MOGPL

Name: Bruno Fernandes Iorio & Gildas De Michiel

(a) Soit G l'ensemble de sommets de la grille N x M et $O \subset G$ l'ensemble des sommets obstacles. Pour chaque point $(x, y) \in G$ et chaque direction dir, on considère le sommet (x, y, dir), en n'indiquant qu'au point (x, y), on fait face à la direction dir. La commande avance(k) est représentée par l'arc orienté entre deux sommets ayant la même direction et une distance $k \in \{1, 2, 3\}$. La commande tourne est représentée par l'arc orienté entre deux sommets ayant les mêmes coordonnées x, y, mais ayant des directions différentes.

Soit E l'ensemble des arcs du graphe. Pour que chaque commande ait un coût unitaire, on définit l'ensemble des arcs sortants suivants pour chaque $(x, y) \notin O$:

- $(x, y, sud) \longrightarrow \{(x, y, ouest), (x, y, est)\} \cup \{(x, y + i, sud) : i \in \{1, 2, 3\}, M > y + i \geq 0, (x, y + i) \notin O\}$
- $(x, y, nord) \longrightarrow \{(x, y, est), (x, y, ouest)\} \cup \{(x, y - i, nord) : i \in \{1, 2, 3\}, M > y - i \geq 0, (x, y - i) \notin O\}$
- $(x, y, est) \longrightarrow \{(x, y, sud), (x, y, nord)\} \cup \{(x+i, y, est) : i \in \{1, 2, 3\}, N > x+i \geq 0, (x+i, y) \notin O\}$
- $(x, y, ouest) \longrightarrow \{(x, y, nord), (x, y, sud)\} \cup \{(x - i, y, ouest) : i \in \{1, 2, 3\}, N > x - i \geq 0, (x - i, y) \notin O\}$

(b) On étudie la complexité de l'algorithme bfsSolver présent dans le fichier Solver.py. L'objectif de l'algorithme est de trouver le plus court chemin entre deux points. Pour ce faire, on examine les chemins possibles entre le point d'entrée et le point de d'arrivée. Chaque sommet (x, y, dir) est inséré au plus une fois dans la file. Donc, on parcours $4 \times N \times M$ sommet. De plus, chaque arête est explorée une seule fois. On en déduit que l'algorithme bfsSolver a une complexité en $O(4NM + E)$. Or l'ensembles des arcs dépend de la taille de la grille. Au final, la complexité de l'algorithme est $O(4NM + E) = O(4NM + O(NM)) = O(NM)$
(c) Temps d'exécution moyens en fonction de la taille de la grille :

Taille de la grille	Temps moyen (sec)
10×10	0.000897
20×20	0.010343
30×30	0.050940
40×40	0.222723
50×50	0.530197

(d) Temps d'exécution moyens en fonction du nombre d'obstacles :

Nombre d'obstacles	Temps moyen (sec)
10	0.012374
20	0.007275
30	0.008942
40	0.006518
50	0.002126

(e) Pour $i \in \{0, \ldots, M - 1\}$ et $j \in \{0, \ldots, N - 1\}$, on définit les variables $w_{i,j}$ tel que $w_{i,j} \in \{0, \ldots, 1000\}$.

De plus, on définit les variables $x_{i,j}$ tel que $x_{i,j} = 1$ si il y a un obstacle présent à la position (i, j) et 0 sinon.

Le problème énoncé peut être modélisé de la manière suivante:

$$\min \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} w_{i,j}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} = P & \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} \leq \frac{2P}{M} & \forall i \in \{0, \dots, M-1\} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{M-1} x_{i,j} \leq \frac{2P}{N} & \forall j \in \{0, \dots, N-1\} \\ x_{i,j} + x_{i,j+2} - x_{i,j+1} \leq 1 & \forall i \in \{0, \dots, M-1\},\ \forall j \in \{0, \dots, N-3\} \\ x_{i,j} + x_{i+2,j} - x_{i+1,j} \leq 1 & \forall i \in \{0, \dots, M-3\},\ \forall j \in \{0, \dots, N-1\} \\ x_{i,j} \in \{0, 1\} & \end{cases}$$