

Relatório - Lista E

Grupo 17

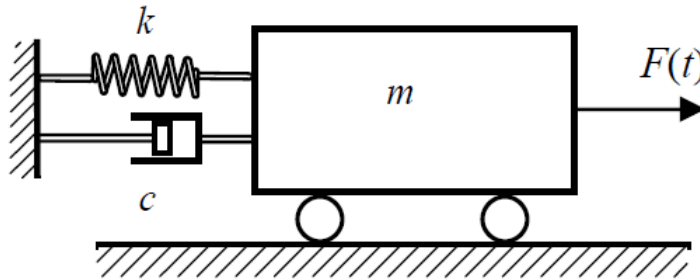
Bruno Caixeta Piazza - 11260551, Gustavo Nunes Ribeiro - 11262212,
Murilo Camargo Marchioni - 11260717, Vinícius Maia Neto - 11261785

17 de novembro de 2021

1 Definição do Sistema e Análise

A proposta inicial consiste na obtenção das equações de estado e função de transferência do sistema massa-mola-amortecedor, conforme a Figura 1.

Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor a ser analisado



Fonte: enunciado do trabalho.

As equações de estado decorrem das equações diferenciais que regem o movimento desse sistema, obtidas com a Segunda Lei de Newton. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

Ademais, a representação matricial do sistema no espaço de estados será

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (1)$$

em que $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$.

Para se encontrar a Função de Transferência do sistema, calculam-se os autovalores da matriz que multiplica o vetor contendo x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) = 0 &\iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{c}{m}\lambda + \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\end{aligned}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
 sx_1 - x_1(0) &= x_2 \\
 sx_2 - x_2(0) &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m} \\
 x_2\left(s + \frac{c}{m}\right) &= x_2(0) - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F}{m} \rightarrow x_2 = \frac{m}{ms+c}\left(x_2(0) - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F}{m}\right) \\
 sx_1 - x_1(0) &= \frac{1}{ms+c}\left(\frac{x_2(0)}{m} - kx_1 + F\right) \rightarrow x_1\left(s + \frac{k}{ms+c}\right) = x_1(0) + \frac{x_2(0)}{m^2s} + \frac{F}{ms+c}
 \end{aligned}$$

Considerando as condições iniciais como nulas ($x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$), segue que:

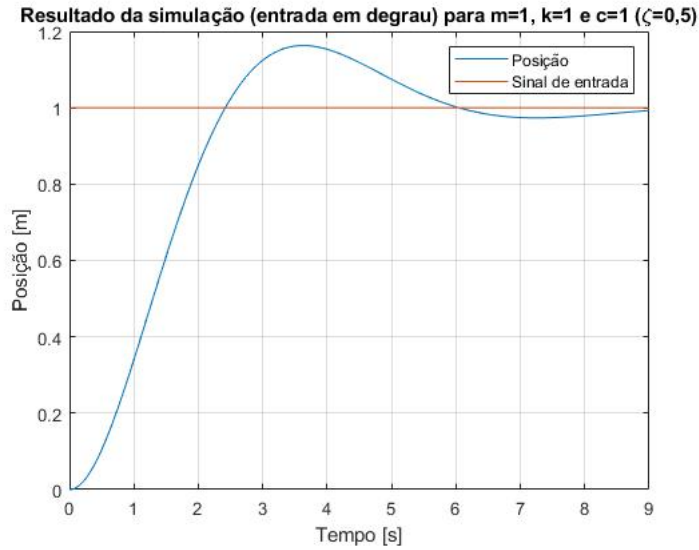
$$x_1 = \left(\frac{ms+c}{ms^2+cs+k}\right)\frac{F}{ms+c} \rightarrow x_1 = \frac{F}{ms^2+cs+k}$$

Chega-se, afinal, na seguinte função de transferência:

$$G = \frac{x_1}{F} \therefore G(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

