UADE

Sistema de Admisión:

Matemática FAIN

Índice

Unidad 1: Porcentaje 4

Unidad 2: Factoreo 17

Unidad 3: Ecuaciones, inecuaciones y resolución de problemas 38

Unidad 4: Rectas 71

Unidad 5: Trigonometría 102

Autoridades

Dr. Héctor Masoero
Presidente - Rector Honorario

Dr. Jorge N. Videla (h)
Vicepresidente del Consejo de Administración

Dr. Ricardo Orosco
Rector

Dra. Silvina Laura Thernes
Secretaria Académica (a/c)

Lic. María Cristina Slica
Secretaria de Asuntos Estudiantiles y Extensión

Mg. Federico Javier Iñiguez
Decano de la Facultad de Ciencias Económicas

Dr. Federico Prada
Decano de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas

Mg. Claudia Cortez
Decana de la Facultad de Comunicación

Arq. Roberto Converti
Decano Honorario de la Facultad de Arquitectura y Diseño

Dra. Turquesa Topper
Decana de la Facultad de Arquitectura y Diseño (a/c)

Dr. Nicolás Durrieu
Decano de la Facultad de Ciecias Jurídicas y Sociales (a/c)

Dr. Federico Saavedra
Decano de la Facultad de Ciencias de la Salud (a/c)

Unidad 1

Números Reales

Competencias de la unidad

En esta unidad trabajarás con el objetivo de consolidar las siguientes competencias desarrolladas en la escuela media, necesarias para encarar el nivel universitario de tu carrera. Lo esperado es que luego de este proceso de aprendizaje puedas:

1- Reconocer los números reales racionales e irracionales y comprender qué dimensión numérica de la realidad significan.
2- Entender que los números reales pueden representarse sobre una recta ordenadamente.
3- Reconocer expresiones no definidas.
4- Realizar las operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división de números enteros y de números fraccionarios), así como también ser capaz de hacer esto de manera explícita y sin hacerlo “de memoria”.

Los números

Entendemos las matemáticas como herramientas para operar de manera abstracta datos reales (2 personas, 100 pesos, ½ kilo de azúcar) para generar modelos que nos sirvan como explicación de la realidad y como predicción del futuro. Más allá de cómo obtenemos esos datos (contenido que aprenderán en sus respectivas carreras), comenzaremos por analizar:

- Qué son los números y qué nos permiten ver.
- Cómo se clasifican según lo que nos permiten ver.
- Qué operaciones básicas podemos hacer con ellos.

Números reales (R)

Los números reales, representados por la letra **R**, son aquellos comprendidos entre los extremos menos infinito y más infinito, y pueden ser representados ordenadamente sobre una recta (recta real).

Los números son conceptos abstractos creados por el ser humano para cuantificar la realidad sobre los cuales se pueden hacer operaciones para modelar la realidad y predecir comportamientos.

Los números reales incluyen:

- Números naturales (N): representados por la letra **N**. Son números enteros positivos, como 1, 2, 3, 4... Fueron creados ante la necesidad de contar objetos reales (2 manzanas, 10 árboles).

- Números enteros (Z): representados por la letra **Z**. Incluyen los números naturales junto con los negativos y el cero. Tal como los números naturales, no tienen parte decimal dentro de su estructura. El cero es una representación abstracta del vacío o la nada y los números negativos se crearon, por ejemplo, para describir deudas o temperaturas inferiores a cero grados (temperatura de congelamiento del agua), por ejemplo, -2 °C.

- Números racionales: se construyen al formar cocientes (divisiones) con los números enteros. También se los conocen como fracciones. Fueron creados para representar fracciones de enteros, como, por ejemplo, medio litro de agua. Por lo tanto, cualquier número racional r se puede expresar como $r = \frac{m}{n}$ donde m y n son números enteros y n es distinto de cero.

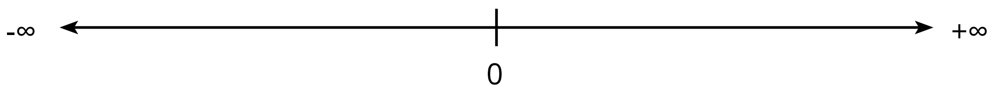
Es muy importante entender que la división entre cero es imposible y las expresiones como 3/0 o 0/0 no están definidas. Esto será de utilidad en unidades posteriores.

- <u>Números irracionales:</u> son números reales que no pueden ser representados como una fracción (como por ejemplo √2 o π) y tienen infinitos decimales. Son utilizados en operaciones matemáticas más complejas como, por ejemplo, el número irracional π es usado para calcular la circunferencia de un círculo (π*diámetro del círculo).

Todos los números reales pueden tener una representación racional o como fracción, 1/3 (donde el denominador, que es el número de abajo, indica las partes en que se divide la unidad, y el numerador, que es el número de arriba, indica la cantidad de partes que se toman), o decimal (por ejemplo, 1/3 = 0,333...; 1/1=1,0). En el presente curso optaremos por representarlos de manera racional o como fracción. Llegado el caso o la necesidad, la expresión decimal se hará redondear la expresión al segundo decimal, como convención útil solo para este curso. Como regla de redondeo, si el número siguiente al que se va a redondear es 5 o superior, se redondea para arriba, si no, para abajo (por ejemplo: 6,54483 se redondeará a 6,54; 1,15879 se redondeará a 1,16; y 7,955 se redondeará a 7,96). Existe una teoría del error que se desarrollará entrada la carrera universitaria donde el número de decimales utilizado para este redondeo será justificado a partir de mediciones de parámetros reales.

<u>Representación sobre una recta</u>

Los números reales pueden ser representados sobre una recta que se extiende desde "0" (cero) hasta menos infinito (hacia la izquierda) hasta más infinito (hacia la derecha).



Es importante notar a esta altura que entre cualquier par de números reales puede existir un número intermedio, con lo cual, la cantidad de números reales entre, por ejemplo, los números enteros 1 y 3 son infinitos.

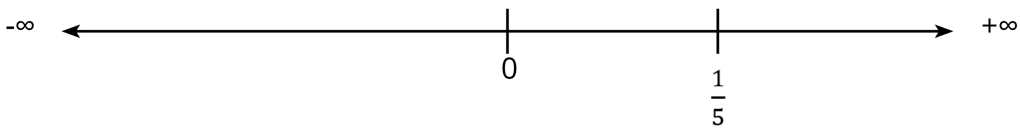
En los siguientes ejemplos verificaremos la veracidad de las expresiones representando los números sobre una recta que se extiende desde menos infinito hasta más infinito (números indeterminados).

Los símbolos > y < que aparecen en el ejemplo representan desigualdades entre dos números siendo el mayor el que está del lado abierto del ángulo (tema que retomaremos en la siguiente unidad).

Para los fines prácticos del ejemplo es suficiente entender que la expresión a>b significa que el número a es mayor al número b y que la expresión c<d significa que el número c es menor al número d. El objetivo será ver si la expresión de cada enunciado es VERDADERA o FALSA al representar cada par sobre la recta de los reales y al verificar la veracidad de cada enunciado.

Es importante graficar la recta de los reales al indicar siempre el menos infinito y más infinito y representar cada número explicitando que hacia la derecha los números son más grandes que hacia la izquierda. En el caso de las fracciones, se utiliza la transformación de los términos en búsqueda del denominador común antes de graficarlos sobre la recta, ya que esto será importante más adelante en el curso.

Ejemplo 1: $\frac{1}{5} < 0$



- Si graficamos la recta de los reales y ubicamos los números que debemos comparar, observamos que $\frac{1}{5}$ se encuentra a la derecha del cero, siendo $\frac{1}{5}$ un número mayor a “0” (cero).

- La consigna dice “ $\frac{1}{5}$ < 0 ”, lo cual se lee “ $\frac{1}{5}$ es menor a “0”. Por lo que vimos recién esta afirmación resulta **FALSA.**

Ejemplo 2: $-\frac{3}{4} > -\frac{5}{6}$

- Unificación de los denominadores de ambas fracciones para poderlas comparar

Para poder comparar ambas fracciones fácilmente, nos conviene transformarlas de manera que ambas tengan el mismo denominador. Para esto, usaremos la siguiente propiedad que será de gran utilidad en el resto del curso:

$$a * \frac{b}{b} = a \qquad b \neq 0 \qquad (1)$$

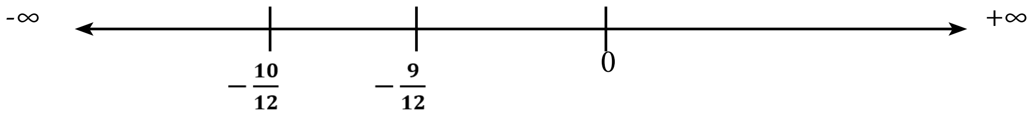
Esta propiedad nos indica que cualquier número **a**, si es multiplicado y dividido por el mismo número **b**, mantiene su identidad como **a**. Entonces, aplicaremos esta propiedad a las fracciones que debemos comparar en el ejercicio multiplicando a cada una por un valor que unifique sus denominadores (lo que vieron en la enseñanza primaria o media como el mínimo común denominador):

$$-\frac{3}{4} * \frac{3}{3} = -\frac{9}{12} \qquad\qquad -\frac{5}{6} * \frac{2}{2} = -\frac{10}{12}$$

De esta manera podemos obtener versiones de las fracciones que tienen el mismo denominador y podemos comparar de forma directa. La consigna puede ser reescrita de la siguiente manera: $-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} > -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{12}}$

- <u>Representación sobre la recta de los reales</u>

Luego de esta unificación, para compararlas las representamos en la recta de los reales:



- <u>Análisis de la veracidad de la expresión:</u> ya representadas, observamos que $-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{12}}$ se encuentra a la izquierda (hacia los numeros reales negativos) de $-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}$ resulta ser un número mayor que $-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}$. La consigna afirma que $-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}$ es mayor (>) que $-\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{12}}$, así podemos concluir que la afirmación original resulta **VERDADERA.**

<u>Ejemplo 3:</u> $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} > \mathbf{2}$

- <u>Unificación de los denominadores de ambas fracciones para poderlas comparar</u>

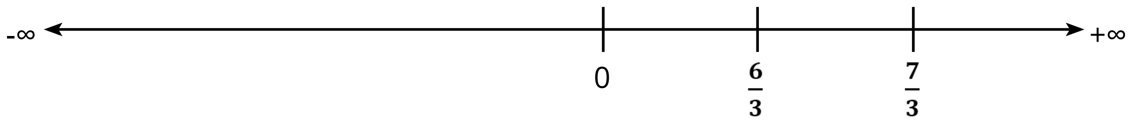
De manera similar al caso anterior, como primer paso debemos obtener números racionales (fracciones) comparables, es decir, que tengan el mismo denominador. Para esto usaremos nuevamente la propiedad (1).

$\frac{7}{3}$ (el denominador es 3) $\qquad$ $\frac{2}{1} * \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$

Ahora, teniendo el mismo denominador, podemos comparar los números de forma directa. La consigna puede ser reescrita de la siguiente manera: $\frac{7}{3} > \frac{6}{3}$

- <u>Representación sobre la recta de los reales</u>

Si graficamos ambos puntos sobre la recta de los reales, quedarían ubicados de la siguiente manera:



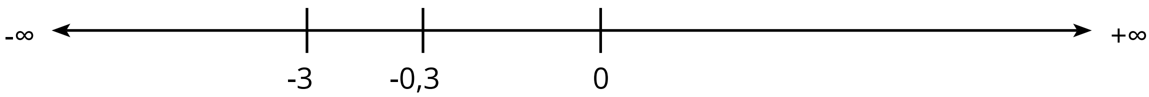
- <u>Análisis de la veracidad de la expresión</u>

Observando la gráfica, vemos que $\frac{7}{3}$ se encuentra a la derecha de $\frac{6}{3}$, siendo un número mayor, al encontrarse ubicado más cercano al extremo +∞. La consigna "$\frac{7}{3} > \frac{6}{3}$" puede leerse como "$\frac{7}{3}$ es mayor a $\frac{6}{3}$", por lo tanto, podemos concluir que la afirmación original resulta **VERDADERA.**

<u>Ejemplo 4:</u> $-3 < -0{,}3$

- <u>Representación sobre la recta de los reales</u>

En este caso, podemos graficar directamente los números sobre la recta de los reales:

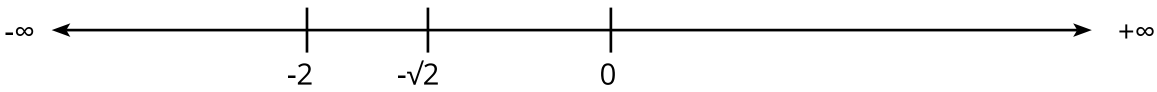


- <u>Análisis de la veracidad de la expresión:</u> viendo los números ubicados sobre la recta, observamos que -0,3 se encuentra ubicado a la derecha de -3. Al estar más cercano al extremo +∞, -0,3 resulta ser un número mayor a -3. La consigna dice -3<-0,3 , lo cual puede leerse como -3 es menor a-0,3, por lo tanto, podemos concluir que la afirmación original resulta **VERDADERA.**

Ejemplo 5: - √2 > -2

- <u>Representación sobre la recta de los reales</u>

En este último caso, también podemos ubicar ambos números directamente sobre la recta de los reales. Utilizando la calculadora, podemos saber que -√2 = -1,4142135… tiene decimales infinitos por lo que es un número irracional. Utilizando este conocimiento podemos ubicarlo correctamente sobre la recta de los reales. La gráfica quedaría de la siguiente manera:



- <u>Análisis de la veracidad de la expresión</u>

Observando la ubicación de los números sobre la recta, vemos que -√2 se ubica a la derecha (más cercano al extremo +∞) que -2, por lo tanto, -√2 resulta ser un número más grande que -2. La consigna original dice -√2>-2, lo cual puede leerse como -√2 es un número mayor que-2, por lo tanto, consideramos que la afirmación es **VERDADERA.**

Operaciones matemáticas básicas y sus propiedades

<u>Suma</u>

Es una operación matemática que consiste en añadir dos números para obtener una cantidad total: 4+2=6. La suma entre un número positivo y un número negativo es conocida como resta (4+(-2) = 4-2 = 2). En este curso no haremos distinción entre suma y resta.

<u>Suma de fracciones:</u>

En el caso de sumar fracciones (que ya vimos es un número racional representado por el cociente a/b, donde **a** se llama numerador y **b** se llama denominador), todas deben tener el mismo denominador. Cabe recordar la propiedad que apareció en el ejemplo 2 del punto anterior: $a * \frac{b}{b} = a$ (1)

Cuando tenemos un número, podemos multiplicarlo y dividirlo por el mismo número sin cambiar su identidad. Para sumar fracciones con distintos denominadores, haremos uso de esta propiedad para “transformar” cada término forzándolo a tener el denominador común que nos convenga sin cambiar la identidad de cada término.

Ejemplo de suma de 2 fracciones:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{3}=\frac{3}{4}*\frac{3}{3}+\frac{5}{3}*\frac{4}{4}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}=\frac{9+20}{12}=\frac{29}{12}$$

Es importante observar que, en la suma inicial, ambas fracciones tenían diferente denominador. Utilizando la propiedad (1), las transformamos de manera que ambas tengan el mismo denominador (llamado denominador común) multiplicando cada una por el denominador de la otra, y así pudimos sumarlas directamente.

Ejemplo de suma de 3 fracciones:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{2}+\frac{9}{3}=\frac{1}{5}*\frac{6}{6}+\frac{3}{2}*\frac{15}{15}+\frac{9}{3}*\frac{10}{10}=\frac{6}{30}+\frac{45}{30}+\frac{90}{30}=\frac{(6+45+90)}{30}=\frac{141}{30}$$

En este caso, el denominador común (mínimo común múltiplo entre los tres denominadores) resulta ser 30, por lo cual, cada término fue multiplicado por factores que trasformaron cada uno en una fracción cuyo denominador es 30. De esa manera, los numeradores se sumaron de forma directa y se pudo obtener la fracción final sin utilizar reglas mnemotécnicas.

Observe el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{4}=\frac{1}{5}*\frac{4}{4}+\frac{2}{4}*\frac{5}{5}=\frac{4+10}{20}=\frac{14}{20}$$

Aquí podemos ver la suma de dos términos que son números fraccionarios de diferente denominador. Usamos el mismo criterio que antes para hallar el denominador común. En este caso resulta ser 20. Terminamos teniendo como resultado la fracción 14/20.

Sucede que podemos tener una versión aún más simplificada de este resultado:

$$\frac{14}{20} = \frac{7 * \color{red}{2}}{10 * \color{red}{2}} = \frac{7}{10} * \frac{\color{red}{2}}{\color{red}{2}} = \frac{7}{10}$$

Observe los números en rojo. Descubrimos que 14 puede escribirse como la multiplicación 7*2, y 20 puede escribirse como la multiplicación 10*2 . Ambos tienen un **factor común** (tema que será retomado ampliamente en la siguiente unidad). En el ejemplo, ambos factores, iguales entre sí, aparecen multiplicando y dividiendo a la fracción 7/10. Utilizando la propiedad (1) que vimos antes (a* $\frac{b}{b}$ =a), vemos que cuando los factores que multiplican y dividen un número son iguales entre sí, podemos **cancelarlos** sin alterar la identidad del número (es decir, 14/20=7/10 , solo que 7/10 es una versión **simplificada**. Volveremos a este tema en la unidad 2.

Resta

La resta es un caso de suma entre números positivos y números negativos. Durante el curso es importante que no se haga una distinción entre ambos casos.

En el siguiente ejemplo se muestra una operación entre fracciones que incluyen resta y observaremos cómo el tratamiento es el mismo.

$$\frac{1}{5} - \frac{7}{2} + \frac{1}{10} - \frac{3}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{10} + \left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$\frac{1}{5} * \frac{2}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) * \frac{5}{5} + \frac{1}{10} + \left(-\frac{3}{5}\right) * \frac{2}{2} =$$

$$\frac{2}{10} + \left(-\frac{35}{10}\right) + \frac{1}{10} + \left(-\frac{6}{10}\right) = \frac{2 + (-35) + 1 + (-6)}{10} = \frac{-38}{10} = -\frac{38}{10}$$

En el ejemplo anterior, los términos restados aparecen explícitamente escritos como suma de números negativos. De la misma manera que en el caso de la suma de fracciones, son multiplicados por un factor que unifica los denominadores en un denominador común a todos los términos (5 y 2 son múltiplos de 10, es decir, 10 puede ser dividido por 5 o por 2 y obtenemos un número entero). Luego se procede a sumar todos los numeradores (sean números negativos o positivos).

Multiplicación

La multiplicación es una operación mediante la cual se suma un número (multiplicando) por sí mismo tantas veces como lo señala otro número (multiplicador) para obtener un nuevo número (producto). Por ejemplo 3*4=4+4+4=12, donde 3 es el multiplicador, 4 es el multiplicando y 12 es el producto.

Multiplicación de fracciones:

En el caso de multiplicar fracciones, los numeradores se multiplican por numeradores y los denominadores por denominadores.

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ (estas aclaraciones son muy importantes ya que plantean las restricciones para los números b y d. Como la división por cero es indeterminada, b y d pueden ser cualquier número dentro del dominio de los reales excepto el cero).

Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} * \frac{4}{2} = \frac{3 * 4}{5 * 2} = \frac{12}{10} \qquad \frac{1}{2} * \frac{3}{5} * 7 = \frac{1 * 3 * 7}{2 * 5 * 1} = \frac{21}{10}$$

El resultado, si es necesario, se simplifica sacando los factores comunes al numerador y denominador. Por ejemplo:

$$\frac{12}{10} = \frac{6 * 2}{5 * 2} = \frac{6}{5}$$

División

La división es la operación inversa a la multiplicación y significa separar un numero llamado dividendo por la cantidad de veces que indica otro, llamado divisor. La división entre el número real **a** y el número real **b** puede escribirse como a:b. En la matemática universitaria, la división se escribirá preferentemente como fracción $\frac{a}{b}$. En número de arriba, numerador, se lo conoce como dividendo y el de abajo, denominador, es el divisor. El cociente es el resultado de la división entre numerador y denominador.

Si multiplicamos un número a por otro que es el recíproco de b (una fracción de numerador 1 y denominador b, $\frac{1}{b}$) podemos entender a la división como un caso de multiplicación. En el presente curso no haremos distinción entre multiplicación y división.

$$a * \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

División de fracciones:

Para dividir fracciones, se debe multiplicar por el recíproco del divisor (llamamos recíproco a la forma en la cual escribimos al numerador como denominador y viceversa).

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a * d}{b * c}$$

b≠0, c≠0 y d≠0 (restricciones).

Entender esta propiedad es crucial y será utilizada repetidas veces durante el curso.

Propiedades generales de las operaciones con fracciones

Las siguientes propiedades serán de suma importancia para resolver los problemas planteados en las siguientes unidades.

