Teoria dos grafos

Gabriel Coutinho

6 de dezembro de 2021

Notas de aula de um curso de teoria dos grafos - UFMG 2021/2.

Sumário

1 Introdução

- Definição: Grafo G é um par de dois conjuntos, V e E, em que E é uma coleção de subconjuntos de V com dois elementos. Denotamos $G = (V, E)$. O conjunto V é chamado de conjunto de vértices, o conjunto E, de arestas.

- Um grafo é representado por pontos e segmentos entre eles, mas a posição relativa dos pontos é irrelevante.

- A “ordem”de G é $|V(G)|$, e o “tamanho”é $|E(G)|$.

- Se há uma aresta entre dois vértices, ele são “adjacentes”ou “vizinhos”. Se um vértice pertence a uma aresta eles são “incidentes”. Também dizemos que duas arestas são incidentes se elas compartilham um vértice. A vizinhança de um vértice, notação $N(v)$, é o conjunto dos seus vizinhos. Tipicamente representamos arestas como uv ao invés de $\{u, v\}$. O grau de um vértice é o tamanho de sua vizinhança, ou seja, $d(u) = |N(u)|$.

- Usamos $\delta(G)$ para representar o menor grau de um vértice em G, e $\Delta(G)$ para o grau máximo. Se todos os vértices em G tem mesmo grau, igual a k, dizemos que G é k-regular. O grau médio de G é denotado por $d(G)$.

Teorema 1.1. *G grafo com $m = |E(G)|$. Então*

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v).$$

Exercício 1.2. G grafo com 10 vértices, 6-regular. Qual a quantidade de arestas deste grafo?

Exercício 1.3. Existe grafo 3-regular com 7 vértices? Mostre que, para qualquer grafo, a quantidade de vértices de grau ímpar é um número par.

Exercício 1.4. Mostre que em qualquer grafo há pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

- Um isomorfismo entre dois grafos é uma bijeção entre os conjuntos de vértices que preserva arestas e não-arestas. Um automorfismo de um grafo é um isomorfismo dele para ele mesmo.

- Um subgrafo $G' \subseteq G$ é um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Um subgrafo é dito induzido por V' se todas as arestas de E inteiramente contidas em V' também estão neste subgrafo induzido. Usamos a notação $G' = G[V']$. Um subgrafo é dito gerador se $V' = V$. Note que um grafo G qualquer possui um único subgrafo que é ao mesmo tempo induzido e gerador — qual?

- A operação de remoção de vértices consiste em considerar o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices restante após remover alguns, ou seja: $G - U = G[V(G) \backslash U]$.

Proposição 1.5. *Todo grafo G com ao menos uma aresta possui subgrafo H com $\delta(H) > (1/2)d(G)$.*

Demonstração. Considere sequencia maximal de subgrafos induzidos $G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq H$, onde G_{i+1} obtido de G_i via remoção de v_i, desde que $d(v_i) \leq (1/2)d(G_i)$. Note que $d(G_i) \leq d(G_{i+1})$, pois estamos subtraindo da soma dos graus um valor no máximo igual à média, já que ao remover o vértice subtraimos da soma dos grau o grau dele, e também uma unidade para cada vizinho dele. Portanto a média do restante não decresce. Note também que $\delta(H) > (1/2)d(H)$, caso contrário a sequencia poderia ser aumentada, mas por hipótese assumimos que ela era maximal. □

- Dado um grafo G, o seu complemento, denotado por $\overline{G}$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$. O grafo linha de G, denotado por $L(G)$, é tal que $V(L(G)) = E(G)$, e dois vértices em $L(G)$ são vizinhos se as arestas correspondentes em G são incidentes.

- Grafo caminho com k vértices é um grafo com vértices $\{v_1, ..., v_k\}$ tais que v_i é adjacente a v_{i-1} e a v_{i+1}, exceto v_1 e v_k, que são adjacente a apenas um v_2 e v_{k-1}, respectivamente. Grafo ciclo C_k é exatamente obtido a partir do grafo caminho P_k adicionando aresta entre v_1 e v_k. Grafo completo K_n é um grafo com n vértices em que todos são vizinhos de todos. Grafo vazio E_n é um grafo com n vértices e sem arestas.

- Um caminho em G é subgrafo isomorfo a P_k para algum k. Um ciclo em G é subgrafo isomorfo a C_k para algum k. Um clique em G é subgrafo isomorfo a um K_ℓ. Um conjunto independente é subgrafo isomorfo a E_ℓ.

Exercício 1.6. Complementos de K_n? Para qual n temos $C_n \simeq \overline{C_n}$? Quem são $L(C_n)$ e $L(P_n)$? Quantas arestas há em $L(K_n)$?

- O comprimento de um caminho ou de um ciclo é a quantidade de arestas dentro deles. A distancia entre dois vértices de um grafo G é o comprimento do menor caminho contido no grafo que começa em um dos vértices e termina no outro. A cintura de um grafo é o comprimento do menor ciclo que é subgrafo dele.

- O raio de de um vértice u em G é a maior distancia entre u e qualquer outro vértice do grafo. Este valor é denotado por $\mathrm{rad}(u)$.

- Um vértice é chamado de central se possui o menor raio do grafo. O raio do grafo, denotado por $\mathrm{rad}(G)$, é o raio de um vértice central de G.

- O diâmetro de G é o maior raio dentre os vértices de G, e é denotado por $\mathrm{diam}(G)$.

- Quais vértices centrais, raios e diâmetros de C_n?

Exercício 1.7. Verifique que $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G)$.

Proposição 1.8. *Todo grafo G contém um caminho de comprimento $\delta(G)$, e, se $\delta(G) \geq 2$, um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.*

Demonstração. Assuma que $x_0, ..., x_k$ é caminho de maior comprimento. Onde estão os vizinhos de x_k? Note então que $k \geq \delta(G)$. $\square$

Proposição 1.9. *Todo grafo que contém um ciclo satisfaz $g(G) \leq 2diam(G) + 1$.*

Demonstração. Por contradição. Assuma que o menor ciclo é $\geq 2\text{diam}(G) + 2$. Pegue u e v a distancia $d + 1$ no ciclo, e um caminho P de tamanho $\leq d$ entre eles. Acharemos nesse subgrafo um ciclo de tamanho menor que g. $\square$

Teorema 1.10. *Grafo G, raio k e grau máximo $d \geq 3$ tem, necessariamente, menos do que*

$$\frac{d}{d-2}(d-1)^k$$

vértices.

Demonstração. Seja z um vértice central. Defina

$$D_i = \{a \in V(G) : \ \text{dist}(a, z) = i\}.$$

Temos $D_i \cap D_j = \emptyset$, e $V(G) = \bigcup_{i=0}^{k} D_i$, com $|D_0| = 1$, e $|D_1| \leq d$, já que d é o grau máximo do grafo. Para $i \geq 1$, vale que

$$|D_{i+1}| \leq (d-1)|D_i|,$$

pois todo vértice em D_{i+1} é vizinho de um vértice em D_i, e todo vértice em D_i tem no máximo $(d-1)$ vizinhos em D_{i+1} (já que 1 está em D_{i-1}). Por indução, para todo $1 \geq i < k$, valerá que

$$|D_{i+1}| \leq d(d-1)^i.$$

Portanto

$$|G| \leq 1 + d + \sum_{i=1}^{k-1} d(d-1)^i \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^k - 1) < \frac{d}{d-2}(d-1)^k.$$

$\square$

2 Conectividade e Árvores

- G é conexo se há caminho entre quaisquer dois vértices.
- Uma componente conexa é um subgrafo de G maximalmente conexo, ou seja, um subgrafo conexo que não está propriamente contido em qualquer outro subgrafo conexo.

Exercício 2.1. Verifique que ou G ou $\overline{G}$ é conexo.

- Assuma G conexo. Um conjunto de vértices U tal que $G - U$ é desconexo é chamado de separador. Se $U = \{u\}$, então u é um cut-vertex. Uma aresta cuja remoção separa G é chamada de ponte.
- G é k-conexo se (1) $|V| > k$, e (2) $G - U$ é conexo para todo $U \subseteq V$ com $|U| < k$. Todo grafo não vazio é 0-conexo, todo grafo 1-conexo é conexo.
- O maior k tal que G é k-conexo é a conectividade de G, denotada por $\kappa(G)$. Note que $\kappa(G) \leq \delta(G)$.
- Leia sobre aresta conectividade e o teorema 1.4.3 de Mader. Pags 12 e 13.
- Um grafo conexo sem ciclos é chamado de árvore. Se for desconexo, é chamado de floresta. Vértices de grau 1 numa floresta são chamados de folhas.
- Explique por que toda árvores possui ao menos duas folhas. Dica: pense em caminhos maximais. Onde terminam? Explique.
- Concluir que em toda árvore T com mais de um vértice, sempre há vértice cuja remoção deixa árvore.

Teorema 2.2. *Um grafo conexo com n vértices é árvore se, e somente se, possui exatamente $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Por um lado, assuma árvore, remova folha, aplique indução indução. Por outro lado, soma de graus é 2(n-1), logo há vértice de grau 1. Remova, e aplique indução. □

Exercício 2.3. Escreva a demonstração acima em detalhes.

Exercício 2.4. Mostre que é possível enumerar vértices de árvore como $v_1, ..., v_n$ de modo que, para todo i, v_i tem vizinho único em $v_{i+1}, ..., v_n$. Dica: enumere uma folha com v_1, e aplique indução.

Proposição 2.5. *Dado G um grafo qualquer, tem-se que G possui um subgrafo isomorfo a qualquer árvore com no máximo $\delta(G) + 1$ vértices.*

Demonstração. Considere a enumeração como acima. Comece em qualquer vértice de G, e identifique ele com o v_n. Pegue agora algum dos seus vizinhos e o identifique com o v_{n-1}. A partir de agora, pegue o vértice v_i da árvore, cujo único vizinho na árvore v_k com $k > i$, e o identifique com algum vizinho do vértice do grafo que foi identificado com o v_k. O processo é sempre possível pois cada vértice do grafo possui $\delta(G)$ vizinhos, portanto sempre haverá alguém disponível que ainda não foi usado. □

Teorema 2.6. *Dado um grafo T, são equivalentes: (1) T é árvore, ou seja, T é conexo e acíclico. (2) Quaisquer dois vértices são conectados por caminho único. (3) T é conexo e toda aresta é ponte. (4) T é acíclico mas $T + uv$ possui ciclo pra quaisquer u e v.*

Exercício 2.7. Escreva a demonstração do resultado acima.

