Cássio Murakami
Gabriel Barbosa Paganini
Henrique Kuhlmann
João Otávio Tanaka de Oliveira

Modelagem e simulação de um satélite artificial atuado com rodas de reação

São Paulo, Brasil

2021

Cássio Murakami
Gabriel Barbosa Paganini
Henrique Kuhlmann
João Otávio Tanaka de Oliveira

Modelagem e simulação de um satélite artificial atuado com rodas de reação

Trabalho final para a disciplina de Modelagem de Sistemas Dinâmicos (PME 3380) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Universidade de São Paulo
Escola Politécnica

São Paulo, Brasil
2021

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Nomenclatura

$[J_{Oxyz}]$ Tensor de inércia

$\ddot{\varphi}$ Derivada segunda da variável φ em relação ao tempo

$\dot{\varphi}$ Derivada da variável φ em relação ao tempo

$\dot{\vec{r_o}}$ Vetor velocidade no polo O

Ω_x Componente do vetor rotação relativa no eixo x

ω_x Componente do vetor rotação instantânea no eixo x

$\vec{H}_o$ Vetor momento da quantidade de movimento no polo O

$\vec{V}_G$ Vetor velocidade no baricentro

G Baricentro

I_x Momento de inércia do satélite no eixo x

J Momento de inércia do conjunto girante da roda de reação

M_x Componente do momento externo no eixo x

T_{xy} Torque da roda de reação disposta no eixo x sobre o eixo y do satélite

T_x Torque da roda de reação disposta no eixo x sobre o eixo x do satélite

M_o^{ext} Momento das forças externas no polo O

h$_x$ Momento da quantidade de movimento do rotor x relativo ao satélite

Sumário

Resumo

No presente trabalho é realizada a modelagem e simulação de um satélite artificial atuado com rodas de reação. Inicialmente, é apresentado o contexto geral no qual este relatório está inserido, como a importância dos satélites artificiais e como este destaca-se no cenário atual do Brasil. Com isso, foi possível estabelecer os objetivos do trabalho, que são elaborar um modelo de satélite, orientado por ângulos de Euler, com mecanismos de controle de rodas de reação. Ademais, é desejado criar um modelo linearizado que deve representar o satélite modelado sem grandes desvios. A fim de possibilitar a criação de um sistema de tamanha complexidade, fez-se uma revisão bibliográfica para aprimorar o entendimento do funcionamento e modelagem de um satélite. A partir desta, foi possível estabelecer alicerces para o desenvolvimento dos modelos, como separar o estudo dos movimentos do centro de massa e da rotação do satélite, além da análise cinemática e dinâmica da atitude do corpo e das rodas de reação. Para a metodologia, seguiu-se com proximidade o molde que foi apresentado na disciplina de "Modelagem de Sistemas Dinâmicos (PME 3380)". A princípio, é realizado um estudo aprofundado das equações que regem cada corpo, no caso o satélite e as rodas de reação, a partir disso, incorpora-se a cinemática, com os ângulos de Euler, ao modelo dinâmico. Consequentemente, o desenvolvimento do sistema é dividido em linear e não linear, de modo a criar dois modelos com o mesmo objetivo de modelar o satélite atuado por rodas de reação. Realiza-se então um código computacional para resolução numérica das equações diferenciais que regem o sistema, o que torna possível a obtenção das soluções na forma linear e não linear. Por fim, o modelo criado é submetido a diferentes tipos de entrada, como degrau, impulso e senoidal, de modo a testar a qualidade do modelo com base em uma seleção de parâmetros para que as simulações fiquem próximas de casos reais encontrados na bibliografia.

Palavras-chave: Ângulos de Euler. Atitude. Equilíbrio. Linearização. Modelagem. Rodas de reação. Satélite. Simulação numérica

1 Introdução

Nos dias atuais, a vida dos seres humanos é muito dependente dos meios de telecomunicação e principalmente da internet. Para que toda a infraestrutura de comunicação mundial opere corretamente, é fundamental o papel dos satélites artificiais. Inúmeros serviços, considerados casuais para boa parte da população brasileira, apenas são possível graças aos satélites artificiais, como o *GPS*, a internet, as chamadas telefônicas, a televisão, entre outras tecnologias.

Uma aplicação de suma importância dos satélites artificiais é no imageamento de regiões inteiras, a fim de gerenciar recursos naturais, monitorar e zonear regiões rurais, estudar os efeitos das mudanças climáticas ou simplesmente prever o clima. É dentro deste planisfério de ações que surgiu o programa CBERS, sigla de *China-Brazil Earth Resources Satellite* (em português, Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestres), em 1988 (OLIVEIRA, 2009). A cooperação consiste de um programa técnico-científico binacional que envolve o Brasil e a China, visando o desenvolvimento técnico e científico dos dois países emergentes. Após trinta anos de existência, quatro satélites construídos e três missões de inserção em órbita bem sucedidas, o programa gera ao Brasil formação e informação para a conquista do espaço e conhecimento de suas terras.

O CBERS 4 é o quarto e mais recente modelo de uma parceria entre o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e a Academia Chinesa de Tecnologia Espacial (CAST), sendo construído e lançado em 2019. O satélite é o maior fabricado da família de veículos, pois os equipamentos embarcados possuem maior resolução para as informações geradas durante sua órbita heliossíncrona, a qual facilita o imageamento de regiões de interesse, como a Amazônia. Devido à maior ordem de grandeza do corpo e importância da missão, o controle preciso de sua estabilidade evidencia-se como ponto chave para o sucesso da missão.

Dessa maneira, propõe-se a análise da estabilidade própria deste objeto, além de uma revisão sobre os meios de atuação e controle da atitude de um satélite, voltando-se a dispositivos de massas inerciais, como rodas de reação. Modelos para o funcionamento destes dispositivos em um espaço tridimensional, além de proposições de controle de satélites por meio da utilização de três rodas de reação, posicionadas em eixos principais de inércia diferentes, também são abordados. Um modelo do sistema completo, incluindo as três rodas de reação e o satélite também é revista e analisada.

2 Objetivos

Esse projeto tem como principal objetivo elaborar um modelo de satélite, orientado no espaço por ângulos de Euler, com mecanismos de controle, no caso, torques externos gerados por rodas de reação acopladas ao corpo, a fim de garantir a estabilização e domínio sobre sua movimentação rotacional. Com base no modelo desenvolvido, criam-se alicerces para estudos correlacionados ao controle dos atuadores em trabalhos futuros da disciplina de Controle e Aplicações - PME 3481.

Em relação ao modelo não linear, almeja-se que este represente a realidade de maneira fiel, uma vez que seu uso em aplicações da indústria aeroespacial são inúmeros, como em missões de satélites nacionais futuros do programa CBERS. Adicionalmente, o modelo linear também deve representar sem grandes desvios o modelo não linear ao redor do ponto de linearização, pois seu uso em controle linear é de extrema importância para reduzir a complexidade do sistema tratado e aprimorar as respostas do objeto a distúrbios comuns durante a operação.

3 Revisão bibliográfica

A fim de possibilitar que satélites artificiais funcionem adequadamente, é essencial que eles estejam orientados na atitude correta, ou seja, que eles apontem para o local exigido e possuam rotações controladas em torno destes eixos (SHRIVASTAVA; MODI, 1983). Por exemplo, para que um satélite telescópio obtenha uma imagem com precisão, é necessário que ele observe o mesmo local do céu noturno ao passar em determinado ponto de sua órbita, como no caso do satélite norte americano *Hubble* (DAVIS et al., 1986). Outra aplicação é descrita em "Manobras orbitais de satélites artificiais lunares com aplicação de propulsão contínua"(GONÇALVES, 2013), onde a importância deste controle é levada à aplicação de satélites em órbitas lunares. Um último caso é avaliado sobre a orientação de objetos espaciais, com a implementação dos ângulos de Euler e quatérnions nos computadores do ônibus espacial *Space Shuttle* para a realização de manobras precisas (HENDERSON, 1977).

Em adição, como descrito em "Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais"(CABETTE, 2006), vários são os fatores externos que influenciam na atitude dos ângulos de um satélite, como o torque do gradiente da gravidade sobre o corpo ou a pressão solar. Entretanto, é possível e de interesse separar os movimentos de translação do centro de massa dos de rotação do satélite, de modo a tratá-los como movimentos independentes (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014), como faz o trabalho diante do estudo apenas das rotações absolutas do objeto. Assim, para que o satélite faça a transmissão perfeita da sua informação, dando-se como controlado o movimento de translação do corpo, é necessária a sua estabilização e domínio total sobre sua movimentação rotacional, como ângulos de Euler e suas derivadas.

Com base no problema exposto, escolheu-se por modelar a atitude de um satélite atuado por torques externos gerados por rodas de reação acopladas ao conjunto. Para tal, uma análise cinemática e dinâmica da atitude do sistema é feita em conformidade com as duas bibliografias principais (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014) e (WERTZ, 1978). Destaca-se que, para o estudo do satélite CBERS, optou-se por não modelar os elementos flexíveis do mesmo, como o painel solar principal, dado que seu estudo foge do escopo da bibliografia base e demandaria métodos de elementos finitos, conforme discute (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014). Por fim, a revisão de um caso simplificado de um satélite com duas rodas de reação (KIM; KIM, 2001) auxiliou na dedução dos efeitos combinados de rodas de reação atuando dentro de um satélite, além da escolha das variáveis de análise e futuro controle, como os ângulos de Euler e suas derivadas temporais.

4 Metodologia

A metodologia utilizada no presente trabalho é consoante com a estudada na disciplina para a modelagem de sistemas dinâmicos a partir de modelos físicos e matemáticos dos componentes do satélite.

Inicialmente, será realizado um estudo aprofundado sobre as equações dinâmicas que regem cada sistema individualmente, no caso, o satélite e as rodas de reação. Em seguida, uma análise cinemática do satélite é feita, de modo a incorporar os ângulos de Euler do satélite aos modelos dinâmicos. Dessa maneira, é possível relacionar as componentes do modelo elaborado a fim de obter um sistema de equações diferenciais que regem o comportamento do satélite em seu sistema de coordenadas inercial.

A partir do desenvolvimento das equações diferenciais, seu estudo é dividido entre a sua forma linear e não linear, ambos importantes dentro da modelagem do sistema. As soluções da forma não linear são obtidas numericamente utilizando o software *Scilab 6.1.0*, enquanto uma linearização em torno do equilíbrio é aplicada para o sistema.

A etapa seguinte consiste na análise do comportamento do sistema, comparando suas formas linear e não linear com base na aderência gráfica entre os modelos e seus parâmetros escolhidos no vetor de estados. Em adição, interpretações físicas e matemáticas são geradas dentro dos estudos de estabilidade e do domínio da frequência.

O modelo é então submetido a diferentes tipos de entrada, como degrau, impulso ou senoidal, de modo a testar a modelagem realizada sobre o sistema complexo do satélite atuado com rodas de reação. Para aproximar a análise dos resultados a casos reais, é realizada uma seleção dos parâmetros do sistema com base em aplicações concretas encontradas na bibliografia para o satélite CBERS.

5 Modelagem

A fim de compreender um sistema real, propõem-se modelos físicos sobre os objetos de estudo. Nesta etapa são utilizadas hipóteses simplificadoras aos fenômenos em questão, de modo a facilitar seu estudo sem que haja a perda de informações importantes para a análise. Uma noção cinemática do problema também é introduzida com base nos ângulos de Euler. Em seguida, um modelo matemático não linear une o sistema dinâmico em suas equações fundamentais. Por fim, será realizado a linearização do sistema a fim de obter noções sobre o comportamento do satélite.

5.1 Modelo físico

Um satélite é um sistema complexo dotado de diferentes componentes, os quais são adaptados a cada missão e utilidade. No caso do modelo físico adotado, há dois componentes a serem estudados fisicamente que compõem o sistema: o satélite, ou seja, o corpo rígido a ser mantido no equilíbrio; e as rodas de reação, os conjuntos de massas inerciais que geram torques para a manutenção do equilíbrio do satélite.

Em seguida, cada um desses componentes terá seu modelo físico apresentado detalhadamente, de modo que, ao final desta seção, seja possível uni-los em um modelo integrado para a descrição do modelo matemático do sistema em estudo a partir da cinemática dos ângulos de Euler do satélite.

5.1.1 Modelo do satélite

Visando tornar o modelo realista, será o utilizado o satélite artificial CBERS 4 como base para os parâmetros de dimensão e momentos de inércia necessários para a descrição do problema.

O satélite artificial CBERS 4 é o último fruto da parceria entre Brasil e China e foi lançado em 7 de dezembro de 2012, permanecendo ativo até o presente momento. Sua principal aplicação é a observação detalhada da vegetação, com a identificação de florestas, parques e áreas de queimadas, da agricultura, com a identificação dos campos agrícolas e das frentes de expansão, da hidrografia, o que permite ver a diferença em cursos de rios e do limite de represas, além de permitir a criação de mapas detalhados (OLIVEIRA, 2009). Para o estudo do modelo em questão, serão utilizados os dados do satélite sino-brasileiro. A Figura 1 apresenta uma foto do satélite com seu painel solar aberto:

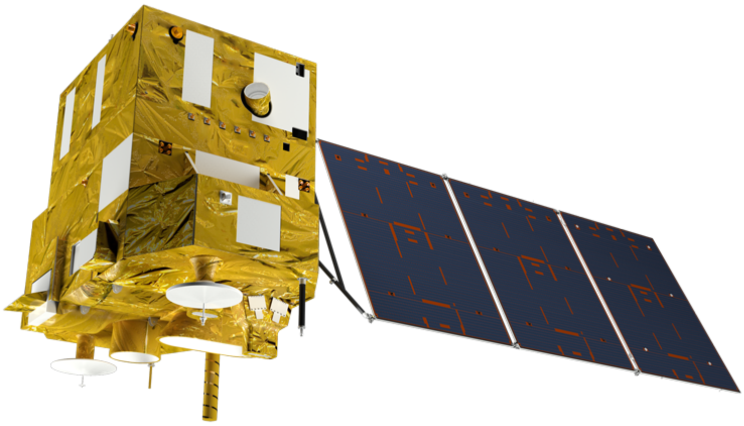

Figura 1 – Imagem do satélite CBERS 4 com painel solar aberto [INPE, 2020]

5.1.1.1 Dinâmica do satélite

O sistema referente a dinâmica do satélite será modelado a partir dos teoremas da mecânica clássica aplicados para um corpo extenso. Vale ressaltar que o satélite é tratado como indeformável, o que implica na validação dos teoremas que a seguir serão aplicados, de modo que a flexibilidade do painel solar é desconsiderada no estudo.

Visando a dedução das equações diferenciais que regem a dinâmica do satélite, será utilizado o teorema do momento da quantidade de movimento. Para esse feito serão definidos dois sistemas de coordenadas. O primeiro eixo de coordenada se trata de um referencial inercial de origem arbitrária. O segundo consiste em um eixo de coordenadas móvel o qual os eixos coincidem com os eixos principais de inércia do satélite, além de sua origem ser um ponto fixo no espaço. A figura 2 ilustra o satélite artificial e os referenciais descritos:

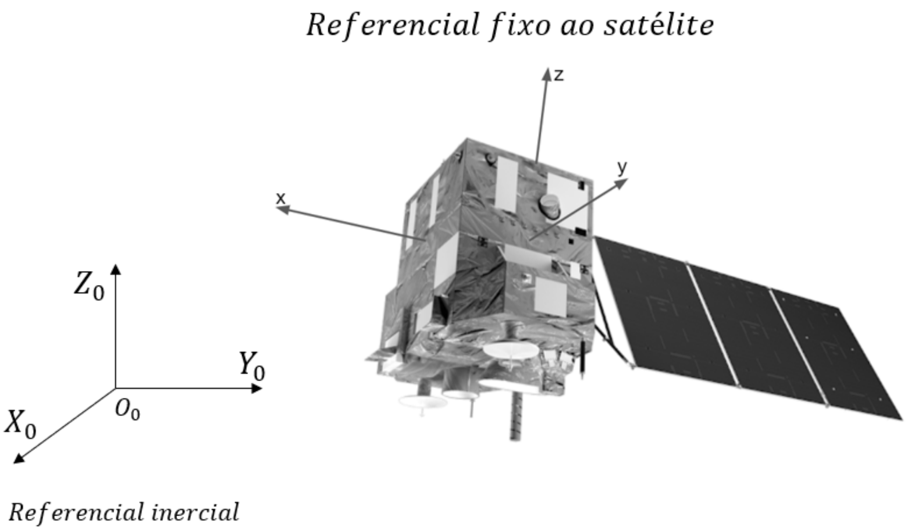

Figura 2 – Referenciais utilizados para a modelagem do satélite [Autores, 2021]

O momento da quantidade de movimento do corpo extenso é dado pela seguinte expressão vetorial:

$$\vec{H}_o = M(G - O) \text{ x } \dot{\vec{r_o}} + [J_{Oxyz}][\omega] \tag{5.1}$$

Sendo M a massa do corpo, G a posição do baricentro, O a posição de um polo arbitrário, $\dot{\vec{r_o}}$ a velocidade do polo, $[J_{Oxyz}]$ o tensor de inércia e $[\omega]$ o vetor coluna das componentes da rotação instantânea.

O teorema do momento da quantidade de movimento estabelece a seguinte relação entre o momento da quantidade de movimento e momentos externos ao sistema:

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt} = \vec{M}_o^{ext} - \dot{\vec{r_o}} \text{ x } M\vec{V}_G \tag{5.2}$$

Sendo M_o^{ext} o momento das forças externas e $\vec{V}_G$ a velocidade do centro de massa do corpo.