Propiedad conmutativa para la suma y la multiplicación

Cuando sumamos o multiplicamos números, el orden no importa:

$a+b=b+a \quad ; \quad a*b=b*a$

Propiedad asociativa para la suma y la multiplicación

Cuando sumamos o multiplicamos varios números, da igual cuáles sumamos o multiplicamos primero:

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad ; \quad a*(b*c)=(a*b)*c$

Propiedad distributiva

Cuando multiplicamos un número por una suma de otros números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados:

$a*(b+c)=a*b+a*c$

Unidad 2

Factoreo

Competencias de la unidad

Luego del proceso de aprendizaje de esta Unidad, tendrás las competencias necesarias para:

1- Reconocer y utilizar las estrategias de factoreo elementales para la simplificación de expresiones algebraicas.
2- Aplicar correctamente las propiedades de las potencias en situaciones problemáticas complejas.
3- Entender y aplicar estrategias para racionalizar términos que incluyen números irracionales.
4- Modelar situaciones planteadas en lenguaje coloquial mediante expresiones algebraicas.

El objetivo principal de esta unidad es establecer los criterios y herramientas fundamentales para realizar la técnica de **factoreo**. El factoreo es una técnica matemática que nos permite descomponer una expresión algebraica (como sumas o polinomios) en forma de un producto (o multiplicación) que nos facilitará la resolución de los problemas. Un ejemplo introductorio podría ser el siguiente:

$$\mathbf{x^5 - x^4 - 16x + 16 = (x-1) * \left(x^2+4\right) * (x+2) * (x-2)}$$

A la izquierda del igual vemos un polinomio de grado 5 expandido y a la derecha vemos el mismo polinomio **factoreado.** Parece complejo, pero veremos todas las herramientas que nos permitirán lograrlo.

Potencias

La potencia es multiplicar varias veces un número por sí mismo. El número que multiplicamos se llama **base,** y el **exponente** es el número de veces que se multiplica. Por ejemplo:

“5*5*5 = “ 5^3 “ = 125”

Aquí, en 53, la base es 5, el exponente es 3 y el resultado es 125. Esta forma será útil para escribir de forma abreviada factores multiplicados por sí mismos.
Para repasar las diferentes propiedades de las potencias, utilizaremos una forma algebraica general que servirá para todos los números reales:

$$\mathbf{a^{m/n}}$$

En esta forma, **a** representa el número base y **m/n** representa el exponente (número racional, puede ser entero o fraccionario). Es importante reconocer que $\frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{0}\right)$ **n** son números reales y **n** no puede ser cero ya que, de ser así, el número quedaría indefinido. Por ejemplo:

$$\mathbf{3^3 = 3 * 3 * 3 = 27 \quad ; \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad ; \quad 5^{\frac{1}{0}} = \text{no está definido}}$$

Propiedades de las potencias

Para la resolución de problemas que incluyen potencias debemos tener presentes las siguientes propiedades:

Cuando un número fraccionario se encuentra elevado a una potencia, la potencia se distribuye en el numerador y el denominador

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{por ejemplo: } \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

Cualquier número elevado a la cero, tiene como resultado uno, excepto 0^0, que es indefinido

$$a^0 = 1$$

Al ser **a** cualquier número real, excepto el cero.

La potencia de un número con exponente negativo es igual al inverso del número elevado a exponente positivo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{por ejemplo } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Esta propiedad es válida para cualquier número a excepto el cero, ya que la división por cero es indefinida.

Cabe destacar que esta propiedad es muy importante en el momento de necesitar escribir un número que se halla en el denominador y no necesitamos escrito en el numerador. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 3^{-1} \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{a^5} = a^{-5} \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{b^{-8}} = b^8$$

Observá cómo, en cada caso, la base puede escribirse en la línea del numerador cambiando el signo de la potencia con la que se halla en el denominador.

Para multiplicar dos potencias del mismo número (base), sume los exponentes

$$\mathbf{a^m * a^n = a^{m+n}} \qquad \textbf{por ejemplo:} \ \mathbf{a^5 * a^3 * a^2 = a^{5+3+2} = a^{10}}$$

Si alguno de los exponentes es negativo, sigue la misma regla. Por ejemplo:

$$\mathbf{a^2 * a^{-3} * a^5 * a^{-7} = a^{2-3+5-7} = a^{-3}}$$

Si las potencias o alguna de las potencias involucradas son fracciones, se opera de la misma manera, sumando los exponentes fraccionarios. Por ejemplo:

$$\mathbf{a^{-3} * a^{\frac{1}{5}} * a^{-\frac{3}{2}} * a^5 = a^{-3+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}+5}}$$

Sumamos los exponentes, siendo 10 el denominador común:

$$-3 + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + 5 =$$

$$-3 * \frac{10}{10} + \frac{1}{5} * \frac{2}{2} - \frac{3}{2} * \frac{5}{5} + 5 * \frac{10}{10} = \frac{-30 + 2 - 15 + 50}{10} = \frac{7}{10}$$

Por lo tanto, la forma final de la multiplicación de números potenciados será:

$$a^{-3} * a^{\frac{1}{5}} * a^{-\frac{3}{2}} * a^5 = a^{-3+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}+5} = a^{\frac{7}{10}}$$

Si nos encontramos con diferentes números (bases) multiplicados, la suma de potencias podrá hacerse únicamente entre las potencias de la misma base. Por ejemplo:

$$\mathbf{a^3 * b^{-1} * a^{-4} * b^{\frac{3}{2}} * a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(3-4+\frac{1}{2}\right)} * b^{\left(-1+\frac{3}{2}\right)} =}$$

$$\textbf{sumamos las potencias de "a" :} \quad \mathbf{3 - 4 + \frac{1}{2} = 3 * \frac{2}{2} - 4 * \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6 - 8 + 1}{2} = -\frac{1}{2}}$$

$$\textbf{sumamos las potencias de b:} \quad \mathbf{-1 + \frac{3}{2} = -1 * \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}}$$

La forma final de la multiplicación será la siguiente:

$$\mathbf{a^3 * b^{-1} * a^{-4} * b^{\frac{3}{2}} * a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(3-4+\frac{1}{2}\right)} * b^{\left(-1+\frac{3}{2}\right)} = a^{-\frac{1}{2}} * b^{\frac{1}{2}}}$$

Usaremos esta estrategia para resolver diferentes situaciones problemáticas más adelante.

Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes

$$\mathbf{(a^m)^n = a^{m*n}} \qquad \textbf{por ejemplo}: \mathbf{(a^2)^5 = a^{2*5} = a^{10}} \text{ ó } \mathbf{(a^{-3})^2 = a^{(-3)*2} = a^{-6}}$$

Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia

$$\mathbf{(a * b)^n = a^n * b^n} \qquad \textbf{por ejemplo } \mathbf{(a * b)^2 = a^2 * b^2}$$

Utilizando esta propiedad, vemos que cualquier número negativo elevado a una potencia par, tendrá un resultado positivo. Por ejemplo:

$$\mathbf{(-a)^4 = (-1 * a)^4 = (-1)^4 * (a)^4 = [(-1) * (-1) * (-1) * (-1)] * (a)^4 = 1 * (a)^4}$$

Observá que podemos entender a cualquier número negativo como su versión positiva multiplicada por un (-1). Al distribuir la potencia, el -1 se multiplicará a sí mismo la cantidad de veces que indique su potencia. Si la potencia es par, la multiplicación de un (-1) un número par de veces resultará siempre en un (+1).

Si algún componente del producto se encuentra elevado a una potencia, se opera de la misma manera:

$$\mathbf{\left(a^5 * b^{-3}\right)^4 = a^{5*4} * b^{(-3)*4} = a^{20} * b^{-12}}$$

Si las potencias son fracciones, se realiza lo mismo, cuidando cumplir las propiedades de las multiplicaciones que vimos en la unidad anterior. Por ejemplo:

$$\mathbf{\left(a^{-\frac{1}{3}} * b^{2/5}\right)^{1/2} = a^{\left(-\frac{1}{3}\right)*\frac{1}{2}} * b^{\frac{2}{5}*\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{6}} * b^{\frac{2}{10}}}$$

Para elevar un cociente a una potencia, elevar el numerador y el denominador a la potencia

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n * b^{-n}$$

$$\textbf{Por ejemplo:}\ (\frac{a^3}{b^2})^2 = \frac{a^{3*2}}{b^{2*2}} = \frac{a^6}{b^4} = a^6 * b^{-4}$$

Raíces

Para los fines de este curso, entenderemos a las raíces como potencias fraccionarias. De esta forma, todas las propiedades de las potencias se aplican a las raíces.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Aquí vemos que podemos escribir la raíz enésima de **a** elevado a la **m** como a elevado a la potencia fraccionaria **m/n.**

Por ejemplo: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ ó $\sqrt[4]{b^5} = b^{\frac{5}{4}}$ ó $\sqrt[2]{c} = c^{\frac{1}{2}}$ (recordá que la potencia 1 no se escribe)

Ejemplo de ejercicio con potencias

Antes de continuar, será de utilidad ver un ejemplo en el cual se utilizan las propiedades de las potencias:

$$\frac{(a^3)^4.(a.b^2)^3.a^{-2}}{(a.b)^9} =$$

Para resolver este tipo de problemas, intentaremos escribir las variables con sus potencias en el numerador. Primero distribuiremos las potencias de potencias:

$$\frac{a^{12}.a^{3}.b^{6}.a^{-2}}{a^{9}.b^{9}} =$$

Para poder sumar las potencias, debemos escribir las variables que aparecen en el denominador de manera que aparezcan en el numerador:

$$a^{12}.a^{3}.b^{6}.a^{-2}.a^{-9}.b^{-9} =$$

Una vez que tenemos todas las variables con sus potencias escritas en el numerador, sumaremos las potencias de cada variable por separado:

$$a^{12+3-2-9}.b^{6-9} =$$

De esta manera, la forma simplificada de la expresión inicial será:

$$a^{4}.b^{-3} = \frac{a^{4}}{b^{3}}$$

Cuadrado de un binomio y cubo de un binomio

Una de las estrategias de factoreo más recurrentes son el cuadrado de un binomio y cubo de un binomio. En ambos casos, un binomio (entendemos por binomio dos términos sumados o restados) son elevados al cuadrado o al cubo y el resultado es un polinomio. La vía inversa (convertir un polinomio en binomio cuadrado o cúbico) es una posible estrategia de factoreo.

Cuadrado de un binomio

Cuando tenemos un binomio (dos términos sumados que pueden ser número reales positivos o negativos) elevados al cuadrado, recomendamos utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación en lugar de la regla mnemotécnica generalmente utilizada. La expansión del binomio cuadrado se realiza de la siguiente manera:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}*\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^2+\mathbf{2}*\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

En los siguientes ejemplos mostraré que conviene entender al binomio como una suma, aunque alguno de los términos sea un número negativo:

$$(\mathbf{3}-\boldsymbol{b})^2 = \big(\mathbf{3}+(-\boldsymbol{b})\big)^2 = \big(\mathbf{3}+(-\boldsymbol{b})\big)*\big(\mathbf{3}+(-\boldsymbol{b})\big) =$$

$$\mathbf{3}*\mathbf{3}+\mathbf{3}*(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{b})*\mathbf{3}+(-\boldsymbol{b})*(-\boldsymbol{b}) =$$

$$\mathbf{3}^2+\mathbf{2}*\mathbf{3}*(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}^2 = \mathbf{3}^2-\mathbf{2}*\mathbf{3}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2 =$$

$$\mathbf{9}-\mathbf{6}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

En el caso anterior, el binomio resta (3 - b) fue reescrito convenientemente como una suma (3 + (- b)). Observá cómo aparecen dos términos (- 3 * b) que, al sumarse, terminan generando el término (- 2 * 3 * b) en la forma final. Esta generalización otorga el beneficio de no tener que recordar variantes de la técnica, pudiendo adaptar los datos para aplicar la técnica original.

En el siguiente ejemplo, observamos qué sucede cuando ambos términos del binomio son números negativos:

$$(-\boldsymbol{a}-\mathbf{5})^2 = \big((-\boldsymbol{a})+(-\mathbf{5})\big)^2 = \big((-\boldsymbol{a})+(-\mathbf{5})\big)*\big((-\boldsymbol{a})+(-\mathbf{5})\big) =$$

$$(-\boldsymbol{a})*(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})*(-\mathbf{5})+(-\mathbf{5})*(-\boldsymbol{a})+(-\mathbf{5})*(-\mathbf{5}) =$$

$$(-\boldsymbol{a})^2+\mathbf{2}*(-\boldsymbol{a})*(-\mathbf{5})+(-\mathbf{5})^2 = \boldsymbol{a}^2+\mathbf{2}*(-\boldsymbol{a})*(-\mathbf{5})+\mathbf{5}^2 =$$

$$\boldsymbol{a}^2+\mathbf{10}*\boldsymbol{a}+\mathbf{25}$$

En este último ejemplo, vemos que por la regla de los signos ((-) * (-) = (+)), el polinomio tendrá todos sus términos sumados con signo positivo.

Cubo de un binomio

La resolución del cubo de un binomio (par de factores) cuya suma se encuentra elevada al cubo se realiza de manera similar a la del cuadrado de un binomio. A continuación, se muestra paso a paso:

$$\mathbf{(a+b)^3 = (a+b)*(a+b)*(a+b)}$$

Recomiendo que se utilice la propiedad distributiva entre los dos primeros factores (marcados en rojo) y finalmente vuelva a aplicarse dicha propiedad para obtener al polinomio expandido:

$$\mathbf{(a+b)*(a+b)*(a+b) = \left(a^2+2*a*b+b^2\right)*(a+b) =}$$

$$\mathbf{a^2*a+a^2*b+2*a*b*a+2*a*b*b+b^2*a+b^2*b =}$$

En este gran polinomio podemos identificar cuatro combinaciones de variables que, sumadas, generarán un polinomio de cuatro términos. Es importante que realices estos cálculos en una hoja para una mejor comprensión:

$$a^3 + 3*a^2*b+3*a*b^2+b^3 = (a+b)^3$$

Tal como en el caso del cuadrado del binomio, la estrategia general se mantiene independientemente si los números **a** y **b** son reales positivos o negativos.

Diferencia de cuadrados

Otro caso de factoreo muy importante y recurrente en las operaciones matemáticas es la **diferencia de cuadrados**, que aparece cuando dos términos elevados al cuadrado **cada uno** son restados entre sí. La forma más sencilla de demostrar este caso es la siguiente:

$$\mathbf{(a+b)*(a-b) = a*a+a*(-b)+b*a+b*(-b) = a^2 - b^2}$$

Observe que los términos **a** * **b** se cancelan entre sí. De esta manera, obtenemos ambos números elevados al cuadrado restándose. De esta manera, la diferencia de cuadrados, como herramienta de factoreo, puede escribirse como:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) * (a - b)}$$

Es esencial no confundir la diferencia de cuadrados con el binomio elevado al cuadrado.

La diferencia de cuadrados es una herramienta fundamental para resolver una operación matemática importante, como es la racionalización de denominadores.

Racionalización de denominadores

A veces es útil eliminar una raíz en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador**. En términos generales, cuando tenemos una raíz en el denominador, podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\mathbf{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$$

Para poder eliminar esa raíz, resulta más simple expresarla como una potencia fraccionaria. Utilizando la propiedad que vimos en la unidad anterior $\left(\mathbf{a} * \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\right)$ podemos multiplicar el denominador elevado a la potencia fraccionaria, de manera que la suma de las potencias resulte en un número no fraccionario. Esto es más fácil verlo con un ejemplo:

$$\mathbf{\frac{1}{\sqrt[2]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} * \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{1}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{a}}$$

Observá cómo el denominador que inicialmente tenía una raíz termina siendo un número no radical. En el proceso, también cambió el numerador, pero eso no resulta un problema en esta instancia.

Mirá el siguiente ejemplo, en el cual hacemos uso de la misma propiedad para deshacernos de la raíz del denominador:

$$\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{1/7} = \frac{1^{\frac{1}{7}}}{a^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{7}}} * \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{5}{7}}} = \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}}} = \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{7}{7}}} = \frac{a^{\frac{5}{7}}}{a^1} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

Partiendo de esto como herramienta inicial, utilizaremos la **diferencia de cuadrados** para deshacernos de denominadores con raíces que sean suma o resta de binomios. Observá el siguiente ejemplo:

$$\frac{x+y}{(\sqrt{x}+y)} = \frac{x+y}{(x^{1/2}+y)}$$

En la expresión original, tenemos una expresión con una raíz cuadrada en el denominador que nos proponemos a transformar en una expresión no radical. Para eso, utilizamos las siguientes dos propiedades que venimos utilizando:

$$a * \frac{b}{b} = a \qquad ; \qquad \text{Diferencia de cuadrados: } a^2 - b^2 = (a+b) * (a-b)$$

Observá que, en la diferencia de cuadrados, si multiplicamos el binomio sumado (a+b) por su **conjugado** (mismo binomio, pero con el signo cambiado) (a-b), podemos obtener la forma en la cual al primer elemento a^2 se le resta el segundo elemento b^2. Haremos uso de esta capacidad de elevar al cuadrado los elementos del binomio para realizar la racionalización del denominador:

$$\frac{x+y}{(\sqrt{x}+y)} = \frac{(x+y)}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y\right)} * \frac{(x^{\frac{1}{2}}-y)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y\right)} =$$

$$\frac{(x+y) * (x^{\frac{1}{2}}-y)}{(x^{\frac{1}{2}}+y) * (x^{\frac{1}{2}}-y)} =$$

$$\frac{\left(x * x^{\frac{1}{2}} - x * y + y * x^{\frac{1}{2}} - y * y\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - y^2} =$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - xy + yx^{\frac{1}{2}} - y^2}{x - y^2}$$

De esta manera, logramos eliminar la raíz ubicada en el denominador. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})} * \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}-\sqrt{7})} =$$

$$\frac{5 * (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2} =$$

$$\frac{5 * (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{2-7} =$$

$$\frac{5 * (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{-5} = -(\sqrt{2}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-\sqrt{2}$$

En la parte final, simplificamos el factor común 5 que multiplica y divide al binomio (**√2 - √7**) y distribuimos el signo (-1) para obtener la forma final **√7 - √2**.

De esta manera, vimos una aplicación directa de la diferencia de cuadrados para solucionar problemas de factoreo y simplificar expresiones que nos será de utilidad más adelante.

Factor común

En la unidad anterior, usamos la propiedad distributiva de la multiplicación para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (usando la propiedad distributiva) para factorizar una expresión como un producto de otras más sencillas. En términos generales, podemos escribirla de la siguiente manera:

a * **b** + **a** * **c** + a * **d** = **a** * (**b** + **c** + **d**)

Observá que, en los tres términos del polinomio anterior, todos los números (**b**,**c** y **d**) están multiplicados por el número **a** (factor común a todos los términos). Por eso resulta válido escribir la forma de la derecha de la igualdad en la cual a aparece como un factor externo que es capaz de distribuirse con los otros números. Esta última forma es una forma **facteorada** del polinomio de la izquierda.

A continuación, les mostraré ejemplos donde se realiza la misma estrategia sobre polinomios expandidos:

$$3x^2 + 9x - 12 = 3 * x^2 + 3 * 3 * x - 3 * 4 = 3 * (x^2 + 3x - 4)$$

En este ejemplo vemos que los tres términos del polinomio se encuentran multiplicados por 3. Esto aparece explícitamente marcado con rojo en el polinomio del medio. Aplicando la inversa de la propiedad distributiva, ubicamos el 3 como un factor externo. A veces el factor común no es un único número, por ejemplo:

$$\mathbf{4yx + 2y^2x - 8yx^2 = 2yx * 2 + 2yx * y - 2yx * 4x = 2yx * (2 + y - 4x)}$$

En este caso, reescribí el polinomio para exponer explícitamente en rojo los factores de cada término que se repiten. Observá cuidadosamente y realizalo nuevamente en una hoja para comprenderlo mejor. Luego, ubicá el factor común **2yx** multiplicando la suma de los otros términos.

A veces, el factor común es un polinomio, por ejemplo:

$$\boldsymbol{(x-2) * (3x+y) + 5x * (x-2) - (x-2)^2 =}$$

$$\boldsymbol{(x-2) * (3x+y) + 5x * (x-2) - (x-2) * (x-2) =}$$

$$\boldsymbol{(x-2) * ((3x+y) + 5x - (x-2)) =}$$

$$\boldsymbol{(x-2) * (3x + y \ + 5x - x + 2) = \ (x-2) * (7x + y + 2)}$$

Nuevamente, en la segunda línea se encuentra explicitado el factor común (x-2) presente en todos los términos. Observá cómo, finalmente, se combinan todos los términos que quedaron, agrupándolos por las variables que los componen.

Polinomios de grado 2 y su forma factoreada

Un polinomio de grado 2 para la variable x es una expresión de la siguiente forma:

$$\mathbf{a * x^2 + b * x + c}$$

Se lo reconoce de **grado 2,** ya que la variable **x** se encuentra elevada al cuadrado. Esto quiere decir que hay dos soluciones (valores que puede tomar **x**) que, siendo reemplazadas en el polinomio, hacen que la suma de esos términos resulte igual a cero. Las letras **a**, **b** y **c** son coeficientes (números reales) que aparecen multiplicando a $\mathbf{x^2}$, **a x** y como término independiente de la variable, respectivamente.

