LES SYSTEMES DE NUMERATION

I./ Pourquoi ?

Dès le début de l'histoire humaine se posa le problème du comptage, à cause notamment des échanges commerciaux. Lorsque les quantités troquées devinrent très importantes, il fallut inventer un système permettant de les dénombrer. Les premières techniques employées, dites de correspondance terme à terme (utilisation par exemple des doigts ou de cailloux), étaient très simples mais montrèrent assez vite leurs limites pour de grandes quantités. Une première innovation fut d'utiliser une représentation symbolique, en faisant des traits sur un papyrus ou des entailles sur un morceau de bois : ce système était plus performant mais ne permettait que difficilement de manipuler des grandes quantités. D'autres types de représentation émergèrent.

II./ Deux types de systèmes de numération :

1./ La numération additive :

L'idée est d'utiliser plusieurs symboles, chacun représentant une quantité différente.

<u>Exemple de la numération romaine :</u>

I	*V*	*X*	*L*	*C*	*D*	*M*
1	**5**	**10**	**50**	**100**	**500**	**1000**

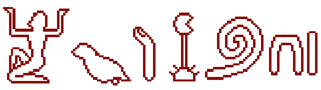
On parle de numération additive car il suffit d'additionner les quantités représentées par les différents symboles pour obtenir le nombre recherché.

Exemple : *MDCLXXVIII* = 1678

Avec 7 symboles seulement, les romains parvenaient à écrire les nombres de 1 à 9999. La numération romaine n'est pas un système additif pur, les romains utilisant une astuce pour limiter le nombre de symboles utilisés : *IV* = 4, au lieu de *IIII*, ou *IX* = 9 au lieu de *VIIII*, par exemple.

<u>Exemple de la numération égyptienne :</u>

La numération égyptienne utilise les 7 symboles suivants :



représentant respectivement un million, cent mille, dix mille, mille, cent, dix et un. Avec ces sept symboles, les égyptiens pouvaient écrire des nombres de 1 à 9 999 999. Ce système est donc plus efficace que le système romain.

Exemple :

Valeur :

Intérêt de ce type de numération : très grande simplicité d'utilisation.
Inconvénients : * Il faut dessiner un grand nombre de symboles pour représenter certaines quantités.
* Les calculs sont très complexes et nécessitent un support matériel (cailloux, boulier).
Remarque : les systèmes de numération additive ne connaissent pas le zéro en tant que nombre.

2./ La numération de position :

Dans ce type de système, un même symbole peut représenter deux valeurs différentes en fonction de la position qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

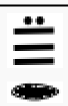
<u>Exemple de la numération maya :</u>

Chiffre maya	Valeur
	0
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9

Chiffre maya	Valeur
	10
	11
	12
	13
	14
	15
	16
	17
	18
	19

Les mayas utilisent 20 symboles différents, représentant les nombres de 0 à 19. A noter que chaque symbole est construit sur un système additif, une barre représentant 5, et un point représentant 1. Le zéro est présent.

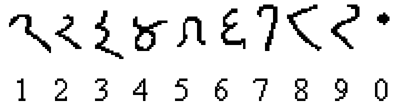
Exemples :

Valeur	Chiffres mayas	note
27		20+7
358		17×20+18
340		17×20+0
101011		14×8000+0x400+10×20+11

Les symboles sont placés verticalement, du bas vers le haut. Au deuxième étage, les symboles représentent les vingtaines, au troisième des paquets de 400 (20^2), au quatrième de 8000 (20^3).

Exemple de la numération indienne : (les chiffres « arabes »)

Ce système utilise dix symboles :



Les nombres s'écrivent horizontalement, les unités à droite. En allant vers la gauche, on a ensuite les dizaines (10^1), les centaines (10^2), les milliers (10^3), etc.

Grâce à ce type de numération, on peut écrire virtuellement tous les nombres, même les plus grands, avec un nombre très limité de symboles. De plus les calculs deviennent très simples avec ce type de représentation (si on connaît ses tables bien sûr…).

Remarque : certains systèmes positionnels n'utilisaient pas le chiffre « zéro », comme par exemple le babylonien. Il y a alors risque de confusion quant à la valeur que va prendre un symbole particulier.

III./ Bases de numération :

Tous les systèmes de numération n'ont pas le même nombre de symboles pour coder les nombres : on dit qu'ils n'utilisent pas la même base. Le système indien, par exemple, est en base 10 ; le système maya est en base 20. Les babyloniens avaient un système à base 60.

1./ Fonctionnement du système décimal :

Les différents chiffres constituant le nombre représentent les puissances de 10 successives :

$$\mathbf{6571 = 6 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 1 = 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0}$$

On peut aussi retrouver cette décomposition, en faisant des divisions par 10 successives :

6571 ÷ 10 = 657 et il reste 1.
657 ÷ 10 = 65 et il reste 7.
65 ÷ 10 = 6 et il reste 5
6 ÷ 10 = 0 et il reste 6.

Les restes successifs pris en sens inverse redonnent le nombre de départ, soit 6571.

Question : pourrait-on décomposer n'importe quel nombre de la même façon, mais en utilisant des puissances d'un autre nombre que 10 ?

2./ Numération octale (base 8) :

On décide d'appliquer la méthode précédente des divisions successives en utilisant le nombre 8 comme diviseur. On reprend le même nombre : 6571.

6571 ÷ 8 = 821 et il reste 3.
821 ÷ 8 = 102 et il reste 5.
102 ÷ 8 = 12 et il reste 6.
12 ÷ 8 = 1 et il reste 4.
1 ÷ 8 = 0 et il reste 1.