Umas possível relação direta entre momentos externos e a rotação instantânea de um corpo pode ser obtido com os passos a seguir. Derivando a expressão 5.1 e aplicando o resultado em 5.2, adotando como hipótese que os momentos principais de inércia são constantes, obtém-se a seguinte relação:

$$\vec{M}_o^{ext} = M(G - O) \text{ x } \ddot{\vec{r_o}} + [J_{Oxyz}][\dot{\omega}] + \vec{\omega} \text{ x } ([J_{Oxyz}][\omega]) \tag{5.3}$$

As propriedades da situação a ser estudada, no caso, analisando o eixo de coordenadas móvel, são dadas por:

(i) Polo O como ponto fixo:

$$\ddot{\vec{r_0}} = \vec{0} \tag{5.4}$$

(ii) Eixos do sistema de coordenadas coincidentes com os eixos principais de inércia:

$$[J_{Oxyz}] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Aplicando as condições apresentadas na expressão obtida a partir do teorema do momento da quantidade de movimento 5.3, o seguinte sistema diferencial é obtido:

$$\begin{cases} M_x = I_x\dot{\omega_x} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ M_y = I_y\dot{\omega_y} - (I_z - I_x)\omega_x\omega_z \\ M_z = I_z\dot{\omega_z} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{cases} \tag{5.6}$$

5.1.1.2 Momentos de inércia do satélite

Dentre os parâmetros utilizados pelo modelo, destacam-se os momentos principais de inércia do satélite. Devido à geometria complexa da estrutura dos objetos, modelos computacionais 3D do satélite CBERS 4 foram gerados no *software Autodesk Fusion 360*. Os valores numéricos obtidos são descritos na seção 6.1. A Figura 3 apresenta a vista isométrica do satélite gerada:

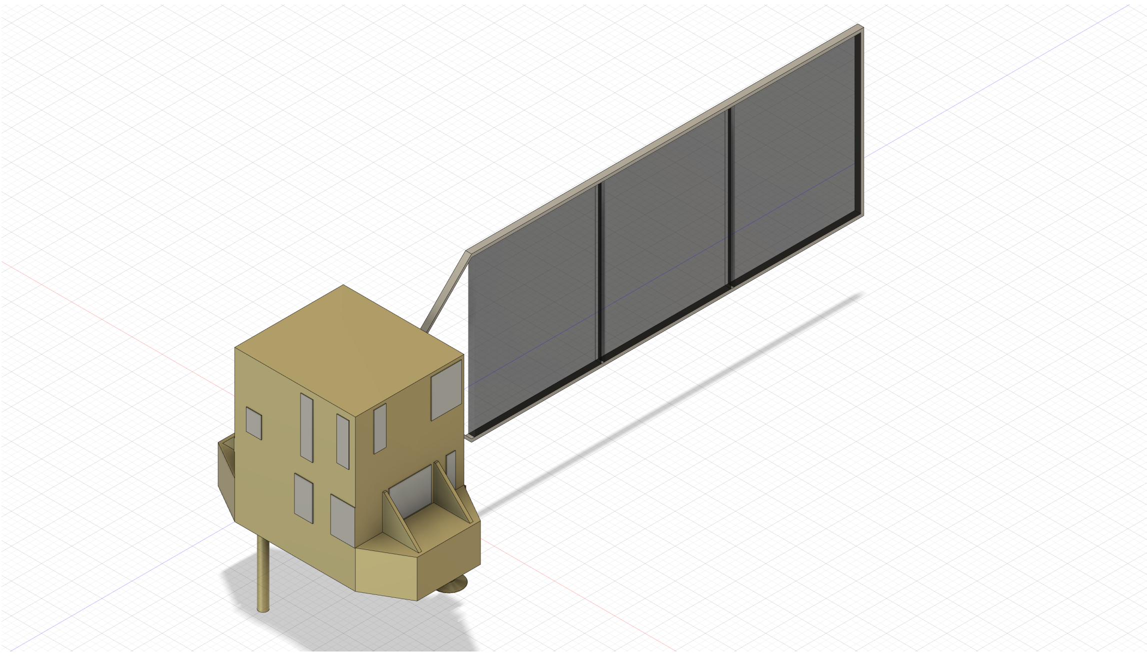

Figura 3 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2021]

5.1.2 Modelo da roda de reação

A fim de estabilizar a rotação de um satélite no espaço, diferentes meios podem ser empregados para gerar torque nos eixos e balancear o veículo, como propulsores a gases frios, *magnetorquers*, rodas de torque, entre outros (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014). Visando esse propósito, no presente projeto serão empregadas rodas de reação ou rodas de torque, dispositivos de controle comumente na forma de um disco, para veículos espaciais baseados no princípio de ação e reação e na inércia dos corpos.

Conforme o esquema da Figura 4, um torque $\vec{T}$ é transferido pelo eixo de rotação da massa de inércia m em formato de disco. Como a base do eixo está engastado dentro da estrutura do satélite, há um equilíbrio de momentos entre a roda de reação e o satélite, de modo que, por ação e reação, um torque $-\vec{T}$ seja aplicado ao veículo no sentido contrário, indicado pelo sinal negativo.

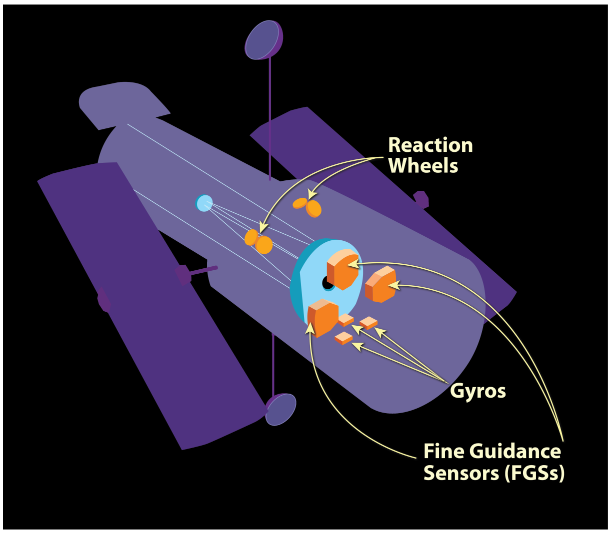

Figura 4 – Funcionamento de uma roda de reação em um satélite [NASA, 2020]

5.1.2.1 Dinâmica da roda de reação

Para a obtenção das equações matemáticas da dinâmica das rodas de reação, serão adicionadas ao modelo do satélite três rodas de reação dispostas nos eixos principais de inércia correspondentes, respectivamente, às direções x, y e z adotadas na modelagem da dinâmica do satélite. A Figura 5 ilustra a orientação das rodas de torque dentro do satélite a partir de uma ampliação na figura:

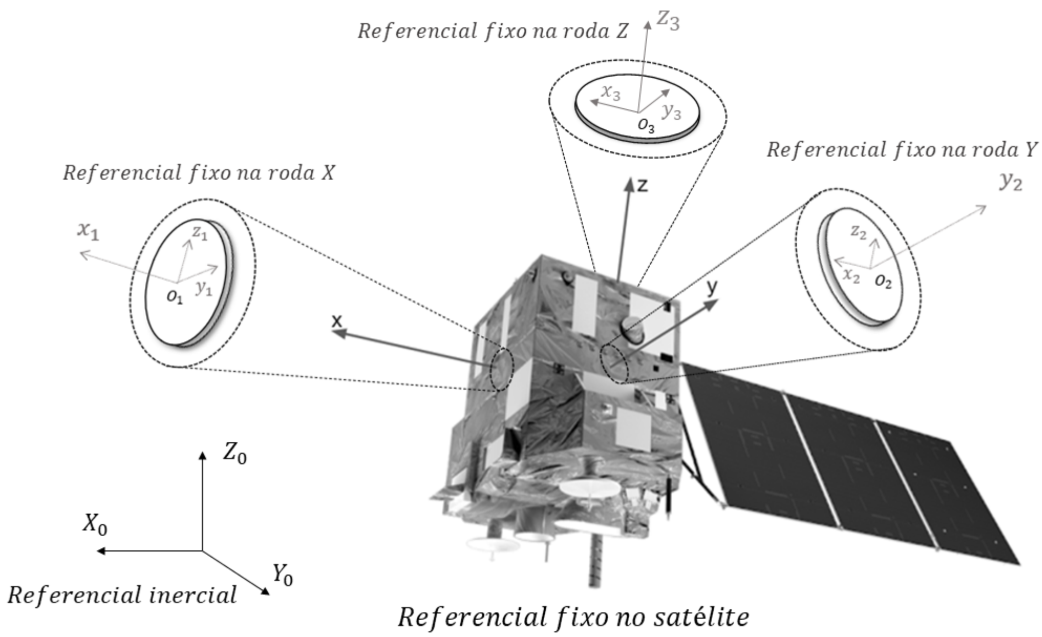

Figura 5 – Referenciais do satélite com as rodas de reação acopladas [Autores, 2021]

Para o equacionamento matemático das rodas de torque no sistema, serão considerados três novos sistemas de coordenadas, $[O_1x_1y_1z_1]$, $[O_2x_2y_2z_2]$ e $[O_3x_3y_3z_3]$, que são referenciais fixos nas rodas de reação dispostas nos eixos x, y e z, respectivamente. Vale notar que, devido ao vínculo geométrico entre o satélite e as rodas de reação, o eixo x coincide com x_1, o eixo y corresponde a y_2 e o eixo z condiz com z_3 durante todo o movimento, desconsiderando desalinhamentos ou desbalanceamentos dos dispositivos.

Uma vez definidos a situação física e os referenciais, serão realizadas as deduções matemáticas de cada roda de reação individualmente nas seções seguintes:

5.1.2.2 Roda de reação no eixo x

O vetor momento da quantidade de movimento do disco de inércia disposto no eixo x é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{H}_x = J(\omega_x + \Omega_x)\hat{i} \tag{5.7}$$

Sendo: J o momento de inércia no eixo x_1 do disco de reação, o qual está disposto no eixo x em relação ao polo fixo; ω_x a componente x do vetor rotação instantânea do satélite; e Ω_x a velocidade angular relativa em torno do eixo x do disco em relação ao satélite.

Derivando a expressão obtida para o momento da quantidade de movimento correspondente a Equação 5.7:

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = J(\dot{\omega}_x + \dot{\Omega}_x)\hat{i} + J(\omega_x + \Omega_x)\frac{d\hat{i}}{dt} \tag{5.8}$$

Das relações de Poisson:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \text{ x } \hat{i} = \omega_z\hat{j} - \omega_y\hat{k} \tag{5.9}$$

Substituindo a derivada temporal do versor na Equação 5.8:

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = J(\dot{\omega}_x + \dot{\Omega}_x)\hat{i} + J\omega_z(\omega_x + \Omega_x)\hat{j} - J\omega_y(\omega_x + \Omega_x)\hat{k} \tag{5.10}$$

Do teorema do momento da quantidade de movimento, considerando o polo como o ponto fixo, obtém-se que a derivada temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao torque externo aplicado no corpo rígido.

No caso, serão considerados três termos para o torque externo: T_x será o torque externo imposto; T_{xy} corresponde ao torque de reação do disco no eixo y; e T_{xz} corresponde ao torque de reação do disco no eixo z.

$$\frac{d\vec{H}_x}{dt} = \vec{T}^{ext} = T_x\hat{i} + T_{xy}\hat{j} + T_{xz}\hat{k} \tag{5.11}$$

O termo h_x é o momento da quantidade de movimento do disco no eixo x relativo ao satélite:

$$h_x = J\Omega_x \tag{5.12}$$

Por fim, aplicando o torque dado pela Equação 5.11 na equação da derivada temporal do vetor momento da quantidade de movimento Equação 5.10, obtém-se o sistema de equações diferenciais da roda de reação no eixo x:

$$\begin{cases} J\dot{\omega_x} + \dot{h}_x = T_x \\ J\omega_x\omega_z + h_x\omega_z = T_{xy} \\ -J\omega_x\omega_y - h_x\omega_y = T_{xz} \end{cases} \tag{5.13}$$

5.1.2.3 Roda de reação no eixo y

O vetor momento da quantidade de movimento do rotor disposto no eixo y é dado pela expressão:

$$\vec{H}_y = J(\omega_y + \Omega_y)\hat{j} \tag{5.14}$$

Sendo: J o momento de inércia no eixo y_2 do disco de reação, que é disposto no eixo y em relação ao polo fixo; ω_y a componente y do vetor rotação instantânea do satélite; e Ω_y a rotação relativa em torno do eixo y do disco em relação ao satélite.

Derivando a expressão obtida para o momento da quantidade de movimento Equação 5.14:

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = J(\dot{\omega}_y + \dot{\Omega}_y)\hat{j} + J(\omega_y + \Omega_y)\frac{d\hat{j}}{dt} \tag{5.15}$$

Das relações de Poisson:

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \text{ x } \hat{j} = -\omega_z\hat{i} + \omega_x\hat{k} \tag{5.16}$$

Substituindo a derivada temporal do versor na Equação 5.15:

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = -J\omega_z(\omega_y + \Omega_y)\hat{i} + J(\dot{\omega}_y + \dot{\Omega}_y)\hat{j} + J\omega_x(\omega_y + \Omega_y)\hat{k} \tag{5.17}$$

Do teorema do momento da quantidade de movimento, considerando o polo como o ponto fixo, obtém-se que a derivada temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao torque externo aplicado no corpo rígido.

Novamente, serão considerados três termos para o torque externo: T_y é o torque externo imposto; T_{yx} corresponde ao torque de reação do disco no eixo x; e T_{yz} corresponde ao torque de reação do disco no eixo z.

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = \vec{T}^{ext} = T_{yx}\hat{\imath} + T_y\hat{\jmath} + T_{yz}\hat{k} \tag{5.18}$$

O termo h_y é o momento da quantidade de movimento do disco no eixo y relativo ao satélite:

$$h_y = J\Omega_y \tag{5.19}$$

Em suma, aplicando o torque da Equação 5.18 na equação da derivada temporal do vetor momento da quantidade de movimento Equação 5.17, gera-se o sistema de equações diferenciais da roda de reação no eixo y:

$$\begin{cases} -J\omega_y\omega_z - h_y\omega_z = T_{yx} \\ J\dot{\omega}_y + \dot{h}_y = T_y \\ J\omega_x\omega_y + h_y\omega_x = T_{yz} \end{cases} \tag{5.20}$$

5.1.2.4 Roda de reação no eixo z

O vetor momento da quantidade de movimento do disco disposto no eixo z é dado pela expressão:

$$\vec{H}_z = J(\omega_z + \Omega_z)\hat{k} \tag{5.21}$$

Sendo: J o momento de inércia no eixo z_3 do disco de reação, que é disposto no eixo z em relação ao polo fixo; ω_z a componente z do vetor rotação instantânea do satélite; e Ω_z a rotação relativa em torno do eixo z do disco em relação ao satélite.

Derivando a expressão obtida para o momento da quantidade de movimento Equação 5.21:

$$\frac{d\vec{H}_z}{dt} = J(\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}_z)\hat{k} + J(\omega_z + \Omega_z)\frac{d\hat{k}}{dt} \tag{5.22}$$

Das relações de Poisson:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \text{ x } \hat{k} = \omega_y\hat{\imath} - \omega_x\hat{\jmath} \tag{5.23}$$

Substituindo a derivada temporal do versor na Equação 5.22:

$$\frac{d\vec{H}_z}{dt} = -J\omega_y(\omega_z + \Omega_z)\hat{\imath} + J\omega_x(\omega_z - \Omega_z)\hat{\jmath} + J(\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}_y)\hat{k} \tag{5.24}$$

Do teorema do momento da quantidade de movimento, considerando o polo como o ponto fixo, obtém-se que a derivada temporal do momento da quantidade de movimento é igual ao torque externo aplicado no corpo rígido.

Novamente, serão considerados três termos para o torque externo: T_z é o torque externo imposto; T_{zx} corresponde ao torque de reação do disco aplicado no eixo x; e T_{zy} corresponde ao torque de reação do disco aplicado no eixo y.

$$\frac{d\vec{H}_y}{dt} = \vec{T}^{ext} = T_{yx}\hat{\imath} + T_y\hat{\jmath} + T_{yz}\hat{k} \tag{5.25}$$

O termo h_z é o momento da quantidade de movimento do disco no eixo z relativo ao satélite:

$$h_z = J\Omega_z \tag{5.26}$$

Em suma, aplicando o torque da Equação 5.25 na equação da derivada temporal do vetor momento da quantidade de movimento Equação 5.24, gera-se o sistema de equações diferenciais da roda de reação no eixo z:

$$\begin{cases} J\omega_y\omega_z + h_z\omega_y = T_{zx} \\ -J\omega_x\omega_z - h_z\omega_x = T_{zy} \\ J\dot{\omega}_z + \dot{h}_z = T_z \end{cases} \tag{5.27}$$

5.1.2.5 Momentos de inércia da roda de reação

Os parâmetros relevantes para a modelagem das rodas de torque são seus momentos de inércia em relação aos eixos em que essas são dispostas. Visando a melhor representação, as rodas de reação foram adicionadas ao CAD do satélite gerado no software *Autodesk Fusion 360*.