- Uma árvore é enraizada se um vértice especial é chamado de raiz. Dados u e v em T, se u pertence ao único caminho de r pra v, dizemos que $u \leq v$. Isso é uma ordenação parcial em T.
- r é o menor elemento, e as folhas são maximais.
- Uma árvore enraizada pertencente a um grafo G é normal se qualquer caminho de G contido em T possui todos os vértices comparáveis na ordenação de T.
- Leia os lemas 1.5.5 e 1.5.6. Em particular, note que a árvore resultante de um DFS é sempre uma árvore normal em G.

3 Grafo bipartidos, menores e circuitos Eulerianos

Exercício 3.1. Prufer code: Quantas árvores (rotuladas) existem em um conjunto com n elementos? Faça desenhos e exemplos, e responda para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. Agora, mapeie uma árvore para uma sequência de $n - 2$ números: ache a folha de menor rótulo, remova, e escreva o número do seu vizinho. Repita até sobrar apenas dois vértices, e pare. Mostre como recuperar a árvore a partir da sequência 5,5,6,8,3,2. Prove que em geral há bijeção do conjunto de árvores rotuladas em n elementos, e conjunto de sequências de n números com n posições.

- G r-partido se é possível particionar vértices em r partes, e aresta somente entre partes.
- Denotamos por $K_{a_1,\dots,a_r}$ o grafo completo r-partido, em que cada classe tem tamanho a_k. Qual sua quantidade de arestas? Qual a quantidade de arestas do complemento? (expresse de duas formas diferentes...)
- C_n é bipartido?

Teorema 3.2. *G é bipartido se, e somente se, não contem ciclo ímpar.*

Demonstração. Um lado é óbvio — se há ciclo ímpar, então claramente o grafo não pode ser bipartido. Para o outro lado, considere árvore geradora (técnica comum!). Ou seja, considere um subgrafo minimalmente conexo com todos os vértices do grafo original. Fixe uma raiz qualquer r. Particione os vértices de acordo com paridade da distância na árvore para a raiz. Qualquer aresta na árvore está entre classes diferentes. Qualquer aresta xy fora da árvore forma um ciclo. Como o ciclo é par, os caminhos entre r e x e entre r e y tem paridades diferentes, logo x e y estão em classes diferentes. Logo qualquer aresta está entre classes diferentes, e G é bipartido. □

- Dado um grafo G com aresta uv, o grafo G/uv obtido após a contração da aresta uv contém os mesmos vértices de $G\backslash v$, porém tornando adjacente a u qualquer vértice que era adjacente a u ou v em G. É importante salientar que não devem haver arestas em paralelo ou loops após esta operação.
- $G \in MX$ se X é obtido após contrair arestas de G.

Proposição 3.3. *G é MX se, e somente se, é possível particionar os vértices de G em classes conexas, cada classe correspondendo a um vértice de X, e há ao menos uma aresta entre classes se e somente se os vértices são vizinhos.*

Demonstração. Um lado é óbvio e segue da definição — se existem as classes como dito, basta contrair todas elas a um único vértice representante, e teremos precisamente o grafo X. Para o outro lado, a demonstração é por indução em $|G| - |X|$ (pense em termos de uma sequência de grafos indo de G a X após contrações sucessivas, e aplique a hipótese de indução no segundo grafo da sequência). □

- Um grafo G é um *menor* de H se G é obtido a partir de H após a possível remoção de vértices e arestas, seguida da possível contração de arestas.

- Se G é obtido a partir de X substituindo arestas por caminhos (independentes), então G é subdivisão de X. Neste caso, dizemos que $G \in TX$. Dado X, se G é uma subdivisão de X e G é subgrafo de H, então dizemos que X é um *menor topológico* de H.

- Claramente, todo menor topológico também é um menor, mas a conversa não é verdadeira. — Ache um exemplo!

- Todo menor de grau máximo 3 é um menor topológico (tente demonstrar este fato).

- A relação de ser menor de outro grafo (e menor topológico também) é uma ordem parcial na classe de todos os grafos finitos. (Um teorema impressionante de Robertson e Seymour mostrou que não existem anti-cadeias infinitas nesta ordem parcial).

- Um grafo é chamado de *Euleriano* se existe um passeio que se inicia e termina em um mesmo vértice, e passa por todas as arestas exatamente uma única vez (podendo contudo repetir vértices).

Teorema 3.4. *Um grafo conexo é Euleriano se, e somente se, todo vértice tem grau par.*

Demonstração. Um vértice aparecendo k vezes em uma trilha Euleriana tem grau $2k$. Para o outro lado, poderíamos provar assim: todo vértice tem grau par, logo há ciclo. Remova arestas. Aplique indução no número de arestas. Reintroduza o ciclo, concatenando na trilha. Mas tem que ser cauteloso (grafo desconectado? etc)

Também podemos fazer como o Diestel: considere o passeio mais longo possível em G que não repete arestas, digamos $v_0, v_1, ..., v_\ell$. O último vértice tem todas as suas arestas nesta trilha. Este é um número par, logo o último vértice é vizinho do v_0. É, portanto, trilha fechada. Seja e aresta em G que não está nesta trilha, mas que é vizinha de um vértice nela (já que G é conexo). Logo seria possível concatená-la, e obter trilha mais longa. Absurdo. $\square$

4 Espaço de ciclos e cortes

- Considere o espaço vetorial $\mathcal{E}$ sobre o $\mathbb{Z}_2$ de dimensão $|E|$, ou, mais especificamente, o espaço de funções $E \to \mathbb{Z}_2$. Cada $F \subseteq E$ corresponde unicamente a um vetor (vetor indicador). Note que os singletons formam uma base natural deste espaço (base canônica). Se $\mathbb{Z}_2$ é ruim, pense em diferença simétrica.

- Se definirmos um produto interno $\langle F, F' \rangle \to \mathbb{Z}_2$, note que $\langle F, F' \rangle = 0$ se, e somente se, $F \cap F'$ tem uma quantidade par de arestas, $= 1$ caso contrário.

- Dado um subespaço $\mathcal{F}$, definimos

$$\mathcal{F}^{\perp} = \{F \in \mathcal{E} : \langle F, F' \rangle = 0 \ \forall F' \in \mathcal{F}\}.$$

Teorema 4.1. *Temos que* $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^{\perp} = m$.

Demonstração. Seja F matriz que contém elementos da base de $\mathcal{F}$ nas linhas. Note que $\mathcal{F}^{\perp}$ é o núcleo desta matriz, ou seja, o subespaço que corresponde a todos os vetores x tais que $Fx = 0$. Se $x_1, ..., x_k$ forma base para $\mathcal{F}^{\perp}$, e $y_{k+1}, ..., y_m$ completa uma base para $\mathcal{E}$, temos que $Fy_j \neq 0$, $Fx_j = 0$, e portanto $F(y_{k+1}), ..., F(y_m)$ é base para o espaço de colunas de F. (Isso foi simplesmente o Teorema do Núcleo-Imagem, demonstrado sem fazer qualquer referência ao corpo sobre o qual o espaço vetorial está construído).

Agora seja F' matriz que contém nas colunas uma base para o espaço de colunas de F. Note que F' é $n \times (m-k)$. Sabemos que existe matriz E tal que $F = F'E$ (cada coluna de E indica a combinação linear das colunas de F' que resulta em cada coluna de F). Note que E possui $(m-k)$ linhas. Mas esta equação também mostra que as linhas de F são geradas por essas $m-k$ linhas. Logo a dimensão do espaço de linhas de F é $\leq m-k$, ou seja, dimensão do espaço de linhas de $F \leq$ dimensão do espaço de colunas de F.

Repetindo agora todo o argumento para F^T, segue que a dimensão do espaço de linhas de $F \geq$ dimensão do espaço de colunas de F, e portanto temos que $\dim \mathcal{F} = m-k = m - \dim \mathcal{F}^{\perp}$. (Isso foi simplesmente o Teorema que mostra que a dimensão do espaço de linhas e a dimensão do espaço de colunas de uma matriz são iguais, e que, novamente, independe do corpo). □

- O espaço de ciclos de G é gerado pelos vetores correspondentes aos ciclos, denotado por $\mathcal{C}(G)$.

Proposição 4.2. *Os ciclos induzidos de G geram $\mathcal{C}(G)$.*

Demonstração. Suponha C é um ciclo. Por indução em $|C|$. Se C tem corda e (o que é corda?), então considere os dois ciclos obtidos em $C + e$ (ambos tem menos vértices que C). Aplica indução neles, e recupera C como soma dos ciclos induzidos que geram ambos. □

Teorema 4.3. *As seguintes são equivalentes para $F \subseteq E$.*

(a) $F \in \mathcal{C}(G)$.

(b) F *é união disjunta de ciclos de* G.

(c) Todos os vértices no grafo induzido por F tem grau par.

Demonstração. (a) implica (c) porque F é soma (em $\mathbb{Z}_2$) de ciclos induzidos (ou diferença simétrica de ciclos induzidos).

(c) implica (b) por indução: acha ciclo, deleta, aplica indução.

(b) implica (a) trivialmente. □

- Se V_1, V_2 é partição de V, então $E(V_1, V_2)$ são as arestas entre eles, e é chamado de corte.
- Se $V_1 = \{v\}$, este corte é denotado por $E(v)$ (ou $\delta(v)$).

Proposição 4.4. *Para todo subconjunto U de V, temos que*

$$|E(U, \overline{U})| = \sum_{v \in U} d(v) - 2|E(G[U])|.$$

Proposição 4.5. *Todo vértice de G tem grau par se, e somente se, $|E(U, \overline{U})|$ é par para todo U.*

Demonstração. Um lado é óbvio. O outro segue imediatamente da proposição acima. □

Proposição 4.6. *Os cortes de G (junto com $\emptyset$) formam um subespaço, gerado por $E(v)$ para todo v. Chamaremos de $\mathcal{B}(G)$.*

Demonstração. Basta notar que $\sum_{v \in U} E(v) = E(U, \overline{U})$. Assim, qualquer corte é gerado por $\{E(v) : v \in V(G)\}$, e a soma de dois cortes $E(U, \overline{U}) + E(U', \overline{U'})$ é o corte $E(U \Delta U', \overline{U \Delta U'})$. □

- Da mesma forma que os ciclos são os elementos minimais de $\mathcal{C}(G)$, definimos os elos (*bonds*) como os elementos minimais de $\mathcal{B}(G)$.

