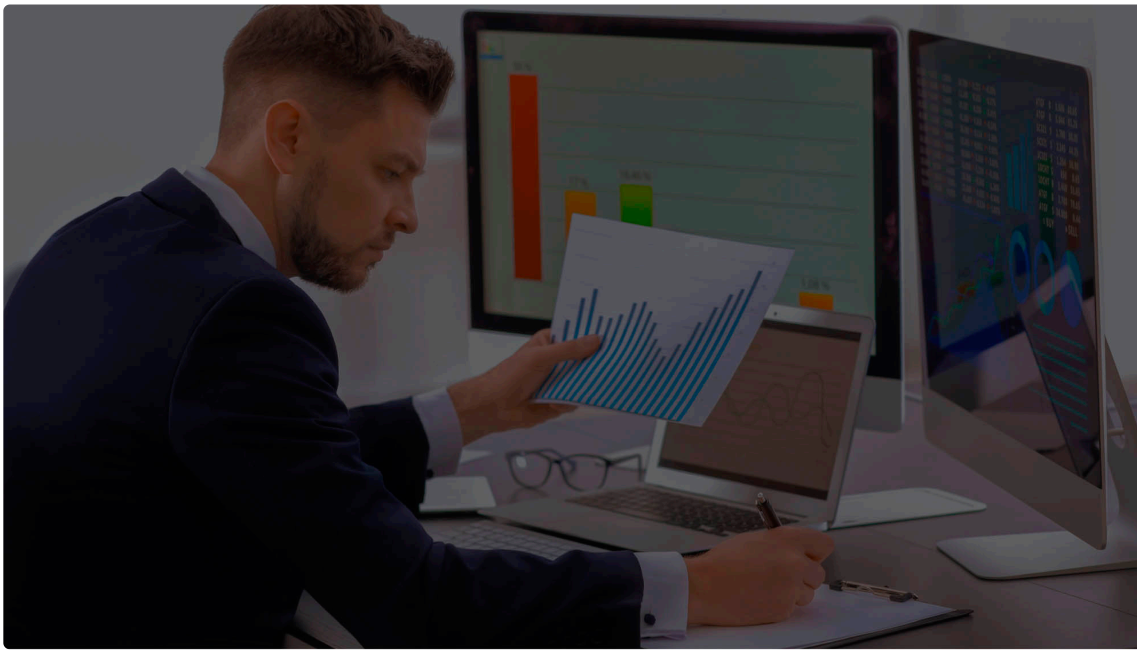


Gráficos e interpretações gráficas

Prof. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Descrição

Interpretação de gráficos e seus principais pontos.

Propósito

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

Preparação

Este conteúdo tem como pré-requisito o entendimento das operações com números. Antes de iniciar seus estudos, tenha em mãos uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone ou computador.

Objetivos

Módulo 1

Conceitos de intervalos

Interpretar os conceitos básicos de intervalo.

Módulo 2

Caracterização do plano cartesiano

Identificar pontos no plano.

Módulo 3

Definição e características da função

Interpretar as informações contidas em um gráfico.

Módulo 4

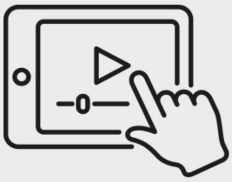
Máximos, mínimos e raízes de uma função

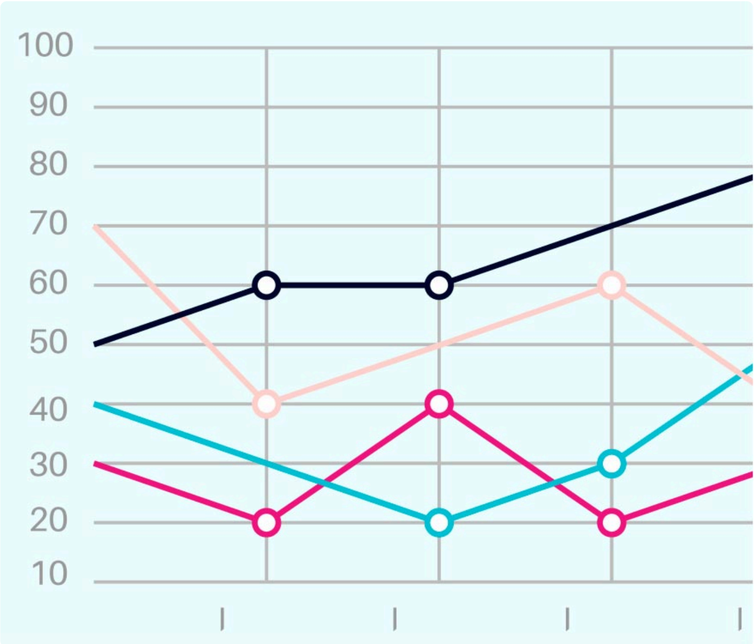
Identificar pontos notáveis de um gráfico.

Introdução

A matemática é uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Este conteúdo apresenta as funções a partir de conceitos elementares, como: intervalos, pontos e plano cartesiano, e contribui para o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela em que o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Conceitos de intervalos

Ao final deste módulo, você será capaz de interpretar os conceitos básicos de intervalo.

Intervalos

Intervalos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo a este vídeo. Vamos lá?

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

No decorrer deste tema, os intervalos merecem destaque. Será necessário que você analise situações gráficas e localize os melhores momentos – os intervalos – para possíveis intervenções.

> **A palavra intervalo nos remete a uma forma de medir.**

Quando consideramos o intervalo das 9 às 11 horas, temos todos os minutos, segundos e qualquer subdivisão de tempo compreendida nesse período.

No contexto matemático, os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais R.

Exemplo

Todos os valores entre 3 e 5.

Isso significa, por exemplo, que o número irracional $\pi(pi)$, que é aproximadamente $3,14$, pertence a esse intervalo, bem como o número 4, pois eles são maiores que 3 e menores que 5.

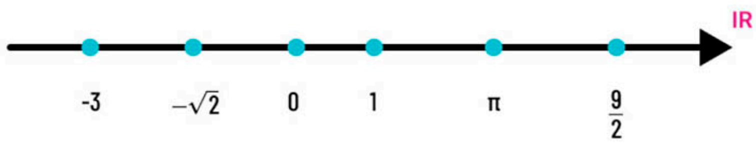
É claro que você pode usar a língua portuguesa para descrever tais conjuntos, mas a Matemática também é uma linguagem com características próprias, que serão abordadas ao longo deste tema.

Conceitos

Classificando intervalos na reta numéricas

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Intuitivamente, ao pensar em números reais, você deve imaginar uma reta infinita, onde cada ponto dela é um número real. Esse objeto será chamado de **Reta Real** e admite o símbolo R. Essa reta é organizada de forma crescente do menos infinito $(-\infty)$ ao mais infinito $(+\infty)$.