As dimensões das rodas de reação não apresentaram fontes diretas por se tratar de uma tecnologia estratégica do governo chinês, parceira e fornecedora da tecnologia para o satélite sino-brasileiro, porém seus valores foram dimensionados em acordo com um modelo da *Bendix Corporation* (WERTZ, 1978) adequado à estrutura interna do CBERS 4. Além disso, estas são posicionadas internamente no satélite nos eixos principais de atuação por meio de um *assembly* (montagem) dentro do *software* de CAD *Autodesk Fusion 360*. A Figura 6 apresenta a vista isométrica em corte da montagem das rodas de reação na estrutura:

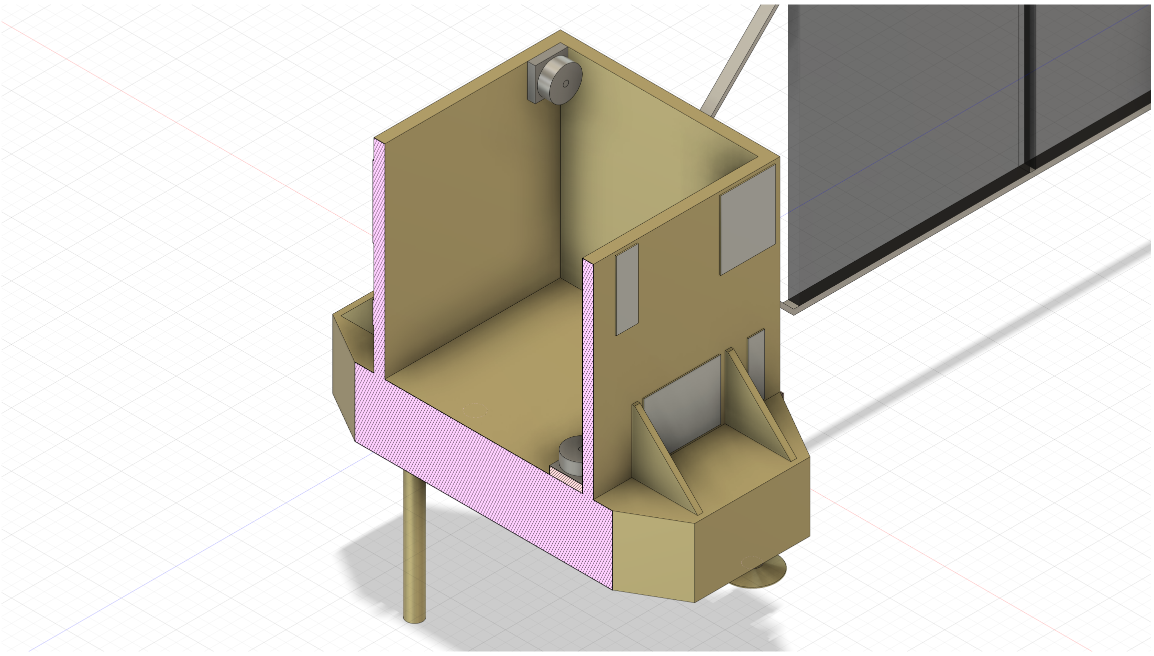

Figura 6 – Modelo 3D do satélite CBERS 4 com rodas de reação posicionadas internamente - Autodesk Fusion 360 [Autores, 2021]

O momento de inércia J correspondente ao momento correspondente a rotação em torno do próprio eixo de revolução do conjunto roda + disco, os quais são considerados como cilindros, é calculado pela seguinte expressão:

$$J = \frac{m_{roda} r_{roda}^2}{2} + \frac{m_{eixo} r_{eixo}^2}{2} \tag{5.28}$$

Com base nos modelos computacionais 3D dos objetos, retiram-se os raios geométricos e as massas da roda de reação e do eixo, permitindo o cálculo analítico dos momentos de inércia dos objetos posteriormente na seção 6.1.

5.2 Cinemática

Após a apresentação do modelo físico e a dinâmica de cada elemento do sistema, introduzem-se noções cinemáticas importantes para o estudo do satélite. Primeiro, discute-se sobre os ângulos de Euler de um objeto no espaço, sistema de referenciais importantes para a determinação da atitude e posterior análise e controle de equilíbrio do mesmo. Em seguida, dentro do escopo do projeto, apresenta-se a transformação do vetor rotação instantânea do satélite para a notação em ângulos de Euler, a fim de unificar a cinemática com a dinâmica do sistema completo para a próxima etapa do modelo matemático.

5.2.1 Ângulos de Euler

Para o estudo da movimentação do satélite em relação a um referencial fixo no espaço serão utilizados os ângulos de Euler correspondentes a uma rotação da forma $3-1-3$. A Figura 7 representa visualmente os ângulos de Euler escolhidos para a modelagem:

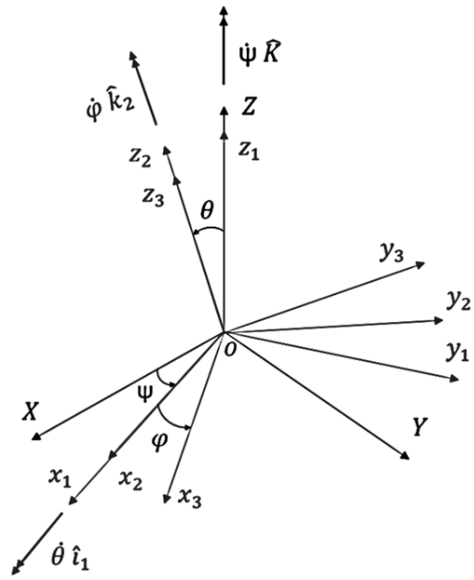

Figura 7 – Ângulos de Euler [Autores, 2021]

As matrizes de rotação correspondentes a cada passo das mudanças de base resultante das respectivas transformações dos ângulos de Euler são representadas em seguida. Nota-se que, a partir deste ponto do relatório, as funções trigonométricas de seno, cosseno, tangente, cotangente e cossecante do ângulo x são escritas, respectivamente, como $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ e $\csc x$:

- Precessão (ψ): $O_{XYZ} \rightarrow O_{x_1y_1z_1}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \psi & sin\ \psi & 0 \\ -sin\ \psi & cos\ \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

- Nutação (θ): $O_{x_1y_1z_1} \rightarrow O_{x_2y_2z_2}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & sin\ \theta \\ 0 & -sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

- Rotação própria (φ): $O_{x_2y_2z_2} \rightarrow O_{x_3y_3z_3}$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_3 \\ \hat{j}_3 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \varphi & sin\ \varphi & 0 \\ -sin\ \varphi & cos\ \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Por fim, definidas as matrizes de mudança de base, é possível obter a matriz de transformação que leva do referencial fixo no espaço para o referencial móvel, realizando a multiplicações das matrizes. Assim, a matriz de transformação obtida é apresentada a seguir. Ressalta-se que o resultado condiz com a matriz de transformação $3-1-3$ dos ângulos de Euler da bibliografia (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014):

$$[T] = \begin{bmatrix} cos\ \psi\ cos\ \varphi - sin\ \psi\ cos\ \theta\ sin\ \varphi & sin\ \psi\ cos\ \varphi + cos\ \psi\ cos\ \theta\ sin\ \varphi & sin\ \theta\ sin\ \varphi \\ -cos\ \psi\ sin\ \varphi - sin\ \psi\ cos\ \theta\ cos\ \varphi & -sin\ \psi\ sin\ \varphi + cos\ \psi\ cos\ \theta\ cos\ \varphi & sin\ \theta\ cos\ \varphi \\ sin\ \psi\ sin\ \theta & -cos\ \psi\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

5.2.2 Vetor rotação instantânea em função dos ângulos de Euler

A fim de utilizar os ângulos de Euler nas equações obtidas a partir da dinâmica do satélite e das rodas de reação, será necessária a obtenção das componentes do vetor rotação instantânea em função dos ângulos de Euler.

Da escolha dos ângulos de Euler descritos na Figura 7, é possível notar que o vetor rotação instantânea é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\ \hat{K} + \dot{\theta}\ \hat{i}_1 + \dot{\varphi}\ \hat{k}_2 \tag{5.33}$$

Para obter os valores correspondentes utilizando os versores da base móvel, ainda será necessário a aplicação das seguintes substituições, advindas das matrizes de mudança de base 5.29, 5.30 e 5.31:

$$\hat{K} = sin\ \theta\ sin\ \varphi\ \hat{i}_3 + sin\ \theta\ cos\ \varphi\ \hat{j}_3 + cos\ \theta\ \hat{k}_3 \tag{5.34}$$

$$\hat{i}_1 = cos\ \varphi\ \hat{i}_3 - sin\ \varphi\ \hat{j}_3 \tag{5.35}$$

Assim, ao realizar a mudança de versores na expressão 5.33 utilizando 5.34 e 5.35 e rearranjando os termos, o seguinte resultado é obtido:

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi}\ sin\ \theta\ sin\ \varphi + \dot{\theta}\ cos\ \varphi)\hat{i}_3 + (\dot{\psi}\ sin\ \theta\ cos\ \varphi - \dot{\theta}\ sin\ \varphi)\hat{j}_3 + (\dot{\psi}\ cos\ \theta + \dot{\varphi})\hat{k}_3 \tag{5.36}$$

Portanto, as componentes do vetor rotação instantânea na base móvel são fornecidas em função dos ângulos de Euler pelas seguintes relações, as quais também estão em conformidade com a mudança de rotação (notada como B^{-1}) da transformação $3-1-3$ da bibliografia (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014):

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}\ sin\ \theta\ sin\ \varphi + \dot{\theta}\ cos\ \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi}\ sin\ \theta\ cos\ \varphi - \dot{\theta}\ sin\ \varphi \\ \omega_z = \dot{\psi}\ cos\ \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \tag{5.37}$$

5.3 Modelo matemático não linear

Com o objetivo de estabelecer o sistema diferencial que modela o comportamento e movimentação do satélite, faz-se necessário integrar os modelos advindos da dinâmica do satélite (subseção 5.1.1.1) e das rodas de reação (subseção 5.1.2.1). Em seguida, utilizam-se também as relações advindas da cinemática (seção 5.2) para a obtenção da evolução temporal dos ângulos de Euler.

Partindo do sistema diferencial da dinâmica do satélite 5.6 e incluindo os efeitos das rodas de reação descritos pelos sistemas diferenciais 5.13, 5.20 e 5.27, o seguinte sistema diferencial é obtido:

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z + h_y\omega_z - h_z\omega_y - T_x \\ I_y\dot{\omega}_y = (I_z - I_x)\omega_x\omega_z - h_x\omega_z + h_z\omega_x - T_y \\ I_z\dot{\omega}_z = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y + h_x\omega_y - h_y\omega_x - T_z \\ \dot{h}_x = -J\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)\omega_y\omega_z - \frac{J}{I_x}h_y\omega_z + \frac{J}{I_x}h_z\omega_y + (1 + \frac{J}{I_x})T_x \\ \dot{h}_y = -J\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\omega_x\omega_z + \frac{J}{I_y}h_x\omega_z - \frac{J}{I_y}h_z\omega_x + (1 + \frac{J}{I_y})T_y \\ \dot{h}_z = -J\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\omega_x\omega_y - \frac{J}{I_z}h_x\omega_y + \frac{J}{I_z}h_y\omega_x + (1 + \frac{J}{I_z})T_z \end{cases} \tag{5.38}$$

Uma vez obtido o sistema 5.38, é possível aplicar os ângulos de Euler descritos na seção 5.2. Para tal, será realizada a mudança de variável descrita pelas equações 5.37, substituindo as variáveis correspondentes às componentes do vetor rotação instantânea no eixo móvel $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, por expressões que envolvem os ângulos de Euler e suas derivadas $(\psi,\ \theta,\ \varphi,\ \dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi})$. Realizando as substituições, o sistema 5.39 é obtido para as seis equações diferenciais anteriores descritas no sistema 5.38:

$$I_x(\ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi) = \cdots$$
$$(I_y - I_z)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + h_y(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) - h_z(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) - T_x$$

$$I_y(\ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi - \ddot{\theta}\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi) = \cdots$$
$$(I_z{-}I_x)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi{+}\dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta{+}\dot{\varphi}){-}h_x(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi{-}\dot{\theta}\sin\varphi){+}h_z(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi{+}\dot{\theta}\cos\varphi){-}T_y$$

$$\begin{aligned} I_z(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\varphi}) &= (I_x - I_y)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \cdots \\ &+ h_x(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) - h_y(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) - T_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_x &= -J\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + \cdots \\ &- \frac{J}{I_x}h_y\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} + \frac{J}{I_x}h_z(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \left(1 + \frac{J}{I_x}\right)T_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_y &= -J\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\dot{\psi}(\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + \cdots \\ &+ \frac{J}{I_y}h_x(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) - \frac{J}{I_y}h_z(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) + \left(1 + \frac{J}{I_y}\right)T_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_z &= -J\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \cdots \\ &- \frac{J}{I_z}h_x(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \frac{J}{I_z}h_y(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) + \left(1 + \frac{J}{I_z}\right)T_z \end{aligned} \tag{5.39}$$

Após sucessivas manipulações algébricas, é possível dispor os termos das equações diferenciais obtidos na forma de um vetor de estados. Rearranjando 5.39, o sistema 5.40 é obtido para as seis equações diferenciais das variáveis em análise:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\dot{\psi}\dot{\theta}\cot\theta + \frac{\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\sin\theta} + \sin\varphi\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\left(\dot{\psi}\cot\theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin\theta}\right) + \cdots \\ &+ \cos\varphi\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\left(\dot{\psi}\cot\theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin\theta}\right) - \frac{T_x}{I_x}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right) + \cdots \\ &- \frac{T_y}{I_y}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right) - \frac{h_x}{I_y}\left(\dot{\psi}\cot\theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin\theta}\right)\cos\varphi + \frac{h_y}{I_x}\left(\dot{\psi}\cot\theta + \frac{\dot{\varphi}}{\sin\theta}\right)\sin\varphi + \cdots \\ &+ \frac{h_z}{I_x I_y}\left[(I_x - I_y)\left(\frac{\dot{\psi}}{2}\sin 2\varphi - \frac{\dot{\theta}\sin^2\varphi}{\sin\theta}\right) + I_x\left(\frac{\dot{\theta}}{\sin\theta}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta + \cos\varphi\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + \frac{T_y}{I_y}(\sin\varphi) + \cdots \\ &+ \frac{T_x}{I_x}(\sin\varphi\tan\varphi) - \sin\varphi\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + \cdots \\ &+ \frac{h_x}{I_y}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi - \frac{h_y}{I_x}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)\sin\varphi\tan\varphi + \cdots \\ &+ \frac{h_z}{I_x I_y}\left[(I_y - I_x)\left(\dot{\psi}\sin\theta\sin^2\varphi + \frac{\dot{\theta}\sin 2\varphi}{2}\right) - I_y(\dot{\theta}\tan\varphi)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi} = &-\sin\varphi\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)(\dot{\psi}\cot\theta\cos\theta + \dot{\varphi}\cot\theta) - \frac{T_z}{I_z} + \cdots \\
&+\frac{T_x}{I_x}(\cot\theta\sin\varphi) + \frac{T_y}{I_y}(\cot\theta\cos\varphi) + \dot{\psi}\dot{\theta}\cot\theta\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cot\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \cdots \\
&+\frac{h_x}{I_y I_z}\left[(I_y - I_z)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi) + I_z(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} - I_y(\dot{\theta}\sin\varphi)\right] + \cdots \\
&-\frac{h_y}{I_x I_z}\left[(I_x - I_z)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi) + I_z(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + I_x(\dot{\theta}\cos\varphi)\right] + \cdots \\
&-\cos\varphi\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\cot\theta\cos\theta + \dot{\varphi}\cot\theta) + \cdots \\
&+\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \cdots \\
&+\frac{h_z}{I_x I_y}\left[(I_y - I_x)\left(\frac{\dot{\psi}}{2}\sin 2\varphi + \dot{\theta}\frac{\sin^2\varphi}{\sin\theta}\right)\cos\theta - I_y(\dot{\theta}\cot\theta)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h_x} = &-J\left[\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)\left(\frac{\dot{\psi}^2\sin 2\theta\cos\varphi}{2} + \dot{\psi}(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi) - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\right] + \cdots \\
&-\frac{Jh_y}{I_x}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) + \frac{Jh_z}{I_x}(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + T_x\left(\frac{I_x + J}{I_x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h_y} = &-J\left[\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right)\left(\frac{\dot{\psi}^2\sin 2\theta\sin\varphi}{2} + \dot{\psi}(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi) + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\right] + \cdots \\
&+\frac{Jh_x}{I_y}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) - \frac{Jh_z}{I_y}(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) + T_y\left(\frac{I_y + J}{I_y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{h_z} = &-J\left[\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\left(\frac{\dot{\psi}^2\sin^2\theta\sin 2\varphi}{2} + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos 2\varphi - \dot{\theta}^2\sin 2\varphi\right)\right] + T_z\left(\frac{I_z + J}{I_z}\right) + \cdots \\
&-\frac{Jh_x}{I_z}(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + \frac{Jh_y}{I_z}(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

5.4 Modelo matemático linear

O sistema de equações diferenciais apresentado na seção 5.3 é um sistema não linear. Para linearizar o sistema de equações diferenciais, é preciso escolher um ponto de operação em que se espera que as variáveis do sistema adotem valores próximos aos do ponto analisado.

