

Distribuição Gamma

Bruno Normande

17 de Dezembro de 2013

1 Algumas características

A distribuição Gamma é uma distribuição que é caracterizada por dois parâmetros, *shape* (k) e *scale* (θ). Ela possui a seguinte função densidade probabilidade:

$$f(w; k, \theta) = \frac{w^{k-1} e^{-\frac{w}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(w)} \quad (1)$$

para

$$k, \theta > 0 \quad (2)$$

Essa distribuição é usada muitas vezes para modelar o tempo de espera, como por exemplo em teste de vida a distribuição Gamma é usada para modelar o tempo até a morte. A figura 1 mostra o comportamento de Gamma para diferentes valores de k e θ .

Obtemos a esperança e a variância da distribuição com as seguintes fórmulas:

$$E[W] = k\theta \quad (3)$$

$$Var[W] = k\theta^2 \quad (4)$$

2 Estimadores

Nesse trabalho foram analisados 6 estimadores para a distribuição Gamma. Em todos foi usado $\theta = 1$ para manter a simplicidade dos teste. Os estimadores usados foram:

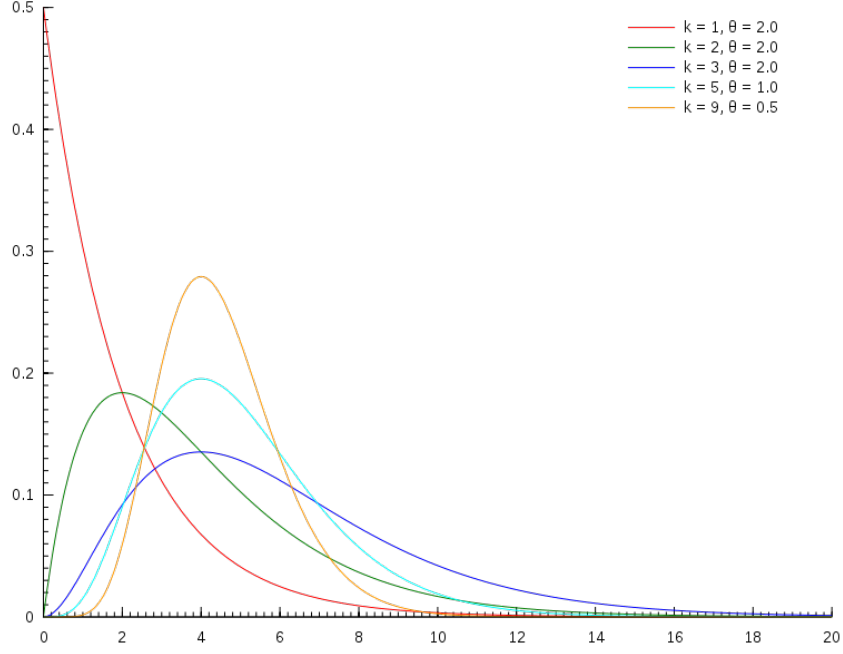


Figura 1: Função probabilidade Densidade de Gamma para diferentes parâmetros

2.1 Estimador por Máxima Verossimilhança

Para estimar pela Máxima Verossimilhança é preciso maximizar a sua função log-verossimilhança de $\Gamma(w; k, 1)$

$$\log(p(W|k, 1)) = n(k-1)\overline{\log(x)} - n\log(\Gamma(k)) - nk\log(\bar{x}) + nk\log(a) - nk \quad (5)$$