Teorema 4.7. *Em um grafo conexo, um corte $E(U, \overline{U})$ é um elo se e somente se $G[U]$ e $G[\overline{U}]$ são conexos.*

Demonstração. Se $G[U]$ não fosse conexo, haveria uma componente conexa e o corte determinado por esta componente seria subconjunto de $E(U, \overline{U})$. O mesmo para $G[\overline{U}]$.

Para a conversa, se $E(U, \overline{U})$ não é elo, então há um subconjunto que é corte, conectando vértices U_1 em U a U_2 em $\overline{U}$. Digamos que U_1 é subconjunto próprio de U. Como o corte de U_1 está contido no corte de U, segue que não há aresta entre U_1 e seu complemento em U, daí $G[U]$ não seria conexo. □

Corolário 4.8. *Todo corte de G é uma união disjunta de elos.*

Demonstração. Basta considerar os elos que são os cortes determinados pelas componentes conexas de um dos lados do corte. □

- Agora vamos começar a entender qual a relação entre ciclos e cortes.

Teorema 4.9. *Temos que* $\mathcal{B}(G)$ *e* $\mathcal{C}(G)$ *são subespaços ortogonais, ou seja*

$$\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)^{\perp} \quad e \quad \mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)^{\perp}.$$

Ademais, temos que

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{B}(G)^{\perp}.$$

Demonstração. Todo ciclo intersecta todo corte em um número par de arestas, logo temos $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)^{\perp}$ e $\mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)^{\perp}$.

Por outro lado, se F não está em $\mathcal{C}$, então algum vértice de G incide a um número ímpar de arestas em $\mathcal{C}$. Daí $\langle E(v), F\rangle = 1$, e portanto F também não está em $\mathcal{B}(G)^{\perp}$. Logo $\mathcal{B}(G)^{\perp} \subseteq \mathcal{C}$. □

Corolário 4.10. *Portanto*

$$\dim \mathcal{C}(G) + \dim \mathcal{B}(G) = m \quad e \quad \mathcal{B}(G) = \mathcal{C}(G)^{\perp}.$$

Demonstração. A primeira igualdade é consequencia imediata do Teorema anterior e do Teorema 4.1 aplicado a $\mathcal{B}$. Desta igualdade e do Teorema 4.1 novamente, agora aplicado a $\mathcal{C}$, segue que $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{C}^{\perp}$, e como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$, segue que $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\perp}$. □

- Se estivéssemos trabalhando sobre os números reais, as considerações acima seriam absolutamente suficientes para concluir que $\mathcal{E}(G)$ é gerado pelos ciclos e pelos cortes. Mas isto é falso em geral! Ache um contraexemplo. Se estiver difícil, talvez o que segue ajudará um pouco.

- Dada uma árvore geradora T de um grafo conexo, definimos:

- Para cada $e \notin T$, o ciclo fundamental determinado por (T, e) é o único ciclo em $T + e$, denotado por C_e.

- Para cada $f \in T$, as arestas entre as duas componentes conexas de $T - f$ formam o elo fundamental determinado por (T, f), denotado por B_f.

- Note que $f \in C_e$ se e somente se $e \in B_f$, para todas $e \notin T$ e $f \in T$.

Teorema 4.11. *Fixada* T*, elos fundamentais e ciclos fundamentais formam bases para* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$*, respectivamente.*

Demonstração. Comece notando que aresta $f \in T$ está em B_f mas não está em qualquer outro elo fundamental. Logo $\{B_f : f \in T\}$ são um conjunto linearmente independente. Por outro lado, $e \notin T$ está em C_e mas em nenhum outro ciclo fundamental. Logo $\{C_e : e \notin T\}$ formam um conjunto linearmente independente.

Segue que $\dim \mathcal{C} \geq m - n + 1$, e $\dim \mathcal{B} \geq n - 1$. Como a soma das dimensões é m, segue a igualdade □

Corolário 4.12. *Temos que* $\dim \mathcal{C} = m - n + 1$ *e* $\dim \mathcal{C}^* = n - 1$.

4.1 Dupla cobertura por ciclos

Se toda aresta de um grafo pertence a pelo menos um ciclo, então é possível escolher ciclos de modo que toda aresta é coberta um número par de vezes (com repetição). Se decidirmos que cada aresta precisa ser coberta exatamente duas vezes, o problema se torna bizarramente difícil. Szekeres e Seymour conjecturaram que todo grafo possui uma tal cobertura, mas o problema permanece em aberto e é uma das conjecturas mais famosas em teoria dos grafos.

Exercício 4.13. O objetivo deste exercício é verificar que qualquer contra-exemplo com uma quantidade mínima de arestas é um grafo cúbico, e não é possível colorir as arestas com 3 cores de modo que arestas incidentes tem cores diferentes. Assuma portanto que G é tal contra-exemplo mínimo.

- Mostre que se um vértice tem grau 2, é possível achar contra-exemplo para a conjectura com menos arestas.
- Mostre que se um vértice tem grau 4 ou maior, é possível achar contra-exemplo com para a conjectura com menos arestas.
- Todo vértice tem grau 3. Agora imagine que é possível colorir as arestas com 3 cores, de modo que arestas incidentes tem cores distintas. Mostre como seria possível encontrar uma dupla cobertura por ciclos usando essa coloração.

4.2 Independência linear

- Apresentamos abaixo uma aplicação interessante do uso de independência linear.
- Seja $G = K_n$. Uma decomposição de $E(K_n)$ é uma escolha de subconjuntos de arestas disjuntas $F_1, ..., F_k$ tais que $F_1 + ... + F_k = E(K_n)$.
- Estamos interessados em entender as decomposições de $E(K_n)$ em grafos bipartidos completos. Por exemplo, é sempre possível fazer com cópias de $E(K_2)$. Mas gostaríamos de usar menos grafos. Por exemplo, é possível fazer com cópias de $K_{1,k}$ para $K = n-1, n-2, ..., 1$ (fazer desenho!). Qual o número mínimo de grafos bipartidos completo necessário?

Teorema 4.14. *Se $F_1, ..., F_k$ é uma decomposição de $E(K_n)$ em grafos bipartidos completos, então $k \geq n - 1$.*

Demonstração. Suponha que cada F_i determina bipartição X_i, Y_i. Considere o sistema linear com variáveis reais x_v para cada vértice do grafo dado por

$$\sum_{v \in V(G)} x_v = 0 \quad \text{e, para cada } i, \quad \sum_{v \in X_i} x_v = 0.$$

Se $k < n-1$, este sistema tem n variáveis e no máximo $n-1$ equações, portanto tem solução não nula. Seja $x_v = z_v$ uma solução. Temos então que

$$0 = \left(\sum_{v \in V} z_v\right)^2 = \sum_{v \in V} z_v^2 + 2 \sum_{uv \in E} z_u z_v =$$

$$= \sum_{v \in V} z_v^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{v \in X_i} z_v \right) \left(\sum_{v \in Y_i} z_v \right) = \sum_{v \in V} z_v^2 > 0.$$

Contradição. Logo $k \geq n - 1$. $\square$

5 Matrizes e grafos

- Seja B a matriz de 0s e 1s, cujas linhas são indexadas por vértices, as colunas por arestas, e a entrada (v, e) é $= 1$ se o vértice v e a aresta e são incidentes.
- A matriz B é chamada de matriz de incidência do grafo.
- A matriz B pode ser interpretada como operador $\mathbb{Z}_2^E \to \mathbb{Z}_2^V$. Neste sentido, note que o núcleo dela corresponde precisamente a $\mathcal{C}$.
- Por outro lado, cada linha de B correspondendo ao vértice v expressa precisamente o corte $E(v)$.
- Assim, a imagem de B^T é exatamente o conjunto $\mathcal{B}$.

A matriz de incidência é extremamente importante para modelar estruturas em otimização inteira aplicada à combinatória. Neste contexto, tipicamente se interpreta ela como uma matriz de números reais. Por exemplo, um vetor $x \in \mathbb{R}^V$ representa um conjunto independente de vértices se $x_v \in \{0, 1\}$ e $B^T x \leq \mathbb{1}$. Daí, procurar por conjuntos independentes pode ser transformado no problema de procurar por certos vetores dentro de uma região delimitada por hiperplanos no espaço real de dimensão $n = V(G)$.

- Uma outra matriz bastante importante é a matriz de adjacências.
- Dado grafo G, definimos a matriz $A(G)$, quadrada $n \times n$, com entradas iguais a 0s e 1s, linhas e colunas indexadas por vértices, e tal que $A_{uv} = 1$ se e somente se u e v são vizinhos.
- Note que A é simétrica, e tem 0s na diagonal (se o grafo não contém loops, claro).
- Toda matriz simétrica é diagonalizável, com autovalores reais.
- Este fato permite associar muitas informações combinatórias do grafo aos autovalores da matriz.

Exercício 5.1. Mostre que se G é um grafo k regular, então k é autovalor de $A(G)$. Explicite qual o seu autovetor correspondente.

Teorema 5.2 (Friendship Theorem)**.** *Suponha que G é um grafo simples finito, com n vértices, em que cada par de vértices possui precisamente um único vizinho em comum. Então existe um vértice em G que é adjacente a todos os outros.*

- Vamos ver como demonstrar este teorema. A demonstração tem duas partes: uma é puramente combinatória, a outra usa os autovalores de $A(G)$.
- Antes de seguirmos, vou deixar como exercício que você, assumindo que existe vértice vizinho a todos no grafo G dado no teorema, descreva pra mim como é o formato do grafo, ou seja, caracterize o grafo.

- O teorema falha para grafos infinitos. Ache um exemplo?
- Para a demonstração abaixo, usaremos a notação I para matriz identidade, e J para a matriz quadrada $n \times n$ em que todas as entradas são iguais a 1.

Demonstração do Teorema: A primeira parte, puramente combinatória, dividirei em uma sequência de exercícios. O objetivo desta parte é mostrar que qualquer contra-exemplo para o teorema é um grafo regular. Seja portanto G um contra-exemplo — ou seja, G tem a propriedade que qualquer par de vértices tem exatamente um vizinho, mas que não há vértice vizinho de todos.

Exercício 5.3. Argumente porque não há subgrafos em G isomorfos a C_4.