Uma vez que as variáveis precisam assumir, em todos os momentos, valores próximos de seu ponto de linearização, é esperado que a linearização do sistema não seja capaz de retratar o sistema de forma fiel em todas as circunstâncias. Conforme o sistema se altera com o tempo, as variáveis podem se afastar do ponto de linearização e o modelo linear deixa de ser válido. Para contornar esse problema, basta fazer com que o ponto de linearização seja um ponto de equilíbrio do sistema, de forma que as derivadas temporais das variáveis sejam nulas.

A linearização apresentada nessa seção é feita em torno da condição de velocidade angular nula para o satélite e com as demais condições genéricas. Vale notar que os valores para as entradas devem ser nulos para satisfazer as condições de equilíbrio impostas pelas equações 5.40. Dessa maneira, o ponto de linearização genérico estudado é dado pela Equação 5.41:

$$\begin{cases} \overline{\dot{\psi}} = 0 \\ \overline{\dot{\theta}} = 0 \\ \overline{\dot{\varphi}} = 0 \\ \overline{T_x} = 0 \\ \overline{T_y} = 0 \\ \overline{T_z} = 0 \end{cases} \tag{5.41}$$

Perceba que, para o caso em questão, o equilíbrio é garantido, não importando o valor das outras variáveis.

Para facilitar o entendimento do sistema linear, uma mudança de variáveis será aplicada e adotada no restante do relatório:

$$\begin{array}{llll} x_1 = \psi - \overline{\psi} & x_2 = \theta - \overline{\theta} & x_3 = \varphi - \overline{\varphi} & x_4 = \dot{\psi} \\ x_5 = \dot{\theta} & x_6 = \dot{\varphi} & x_7 = h_x - \overline{h_x} & x_8 = h_y - \overline{h_y} \\ x_9 = h_z - \overline{h_z} & u_1 = T_x & u_2 = T_y & u_3 = T_z \end{array}$$

A fim de linearizar o sistema de equações, o método de expansão de Taylor até a primeira ordem será utilizado de acordo com a Equação 5.42:

$$\dot{x}_i \approx \overline{\dot{x}_i} + \sum_{j=1}^{9} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\bigg|_{eq} x_j + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial u_j}\bigg|_{eq} u_j \tag{5.42}$$

5.4.1 Forma matricial do sistema linearizado

Ao aplicar o procedimento indicado pela Equação 5.42 em todas as equações do sistema 5.40, obtém-se o sistema linear em torno do ponto de equilíbrio 5.41, expresso pela equação matricial 5.43. O código para a obtenção das matrizes pode ser encontrado no

Apêndice B.

$$
\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \\ \dot{x_5} \\ \dot{x_6} \\ \dot{x_7} \\ \dot{x_8} \\ \dot{x_9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{74} & a_{75} & a_{76} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & a_{85} & a_{86} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{94} & a_{95} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 \\ b_{51} & b_{52} & 0 \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} \\ b_{71} & 0 & 0 \\ 0 & b_{82} & 0 \\ 0 & 0 & b_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{5.43}
$$

É imediato notar que apenas as três colunas centrais da matriz dinâmica apresentam elementos não nulos. As três colunas do lado esquerdo correspondem às variáveis x_1, x_2 e x_3, que são objetos de estudo e, portanto, não podem ser descartadas. Já as colunas da direita correspondem às variáveis x_7, x_8 e x_9, que não são objetos de estudo.

Dessa forma, as três últimas variáveis poderiam ser retiradas do sistema diferencial para que apenas um sistema de ordem 6 fosse estudado. Ainda assim, optou-se por continuar com o sistema de nona ordem, para que a linearização pudesse ser validada em relação a todas as variáveis.

O sistema de equações diferenciais 5.43 é um sistema na forma $\dot{x} = Ax + Bu$, onde x é o vetor que contém todas as variáveis do problema. Entretanto, apenas os ângulos e as velocidades angulares do satélite são relevantes para a resposta cinemática do satélite. Assim, o vetor de saída do sistema pode ser escrito como:

$$
y = Cx + Du \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \tag{5.44}
$$

Assim, o sistema linear está definido pelas Equações 5.43 e 5.44 como:

$$
\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}
$$

Onde algumas constantes auxiliares foram adicionadas para facilitar a leitura das matrizes A e B. Novamente, utilizam-se notações das funções trigonométricas semelhantes às adotadas anteriormente:

$$a_{44} = \frac{\cos(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})(\overline{h_z}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}) - \overline{h_x}\cos(\overline{\theta}))}{I_y} + \frac{\sin(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})(\overline{h_y}\cos(\overline{\theta}) - \overline{h_z}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}))}{I_x}$$

$$a_{45} = \frac{\overline{h_z}\sin^2(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_x} + \frac{\overline{h_z}\cos^2(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_y}$$

$$a_{46} = \frac{\overline{h_y}\sin(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_x} - \frac{\overline{h_x}\cos(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_y}$$

$$a_{54} = -\frac{\sin(\overline{\varphi})(\overline{h_z}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}) - \overline{h_x}\cos(\overline{\theta}))}{I_y} - \frac{\sin(\overline{\varphi})\tan(\overline{\varphi})(\overline{h_y}\cos(\overline{\theta}) - \overline{h_z}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}))}{I_x}$$

$$a_{55} = -\frac{\overline{h_z}\sin^2(\overline{\varphi})\tan(\overline{\varphi})}{I_x} - \frac{\overline{h_z}\sin(\overline{\varphi})\cos(\overline{\varphi})}{I_y}$$

$$a_{56} = \frac{\overline{h_x}\sin(\overline{\varphi})}{I_y} - \frac{\overline{h_y}\sin(\overline{\varphi})\tan(\overline{\varphi})}{I_x}$$

$$a_{64} = \frac{\overline{h_x}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}) - \overline{h_y}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta})}{I_z} - \frac{\cos(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})(\overline{h_z}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}) - \overline{h_x}\cos(\overline{\theta}))}{I_y} + \cdots$$
$$- \frac{\sin(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})(\overline{h_y}\cos(\overline{\theta}) - \overline{h_z}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta}))}{I_x}$$

$$a_{65} = \frac{-\overline{h_x}\sin(\overline{\varphi}) - \overline{h_y}\cos(\overline{\varphi})}{I_z} - \frac{\overline{h_z}\sin^2(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_x} - \frac{\overline{h_z}\cos^2(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_y}$$

$$a_{66} = \frac{\overline{h_x}\cos(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_y} - \frac{\overline{h_y}\sin(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_x}$$

$$a_{74} = -J\left(\frac{\overline{h_y}\cos(\overline{\theta})}{I_x} - \frac{\overline{h_z}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta})}{I_x}\right)$$

$$a_{75} = -\frac{\overline{h_z}J\sin(\overline{\varphi})}{I_x}$$

$$a_{76} = -\frac{\overline{h_y}J}{I_x}$$

$$a_{84} = -J\left(\frac{\overline{h_z}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta})}{I_y} - \frac{\overline{h_x}\cos(\overline{\theta})}{I_y}\right)$$

$$a_{85} = -\frac{\overline{h_z}J\cos(\overline{\varphi})}{I_y}$$

$$a_{86} = \frac{\overline{h_x}J}{I_y}$$

$$a_{94} = -J\left(\frac{\overline{h_x}\cos(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta})}{I_z} - \frac{\overline{h_y}\sin(\overline{\varphi})\sin(\overline{\theta})}{I_z}\right)$$

$$a_{95} = -J\left(-\frac{\overline{h_x}\sin(\overline{\varphi})}{I_z} - \frac{\overline{h_y}\cos(\overline{\varphi})}{I_z}\right)$$

$$b_{41} = -\frac{\sin(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_x} \qquad b_{42} = -\frac{\cos(\overline{\varphi})\csc(\overline{\theta})}{I_y} \qquad b_{51} = \frac{\sin(\overline{\varphi})\tan(\overline{\varphi})}{I_x}$$

$$b_{52} = \frac{\sin(\overline{\varphi})}{I_y} \qquad b_{61} = \frac{\sin(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_x} \qquad b_{62} = \frac{\cos(\overline{\varphi})\cot(\overline{\theta})}{I_y}$$

$$b_{63} = -\frac{1}{I_z} \qquad b_{71} = \frac{J}{I_x} + 1 \qquad b_{82} = \frac{J}{I_y} + 1 \qquad b_{93} = \frac{J}{I_z} + 1$$

6 Análises

Para a validação do modelo linear desenvolvido na seção 5.4, é de interesse que a solução deste seja comparada com a solução do sistema não linear, mostrada na seção 5.3.

Dessa maneira, para resolver o sistema de equações não lineares 5.40, escreveu-se um código no *software Open-Source Scilab*, anexado no apêndice A. Como o sistema não linear de equações é de difícil resolução analítica, foi utilizada a função *ode* embutida no código base do *Scilab*, que utiliza por padrão o método de Adams para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

6.1 Escolha dos parâmetros

A fim de realizar a simulação numérica do satélite, uma série de parâmetros precisam ser selecionados de modo a aproximá-la a casos reais. Nas próximas tabelas estão os parâmetros utilizados.

Parâmetro	Módulo	Unidade
I_x	9840,05	$kg \cdot m^2$
I_y	9558,05	$kg \cdot m^2$
I_z	2520,89	$kg \cdot m^2$

Tabela 1 – Momentos principais de inércia do satélite.

Na Tabela 1 estão dispostos os parâmetros relacionados à geometria e à inércia do satélite simulado. Como mostrado na subseção 5.1.1, foi realizado um modelo 3D em CAD à semelhança do satélite sino-brasileiro CBERS 4, o que possibilitou a obtenção dos momentos principais de inércia que são usados nas simulações. Conforme apresentado, os valores obtidos são relativos a eixos arbitrários x, y e z do modelo, de modo que se faz necessário aplicar uma diagonalização das matrizes de inércia com o objetivo da obtenção dos momentos principais de inércia.

m_{roda} [kg]	m_{eixo} [kg]	r_{roda} [mm]	r_{eixo} [mm]
60,42	3,24	150,00	25,40

Tabela 2 – Propriedades da roda de reação

A Tabela 2 apresenta as dimensões e massas das rodas de reação, obtidas do modelo 3D em CAD elaborado para o satélite CBERS 4. Apesar das rodas não serem de um modelo realmente embarcado, elas foram baseadas nos modelos comerciais da Bendix

Corporation, expostos no livro *Spacecraft Attitude Determination and Control* (WERTZ, 1978). Dessa maneira, a partir da Equação 5.28, é possível obter os momentos de inércia das rodas de reação.

Parâmetro	Módulo	Unidade
J	0,68	$kg \cdot m^2$

Tabela 3 – Momento principal de inércia das rodas de reação.

Assim, a Tabela 3 apresenta o momento principal de inércia das rodas de reação calculados a partir dos dados da Tabela 2. O único valor que será usado na simulação será o do momento de inércia da roda no eixo o qual ela está instalada, ou seja o valor J. Como já explicado no modelo físico, o sistema apresenta três rodas de reação, orientadas de modo que o eixo de maior inércia de cada roda seja paralelo aos eixos principais de inércia do satélite.

6.2 Valores numéricos do sistema linearizado

Selecionados os parâmetros do satélite, é necessário determinar também o ponto de equilíbrio em torno do qual o satélite irá atuar para que as devidas substituições numéricas possam ser feitas no sistema 5.43.

De acordo com (MARKLEY; CRASSIDIS, 2014), valores de nutação nulos geram um caso de *Gimbal Lock*. Devido às indeterminações geradas por esse valor, optou-se por estudar valores angulares pequenos, porém não nulos. O momento angular das rodas de reação escolhido foi de 10 $kg \cdot m^2/s$, com base em (WERTZ, 1978). Então, define-se o ponto de equilíbrio como:

$$\begin{cases} \overline{\psi} = 0 \; rad \\ \overline{\theta} = 10^{-3} \; rad \\ \overline{\varphi} = 10^{-3} \; rad \\ \overline{h_x} = 10 \; kg.m^2/s \\ \overline{h_y} = 10 \; kg.m^2/s \\ \overline{h_z} = 10 \; kg.m^2/s \end{cases} \tag{6.1}$$

Substituindo os valores estabelecidos na seção 6.1 e na Equação 6.1, do sistema de equações 5.43, obtém-se as matrizes A e B com seus valores numéricos aplicados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,05 & 1,05 & -1,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 \cdot 10^{-6} & -1,05 \cdot 10^{-6} & 1,05 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0. & 0. & 1,05 & -1,05 & 1,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,90 \cdot 10^{-4} & -6,91 \cdot 10^{-7} & -6,91 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,11 \cdot 10^{-4} & -7,11 \cdot 10^{-4} & 7,11 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,69 \cdot 10^{-6} & 2,70 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,02 \cdot 10^{-4} & -1,05 \cdot 10^{-1} & 0 \\ 1,02 \cdot 10^{-10} & 1,05 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 1,02 \cdot 10^{-4} & 1,05 \cdot 10^{-1} & -3,97 \cdot 10^{-4} \\ 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

6.3 Análise de estabilidade

Para a análise de estabilidade do sistema, os polos do sistema devem sem calculados. Polos com parte real negativa são estáveis e polos com parte real positiva são instáveis. Já polos com parte real nula são marginalmente estáveis.

Uma vez que os polos do sistema correspondem aos autovalores da matriz dinâmica, o polinômio característico P de A será explicitado e, em seguida, suas raízes. Como o polinômio P (Equação 6.4) é de nono grau, uma vez que se trata de uma matriz de ordem nove, suas raízes serão calculadas numericamente e dispostas na Tabela 4:

$$P(s) = s^9 + 1,016 \cdot 10^{-6} \cdot s^8 + 4,146 \cdot 10^{-6} \cdot s^7 \tag{6.4}$$

Componente real	Componente imaginária	Multiplicidade	Estabilidade
$-5,081 \cdot 10^{-7}$	$2,036 \cdot 10^{-3}$	1	Estável
$-5,081 \cdot 10^{-7}$	$-2,036 \cdot 10^{-3}$	1	Estável
$-9,407 \cdot 10^{-18}$	0	1	Estável
0	0	6	Marginalmente estável

Tabela 4 – Polos do sistema

Uma vez que exitem polos com componente real nula e não há polos com parte real positiva, o sistema como um todo é considerado marginalmente estável.

A análise de estabilidade do sistema também pode ser feita através do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Utilizando o polinômio característico de A indicado na equação 6.4, o critério pode ser aplicado na Tabela 5:

s^9	1,000	$4,146 \cdot 10^{-6}$	0	0	0
s^8	$1,016 \cdot 10^{-6}$	0	0	0	0
s^7	$4,146 \cdot 10^{-6}$	0	0	0	0
s^6	$2,902 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0
s^5	$1,741 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0
s^4	$8,707 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0
s^3	$3,483 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0
s^2	$1,045 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	0
s^1	$2,090 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	0
s^0	$2,090 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	0

Tabela 5 – Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Como a primeira coluna apresenta apenas valores positivos, sabe-se que o polinômio característico não apresenta raízes com componente real positiva. Dessa forma, todos os polos do sistema apresentam parte real menor ou igual a zero, o que condiz com os polos encontrados na Tabela 4. Pelo critério de Routh-Hurwitz, chega-se à conclusão que o sistema pode ser estável ou marginalmente estável. Em adição, uma simples constatação de que zero é uma raiz de P nos permite afirmar que o sistema é marginalmente estável, corroborando na conclusão anteriormente obtida pelo estudo dos polos.

Vale notar que a estabilidade estudada se refere apenas às condições próximas do estado descrito pelas equações 6.1. Para estudar a estabilidade em outras condições, outras matrizes dinâmicas precisariam ser estudadas de acordo com seus respectivos pontos de linearização.