Reta Real.

Dessa forma, é importante destacar que:

> Um intervalo é um subconjunto dos números reais.

Para uma representação gráfica desse conceito, adotaremos a seguinte notação:

Bola fechada

Indica que o extremo do intervalo **está contido** no conjunto.

Bola aberta

Indica, em nossa representação, que o extremo do intervalo **não está contido** no conjunto.

Dessa forma, o intervalo, que pode ser visto na imagem a seguir, compreende todos os números reais de 1 até 6, $\boldsymbol{excluindo\ o\ 1}$ e $\boldsymbol{incluindo\ o\ 6}$.

Transferindo a linguagem

Quando tratarmos do conjunto dos números reais, os símbolos:

Bola Fechada

É representada por:

$\geq$ (maior ou igual) e $\leq$ (menor ou igual) ou [ ] (colchetes)

Se $x \in R$ e $-4 \leq x \leq 2$, isso significa que x pode ser maior que -4 ou igual a -4 e menor que 2 ou igual a 2; portanto, dentro do intervalo.

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma: $[-4,2] = \{x \in R; -4 \leq x \leq 2\}$ Ou seja, todos os números reais **a partir** do número -4 até o número 2. Um intervalo que possui as extremidades é chamado de intervalo fechado.

Bola Aberta

É representada por:

> (maior) e < (menor) ou ( ) (parênteses) ou] colchetes [

Se $x \in R$ e $-4 < x < 2$, x **pode ser maior que** -4 **e menor que** 2. **Portanto, os extremos não fazem parte do conjunto.**

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma: $[-4,2] = \{x \in R; -4 < x < 2\}$ Ou seja, todos os números reais depois do número -4 anteriores ao número 2. Um intervalo que não possui as extremidades é chamado de intervalo aberto.

A **amplitude de um intervalo** é sempre definida por:

Amplitude = LS – LI

Onde:

LS = Limite superior do Intervalo

LI = Limite inferior do intervalo

Portanto, nos **casos anteriores**, podemos calcular a **amplitude** do intervalo subtraindo a extremidade mais à direita da extremidade mais à esquerda:

$$2 - (-4) = 6$$

Isto é, nos **dois casos**, o **intervalo** possui a **amplitude** de 6 **unidades**.

Você deve estar se perguntando:

> Mesmo com os intervalos abertos, onde as extremidades não estão incluídas, a amplitude é a mesma dos intervalos fechados?

A resposta é **sim**!

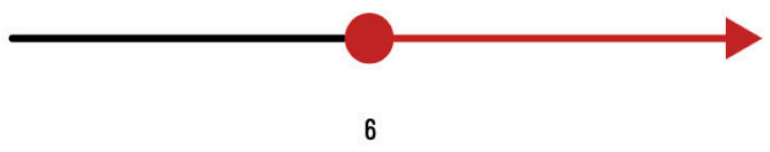
Isso acontece porque, mesmo nos intervalos abertos, é possível pensar que podemos ficar bem perto do limite aberto. Na verdade, podemos ficar “infinitamente” perto de um limite aberto. Logo, a amplitude (também traduzida na figura como o comprimento do trecho da reta) será igual se o limite for fechado ou aberto.

Agora, vamos entender as semirretas.

Exemplo

$x \in R$ e $x \geq 6$

x pode ser maior que 6 ou igual a 6 e, portanto, estará dentro do intervalo.

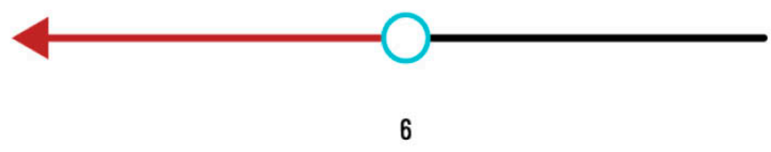


Intervalo

Exemplo

$x \in R$ e $x < 6$

isso significa que x pode ser apenas menor que 6, e nunca igual a 6; portanto, 6 não está dentro do intervalo.



6 não está dentro

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:

$$(-\infty, 6) = \{x \in R \; ; x<6 \}$$

Ou seja, todos os números reais **antes** do número 6. A semirreta que não possui a sua extremidade é denominada **semirreta aberta**.

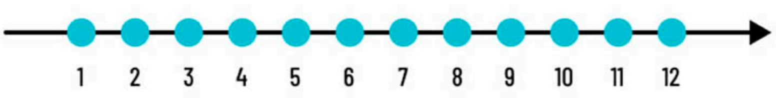
Note que uma semirreta tem a **amplitude infinita**.

Vamos aplicar o que estudamos até agora?

Exemplos onde podemos perceber intervalos à nossa volta

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Designaremos os valores de 1 até 12 como os meses do ano, 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim por diante, até chegarmos a 12 para dezembro.



A partir das informações apresentadas até aqui, tente responder a questão a seguir:

Atividade discursiva

Caracterize por intervalos o segundo trimestre do ano:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

O segundo trimestre de um ano contém os meses de abril, maio e junho. No gráfico da reta que temos, consideramos 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim em diante. Desse modo, podemos seguir a lógica de 1 para janeiro; 2 para fevereiro; 3 para março; 4 para abril; 5 para maio; 6 para junho; 7 para julho; ....; 12 para dezembro.

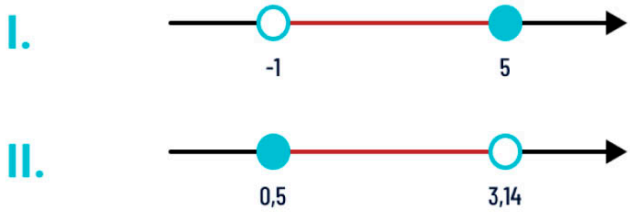
Logo, o segundo trimestre seria o intervalo dos números que representam os meses de abril, maio e junho, que seriam 4, 5 e 6. Portanto, o intervalo do segundo trimestre seria $[4,\ 6]$. Representado pela figura:

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Considere os intervalos a seguir:



A $\{x \in R;\ -1 < x \leq 5\}$ e $\{x \in R;\ 0,5 < x < 3,14\}$

B $\{x \in R;\ -1 < x \leq 5\}$ e $\{x \in R;\ 0,5 \leq x < 3,14\}$

C $\{x \in R;\ -1 \leq x \leq 5\}$ e $\{x \in R;\ 0,5 < x < 3,14\}$

D $\{x \in R;\ -1 \leq x \leq 5\}$ e $\{x \in R;\ 0,5 \leq x \leq 3,14\}$

E $\{x \in R;\ -1 < x < 5\}$ e $\{x \in R;\ 0,5 < x < 3,14\}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

A atividade em questão tem o propósito das associações, isto é, > , < bola aberta e $\geq, \leq$ bola fechada. Assim, devemos procurar a alternativa que contenha aberto em -1, fechado em 5, fechado em $0,5$ e aberto em $3,14$. A única alternativa com exatamente essa combinação é a letra B.