Exercício 5.4. Sejam u e v dois vértices, não vizinhos. Assuma que $d(u) = k$. Mostre que $d(v) \geq k$. Por simetria, conclua que $d(u) = d(v)$. (comece examinando os vizinhos em comum, etc, e use o exercício anterior).

Exercício 5.5. Com exceção do vizinho em comum de u e v, todo vértice do grafo é não-vizinho de ao menos u ou v. Use este fato e a hipótese de que não há um vértice de grau $n - 1$ para concluir que o grafo é regular.

Exercício 5.6. Assuma que G é k-regular. Examinando a vizinhança de u, conclua agora que $n = k^2 - k + 1$.

O restante da demonstração agora usa os autovalores de $A(G)$ para acharmos uma contradição. Assuma que G é k-regular, todo par de vértices possui único vizinho, G não tem vértice vizinho a todos, e $n = k^2 - k + 1$.

Para cada uma das afirmações abaixo, pare e procure compreender bem o motivo.

- Podemos assumir que $k \geq 3$.
- Note que $A^2 = (k - 1)I + J$.
- Os autovalores de J são n com multiplicidade 1, e 0 com multiplicidade $(n - 1)$.
- Os autovalores de A^2 são $k - 1 + n = k^2$, com multiplicidade 1, e $(k - 1)$ com multiplicidade $n - 1$.
- A matriz A possui autovalores k (multiplicidade 1), $\sqrt{k-1}$ (multiplicidade, digamos, p) e $-\sqrt{k-1}$ (multiplicidade q). Note que $p + q = n - 1$.
- Como $\operatorname{tr} A = 0$, note também que $k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0$.
- Logo, $\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}$.
- Note que este número é racional, e portanto precisa ser inteiro!
- Seja então $\sqrt{k-1} = m \in \mathbb{Z}$. Logo temos $m(s - r) = k = m^2 + 1$.
- Como m divide tanto m^2 como $m^2 + 1$, segue que $m = 1$, logo $k = 2$, contradição.

$\square$

Este teorema foi demonstrado em 1966 por Erdős, Rényi, Sós. A primeira demonstração puramente combinatória, que não faz uso de autovalores, só apareceu nos anos 2000.

Exercício 5.7. Demonstre que o maior autovalor de $A(G)$ é limitado superiormente pelo maior grau de G.

6 Emparelhamentos em grafos bipartidos

- Um conjunto $M \subseteq E(G)$ de arestas é um *emparelhamento* se quaisquer duas arestas de M não são incidentes a um mesmo vértice do grafo. Um emparelhamento M é chamado de perfeito se todo vértice do grafo é incidente a (exatamente) uma aresta de M.

- M é um emparelhamento de $U \subseteq V(G)$ se todo vértice de U é incidente a uma aresta de M (mesmo que emparelhado com alguém de fora de U).

- O principal problema que estamos interessados é o de decidir se existe ou não um emparelhamento (perfeito) de $V(G)$, ou ao menos achar o maior emparelhamento de $E(G)$.

- Dado um emparelhamento M, um caminho, com conjunto de arestas $P \subseteq E(G)$, que começa em um vértice não-emparelhado e alterna entre usar arestas em $E - M$ e arestas em M, até terminar em um vértice emparelhado, é chamado de *caminho alternante*. Se P é caminho alternante que termina com aresta de M, note que $P\Delta M$ é um emparelhamento com mesmo tamanho de M.

- Um caminho P que começa em vértice não-emparelhado, e alterna arestas de $E - M$ e M, mas termina em um vértice não emparelhado, é chamado de *caminho aumentante*. Neste caso, $P\Delta M$ é emparelhamento maior que M.

- Claramente a existência de um caminho aumentante permite aumentar o emparelhamento, portanto se M é emparelhamento máximo, então não há caminho aumentante. A conversa também é verdadeira:

Proposição 6.1. *Se M não é um emparelhamento máximo, então existe um caminho P que é M-aumentante.*

Demonstração. Uma estratégia ingênua seria considerar qualquer caminho entre dois vértices não emparelhados. Explique, contudo, porque este caminho pode não ser aumentante...

Considere um emparelhamento M' de tamanho máximo, e considere o grafo determinado pelas arestas em $M\Delta M'$. Cada vértice tem grau no máximo 2, logo as componentes conexas são ciclos pares (com arestas alternadas entre M e M'), e caminhos (com arestas alternadas entre M e M'). Como M' tem mais arestas que M, ao menos algum desses caminhos começa e termina com aresta em M'. Como as arestas de M' em $M\Delta M'$ não estão em M, este caminho será M-aumentante. □

- A tarefa de encontrar um emparelhamento máximo se resume a tarefa de encontrar caminho aumentantes. Veremos agora que é fácil fazer isso em grafos bipartidos.

- Assuma que G é bipartido, com bipartição $A \cup B = V(G)$.

- Um subconjunto $U \subseteq V(G)$ é uma cobertura de $E(G)$ se toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de U.

Teorema 6.2 (Konig). *A cardinalidade máximo de um emparelhamento em um grafo bipartido G é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura por vértices das arestas de G.*

Demonstração. Seja M emparelhamento máximo. Naturalmente, toda cobertura precisa de pelo menos $|M|$ vértices, um para cada aresta de M. Vamos ver agora que existe uma tal cobertura.

De cada aresta de M, escolha o vértice em B se algum caminho alternante que comece em A termina neste vértice, e escolha o vértice de A caso contrário. O conjunto U de tais vértices forma uma cobertura (de mesmo tamanho que M). Para ver isso, seja $uv \in E$, $u \in A$ e $v \in B$. Se $uv \in M$, então u ou v foram escolhidos para U. Se $uv \notin M$, há quatro possibilidades: (1) Nenhum deles está emparelhado — neste caso M não seria máximo. (2) u não está emparelhado e v está. Daí v é fim de caminho alternante (no caso, uv), e v está emparelhado. Logo v teria sido escolhido para U quando sua aresta em M foi considerada. (3) u está emparelhado e v não está. Se o vizinho de u no emparelhamento, z, fosse fim de caminho alternante P que começou em A, então $P\Delta zu\Delta uv$ é caminho aumentante, contrariando que M é máximo. Daí u foi escolhido dentre uz para estar em U. (4) Ambos estão emparelhados. Neste caso, assim como no caso anterior, consideramos $P\Delta zu\Delta uv$, que será um caminho alternante terminando em v, que está emparelhado com alguém. Logo v terá sido escolhido.

Em qualquer um dos casos, a aresta uv estará coberta. □

- O Teorema de Konig é o primeiro teorema clássico na teoria de emparelhamentos para grafos bipartidos. O segundo é o Teorema de Hall.

Teorema 6.3. *G contém emparelhamento para A se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.*

Demonstração. A condição é claramente necessária: havendo o emparelhamento para A, todo subconjunto S de A está emparelhado, e cada vértice de S é identificado unicamente com um vértice em $N(S) \subseteq B$.

Mostramos agora que a condição é suficiente. A partir de um emparelhamento M que expõe um vértice em A, vamos construir um caminho aumentante, ou mostrar que a condição falha. Seja a_0 vértice em A exposto (não emparelhado) por M. Considere seus vizinhos em B, digamos enumerados $b_1, b_2, ...$ Para cada um deles, considere o seu único vizinho em A, digamos $a_1, a_2, ...$ Para cada um deles, todos os seus vizinhos ainda não considerados em B. E assim sucessivamente. Ou seja, teremos uma sequência maximal de vértices $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, ...$ tais que (1) a_0 é exposto por M; (2) b_i é adjacente a algum $a_{f(i)}$ com $f(i) = j$, e $j < i$; (2) $a_i b_i \in M$. Note que esta sequência não termina em A, caso contrário a condição do teorema seria falsa. Se b_k é o último vértice da sequência, então ele não está emparelhado, e o caminho $b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} ... a_0$ é um caminho aumentante. (Note que o procedimento que encontra este caminho aumentante pode ser encontrado usando uma versão adaptada do BFS.) □

- Outras duas demonstrações podem ser encontradas no Diestel.

- A última delas é bastante elegante: considera-se um subgrafo gerador de G minimal (em relação às arestas) com a propriedade de satisfazer a propriedade do teorema, digamos H, e mostra-se que H é em si um emparelhamento de A.

- A demonstração é por contradição, assumindo que um vértice a de A possui dois vizinhos via H em B, digamos ab_1 e ab_2. Ao remover estas arestas, considera-se as violações na condição do teorema, digamos por conjuntos A_1 e A_2, respectivamente. Chega-se a uma contradição usando os vizinhos de $(A_1 \cap A_2) - a$ via H em B.

- Tente fazer esta demonstração.

- Tente também demonstrar o Teorema de Hall como consequência imediata do Teorema de Konig.

Corolário 6.4. *Se G é bipartido e k-regular, então G possui um emparelhamento perfeito. (Ademais, possui k emparelhamentos perfeitos disjuntos...).*

Demonstração. Basta verificar que a condição do teorema de Hall é imediatamente satisfeita. □

Corolário 6.5. *Todo grafo regular com grau par positivo possui um subgrafo gerador 2-regular.*

Demonstração. Usa-se o Teorema de Euler. Substitui-se cada vértice por 2, um preto e um branco, e cada aresta da trilha por uma aresta conectando o vértice preto ao branco do seguinte. O grafo bipartido resultante é k-regular. Usamos o resultado anterior. □

7 Mais emparelhamentos em grafos

- Suponha que temos um grafo bipartido.
- Eles são emparelhados via M, mas, por algum motivo, temos vértices a em A e b em B que estão emparelhados a b' e a' respectivamente, mas que preferiam ambos estar emparelhados entre si.
- Então eles desfazem o seu emparelhamento atual, e se emparelham. Infelizmente isso diminui a cardinalidade do emparelhamento.
- Se cada vértice $v \in V(G)$ rankeia os vértices do outro lado via uma ordem linear $\leq_v$, um emparelhamento como M descrito acima é "instável". Tal sistema de ordens lineares é chamado de *sistema de preferências*.
- Se, ao contrário, para cada aresta de $ab \notin M$, a prefere seu vizinho em M a b ou b prefere seu vizinho em M a a, e portanto ao menos um dos vértices não tem incentivo para trocar, dizemos que M é estável (assuma sempre que um vértice prefere se emparelhar do que ficar desemparelhado).
- Surpreendentemente, temos o teorema abaixo de Gale & Shapley.