A matriz de transferência (Equação 6.5) referente ao sistema também será calculada nessa seção. Devido às dimensões das matrizes u e C, a função de transferência é disposta na seguinte forma matricial:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \\ G_{41}(s) & G_{42}(s) & G_{43}(s) \\ G_{51}(s) & G_{52}(s) & G_{53}(s) \\ G_{61}(s) & G_{62}(s) & G_{63}(s) \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Aproximações das entradas da matriz 6.5 são explicitadas a seguir. Para facilitar a leitura, o polinômio característico de A (Equação 6.4) foi representado por $P(s)$:

$$G_{11}(s) = \frac{1,36 \cdot 10^{-15}s^8 - 1,02 \cdot 10^{-4}s^7 - 3,22 \cdot 10^{-20}s^6}{P(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{1,99 \cdot 10^{-15}s^8 + 1,02 \cdot 10^{-10}s^7 + 2,45 \cdot 10^{-23}s^6}{P(s)}$$

$$G_{31}(s) = \frac{3,40 \cdot 10^{-16}s^8 + 1,02 \cdot 10^{-4}s^7 - 4,03 \cdot 10^{-10}s^6}{P(s)}$$

$$G_{41}(s) = \frac{1,02 \cdot 10^{-4}s^8 + 1,03 \cdot 10^{-16}s^7}{P(s)}$$

$$G_{51}(s) = \frac{1,02 \cdot 10^{-10}s^8 - 6,38 \cdot 10^{-16}s^7}{P(s)}$$

$$G_{61}(s) = \frac{1,02 \cdot 10^{-4}s^8 - 4,03 \cdot 10^{-10}s^7}{P(s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{9,20 \cdot 10^{-16}s^8 - 1,05 \cdot 10^{-1}s^7 + 9,96 \cdot 10^{-17}s^6}{P(s)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{9,88 \cdot 10^{-16}s^8 + 1,00 \cdot 10^{-7}s^7 - 9,46 \cdot 10^{-22}s^6}{P(s)}$$

$$G_{32}(s) = \frac{6,06 \cdot 10^{-16}s^8 + 1,05 \cdot 10^{-1}s^7 - 4,00 \cdot 10^{-7}s^6}{P(s)}$$

$$G_{42}(s) = \frac{-1,05 \cdot 10^{-1}s^8 - 3,00 \cdot 10^{-16}s^7}{P(s)}$$

$$G_{52}(s) = \frac{1,00 \cdot 10^{-7}s^8 - 1,68 \cdot 10^{-16}s^7}{P(s)}$$

$$G_{62}(s) = \frac{1,05 \cdot 10^{-1}s^8 - 4,00 \cdot 10^{-7}s^7}{P(s)}$$

$$G_{13}(s) = \frac{4,76 \cdot 10^{-16}s^8 - 8,66 \cdot 10^{-16}s^7 + 4,15 \cdot 10^{-4}s^6}{P(s)}$$

$$G_{23}(s) = \frac{7,58 \cdot 10^{-16}s^8 - 7,25 \cdot 10^{-16}s^7 - 4,15 \cdot 10^{-10}s^6}{P(s)}$$

$$G_{33}(s) = \frac{4,07 \cdot 10^{-16}s^8 - 3,97 \cdot 10^{-4}s^7 - 4,15 \cdot 10^{-4}s^6}{P(s)}$$

$$G_{43}(s) = \frac{-2,60 \cdot 10^{-16}s^8 + 4,15 \cdot 10^{-4}s^7}{P(s)}$$

$$G_{53}(s) = \frac{-9,32 \cdot 10^{-17}s^8 - 4,15 \cdot 10^{-10}s^7}{P(s)}$$

$$G_{63}(s) = \frac{-3,97 \cdot 10^{-4}s^8 - 4,15 \cdot 10^{-4}s^7}{P(s)}$$

6.4 Matriz de transição

A partir do sistema 5.43 com as matrizes A (Equação 6.2) e B (Equação 6.3) numéricas, as matrizes de transição $\Phi(\Delta t)$ e de termos forçantes $\Gamma(\Delta t)$ correspondentes podem ser calculadas. Através delas, uma solução aproximada do modelo linear pode ser encontrada.

Ambas matrizes podem ser aproximadas por meio de uma expansão de Taylor até o N-ésimo termo conforme as equações 6.6 e 6.7:

$$\Phi(\Delta t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i \Delta t^i}{i!} \tag{6.6}$$

$$\Gamma(\Delta t) \approx \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i \Delta t^i}{(i+1)!} \tag{6.7}$$

Levando em conta os primeiros 10 termos da expansão e considerando um passo Δt de 0,01 segundos, as matrizes podem ser aproximadas por:

$$\Phi(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1,00 & 0 & 0 & 1,00 & 5,23 \cdot 10^{-5} & -5,23 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,00 & 0 & 5,23 \cdot 10^{-11} & 1,00 \cdot 10^{-2} & 5,23 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00 & 5,23 \cdot 10^{-5} & -5,25 \cdot 10^{-5} & 1,01 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,90 \cdot 10^{-1} & 1,05 \cdot 10^{-2} & -1,05 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 \cdot 10^{-8} & 1,00 & 1,05 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,05 \cdot 10^{-2} & -1,05 \cdot 10^{-2} & 1,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,90 \cdot 10^{-6} & -6,74 \cdot 10^{-9} & -6,91 \cdot 10^{-6} & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,11 \cdot 10^{-6} & -7,11 \cdot 10^{-6} & 7,11 \cdot 10^{-6} & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,68 \cdot 10^{-8} & 2,70 \cdot 10^{-5} & 1,41 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\Gamma(\Delta t) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 4,98258 \cdot 10^{-5} & 1,74 \cdot 10^{-7} & -1,74 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 1,74 \cdot 10^{-13} & 5,00 \cdot 10^{-5} & 1,74 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 1,74 \cdot 10^{-7} & -1.75 \cdot 10^{-7} & 5,02 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,95 \cdot 10^{-3} & 5,23 \cdot 10^{-5} & -5,23 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,23 \cdot 10^{-11} & 1,00 \cdot 10^{-2} & 5,23 \cdot 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,23 \cdot 10^{-5} & -5,25 \cdot 10^{-5} & 1,00 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,45 \cdot 10^{-8} & -3,40 \cdot 10^{-11} & -3,46 \cdot 10^{-8} & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.56 \cdot 10^{-8} & -3,56 \cdot 10^{-8} & 3,56 \cdot 10^{-8} & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,34 \cdot 10^{-10} & 1,35 \cdot 10^{-7} & 4,70 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

A partir das matrizes 6.9 e 6.8, é possível determinar uma solução aproximada para o sistema diferencial 5.43. Os sub-indicies i das variáveis e entradas denotam diferentes instantes de tempo:

$$\begin{cases} x_i = \Phi x_{i-1} + \Gamma B u_{i-1} \\ y_i = C x_i \end{cases} \tag{6.10}$$

Os resultados via matriz de transição foram comparados com as soluções através do código em *Scilab 6.1.0* anexado no apêndice A, apresentando resultados com diferenças desprezíveis em relação aos outros métodos utilizados.

6.5 Respostas do sistema

Por fim, deseja-se comparar os resultados obtidos nos dois modelos diferentes que foram desenvolvidos: o linear e o não linear. Logo, para permitir essa análise, foram realizadas várias simulações com o código presente no Apêndice A.

A fim de observar o comportamento do sistema, foram utilizadas três tipos de entradas para o torque aplicado pelas rodas de reação sobre o satélite, que são entrada tipo degrau, impulso e senoidal. Como deseja-se analisar a validade do modelo linearizado, todas as simulações foram feitas com as condições iniciais de equilíbrio (Equação 6.1 e Equação 5.41). Nas próximas subseções, estão os resultados obtidos:

6.5.1 Entrada tipo degrau

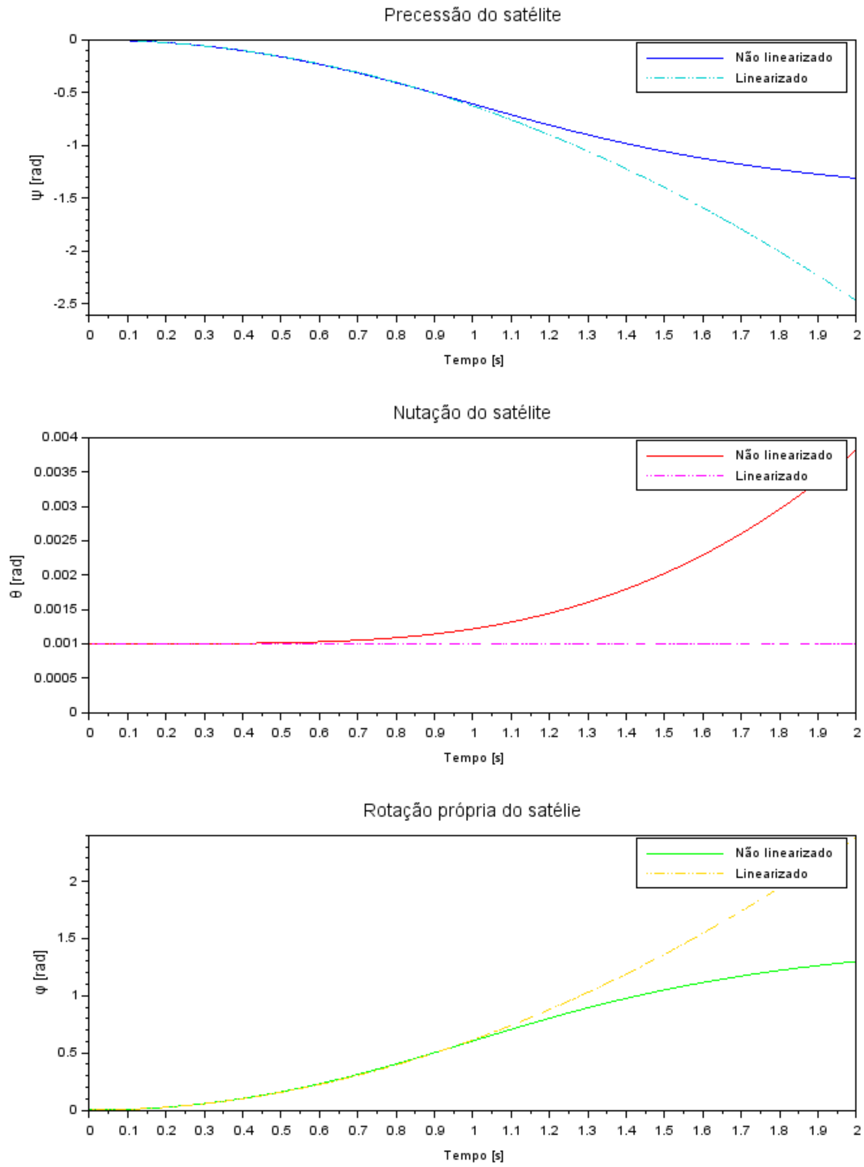

Figura 8 – Evolução temporal dos ângulos de Euler para entrada degrau. [Autores, 2021]

Para a entrada tipo degrau, aplicou-se subitamente no início da simulação um torque de baixa intensidade e igual nos três eixos principais de inércia do satélite, de modo que o objetivo seria simular um ajuste fino da atitude do satélite. Foi utilizado um torque de 12 $N.m$ de início súbito na simulação.

Como se pode observar na Figura 8, nos três ângulos de Euler, o modelo linearizado representa assertivamente o comportamento do satélite no início da simulação, mas com o prosseguimento, os dois modelos distanciam-se. Para a precessão e rotação própria do satélite, o modelo linear retrata corretamente o sistema até metade do tempo de simulação e, após isso, os comportamentos tendem a mudar. Na nutação, o modelo linear a retrata devidamente apenas enquanto ela está consideravelmente próxima do ângulo de equilíbrio, tornando-se notoriamente diferente depois, uma vez que a linearização mantém-se todo o tempo próxima do equilíbrio e o não linear distancia-se vagarosamente do mesmo.

6.5.2 Entrada tipo impulso

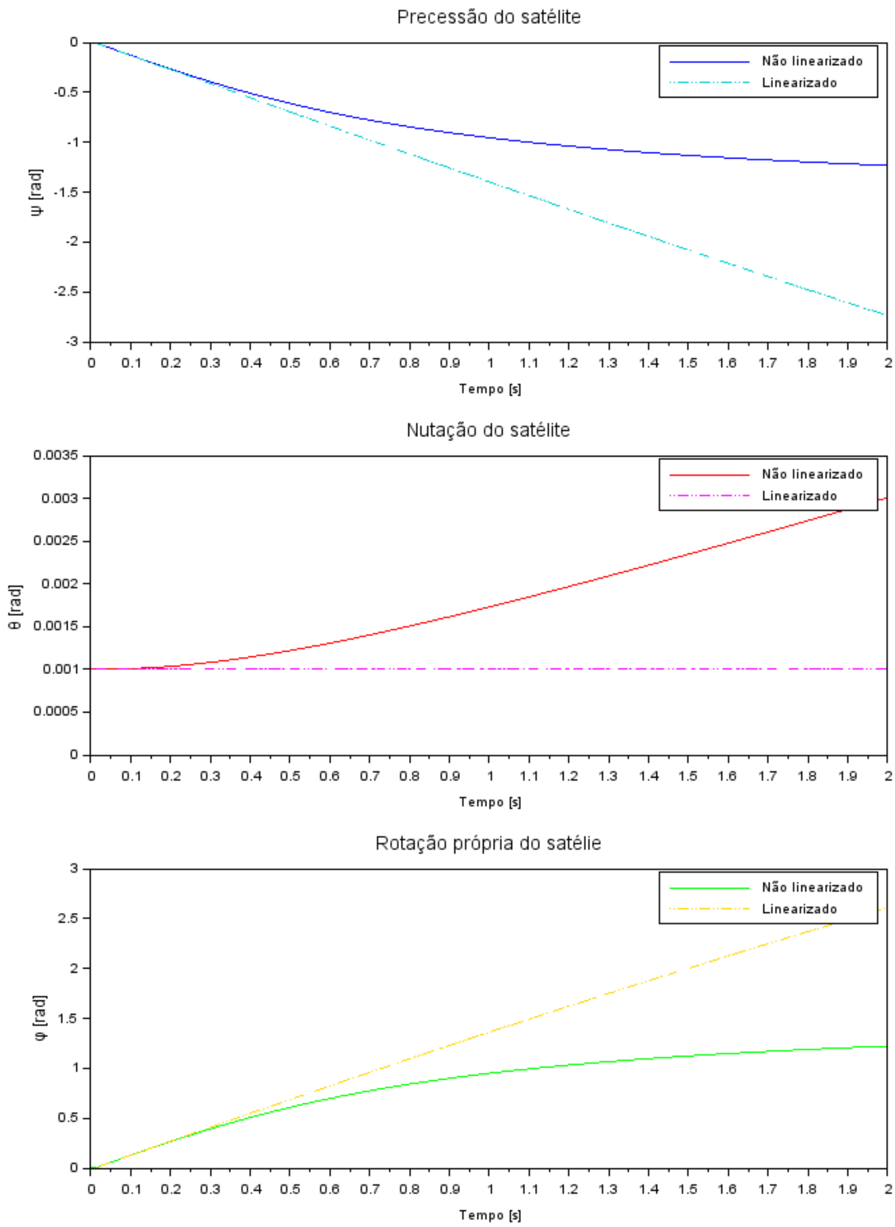

Figura 9 – Evolução temporal dos ângulos de Euler para entrada tipo impulso [Autores, 2021]

A entrada do tipo impulso consiste do início da simulação com a aplicação de um torque altíssimo, mas por um período muito curto de tempo. No caso, foi utilizado um torque de 680 $N.m$, valor máximo que as rodas de torque fabricadas pela Bendix Corporation produzem (WERTZ, 1978) durante um intervalo de tempo de $0,02$ s.

A análise dos gráficos presentes na Figura 9 apresentam comportamento diferente do caso anterior. Para a entrada de tipo impulso, percebe-se que não há troca de concavidade entre os modelos no movimento de precessão, como ocorre no caso degrau. Na rotação própria, o comportamento é semelhante ao já visto, assim como na nutação. Entretanto, para todos os casos, o modelo linear distancia-se mais rapidamente que na entrada degrau, fato já esperado, uma vez que é aplicado um torque consideravelmente maior, o que distancia a simulação ainda mais do equilíbrio.

6.5.3 Entrada tipo senoidal

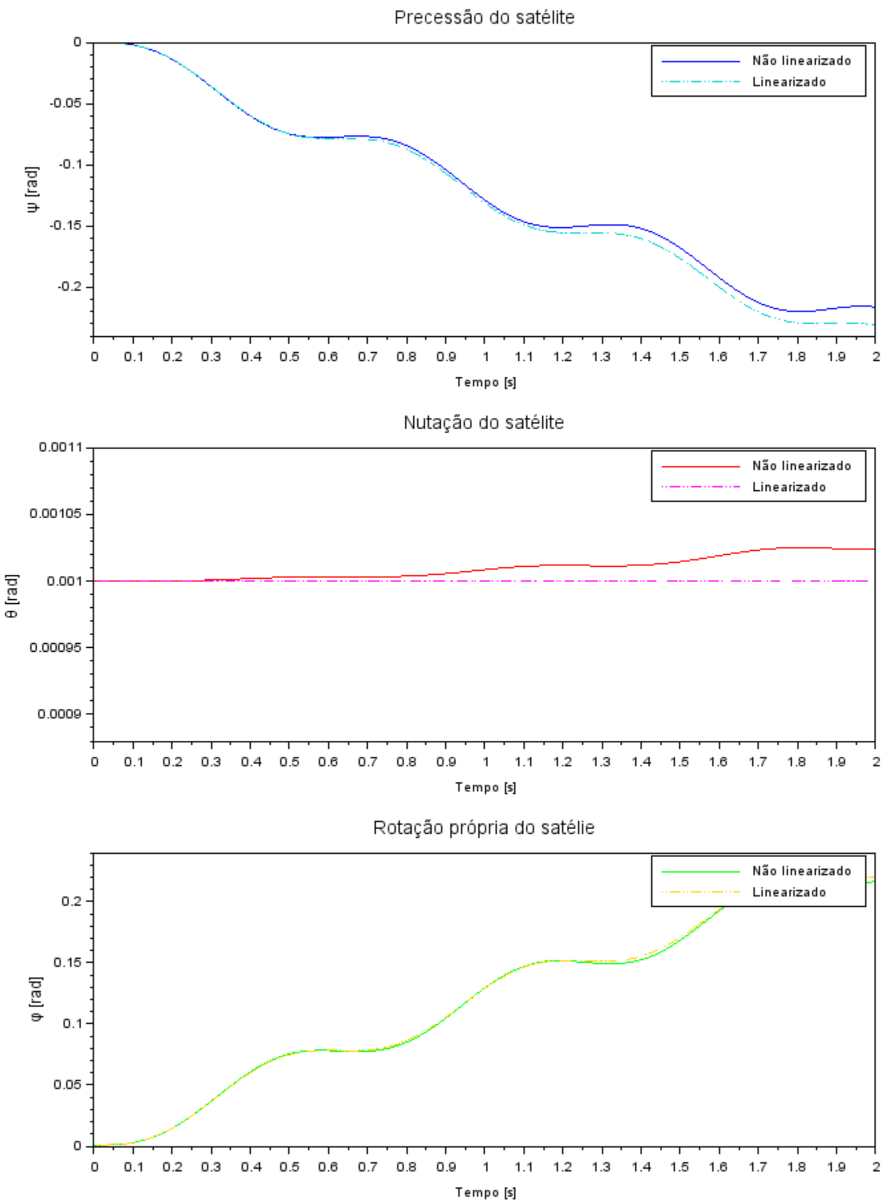

Figura 10 – Evolução temporal dos ângulos de Euler para entrada senoidal [Autores, 2021]

A entrada tipo senoidal consiste da aplicação de um torque de característica oscilatória de baixa frequência desde o início da simulação. No caso, foi utilizado um torque de amplitude igual a 12 $N.m$ e frequência de 10 rad/s.