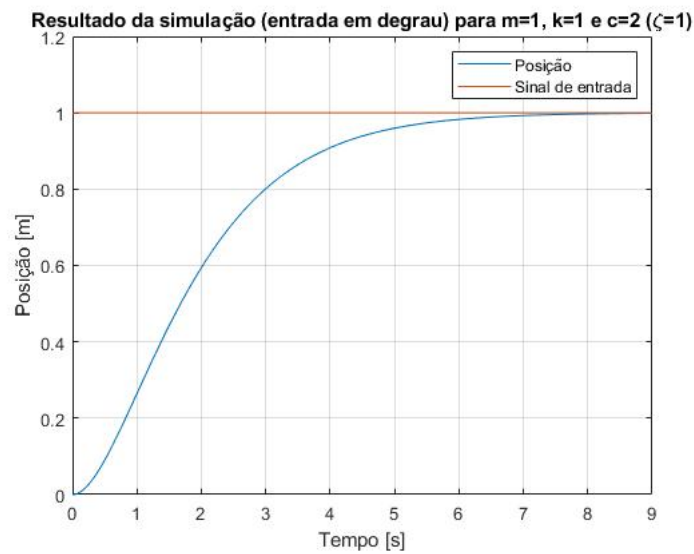
Segue abaixo figuras de simulações considerando diferentes entradas do sistema e considerando $x(t)$ como a saída.

Figura 2: Evolução temporal da posição do corpo para o primeiro caso



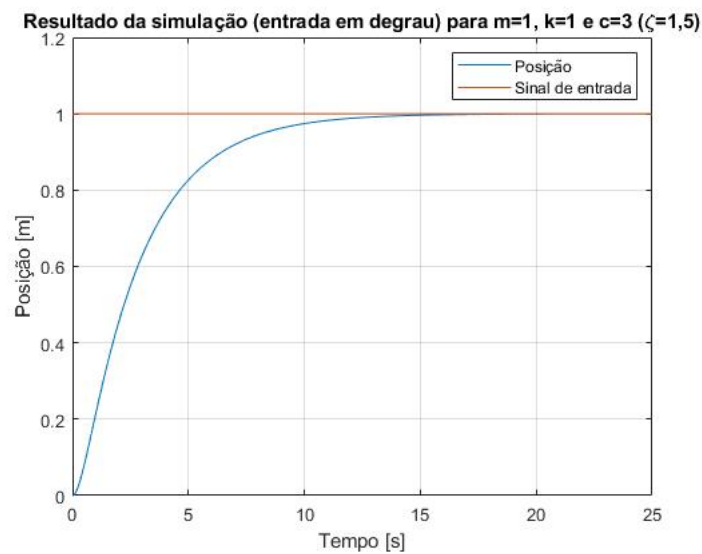
Fonte: autoria própria.

Figura 3: Evolução temporal da posição do corpo para o segundo caso



Fonte: autoria própria.

Figura 4: Evolução temporal da posição do corpo para o terceiro caso



Fonte: autoria própria.

2 Exercício 1

Uma vez que os autovalores já foram calculados anteriormente para a obtenção da função de transferência, calcula-se as raízes do polinômio característico.

$$\frac{c}{m}\lambda + \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Nota-se, portanto, que as raízes do polinômio característico são iguais às raízes da função de transferência do sistema, como esperado.

Assim, para o caso subamortecido $\zeta < 1$, tem-se as seguintes condições:

$$\begin{cases} m = 1 \text{ kg} \\ k = 1 \text{ N/m} \\ c = 1 \text{ N s/m} \end{cases}$$

Com isso, obtém-se os polos

$$\begin{cases} p_1 = -0,500 + 0,866i \\ p_2 = -0,500 - 0,866i \end{cases}$$

Assim, obtém os seguintes resultados para a frequência natural e o coeficiente de amortecimento do sistema, respectivamente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 \cdot 1}} = 0,5$$

Com isso, o módulo das raízes complexas é dado por

$$||\lambda|| = \sqrt{(-0,5)^2 + (\pm 0,8661)^2} = 1,$$

que é o mesmo valor calculado para a frequência natural.