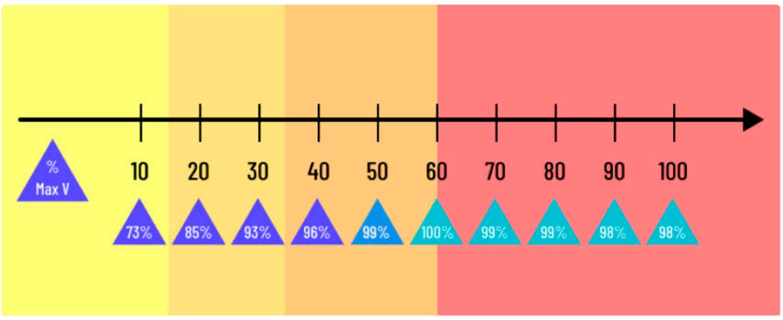
Vamos apresentar algumas soluções aceitáveis para cada uma das representações.

a. $\{x \in R;\ -1 < x \leq 5\}$ ou os números reais maiores que -1 e menores ou iguais a 5 ou os números reais entre -1 e 5 , incluindo o número 5 ou $(-1,\ 5]$.

b. $\{x \in R;\ 0,5 \leq x < 3,14\}$ ou os números reais maiores ou iguais a $0,5$ e menores que $3,14$ ou os números reais entre $0,5$ e $3,14$, incluindo o número $0,5$ ou $(0,\ 5,\ 3,\ 14]$.

Questão 2

Veja, a seguir, o desempenho de um corredor durante uma competição dos 100 metros rasos. A reta em questão mostra a marcação da distância na pista e, a cada 10 metros, é apresentado o desempenho do corredor em comparação à sua velocidade máxima.



Em qual dos intervalos a seguir o corredor manteve a sua velocidade maior ou igual à de 99% de sua capacidade máxima.

A $[\,50\,,\,80\,]$

B $[\,30\,,\,100\,]$

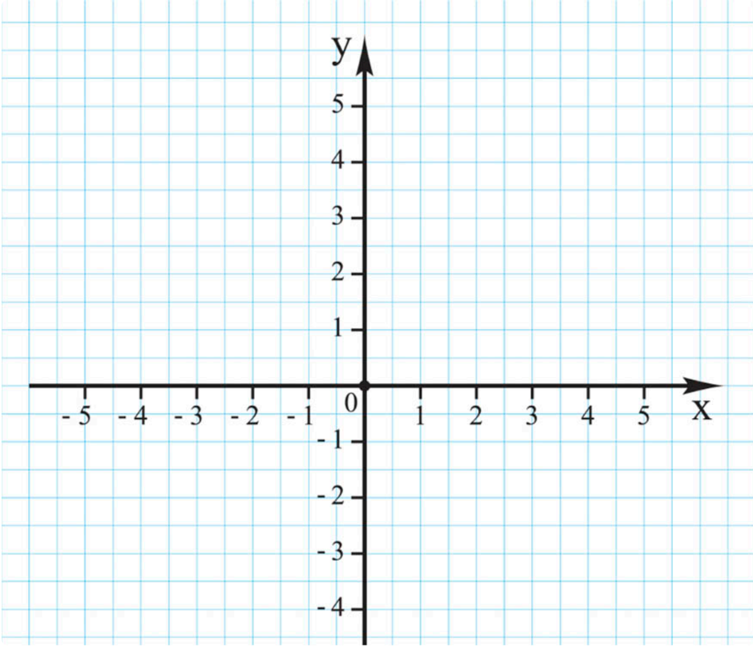
C $[\,0,\,50\,)$ e $(\,80\,,\,100\,]$

D $(\,59,\,61\,)$

E $[\,50\,,\,\infty\,)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

A palavra maior ou igual presume que estamos considerando o valor de 99% em nossa análise. Sendo assim, o intervalo que corresponde ao que foi pedido é a letra A.



2 - Caracterização do plano cartesiano

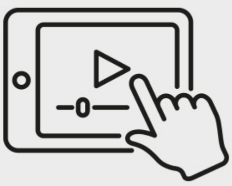
Ao final deste módulo, você será capaz de identificar pontos no plano.

Plano cartesiano

Como posicionar pontos no plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Na vida cotidiana, muitas quantidades mensuráveis dependem de uma ou mais variáveis. Por exemplo: o crescimento das plantas depende da luz solar e das chuvas; a velocidade depende da distância percorrida e do tempo gasto; a tensão elétrica depende da corrente e resistência.

> O plano cartesiano é uma das formas mais eficientes para representar o relacionamento entre duas ou mais variáveis.

Plano cartesiano

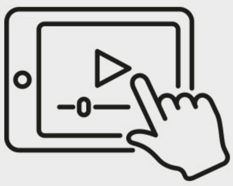
O plano cartesiano foi criado com o objetivo inicial de marcar pontos no plano pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650).

Neste módulo, apresentaremos algumas ideias de como podemos fazer uso dessa ferramenta.

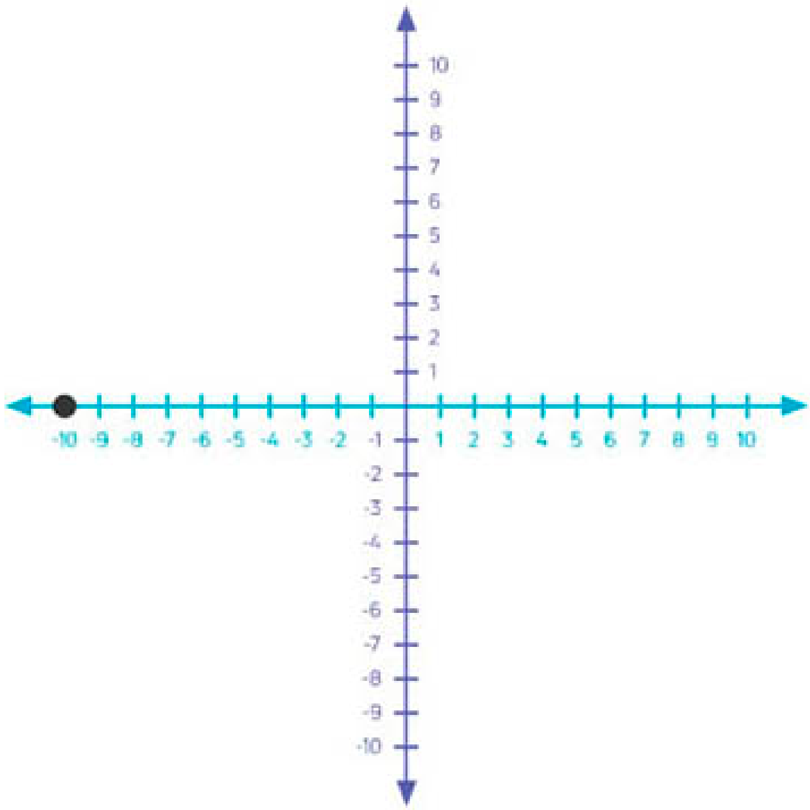
Conceitos do plano cartesiano

Entendendo o plano cartesiano, marcando pontos com GeoGebra

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



O plano cartesiano apresenta duas linhas numéricas: uma horizontal, da esquerda para a direita, e outra vertical, de baixo para cima.



