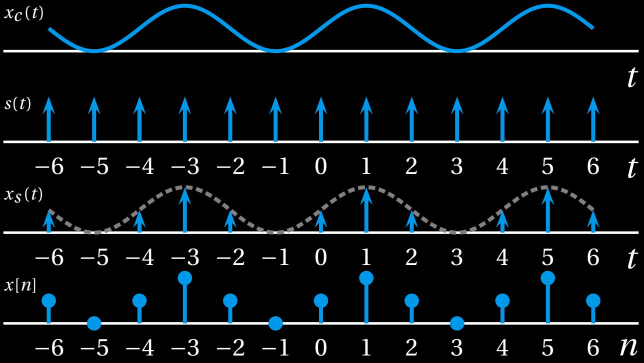
Transformada Z

Filtro de resposta finita - FIR

V.C.Parro

Primavera - 2020

Sistema amostrado



Alguns pares de transformada $\mathcal{Z}$

$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$	$f(kT)$ para $k \geq 0$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1	$a^k \cos(k\pi)$	$\dfrac{z}{z+a}$
$1(kT)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\sin(\omega kT)$	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$
kT	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	$\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$
e^{-akT}	$\dfrac{z}{z-\exp(-aT)}$	$e^{-akT}\sin(\omega kT)$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$	$e^{-akT}\cos(\omega kT)$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

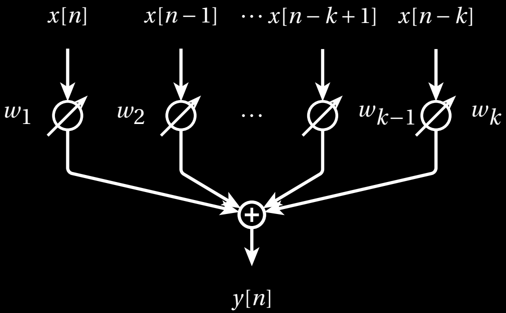
Obs: $\delta(kT)$ e $1(kT)$ denotam um impulso e um degrau unitário no instante $k = 0$, respectivamente.

Algumas propriedades da transformada de $\mathscr{Z}$

Linearidade	$\lambda \cdot \mathscr{Z}\left[f_1(kT) + f_2(kT)\right] = \lambda \cdot F_1(z) + \lambda \cdot F_2(z)$
Atraso no tempo	$\mathscr{Z}\left\{f[(k-n)T]\right\} = z^{-n} \cdot F(z)$
Avanço no tempo	$\mathscr{Z}\left\{f[(k+n)T]\right\} = z^{n} \cdot F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \cdot z^{n-k}$
Teorema do valor inicial	$\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
Teorema do valor final	$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$

Análise de um filtro média móvel

Estrutura geral de um filtro FIR.



Diagrame em blocos que implementa um sistema de ponderação de uma sequência de amostras.

Algoritmo de cálculo de média

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} x[n-k]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}\frac{z^2 + z + 1}{z^2} \tag{1}$$

Calculando os polos temos multiplicidade em zero $p_1 = p_2 = 0$ e os zeros da função localizados em $z_1 = -0.5 - j0.5\sqrt{3}$ e $z_2 = -0.5 + j0.5\sqrt{3}$.

Analisando o caso particular onde $x[n] = \delta[n]$ teremos como saída do sistema o comportamento ilustrado na figura.

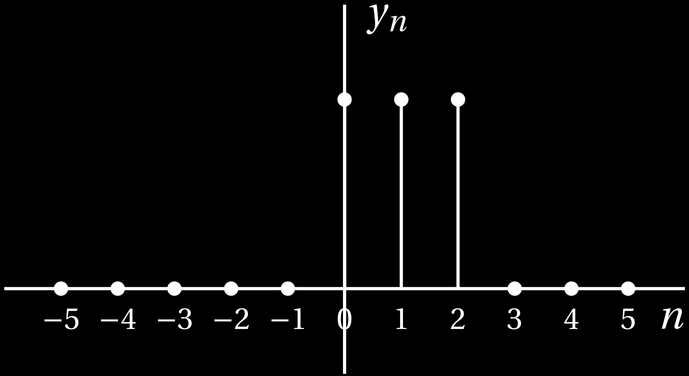
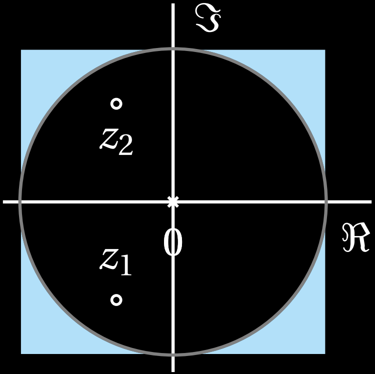
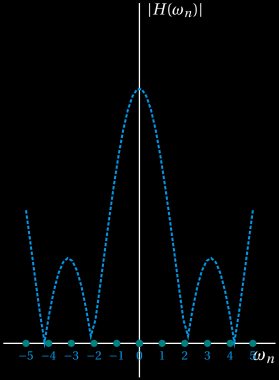


Diagrama de pólos e zeros



Resposta em frequência - Fourier

Observe que os pontos de nulo acontecem exatamente nas frequências dos zeros: $\omega_{n1} = \dfrac{2\pi}{3}$ e $\omega_{n2} = \dfrac{4\pi}{3}$ - considerando $\omega_n = \omega T_s$.



Convolução

Convolução

Tempo contínuo:

$$c(t) = a(t) * b(t) \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) d\tau$$

Tempo discreto:

$$c[k] = a[k] * b[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a[n] b[k-n]$$

Convolução