Além disso, dividindo-se o módulo da porção real da raiz complexa pelo módulo das porções real e complexa, obtém-se o valor para o coeficiente de amortecimento do sistema.

$$\frac{|Re(p_{1,2})|}{||p_{1,2}||} = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

Por fim, a frequência de oscilação será o módulo da parte imaginária do polo:

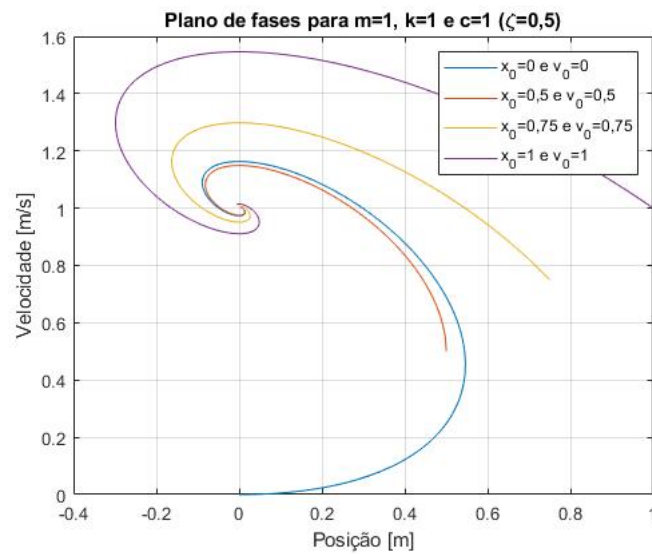
$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 1 \cdot \sqrt{1 - (0,5)^2} = 0,8661$$

3 Exercício 2

Agora, o sistema é simulado para entrada nula e diferentes condições iniciais não nulas. O intuito é obter diferentes espaços de fases, com gráficos de v por x .

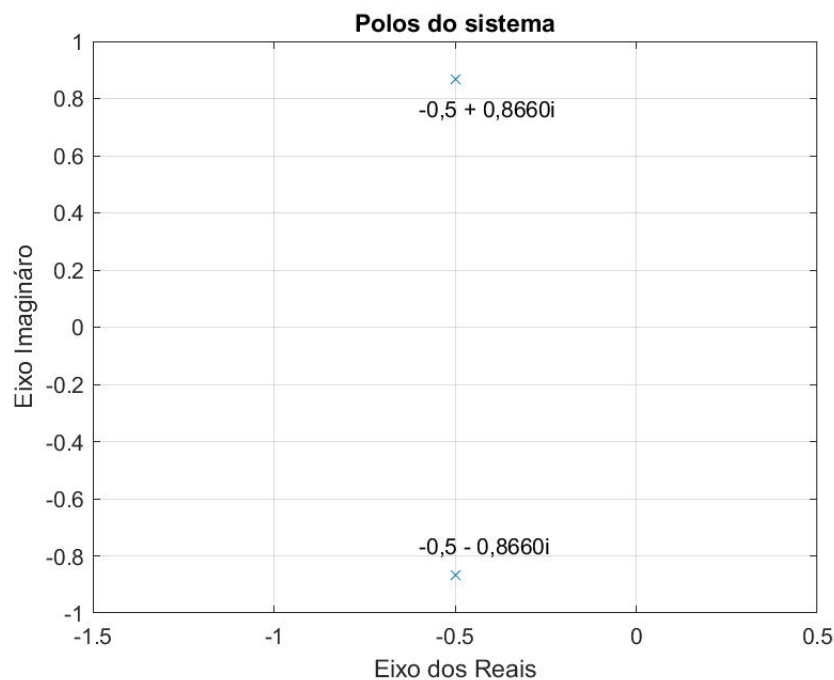
Na primeira figura são mostrados, simultaneamente, os resultados de diversas simulações com diferentes condições iniciais, mas com os mesmos parâmetros k , m e c , de tal modo que obtém-se a Figura 5. Como esperado, os polos obtidos são complexos, contidos na Figura 6. No caso do amortecimento sub-crítico, da análise do plano de fases, o corpo oscila em torno da origem, tendo sua amplitude reduzida até que sua posição tende à origem, com velocidade tendendo a zero. Para valores maiores de $x(0)$, o corpo atinge amplitudes maiores. A amplitude inicial é a máxima.