Exemplo de plano cartesiano.

Utiliza-se a letra x para simbolizar os valores sobre a reta horizontal e a letra y para simbolizar os valores sobre a reta vertical.

Observe que:

À medida que x aumenta, o ponto se move mais para a direita. Quando x diminui, o ponto se move mais para a esquerda.

À medida que y aumenta, o ponto se move mais para cima. Quando y diminui, o ponto se move mais para baixo.

É importante ressaltar que as retas horizontal e vertical também são chamadas, respectivamente, de "abscissa" e "ordenada". O ponto ($0,0$) é chamado de "origem".

As coordenadas são sempre escritas em determinada ordem. A coordenada horizontal vem primeiro. Então, em seguida, vem a coordenada vertical. Isso é chamado de par ordenado.

Par ordenado

Par de números em uma ordem especial.

Atenção!

Os números são separados por vírgula e, em torno deles, ficam os parênteses.

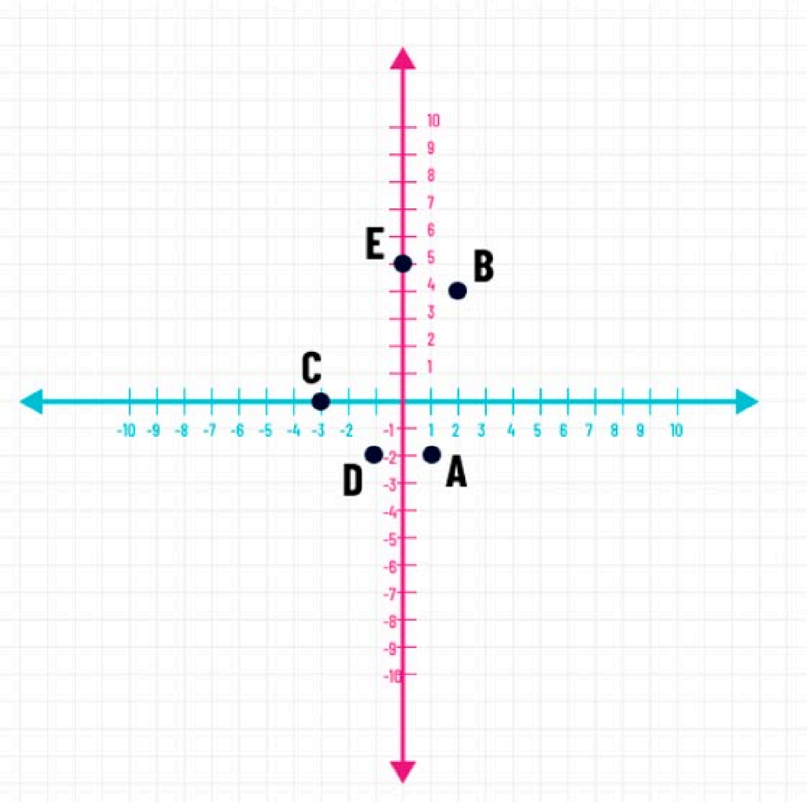
Como exemplo vamos **marcar os pontos** no **plano cartesiano**: $(1, -2)$; $(2, 4)$; $(-3, 0)$; $(-1, -2)$; $(0, 5)$. Em primeiro lugar, precisamos montar uma tabela com os pontos dados:

x	y
1	-2
2	4
-3	0
-1	-2
0	5

Pares ordenados para pontos no plano cartesiano.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

É importante perceber que a notação se parece com a de intervalo aberto que aprendemos no Módulo 1. Portanto, você deve se manter atento ao que é pedido no enunciado de cada questão.

Agora, marcaremos as coordenadas no plano cartesiano. Sendo a primeira na reta horizontal, abscissa, e a segunda na vertical, ordenada.

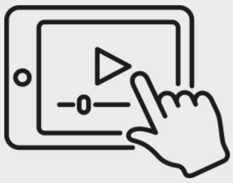


Pontos no plano cartesiano.

Vejamos agora um vídeo sobre a aplicação do conceito de plano cartesiano em robótica.

Aplicação do plano cartesiano na robótica

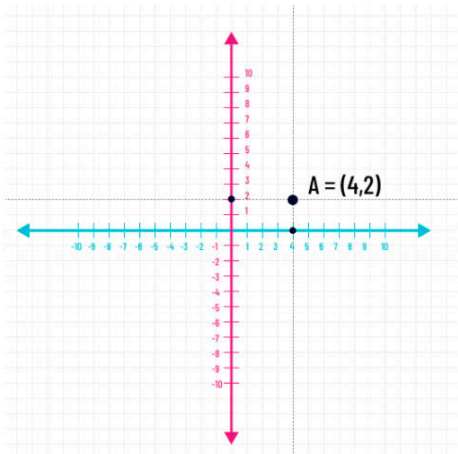
Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Agora, vamos verificar se você entendeu por meio de uma atividade?

Atividade discursiva

Na figura a seguir, vemos o ponto $(4, 2)$.



Diga o que ocorre se movimentássemos o ponto:

1. Duas unidades para cima.
2. Três unidades para a esquerda e, depois, duas unidades para baixo.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

a. O ponto moveria duas unidades na reta da variável y para cima. Logo, parou em $(4, 4)$.

b. O ponto moveria 3 unidades para a esquerda, parando em $(1, 2)$ e, depois, foi deslocado duas unidades para baixo, parando em $(1, 0)$.

Saiba mais

Pesquise calculadoras e aplicativos na Internet para representar os pontos no plano cartesiano. O GeoGebra é um exemplo de ferramenta disponível na Internet.

Acabamos de vislumbrar o plano cartesiano como forma de representação gráfica de uma tabela, ilustrando a relação de dois ou mais objetos ou grandezas.