Observa-se que os três ângulos variam menos que nos outros dois casos anteriormente apresentados, fato esperado uma vez que, durante a aplicação, há inversão de sinal do torque devido à característica da função seno. Destaca-se também que, para o ângulo de precessão e de rotação própria, o modelo linear e não linear são visualmente próximos durante boa parte da simulação, iniciando sua divergência próximo do final do período de 2 s. Já para a nutação, no modelo não linearizado ocorrem pequenas oscilações crescentes, enquanto o modelo linear é praticamente estável no equilíbrio.

Logo, conclui-se que o caso de entrada que a linearização melhor representa o caso real é para entrada tipo senoidal, já que esta apresenta as menores variações gráficas entre os modelos, indicando grande aderência entre linear e não linear.

6.6 Domínio da frequência

Para tornar possível a análise do sistema sob uma perturbação periódica, obtiveram-se os diagramas de Bode para cada um dos ângulos de Euler (ψ, θ, φ) e para cada entrada de torque (T_x, T_y e T_z). Como as variáveis mais importantes são as relacionadas à atitude do satélite, decidiu-se por expor nesta seção somente os diagramas referentes à precessão, nutação e rotação própria para os torques aplicados. Os demais diagramas podem ser obtidos pelo código apresentado no Apêndice A.

Em relação aos diagramas em si, optou-se por observar o domínio da frequência na faixa de 10^{-2} a 10^{2} Hertz, uma vez que se percebe que tal faixa contém as maiores variações dos valores analisados. Além disso, não é esperado que os torques variem fora desse domínio devido a restrições físicas dos componentes impostas pelos fabricantes.

Os diagramas de Bode são apresentados, em sequência, da Figura 11 à Figura 19:

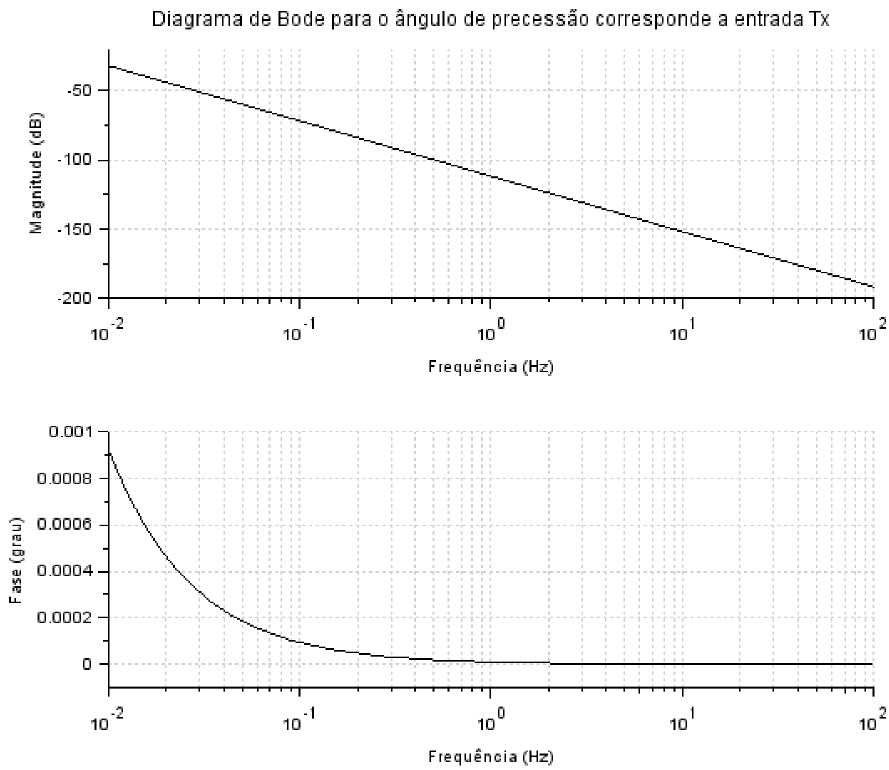

Figura 11 – Diagrama de Bode para o ângulo de precessão e entrada T_x [Autores, 2021]

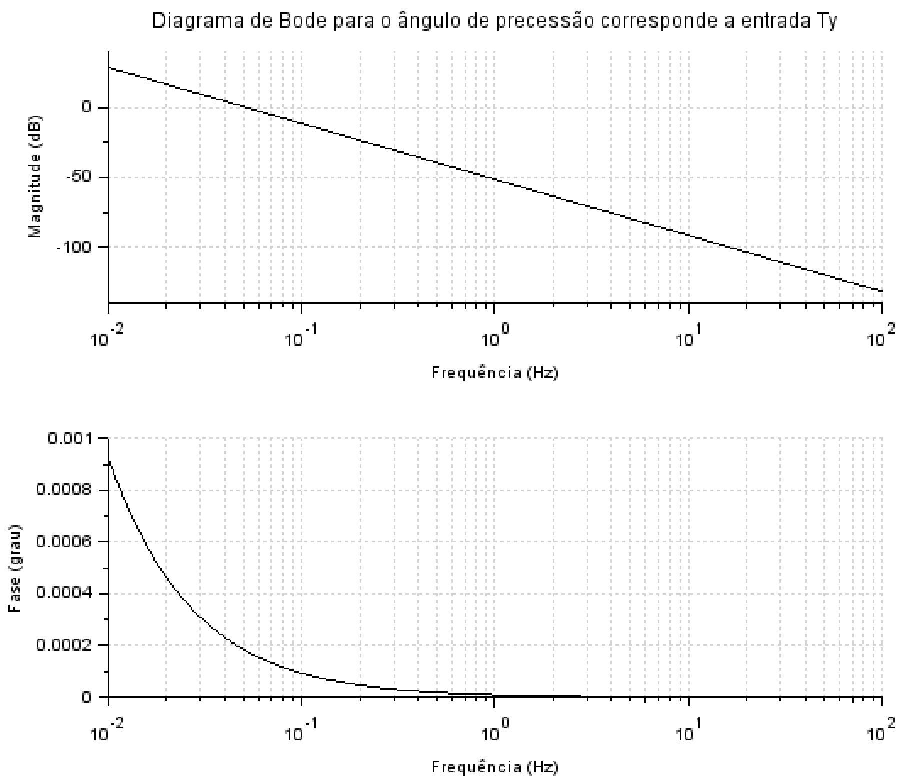

Figura 12 – Diagrama de Bode para o ângulo de precessão e entrada T_y [Autores, 2021]

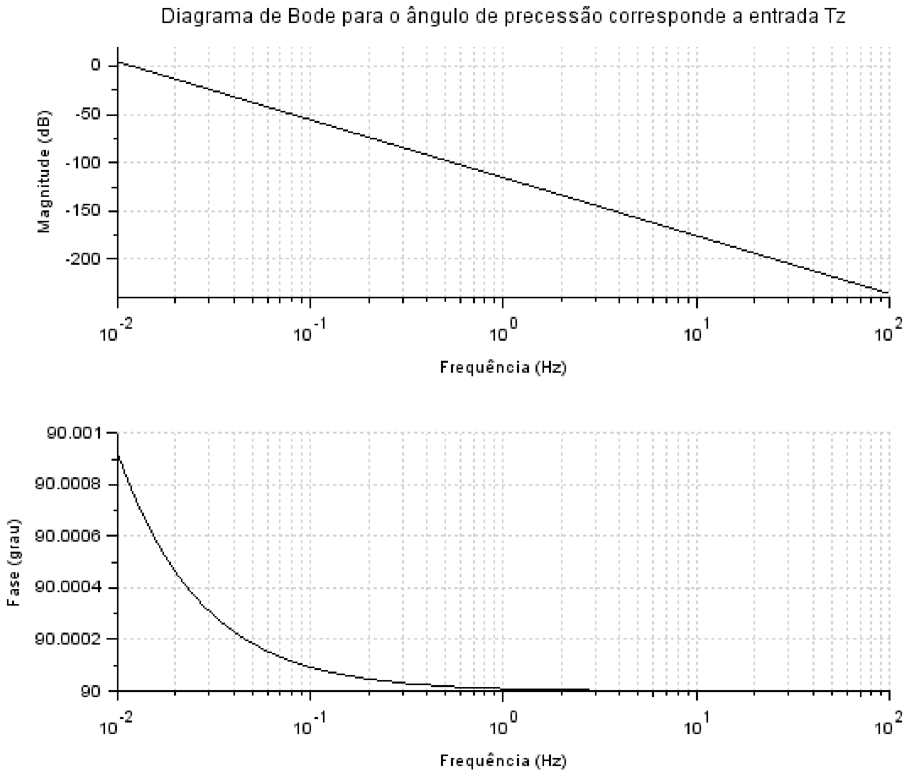

Figura 13 – Diagrama de Bode para o ângulo de precessão e entrada T_z [Autores, 2021]

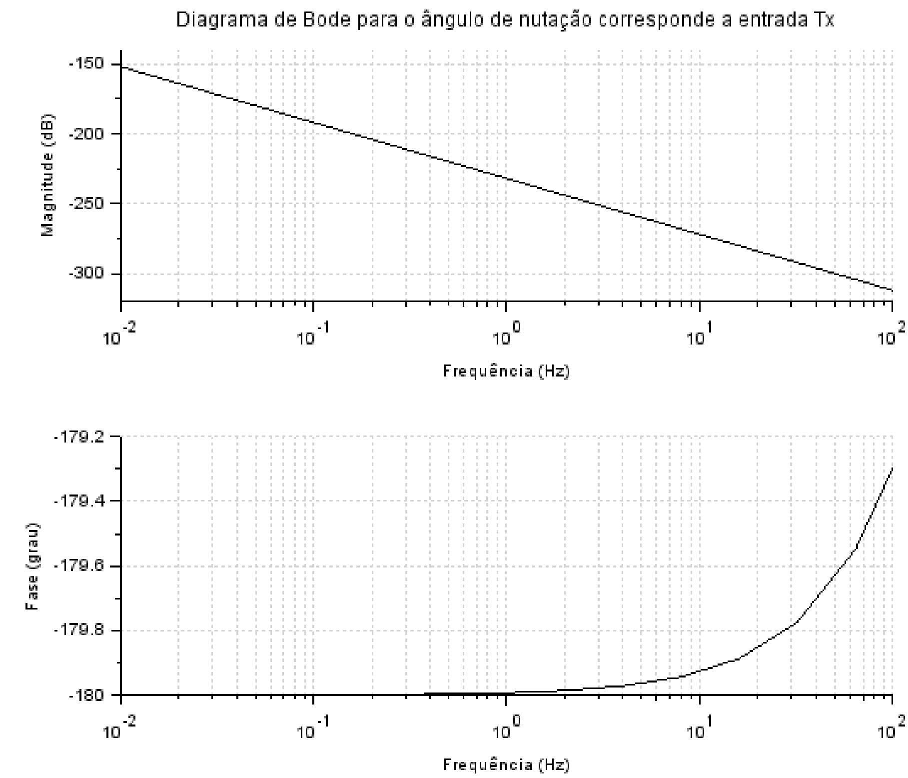

Figura 14 – Diagrama de Bode para o ângulo de nutação e entrada T_x [Autores, 2021]

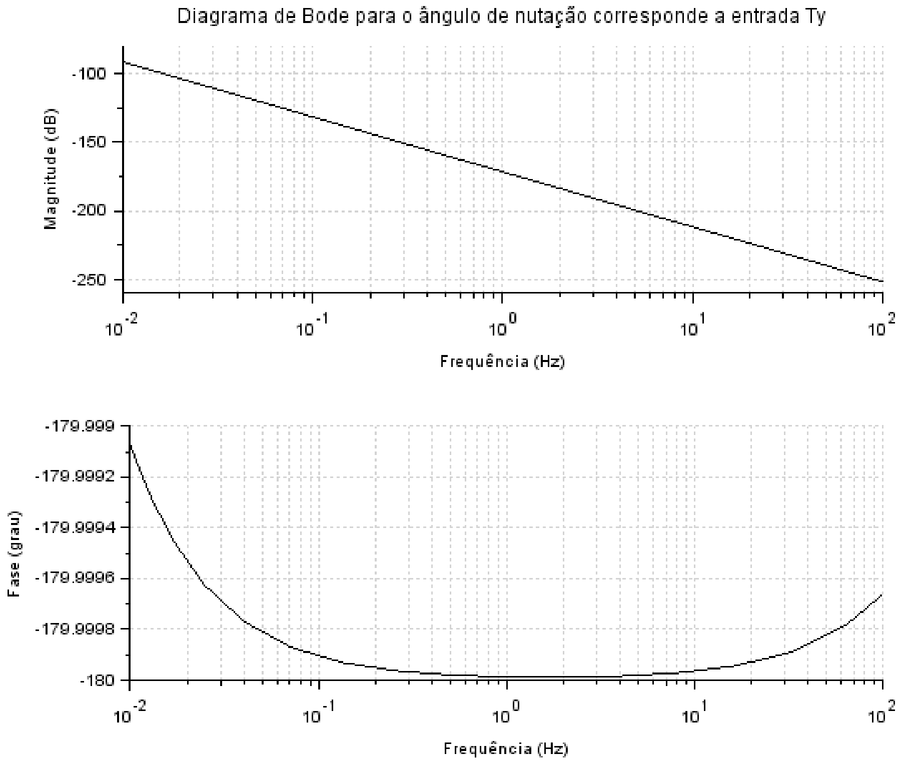

Figura 15 – Diagrama de Bode para o ângulo de nutação e entrada T_y [Autores, 2021]

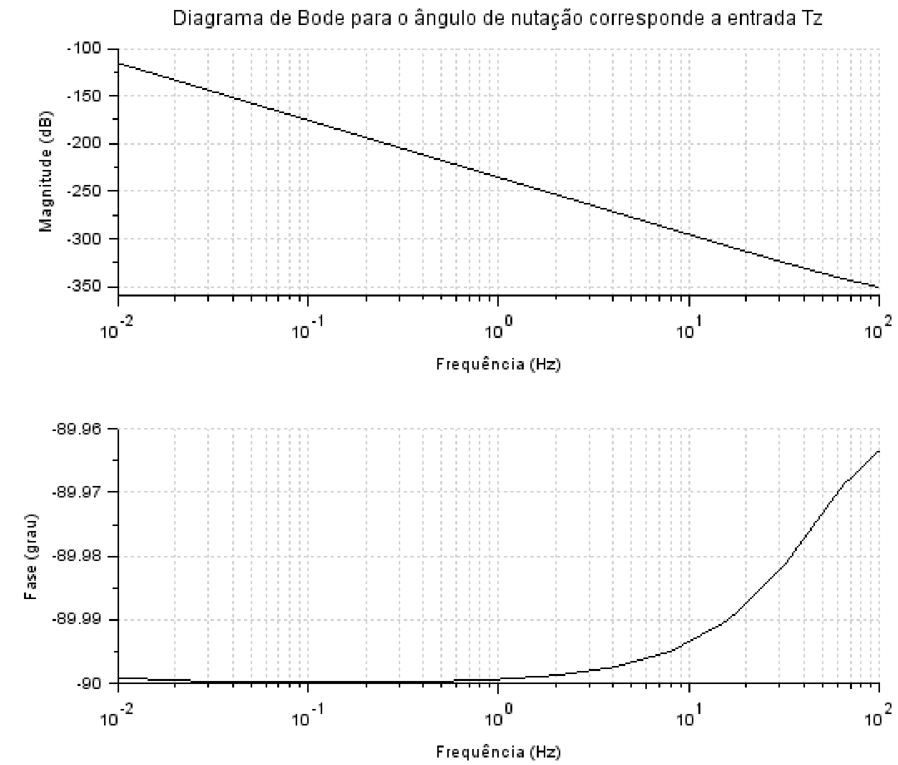

Figura 16 – Diagrama de Bode para o ângulo de nutação e entrada T_z [Autores, 2021]