Figura 5: Representação gráfica do plano de fases para o primeiro caso



Fonte: autoria própria.

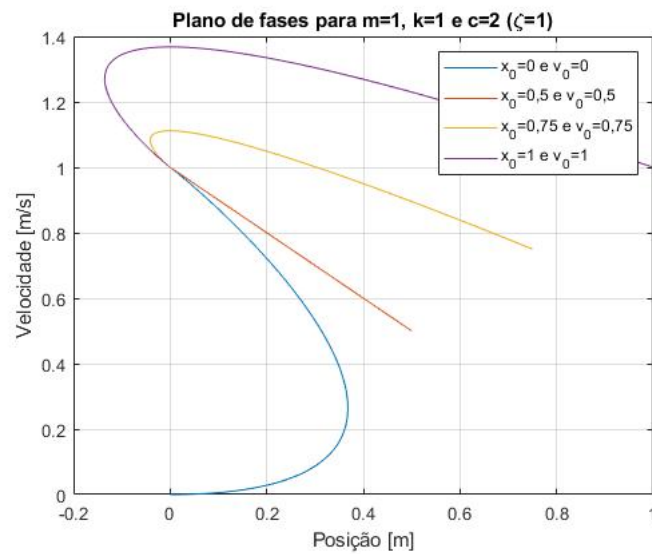
Figura 6: Representação gráfica dos polos do sistema para o primeiro caso



Fonte: autoria própria.

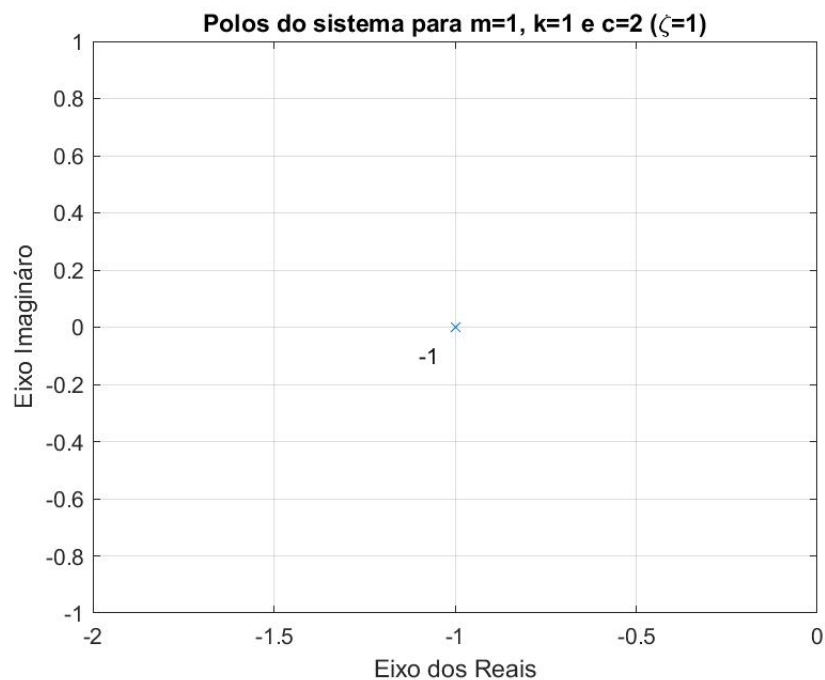
Analogamente, o segundo caso é feito de modo semelhante ao primeiro, mas os polos obtidos são reais e iguais, ilustrados na Figura 8. A representação gráfica de v versus x é explicitada na Figura 7. Nota-se que, no amortecimento crítico, o sistema é amortecido sem mesmo oscilar em torno da posição de equilíbrio. O corpo atinge uma velocidade máxima em módulo, reduzida a zero quando o corpo chega à origem.