Para poder factorear este tipo de polinomios, necesitamos conocer las dos respuestas (también conocidas como raíces) que lo satisfacen. Para esto, se utiliza una fórmula llamada resolvente. La fórmula es la que aparece a continuación:

$$\frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4 * \mathbf{a} * \mathbf{c}}}{2 * \mathbf{a}} =$$

Recordamos que las letras **a**, **b** y **c** son los coeficientes de cada término del polinomio.

La parte de la fórmula $\mathbf{b}^2 - 4 * \mathbf{a} * \mathbf{c}$ se conoce como **discriminante** y es conocida así ya que el valor de la raíz cuadrada del discriminante sumado otorga una de las respuestas y la restada otorga otra de las repuestas.

$$\mathbf{x}_1 = \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4 * \mathbf{a} * \mathbf{c}}}{2 * \mathbf{a}} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4 * \mathbf{a} * \mathbf{c}}}{2 * \mathbf{a}}$$

Resulta **muy importante** notar que si el discriminante b^2-4*a*c **es igual a cero**, el polinomio tendrá dos respuestas iguales (este tema se $\mathbf{b}^2 - 4 * \mathbf{a} * \mathbf{c}$ en las materias de análisis matemático o cálculo ya habiendo ingresado en la Universidad).

Una vez obtenidas las dos raíces del polinomio, el mismo puede escribirse en forma factoreada, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{a} * \mathbf{x}^2 + \mathbf{b} * \mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{a} * (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) * (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

Esta forma será de gran utilidad para resolver problemas.

A continuación, mostraré explícitamente la estrategia que consiste en resolver una ecuación cuadrática (grado dos) para poder factorizar el polinomio. Los siguientes ejemplos ayudarán a mejorar la comprensión de esta estrategia. Por ejemplo:

$$\mathbf{x}^2 - 5 * \mathbf{x} + 6 = 0$$

Los coeficientes son a = 1 ,b = - 5 , c = 6. La fórmula resolvente se escribirá de la siguiente manera:

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 1 * 6}}{2 * 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

La ecuación cuadrática está resuelta con dos resultados, por lo que puedo ahora factorizar el polinomio de la siguiente manera:

$$x^2 - 5 * x + 6 = a * (x - x_1) * (x - x_2) = (x - 3) * (x - 2)$$

Esta igualdad es sencilla de demostrar utilizando la propiedad distributiva sobre la forma factoreada:

$$(x - 3) * (x - 2) = x * x + x * (-2) - 3 * x - 3 * (-2) = x^2 - 5 * x + 6$$

En el siguiente ejemplo, veremos el caso en el que ambas raíces son iguales:

$$x^2 + 8 * x + 16 = 0$$

Los coeficientes son a = 1, b = 8, c = 16. La fórmula resolvente se escribirá de la siguiente manera:

$$\frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4 * 1 * 16}}{2 * 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-8 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-8}{2} = -4$$

Es importante observar cómo el determinante resultará igual a cero $((8)^2 - 4 * 1 * 16 = 0)$ por lo que ambas respuestas x_1 y x_2 serán iguales. Por lo tanto, el polinomio puede ser escrito como:

$$x^2 - 8 * x + 16 = a * (x - x_1) * (x - x_2) = \left(x - (-4)\right) * \left(x - (-4)\right) =$$
$$(x + 4) * (x + 4) = (x + 4)^2$$

Observá cómo el polinomio fue factorizado en un binomio elevado al cuadrado. Si expandimos esta forma, obtenemos el polinomio original:

$$(x + 4)^2 = (x + 4) * (x + 4) = x^2 + 4 * x + 4 * x + 4 * 4 = x^2 + 8 * x + 16$$

Factoreo: división de polinomios

Hasta este punto ya hemos visto múltiples herramientas para realizar la técnica de **factoreo**. Recordamos que el **factoreo** es una técnica matemática que nos permitirá descomponer una expresión algebraica (como sumas o polinomios) en forma de un producto (o multiplicación) que nos facilitará la resolución de los problemas, particularmente la **división de polinomios**.

Cuando se nos presenta una división de polinomios, se conocen múltiples técnicas que no serán de uso corriente en la carrera universitaria. La idea del factoreo es presentar una nueva estrategia que nos permite resolver la división de polinomios de una manera mucho más sencilla y directa. Por ejemplo, intentaremos hallar el polinomio M(x), resultado de la división entre dos polinomios diferentes:

$$\mathbf{\frac{x^5 - x^4 - 16x + 16}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = M(x)}$$

Para resolver esto, evitando utilizar técnicas rudimentarias, usaremos las herramientas de **factoreo** que aprendimos en esta unidad. Empezaremos factoreando el polinomio ubicado en el numerador en el mayor número de factores que podamos:

$$\mathbf{x^5 - x^4 - 16x + 16}$$

No hay un factor común entre los cuatro términos, así que buscaremos factores comunes entre pares de términos. Estos factores comunes estarán indicados en rojo:

$$\mathbf{x^5 - x^4 - 16x + 16}$$

$$\mathbf{x^4 * x - x^4 + (-16)x - (-16)}$$

$$\mathbf{x^4 * (x - 1) - 16 * (x - 1)}$$

Prestá mucha atención como deliberadamente se cambió la forma de los términos sin alterar su identidad utilizando varias propiedades que vimos antes para sacar factor común x^4 y (-16), dejando en ambos términos un factor idéntico (x - 1) que, seguidamente, se sacará como factor común:

$$\mathbf{x^4 * (x - 1) - 16 * (x - 1)}$$

$$\mathbf{(x - 1) * (x^4 - 16)}$$

Así conseguimos tener dos factores logrados a partir del polinomio inicial. Ahora, observá el factor de la derecha y tratá de identificar que se trata de una **diferencia de cuadrados**. Esto nos servirá para factorizar aún más nuestro polinomio con la propiedad $\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b) * (a-b)}$:

$$\mathbf{(x-1) * (x^4 - 16)}$$

$$\mathbf{(x-1) * ((x^2)^2 - 4^2)}$$

$$\mathbf{(x-1) * \left(x^2 + 4\right) * (x^2 - 4)}$$

En esta última forma, también se puede identificar otra **diferencia de cuadrados** $(x^2 - 4) = (x+4) * (x-4)$. Así que procederemos a factorizar al máximo el polinomio:

$$\mathbf{(x-1) * \left(x^2 + 4\right) * (x^2 - 4)}$$

$$\mathbf{(x-1) * \left(x^2 + 4\right) * (x^2 - 2^2)}$$

$$\mathbf{(x-1) * \left(x^2 + 4\right) * (x+2) * (x-2)}$$

Esta última es la forma más factoreada del polinomio numerador:

$$\boxed{\mathbf{x^5 - x^4 - 16x + 16 = (x-1) * \left(x^2 + 4\right) * (x+2) * (x-2)}}$$

Seguidamente, haremos lo mismo con el polinomio denominador. Intentá identificar las estrategias de factoreo que se irán utilizando. Se explicarán en color rojo para facilitar su identificación:

$$\mathbf{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

$$\mathbf{x^2 * x - x^2 + (-4)x - (-4)}$$

$$\mathbf{x^2 * (x-1) - 4 * (x-1)}$$

$$\mathbf{(x-1) * (x^2 - 4)}$$

$$\mathbf{(x-1) * (x^2 - 2^2)}$$

$$\mathbf{(x-1) * (x+2) * (x-2)}$$

En este último caso, nuevamente se transformó el polinomio deliberadamente para poder sacar factor común x^2 y -4 dejando el factor (x - 1) repetido en ambos términos. Luego se sacó dicho factor (x-1) como factor común y se identificó el factor remanente $(x^2 - 4)$ como una diferencia de cuadrados que se reformuló como (x + 2) * (x - 2). De esta manera, el polinomio quedó factoreado de la siguiente forma:

$$\mathbf{x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1) * (x+2) * (x-2)}$$

Finalmente, podemos volver a escribir la división de polinomios de manera factoreada:

$$\mathbf{\frac{x^5 - x^4 - 16x + 16}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-1) * (x^2+4) * (x+2) * (x-2)}{(x-1) * (x+2) * (x-2)}}$$

Observá los factores que se repiten en el numerador y denominador. Aquellos que se repiten pueden ser simplificados sin que se altere la identidad de la fracción, según la propiedad:

$$\mathbf{a * \frac{b}{b} = a}$$

$$\mathbf{\frac{x^5 - x^4 - 16x + 16}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{\cancel{(x-1)} * (x^2+4) * \cancel{(x+2)} * \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)} * \cancel{(x+2)} * \cancel{(x-2)}} = x^2 + 4 = M(x)}$$

De esta manera, pudimos resolver esta división de polinomios utilizando herramientas de factoreo.

Otro caso ejemplar que requiere de estrategias de factoreo para simplificar expresiones algebraicas y resolver divisiones de polinomios es el que sigue:

$$\mathbf{\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 1} * \frac{x^2 + x^3}{x + 4} * \frac{x - 1}{3x + 9} =}$$

Para resolver esta situación, debemos utilizar todas las herramientas que estuvimos viendo. Para hacer el proceso más simple, se tomará el ejercicio por partes y se factoreará cada una por separado para, finalmente, volver a armar el problema.

1) $\mathbf{x^2 + 7x + 12}$

Es un polinomio de grado dos, calculando las raíces, se podrá factorear como lo hicimos en la sección de polinomios de grado 2 y su forma factoreada. Los coeficientes son a=1 ,b=7 ,c=12 . La fórmula resolvente se escribirá de la siguiente manera:

$$\frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4 * 1 * 12}}{2 * 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$$

Por lo tanto, el polinomio puede ser escrito como:

$$x^2 + 7x + 12 = \left(x - (-3)\right) * \left(x - (-4)\right) = (x+3) * (x+4)$$

2) $\mathbf{x^2 - 1}$

Esto es una diferencia de cuadrados. Podemos factorizarla de la siguiente manera:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1) * (x-1)$$

3) $\mathbf{x^2 - x^3}$

Podemos usar la técnica de factor común para factorizar esta parte:

$$x^2 + x^3 = x^2 + x^2 * x = x^2 * (1 + x)$$

4) 3x+9

También podemos usar la técnica de factor común para factorizar esta parte:

$$3x + 9 = 3x + 3 * 3 = 3 * (x + 3)$$

El resto de las partes no puede ser factorizada más de lo que está, por lo tanto, la expresión factoreada quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2-1} * \frac{x^2+x^3}{x+4} * \frac{x-1}{3x+9} = \frac{(x+3)*(x+4)}{(x+1)*(x-1)} * \frac{x^2*(1+x)}{x+4} * \frac{x-1}{3*(x+3)} =$$

La clave de colores muestra la forma expandida y luego factoreada de cada parte. Ya teniendo la forma factoreada, se buscaron los factores que se hallen multiplicando y dividiendo el polinomio para poder **simplificarlos**:

$$\frac{(x+3)*(x+4)}{(x+1)*(x-1)} * \frac{x^2*(1+x)}{x+4} * \frac{x-1}{3*(x+3)} =$$

$$\frac{\cancel{(x+3)}*\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+1)}*\cancel{(x-1)}} * \frac{x^2*\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+4}} * \frac{\cancel{x-1}}{3*\cancel{(x+3)}} =$$

$= \frac{x^2}{3}$ **Esta es la expresión simplificada y final de la expresión**

Unidad 3

Ecuaciones, inecuaciones y resolución de problemas

UADE

Competencias de la unidad

En esta Unidad trabajarás con el objetivo de consolidar las siguientes competencias desarrolladas en la escuela media, necesarias para encarar el nivel universitario de tu carrera. Lo esperado es que, luego de este proceso de aprendizaje, puedas:

1- Reconocer las reglas de despeje variables en ecuaciones de diferentes grados.
2- Resolver inecuaciones y expresar las respuestas como intervalos.
3- Aplicar todo lo visto hasta el momento para interpretar situaciones problemáticas.

Ecuaciones

Conceptos básicos

Una ecuación es un enunciado que indica que dos expresiones matemáticas son iguales. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos, letras (por lo general literales) que representan números. En la siguiente igualdad:

$$4x - 7 = 19$$

La letra **x** es la **variable**. Consideramos x como la incógnita de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones o raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación**.

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes.** Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está solo en un lado del signo igual.

Llamaremos **términos** de una ecuación a los valores de cada lado de la igualdad que estén separados por signos de más o de menos, que desde ya pueden incluir internamente operaciones de división o multiplicación, raíces o potencias. Para resolver una ecuación deben primero resolverse las operaciones dentro de cada término.

Ejemplo:

$$\frac{2*3}{2} + 9 - \frac{16}{8} = 5*3 - 5$$

$$\left(\frac{2*3}{2}\right) + 9 - \left(\frac{16}{8}\right) = (5*3) - 5$$

$$3 + 9 - 2 = 15 - 5$$

$$10 = 10$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2} * 7 + 15 = (3+4) * \ 2^{\frac{1}{2}} \ + 3 * 5$$

$$(\sqrt{2} * 7) + 15 = \left[(3+4) * \ 2^{\frac{1}{2}}\right] + (3 * 5)$$

$$7 * \sqrt{2} + 15 = 7 * \sqrt{2} + 15$$

Resolución de ecuaciones – propiedades por utilizar

Las propiedades que usamos para resolver una ecuación son las siguientes:

Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación, da una ecuación equivalente. Por ejemplo:

$$\begin{gathered} a = b \\ a + c = b + c \\ 6 = 3x + 3 \\ 6 + 5 = 3x + 3 + 5 \\ 11 = 3x + 8 \end{gathered}$$

Al igual que con la suma, si restamos la misma cantidad a ambos lados de una ecuación, nos da una ecuación equivalente manteniéndose la igualdad. Por ejemplo:

$$\begin{gathered} 12 = 7x + 5 \\ 12 - 3 = 7x + 5 - 3 \\ 9 = 7x + 2 \end{gathered}$$

Multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente

Ejemplo 1:

a = b

a . c = b . c

- Multiplicación:

$$\mathbf{4 = 2 + 2}$$
$$\mathbf{4 * 3 = (2 + 2) * 3}$$
$$\mathbf{12 = 3 * 2 + 3 * 2}$$
$$\mathbf{12 = 12}$$

- División:

$$\mathbf{5 * 5 = 25}$$
$$\mathbf{\frac{5 * 5}{5} = \frac{25}{5}}$$

$$\mathbf{5 = 5}$$

En resumen, ante una igualdad, se nos permite realizar la misma operación matemática en ambos lados del igual, a fin de tener una ecuación equivalente para despejar una variable y hallar la solución. Por ejemplo:

$$\mathbf{3x - 4 = 24}$$
$$\mathbf{3x - 4 + 4 = 24 + 4}$$
$$\mathbf{3x = 28}$$
$$\mathbf{\frac{3x}{3} = \frac{28}{3}}$$
$$\mathbf{x = \frac{28}{3}}$$

Observá cómo realizar la operación en ambos lados del igual da la sensación de que un término que se hallaba restando o sumando, pasa del otro lado del igual con el signo opuesto, o si está multiplicando o dividiendo, pasa del otro lado del igual dividiendo o multiplicando, respectivamente. Este cambio de lado e inversión es una forma más simple y rápida de realizar la operación, pero es importante reconocer que, ante cualquier despeje, lo que siempre ocurre es que se realiza la misma operación de ambos lados del igual, aunque no aparezca explícitamente.

Ejemplo 2:

En el siguiente ejemplo, despejaremos la variable x sin explicitar cada operación a ambos lados del igual y luego la volveremos a ver explicitando cada paso:

$$\mathbf{5x - 4 = 3x + 8}$$

$$5x - 3x - 4 = +8$$
$$2x - 4 = 8$$
$$2x = 8 + 4$$
$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Ahora se realizará el mismo despeje, explicitando cada operación que se hace de cada lado del igual:

$$5x - 4 = 3x + 8$$
$$5x - 4 - 3x = 3x + 8 - 3x$$
$$5x - 4 - 3x = 8$$
$$2x - 4 + 4 = 8 + 4$$
$$2x = 8 + 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$
$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Si tenemos una expresión cuadrática, realizaremos el mismo proceso para lograr obtener una forma $a.x^2 + b.x + c = 0$ para poder hallar las soluciones como aprendimos en la unidad anterior. Por ejemplo, veamos la siguiente expresión:

$$8t^2 + 7 = 6t + 7t^2 + 2$$
$$8t^2 + 7 - 7t^2 = 6t + 7t^2 + 2 - 7t^2$$
$$t^2 + 7 = 6t + 2$$
$$t^2 + 7 - 6t = 6t + 2 - 6t$$
$$t^2 - 6t + 7 = +2$$
$$t^2 - 6t + 7 - 2 = +2 - 2$$
$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

Observá cómo haciendo la misma operación en ambos lados del igual, nos da la ilusión de que $7t^2$ pasa restando al lado izquierdo, que $6t$ también pasa restando y de la misma forma el 2.

Teniendo el polinomio escrito de esta forma, podemos hallar las raíces de la manera que hemos aprendido en unidades anteriores:

$$\mathbf{t^2 - 6t + 5}$$

El coeficiente de t^2: a=1, el coeficiente de t: b=-6, el término independiente:c=5. Así aplicamos la fórmula resolvente.

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 * 1 * 5}}{2 * 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \qquad t_2 = \frac{6-4}{2} = 1$$

Utilizando la regla de factoreo de polinomios de grado 2 que vimos en la unidad anterior, podemos tener una versión factoreada del polinomio:
$\mathbf{a * x^2 + b * x + c = a * (x - x_1) * (x - x_2) = 0}$

$$\mathbf{t^2 - 6t + 5 = (t - 5).(t - 1)}$$

Observá la forma factoreada y cómo el factoreo nos ayuda a ver explícitamente las raíces (soluciones) de la ecuación:

$$\mathbf{t^2 - 6t + 5 = (t - 5).(t - 1) = 0}$$

Si t=5, el primer factor se hace cero y la multiplicación se hace cero, cumpliendo con la igualdad. También si t=1, el segundo factor se hace cero y la igualdad se cumple. Usaremos esta estrategia para resolver problemas más adelante.

Sabiendo todo esto, a partir de este punto, no haremos explícita cada operación a ambos lados del igual para evitar expresiones engorrosas. Pero es importante saber que, cada vez que pasamos un término sumando, restando, multiplicando o dividiendo, estamos realizando implícitamente la misma operación en ambos lados del igual para obtener ecuaciones equivalentes.

Ejemplo 3:

$$\frac{4}{3}.x^2 + 3x + 13 = x^2 - x + 1$$

$$\frac{4}{3}.x^2 + 3x.\frac{3}{3} + 13.\frac{3}{3} = x^2 - x + 1$$

$$\frac{4x^2 + 9x + 39}{3} = x^2 - x + 1$$

$$4.x^2 + 9x + 39 = 3.(x^2 - x + 1)$$

$$4.x^2 + 9x + 39 = 3.x^2 - 3x + 3$$

$$4.x^2 + 9x + 39 - 3.x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

Los coeficientes del polinomio grado dos son: **a=1,b=12,c=36**

$$\frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 * 1 * 36}}{2 * 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 0}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{12 - 0}{2} = 6$$

Vemos que ambas raíces son iguales y valen 6. Utilizando la regla de factoreo de polinomios de grado 2 que vimos inmediatamente antes, podemos tener una versión factoreada del polinomio:

$$a * x^2 + b * x + c = a * (x - x_1) * (x - x_2) = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = (x - 6).(x - 6) = 0$$

Viendo la forma factoreada, resulta simple ver que los valores de **x** que hacen que la igualdad sea cero es x=6 dos veces.

Restricciones

En algunas oportunidades, las raíces resultantes de la resolución de una igualdad pueden llevar a expresiones indefinidas. En esta sección analizaremos la aparición de restricciones: respuestas a polinomios que deben ser descartadas por llevar a expresiones indefinidas. Cabe aclarar que los coeficientes de los polinomios que aparecen en el denominador deben dar distintos de cero.

Cuando se debe resolver un problema en el cual la variable se encuentra en el denominador, debés estar atento a los valores de la variable que hacen que el denominador resulte en cero, una expresión indefinida. Se explicará este tema a partir de ejemplos.