Teorema 7.1. *Para cada sistema de preferências, G possui um emparelhamento estável.*

Demonstração. Não só é possível fazer um emparelhamento estável, como é possível fazer um emparelhamento estável em que cada vértice de A está relativamente feliz.

Três definições: M é *melhor* que M' se M torna todos os vértices de B emparelhados com arestas melhores que as de M'. Dado M, $a \in A$ é *aceitável* a $b \in B$ se ab é aresta fora de M, e b prefere a ao seu vizinho em M. Dizemos que a está *feliz* com M se a não está emparelhado, ou se a está emparelhado com b e prefere b a todos os outros vértices de B para o qual é aceitável.

Considere o procedimento iterativo. Um vértice em a, não emparelhado, porém aceitável para algum $b \in B$. Se não existe, pare. Caso contrário, emparelhe a com o seu favorito dentre aqueles para os quais é aceitável (mesmo que isso desfaça um emparelhamento). Claramente o novo emparelhamento é "melhor"que o anterior, e mantém todos os vértices de A sempre "felizes". Este procedimento termina com todos os vértices desemparelhados de A tendo vizinhos apenas para os quais é inaceitável. Logo o emparelhamento resultante é estável. □

- G um grafo arbitrário. Se $H \subseteq G$ é um subgrafo qualquer de G, denotaremos por $\text{odd}(H)$ o número de componentes conexas ímpares de H.
- Claramente, se G possui emparelhamento perfeito, então para cada $U \subseteq V(G)$, é preciso que $|U| \geq \text{odd}(G - U)$ (note que isso é uma forma geral da condição do Teorema de Hall). Assim como naquele caso, esta condição será também suficiente.
- Mas veremos um resultado estrutural um pouco mais forte.

- Denotamos por $\nu(G)$ a cardinalidade do emparelhamento máximo de G.

Teorema 7.2 (Fómula de Tutte-Berge).

$$\nu(G) = \min_{A \subseteq V(G)} \frac{1}{2}(n - odd(G - A) + |A|)$$

Demonstração. Primeiramente, para qualquer $A \subseteq V$, observe que nunca é possível emparelhar $\text{odd}(G - A) - |A|$ vértices (se este for ≥ 0). Logo um emparelhamento máximo poderá ter no máximo $(1/2)(n - (\text{odd}(G - A) - |A|))$ arestas. Vamos mostrar agora que existe um conjunto onde a igualdade será satisfeita.

Fato. G um grafo e C ciclo ímpar. Denotamos por $G \times C$ o grafo obtido ao contrairmos todas as arestas de C. Sempre é possível estender um emparelhamento de $G \times C$ para um de G com precisamente $(|C| - 1)/2$ arestas a mais (Por que?! Ademais, pode ser possível fazer muito melhor... Dê exemplo!). Portanto:

$$\nu(G) \geq \nu(G \times C) + \frac{|C| - 1}{2}$$

Diremos que C é um ciclo *apertado* se a desigualdade acima for uma igualdade. //

Dizemos que um vértice v é *essencial* se todo emparelhamento máximo do grafo for incidente a ele. Note que um vértice v é essencial se e somente se $\nu(G) > \nu(G - v)$.

Fato. Seja A um conjunto que satisfaça a igualdade:

$$\nu(G) = \frac{1}{2}(n - \text{odd}(G - A) + |A|)$$

então todo vértice de A é essencial.

Para ver isso, seja $v \in A$. Observe que $\text{odd}(G - A) = \text{odd}((G - v) - (A - v))$. Então teremos que:

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \frac{1}{2}(n - \text{odd}(G - A) + |A|) \\ &> \frac{1}{2}((n - 1) - \text{odd}((G - v) - (A - v)) + |A| - 1) \\ &\geq \nu(G - v) \end{aligned}$$

//

Um vértice v é chamado de inessencial se existe ao menos um emparelhamento de tamanho máximo que não incide a ele. Note que um vértice v é essencial se e somente se $\nu(G) = \nu(G - v)$.

Fato. Se u e v são inessenciais e $uv \in E(G)$, então existe um ciclo ímpar apertado C contendo ambos, e v_C é inessencial em $G \times C$.

Para ver isso, considere M_u um emparelhamento máximo omitindo u e M_v um emparelhamento máximo omitindo v. Por serem máximos, observe que M_u incide em v e M_v incide em u. As componentes conexas de $M_u \Delta M_v$ são ciclos pares ou caminhos, ambos com arestas alternantes. Como u não incide em M_u, sua componente conexa só pode ser um caminho P que se inicie nele com uma aresta de M_v. Se P termina com uma aresta de M_v,

P é um caminho aumentador para M_u, um absurdo. Se P termina com uma aresta de M_u, então vuP é um caminho aumentador para M_v, a não ser que P termine exatamente em v. Portanto, $uv \cup P$ é um ciclo ímpar C. Como M_u (ou M_v) é um emparelhamento máximo de G que possui $\frac{|C|-1}{2}$ arestas em C, temos que C é apertado. E por fim, M_u restrito a $V - C$ é um emparelhamento máximo de $V \times C$ que omite v_C. //

Com os fatos acima, a demonstração ficará fácil e seguirá por indução em E. Se $|E| = 1$, digamos $E = uv$, tomando $A = u$ nos dá a igualdade desejada. Seja então $uv \in E$.

(1) Se u (ou v) é essencial, observe que:

$$\nu(G - u) = \nu(G) - 1$$

Logo existe M' emparelhamento máximo em $G' = G - u$ e $A' \subseteq G'$ tais que:

$$|M'| = \frac{1}{2}((n-1) - \text{odd}(G' - A') + |A'|)$$

Defina agora $A = A' \cup u$. Como $\text{odd}(G' - A') = \text{odd}(G - A)$, teremos que:

$$\frac{1}{2}(n - \text{odd}(G - A) + |A|) = |M'| + 1 = \nu(G),$$

como queríamos.

(2) Se u e v são inessenciais, consideramos o ciclo apertado C contendo ambos. Olhamos para o grafo $G \times C$. Por indução, seja $A \subseteq G \times C$ tal que:

$$\nu(G \times C) = \frac{1}{2}((n - |C| + 1) - \text{odd}((G \times C) - A) + |A|).$$

Como v_C é inessencial, $v_C \notin A$ (estamos usando ambos os fatos provados acima). Olhando para o componente de v_C em $(G \times C) - A$, note que paridade dele não muda ao inflarmos v_C de volta para C. Portanto $\text{odd}((G \times C) - A) = \text{odd}(G - A)$. Daí:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(n + \text{odd}(G - A) + |A|) \\
&\quad = \frac{1}{2}((n - |C| + 1) - \text{odd}((G \times C) - A) + |A|) + \frac{|C| - 1}{2} \\
&\quad = \nu(G \times C) + \nu(C) \leq \nu(G),
\end{aligned}$$

e, portanto, vale a igualdade.

□

8 Teorema de Tutte, e decomposição de Edmonds - Gallai

Corolário 8.1 (Teorema de Tutte)**.** *G possui um emparelhamento perfeito se, e somente se,*

$$odd(G \backslash A) \leq |A|$$

para todo $A \subseteq V$.

Demonstração. G possui um emparelhamento perfeito se, e somente se,

$$\min_{A \subseteq V} \frac{1}{2}(n - \mathrm{odd}(G - A) + |A|) = \frac{n}{2}.$$

Note que a igualdade ocorre trivialmente para $A = \emptyset$, daí é necessário e suficiente que:

$$-\mathrm{odd}(G \backslash A) + |A| \geq 0$$

para toto A. □

Corolário 8.2. *Todo grafo cúbico sem pontes possui um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Considere um conjunto $A \subseteq V$ qualquer e olhe para uma componente ímpar O de $G - A$. Note que O possui um número ímpar de vértices, e cada um deles possui grau ímpar. Logo a soma dos graus em O será ímpar. Olhando apenas dentro de O, cada aresta será contada duas vezes, portanto o número de aresta ligando O a A é ímpar. Não havendo pontes, este número é pelo menos 3.

O número de arestas incidente a A vindo de suas componentes é portanto pelo menos $3\mathrm{odd}(G - A)$. Mas este número é no máximo $3|A|$. Logo:

$$3\mathrm{odd}(G - A) \leq 3|A|,$$

e a condição do Teorema de Tutte se verifica. □

- A decomposição de Edmonds-Gallai fala que $V(G)$ sempre pode ser particionado em 3 conjuntos, A_G, C_G e D_G.
- O conjunto D_G contém os vértices inessenciais.
- O conjunto A_G contém os vértices essenciais que são vizinhos de D_G.
- O conjunto C_G contém os vértices essenciais que não são vizinhos de D_G.
- O grafo $G[C]$ possui emparelhamento perfeito.
- A remoção de qualquer vértice de uma componente conexa de $G[D]$ permite que ela tenha emparelhamento perfeito — grafos assim são chamados de "fator crítico"(e, logo, são componentes ímpares).
- O conjunto A satisfaz a fórmula de Tutte Berge.

- Os emparelhamentos máximos de G induzem emparelhamentos máximos de $G[C]$ e $G[D]$.

Lemma 8.3. *Se todo vértice de um grafo conexo G é inessencial, então o grafo G é fator-crítico.*

Demonstração. Utilizaremos o fato visto na prova da fórmula de Tutte-Berge. Se $A \subseteq V$ é tal que

$$\nu(G) = \frac{1}{2}(n - \text{odd}(G - A) + |A|),$$

todo vértice de A é essencial. Logo temos que $|A|$ é vazio, e portanto $\nu(G) = (n-1)/2$. □

Lemma 8.4. *Seja $u \in A_G$. Então:*

$$A_{G-u} = A_G - u \qquad D_{G-u} = D_G \qquad C_{G-u} = C_G$$

Demonstração. Seja v essencial em $G - u$. Como um emparelhamento máximo de G tem uma aresta a mais que um emparelhamento máximo de $G-u$, um emparelhamento máximo de G sem usar v implicaria um emparelhamento máximo de $G-u$ sem v apenas removendo u e sua aresta, contradição. Concluímos então que v é essencial em G, logo $D_G \subseteq D_{G-u}$.

Seja agora v essencial em G e suponha que não seja essencial em $G-u$. Como u é por definição vizinho de ao menos um vértice não essencial z, seja M um emparelhamento máximo de G omitindo z e seja N um emparelhamento máximo de $G-u$ omitindo v. Consideramos $M \Delta N$. Como sempre, as componentes deste grafo são ciclos pares ou caminhos, e sabemos que v só pode ser a ponta de um caminho P, já que é omitido por N.