Figura 7: Representação gráfica do plano de fases para o segundo caso



Fonte: autoria própria.

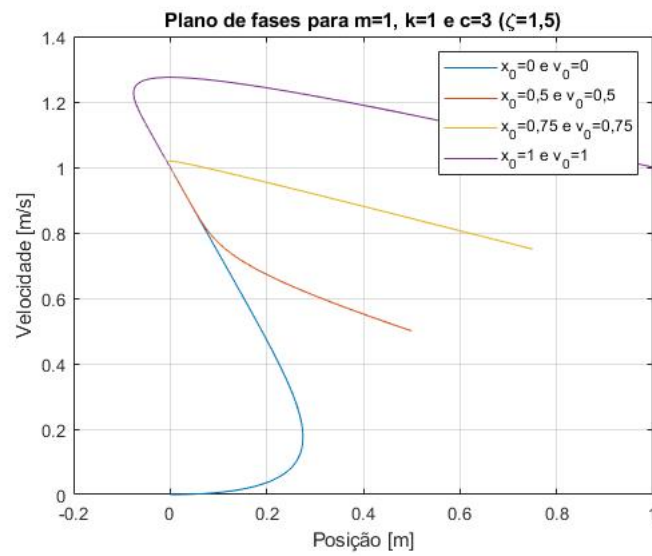
Figura 8: Representação gráfica dos polos do sistema para o segundo caso



Fonte: autoria própria.

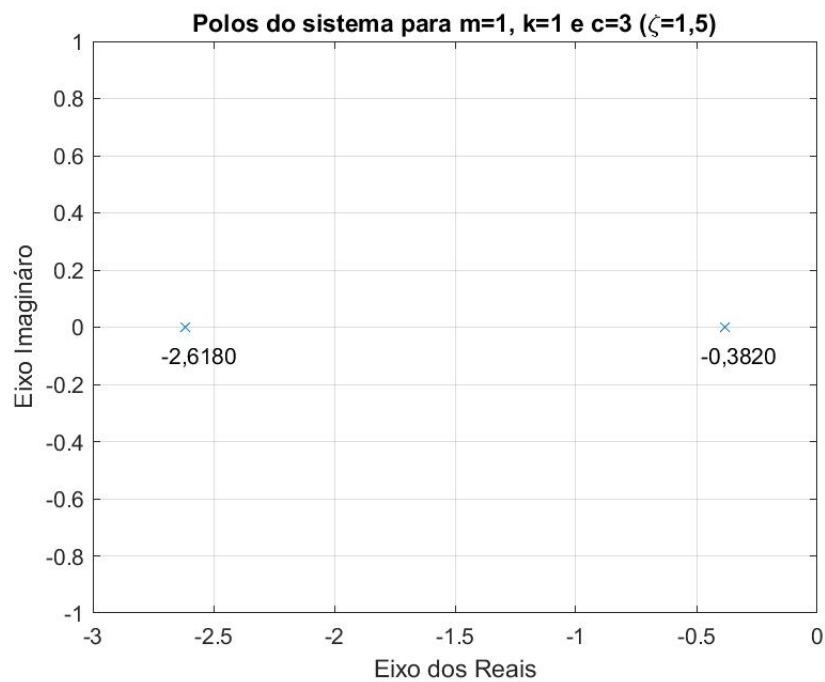
Por fim, são simuladas diferentes condições iniciais, com parâmetros mantidos constantes, a fim de se obter polos reais e distintos. Os resultados são ilustrados na Figura 9 e Figura 10. O movimento com amortecimento supercrítico possui uma característica notável: a massa atinge uma velocidade máxima e, em seguida, é desacelerado até velocidade nula, quando atinge a origem. A elevada força viscosa faz com que o módulo máximo da velocidade aconteça pouco após a posição inicial.