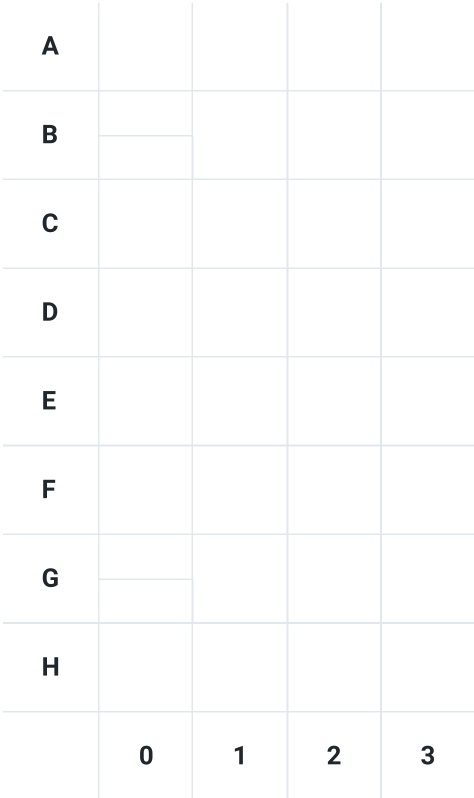
Um gráfico, nessas condições, é uma estrutura matemática bem definida. Em todos os exemplos e nas atividades, vimos que podemos representar pontos em uma tabela e as tabelas no plano cartesiano. Essa associação entre as tabelas e os pontos no plano cartesiano forma a ideia central do módulo 3.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

A figura abaixo apresenta um gráfico de setores de uma cidade. Esses setores foram divididos de A a H, e de 0 a 3, assim a identificação de um setor pode ser feita da seguinte forma, como exemplo: A0, B3, F2 etc. Considere que todos os setores foram divididos em áreas iguais (considere os retângulos idênticos), e que existe a necessidade de se realizar uma entrega que saia de B0 e chegue em G0. O gráfico abaixo apresentam duas rotas para que seja realizada a entrega.



Após observar essas rotas, analise as afirmativas abaixo:

I. A rota vermelha é a mais longa

II. A rota verde é a mais curta

III. A rota vermelha é a mais adequada

Sabendo que a entrega deve ser feita o mais rápido possível, percorrendo a menor distância permitida, assinale a opção correta, sobre a veracidade das afirmações acima:

A I- verdadeira, II- verdadeira, III- falsa

B I- falsa, II- verdadeira, III- falsa

C

I- verdadeira, II- falsa, III- falsa

D I- verdadeira, II- falsa, III- verdadeira

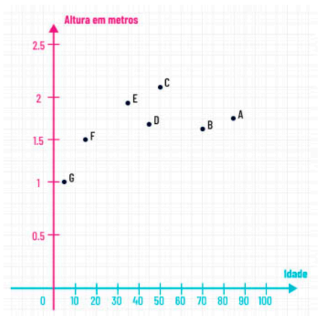
E I- falsa, II- verdadeira, III- verdadeira

Parabéns! A alternativa A está correta.

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7 retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.

Questão 2

No gráfico abaixo é mostrada a relação da altura de 7 indivíduos, com sua idade:



Relação da altura.

Após observar o gráfico, assinale a opção que apresenta, respectivamente, o indivíduo de maior idade e o indivíduo de maior altura.

A F e G

B A e E

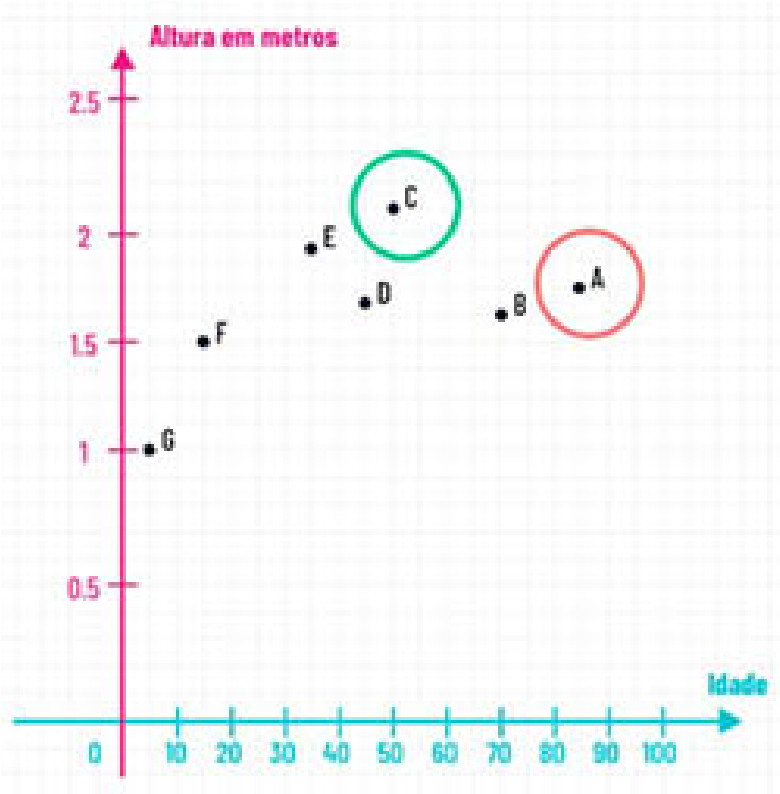
C D e A

D D e C

E A e C

Parabéns! A alternativa E está correta.

Veja no gráfico que o indivíduo de maior idade é aquele que se localiza mais à direita, como pode ser visto na figura abaixo, com o ponto destacado pelo círculo vermelho. E o indivíduo de maior altura é aquele que se encontra acima de todos os outros, ou seja, o ponto C, que está destacado pelo círculo verde, na figura.



Resposta do exercício.

3 - Definição e características da função

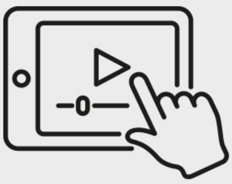
Ao final deste módulo, você será capaz de interpretar as informações contidas em um gráfico.

Vamos começar!

Exemplo de aplicação do plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

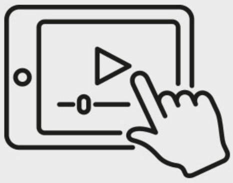
Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



O que é função?

Evolução do conceito histórico de funções

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



A palavra **função** apareceu pela primeira vez em um artigo de Gottfried Leibniz, em 1692. Ele chamou de função as **quantidades geométricas variáveis relacionadas** a uma **curva**. No entanto, foi Daniel Bernoulli, em 1718, que definiu o conceito de função de maneira formal pela primeira vez, e se tratava de algo bem diferente do que conhecemos hoje em dia.

Saiba mais

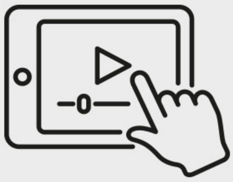
Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*.

Podemos perceber o conceito de função quando temos duas quantidades ("variáveis") e observamos que há uma relação entre elas. Se acharmos que, para cada valor da primeira variável, existe apenas um valor da segunda variável, dizemos que:

> A **segunda variável** é uma função da **primeira variável**.