Ejemplo 1:

En el siguiente ejemplo, la variable se encontrará en el denominador, identificaremos el valor de la **restricción** y la cotejaremos con los resultados de la ecuación.

$$\frac{\mathbf{x^2 - 4x + 4}}{\mathbf{x^2 - 2x + 1}} = \mathbf{0}$$

Es importante observar que, para resolver este problema, los valores de x que igualan a cero al numerador son los resultados definitivos de la ecuación, siempre que no anulen el denominador. Por eso, para que esta expresión sea igual a cero, debemos igualar a cero el numerador y resolver. En este caso:

$$\mathbf{x^2 - 4x + 4 = 0}$$

Si resuelve la ecuación cuadrática con las estrategias que practicamos antes, puede concluir que tiene dos respuestas, ambas son +2 y el polinomio puede escribirse de esta manera:

$$\mathbf{x^2 - 4x + 4 = (x - 2).(x - 2) = 0}$$

Debemos validar las respuestas asegurándonos de que ninguna de ellas reemplazadas en el denominador de la expresión original la igualen a cero. Veamos, el denominador de la expresión original igualada a cero es:

$$\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$$

Si sacamos las raíces de este polinomio, veremos que la solución es x=1 dos veces:

$$\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$$
$$\mathbf{(x - 1).(x - 1) = 0}$$

Por lo tanto, x=1 es una **restricción,** un valor que no puede ser aceptado como raíz o respuesta del problema ya que, reemplazado en la expresión original, hace que el denominador resulte en cero y el resultado sea indefinido. El análisis de este tipo de casos lo verás en profundidad en las materias de tu carrera.

Como las raíces del problema resultaron iguales a x=2, no coinciden con la restricción (no hacen que el denominador valga cero) y nos lleva a aceptar las raíces como soluciones válidas.

Ejemplo 2:

En este ejemplo, las restricciones invalidarán las raíces del problema. Observá:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = 0$$

Empecemos analizando las **restricciones** que nos presenta esta expresión. Cualquier valor que haga que el denominador sea cero, serán restricciones y deberán ser descartadas como respuesta del problema. El denominador es el siguiente:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2).(x - 2) = 0$$

La expresión es una diferencia de cuadrados que se factorean con las estrategias que ya vimos. Queda explícito que hay dos valores de x que hacen que el denominador se haga cero: x = 2 y x = - 2. Estos dos valores son las soluciones para este problema y son las **restricciones**.

Si resolvemos la expresión como en el ejemplo anterior, los valores que hacen que el numerador cumpla la igualdad y se haga cero son:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2).(x - 2) = 0$$

Las raíces de este polinomio son dos y ambas valen x=2. Como estas soluciones coinciden con una de las restricciones, debemos concluir que **no hay soluciones reales para este problema.**

Ejemplo 3:

Veamos un ejemplo más complejo.

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$$

Utilizando las estrategias de factoreo que hemos visto, sabiendo que las raíces del polinomio de grado 2 que aparece son $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$, podemos volver a escribir la expresión de forma factoreada.

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{(x-4).(x+2)}$$

Si igualamos a cero, obtenemos esta forma:

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}-\frac{12}{(x-4).(x+2)}=0$$

Observá que los valores x=4 y x=-2 hacen que algunos denominadores sean cero y resulten en un término indefinido. Por lo tanto, para este problema **las restricciones son:** $\boldsymbol{x = 4}$ **y** $\boldsymbol{x = -2}$**.** Se continuará resolviendo el problema para obtener las raíces. Se buscará generar un denominador común para los tres términos $(x-4).(x+2)$:

$$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}-\frac{12}{(x-4).(x+2)}=0$$

$$\frac{(3x+4)}{(x+2)}\cdot\frac{(x-4)}{(x-4)}-\frac{(3x-5)}{(x-4)}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)}-\frac{12}{(x-4).(x+2)}=0$$

$$\frac{(3x+4).(x-4)-(3x-5).(x+2)-12}{(x-4).(x+2)}=0$$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación, obtendremos la forma final:

$$\frac{3x^2 + 4x - 12x - 16 - 3x^2 + 5x - 6x + 10 - 12}{(x-4).(x+2)} = 0$$

$$\frac{-9x - 18}{(x-4).(x+2)} = 0$$

El valor que hace cero a esta ecuación es:

$$-9x - 18 = 0$$

$$-18 = 9x$$

$$-\frac{18}{9} = x$$

$$x = -2$$

La solución de esta ecuación coincide con una de las restricciones, por lo cual este problema no tiene respuesta definida en los reales.

Como resumen de esta parte, se recomienda seguir los siguientes pasos:

-Igualar toda ecuación a cero utilizando las reglas de despeje que vimos.

-Identificar las restricciones si las hubiera (valores que no puede tomar la variable).

-Calcular las soluciones (raíces) y verificar que no coincidan con las restricciones.

Resolución de ecuaciones: método de sustitución

En algunas ocasiones, deberemos resolver ecuaciones de un orden mayor a 2. Como, por ejemplo:

$$-x^4 + 5x^2 - 6 = 0$$

Esta ecuación es de grado 4, por lo cual existen cuatro soluciones que satisfacen la igualdad a cero. Sucede que únicamente sabemos, por ahora, resolver polinomios de grado dos con la fórmula resolvente. El **método de sustitución** es una estrategia con la cual podemos bajar el orden de un polinomio hasta hacerlo de grado dos y poder resolverlo vía la fórmula resolvente. En el ejemplo:

$$\mathbf{-x^4 + 5x^2 - 6 = 0}$$

Se inventa deliberadamente una nueva variable llamada z y se le asigna un valor que convenga para bajar dos grados el orden del polinomio.

$$\mathbf{z = x^2}$$

Entonces reemplazo las x de la ecuación original por la nueva variable z, respetando su identidad.

$$\boldsymbol{-x^4 + 5x^2 - 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{-(\mathbf{x}^2)^2 + 5x^2 - 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{-z^2 + 5z - 6 = 0}$$

Se procede, entonces, a resolver el problema hallando los dos valores de z que resuelven este polinomio. Estos valores son: $z_1 = 3\ y\ z_2 = 2$. Sucede que el polinomio original del problema se encuentra con la variable **x** y debemos darle la respuesta en x (no en z). Por lo tanto, hay que volver a cambiar la variable ahora que sabemos los valores de z que resuelven el polinomio sustituido.

Empecemos con el valor $z_1 = 3$

$$\mathrm{z_1 = 3 \ \ y \ \ z = x^2 \text{ por lo tanto:}}$$

$$3 = \mathrm{x^2}$$

Para poder deshacernos de una potencia, hacemos uso de la única herramienta que nos permite resolver una igualdad, aplicar la misma operación matemática en ambos lados del igual. En este caso, para poder deshacernos del cuadrado, aplicaremos una raíz cuadrada en ambos lados:

$$\mathbf{3 = x^2}$$

$$\mathbf{\sqrt{3} = \sqrt{x^2}}$$

$$\mathbf{\pm\sqrt{3} = x}$$

Interpretemos qué quiere decir que la respuesta sea x=±√3. Si observamos la ecuación $x^2 = 3$, vemos que si reemplazamos x por +√3 o por -√3, en ambos casos la igualdad dará 3. Esto ocurre cuando despejamos un cuadrado aplicando una raíz cuadrada, por más que obtengamos un valor de x, **es importante recordar la ecuación original y saber a partir de ese momento de la resolución, admitirá dos soluciones.** Ambas soluciones resuelven la ecuación. Por lo tanto, sabemos que $x_1 = \sqrt{3}\ y\ x_2 = -\sqrt{3}$.

Los mismo sucede con $z_2 = 2$:

$$\mathbf{2 = x^2}$$

$$\mathbf{\sqrt{2} = \sqrt{x^2}}$$

$$\mathbf{\pm\sqrt{2} = x}$$

Por las mismas razones que el caso anterior, existen dos soluciones para esta igualdad que son $x_3 = \sqrt{2}\ y\ x_4 = -\sqrt{2}$.

Así, de manera conjunta, hallamos las cuatro soluciones de la ecuación de grado 4:

$$\mathbf{-x^4 + 5x^2 - 6 = 0}$$

Que son: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$. Puede verificar que las cuatro satisfacen la igualdad.

Observá el siguiente ejemplo:

$$(x+\ 5)^2 +\ 8.(x+\ 5) + 16 =\ 0$$

Si se extiende el binomio cuadrado y se distribuye el segundo término, encontrarás que este polinomio es de grado 2, es decir, tiene dos soluciones. Usaremos **el método de sustitución** para esta situación.

$$\mathbf{(x+\ 5)^2 +\ 8.(x+\ 5) + 16 =\ 0}$$

Se Inventará una nueva variable llamada u a conveniencia. Viendo que se repite x+5, se hará lo siguiente:

$$\mathrm{u} = (\mathrm{x}+5)$$

$$\mathrm{u}^2 +\ 8.\mathrm{u} + 16 =\ 0$$

Al resolver el polinomio grado dos para la variable u, se puede ver que tiene dos respuestas iguales:

$$\mathbf{u_1 = -4 \ y \ u_2 = -4}$$

Por lo tanto, procederá a volver a la variable **x**:

$$\mathbf{u_1 = -4 = (x+5)}$$
$$\mathbf{-4-5 = x}$$
$$\mathbf{x = -9}$$

$$\mathbf{u_2 = -4 = (x+5)}$$
$$\mathbf{-4-5 = x}$$
$$\mathbf{x = -9}$$

Por lo tanto, la ecuación: $(x+\ 5)^2 +\ 8.(x+\ 5) + 16 = 0$, tiene 2 soluciones y son: $x_1 = -9$; $x_2 = -9$.

Inecuaciones (o desigualdades) e intervalos

En este tipo de situaciones problemáticas, la igualdad será reemplazada por una desigualdad (> o <). Estos símbolos aparecieron en la Unidad 1 de este cuadernillo. Al aparecer una desigualdad, la solución al problema no será un número, sino un intervalo sobre la recta de los reales. Esto podemos verlo en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:

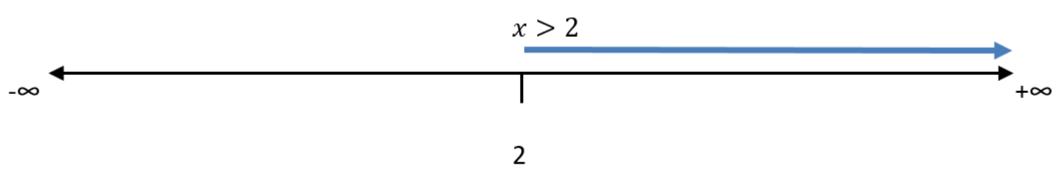
Un problema con desigualdades aparece escrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{A = \{x \in R \,/\, x > 2\}}$$

Esto debe leerse de la siguiente manera: se pide un intervalo A de valores representados por la variable **x** que pertenece (∈) a los reales, tal que (representado por la barra que abre a la condición presentada como una desigualdad) **x** sea mayor a 2.

Lo primero por identificar es en qué conjunto de números se halla la variable por analizar. En este caso, la respuesta será un intervalo de los números reales (todos los números que se hallan definidos por la desigualdad mostrada).

Seguidamente, se debe analizar la desigualdad y graficarla sobre la recta de los reales:



La flecha azul representa todos los valores reales de **x** que cumplen con la desigualdad x>2, todos los valores de **x** mayores a 2 sin incluir al 2. El símbolo > y < delimita un intervalo de números que se acercan infinitamente al valor, pero nunca llegan a ser ese, es decir, el valor límite no estará incluido en el intervalo respuesta.

Por lo tanto, la respuesta se expresa de la siguiente manera:

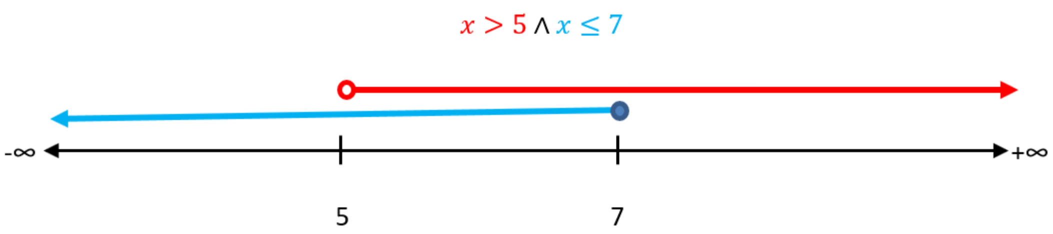
A=(2;+∞)

Esta es la nomenclatura de un intervalo. El paréntesis al lado de 2 indica que la respuesta se acerca infinitamente a 2, pero no lo incluye. El paréntesis al lado del símbolo infinito positivo (+∞) indica que no es un número definido.

<u>Ejemplo 2:</u>

$$\mathbf{B = \{x \in R \,/\, x > 5 \wedge x \leq 7\}}$$

Este intervalo se lee de la siguiente manera: se pide un intervalo B de valores representados por la variable **x** que pertenece (∈) a los reales con tal de que se cumplan dos condiciones (el símbolo ∈ representa la intersección entre las dos condiciones que se presentan y limita los resultados que cumplan las dos condiciones), valores de **x** que sean mayores a 5 (x>5) y valores de **x** que sean menores o iguales a 7 (x≤7). Aquí aparece otro tipo de desigualdad representada por los símbolos ≤y ≥ que establecen límites que incluyen al valor indicado. Si representamos ambas condiciones sobre la resta de los reales, quedaría de la siguiente manera:



Cada condición está representada sobre la recta de los reales con un color. El círculo blanco indica que el valor **no está incluido** en ese intervalo (ya que usa el símbolo x mayor (>) a 5) y el círculo relleno indica que el valor **sí está incluido** en el intervalo (porque usa el símbolo x menor o igual (≤) a 7).

Observá qué valores de **x** sobre la recta de los reales cumplen con ambas condiciones. Son todos los valores entre 5 y 7, no incluyendo al 5 y sí incluyendo al 7. Este intervalo se representa de la siguiente manera:

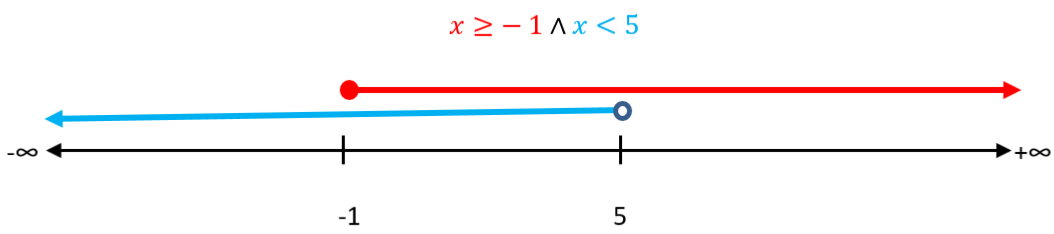
B=(5;7]

El paréntesis al lado del 5 indica que ese número límite **no está incluido** en el intervalo y el corchete al lado del 7 representa que ese número límite **sí está incluido** en el intervalo.

Ejemplo 3:

$$\boldsymbol{C = \{x \in N / x \geq -1 \quad \wedge \ x < 5\}}$$

En este caso, el intervalo o conjunto de valores C está integrado por valores de **x** que pertenecen al conjunto de los números naturales (N) (ver Unidad 1). Nuevamente, se dan dos condiciones que deben cumplirse para formar parte de la respuesta. Graficaré ambas condiciones sobre la recta de los reales.



En este caso, el intervalo de los reales en el que se encuentra la respuesta es [-1;5). Pero sucede que la consigna no nos pide los valores de **x** reales entre esos límites, sino los números naturales que se encuentran en ese intervalo. Recordamos que los números naturales son números enteros positivos mayores o iguales a 1. Por lo tanto, la respuesta se expresa de la siguiente manera:

C={1,2,3,4}

Las llaves indican que lo que se encuentra entre ellas son valores discretos (números aislados). Observá que el 5 no se encuentra en el intervalo debido a que el símbolo (<) no lo incluye.

Ejemplo 4:

$$D = \left\{x \in R \ / \ 0 \leq \frac{1}{2}x + 3 < 5\right\}$$

Esta notación es parecida a la intersección que vimos antes. La expresión implica que el intervalo respuesta debe cumplir con estas dos condiciones:

$$0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \quad y \quad \frac{1}{2}x + 3 < 5$$

En estos casos, el valor de la variable no se encuentra despejada como para graficarla directamente sobre la recta de los reales, así que debemos despejarla.

El despeje de variables en una inecuación o desigualdad sigue las mismas reglas que una ecuación (igualdad) excepto que **el símbolo de desigualdad debe cambiarse si ambos lados de la desigualdad se multiplican por -1**. Por ejemplo, se despeja x en la siguiente desigualdad explicitando que se hacen las mismas operaciones en ambos lados de la desigualdad para mantener la identidad:

$$3x - 5 > 4x - 1$$

$$3x - 5 + 5 > 4x - 1 + 5$$

$$3x > 4x + 4$$

$$3x - 4x > 4x + 4 - 4x$$

$$-x > 4$$

$$-x.(-1) > 4.(-1)$$

$$x < -4$$

Observá que la desigualdad se mantiene siempre que sume, reste o multiplique o divida por números positivos. En el caso de multiplicar o dividir por un número negativo (pasar el signo negativo) el símbolo debe invertirse. Particularmente, recomiendo que en el despeje de desigualdades se intente dejar la variable a despejar siempre positiva para evitar posibles errores.

Volviendo al ejemplo 4, se procede a despejar la **x** para ambas condiciones:

$$0 \le \frac{1}{2}x + 3$$

$$-3 \le \frac{1}{2}x$$

$$2.(-3) \le x$$

$$-6 \le x$$

$$\frac{1}{2}x + 3 < 5$$

$$\frac{1}{2}x < 5 - 3$$

$$x < 2 * 2$$

$$x < 4$$

Habiendo despejado las variables, las condiciones del intervalo resultaron ser las siguientes:

$$-6 \le x \quad \wedge \quad x < 4$$

Escrito en palabras, las condiciones son que **x** sea mayor o igual a -6 y que **x** sea menor a 4. El intervalo donde ambas condiciones se cumplen es:

[-**6**;**4**)

Ejemplo 5:

En este ejemplo, el despeje resulta más complejo:

$$E = \{x \in R \;/\; \frac{3x - 5}{2} - \frac{x + 1}{3} > 1\}$$

Para resolver este ejemplo, despejaré x en la desigualdad uniendo los términos generando un denominador común:

$$\frac{3x - 5}{2} - \frac{x + 1}{3} > 1$$

$$\frac{(3x - 5)}{2} . \frac{3}{3} - \frac{(x + 1)}{3} . \frac{2}{2} > 1$$

$$\frac{(3x - 5). 3 - (x + 1). 2}{6} > 1$$

$$\frac{9x - 15 - 2x - 2}{6} > 1$$

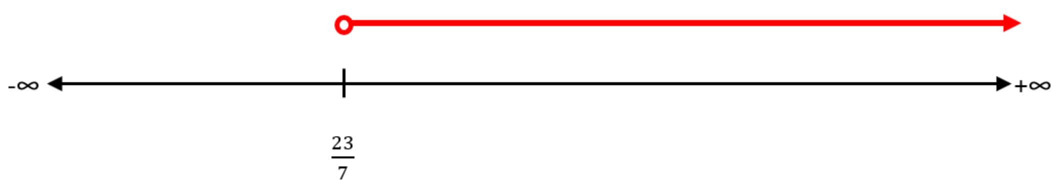
$$\frac{7x - 17}{6} > 1$$

$$7x - 17 > 6$$

$$7x > 6 + 17$$

$$x > \frac{23}{7}$$

Si graficamos sobre la recta de los reales, obtendremos:



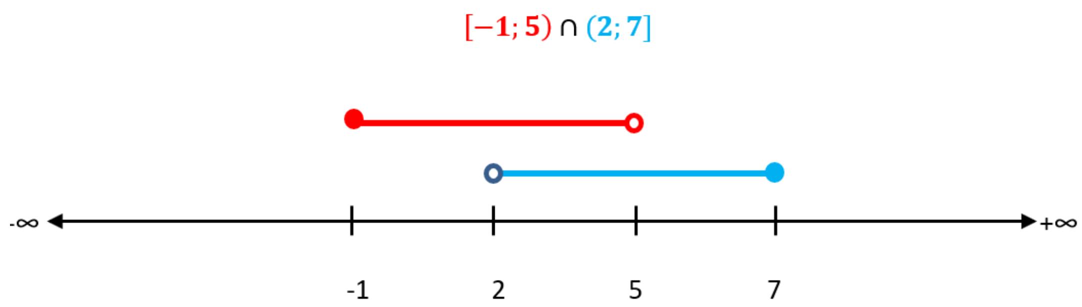
La respuesta del problema será: $(\frac{23}{7}; +\infty)$

Ejemplo 6:

En este ejemplo vemos otro tipo de notación de intervalos:

$$[-1; 5) \cap (2; 7]$$

El símbolo entre los intervalos representa la intersección y los valores de **x** sobre la recta de los Reales en los cuales se cumplen ambas condiciones. Si graficamos sobre la recta vemos:



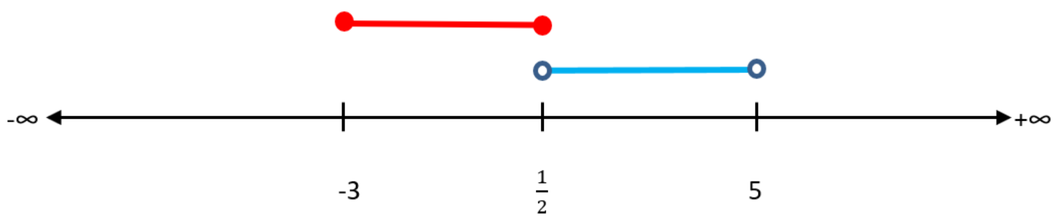
Observá que el intervalo en el cual conviven números de cada condición es (2;5).