> Se P termina em um vértice vizinho incidente a N, teremos que P é um caminho alternante para M e o emparelhamento $P \Delta M$ terá mesmo tamanho que M e omitirá v, uma contradição.
>
> Se P termina em um vértice incidente a M que não seja u, P será um caminho aumentador para N em $G - u$, contradição.
>
> Se P termina em u, digamos com aresta wu, note que $M - wu + uz$ é um emparelhamento máximo para G de mesmo tamanho que M. Só que agora o caminho $v - w$ ao longo de P é um caminho alternante para este novo emparelhamento máximo que permitirá a construção de um terceiro emparelhamento máximo de G mas que desta vez omitirá v, novamente uma contradição.

Se o conjunto de vértice essenciais e inessenciais é preservado com a remoção de u, os conjuntos descritos no teorema também serão, pois adjacência ou não-adjacência nos demais vértices não será alterada. □

Lemma 8.5. *As componentes conexas do grafo $G[D]$ são fator-crítico. O grafo $G[C]$ possui um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Remova todo conjunto A_G. Note que agora $G[D]$ e $G[C]$ são desconexos. Em $G[D]$, todos os vértices são inessenciais e o resultado segue do lema anterior. Em $G[C]$, todos os vértices são essenciais, logo há um emparelhamento contendo todos eles. □

Lemma 8.6. *Todo emparelhamento máximo de G restrito a D é um emparelhamento máximo de $G[D]$. Todo emparelhamento máximo de G restrito a C é um emparelhamento máximo de $G[C]$.*

Demonstração. Considere um emparelhamento máximo de G e remova todos os vértices de A juntamente com suas arestas. Como cada um dos vértices removidos era essencial, o emparelhamento que sobra é um emparelhamento máximo. Aplica-se então o lema anterior. □

Teorema 8.7. *Temos que A é um conjunto que satisfaz a fórmula de Tutte-Berge.*

Demonstração. Considere um emparelhamento máximo de G, digamos M. Não há arestas de M dentro de A, pois se houvesse, a remoção de dois vértices de A reduziria $\nu(G)$ em apenas 1. Como M restrito a C é um emparelhamento perfeito, e M omite exatamente um vértice em cada componente de $G[D]$, temos que cada aresta de M incidente a A liga um vértice de A a uma componente de $G[D]$. Agora cada componente conexa de $G[C]$ é par, e cada componente conexa de $G[D]$ é ímpar. Temos portanto que $\operatorname{odd}(G - A)$ é o número de componentes conexas de $G[D]$. Logo:

$$\nu(G) = \frac{|C|}{2} + \frac{|D| - \operatorname{odd}(G - A)}{2} + |A|$$

Como $|A| + |C| + |D| = n$, teremos portanto:

$$\nu(G) = \frac{1}{2}(n - \operatorname{odd}(G - A) + |A|).$$

□

Exercício 8.8. Explique por que as classes da decomposição são invariantes sob qualquer automorfismo de G.

Exercício 8.9. Seja G grafo. $\nu(G)$ é o número de emparelhamento, $\tau(G)$ é o tamanho da menor cobertura por vértices de arestas, $\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de vértices, e $\rho(G)$ é o tamanho da menor cobertura por arestas de vértices. Prove que:

(a) $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$ (fácil)

(b) Se G não tem vértices isolados, então $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ (menos fácil).

(c) Suponha que G é k-conexo, sem emparelhamento perfeito e que não seja fator crítico. Então $\nu(G) \geq k$ e $\tau(G) \leq 2\nu(G) - k$ (use a decomposição de Edmonds-Gallai).

Exercício 8.10. Seja $u \in C_G$. Prove que:

$$A_{G-u} \supseteq A_G \qquad D_{G-u} \supseteq D_G \qquad C_{G-u} \subseteq C_G - u$$

Exercício 8.11. Seja $u \in D_G$. Prove que:

$$A_{G-u} \subseteq A_G \qquad D_{G-u} \subseteq D_G - u \qquad C_{G-u} \supseteq C_G$$

9 Grafos 1-conexo, 2-conexos e Teorema de Menger

- Lembre-se: G é k-conexo se $|G| > k$ e se $G - X$ é conexo para todo $X \subseteq V(G)$ com $|X| < k$. O maior k tal que G é k-conexo é chamado de conectividade de G, denotado por $\kappa(G)$.
- Vamos eventualmente ver que a definição acima pode ser expressa em termos de quantos caminhos disjuntos há entre vértices de G, reforçando um pouco melhor a ideia de conectividade.
- Por ora, vamos estudar a estrutura de grafos 1-conexo, 2-conexos e 3-conexos. Note que quanto mais conexo o grafo, mais restrições podemos dizer sobre sua estrutura.
- Ciclos são exemplos naturais com conectividade = 2.
- Dado um grafo G e um subgrafo H de G, uma *orelha* de H é um caminho em G cujos vértices extremos estejam em H, mas os internos não estejam.
- Uma decomposição em orelhas de um grafo G é uma sequência de subgrafos $G_0, ..., G_k$ de G tais que (1) G_0 é um ciclo (2) $G_{i+1} = G_i + P$, onde P é uma orelha de G_i em G (3) $G_k = G$.

Proposição 9.1. *Um grafo é* 2*-conexo se, e somente se, possui uma decomposição em orelhas.*

Demonstração. É fácil ver, por indução, que quando da adição de qualquer orelha, o número de caminhos disjuntos entre quais dois vértices é pelo menos 2. Portanto a remoção de qualquer vértices não desconecta o grafo, e todo grafo com decomposição em orelhas é 2-conexo.

Para ver que todo grafo 2-conexo pode ser obtido assim, seja G_0 um ciclo de G, e seja portanto $G_0, ..., G_k$ uma decomposição em orelhas de G_k maximal construída com subgrafos de G. Note que G_k é um subgrafo induzido de G, caso contrário a adição da aresta permitiria aumentar a sequência. Ademais, se existe $v \in G$ com $v \notin G_k$ e $vu \in E(G)$ com $u \in G_k$, note que $G \backslash u$ é conexo, e portanto há caminho entre v e G_k em $G \backslash u$. A união deste caminho com vu formaria uma orelha de G_k em G, contrariando a maximalidade de G_k. Portanto $G_k = G$. □

- Para qualquer grafo, um subgrafo conexo maximal que não contenha um vértice de corte é chamado de bloco.
- Os blocos de um grafo conexo são as pontes (com seus dois vértices), e os subgrafos 2-conexos maximais.
- Note que dois blocos se intersectam em no máximo um vértice (e portanto os blocos de G induzem uma partição de suas arestas).
- Como ciclos são 2-conexos, cada ciclo está inteiramente contido em um bloco. Portanto o grafo bipartido em que cada bloco é um vértice de um lado, e cada vértice de corte é um vértice do outro, e um bloco é adjacente a um vértice de corte se e somente se o vértice de corte pertence ao bloco, é uma árvore.

- Lembre-se que os elos de G (conexo) são os cortes que separam G em dois componentes conexos. Note que se um corte contém aresta de um bloco, então ele precise separar o bloco. Logo, qualquer elo está inteiramente contido em um bloco.

Proposição 9.2. *Dadas duas arestas e e f de G, as seguintes são equivalentes:*

(a) Arestas e e f pertencem a um mesmo bloco.

(b) Arestas e e f pertencem a um mesmo ciclo.

(c) Arestas e e f pertencem a um mesmo elo.

Demonstração. (a) implica (b) como consequência de 8.1, mas veremos que na verdade é um caso particular de um resultado mais geral e muito mais importante, que veremos a seguir. Para (b) implica (c), basta considerar o elo que une as componentes conexas que contem as componentes do ciclo obtidas após a remoção de e e f. (c) implica (a) é imediato do comentário acima da proposição. □

Teorema 9.3 (Menger)**.** *Seja G grafo, e $A, B \subseteq V(G)$. O menor número de vértices cuja remoção separa A de B em G é igual ao número máximo de caminhos disjuntos de A para B.*

Demonstração. Seja k o menor número de vértices separando A e B. Claramente, não podem haver mais que k caminhos disjuntos de A para B. Mostraremos por indução em $||G||$ que existem k caminhos.

Se $||G|| = 0$, então $k = A \cap B$, e há exatamente k caminhos triviais de A para B. Assuma que $e = uv \in E(G)$, e considere o grafo G/e.

- Considere os conjuntos A e B em $V(G/e)$, possivelmente adicionados do vértice v_e caso u ou v estejam em A ou B. Se o menor separador entre A e B tem tamanho k, então o resultado segue por indução, visto que k caminhos disjuntos entre A e B em G/e correspondem a k caminhos disjuntos entre A e B em G.

- Se há separador de tamanho $k - 1$ entre A e B em G/e, então, ele precisa usar v_e (se não usasse, ele separaria A e B em G). Então existe separador entre A e B em G contendo k vértices, u e v dentre eles. Digamos que se chame X. Olhamos então para $G\backslash e$. Um separador entre A e X em $G\backslash e$ tem ao menos k vértices, e portanto há k caminhos disjuntos entre A e X. Da mesma forma, há k caminhos disjuntos entre X e B em $G\backslash e$. Concatenando esses caminhos, achamos k caminhos disjuntos entre A e B.

□

Exercício 9.4. Demonstre o Teorema de Konig usando o Teorema de Menger.

Exercício 9.5. Sejam a e b vértices de G. Demonstre que:

(i) Se $ab \notin E(G)$, então o menor número de vértices separando a e b é igual ao número máximo de caminhos independentes entre a e b (fora a e b, os caminhos são disjuntos).

(ii) O menor número de arestas separando a e b em G é igual ao número máximo de caminhos com arestas disjuntas entre a e b.

Exercício 9.6. Demonstre que um grafo é k-conexo se, e somente se, há k caminhos disjuntos entre quaisquer dois vértices de G.

10 Grafos 3-conexos e grafos no plano

Grafos 3-conexos

Como vimos, grafos 2-conexos podem ser reduzidos a ciclos, em um processo de remoção de orelhas. Veremos agora como reduzir grafos 3-conexos ao K_4.

