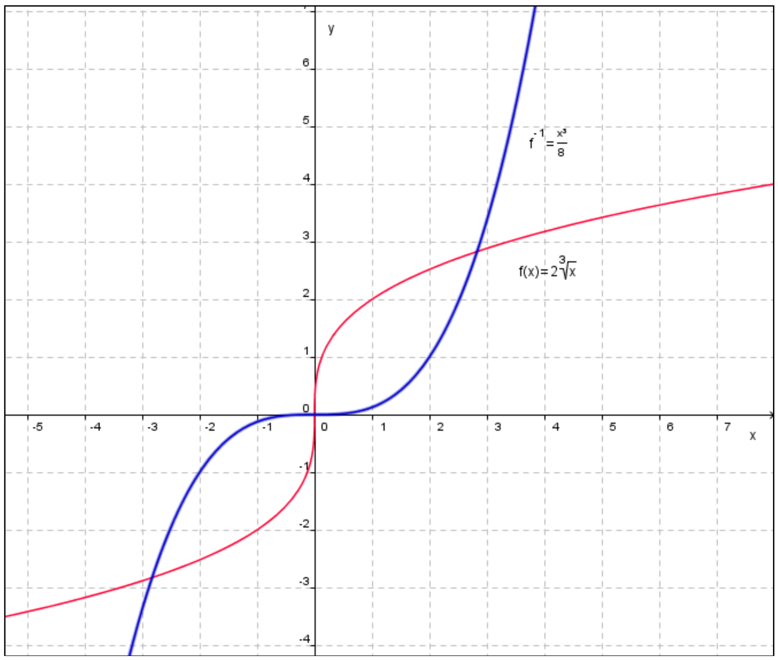
$x = 2\sqrt[3]{y}$

$\frac{x}{2} = \sqrt[3]{y}$

$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = y$

Para escribir la función inversa, definimos $D_{f^{-1}} = I_f$ e $I_{f^{-1}} = D_f$, por lo tanto

$f^{-1} : R \to R \;/\; f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$



Ejercicio 20, ítem a) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre los gráficos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = -x^2 - x$ (1)
$g(x) = -x^2 - 5$ (2)

Reemplazamos (2) en (1) y obtenemos

$(-x^2 - 5) + x^2 = -x$

$-x^2 - 5 + x^2 = -x$

$-5 = -x$

$x = 5$

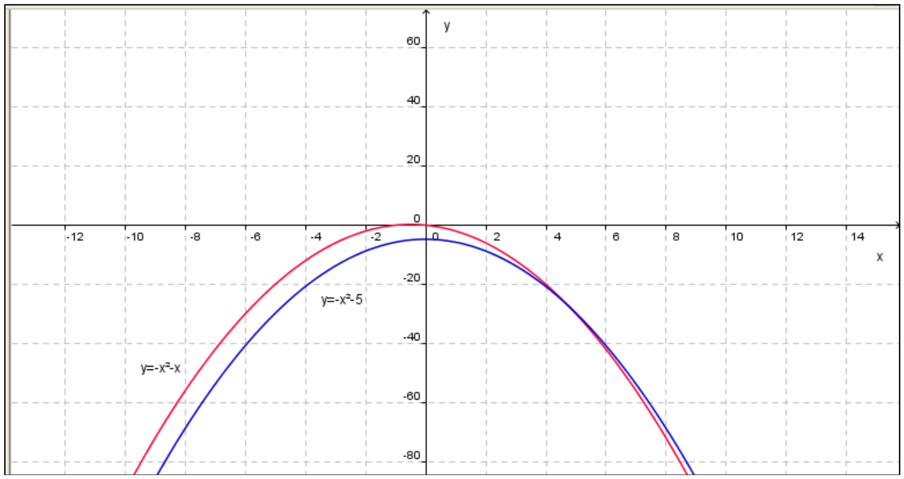
Ahora reemplazamos el valor obtenido en (2) y resulta el punto de intersección (5; -30), para terminar debemos verificar en (1)

$y = -x^2 - x$

$-30 = -(-5)^2 - 5$

$-30 = -25 - 5$
$-30 = -30$ Verifica

Por lo tanto la solución del sistema es $S = \{(5;-30)\}$



Ejercicio 23 Un modelo para describir la cantidad de bacterias P en un cultivo en función del tiempo t, es $P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es la población inicial (Comprobar que es el valor que se obtiene para t = 0) y *k* una constante.

Si en 3 horas se observa que hay 400 bacterias y luego en 10 horas del inicio hay presentes 2000 bacterias.

2) ¿Cuál es la cantidad inicial de bacterias en este caso particular?