Uma função é, a rigor, uma tabela organizada

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



No módulo anterior, vimos que podemos representar tabelas utilizando o plano cartesiano, no qual uma função não é nada além de uma tabela em que todos os valores da primeira coluna estão relacionados aos valores da segunda coluna, sem ambiguidades entre os valores da primeira coluna e os da segunda. É claro que esta não é a definição formal de função, mas, na prática, é o que se deseja.Veremos a seguir alguns exemplos de função.

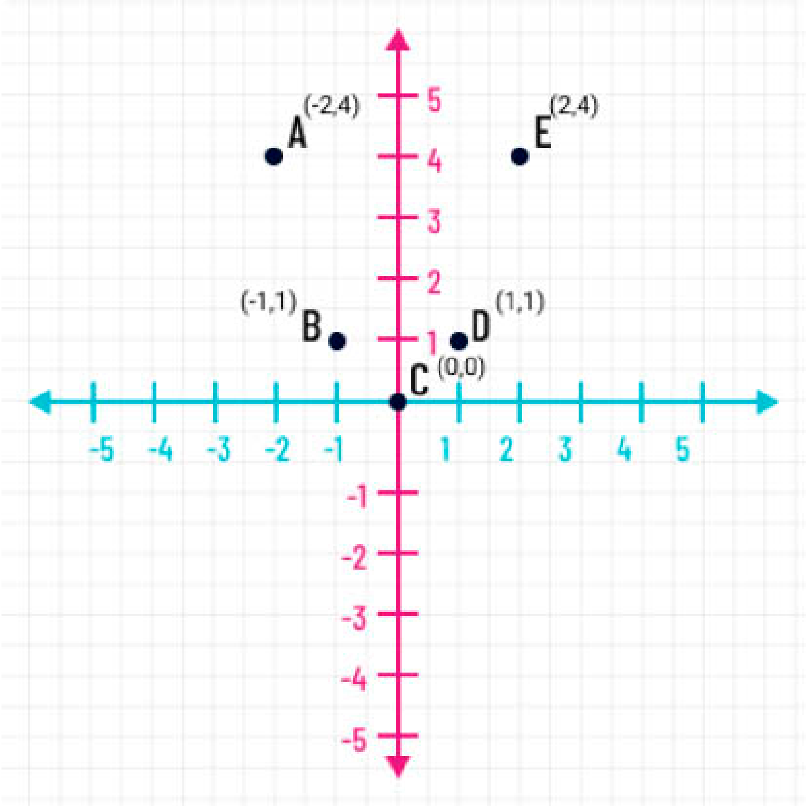
Exemplos de função

Exemplo 1

Vamos fazer uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos o seu valor ao quadrado $x \times x = x^2$ A seguir, podemos acompanhar o que ocorre com essa tabela de forma associada ao plano cartesiano.

Valor de x	**Valor de $y = x^2$**
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Pares ordenados de X e Y.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano.

Os valores da primeira coluna da tabela dependem explicitamente dos valores da segunda.

Devido à nossa experiência com o Ensino Médio, é possível ligar os pontos azuis, tendo, assim, melhor compreensão do todo que a tabela poderia nos dar.

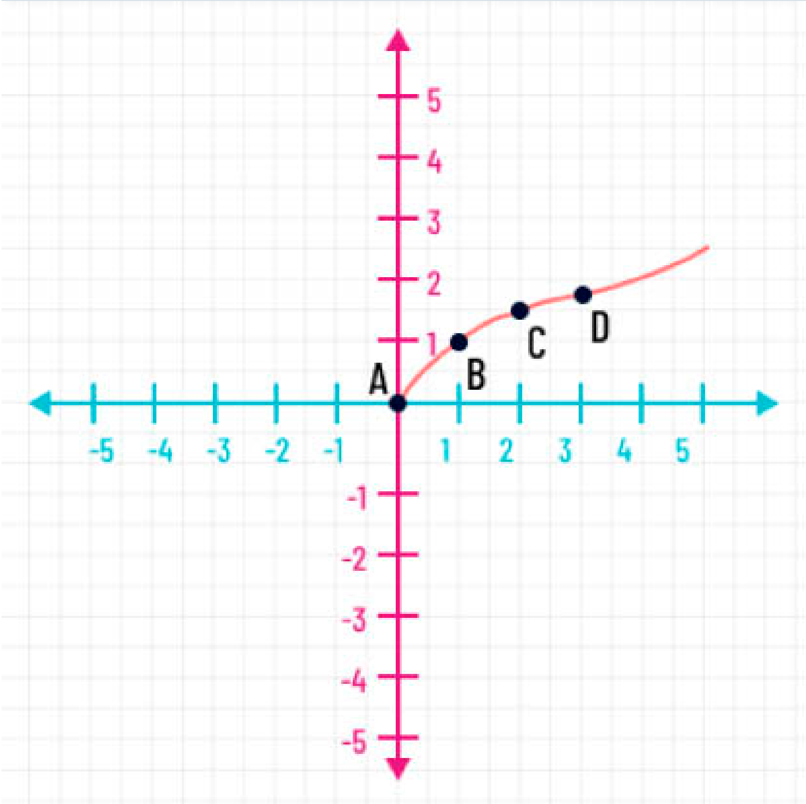
Exemplo 2

Desta vez, faremos uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos sua raiz quadrada $\sqrt{x}$.

Valor de x	**Valor de $y = \sqrt{x}$**
-1	$i \notin R$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$

Valor de x	Valor de $y = \sqrt{x}$
3	2

Pares ordenados de X e Y.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano.

Percebemos que -1, em particular, **não gera valores** em nossa tabela, pois estamos trabalhando apenas com **números reais**.

Note que todo valor **maior ou igual a zero** possui um lugar em nossa tabela. O caso é que os valores **menores que zero** não fazem parte dela.

> O maior conjunto de valores admissíveis de uma função, em analogia à primeira coluna de nossas tabelas, é conhecido como domínio da função.

Vejamos a seguir o ultimo exemplo desse grupo.

Exemplo 3

Qual é o custo de azulejar qualquer parede quadrada, com azulejos quadrados de $10cm$ $(0,1m)$ **de lado**, sabendo que **cada** $1m^2$ dos azulejos é **vendido a** $R\$32$ nas Casas Pitágoras?

Para solucionar essa questão, temos de analisar o problema e entender as suas variáveis. Primeiramente, devemos perceber que o metro quadrado depende do comprimento do lado do quadrado. Assim, podemos fazer uma primeira tabela:

Lado da parede quadrada	Parede em m^2	Quantidade de azulejos
1	1	100
2	4	400
3	9	900
x	x^2	$100 \times x^2$

Informações do exemplo.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Para preencher a última coluna, basta entendermos quantos azulejos de $0,1m$ de lado são necessários para preenchermos um metro quadrado. A figura exemplo ilustra a ideia de um metro quadrado dividido em azulejos de $10cm$ de lado e, como podemos ver, são necessários 100 azulejos.

