Comparação de estimadores pelo método Monte Carlo das distribuições: $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{0}$, Uniforme, Binomial negativa, Gamma e Exponencial

Antônio Marcos Larangeiras   Alisson Nascimento   Paulo Bruno Normande   Juliana Leal

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Computação

Maceió-AL, Dezembro de 2013

Introdução

- Calcular o estimador por máxima verossimilhança;
- Calcular estimador pelo primeiro momento;
- Calcular estimador pelo segundo momento;
- Utilizar o Método Monte Carlo força bruta.

Distribuição $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0$

Distribuição ($\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0$)

Denotaremos esta distribuição por $Z \sim \mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0(z;\alpha,1,1)$*, com* $-\alpha, z > 0$*. Sua densidade é*

$$f_Z = (z;\alpha,1,1) = \frac{\Gamma(L-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)(1+z)^{1-\alpha}}, com - \alpha \ e \ z > 0.$$

$$E(Z) = \frac{\gamma}{\alpha - 1} \qquad e \qquad Var(Z) = \frac{1}{(\alpha-1)^2} + \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} + \frac{1}{\alpha-1}$$

Estimadores da distribuição $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{0}$

Máxima verossimilhança ($\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{0}$)

$$\widehat{\alpha} = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + z_i)}$$

Primeiro momento ($\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^{0}$)

$$\widehat{\alpha_1} = \overline{Z}$$

Segundo momento ($\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0$)

$$\widehat{\alpha_2} = \frac{\frac{3}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 + 2 + \sqrt{\frac{1}{k^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i^4 + 4}}{\frac{2}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i^2}$$

Gráficos da distribuição $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0$

Distribuição Uniforme $U(0, \theta)$

Distribuição $(U(0, \theta))$

Denotaremos esta distribuição por $X \sim U(x; 0, \theta)$*, com* $\theta > 0$*. Sua densidade é*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{\theta}{2} \qquad e \qquad Var(X) = \frac{\theta^2}{12}$$

Estimadores da distribuição $U(0, \theta)$

Máxima verossimilhança ($U(0, \theta)$)

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant \theta}, \text{portanto } \widehat{\theta} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant \theta$$

Primeiro momento ($U(0, \theta)$)

$$\widehat{\theta}_2 = 2\overline{X}$$

Segundo momento ($U(0, \theta)$)

$$\widehat{\theta}_3 = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Gráficos da distribuição $U(0, \theta)$

Distribuição Binomial Negativa

Considere a situação de observar um evento dicotômico X_i independentes e identicamente distribuídos segundo uma lei de Bernoulli de probabilidade p. Suponha que se registre X, o número de ensaios até obter exatamente k sucessos.

Distribuição Binomial Negativa

Considere a situação de observar um evento dicotômico X_i independentes e identicamente distribuídos segundo uma lei de Bernoulli de probabilidade p. Suponha que se registre X, o número de ensaios até obter exatamente k sucessos.

Distribuição (aaa)

Seja uma variavel aleatoria que fornece o numero de ensaios até o k-simo sucesso.
Usualmente utilizá-se a notação $X \sim BN(p, k)$.

Distribuição Gamma

A Distribuição Gamma é caracterizada por dois valores, denominados *shape* (k) e *scale* (θ).

Distribuição (Função Probabilidade Densidade)

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(x)}$$

$$para$$
$$x > 0 \; e \; k, \theta > 0$$

Estimadores da distribuição Gamma

Como foi definido que o valor de θ seria sempre igual a 1, então basta estimar os valores de k.

Máxima verossimilhança (Gamma)

Estimadores da distribuição Gamma

Primeiro momento (Gamma)

$$E[X] = k\theta$$

$$\hat{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Segundo momento central (Gamma)

$$Var[X] = k\theta^2$$

$$\hat{k} = Var(x)$$

Gráficos da distribuição $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}^0$

Resultados

Conclusões

Referências Bibliográficas