Ejemplo 7:

$$\left[-3; \frac{1}{2}\right] \cap \left(\frac{1}{2}; 5\right)$$

Nuevamente es una intersección. Graficamos sobre la recta de los Reales y vemos lo que sucede:

$$\left[-3;\frac{1}{2}\right] \cap \left(\frac{1}{2};5\right)$$



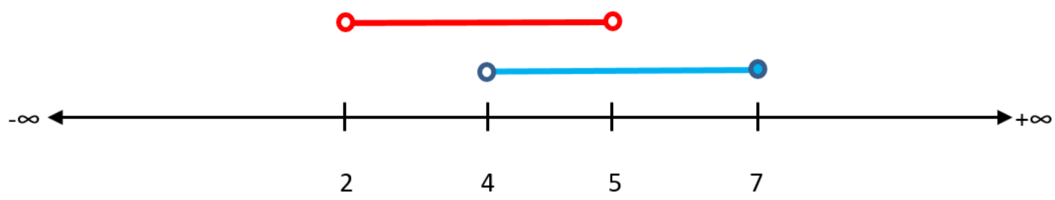
Observá que no hay ningún punto que se repita en ambos intervalos. Por lo cual, la respuesta a este problema es VACÍO (Ø).

<u>Ejemplo 8:</u>

En este ejemplo aparece un nuevo símbolo llamado unión (U). Este vínculo simboliza que el intervalo respuesta contiene al menos un punto de cada intervalo que lo condiciona.

$$(\mathbf{2};\mathbf{5})\ \mathbf{U}\ (\mathbf{4};\mathbf{7}]$$

$$(\mathbf{2};\mathbf{5})\ \mathbf{U}\ (\mathbf{4};\mathbf{7}]$$



La unión, entonces, considera que el intervalo respuesta debe tener por lo menos un valor de alguno de los intervalos participantes. Por lo tanto, en este caso, el intervalo respuesta es:

(2;7]

Resolución de problemas

En esta sección veremos diferentes situaciones problemáticas y las estrategias recomendadas para resolverlas.

Cuando los polinomios de grado 2 tienen dos soluciones iguales

A veces deberás resolver problemas en los cuales las incógnitas se encuentran dentro de los coeficientes de un polinomio de grado 2, teniendo como consigna que dicho polinomio tiene dos soluciones iguales. Para resolver este tipo de problemas, recordemos cómo se obtienen las soluciones o raíces de un polinomio de grado 2. Previamente vimos que la estrategia general para hallarlas es la siguiente:

$$\mathbf{a * x^2 + b * x + c = 0}$$

Este es un polinomio de grado 2 para la variable **x** con coeficientes **a**, **b** y **c**. Para hallar las raíces debemos calcularlas mediante la fórmula de resolvente:

$$\mathbf{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}}$$

En la unidad 2 vimos que la parte de la fórmula $\mathbf{b^2 - 4 * a * c}$ se conoce como **discriminante** y es conocida así, ya que el valor de la raíz cuadrada de la **discriminante** sumada otorga una de las respuestas y la restada otorga otra de las repuestas. La problemática de esta sección aparece cuando el **discriminante resulta ser cero. Cuando el discriminante vale cero, el polinomio tiene dos respuestas iguales.**

<u>Ejemplo 1:</u>

$$\mathbf{x^2 + 12x + 36 = 0}$$

Coeficientes: a=1, b=12, c=36

$$\frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 * 1 * 36}}{2 * 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{12+0}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{12-0}{2} = 6$$

Ejemplo 2:

Sabiendo esto, veamos cómo sería resolver un problema para hallar el valor de k que pertenece a los R, excepto el cero para que el polinomio de grado dos indicado a continuación **tenga dos soluciones iguales**:

$$\mathbf{3x^2 - a.k.x + 10.k = 0}$$

Visto este polinomio, vemos que los coeficientes son:

- a= 3
- b= $-a.k$
- c= 10.k

Si necesitamos que el polinomio tenga dos soluciones iguales, el determinante debe ser cero. Entonces:

$$\mathbf{b^2 - 4 * a * c = 0}$$

Reemplazamos los coeficientes en la ecuación de determinante igualada a cero y despejamos el valor de k que cumpla la igualdad.

$$\mathbf{(-a.k)^2 - 4 * 3 * 10.k = 0}$$

$$\mathbf{a^2.k^2 - 120k = 0}$$

$$\mathbf{k.(a^2.k - 120) = 0}$$

Sacamos factor común k y vemos que este problema tiene dos soluciones. Para cumplir con la igualdad a cero, k=0 sería una respuesta válida. Pero si leemos la consigna, vemos que nos la invalida. Por lo tanto, debemos calcular el otro valor de k que haga que el factor $(a^2.k-120)$ sea igual a cero:

$$\mathbf{a^2.k-120=0}$$

$$\mathbf{a^2.k=120}$$

$$\mathbf{k=\frac{120}{a^2}}$$

De esta manera, calculamos el valor de k que hace que el polinomio original tenga dos respuestas iguales. A continuación, reemplazaré k por este valor calculado y obtendré cuál es esa solución repetida.

$$\mathbf{3x^2-a.k.x+10.k=0}$$

$$\mathbf{3x^2-a.\frac{120}{a^2}.x+10.\frac{120}{a^2}=0}$$

$$\mathbf{3x^2-\frac{120}{a}.x+\frac{1200}{a^2}=0}$$

Los coeficientes son:

- a= 3
- b= $-\frac{120}{a}$
- c= $\frac{1200}{a^2}$

La fórmula resolvente se armaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{\frac{-(-\frac{120}{a})\pm\sqrt{(-\frac{120}{a})^2-4*3*\frac{1200}{a^2}}}{2*3}=\frac{\frac{120}{a}\pm\sqrt{\frac{14400}{a^2}-\frac{14400}{a^2}}}{6}=\frac{\frac{120}{a}\pm\sqrt{0}}{6}}$$

$$\mathbf{x_1=\frac{\frac{120}{a}+0}{6}=\frac{20}{a}\qquad x_2=\frac{\frac{120}{a}-0}{6}=\frac{20}{a}}$$

Así obtuvimos el valor de x que cumple la igualdad de la ecuación original con $\mathbf{k = \frac{120}{a^2}}$.

Porcentajes

El porcentaje es una forma de referirse a una proporción tomando como referencia el número 100. Por ejemplo, si de una cierta cantidad A, 28 resulta ser el 32 %. ¿Cuánto resulta ser A?

Si bien estos problemas pueden resolverse usando regla de tres simple, recomendamos fuertemente entender el porcentaje como un factor sobre cien. En este caso:

$$\mathbf{A.\frac{32}{100} = 28}$$

$$\mathbf{A.\,0,32 = 28}$$

$$\mathbf{A = \frac{28}{0,32} = 87,5}$$

En rojo puede ver el factor al cual me refiero. Si a un número inicial lo multiplico por un factor $\frac{x}{100}$, el resultado representará el x % del número inicial.

<u>Ejemplo 1</u>

Trabajás en la caja de una casa de electrodomésticos. Debés cobrar a un cliente y el precio de lista del producto en venta es $ 2100. ¿Por cuál número se debe multiplicar el precio de lista para cobrarle al cliente con:

a) Un 30 % de descuento

Si debemos hacerle un descuento del 30 %, debemos cobrarle lo que representa el 70 % del precio de lista del producto. Por lo cual, el factor que debemos usar para obtener el precio final debe ser $\frac{70}{100} = 0,7$.

$ 2100 * 0,7 = $ 1470 (precio con 30 % de descuento)

b) Un 5 % de descuento

Si debemos hacerle un 5 % de descuento, debemos cobrarle lo que representa el 95 % del precio del producto. El factor resultará ser $\frac{95}{100} = 0{,}95$.

$ 2100 * 0,95 = $ 1995 (precio con 5 % de descuento)

c) Un 10 % de recargo

En este caso debemos cobrarle más caro que precio de lista, así que seguramente será un factor superior a 1. Para hacerle un recargo de 10%, debemos cobrarle el 110% del valor del precio de lista $\frac{110}{100} = 1{,}1$.

$ 2100 * 1,1 = $ 2310 (precio con 10 % de recargo)

d) Un 25 % de recargo

Nuevamente debemos cobrar más caro que el precio de lista. Debemos cobrarle un 125 %. El factor por el que debemos multiplicar el precio será $\frac{125}{100} = 1{,}25$

$ 2100 * 1,25 = $ 2625 (precio con 25 % de recargo)

Ejemplo 2:

Otro ejemplo de problema con porcentajes es el siguiente: una familia contrató una agencia de turismo para sus vacaciones. La misma le exigió un 15 % del total al momento de hacer la reserva, el 25 % al momento de viajar y el resto en 10 cuotas de $ 18 900. ¿Cuál es el costo de total de las vacaciones?

Según deducimos del problema, el 60 % del viaje tiene un costo de 10*$ 18 900, con lo cual podemos calcular el costo total:

$$\mathbf{T} * \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{100}} = \mathbf{T} * \mathbf{0,6} = \$\mathbf{189000}$$

$$\mathbf{T} * \mathbf{0,6} = \$\mathbf{189000}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\$\mathbf{189000}}{\mathbf{0,6}} = \$\mathbf{315000}$$

Problemas que incluyen geometría básica

Para aprobar el curso de ingreso se espera que sepa mínimamente definiciones de geometría básica como:

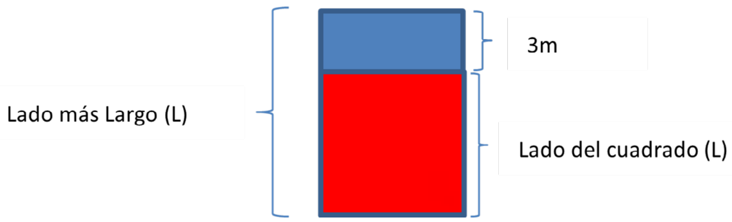
Rectángulo

El perímetro de un rectángulo es la suma de sus lados. El área de un rectángulo es la base multiplicando la altura. Un cuadrado tiene todos sus lados iguales.

Ejemplo:

Se necesita saber el área y el perímetro de una superficie para poder cubrirla con césped sintético y cercarla para hacer canchas de fútbol. Sabemos que el área es rectangular y disminuimos su lado más largo en 3 m y obtendremos un cuadrado de área igual a $81\ m^2$. Con estos datos, intentá calcular el área y el perímetro del rectángulo original.

El primer paso de todo problema es realizar un dibujo que nos ayude a comprender la pregunta. En este caso:



Si el área del cuadrado resultante de haber reducido la altura en 3 m es 81 m2, podemos calcular el lado (L) del cuadrado.

$$\mathbf{L * L = L^2 = 81\ m^2}$$

Para poder despejar L de la igualdad, haremos la misma operación de cada lado del igual que nos permita reducir el orden de la ecuación. Aplicaremos raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\mathbf{L^2 = 81\ m^2}$$

$$\mathbf{\sqrt{L^2} = \sqrt{81\ m^2}}$$

$$\mathbf{L = 9\ m}$$

Si el lado del cuadrado (L) es 9 m, lado más largo del rectángulo original es 12 m. Si vemos el dibujo, podemos concluir que la base del rectángulo es igual al lado del cuadrado (L) 9 m. Por lo tanto:

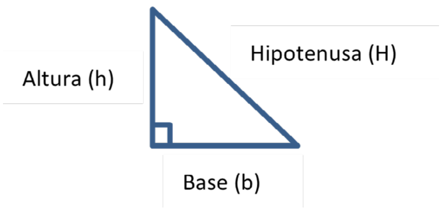
Perímetro del rectángulo original= $\mathbf{2 * base + 2 * altura = 2 * 9m + 2 * 12m = 42\ m}$

Área del rectángulo original= $\mathbf{base * altura = 9m * 12m = 108\ m^2}$

Por lo tanto, debemos cubrir una superficie de 108 m2 con césped sintético y comprar 42m de cercas para rodearlo.

Triángulo rectángulo

Es un triángulo que tiene uno de sus ángulos internos igual a 90°. Los lados asociados al ángulo recto (90°) se llaman catetos. La hipotenusa es el lado más largo. Si bien veremos este tema en trigonometría, a esta altura es importante saber:



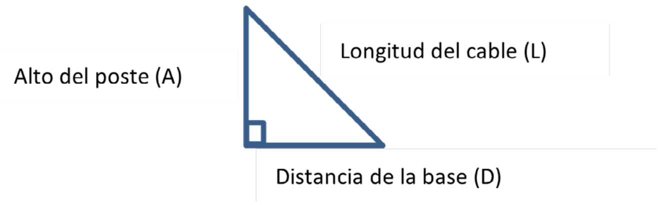
Perímetro= h + b + H

Área= $\frac{b*h}{2}$

Teorema de Pitágoras= $\mathbf{H^2 = b^2 + h^2}$ (el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos).

El teorema demostrado por Pitágoras nos permite en toda realidad ver cómo en un triángulo rectángulo, si tenemos el valor de dos lados, podemos hallar el valor del tercer lado.

Por ejemplo, necesitamos colocar un cable desde lo alto de un poste de 3 metros de altura hasta un punto situado a 4 metros de la base, a nivel del piso. Debemos saber cuántos metros de cable comprar según lo que necesitamos. Analizaremos el problema y haremos una analogía con un triángulo rectángulo:



Se puede observar cómo el problema se modela con un triángulo rectángulo, donde A y D son catetos y L es la hipotenusa. Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para poder resolverlo. Usando las letras del problema:

$$\mathbf{L^2 = A^2 + D^2}$$

$$\mathbf{L^2 = (3m)^2 + (4m)^2}$$

$$\mathbf{L^2 = 9m^2 + 16m^2 = 25m^2}$$

$$\mathbf{L^2 = 25m^2}$$

Para resolver el problema, aplicamos raíz cuadrada en ambos lados del igual. Lo cual nos dará dos respuestas válidas, pero solo nos quedaremos con la respuesta positiva, ya que la longitud del cable es una medida real y positiva.

$$\mathbf{\sqrt{L^2} = \sqrt{25m^2}}$$

$$\mathbf{L = +5\ m}$$

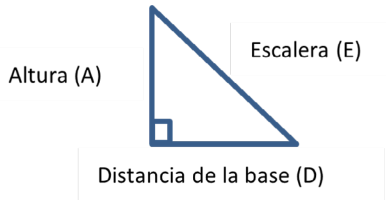
Por lo tanto, necesitamos comprar 5 metros de cable.

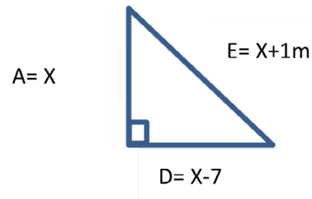
Los triángulos rectángulos representan un desafío para nuestro cerebro y nuestra capacidad de abstracción matemática, ya que nos obligan a vincular tres variables relacionadas, por ahora, por el teorema de Pitágoras. Más adelante, cuando veamos relaciones trigonométricas tendremos más herramientas para solucionarlos.

Ejemplo:

Tenemos una escalera inclinada, apoyada contra una pared a una cierta distancia de la base. Esta posición es óptima para que la escalera no deslice. Sabemos que las medidas de la escalera inclinada y la altura a la que llega son números naturales consecutivos (en metros). La distancia a la que se ubica la base de la escalera desde la base de la pared es 7m menos que la altura a la que llega la escalera. Calcular cuánto mide la escalera.

Modelaremos este problema con un triángulo rectángulo:





A= Altura a la que llega la escalera (cateto mayor) = X

D= Distancia óptima de posicionamiento de la base de la escalera (cateto) menor= X-7m

E= Escalera (hipotenusa)= X+1m

Si leemos atentamente el enunciado, llegamos al diagrama de la derecha. La hipotenusa es el lado más largo. Si A=X y la escalera mide un número natural consecutivo a A (en metros), entonces E=X+1. Si la distancia a la que se ubica la base de la escalera desde la base de la pared es 7m menos que la altura a la que llega la escalera, entonces D = A - 7 = X - 7.

Para resolver el problema debemos vincular de alguna manera los tres lados y despejar X para saber las dimensiones del triángulo. Usaremos el teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{E^2 = A^2 + D^2}$$

$$\mathbf{(x + 1m)^2 = x^2 + (x - 7m)^2}$$

$$\mathbf{x^2 + 2x + 1m = x^2 + x^2 - 14x + 49m^2}$$

$$\mathbf{0 = x^2 - 16x + 48}$$

Las raíces del polinomio son: x_1= 4m y x_2=12m. Debemos verificar si ambas respuestas son adecuadas al problema o solo una. Si probamos que x_1= 4m, las medidas serían:

$$\mathbf{\text{Altura a la que llega la escalera (A)} = X = 4}$$

$$\mathbf{\text{Distancia de la base (D)} = X - 7 = -3}$$

$$\mathbf{\text{Escalera (E)} = X + 1 = 5}$$

Vemos que la distancia de la base resulta en un número negativo, lo cual no tiene sentido al tratarse de una dimensión real. Por **eso la solución x_1= 4m debe descartarse para este problema**. Si probamos que x_1= 12m, las medidas serían:

$$\mathbf{\text{Altura a la que llega la escalera (A)} = X = 12m}$$

$$\mathbf{\text{Distancia de la base (D)} = X - 7m = 12m - 7m = 5m}$$

$$\mathbf{\text{Escalera (E)} = X + 1m = 12m + 1m = 13m}$$

Vemos que obtenemos lados con números enteros positivos, por lo tanto, **nos quedamos con la solución x_2=12 como verdadera**. La medida de la escalera resulta ser 13m.

Unidad 4

Rectas

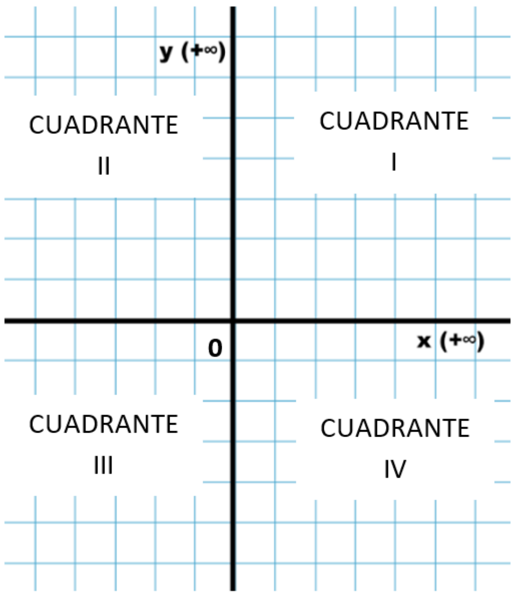
Competencias de la unidad

En esta Unidad trabajarás con el objetivo de consolidar las siguientes competencias desarrolladas en la escuela media, necesarias para encarar ahora el nivel universitario de tu carrera. Lo esperado es que puedas luego de este proceso de aprendizaje:

1-Entender y modelar relaciones entre dos variables en forma de recta en el plano.
2-Construir nuevas rectas y relacionar elementos varios.
3-Relacionar el punto de encuentro entre dos rectas como la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
4-Entender el uso del modelado con rectas en casos simples de la vida real: economía, ingeniería.

Rectas

Las ecuaciones de rectas en el plano son una forma de describir una línea recta en un sistema de coordenadas cartesianas. Un sistema de coordenadas cartesianas está formado por dos rectas perpendiculares (situadas a 90° una de otra) graduadas, a las que llamamos **ejes de coordenadas.** Ambas representan la recta de los reales desde menos infinito a más infinito. Sobre una se ubicarán las variables X, por lo cual se la suele nombrar **eje X** (eje de abscisas) y sobre la otra, generalmente, se la suele nombrar, en este caso, **eje Y** (o eje de ordenadas). Estos dos ejes se cortan en un punto al que se le denomina **origen de coordenadas O**. Así queda determinado un plano con cuatro cuadrantes delimitados por los ejes cartesianos:



Recordá estos cuatro cuadrantes porque será esencial identificarlos más tarde.

La manera más común de escribir una ecuación de recta es usando la forma pendiente-ordenada al origen, que se escribe:

$$y = mx + b$$

donde **m** es la pendiente de la recta y b es la intersección en el eje **y** (u ordenada al origen). A X se la llama variable independiente, ya que puede tomar todos los valores de los reales libremente. A **Y** se la llama variable dependiente porque el valor que tome dependerá del valor de **X** en determinada posición. Para cada valor de **x** existe un valor **y** asociado, lo cual forma un **par ordenado** capaz de ser ubicado sobre el plano, de forma **(x;y)**.