Figura 9: Representação gráfica do plano de fases para o terceiro caso



Fonte: autoria própria.

Figura 10: Representação gráfica dos polos do sistema para o terceiro caso



Fonte: autoria própria.

Anexos

A Código: sistema massa-mola-amortecedor

```

1 clear all
2 clc
3 close all
4 %%
5 %   INTRODUÇÃO
6 %Parâmetros do sistema
7 %Declaração de variáveis
8 m=1;b=1;k=1;
9
10 %Definição da função de transferência
11 s=tf('s');
12 G=1/(m*s^2+b*s+k);
13
14 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
15 %Simulação do sistema
16 %Criação do vetor de tempo
17 t=0:.01:9;
18
19 %Definição da entrada
20 u=ones(size(t));
21
22 %Definição do vetor de condições iniciais
23 x0=[0;0];
24
25 %Plots
26 figure(1)
27 [y,~,~]=lsim(G,u,t,x0);
28
29 figure(1)
30 plot(t,y,t,u)
31 title('Resultado da simulação (entrada em degrau) para m=1, k=1 e c=1 (\zeta=0,5)')
32 grid on
33 axis([0 max(t) 0 1.2])
34 ylabel('Posição [m]')
35 xlabel('Tempo [s]')
36 legend('Posição','Sinal de entrada')
37 %%
38 %   QUESTÃO 1
39 %Frequência natural
40 FrequenciaNatural=sqrt(k/m)
41
42 %Amortecimento
43 Zeta=b/(2*sqrt(k*m))
44
45 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
46 %Matriz A
47 A=[0,1;-k/m,-b/m];
48
49 %Cálculo dos autovalores
50 [V,AutoValores] = eig(A);
51 AutoValores
52
53 %Cálculo das raízes do denominador
54 raizes=roots([m,b,k])
55
56 %Módulo das raízes
57 Modulo=abs(raizes)
58
59 %Real/Mod = Coef de amort
60 Real=abs(real(raizes));
61 CoefAmort=Real/Modulo
62
63 %%
64 %   QUESTÃO 2
65 figure(2)
66 plot(real(raizes),imag(raizes),'x')
67 title('Polos do sistema')
68 grid on
69 ylabel('Eixo dos Reais')

```



```

70 xlabel('Eixo Imaginário')
71 text(real(raizes(1))-0.1,-0.1+imag(raizes(1)),'-0,5 + 0,8660i');
72 text(real(raizes(2))-0.1,0.1+imag(raizes(2)),'-0,5 - 0,8660i');
73
74 for i=1:4
75     %Definição do vetor de condições iniciais
76     x0n=[0,0.5,0.75,1;0,0.5,.75,1];
77
78     %Simulação
79     %Gambiarra
80     [A,B,C,D] = ssdata(G);
81     Gn = ss(A,B,C,D);
82     [y,tout,x]=lsim(Gn,u,t,[x0n(1,i);x0n(2,i)]);
83
84     %Plots
85     figure(3)
86     plot(x(:,1),y)
87     title('Plano de fases para m=1, k=1 e c=1 (\zeta=0,5)')
88     grid on
89     ylabel('Velocidade [m/s]')
90     xlabel('Posição [m]')
91     legend('x_0=0 e v_0=0','x_0=0,5 e v_0=0,5','x_0=0,75 e v_0=0,75','x_0=1 e v_0=1')
92     axis([-0.4 1 0 1.6])
93     hold on
94
95 end

```