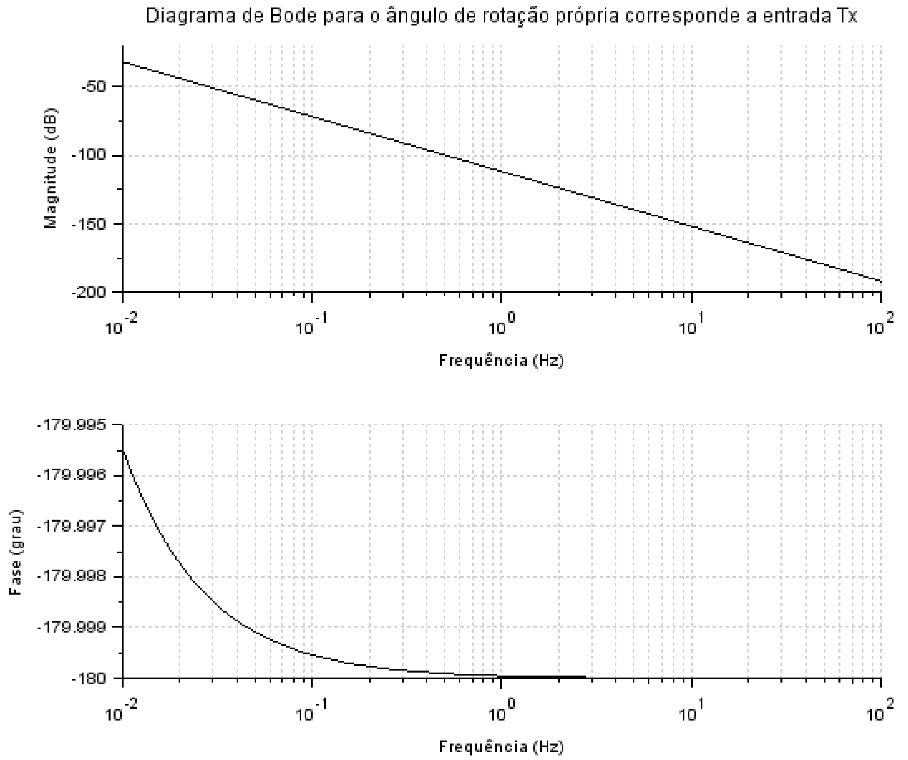

Figura 17 – Diagrama de Bode para o ângulo de rotação própria e entrada T_x [Autores, 2021]

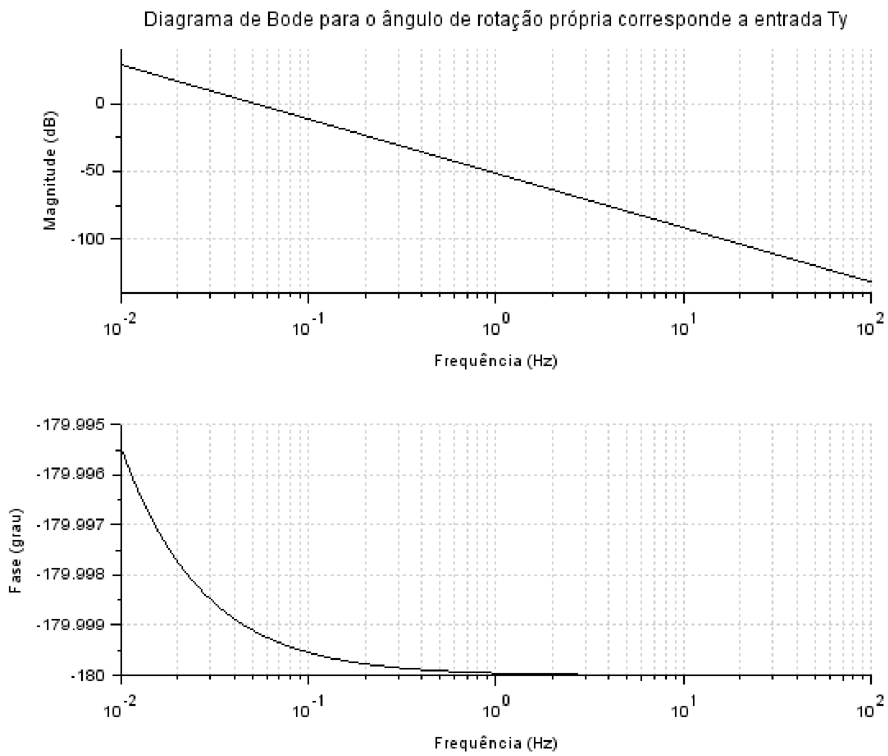

Figura 18 – Diagrama de Bode para o ângulo de rotação própria e entrada T_y [Autores, 2021]

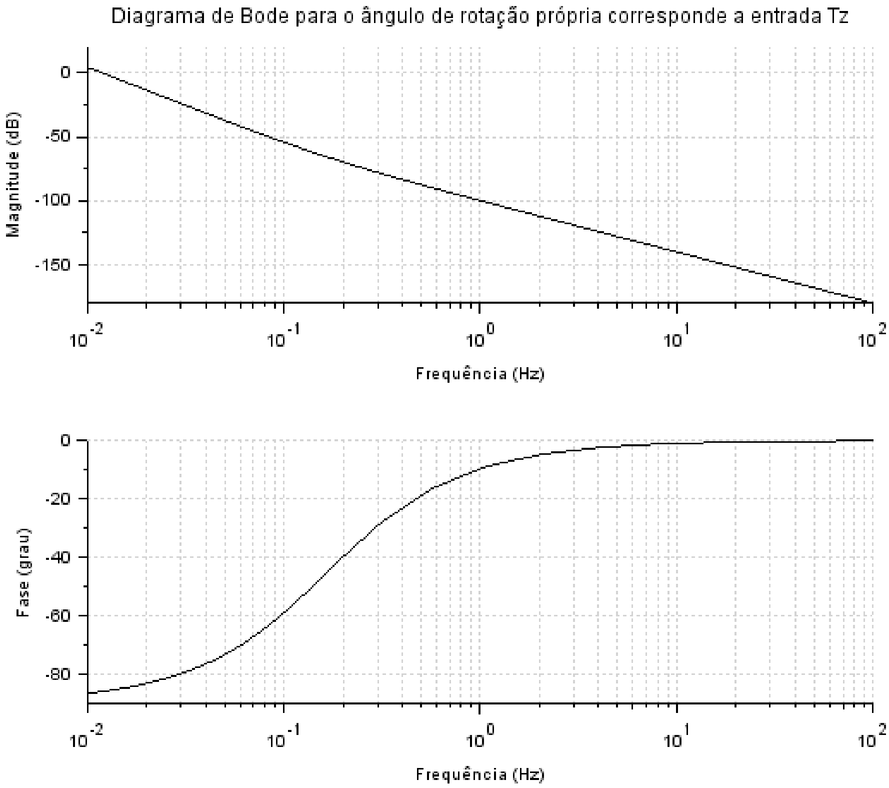

Figura 19 – Diagrama de Bode para o ângulo de rotação própria e entrada T_z [Autores, 2021]

Dos diagramas de Bode, é possível perceber que todas as magnitudes decaem com o aumento da frequência. Para a frequência escolhida, de 10^{-2} a 10^2 Hz, os gráficos são sempre decrescentes. Entretanto, caso tivesse sido optado por uma faixa de frequências ainda mais baixas, seria possível observar uma reta quase constante, para depois ocorrer o decaimento.

No caso das fases, é possível observar que elas são praticamente constantes para todos casos. Ademais, os eixos x e y sempre estão na mesma fase, nos ângulos de 0°, 90° ou 180°, mas o eixo z é sempre diferente dos outros dois. A exceção é a rotação própria para o torque no eixo z, que apresenta grande variação de fase dentro do domínio do diagrama de Bode.

7 Conclusão

No presente relatório foram estudados e elaborados modelos matemáticos para um satélite atuado com rodas de reação, os quais apresentaram resultados satisfatórios com relação ao esperado para esse sistema.

Foi realizado um estudo no estado da arte e foram deduzidas as equações diferenciais que regem os sistemas físicos a serem estudados. Em seguida, foi elaborado um código na linguagem *Scilab 6.1.0* a fim de simular numericamente a solução do sistema. Então, utilizando as técnicas de linearização, foi realizado uma análise do sistema linearizado, visando obter soluções aproximadas do problema, permitindo uma maior compreensão sobre o estado do sistema quando submetido a diferentes tipos de torques de entrada.

Uma vez obtido o código de simulação, tanto do sistema não linearizado quanto do linearizado, buscou-se adotar parâmetros convencionais para a situação a ser estudada. Assim, foram realizados testes com diferentes entradas, com o objetivo de além investigar a movimentação do satélite, averiguar a validade da solução não linear a partir da observação dos resultados e a compatibilidade com a solução linearizada.

Dessa maneira, foi possível observar a evolução temporal de todas as variáveis a serem discutidas, além das condições de estabilidade a partir dos métodos de verificação analíticos, como o critério de *Routh-Hurwitz*. Tal verificação possibilitou um maior entendimento do efeito das rodas de reação no comportamento do sistema.

Por fim, obtido um programa confiável que simula a situação física do problema a ser analisado, será possível posteriormente desenvolver o controle do sistema em futuras disciplinas com base em um modelo sólido e confiável.

Referências

CABETTE, R. E. S. *Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais*. Tese (Doutorado) — Dissertação de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São . . . , 2006. Citado na página 3.

DAVIS, L. P. et al. Hubble space telescope reaction wheel assembly vibration isolation system. *NASA Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama*, v. 9, 1986. Citado na página 3.

GONÇALVES, L. D. *Manobras Orbitais de Satélites Artificiais Lunares com Aplicação de Propulsão Contínua*. Tese (Doutorado) — dissertação (Mestrado em Mecânica Espacial e Controle)-Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2013. Citado na página 3.

HENDERSON, D. Shuttle program. euler angles, quaternions, and transformation matrices working relationships. 1977. Citado na página 3.

KIM, S.; KIM, Y. Spin-axis stabilization of a rigid spacecraft using two reaction wheels. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 24, n. 5, p. 1046–1049, 2001. Citado na página 3.

MARKLEY, F.; CRASSIDIS, J. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. Springer New York, 2014. (Space Technology Library). ISBN 9781493908011. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=HjDCngEACAAJ>. Citado 5 vezes nas páginas 3, 8, 16, 17 e 25.

OLIVEIRA, F. de. *Brasil-China: 20 anos de cooperação espacial : CBERS, o satélite da parceria estratégica*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2009. ISBN 9788560064182. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=xk5JzS-nUxgC>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.

SHRIVASTAVA, S.; MODI, V. Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques-a brief survey. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 6, n. 6, p. 461–471, 1983. Citado na página 3.

WERTZ, J. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. D. Reidel Publishing Company, 1978. ISBN 978-94-009-9907-7. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-009-9907-7>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 13, 25 e 32.

Apêndices

APÊNDICE A – Códigos de simulação em Scilab

```
//Projeto final − Modelagem de Sistemas Din micos

//Integrantes:
//Cássio Murakami;
//Gabriel Barbosa Paganini;
//Henrique Kuhlmann;
//João Otávio Tanaka de Oliveira;

clear();
xdel(winsid());

//Par metros de simulação:
t_inicial = 0;        //Instante inicial [s]
t_final = 2;          //Instante final [s]
iteration = 1000;     //Número de Discretizações
t = linspace(t_inicial,t_final,iteration);

show_Bode = 1;

entrada = 2;

//Par metros do projeto do satélite:
I1 = 9840.05;      //Momento de inércia em relação ao eixo x [kg m^2]
I2 = 9558.05;      //Momento de inércia em relação ao eixo y [kg m^2]
I3 = 2520.89;      //Momento de inércia em relação ao eixo z [kg m^2]
//Observação: (Ix >= Iy >= Iz)

//Par metros do projeto das rodas de reação:
J = 0.68;            //Momento de inércia do rotor [kg m^2]

//Definição das entradas do sistema:
if entrada == 0 then //Entrada constante
    function fun = Tx(t)
        fun = 12;
    endfunction

    function fun = Ty(t)
        fun = 12;
    endfunction