Lemma 10.1. *Seja G um grafo 3-conexo, $G \neq K_4$. Suponha que $e = xy$ é aresta, e G/e não é 3-conexo. Então existe vértice z tal que $\{x, y, u\}$ é corte de G.*

Demonstração. Seja $\{u, z\}$ corte de G/e. Suponha que $u \neq v_e$, e considere o grafo $G - u$. Este grafo é 2-conexo, mas $(G - u)/e = (G/e) - u$, que possui um vértice de corte, no caso, z. Logo $z = v_e$, e portanto $G - \{x, y, u\} = (G/e) - \{u, v_e\}$ é desconexo. □

Lemma 10.2 (Thomassen)**.** *Seja G grafo 3-conexo, $G \neq K_4$. Então G contém aresta e tal que G/e é 3-conexo.*

Demonstração. Se o lema é falso, então toda aresta de G satisfaz a hipótese do lema anterior. Escolhemos dentre elas aquela aresta xy e vértice z tais que um dos componentes de $G - \{x, y, z\}$, digamos C, é o menor possível. Seja v vizinho de z em C (por que existe?). Como G/vz não é 3-conexo, existe w tal que $G - \{v, w, z\}$ é desconexo. Seja D a componente que não contém xy. Note que $D \subseteq C$ (por que?) e $v \in C$ mas $v \notin D$, contradizendo a escolha minimal de x, y, z e C. □

Teorema 10.3 (Tutte)**.** *Um grafo G é 3-conexo se, e somente se, existe sequencia $G_0, ..., G_n$ de grafos com as propriedades:*

(i) $G_0 = K_4$ *e* $G_n = G$.

(ii) G_{i+1} *possui aresta* xy *tal que* $d(x), d(y) \geq 3$, *e* $G_i = G_{i+1}/e$

Ademais, se tal sequencia existe, todos os grafos são 3-conexos.

Demonstração. O lema anterior ao teorema garante a existência da sequência se G for 3-conexo. Precisamos mostrar então que se a sequência existe, então G (e todos os grafos da sequencia) são 3-conexos.

Suponha que G_i é 3-conexo, mas que G_{i+1} não é. Sejam C e D conjuntos de G_{i+1} separados por 2 vértices. Assuma que $xy \notin C$. Note que D não pode conter ambos x e y ou algum outro vértice, caso contrário haveria separação em G_i com dois vértices. Logo D contém, digamos x, e portanto x teria grau no máximo 2 (no conjunto que separa C de D). Contradição. □

Planaridade

- Um grafo é chamado de *planar* se é possível representá-lo com um desenho no plano em que duas arestas só se tocam em um vértice. O desenho será tipicamente chamado de desenho planar, os vértices correspondendo a pontos do plano, e as arestas correspondendo a curvas no plano.

- Você pode facilmente verificar que é possível desenhar qualquer ciclo C_n, e com um pouco de astúcia, é fácil ver que também é possível desenhar qualquer árvore no plano. Tente também desenhar os grafos completo K_n. O que acontece?
- Não discutiremos os detalhes técnicos de topologia necessário para formalizar o tratamento de grafos planares.
- Mas deixe-me apenas enunciar o mais importante deles.
- Uma curva é a imagem contínua de um segmento de reta. Uma curva fechada é a imagem contínua de um círculo. Uma curva é simples se ela é injetiva.
- No estudo de grafos planares, arestas são curvas, e principalmente, ciclos do grafo são curvas fechadas simples.
- Um subconjunto do plano é chamado de conexo (por arcos) se quaisquer dois pontos do subconjunto podem ser conectados por uma curva que esteja inteiramente no subconjunto.

Teorema 10.4 (Teorema das curvas de Jordan)**.** *Toda curva fechada simples particiona o restante do plano em dois conjuntos abertos, disjuntos, e que são conexos (por arcos).*

- Os dois conjuntos são chamados de interior e exterior da curva.
- Em um desenho planar de um grafo, um ciclo (combinatório) corresponde a uma curva simples fechada, e que portanto divide o plano. As regiões conexas do desenho são chamadas faces do desenho planar do grafo.

Teorema 10.5. *O grafo K_5 não é planar.*

Demonstração. Assuma que seja. Considere o ciclo 1231, que é uma curva simples fechada. O vértice 4 está no interior ou exterior (assuma interior sem perda de generalidade). Logo as arestas $14, 24, 34$ também estão no interior (exceto pelos extremos). Note que os ciclos 1241, 1341 e 2342 tem os vértices $3, 2, 1$ em suas faces exteriores, respectivamente. Logo o vértice 5 também está no exterior desses ciclos, e portanto no exterior do ciclo 1231. Logo a aresta 45 cruza 1231, contradição. □

Exercício 10.6. Demonstre que o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

- Nem sempre a fronteira de uma face é um ciclo (pense em uma árvore!).
- Contudo, se o grafo é 2-conexo, este é o caso. Veremos isso como consequência de nossa proposição de decomposição em orelhas.

Teorema 10.7. *Em um desenho plano de um grafo 2-conexo, a fronteira de toda face é um ciclo.*

Demonstração. Faremos por indução em $||G||$. Se G é um ciclo, o resultado segue pelo Teorema de Jordan (pense neste como um caso trivial).

Seja f face de G, e $G[f]$ o subgrafo de G induzido pela fronteira de f. Pela decomposição em orelhas, há grafo 2-conexo H e caminho P com $G = H \cup P$. O (interior) do caminho P está em uma face de H, digamos f' (que por indução tem um ciclo de H como fronteira, digamos C). Se $G[f]$ está em H, o resultado segue por indução. Caso contrário, $G[f]$ intersecta P, e portanto f está contida na face f'. Logo f é face do subgrafo $C \cup P$, e portanto limitada por um ciclo. □

Exercício 10.8. Mostre que todo grafo planar sem pontes possui uma coleção de ciclos (possivelmente com repetição) tal que cada aresta do grafo é coberta exatamente duas vezes pelos ciclos.

Exercício 10.9. Mostre que, se u é vértice em um grafo planar 3-conexo, então existe um ciclo do grafo que contém os vizinhos de u.

11 Grafos planares

- Nossos objetivos nesta semana são estudar:
- A fórmula de Euler, e entender quais são os grafos maximalmente planares.
- O Teorema de Kuratowski.
- Dualidade entre grafos planares.
- Nesta semana, eventualmente consideraremos grafos que possuem loops ou arestas em paralelo. Se quisermos deixar claro que o grafo em questão não possui loops ou arestas em paralelo, o chamaremos de grafo simples.

Teorema 11.1 (Fórmula de Euler)**.** *Seja G um grafo planar conexo, com n vértices e m arestas. Seja ℓ o número de faces em um desenho de G no plano. Então:*

$$n - m + \ell = 2.$$

Demonstração. Por indução no número de arestas. Como o grafo é conexo, $m \geq n - 1$, e a igualdade ocorre se e somente se o grafo é uma árvore, que tem uma única face. Assuma portanto que $m \geq n$, e portanto o grafo possui um ciclo, e seja e aresta pertencente a ele. Esta aresta está na borda de duas faces, digamos f_1 e f_2, e após a remoção de e, estas faces formarão uma única face f. Note então que $n(G\backslash e) = n(G)$, $m(G\backslash e) = m(G) - 1$ e $\ell(G\backslash e) = \ell(G) - 1$. O resultado segue, visto que, por indução, $n(G\backslash e) - m(G\backslash e) + \ell(G\backslash e) = 2$. □

Corolário 11.2. *Qualquer desenho de um grafo conexo planar G possui o mesmo número de faces (em particular, $2 - n + m$).*

Exercício 11.3. Seja G um grafo planar simples, com n vértices e m arestas, e $n \geq 3$. Mostre que $m \leq 3n - 6$, e que a igualdade ocorre se e somente se todo desenho de G for uma triangulação do plano (ou seja, toda face tem três arestas).

- Não é muito difícil você se convencer que um desenho de um grafo simples é maximalmente planar, com respeito ao número de arestas, se cada face é um triângulo. De fato, quando as faces são ciclos, qualquer ciclo maior que o C_3 admitiria uma aresta interna (ou corda). Para uma demonstração rigorosa, veja a proposição 4.2.8 do Diestel.

Exercício 11.4. Mostre que todo grafo planar simples tem pelo menos um vértice de grau 5 ou menor.

Exercício 11.5. Mostre novamente, usando a fórmula de Euler, que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Conclua que nenhum grafo planar possui K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico.

- Na aula passada vimos que em um grafo 2-conexo, a fronteira de toda face é um ciclo. Agora veremos como são as fronteiras das faces de grafos 3-conexos.

Teorema 11.6. *Em um desenho no plano de um grafo simples 3-conexo, as fronteiras das faces são exatamente os ciclo induzidos cuja remoção (dos vértices e das arestas) não desconecta o grafo.*

Demonstração. Se C é um ciclo induzido cuja remoção não desconecta o grafo, as duas faces que ele determina não podem ambas conter vértices de G. Logo uma delas é uma face do desenho.

Por outro lado, seja C um ciclo que é fronteira de uma face f.

Se existe uma corda[1] $e = xy$ do ciclo, então esta corda está na outra face determinada por C (e não em f). Como $G \backslash \{x, y\}$ é conexo, existe um caminho em G (por fora de f, também) conectando os dois lados restantes de C, e que portanto cruzaria e, contradição. Logo C é ciclo induzido.

Por fim, se x e y são vértices em $G - C$, pelo Teorema de Menger, há 3 caminhos independentes conectando x e y em G. Nenhum deles divide f, portanto f está entre dois deles no desenho, e o terceiro portanto conecta x e y em $G - C$. Logo a remoção de C não desconecta G. □

- Vimos que um grafo que possua K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico não é planar. Vamos entender agora que ter K_5 ou $K_{3,3}$ como menor (nem necessariamente topológico), é essencialmente o único impedimento para planaridade.

- Lembre-se: H é um menor topológico de um grafo G se existe subgrafo de G obtido a partir de H após subdividir suas arestas em caminhos. H é um menor de G se existe subgrafo de G que, após uma sequencia de contração e/ou remoção de arestas, resulta em H. Lembre-se que todo menor topológico é um menor.

Lemma 11.7. *Um grafo possui K_5 ou $K_{3,3}$ como menor se e somente se possui K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico.*

Demonstração. Uma direção é óbvia.