Podemos perceber que a quantidade 100 representa o número necessário de azulejos para preencher um metro quadrado de azulejos, que custa $R\$32$ nas Casas Pitágoras. Sendo assim, existe uma relação de $100 \rightarrow R\$32$. Concluímos, então, que a tabela final relaciona a metragem da parede com o custo em azulejos.

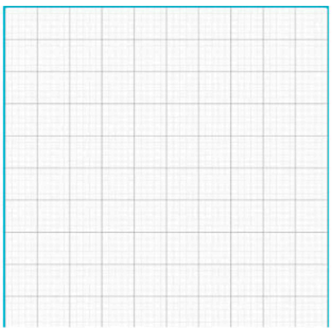
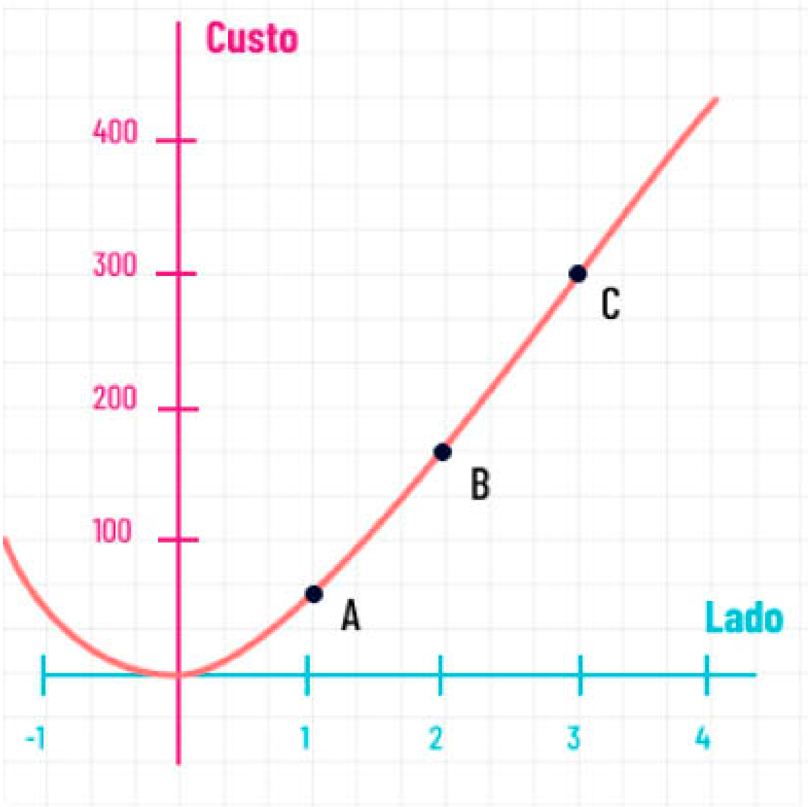


Figura exemplo

Lado da parede quadrada	Custo em azulejos $
1	32

Lado da parede quadrada	Custo em azulejos $
2	32×4
3	32×9
x	$32 \times x^2$

Parede x custo em azulejos.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Custo x lado

Daí, a relação que expressa o custo e a metragem da parede é $Cx = 32 \times x^2$ reais.

Ambiguidade

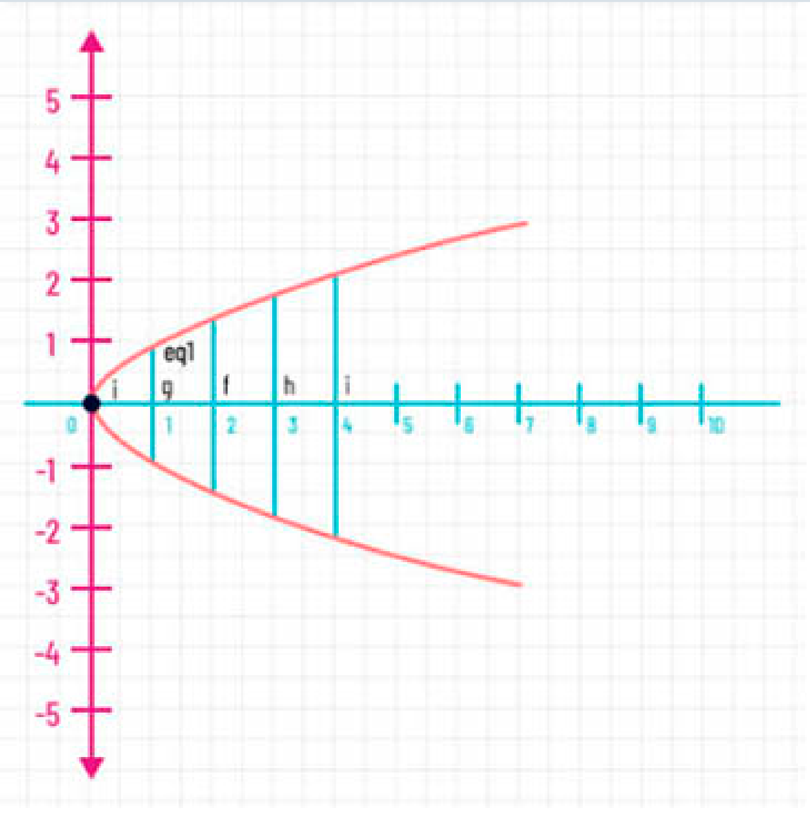
Um conceito importante sobre a construção da relação entre uma tabela e a sua representação gráfica é que ela **não pode ser ambígua**, isto é, os valores do que estamos caracterizando por variável dependente **não devem gerar duas possibilidades**.

Vamos entender melhor a questão da ambiguidade e por que ela não é uma função:

Veja como exemplo uma tabela com as soluções da equação $y^2 = x$, onde $x \in [0,\infty)$.

Valores de x	Solução de
0	0
1	1 ou -1
2	$\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$
4	2 ou -2

Valores de X.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Ambiguidade.

Neste exemplo, fica clara a ambiguidade pela **não unicidade das soluções do problema**, deixando-nos o dilema em cada ponto, se estamos considerando a parte positiva ou negativa.

> Quando esse tipo de fenômeno ocorrer, diremos que a relação estabelecida **não é uma função.**

Portanto, uma função f é uma tabela de pares ordenados com a seguinte propriedade:Se (x,y) e (x,b) estiverem na **mesma tabela**, então $b = y$.

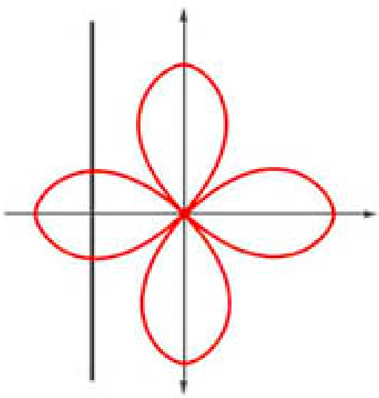
Resumindo

Uma tabela **não pode** conter **pares ordenados distintos** que possuam o mesmo primeiro elemento.