Pares ordenados y sistema de ejes cartesianos

Un **par ordenado (x;y)** puede ser ubicado sobre un plano formado por dos ejes perpendiculares llamados **x** e **y**, ya que representan la ubicación de dicha variable. Todos los pares ordenados tienen su representación cartesiana escribiéndose de esta manera **(x;y)**:

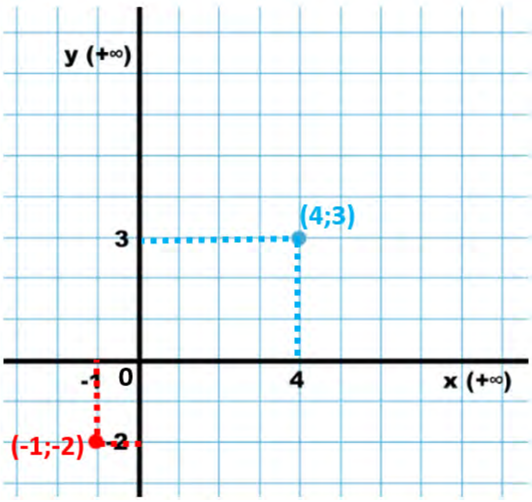
- Paréntesis.
- coordenada en x.
- punto y coma.
- coordenada en y (que depende de la coordenada en x).
- paréntesis.

Por ejemplo, tenemos los pares ordenados y vamos a graficarlos sobre un sistema de ejes cartesianos: (coordenada en eje **X**; coordenada en eje **Y**).

Ejemplo 1:

C: (-1;-2)

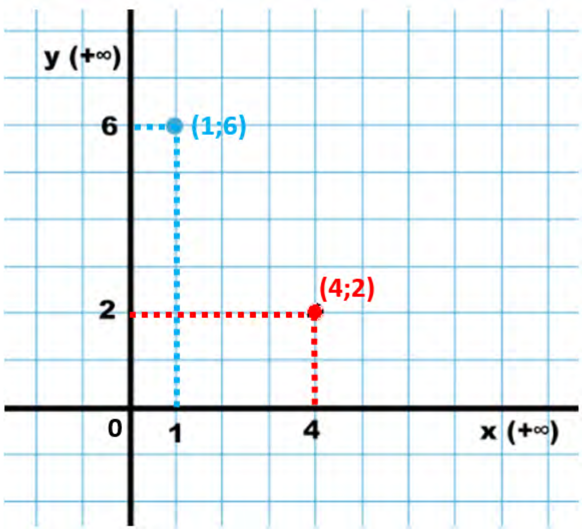
D: (4;3)



Ejemplo 2:

A: (1;6)

B: (4;2)



Pendiente

Uno de los objetivos de esta unidad es hallar las ecuaciones para rectas que se encuentren definidas en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté **inclinada** la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de **pendiente**.

Primero necesitamos una forma de medir la inclinación de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el **corrimiento** como la distancia que nos movemos a la derecha y la **elevación** como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La pendiente de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

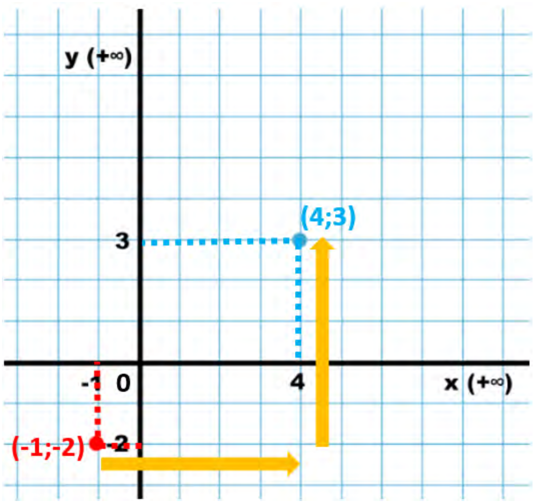
$$\textbf{Pendiente} = \frac{\textbf{Elevación (cuánto cambia la variable Y)}}{\textbf{Corrimiento (cuánto cambia la variable X)}}$$

En la vida real, las pendientes se encuentran en el diseño de puentes, techos, calles. Siempre representa cuánto cambia la variable **y** por cada cambio unitario en **x**.

Ejemplo 1:

C: (-1;-2)

D: (4;3)



En este caso, vemos que cuando en **x** avanza 5 unidades (corrimiento=+5), en **y**, sube 5 unidades (Elevación=+5), por lo cual:

$$\textbf{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+5}{+5} = 1$$

La letra griega Δ representa la **variación**. La pendiente es entonces un cociente, una relación entre cómo varía la variable **y** a medida que **x** avanza. En el ejemplo anterior, la pendiente es **positiva**; cuando avanza una unidad en **x**, sube una unidad en **y**.

Otra manera de calcularla es restando las coordenadas en **y** de cada punto y dividirlas por la resta de las coordenadas **x** de esos mismos números. Observá:

C: (-1;-2) De aquí obtendremos las coordenadas: $\mathbf{x_c = -1\ ;\ y_c = -2}$

D: (4;3) De aquí obtendremos las coordenadas: $\mathbf{x_d = 4\ ;\ y_d = 3}$

$$\mathbf{Pendiente} = \frac{y_c - y_d}{x_c - x_d} = \frac{(-2) - 3}{-1 - 4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

También vale la resta opuesta:

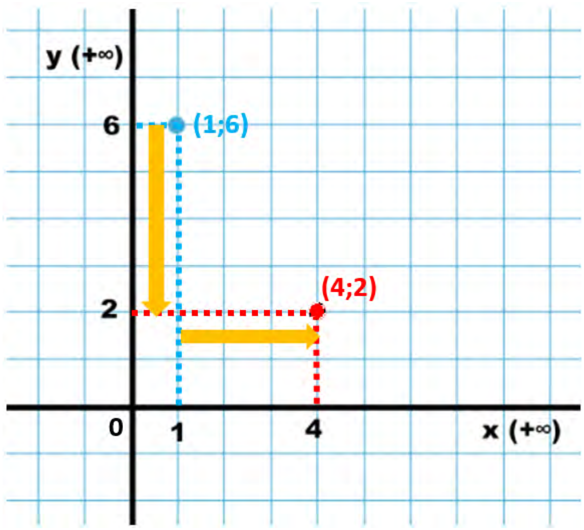
$$\mathbf{Pendiente} = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} = \frac{3 - (-2)}{4 - (-1)} = \frac{5}{5} = 1$$

No sirve cruzar las coordenadas como $y_d - y_c$ **con** $x_c - x_d$, ya que la pendiente no será representativa de la recta. Se recomienda mantenerse con las estrategias explicadas arriba.

<u>Ejemplo 2:</u>

A: (1;6)

B: (4;2)



En este caso, vemos que cuando en **x** avanza 3 unidades (corrimiento=+3), en **y**, baja 4 unidades (Elevación=-4), por lo cual:

$$\textbf{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{+3} = -\frac{4}{3}$$

En este caso, la pendiente es **negativa**, ya que, a medida que **x** crece, el valor de **y** disminuye. Nuevamente, otra manera de calcularla es restando las coordenadas en **y** de cada punto y dividirlas por la resta de las coordenadas **x** de esos mismos números. Observá:

A: (1;6) De aquí obtendremos las coordenadas: $x_a = 1\,;\ y_a = 6$

B: (4;2) De aquí obtendremos las coordenadas: $x_b = 4\,;\ y_b = 2$

$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{6-2}{1-4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

También vale la resta opuesta:

$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{2-6}{4-1} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Observá que de ambas formas llegamos al mismo resultado.

La ecuación de la recta y la ordenada al origen

La manera más común de escribir la ecuación de una recta es usando la forma pendiente-ordenada al origen, que se escribe:

$$y = mx + b$$

En los ejemplos anteriores, vemos que teniendo dos puntos podemos calcular una pendiente. De esta manera, podemos construir la ecuación de cada recta y calcular su **ordenada al origen**.

Ejemplo 1:

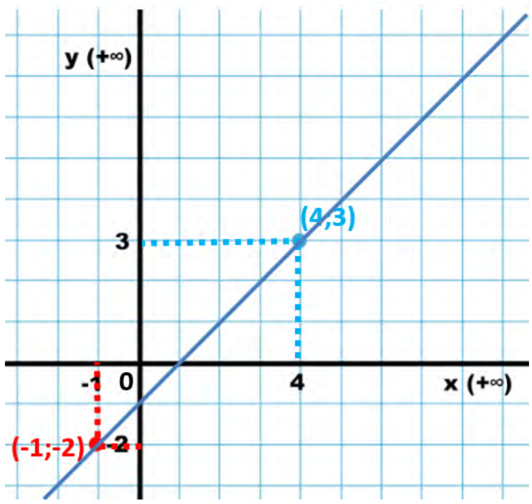
C: (-1;-2)

D: (4;3)

$$\mathbf{Pendiente} = \frac{y_c - y_d}{x_c - x_d} = \frac{(-2) - 3}{-1 - 4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Recta: $y = 1.x + b$

Y la recta puede graficarse con esos dos puntos:



La recta se extiende desde -∞ hasta +∞ de ambos ejes y pasa por los puntos (-1;-2) y (4;3), teniendo una **pendiente positiva** (vemos que la recta aumenta sus valores de **y** a medida que aumentan sus valores de **x**).

Ahora nos queda determinar un término independiente de **x** de la recta: la ordenada al origen **b**.

$$y = 1.x + b$$

Sabemos que el punto (-1;-2) forma parte de la recta, es decir, cuando **x** vale (-1), y vale (-2). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}-2 &= 1.(-1) + b\\ -2 + 1 &= b\\ -1 &= b\end{aligned}$$

También sabemos que el punto (4;3) forma parte de la recta, es decir, cuando “x” vale (+4), y vale (+3). Por lo tanto:

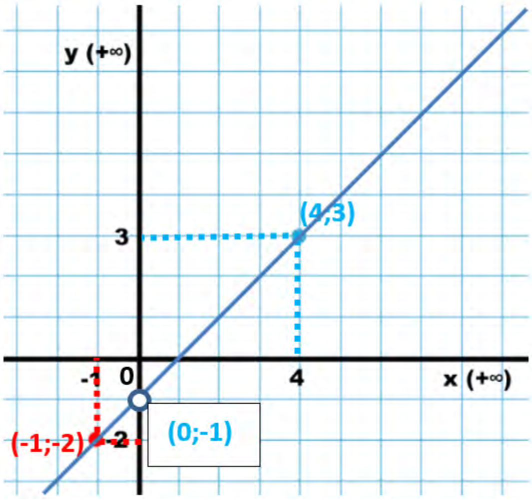
$$\begin{aligned}3 &= 1.4 + b\\ 3 - 4 &= b\\ -1 &= b\end{aligned}$$

Observá que, sin importar con cuál de los puntos pertenecientes a la recta evaluemos la ecuación, obtendremos el mismo valor **b** (ordenada al origen).

Ahora veamos qué significa la **ordenada al origen**. Literalmente quiere decir el valor que toma **y** (ordenada) cuando cruza el eje **y** (es decir, cuando **x** vale cero). En el ejemplo 1 vemos que la ecuación termina siendo:

$$y = 1.x - 1$$

Con la gráfica:



Vemos que la recta cruza el eje de la **y** (ordenadas) en el punto (0,-1). Podemos corroborar esto usando la ecuación de la recta:

$$y = 1.x - 1$$

$$y = 1.0 - 1 = -1$$

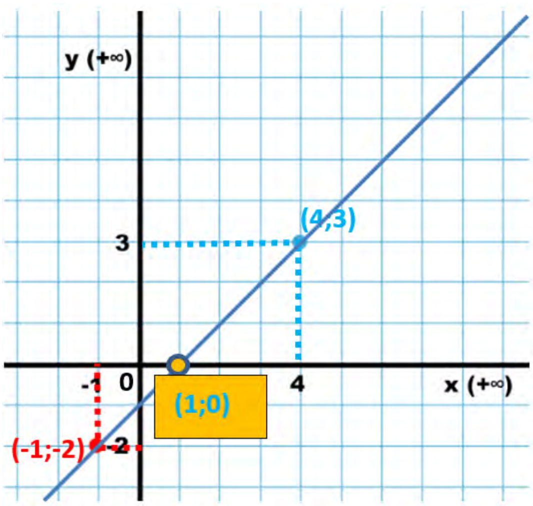
De una manera similar puede obtenerse la **abscisa** al origen, que es el valor que debe tener **x** para que **y** valga cero. En la ecuación de la recta:

$$y = 1.x - 1$$

$$0 = 1.x - 1$$

$$0 + 1 = x$$

Cuando x=1, y=0, la abscisa al origen será el par ordenado (1;0). En el gráfico, aparece claramente:



Vemos que la recta cruza el eje de las abscisas (x) en la coordenada (1;0).

Resolvamos de la misma manera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2:

A: (1;6)

B: (4;2)

$$\textbf{Pendiente} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{6-2}{1-4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

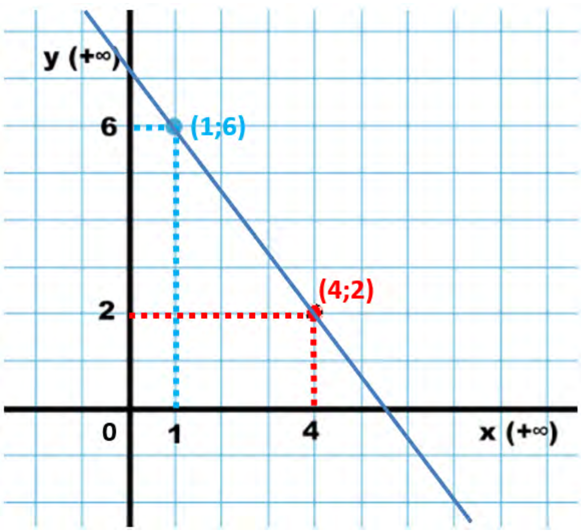
La ecuación de la recta resulta ser: $y = -\frac{4}{3}x + b.$

La recta puede graficarse con los puntos A y B.

Ejemplo 2:

A: (1;6)

B: (4;2)



La recta se extiende desde -∞ hasta +∞ de ambos ejes y pasa por los puntos (1;6) y (4;2), teniendo una **pendiente negativa** (vemos que la recta disminuye sus valores de **y** a medida que aumentan sus valores de **x**). Particularmente, vemos que disminuye 4 unidades en **y** cuando avanza 3 unidades en **x.**

Ahora necesitamos despejar el valor **b** de la ecuación de la recta: $\mathbf{y = -\frac{4}{3}x + b}$; sabiendo que (1;6) es un punto que satisface a esa recta (esto quiere decir que, si reemplazamos ese valor de **x** en la recta, nos da como resultado ese valor de y).

$$y = -\frac{4}{3}x + b$$

$$6 = -\frac{4}{3}.1 + b$$

$$6 + \frac{4}{3} = b$$

$$6.\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = b$$

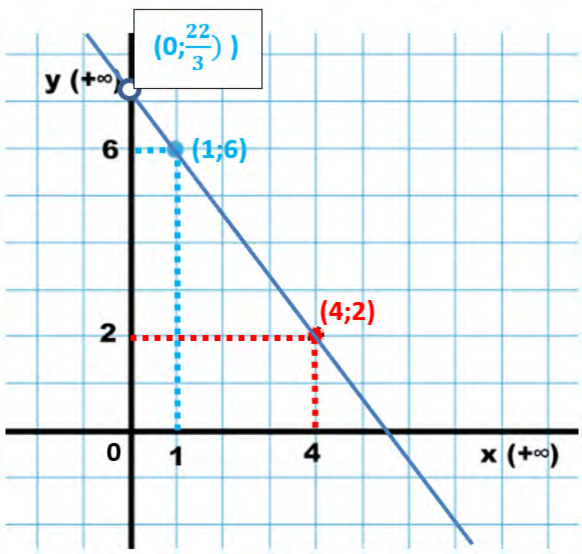
$$b = \frac{18+4}{3} = \frac{22}{3}$$

Si reemplazás el otro punto (4;2), obtenés el mismo valor de b.

La ecuación de la recta resulta ser:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$$

Con la gráfica:

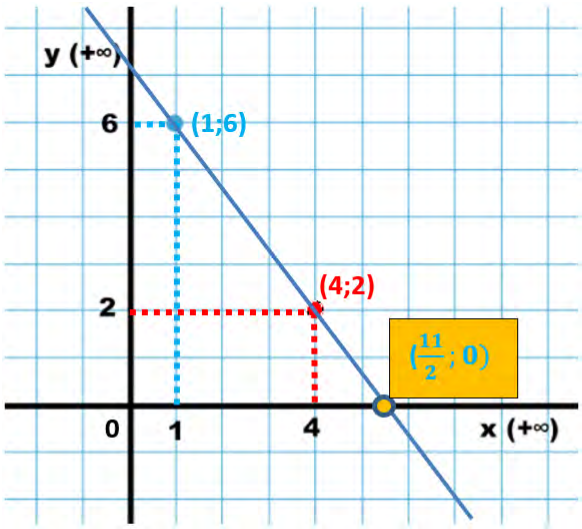


Vemos que la recta cruza el eje de las ordenadas en el punto $(0;\frac{22}{3})$, como calculamos antes.

Ahora calcularemos a la abscisa al origen, es decir, el valor que toma **x** cuando y=0

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$$
$$0 = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}$$
$$\frac{4}{3}x = \frac{22}{3}$$
$$x = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

En la gráfica lo podemos observar claramente:



Ahora que pudimos resolver las ecuaciones de las rectas para ambos ejemplos, intentemos resolver la siguiente situación problemática.

Problema ejemplo 1

Determinar el valor real de **a** para que el punto T=(a;10) pertenezca a la recta que pasa por los puntos A=(1;6) y B=(4;2).

- En el ejemplo 2 fuimos resolviendo la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\mathbf{y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}}$$

- Chequeemos si A=(1;6) pertenece a la recta. Si pertenece, cuando x=1, **y** debe valer 6.

$$\mathbf{y = -\frac{4}{3}.1 + \frac{22}{3} = \frac{18}{3} = 6}$$

Por lo tanto, A= (1;6) pertenece a la recta.

- Chequeemos ahora si B=(4;2) pertenece a la recta. Si pertenece, cuando x=4, **y** debe valer 2.

$$\mathbf{y = -\frac{4}{3}.4 + \frac{22}{3} = \frac{-16+22}{3} = \frac{6}{3} = 2}$$

Por lo tanto, B= (4;2) pertenece a la recta.

Entonces, si el punto T=(a;10) pertenece a la recta, cuando x=a, **y** debe valer 10. Por lo tanto, podremos despejar **a**.

$$\mathbf{10 = -\frac{4}{3}.a + \frac{22}{3}}$$

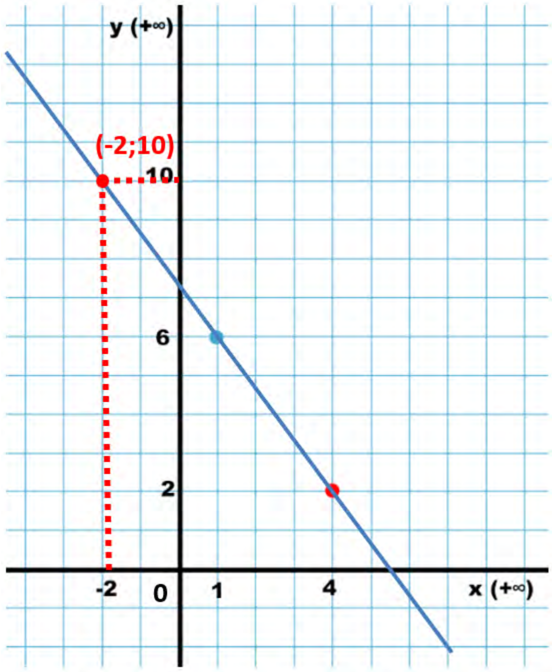
$$\mathbf{\frac{4}{3}.a = \frac{22}{3} - 10}$$

$$\mathbf{\frac{4}{3}.a = \frac{22}{3} - 10.\frac{3}{3}}$$

$$\mathbf{\frac{4}{3}.a = \frac{-8}{3}}$$

$$\mathbf{a = -2}$$

El punto resulta ser T= (-2;10). Chequeemos en la gráfica:



Vemos que la gráfica de la recta verifica nuestros resultados.