Que podemos resolver numericamente iterando sobre k em:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{\overline{\log(x)} - \log(\bar{x}) + \log(k_0) - \psi(k_0)}{k_0^2(\frac{1}{k_0} - \psi'(k_0))} \quad (6)$$

até o momento em que

$$k \approx k_0 \quad (7)$$

Como k inicial podemos usar a seguinte aproximação

$$\hat{k} = \frac{0.5}{\overline{\log(x)} - \log(\bar{x})} \quad (8)$$

2.2 Estimador pelo Primeiro Momento

Usando o método dos momentos podemos estimar k a partir do primeiro momento da seguinte maneira:

$$E[W] = k\theta \quad (9)$$

$$\hat{k}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \quad (10)$$

2.3 Estimador pelo Segundo Momento Central

De maneira similar podemos estimar k a partir do segundo momento central da seguinte maneira:

$$Var[W] = k\theta^2 \quad (11)$$

$$\hat{k}_2^0 = Var(w) \quad (12)$$

2.4 Estimadores com *bootstrap*

Todos os estimadores mencionados acima foram testados também contra suas versões com *bootstrap*. Dessa maneira foi possível observar se usando o método *bootstrap* poderíamos diminuir o viés desses estimadores.

Como notação para identificar estes estimadores foi usado um til no lugar do chapéu:

$$\tilde{k}, \tilde{k}_1 \text{ e } \tilde{k}_1^2$$

3 Resultados

As tabelas a seguir comparam os estimadores usados com suas versões *bootstraped*.

| Comparação dos Estimadores \hat{k} e \tilde{k} | | | |
|--|-----|---------------------------------|---------------------------------|
| n | k | $ B(\hat{k}) > B(\tilde{k}) $ | $EQM(\hat{k}) > EQM(\tilde{k})$ |
| 100 | 1 | TRUE | TRUE |
| 1000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 1 | FALSE | TRUE |
| 100000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 100 | 2 | TRUE | TRUE |
| 1000 | 2 | TRUE | FALSE |
| 10000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100 | 3 | TRUE | TRUE |
| 1000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 3 | TRUE | FALSE |
| 100 | 5 | TRUE | TRUE |
| 1000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 5 | FALSE | TRUE |
| 100000 | 5 | FALSE | TRUE |
| 100 | 9 | FALSE | TRUE |
| 1000 | 9 | TRUE | TRUE |
| 10000 | 9 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 9 | TRUE | TRUE |

Tabela 1: Estimadores de máxima verossimilhança \hat{k} e \tilde{k} .

| Comparação dos Estimadores \hat{k}_1 e \tilde{k}_1 | | | |
|--|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|
| n | k | $ B(\hat{k}_1) > B(\tilde{k}_1) $ | $EQM(\hat{k}_1) > EQM(\tilde{k}_1)$ |
| 100 | 1 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 1 | TRUE | FALSE |
| 100000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 100 | 2 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 2 | TRUE | FALSE |
| 10000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100 | 3 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 100 | 5 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 100 | 9 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 9 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 9 | TRUE | FALSE |
| 100000 | 9 | FALSE | FALSE |

Tabela 2: Estimadores de primeiro momento \hat{k}_1 e \tilde{k}_1 .

| Comparação dos Estimadores \hat{k}_2^0 e \tilde{k}_2^0 | | | |
|--|-----|---|---|
| n | k | $ B(\hat{k}_2^0) > B(\tilde{k}_2^0) $ | $EQM(\hat{k}_2^0) > EQM(\tilde{k}_2^0)$ |
| 100 | 1 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 1 | TRUE | FALSE |
| 10000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 1 | FALSE | FALSE |
| 100 | 2 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 2 | TRUE | FALSE |
| 10000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 2 | FALSE | FALSE |
| 100 | 3 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 3 | TRUE | FALSE |
| 10000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 3 | FALSE | FALSE |
| 100 | 5 | FALSE | FALSE |
| 1000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 100000 | 5 | FALSE | FALSE |
| 100 | 9 | TRUE | FALSE |
| 1000 | 9 | FALSE | FALSE |
| 10000 | 9 | TRUE | FALSE |
| 100000 | 9 | FALSE | FALSE |

Tabela 3: Estimadores de segundo momento central \hat{k}_2^0 e \tilde{k}_2^0 .