Les restes pris à l'envers donnent le nombre : 14653, et on remarque que l'on a effectivement :

$$\mathbf{6571 = 1 \times 8^4 + 4 \times 8^3 + 6 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0}$$

Nous trouvons donc que le nombre décimal 6571 s'écrit 14653 en base 8. On note ceci sous la forme suivante : $(6571)_{10} = (14653)_8$.

Remarque : le reste d'une division par 8 ne peut être qu'un nombre compris entre 0 et 7 inclus : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Cela veut donc dire qu'il ne faut que 8 symboles pour écrire un nombre en base 8. On retrouve donc la définition précédente de la base de numération.

3./ Numération binaire (base 2) :

On essaye maintenant d'écrire 6571 comme une somme de puissances de 2. On utilise donc la méthode des divisions successives avec le nombre 2 comme diviseur.

$6571 \div 2 = 3285$ et il reste 1.
$3285 \div 2 = 1642$ et il reste 1.
$1642 \div 2 = 821$ et il reste 0.
$821 \div 2 = 410$ et il reste 1.
$410 \div 2 = 205$ et il reste 0.
$205 \div 2 = 102$ et il reste 1.
$102 \div 2 = 51$ et il reste 0.
$51 \div 2 = 25$ et il reste 1.
$25 \div 2 = 12$ et il reste 1.
$12 \div 2 = 6$ et il reste 0.
$6 \div 2 = 3$ et il reste 0.
$3 \div 2 = 1$ et il reste 1.
$1 \div 2 = 0$ et il reste 1.

Les restes pris à l'envers donnent le nombre : 1100110101011, et on remarque que l'on a effectivement :

$$\mathbf{6571 = 1 \times 2^{12} + 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 0 \times 2^{9} + 1 \times 2^{8} + 1 \times 2^{7} + 0 \times 2^{6} + 1 \times 2^{5} + 0 \times 2^{4} + 1 \times 2^{3} + 0 \times 2^{2} + 1 \times 2^{1} + 1 \times 2^{0}}$$

Le nombre décimal 6571 s'écrit donc 1100110101011 en binaire. Comme précédemment, on s'aperçoit que la numération binaire ne comporte que 2 symboles, le reste d'une division par 2 ne pouvant être que 0 ou 1. Les « chiffres » binaires s'appellent des bits (binary digits). Le nombre étudié dans l'exemple comporte 13 bits.

Règle générale :

- On peut décomposer n'importe quel nombre en utilisant n'importe quel nombre entier supérieur ou égal à 2 comme base de numération.
- Si la base de numération utilisée est n, les nombres seront écrits grâce à n symboles (que l'on appelle « chiffres » par analogie avec le système décimal).
- L'écriture d'un même nombre est d'autant plus compacte que la base de numération est élevée. Exemple : $(6571)_{10} = (14653)_8 = (1100110101011)_2$: pour écrire le même nombre, il faut 4 chiffres en base 10, 5 chiffres en base 8, et 13 chiffres en base 2.

4./ Dernier exemple : la numération hexadécimale (base 16) :

Le problème est le suivant : pour écrire un nombre en base 16, il faut disposer de 16 symboles différents. Or nous ne disposons que de 10 chiffres, de 0 à 9. Pour avoir 16 symboles, on ajoute donc les six premières lettres de l'alphabet. Les « chiffres » hexadécimaux sont donc :

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*

On reprend notre exemple (6571) avec des divisions successives par 16 :

$6571 \div 16 = 410$ et il reste 11.
$410 \div 16 = 25$ et il reste 10.
$25 \div 16 = 1$ et il reste 9.
$1 \div 16 = 0$ et il reste 1.

Les restes successifs pris en sens inverse sont : 1, 9, 10 et 11. 10 s'écrit « A » et 11 s'écrit « B » en base 16. Le nombre décimal 6571 s'écrit donc 19AB en base 16 : $(6571)_{10} = (19AB)_{16}$.

On remarque qu'on a bien :

$$\mathbf{6571 = 1 \times 16^3 + 9 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 11 \times 16^0}$$

5./ Mais quel est l'intérêt de tout ça ?

Le système binaire est très utile pour coder les nombres à l'aide de signaux électriques : on peut par exemple choisir la convention suivante :

Le courant passe = 1
Le courant ne passe pas = 0

Les ordinateurs utilisent donc le système binaire pour représenter les nombres. Le problème est que la base 2 n'est pas pratique pour les êtres humains : lorsque la valeur du nombre augmente, le nombre de bits croit très rapidement. Pour garder une écriture de taille raisonnable, il faut donc choisir une base plus grande que 2. Pour des raisons mathématiques, il est très pratique d'utiliser une base qui soit un multiple de 2, car cela rend les conversions plus simples. D'où l'intérêt des bases 8 et 16, qui permettent d'écrire de façon plus lisible les nombres binaires manipulés par les ordinateurs. De nos jours la base 8 n'est plus utilisée.

Exemple :

Dec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Bin	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Hex	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

$$\mathbf{(1100101011111110)_2 \Rightarrow 1100\ 1010\ 1111\ 1110 \Rightarrow C\ A\ F\ E \Rightarrow (CAFE)_{16}.}$$

Exercices :

- Ecrire votre année de naissance dans les bases 2 et 16.
- Quel est le plus grand nombre binaire que l'on puisse écrire avec 16 bits ? Ecrire ce nombre et le convertir dans les bases 8, 16 et 10.
- Ecrire le nombre 6571 en base 5, puis en base 12 (en utilisant les chiffres de 0 à 9 puis les lettres A et B).

Extrait de « Les nombres, math un peu ma planète » de Jean Pézennec
Dessin de François Lachèze