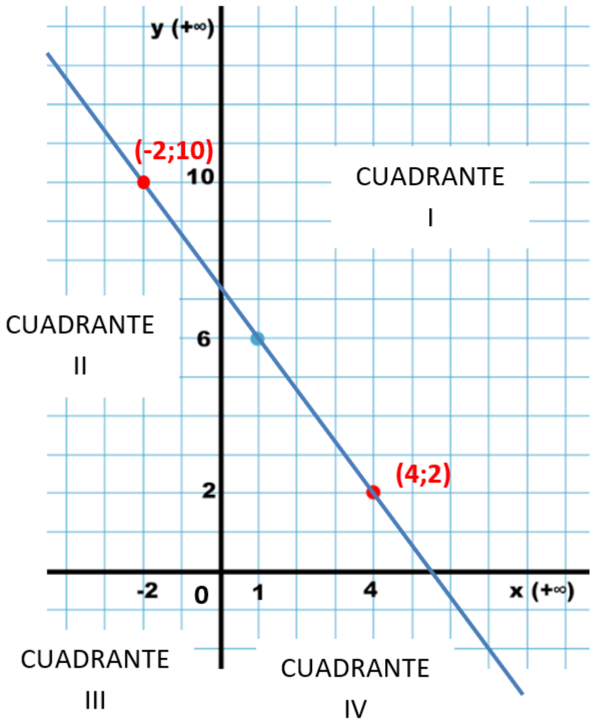
Cuadrantes

Como vimos al principio de esta unidad, el plano está dividido en 4 cuadrantes. Las rectas atraviesan estos cuadrantes. Veamos el siguiente ejemplo:

Problema ejemplo 2

A partir de la recta anterior $\mathbf{y} = -\frac{4}{3}\mathbf{x} + \frac{22}{3}$, nombrar un punto de la recta que pertenezca a cada cuadrante.

Veamos la gráfica nuevamente:



Ahora que sabemos escribir pares ordenados, vemos que en el **CUADRANTE I**, los valores de x>0 e y>0. En el **CUADRANTE II**, los valores serán x<0 e y>0. En el CUADRANTE III, los valores serán x<0 e y<0. Finalmente, en el **CUADRANTE IV**, los valores de x>0 e y<0.

Vemos que ya tenemos determinados dos puntos en el **CUADRANTE I**: (1;6) y (4;2), ambos valores **x** e **y** son positivos para cada par ordenado. En el **CUADRANTE II** tenemos un punto (2;10), donde **x** es negativo e **y** es positivo. En el **CUADRANTE III** no hay puntos de la recta.

Vemos que la recta atraviesa el **CUADRANTE IV**, pero no tenemos determinado un punto en ese cuadrante. Para eso, observemos que en el **CUADRANTE IV**, los valores de **y** son negativos.

Así que, contando con la ecuación de la recta, asignaremos cualquier valor negativo de **y** y despejaremos qué valor de **x** está asociado. Tomaremos el valor y=-2:

$$\mathbf{y = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}}$$

$$\mathbf{-2 = -\frac{4}{3}x + \frac{22}{3}}$$

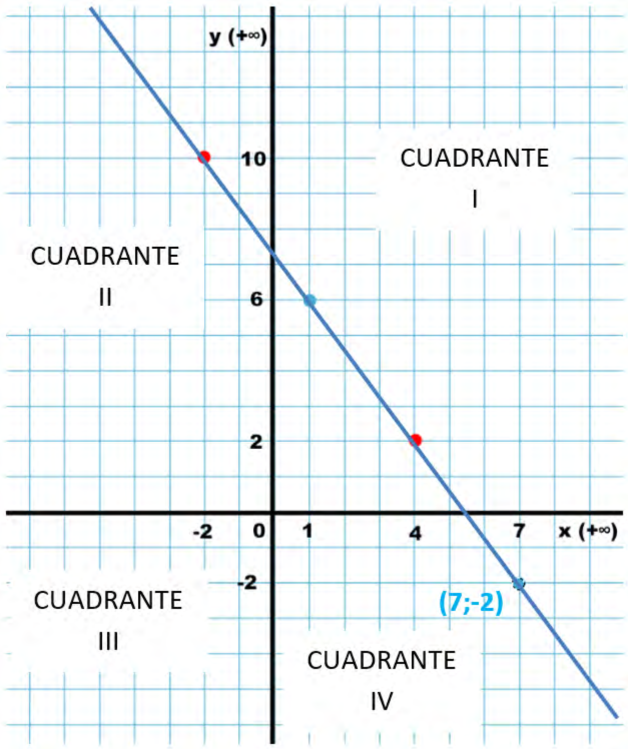
$$\mathbf{\frac{4}{3}.x = 2 + \frac{22}{3}}$$

$$\mathbf{\frac{4}{3}.x = 2.\frac{3}{3} + \frac{22}{3}}$$

$$\mathbf{\frac{4}{3}.x = \frac{28}{3}}$$

$$\mathbf{x = 7}$$

Por lo tanto, el par ordenado de la recta que calculamos es el (7; -2) (valor positivo para x y valor negativo para **y**). Si vemos la siguiente gráfica, podés calcular cualquier punto de la recta otorgando un valor de **x** y calculando el valor de **y** asociado o viceversa:



Rectas paralelas y perpendiculares

Es necesario saber cómo obtener la ecuación de rectas paralelas o perpendiculares a una recta dada. Realizaremos las conclusiones teóricas a partir de un ejemplo.

Problema ejemplo 3

A partir de la recta anterior $y = -\frac{4}{3}\mathbf{x} + \frac{22}{3}$, determinar una recta:

3.a) paralela a esta recta que pase por el punto (2;3).
3.b) perpendicular a esta recta que pase por el punto (-2:10).

Resolvemos:

3.a) Una recta es **paralela** a otra recta **si sus pendientes son idénticas**. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente y nunca se cruzarán en el plano.

Si parto de la recta $\mathbf{y_1} = -\frac{4}{3}\mathbf{x} + \frac{22}{3}$, la pendiente de la recta paralela tendrá como pendiente $-\frac{4}{3}$ sin tener necesariamente la misma ordenada al origen. La nueva recta tendrá la ecuación:

$$\mathbf{y_2 = -\frac{4}{3}x + b}$$

Necesitamos un punto de esta nueva recta para determinar el valor de la ordenada al origen b. Nos dan el par ordenado **(2;3)**. Quiere decir que, para esta nueva recta, cuando **x** sea igual a 2, y será igual a 3. Por lo tanto:

$$\mathbf{y_2 = -\frac{4}{3}x + b}$$

$$\mathbf{3 = -\frac{4}{3}.2 + b}$$

$$\mathbf{3 + \frac{8}{3} = b}$$

$$\mathbf{3.\frac{3}{3} + \frac{8}{3} = b}$$

$$\mathbf{\frac{9+8}{3} = \frac{17}{3} = b}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta será:

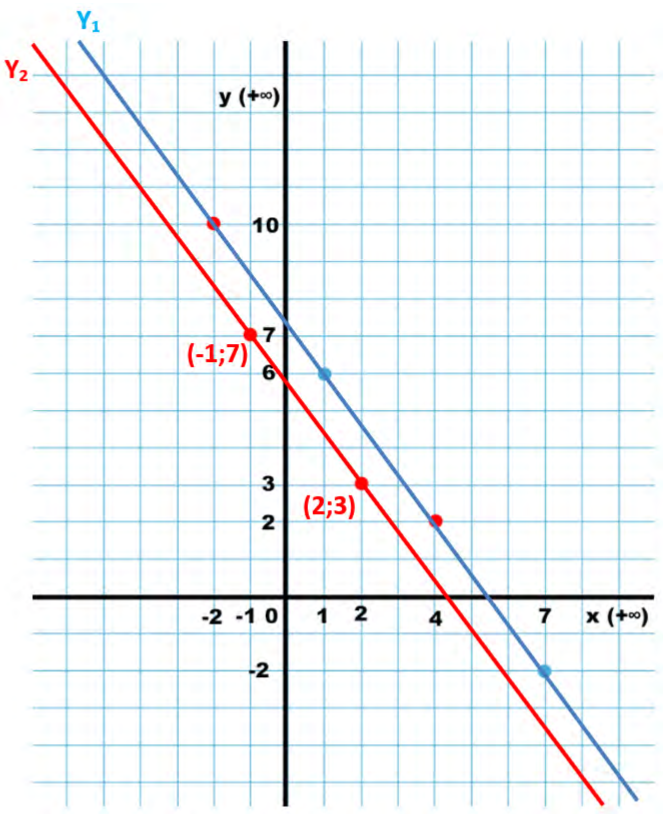
$$y_2 = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$$

Para poder graficarla sin problemas, calcularemos otro par ordenado perteneciente a la nueva recta. Otorgaremos el valor x=-1.

$$y_2 = -\frac{4}{3}.(-1) + \frac{17}{3} = \frac{5+17}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

El par ordenado que calculamos es **(-1;7)**.

En la gráfica podemos ubicar estos puntos y trazar la recta paralela:



En la gráfica vemos que ambas rectas son paralelas y se extienden hasta el infinito sin cruzarse.

3.b) Una recta **perpendicular** a otra significa que **ambas rectas se cruzan dejando entre ellas un ángulo de 90°**, ambas teniendo diferente ordenada al origen. En términos generales, si la recta original tiene pendiente m1, la recta perpendicular tendrá pendiente m2, tal que:

$$\mathbf{m2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m1}}$$

En el ejemplo, debemos calcular la ecuación de la recta perpendicular a $\mathbf{y_1} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\mathbf{x} + \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{3}}$. La pendiente de la recta original es $-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$, por lo tanto, la pendiente de la recta perpendicular será:

$$\mathbf{m2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m1}} = -\frac{\mathbf{1}}{\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

Teniendo la pendiente de la nueva recta $\mathbf{m2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$, podemos escribir la ecuación de la nueva recta como:

$$\mathbf{y_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

La consigna nos da un punto de la nueva recta, lo cual es necesario para calcular su ordenada al origen b. El punto es **(-2;10)**. Por lo tanto:

$$10 = \frac{3}{4}.(-2) + b$$

$$10 = \frac{-6}{4} + b$$

$$10.\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = b$$

$$b = \frac{23}{2}$$

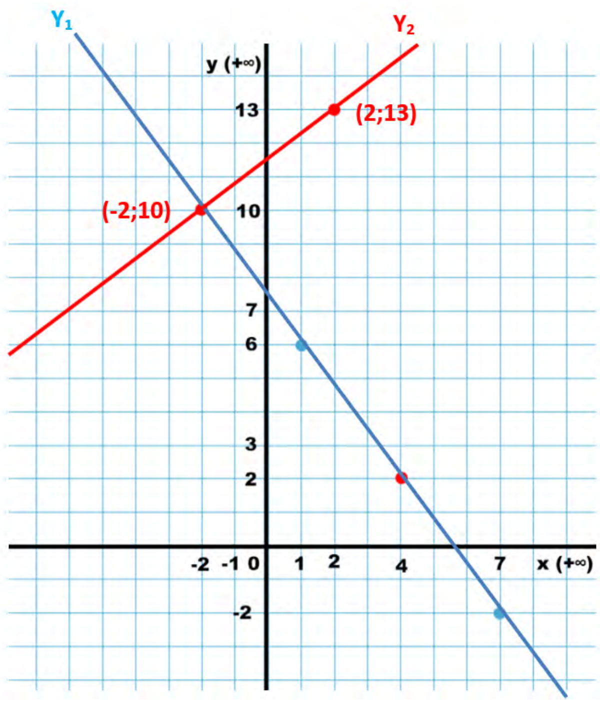
La ecuación de la recta será:

$$y_2 = \frac{3}{4}x + \frac{23}{2}$$

Necesitamos otro punto para poder graficarla fácilmente. Asignaremos el valor x=2

$$y_2 = \frac{3}{4}.2 + \frac{23}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

La nueva coordenada es **(2,13)**. De esta manera la podremos graficar:

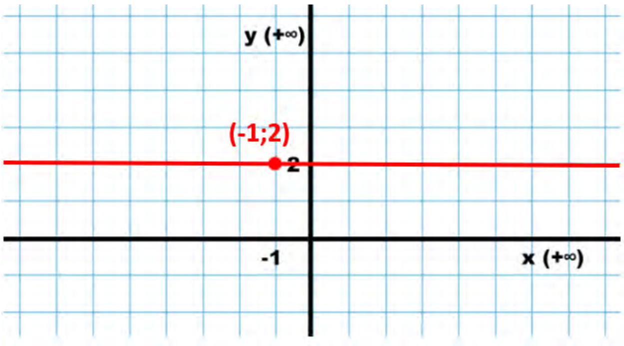


Rectas paralelas a los ejes x e y

En determinadas ocasiones, aparecen rectas paralelas a los ejes cartesianos.

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la recta que pasa por (-1;2) y es paralela al eje "x". Antes que nada, veamos la gráfica:

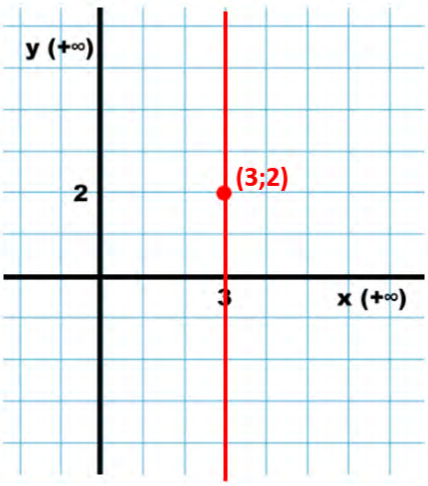


Observemos que la recta roja pasa por el punto (-1;2) y es paralela al eje **x**. Es importante notar que, para cualquier valor de **x**, el valor de y será 2. Por lo tanto, la función **y** no depende de **x**, ya que para cualquier valor de x valdrá lo mismo. De esta manera, la ecuación de la recta paralela al eje **x** que pasa por el punto (-1;2) será:

$$y=2$$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la recta que pasa por (3;2) y es paralela al eje **y**. Antes que nada, veamos la gráfica:



Observamos que la recta roja pasa por el punto (3;2) y es paralela al eje **y**. Es importante notar que para cualquier valor de **y**, el valor de **x** será 3. Por lo tanto, la mejor ecuación que describe a esta recta vertical es una que describa que valen todos los valores de y para los cuales **x** valga 3. Por lo tanto, la ecuación será:

x=3

Las rectas y los sistemas de ecuaciones

En muchas ocasiones, deben resolverse sistemas de ecuaciones algebraicas que tienen más de una incógnita.

Ejemplo 6

Hallar la solución para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x = -y - 1 & (1) \\ y = 3x + 4 & (2) \end{cases}$$

Si tratáramos de resolver cada ecuación por separado, siempre nos quedaría en función de otra variable indefinida. Para resolver este tipo de problemas, se necesita tener tantas ecuaciones como incógnitas se necesitan despejar. En este caso tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

A continuación, se resuelve este sistema. Prestá atención cómo cada ecuación resulta ser una recta en la cual el valor de **y** depende de **x**.

$$\text{(1)} \quad -2x = -y - 1$$
$$y = 2x - 1 \ \text{(esto es una recta)}$$

$$\text{(2)} \quad y = 3x + 4 \quad \text{(esto es otra recta)}$$

Para hallar la solución a este sistema de ecuaciones, considerando que ambas rectas conviven en un mismo plano, se igualan las **y** para despejar el valor de **x**. Se Reemplaza (1) en (2):

$$\mathbf{2x - 1 = 3x + 4}$$

$$\mathbf{-4 - 1 = 3x - 2x}$$

$$\mathbf{-5 = x}$$

Si x=-5, se calculará el valor de **y** utilizando la ecuación (2). Probá que, usando la ecuación (1), se llega al mismo valor:

$$\mathbf{y = 3x + 4}$$

$$\mathbf{y = 3.(-5) + 4 = -11}$$

La solución a este sistema de ecuaciones es el par ordenado (-5; -11). Pero, ¿qué quiere decir esta solución? Se graficarán ambas rectas y se mostrará donde se ubica la solución.

$$\mathbf{y_1 = 2x - 1}$$

$$\mathbf{Si\ x = 1,\quad y_1 = 2.1 - 1 = 1.\ El\ par\ ordenado\ (1; 1) es\ pertenece\ a\ la\ recta}$$

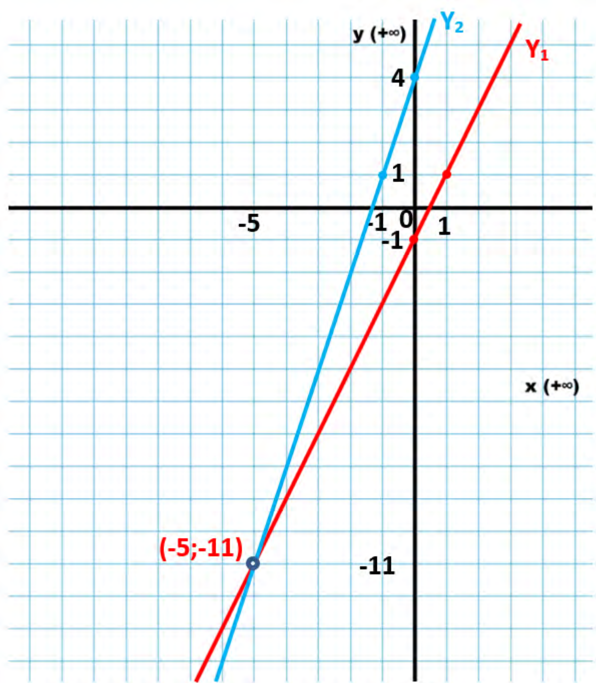
$$\mathbf{La\ ordenada\ al\ origen\ es - 1, por\ lo\ tanto\ el\ par\ ordenado\ (0, -1)\ pertenece\ a\ la\ recta.}$$

$$\mathbf{y_2 = 3x + 4}$$

$$\mathbf{Si\ x = -1,\quad y_2 = 3.(-1) + 4 = 1.\ \ El\ par\ ordenado\ (-1; 1)\ es\ respuesta.}$$

$$\mathbf{La\ ordenada\ al\ origen\ es + 4, por\ lo\ tanto\ el\ par\ ordenado\ (0, 4)\ pertenece\ a\ la\ recta.}$$

Con estos cuatro puntos, se graficarán ambas rectas:



Una vez graficadas ambas rectas, podemos ver que se cruzan en una coordenada determinada. Esa coordenada es la respuesta del sistema de ecuaciones. Podrás practicar esto en los ejercicios de aplicación.

Las rectas en la vida cotidiana

A medida que la capacidad de abstracción se vuelve más sofisticada en el joven adulto, se comienza a utilizar el concepto de rectas para tomar decisiones cotidianas tratando de predecir comportamientos. Veamos los siguientes ejemplos donde la matemática y la vida real se encuentran.

Proporcionalidad

La proporcionalidad entre variables es una relación matemática en la que dos o más variables están relacionadas de tal manera que, cuando una de ellas cambia, la otra cambia en una cantidad proporcional a esa variación. En otras palabras, si dos variables son proporcionales, cuando una aumenta, la otra también aumenta en una cantidad específica o constante (directamente proporcional). También vale la inversa, cuando una aumenta, la otra variable disminuye (inversamente proporcional). Veremos la proporcionalidad entre variables con un ejemplo:

<u>Ejemplo 7</u>

Para poder llegar temprano a clases en la Universidad yendo a pie, se debe empezar a anotar cuánto tiempo se tarda en cubrir determinada distancia caminada. Por ejemplo:

Distancia (kilómetros)	Tiempo (horas)
0,5	0,25
1	0,5
1,5	?

Con esta información, ¿podrías calcular cuánto tiempo tardás en caminar 1,5 km?

Ambas variables guardan una relación. En estos casos, la relación es un número llamado **constante de proporcionalidad (α).** Para intentar hallarla, debemos pensar qué valor relacionan ambas variables.

$$0{,}5 \text{ km} = \alpha \cdot 0{,}25 \text{ h} \rightarrow \alpha = 2 \text{km/h}$$

$$1 \text{ km} = \alpha \cdot 0{,}5 \text{ h} \rightarrow \alpha = 2 \text{km/h}$$

Sabemos que la constante de proporcionalidad que aparece en este problema es α=2km/h. Si quisiéramos hallar el tiempo que tarda en hacer 1,5 km, debemos hacer un cálculo basado en la siguiente expresión que sale de las dos cuentas anteriores:

$$\text{Distancia} = \alpha \cdot \text{Tiempo} \quad \text{con } \alpha = 2 \text{km/h}$$

Por lo tanto:

$$\textbf{Tiempo} = \frac{\textbf{Distancia}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\textbf{1,5 km}}{\textbf{2 km/h}} = \textbf{0,75h}$$

Este tipo de cálculos atraviesan nuestra vida cotidiana. La forma general de la proporcionalidad entre dos variables **x** e **y** es:

y = α.x

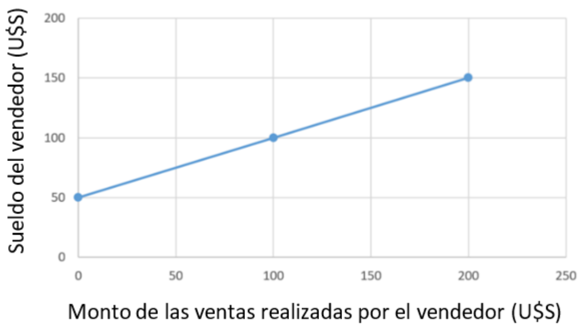
Observá que la forma es parecida a una recta, pero sin ordenada al origen (si **x** vale cero, **y** valdrá también cero). La constante de proporcionalidad (α) es un valor que relaciona ambas variables, como una pendiente. En el ejemplo, α=2km/h relaciona distancia y tiempo, por lo cual, es una velocidad.