Del enunciado sabemos que
$P(3) = P_0 e^{k*3} = 400$ (1)
$P(10) = P_0 e^{k*10} = 2000$ (2)

Lo que queremos encontrar es el valor de P_0 que verifica ambas ecuaciones.
Despejando P_0 de (1) obtenemos:

$$P_0 = \frac{400}{e^{3k}} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$\left(\frac{400}{e^{3k}}\right) * e^{k*10} = 2000$$
$$e^{7k} = \frac{2000}{400}$$
$$e^{7k} = 5$$
$$7k = \ln 5$$

$k = \frac{\ln 5}{7}$

Ahora reemplazando el valor obtenido de *k* en (3)

$P_0 = \frac{400}{e^{3\left(\frac{\ln 5}{7}\right)}} = \frac{400}{5^{\frac{3}{7}}} \cong 200$ Bacterias

b) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que se triplique la población inicial?

Lo que queremos encontrar es el valor de *t* para que se cumpla

$P_0 e^{kt} = 3P_0$

Reemplazando los valores de P_0 y *k* obtenidos en el ítem anterior obtenemos

$$\left(\frac{400}{5^{3/7}}\right) e^{\frac{\ln 5}{7} * t} = 3\left(\frac{400}{5^{3/7}}\right)$$

$$e^{\frac{\ln 5}{7} * t} = 3$$

$$\frac{\ln 5}{7} * t = \ln 3$$

$$t = \frac{\ln 3}{\left(\frac{\ln 5}{7}\right)} = \frac{7 \ln 3}{\ln 5} \cong 5 \text{ Horas}$$

<u>Ejercicio 27, ítem c)</u> Determinar el dominio y hallar analíticamente las intersecciones con los ejes coordenados de las siguientes funciones. Representar gráficamente.

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- El ln *x* está definido para valores de x mayores que cero, en particular para este caso va a estar definido para los reales mayores a 1.
- La segunda rama, $x - 1 \quad \text{si } x > 1$, no tiene restricciones, con lo cual en este caso la rama queda definida para todos los reales menores que uno.
- En ninguna de las ramas se define la función para $x = 1$ así que este valor queda excluido del dominio.

$D_f = R - \{1\}$

<u>Intersección eje *y*</u>

El valor correspondiente a la intersección con el eje *y* es cuando *x* toma el valor 0.

Para encontrar $f(0)$ utilizamos la segunda rama ya que está definida para los valores menores a 1.

$f(0) = 0 - 1 = -1$

Con lo cual la intersección con el eje *y* es el punto (0; -1)

<u>Intersección eje *x*</u>
El valor correspondiente a la intersección con el eje *x*, es cuando *y* toma el valor 0.
Igualamos ambas ramas a cero y despejamos *x,* luego nos fijamos que ese valor de *x* pertenezca a la rama.

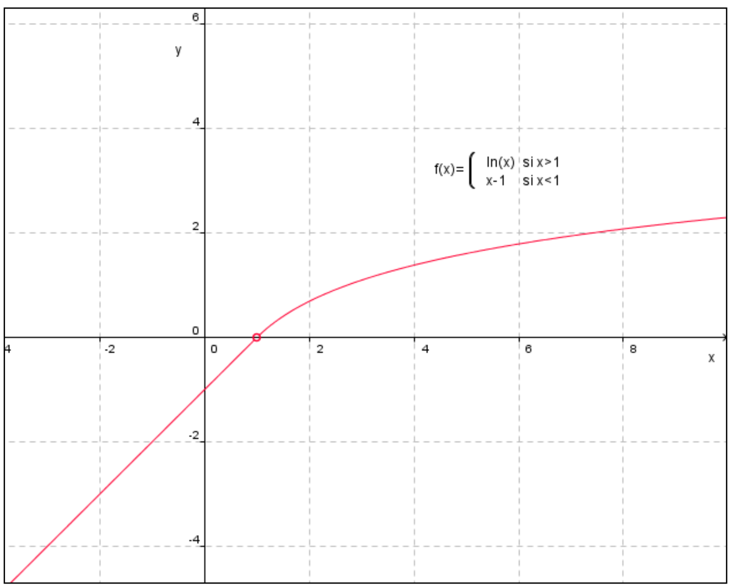
Con la primera rama obtenemos:

$$\ln x = 0$$
$$e^0 = x$$
$$1 = x \quad \notin D_f$$

Con la segunda

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1 \quad \notin D_f$$

Ninguno de los valores obtenidos pertenecen al D_f por lo tanto la función no interseca al eje *x.*



<u>Ejercicio 33, ítem a)</u> Se definen las funciones

<u>Coseno hiperbólico:</u> $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

<u>Seno hiperbólico:</u> $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

a) Probar que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

Aplicando las definiciones, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\
&=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{4}-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{4}\\
&=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{4}\\
&=\frac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2-\left((e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2\right)}{4}\\
&=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{4}\\
&=\frac{2(e^xe^{-x})+2(e^xe^{-x})}{4}\\
&=\frac{2+2}{4}\\
&=1
\end{aligned}
$$

Que es lo que queríamos demostrar.