```

```
    function fun = Tz(t)
        fun = 12;
    endfunction
end

if entrada == 1 then //Entra tipo degrau
    function fun = Tx(t)
        if t < 0.5 then
            fun = 12;
        else
            fun = 24;
        end
    endfunction

    function fun = Ty(t)
        if t < 0.5 then
            fun = 12;
        else
            fun = 24;
        end
    endfunction

    function fun = Tz(t)
        if t < 0.5 then
            fun = 12;
        else
            fun = 24;
        end
    endfunction
end

if entrada == 2 then //Entrada tipo impulso
    function fun = Tx(t)
        if t < 0.02 then
            fun = 680;
        else
            fun = 0;
        end
    endfunction

    function fun = Ty(t)
        if t < 0.02 then
            fun = 680;
        else
            fun = 0;
        end
    endfunction
```

```

    function fun = Tz(t)
        if t < 0.02 then
            fun = 680;
        else
            fun = 0;
        end
    endfunction
end

if entrada == 3 then //Entrada tipo senoidal
    function fun = Tx(t)
        fun = 12*sin(10*t);
    endfunction

    function fun = Ty(t)
        fun = 12*sin(10*t);
    endfunction

    function fun = Tz(t)
        fun = 12*sin(10*t);
    endfunction
end

//Condições iniciais do sistema:
psi0 = 0;    // ngulo  de precessão inicial [rad]
theta0 = 0.001;    // ngulo  de nutação inicial [rad]
phi0 = 0.001;    // ngulo  de rotação própria inicial [rad]
dpsi0 = 0;    //Variação angular inicial de precessão [rad/s]
dtheta0 = 0;    //Variação angular inicial de nutação [rad/s]
dphi0 = 0;    //Variação angular inicial de rotação principal [rad/s]
hx0 = 10;    //Momento angular inicial da roda de reação X [kgm^2/s]
hy0 = 10;    //Momento angular inicial da roda de reação Y [kgm^2/s]
hz0 = 10;    //Momento angular inicial da roda de reação Z [kgm^2/s]

//Condições do ponto de equilíbrio do sistema:
psip = psi0;    // ngulo  de precessão no equilíbrio [rad]
thetap = theta0;    // ngulo  de nutação no equilíbro [rad]
phip = phi0;    // ngulo  de rotação própria no equilíbrio [rad]
dpsip = 0;    //Variação angular de precessão no equilíbrio [rad/s]
dthetap = 0;    //Variação angular de nutação no equilíbrio [rad/s]
dphip = 0;    //Variação angular de rotação principal no equilíbrio [rad/s]
hxp = hx0;    //Momento angular da roda de reação X no equilíbrio [kgm^2/s]
hyp = hy0;    //Momento angular da roda de reação Y no equilíbrio [kgm^2/s]
hzp = hz0;    //Momento angular da roda de reação Z no equilíbrio [kgm^2/s]
Txp = 0;    //Entrada Tx no equilíbrio [kgm^2/s^2]
Typ = 0;    //Entrada Ty no equilíbrio [kgm^2/s^2]
```

```
Tzp = 0;     //Entrada Tz no equilíbrio [kgm^2/s^2]

//Definição dos vetores de solução:
psi = zeros(iteration);
theta = zeros(iteration);
phi = zeros(iteration);
dpsi = zeros(iteration);
dtheta = zeros(iteration);
dphi = zeros(iteration);
hx = zeros(iteration);
hy = zeros(iteration);
hz = zeros(iteration);

psi_l = zeros(iteration);
theta_l = zeros(iteration);
phi_l = zeros(iteration);
dpsi_l = zeros(iteration);
dtheta_l = zeros(iteration);
dphi_l = zeros(iteration);
hx_l = zeros(iteration);
hy_l = zeros(iteration);
hz_l = zeros(iteration);

// ——————————— Solução do sistema não linear ——————————— //

//Definição do vetor de estados:
function dy = diff_eq(t,y)
    psi = y(1);
    dpsi = y(2);
    theta = y(3);
    dtheta = y(4);
    phi = y(5);
    dphi = y(6);
    hx = y(7);
    hy = y(8);
    hz = y(9);

    wx_aux = dpsi*sin(theta)*sin(phi) + dtheta*cos(phi);
    wy_aux = dpsi*sin(theta)*cos(phi) - dtheta*sin(phi);
    wz_aux = dpsi*cos(theta) + dphi;

    delta_x = + hy*wz_aux - hz*wy_aux - Tx(t);
    delta_y = - hx*wz_aux + hz*wx_aux - Ty(t);
    delta_z = + hx*wy_aux - hy*wx_aux - Tz(t);

    dy(1) = dpsi;
    dy(2) = - dpsi*dtheta*cotg(theta) + dtheta*dphi/sin(theta) + sin(phi)
```

```
*((I2-I3)/I1)*(dpsi*sin(theta)*cos(phi) - dtheta*sin(phi))*(dpsi*cotg(theta) + dphi/sin(theta)) + cos(phi)*((I3-I1)/I2)*(dpsi*sin(theta)*sin(phi) + dtheta*cos(phi))*(dpsi*cotg(theta) + dphi/sin(theta)) + delta_x*sin(phi)/(I1*sin(theta)) + delta_y*cos(phi)/(I2*sin(theta));
    dy(3) = dtheta;
    dy(4) = -dpsi*dphi*sin(theta) + cos(phi)*((I2-I3)/I1)*(dpsi*sin(theta)*cos(phi) - dtheta*sin(phi))*(dpsi*cos(theta) + dphi) - sin(phi)*((I3-I1)/I2)*(dpsi*sin(theta)*sin(phi) + dtheta*cos(phi))*(dpsi*cos(theta) + dphi) - delta_x*sin(phi)^2/(I1*cos(phi)) - delta_y*sin(phi)/I2;
    dy(5) = dphi;
    dy(6) = dpsi*dtheta*cotg(theta)*cos(theta) - dtheta*dphi*cotg(theta) - sin(phi)*((I2-I3)/I1)*(dpsi*sin(theta)*cos(phi) - dtheta*sin(phi))*(dpsi*cotg(theta)*cos(theta) + dphi*cotg(theta)) - cos(phi)*((I3-I1)/I2)*(dpsi*sin(theta)*sin(phi) + dtheta*cos(phi))*(dpsi*cotg(theta)*cos(theta) + dphi*cotg(theta)) + dpsi*dtheta*sin(theta) + ((I1 - I2)/I3)*(dpsi*sin(theta)*sin(phi) + dtheta*cos(phi))*(dpsi*sin(theta)*cos(phi) - dtheta*sin(phi)) - delta_x*sin(phi)*cotg(theta)/I1 - delta_y*cos(phi)*cotg(theta)/I2 + delta_z/I3;

    dy(7) = Tx(t) - J*(((I2 - I3)/I1)*wy_aux*wz_aux + hy*wz_aux/I1 - hz*wy_aux/I1 - Tx(t)/I1);
    dy(8) = Ty(t) - J*(((I3 - I1)/I2)*wx_aux*wz_aux - hx*wz_aux/I2 + hz*wx_aux/I2 - Ty(t)/I2);
    dy(9) = Tz(t) - J*(((I1 - I2)/I3)*wx_aux*wy_aux + hx*wy_aux/I3 - hy*wx_aux/I3 - Tz(t)/I3);
endfunction

result = ode([psi0;dpsi0;theta0;dtheta0;phi0;dphi0;hx0;hy0;hz0],0,t,diff_eq);

psi = result(1,:);
dpsi  = result(2,:);
theta = result(3,:);
dtheta = result(4,:);
phi = result(5,:);
dphi = result(6,:);
hx = result(7,:);
hy = result(8,:);
hz = result(9,:);

// ------------------- Solução do sistema linearizado ------------------- //

//Coeficientes do sistema linearizado:
    a14 = 1;
    a25 = 1;
    a36 = 1;
```

```
a44 = (csc(thetap)*(hyp*cos(thetap)-hzp*cos(phip)*sin(thetap))*sin(phip
))/I1+(cos(phip)*csc(thetap)*(-hxp*cos(thetap)+hzp*sin(thetap)*sin(phip)
))/I2;
a45 = (hzp*cos(phip)^2*csc(thetap))/I2 + (hzp*csc(thetap)*sin(phip)^2)/
I1;
a46 = -((hxp*cos(phip)*csc(thetap))/I2) + (hyp*csc(thetap)*sin(phip))/
I1;

a54 = -((sin(phip)*(-hxp*cos(thetap) + hzp*sin(phip)*sin(thetap)))/I2)
- (sin(phip)*(hyp*cos(thetap) - hzp*cos(phip)*sin(thetap))*tan(phip))/I1
;
a55 = -((hzp*cos(phip)*sin(phip))/I2) - (hzp*sin(phip)^2*tan(phip))/I1;
a56 = (hxp*sin(phip))/I2 - (hyp*sin(phip)*tan(phip))/I1;

a64 = -((cotg(thetap)*sin(phip)*(hyp*cos(thetap) - hzp*cos(phip)*sin(
thetap)))/I1) + (hxp*cos(phip)*sin(thetap) - hyp*sin(phip)*sin(thetap))/
I3 - (cos(phip)*cotg(thetap)*(-hxp*cos(thetap) + hzp*sin(phip)*sin(
thetap)))/I2;
a65 = -((hzp*cos(phip)^2*cotg(thetap))/I2) - (hzp*cotg(thetap)*sin(phip
)^2)/I1 + (-hyp*cos(phip) - hxp*sin(phip))/I3;
a66 = (hxp*cos(phip)*cotg(thetap))/I2 - (hyp*cotg(thetap)*sin(phip))/I1
;

a74 = -J*((hyp*cos(thetap))/I1 - (hzp*cos(phip)*sin(thetap))/I1);
a75 = -((hzp*J*sin(phip))/I1);
a76 = -((hyp*J)/I1);

a84 = -J*(-((hxp*cos(thetap))/I2) + (hzp*sin(phip)*sin(thetap))/I2);
a85 = -((hzp*J*cos(phip))/I2);
a86 = (hxp*J)/I2;

a94 = -J*((hxp*cos(phip)*sin(thetap))/I3 - (hyp*sin(phip)*sin(thetap))/
I3);
a95 = -J*(-((hyp*cos(phip))/I3) - (hxp*sin(phip))/I3);
a96 = 0;

b41 = -((csc(thetap)*sin(phip))/I1);
b42 = -((cos(phip)*csc(thetap))/I2);
b43 = 0;

b51 = (sin(phip)*tan(phip))/I1;
b52 = sin(phip)/I2;
b53 = 0;

b61 = (cotg(thetap)*sin(phip))/I1;
b62 = (cos(phip)*cotg(thetap))/I2;
```

```
    b63 = -(1/I3);

    b71 = 1 + J/I1;
    b82 = 1 + J/I2;
    b93 = 1 + J/I3;

    A =[0   ,0   ,0   ,a14,0   ,0   ,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,0   ,a25,0   ,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,0   ,0   ,a36,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a44,a45,a46,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a54,a55,a56,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a64,a65,a66,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a74,a75,a76,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a84,a85,a86,0   ,0   ,0   ;  ...
        0   ,0   ,0   ,a94,a95,a96,0   ,0   ,0   ]

    B = [0   ,0   ,0   ;...
         0   ,0   ,0   ;...
         0   ,0   ,0   ;...
         b41,b42,b43;...
         b51,b52,b53;...
         b61,b62,b63;...
         b71,0   ,0   ;...
         0   ,b82,0   ;...
         0   ,0   ,b93]

    C = eye(9,9);

//Definição do vetor de estados após a linearização:
function dy = diff_eq_linear(t,y)
    psi = y(1);
    theta = y(2);
    phi = y(3);
    dpsi = y(4);
    dtheta = y(5);
    dphi = y(6);
    hx = y(7);
    hy = y(8);
    hz = y(9);

    dy(1) = dpsi;
    dy(2) = dtheta;
    dy(3) = dphi;
    dy(4) = a44*(dpsi - dpsip) + a45*(dtheta - dthetap) + a46*(dphi - dphip
    ) + b41*(Tx(t) - Txp) + b42*(Ty(t) - Typ) + b43*(Tz(t) - Tzp);
    dy(5) = a54*(dpsi - dpsip) + a55*(dtheta - dthetap) + a56*(dphi - dphip
    ) + b51*(Tx(t) - Txp) + b52*(Ty(t) - Typ) + b53*(Tz(t) - Tzp);
```

```
    dy(6) = a64*(dpsi - dpsip) + a65*(dtheta - dthetap) + a36*(dphi - dphip
    ) + b61*(Tx(t) - Txp) + b62*(Ty(t) - Typ) + b63*(Tz(t) - Tzp);
    dy(7) = a74*(dpsi - dpsip) + a75*(dtheta - dthetap) + a76*(dphi - dphip
    ) + b71*(Tx(t) - Txp);
    dy(8) = a84*(dpsi - dpsip) + a85*(dtheta - dthetap) + a86*(dphi - dphip
    ) + b82*(Ty(t) - Typ);
    dy(9) = a94*(dpsi - dpsip) + a95*(dtheta - dthetap) + a96*(dphi - dphip
    ) + b93*(Tz(t) - Tzp);
endfunction

result_l = ode([psi0;theta0;phi0;dpsi0;dtheta0;dphi0;hx0;hy0;hz0],0,t,
    diff_eq_linear);

psi_l = result_l(1,:);
theta_l = result_l(2,:);
phi_l = result_l(3,:);
dpsi_l = result_l(4,:);
dtheta_l = result_l(5,:);
dphi_l = result_l(6,:);
hx_l = result_l(7,:);
hy_l = result_l(8,:);
hz_l = result_l(9,:);

//Definição do sistema linear:
sis = syslin('c',A,B,C);
//Obtenção das funções de transferência:
G = ss2tf(sis);
//Obtenção dos autovalores da matriz din mica:
polos = spec(A);

//Matriz de transição
n=10
deltat=(t_final-t_inicial)/iteration

Phi=zeros(9,9)
Gamma=zeros(9,9)

for i=0:n
    Phi=Phi+(A^i*deltat^i)/factorial(i)
    Gamma=Gamma+(A^i*deltat^(i+1))/factorial(i+1)
end


x=zeros(9,iteration)
y=zeros(6,iteration)
x(:,1)=[psi0;theta0;phi0;dpsi0;dtheta0;dphi0;hx0;hy0;hz0]
u=zeros(3)
```

```

for i=2:iteration
    u(1)=Tx(deltat*(i-1))
    u(2)=Ty(deltat*(i-1))
    u(3)=Tz(deltat*(i-1))
    x(:,i)=Phi*x(:,i-1)+Gamma*B*u
    y=C*x(:,i)
end

// -------------------- Exibição dos resultados -------------------- //

//Plot evolução temporal dos  ngulos  de Euler:
fig = scf(1)
fig.figure_name = ' ngulos  de Euler';
fig.figure_size = [800,600];
fig.infobar_visible = 'on';
fig.toolbar_visible = 'on';
fig.menubar_visible = 'on';

subplot(3,1,1);
title("Precessão do satélite",'fontsize',3);
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("  [rad]",'fontsize',2);
plot(t,psi,'b');
plot_psi_l = plot(t,psi_l,'b');
plot_psi_l.line_style = 5;
plot_psi_l.foreground = 18;
legend(['Não linearizado';'Linearizado']);

subplot(3,1,2);
title("Nutação do satélite",'fontsize',3);
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("  [rad]",'fontsize',2);
plot(t,theta,'r');
plot_theta_l = plot(t,theta_l,'r');
plot_theta_l.line_style = 5;
plot_theta_l.foreground = 6;
legend(['Não linearizado';'Linearizado']);

subplot(3,1,3)
title("Rotação própria do satélie",'fontsize',3);
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("  [rad]",'fontsize',2)
plot_phi = plot(t,phi);
plot_phi.foreground = 3;
plot_phi_l = plot(t,phi_l);
plot_phi_l.line_style = 5;
```

```
plot_phi_l.foreground = 32;
legend(['Não linearizado';'Linearizado']);

//Plot diagrama de Bode:
if show_Bode == 1 then
    f_min = 0.01;
    f_max = 100;

    for i = 1:3
        for j = 1:3
            scf()
            bode(G(i,j), f_min , f_max);

            if i == 1 then
                angulo_texto = "precessão"
            elseif i == 2 then
                angulo_texto = "nutação"
            elseif i == 3 then
                angulo_texto = "rotação própria"
            end

            if j == 1 then
                torque_texto = "Tx"
            elseif j == 2 then
                torque_texto = "Ty"
            elseif j == 3 then
                torque_texto = "Tz"
            end

            title("Diagrama de Bode para o  ngulo  de "+angulo_texto+" corresponde a entrada "+torque_texto,'fontsize',2);
        end
    end

end
```

APÊNDICE B – Código em Mathematica

```
Clear["Global`*"]

Ix=9840.05;
Iy=9558.05;
Iz=2520.89;
J=0.68;

wx=d\[Psi] Sin[\[Theta]] Sin[\[CurlyPhi]]+d\[Theta] Cos[\[CurlyPhi]];
wy=d\[Psi] Sin[\[Theta]] Cos[\[CurlyPhi]]-d\[Theta] Sin[\[CurlyPhi]];
wz=d\[Psi] Cos[\[Theta]]+d\[CurlyPhi];

\[Delta]x=hy wz -hz wy-ux;
\[Delta]y=-hx wz +hz wx-uy;
\[Delta]z=hx wy - hy wx-uz;

dd\[Psi]=-d\[Psi] d\[Theta] Cot[\[Theta]]+d\[Theta] d\[CurlyPhi]/Sin[\[Theta]] +Sin[\[CurlyPhi]] (Iy-Iz)/Ix (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Cos[\[CurlyPhi]]-d\[Theta] Sin[\[CurlyPhi]])(d\[Psi] Cot[\[Theta]] + d\[CurlyPhi]/Sin[\[Theta]])+Cos[\[CurlyPhi]] (Iz-Ix)/Iy (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Sin[\[CurlyPhi]] + d\[Theta] Cos[\[CurlyPhi]]) (d\[Psi] Cot[\[Theta]]+d\[CurlyPhi]/Sin[\[Theta]])+\[Delta]x/Ix Sin[\[CurlyPhi]]/Sin[\[Theta]]+\[Delta]y/Iy Cos[\[CurlyPhi]]/Sin[\[Theta]];
dd\[Theta]=-d\[Psi] d\[CurlyPhi] Sin[\[Theta]]+Cos[\[CurlyPhi]] (Iy-Iz)/Ix (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Cos[\[CurlyPhi]]-d\[Theta] Sin[\[CurlyPhi]])(d\[Psi] Cos[\[Theta]]+d\[CurlyPhi])-Sin[\[CurlyPhi]](Iz-Ix)/Iy (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Sin[\[CurlyPhi]] + d\[Theta] Cos[\[CurlyPhi]])(d\[Psi] Cos[\[Theta]] + d\[CurlyPhi])-\[Delta]x/Ix Sin[\[CurlyPhi]]^2/Cos[\[CurlyPhi]]-\[Delta]y/Iy Sin[\[CurlyPhi]];
dd\[CurlyPhi]=d\[Psi] d\[Theta] Cot[\[Theta]] Cos[\[Theta]]-d\[Theta] d\[CurlyPhi] Cot[\[Theta]]+d\[Psi] d\[Theta] Sin[\[Theta]]-Sin[\[CurlyPhi]](Iy-Iz)/Ix (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Cos[\[CurlyPhi]]-d\[Theta] Sin[\[CurlyPhi]])(d\[Psi] Cot[\[Theta]] Cos[\[Theta]]+d\[CurlyPhi] Cot[\[Theta]])+(1-Cos[\[CurlyPhi]] )(Ix-Iy)/Iz (d\[Psi] Sin[\[Theta]] Sin[\[CurlyPhi]]+d\[Theta] Cos[\[CurlyPhi]])(d\[Psi] Sin[\[Theta]]Cos[\[CurlyPhi]]-d\[Theta] Sin[\[CurlyPhi]])-\[Delta]x/Ix Sin[\[CurlyPhi]] Cot[\[Theta]] - \[Delta]y/Iy Cos[\[CurlyPhi]] Cot[\[Theta]]+\[Delta]z/Iz;

dhx=ux-J((Iy-Iz)/Ix wy wz +hy/Ix wz - hz/Ix wy - ux/Ix);
dhy=uy-J ((Iz-Ix)/Iy wx wz -hx/Iy wz + hz/Iy wx - uy/Iy);
dhz=uz-J((Ix-Iy)/Iz wx wy +hx/Iz wy - hy/Iz wx - uz/Iz);

Funcoes={d\[Psi],d\[Theta],d\[CurlyPhi],dd\[Psi],dd\[Theta],dd\[CurlyPhi],dhx,dhy,dhz};
```

```
Variaveis={\[Psi],\[Theta],\[CurlyPhi],d\[Psi],d\[Theta],d\[CurlyPhi],hx,hy,hz};
Entradas={ux,uy,uz};

a1=ConstantArray[0,{9,9}];
b1=ConstantArray[0,{9,3}];

\[Psi]0=0;
\[Theta]0=10^-3;
\[CurlyPhi]0=10^-3;
d\[Psi]0=0;
d\[Theta]0=0;
d\[CurlyPhi]0=0;
hx0=10;
hy0=10;
hz0=10;
ux0=0;
uy0=0;
uz0=0;

Simplify[Funcoes/.{\[Psi]->\[Psi]0,\[Theta]->\[Theta]0,\[CurlyPhi]->\[CurlyPhi]0,d\[Psi]->d\[Psi]0,d\[Theta]->d\[Theta]0,d\[CurlyPhi]->d\[CurlyPhi]0,hx->hx0,hy->hy0,hz->hz0,ux->ux0,uy->uy0,uz->uz0}]

For[i=1,i<= 9,i++,For[j=1,j<=9,j++,a1[[i,j]]=D[Funcoes[[i]],Variaveis[[j]]]/.{\[Psi]->\[Psi]0,\[Theta]->\[Theta]0,\[CurlyPhi]->\[CurlyPhi]0,d\[Psi]->d\[Psi]0,d\[Theta]->d\[Theta]0,d\[CurlyPhi]->d\[CurlyPhi]0,hx->hx0,hy->hy0,hz->hz0,ux->ux0,uy->uy0,uz->uz0}]]
For[i=1,i<= 9,i++,For[j=1,j<=3,j++,b1[[i,j]]=D[Funcoes[[i]],Entradas[[j]]]/.{\[Psi]->\[Psi]0,\[Theta]->\[Theta]0,\[CurlyPhi]->\[CurlyPhi]0,d\[Psi]->d\[Psi]0,d\[Theta]->d\[Theta]0,d\[CurlyPhi]->d\[CurlyPhi]0,hx->hx0,hy->hy0,hz->hz0,ux->ux0,uy->uy0,uz->uz0}]]

P=CharacteristicPolynomial[a1,s]

Solve[P==0,s]

n=10;
\[CapitalDelta]t=0.01;

\[CapitalPhi]=IdentityMatrix[9];
\[CapitalGamma]=IdentityMatrix[9]\[CapitalDelta]t;

For[k=1,k<=n,k++,\[CapitalPhi]=\[CapitalPhi]+MatrixPower[a1,k] \[CapitalDelta]t^k/k!]
For[k=1,k<=n,k++,\[CapitalGamma]=\[CapitalGamma]+MatrixPower[a1,k] \[CapitalDelta]t^(k+1)/(k+1)!]
```

```
a1 //MatrixForm
b1//MatrixForm
\[CapitalPhi] //MatrixForm
\[CapitalGamma] // MatrixForm
```