Las rectas como modelado de problemas económicos

Muchas veces las rectas modelan situaciones económicas del día a día. Observá el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8

Querés comenzar a trabajar en determinada empresa como vendedor y su sueldo dependerá de la comisión que reciba por lo que ha vendido. Le comentan que su sueldo responderá a esta gráfica:



- ¿Qué se puede concluir de esta gráfica? ¿Cuál es la suma fija que ganará por mes?

Viendo la gráfica se puede observar que, si no se realiza ninguna venta, el sueldo será de 50 U$S. Ese es el sentido de la ordenada al origen en esta recta. Qué valor toma **y** (sueldo en dólares) cuando la variable **x** (monto de ventas realizadas en dólares) es cero. Usted cobrará 50 U$S aún sin haber tenido ventas en el mes.

- ¿Cuál será su comisión sobre las ventas?

Tomate un momento para analizar la gráfica y pensá. La comisión sobre las ventas significa cuántos dólares de sueldo cobrarás por dólar vendido. Para eso, se debe tomar los dos pares ordenados presentados en la gráfica:

- (200 U$S vendidos; 150 U$S de sueldo)
- (100 U$S vendidos; 100 U$S de sueldo)

$$\text{Comisión} = \frac{150 \text{ U\$S sueldo} - 100 \text{ U\$S sueldo}}{200 \text{ U\$S vendidos} - 100 \text{ U\$S vendidos}} = \frac{50 \text{ U\$S de sueldo}}{100 \text{ U\$S vendidos}} = 0,5\ \frac{\text{U\$S sueldo}}{\text{U\$S vendido}}$$

Por cada dólar vendido, cobrarás medio dólar. Su comisión será del 50 %. Este número que relaciona ambas variables es la pendiente de la recta. En este caso, se relaciona cuánto aumenta su sueldo (variable dependiente) según cuanto aumentan sus ventas (variable independiente).

- ¿Cuánto debe vender para que su sueldo sea de 300 U$S?

Para poder calcular esto, debemos explicitar la ecuación de la recta en cuestión. Sabemos que la pendiente es **0,5** $\frac{\text{U\$S sueldo}}{\text{U\$S vendido}}$ y que la ordenada al origen es 50 U$S. Por lo tanto, la ecuación de la recta será:

$$y = 0,5\ \frac{\text{U\$S sueldo}}{\text{U\$S vendido}} . x + 50 \text{ U\$S sueldo}$$

- Si se desea ganar 300 U$S, deberás realizar el siguiente cálculo:

$$\mathbf{300\ U\$S\ sueldo} = 0,5\ \frac{\mathbf{U\$S\ sueldo}}{\mathbf{U\$S\ vendido}}.\mathbf{x} + 50\ \mathbf{U\$S\ sueldo}$$

$$\mathbf{300\ U\$S\ sueldo} - \mathbf{50U\$S\ sueldo} = 0,5\ \frac{\mathbf{U\$S\ sueldo}}{\mathbf{U\$S\ vendido}}.\mathbf{x}$$

$$\mathbf{250U\$S\ sueldo} = 0,5\ \frac{\mathbf{U\$S\ sueldo}}{\mathbf{U\$S\ vendido}}.\mathbf{x}$$

$$\frac{\mathbf{250}\cancel{\mathbf{U\$S\ sueldo}}.\ \mathbf{U\$S\ vendido}}{\mathbf{0,5}\ .\ \cancel{\mathbf{U\$S\ sueldo}}} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{500}\ \mathbf{U\$S\ vendido}$$

Debés haber hecho ventas por 500 U$S para percibir un sueldo de 300 U$S.

- ¿Cuánto cobrará si hace ventas por 1000 U$S?

Teniendo la ecuación de la recta, debe hacer el siguiente cálculo:

$$\mathrm{y} = 0{,}5\ \frac{\mathrm{U\$S\ sueldo}}{\mathrm{U\$S\ vendido}}.\ 1000\ \mathrm{U\$S\ vendido} + 50\ \mathrm{U\$S\ sueldo}$$

$$\mathrm{y} = 0{,}5\ \frac{\mathrm{U\$S\ sueldo}}{\cancel{\mathrm{U\$S\ vendido}}}.\ 1000\ \cancel{\mathrm{U\$S\ vendido}} + 50\ \mathrm{U\$S\ sueldo} = 550\mathrm{U\$S}$$

Cobrarás 550 U$S de sueldo.

Ejemplo 9

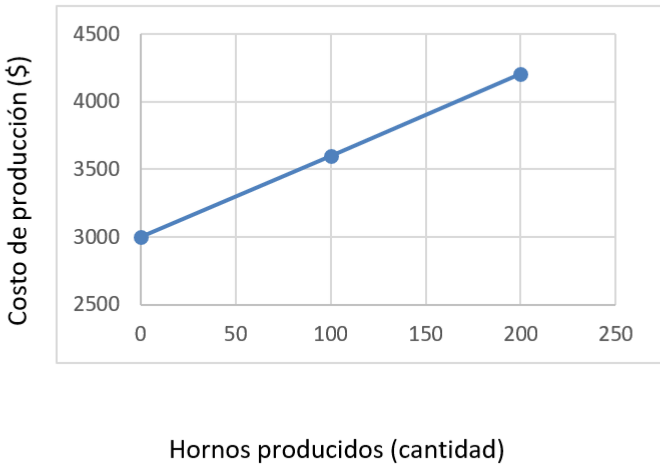
Un fabricante de hornos eléctricos encuentra que, si produce x cantidad hornos en un mes, su costo de producción está dado por la ecuación:

$$y = 6x + 3000 \quad (\text{"y"en pesos})$$

La gráfica de la ecuación puede realizarla dando valores a “x” y calculando el costo de producción para cada valor. Para este caso realicé la siguiente tabla:

Hornos producidos(cantidad)	costo de producción ($)
0	3000
100	3600
200	4200

La gráfica será la siguiente:



Para esta recta, la ordenada al origen (3000 $) representa los gastos fijos mensuales que tiene el fabricante independientemente de la cantidad de hornos que produzca (alquiler de la maquinaria, sueldo de empleados, etc.). La pendiente de esta recta es $6\frac{\$}{\text{hornos producidos}}$, es el costo de producción por unidad.

Unidad 5

Trigonometría

Competencias de la unidad

En esta Unidad trabajarás con el objetivo de consolidar las siguientes competencias desarrolladas en la escuela media, necesarias para encarar ahora el nivel universitario de tu carrera. Lo esperado es que puedas luego de este proceso de aprendizaje:

1-Identificar situaciones de la vida real en las que se utilice la trigonometría.
2-Aplicar correctamente sus herramientas y estrategias para resolver adecuadamente los problemas.

Trigonometría

Conceptos básicos

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se ocupa de las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Esta rama de las matemáticas se enfoca en el estudio de las funciones trigonométricas, que son funciones matemáticas que relacionan los ángulos de un triángulo con las medidas de sus lados y permiten resolver problemas relacionados con la geometría, la física, la ingeniería y otras disciplinas. La trigonometría se usa en muchos campos, incluyendo la navegación, la astronomía, la arquitectura y la música, entre otros.

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones matemáticas que relacionan los ángulos de un triángulo con las longitudes de sus lados.

Comenzaremos entendiendo las funciones trigonométricas a través de un **triángulo rectángulo**. Un triángulo rectángulo es un tipo de triángulo que tiene uno de sus ángulos interiores midiendo 90° (ángulo recto). Esto significa que los otros dos ángulos del triángulo son agudos (menores a 90 grados). **La suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180°**. En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**, y los otros dos lados se llaman **catetos**. Los catetos forman el ángulo recto y siempre son más cortos que la **hipotenusa**.

Hay seis funciones trigonométricas principales y se definen de la siguiente manera:

Seno (sin). Se define como la división entre el lado opuesto al ángulo y la hipotenusa del triángulo. Es decir:

$$\mathbf{sen}(\alpha) = \frac{\textbf{cateto opuesto a } \alpha}{\textbf{hipotenusa}}$$

Coseno (cos). Se define como la división entre el lado adyacente al ángulo y la hipotenusa del triángulo. Es decir:

$$\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{\textbf{cateto adyacente a } \alpha}{\textbf{hipotenusa}}$$

Tangente (tan). Se define como la división entre el lado opuesto al ángulo y el lado adyacente al ángulo del triángulo. Es decir:

$$\mathbf{tan}(\alpha) = \frac{\textbf{cateto opuesto a } \alpha}{\textbf{cateto adyacente a } \alpha}$$

Cotangente (cot). Se define como la razón inversa de la tangente. Es decir:

$$\mathbf{cotg}(\alpha) = \frac{\textbf{cateto adyacente a } \alpha}{\textbf{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}(\alpha)}$$

Secante (sec). Se define como la razón inversa del coseno. Es decir:

$$\mathbf{sec}(\alpha) = \frac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}(\alpha)}$$

Cosecante (csc). Se define como la razón inversa del seno. Es decir:

$$\mathbf{csc}(\alpha) = \frac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}(\alpha)}$$

Los lados de un triángulo rectángulo también se relacionan entre sí según el **teorema de Pitágoras** (que vimos en la Unidad 3). Recordemos este teorema y veamos una forma alternativa cuando está determinado un ángulo **α**.

$$(Cateto\ Opuesto\ a\ \alpha)^2 + (Cateto\ Adyacente\ a\ \alpha)^2 = (Hipotenusa)^2$$

$$\frac{(Cateto\ Opuesto\ a\ \alpha)^2}{(Hipotenusa)^2} + \frac{(Cateto\ Adyacente\ a\ \alpha)^2}{(Hipotenusa)^2} = \frac{(Hipotenusa)^2}{(Hipotenusa)^2}$$

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Utilidad de las funciones trigonométricas

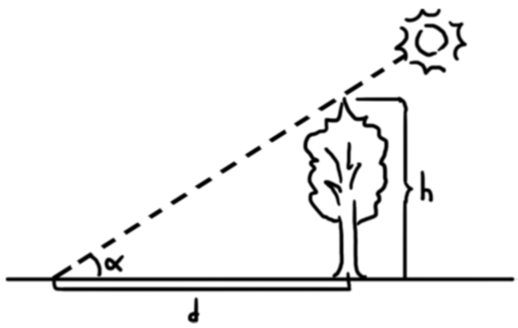
Las funciones trigonométricas nos permiten calcular distancias y ángulos que son esenciales para resolver problemas de ingeniería y su medición está fuera de nuestro alcance.

Ejemplo 1:

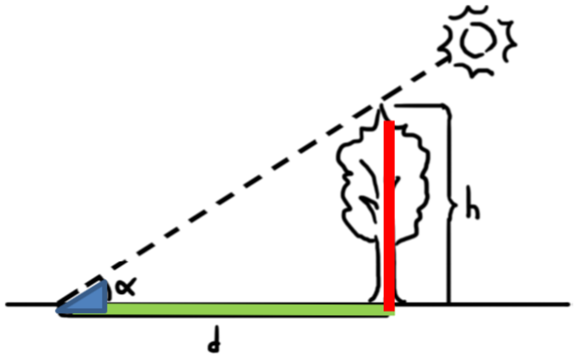
Un árbol proyecta una sombra de 135 m de largo. Determinar la altura del árbol si el ángulo de elevación del sol es de 25,7°.

En situaciones problemáticas como esta, no tenemos una herramienta que nos permita medir directamente la altura del árbol. Por eso hacemos uso de las relaciones trigonométricas para poder calcularla.

Lo primero que se recomienda hacer ante cualquier problema de este tipo es hacer un esquema que plantee la situación donde se identifiquen todos los datos e incógnitas que aparecen en el problema. Así es más sencillo decidir qué funciones trigonométricas resultan más efectivas en cada caso.



En este caso **d** es la sombra, **h** es la altura y **α** es el ángulo de elevación del sol. Observá cómo razonar este tipo de problemas. Primero se debe identificar el triángulo rectángulo en cuestión y luego marcar los datos e incógnitas.



¿Qué función trigonométrica relaciona un ángulo, su cateto adyacente y su cateto opuesto? La función tangente (tan):

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\tan(25,7°) = \frac{h}{d}$$

$$\tan(25,7°) = \frac{h}{135\ m}$$

$$h = 135\ m \,.\, \tan(25,7°) = 65,0\ m$$

Para hacer este último cálculo necesitarás calculadora científica. Debés asegurarte de que esté seteada en modo degree para que asuma los ángulos son ingresados como grados. Los grados son un tipo de medida de ángulos de tal manera que una circunferencia completa tiene 360 grados, cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Funciona más bien como la hora. Por ejemplo:

25,7°=25° 42´00”

Otro tipo de medida de ángulos son los radianes. Un radián es una medida de ángulo que se define como la longitud del arco abierto por ese ángulo en una circunferencia de radio 1. Una circunferencia completa tiene un ángulo de 2π (aproximadamente 6,28) radianes. Asegurate de que la calculadora no esté seteada en radianes. Esa unidad se utilizará ampliamente en materias de la Universidad.

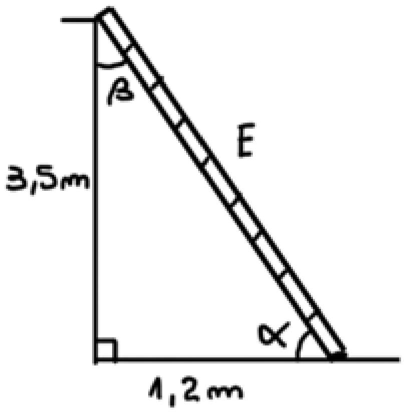
Respuesta:

La altura del árbol es 65,0 metros. No hubiéramos podido medir directamente la altura del árbol, pero sí podemos medir la distancia de la sombra y el ángulo de elevación del sol, lo que nos permite finalmente calcular la altura mediante las funciones trigonométricas.

Ejemplo 2:

Un pintor debe apoyar una escalera contra una pared para acceder a la parte más alta. Sabe que para que no resbale, la escalera debe estar a 1,20 m de la pared y el extremo superior de la escalera debe tocar la pared a 3,5 m del suelo. Determinar el ángulo que tiene la escalera con el piso, el ángulo que tiene la escalera con la pared y la longitud de la escalera.

Esquematicemos la situación con sus datos e incógnitas:



Concentrémonos en calcular α. ¿Qué función trigonométrica relaciona α, su cateto opuesto y su cateto adyacente? La función tangente.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{3,5 \text{ m}}{1,2 \text{ m}}$$

Observá que sabemos cuánto vale la tangente de α, pero no sabemos cuánto vale α. Aparecerán casos así en la práctica y el examen. Para resolver estas situaciones utilizaremos la función **arco** de la calculadora.

Arriba de las teclas sin, con y tan de la calculadora, se encuentran funciones a las cuales se acceden usualmente presionando antes la tecla **shift**. Estas funciones suelen aparecer en las calculadoras como $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$. Estas son las funciones **arco**.

Para este caso calcularemos el arcotangente de $\frac{3,5\ m}{1,2\ m}$ y la calculadora nos devolverá el ángulo cuya tangente es $\frac{3,5\ m}{1,2\ m}$. En la calculadora presione shift y tan (para acceder a la función arcotangente), luego abra paréntesis y escriba (3,5/1,2) y cierre paréntesis. Ahí te devuelve el ángulo buscado.

$$\tan(\alpha) = \frac{3,5\ \mathrm{m}}{1,2\ \mathrm{m}}$$
$$\alpha = \operatorname{arcotan}\left(\frac{3,5}{1,2}\right) = 71,1°$$

El ángulo α que forma la escalera con el suelo es de 71,1°.

Para calcular el ángulo β, usaremos la propiedad que dice que la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es 180°. Por lo tanto:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$71,1° + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 180° - 90° - 71,1° = 18,9°$$

El ángulo β que forma la escalera con la pared es de 18,9°.

Para calcular la longitud de la escalera (E) podemos optar por dos caminos. Podríamos usar el teorema de Pitágoras, ya que tenemos la medida de los dos catetos:

$$(\text{cateto opuesto a } \alpha)^2 + (\text{cateto adyacente a } \alpha)^2 = (\text{hipotenusa})^2$$
$$(3,2\mathrm{m})^2 + (1,2)^2 = (\mathrm{E})^2$$
$$10,24\mathrm{m}^2 + 1,44\mathrm{m}^2 = (\mathrm{E})^2$$
$$11,68\mathrm{m}^2 = (\mathrm{E})^2$$
$$\sqrt{11,68\mathrm{m}^2} = \sqrt{(\mathrm{E})^2}$$
$$3,4\mathrm{m} = \mathrm{E}$$

Calculada de esta manera, la escalera mide 3,4 m de largo.

Otra forma de calcular el largo de la escalera es utilizando una función trigonométrica. Si tiene $\alpha=71{,}1°$ y tiene la altura a la que llega la escalera (su cateto opuesto) y necesita el largo de la escalera (la hipotenusa), la función trigonométrica que vincula estos tres valores es la función seno:

$$\mathbf{sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{hipotenusa}}$$

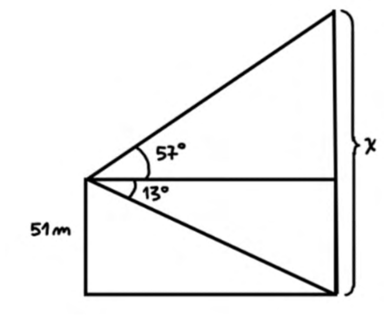
$$\mathbf{sen(71,1°) = \frac{3,5m}{E}}$$

$$\mathbf{E = \frac{3,5m}{sen(71,1°)} = 3,7m}$$

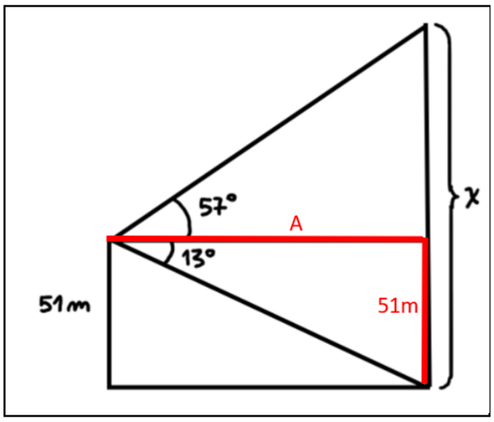
Calculada de esta segunda manera, la escalera mide 3,7m de largo. El resultado difiere del método anterior, ya que aparecen varias situaciones con redondeo que tienen errores asociados. Lo importante en este curso son las estrategias y las herramientas asociadas así que ambas opciones serán tomadas como válidas. De todos modos, se recomienda utilizar los valores que son dados en la consigna del problema. Por lo tanto, nos quedaremos con el primer método en esta ocasión.

Ejemplo 3:

Hallar el valor de x.



Para resolver este problema hay varios caminos válidos. Aquí se presentará uno de ellos. Observá que tenemos un rectángulo de altura 51m. Se calculará la medida del lado superior del rectángulo marcado como A:



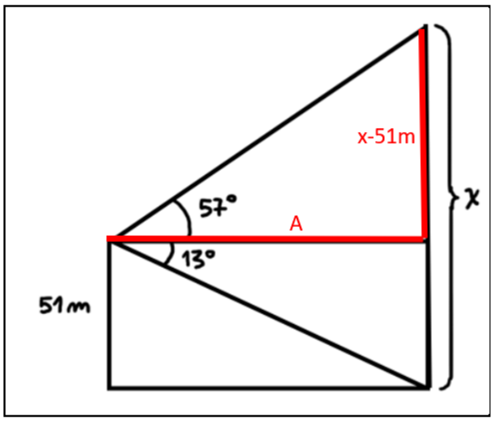
La función trigonométrica que me vincula el ángulo 13°, su cateto opuesto de 51m y su cateto adyacente A es la función tangente. Por lo tanto:

$$\tan(13°) = \frac{51m}{A}$$

$$A = \frac{51m}{\tan(13°)}$$

Dejaré el lado A expresado como una división para evitar tener errores de redondeo.

Luego, observá que a la función trigonométrica que vincula el ángulo 57°, su cateto opuesto de (x- 51m) y su cateto adyacente A son la función tangente.



Por lo tanto:

$$\tan(57°) = \frac{(x - 51m)}{A}$$
$$A = \frac{(x - 51m)}{\tan(57°)}$$

Teniendo dos formas de expresar A, las igualaré y despejaré x:

$$\frac{51\text{m}}{\tan(13°)} = \frac{(\text{x} - 51\text{m})}{\tan(57°)}$$
$$51\text{m}.\tan(57°) = (\text{x} - 51\text{m}).\tan(13°)$$

$$51\text{m}.\tan(57°) = \text{x}.\tan(13°) - 51\text{m}.\tan(13°)$$

$$\text{x} = \frac{51\text{m}.\tan\,(57°) + 51\text{m}.\tan(13°)}{\tan(13°)} = 391,2\text{m}$$

El lado x vale 391,2m.

Como **reflexión final**, identificá al menos cinco situaciones o problemas en las que en su vida real (personal o laboral/profesional) podrían aplicarse las funciones trigonométricas.