Se H é menor de grau máximo 3, então considere uma sequencia de remoções (de vértices ou arestas em G) até que chegamos em subgrafo G', a partir do qual uma sequencia de contrações (sem envolver vértices de grau 1, que já foram removidos se preciso) leva a H. Note que se alguma dessas contrações envolver vértices cuja soma dos graus excede 5, o vértice resultante terá grau maior que 3, e portanto qualquer futura contração neste vértice permanecerá gerando vértices de grau maior que 3. Como H tem grau máximo 3, temos então que qualquer contração em G' envolverá ao menos um vértice de grau 2. Portanto G' é subdivisão de H, e H é menor topológico de G.

Suponha então que G tem K_5 como menor. Seja K subgrafo de G, com menor número possível de arestas, a partir do qual uma sequência de contrações leva ao K_5. Então:

(i) Vértices de K são particionados em 5 conjuntos.

(ii) Cada um deles é árvore cujas eventuais folhas necessariamente mandam uma ou mais arestas para os outros conjuntos. Note que cada uma delas possui no máximo 4 folhas.

Note então que: ou todos os conjuntos são árvore que possuem um único vértice de grau 4, e os demais (menos as folhas) de grau 2, e portanto K é subdivisão do K_5, ou ao menos um

[1] Uma corda em um ciclo é uma aresta que conecta dois vértices do ciclo mas que não pertence ao ciclo. Um ciclo é um ciclo induzido se e somente se ele não possui cordas.

deles possui dois vértices de grau 3. Contraindo este conjunto para estes dois vértices, e as demais árvores para um único vértice, resultará em um grafo que possui $K_{3,3}$ como subgrafo, logo como menor, e portanto como menor topólgico. $\square$

12 O Teorema de Kuratowski 1930 ; Wagner 1937

Teorema 12.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) G é grafo planar.

(2) G não contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico.

(3) G não contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor.

- Já vimos que (1) implica (2), afinal se G é planar todo menor topológico de G também é, e que (2) implica (3), no último lema da aula passada.
- Vamos ver agora que (3) implica (1). Primeiro reduziremos ao caso em que o grafo é 3-conexo, e depois utilizaremos a decomposição de grafos 3-conexos via contração de arestas.

Lemma 12.2. *Seja G grafo com corte $\{x, y\}$, e componentes S e T (uma delas pode ser desconexa, sem perda de generalidade). Então os grafos $G - S + xy$ (remova os vértices de S e potencialmente adicione aresta entre x e y) e $G - T + xy$ são menores de G.*

Demonstração. Basta notar que há caminho entre x e y dentro de S e outro dentro de T. Cada um desses caminhos pode ser contraído até virar a aresta extra xy. □

Lemma 12.3. *Seja G grafo com corte $\{x, y\}$, e componentes S e T. Então G é planar se, e somente se, os grafos $G - S + xy$ e $G - T + xy$ são planares.*

Demonstração. Se G é planar, esses grafos são menores de G, e portanto planares.

Se os grafos são planares, basta desenhar um deles dentro de uma das faces que contém a aresta xy do outro, identificando os vértices x e y de cada, e depois remover a aresta xy se ela não era parte de G. Assim obtemos um desenho planar de G. □

- Consequentemente, precisamos mostrar agora que (3) implica (1) apenas para grafos 3-conexos. A demonstração abaixo foi feita por Thomassen em 1981.

Lemma 12.4. *Se G é 3-conexo e não é planar, então G contém ou o K_5 ou o $K_{3,3}$ como menor.*

Demonstração. Como G não é planar, ele tem ao menos $n = 5$ vértices. Demonstraremos por indução em n. Pelo Teorema 10.3, há aresta $e = xy$ em G tal que $H = G/xy$ é 3-conexo. Se não é planar, então o resultado segue por indução. Suponha então, para efeito de obter contradição, que H é planar.

Considere então um desenho plano de H, e seja f a face de $H - v_e$ que contém v_e. Seja C o ciclo que é fronteira de f, e onde estão todos os vizinhos de v_e. Alguns deles eram vizinhos de x e outros de y, alguns possivelmente de ambos. Note que $G - y$ é exatamente igual H com as arestas entre v_e e os vizinhos apenas de y removidas.

Em $G - y$, enumere os vizinhos de x na ordem em que aparecem no ciclo C como $x_1 ... x_k$ (note que $k \geq 2$ senão o grafo G não seria 3-conexo). Nosso objetivo agora será mostrar que se não há menor igual a K_5 ou $K_{3,3}$, então todos os vizinhos de y estão entre x_i e x_{i+1} para algum i, e portanto y e suas arestas poderiam ser readicionados ao desenho planar de $G - y$ mantendo a planaridade, contrariando que G não era planar.

Suponha portanto que os vizinhos de y não estão como descrito. Seja P_j o caminho começando após x_j até antes de x_{j+1} em C. Note que C está particionado entre os vértices x_j e os caminhos P_j (assuma que P_k vai de x_k até x_1). Vamos ver as possibilidades para os vizinhos de y. Lembre-se que há ao menos dois.

(i) ou há vizinho de y em um P_i, digamos y', e portanto precisa haver outro, digamos y'', que nem está em P_i nem é $x_i = x'$ ou $x_{i+1} = x''$,

(ii) ou há dois vizinhos de y que são vizinhos de x também, digamos y' e y'', mas que estão intercalados por dois vizinhos diferentes de x, digamos x' e x'' — em ambos os casos (i) e (ii) há portanto subdivisão do $K_{3,3}$ em G com $xy'y''$ de um lado e $yx'x''$ do outro;

(iii) ou então x e y compartilham três vizinhos em comum — neste caso, x, y e estes três vizinhos formam subgrafo igual a K_5 em G.

Temos portanto que todos os vizinhos de y estão entre entre x_i e x_{i+1} senão teríamos menor igual a K_5 ou $K_{3,3}$ em G. Como $G - y$ seria planar, conseguiríamos colocar y e suas arestas, e ter desenho planar de G. Contradição então, a partir do fato assumido que H era planar, e portanto o resultado segue por indução. □

- Neste fim de conteúdo de planaridade, falaremos brevemente sobre dualidade.
- Dado um desenho de um grafo planar, constrói-se outro grafo planar, chamado de dual (ao desenho!) colocando um vértice f^* em cada face f do desenho original, e colocando uma aresta e^* para cada aresta e do grafo original, unindo os vértices correspondentes aos dos lados de e.
- Note que se e for uma ponte, seus dois lados são a mesma face, e portanto a aresta e^* será um loop (que forma uma face no dual).
- Também é possível que surjam arestas em paralelo.
- Não é difícil notar que o dual de um (desenho de um) grafo planar é um grafo planar.
- Pare e pense um pouco: por que o dual de todo desenho de grafo planar é conexo?
- Não é difícil mostrar que o dual do dual é igual ao original se e somente se o grafo original era conexo. Você pode tentar fazer isso se quiser.
- É interessante ver também que remover aresta e que não seja ponte de um desenho de G e tomar o dual equivale a primeiro tomar o dual, e depois contrair a aresta e^*.
- Contudo, dado um grafo G, é possível fazer dois desenhos de G de modo que os duais resultantes não sejam grafos isomorfos. Tente achar um exemplo?

- Mas, felizmente, se G é 3-conexo, então, como consequência do Teorema 11.6, qualquer dual de G é sempre o mesmo, e portanto podemos falar do dual abstrato do grafo planar G (e não mais do desenho de G).
- Por último, há uma bela conexão entre os ciclos de um grafo e os elos do seu dual, que você pode verificar lendo a seção 4.6 do Diestel, ou 10.2 do Bondy e Murty.

13 Coloração de grafos planares

- Qual o mínimo número de cores que precisamos usar para colorir os países em um mapa, de modo que países vizinhos tenham cores diferentes?
- Se pensarmos em termos da dualidade de grafos planares discutida no fim da aula passada, esta pergunta pode ser reformulada como: qual o mínimo número de cores necessária para colorir os vértices de um grafo planar, tal que vértices vizinhos recebam cores diferentes?
- Uma coloração de vértices de um grafo é uma atribuição de cores para os vértices de modo que vizinhos tem cores diferentes.
- Muitos problemas práticos reais podem ser modelados de modo que colorações indicam as soluções procuradas.
- Um grafo é k-colorível[2] se é possível construir uma coloração usando k cores.
- O número cromático de G é o menor k tal que G é k-colorível. Dizemos então que G é k-cromático, e que $\chi(G) = k$.
- Note que uma k coloração de G é uma partição do seu conjunto de vértices em k conjuntos independentes. Um grafo é bipartido exatamente quando ele é 2-colorível (e se possuir uma aresta pelo menos, ele será também 2-cromático).

Teorema 13.1. *Todo grafo planar é* 4*-colorível.*

- Infelizmente não demonstraremos este teorema. Recomendo que você leia sobre ele no Diestel, ou então na wikipedia por exemplo.

Teorema 13.2. *Todo grafo planar é* 5*-colorível.*

Demonstração. O resultado é válido para grafos com $n \leq 5$ vértices. Seja G planar com n vértices, e assuma que todo grafo planar com $\leq n - 1$ vértices é 5-colorível. Como já vimos, G sendo planar, há vértice v de grau no máximo 5 em G. Como $G - v$ é 5-colorível, considerando tal coloração, podemos assumir que v possui 5 vizinhos de cores diferentes em $G - v$, caso contrário seria trivial estender uma 5-coloração de $G - v$ para uma de G.

Sejam v_1,...,v_5, os vizinhos de G, enumerados na ordem cíclica que aparecem no desenho de $G - v$, e assuma que v_i tem cor i. Seja $H_{1,3}$ o subgrafo de $G - v$ induzido pelos vértices de cores 1 ou 3, e $H_{2,4}$ o subgrafo induzido pelos vértices de cores 2 e 4. Note que se v_1 e v_3 não estão na mesma componente de $H_{1,3}$, então podemos alternar as cores na componente de v_1, digamos, e obter uma coloração de $G - v$ onde v_1 tem cor 3, e portanto v poderia ser colorido com cor 1 em G. Assuma portanto que v_1 e v_3 estão na mesma componente de $H_{1,3}$, digamos conectados pelo caminho P, e o mesmo também valendo para v_2 e v_4 em $H_{2,4}$.

Mas isto leva à seguinte contradição: por hipótese do desenho, v_2 está na face interna do ciclo determinado por vv_1Pv_3v, e v_4 está na face externa. Qualquer caminho da face interna para a face externa precisa usar vértice de cor 1 ou 3 ou v, mas então v_2 e v_4 não podem estar na mesma componente de $H_{2,4}$. □

[2] Esta palavra não existe.