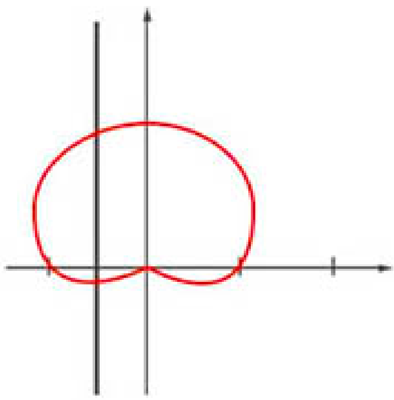
Sendo f uma função, o domínio de f é: o conjunto de todos os x, para o qual exista um y, tal que o par (x,y) esteja na tabela f.

Dessa forma, ao observarmos um gráfico no plano cartesiano, o que devemos perceber, a fim de entender se ele representa uma função, é se as **retas verticais** o **tocam** em um **único ponto**.

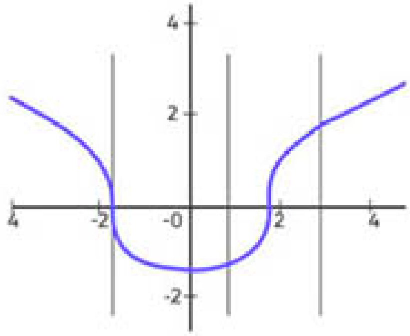
Veja os exemplos:



Não é função



Não é função



É função

Você já deve ter notado que **sempre associamos** as **tabelas** a uma **figura no plano cartesiano**, que representa todos os pontos possíveis das tabelas em questão.

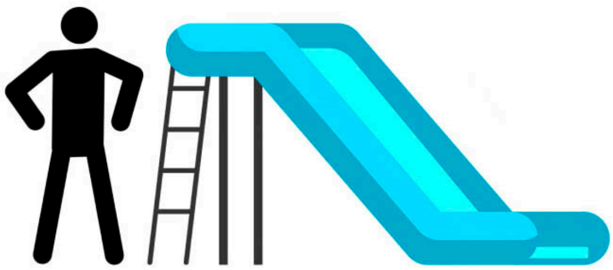
Essas figuras são chamadas de gráficos. Quando as tabelas representarem, de fato, uma função, a imagem será chamada de gráfico de função.

Reconhecimento e contexto

Agora, apresentaremos uma série de exemplos a fim de que você possa entender que nem sempre podemos, de forma explícita, construir a tabela, embora a relação com o gráfico ainda se faça presente.

Primeiro exemplo

A ilustração a seguir mostra um homem andando por um brinquedo em um parque:



A partir da imagem acima, pense na seguinte questão:

Quais diferentes medidas podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A altura do homem em relação ao solo e sua velocidade variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no primeiro exemplo, tente responder a atividade proposta.

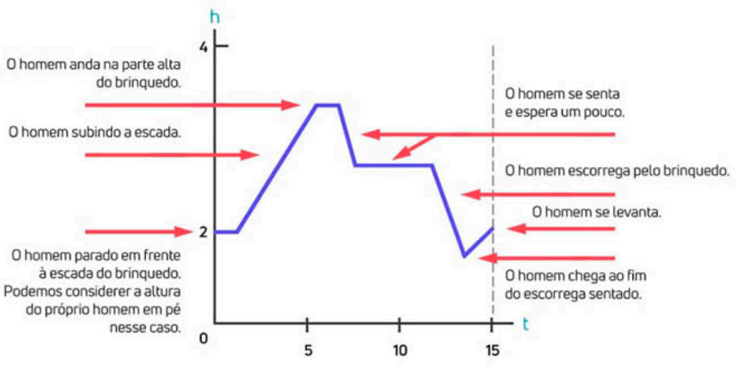
Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Observe o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.



Altura em função do tempo.

Segundo exemplo

A ilustração a seguir apresenta um recipiente sendo cheio por água.

A partir da imagem acima, pensa na seguinte questão:

Quais diferentes variáveis podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A quantidade de litros de água que está dentro do recipiente e a velocidade em que o recipiente fica cheio variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no segundo exemplo, tente responder a atividade proposta.

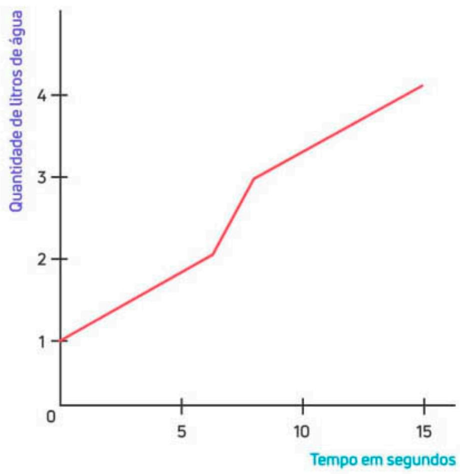
Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **quantidade de litros de água** no recipiente em função do **tempo**.

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Ao analisarmos a ilustração com cuidado, percebemos que já havia água no balde; depois, ele recebe mais um litro de água, além do que já estava entrando, fazendo com que o fluxo de água fosse maior nesse intervalo de tempo, retornando, mais tarde, à vazão natural. Obtemos assim:



Quantidade de litros de água em função do tempo em segundos.

Os gráficos dos exemplos que acabamos de ver representam uma tabela em que a quantidade de água no recipiente ou a altura da cabeça do homem **variam sem ambiguidade** em **função do tempo**, apresentando, assim, o **conceito de função**.

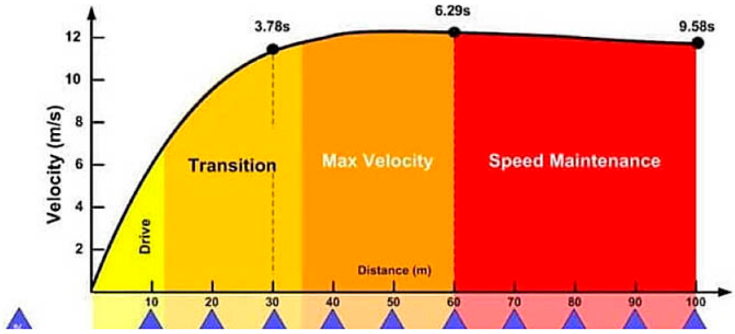
Geralmente, na escola, estudamos funções como fórmulas preestabelecidas. No entanto, como vimos nos exemplos anteriores, essa ideia não é completa. Devemos ser capazes de enxergar o conceito de função na diversidade à nossa volta, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo A

A imagem mostra um gráfico do desempenho do corredor Usain Bolt ao conquistar o recorde mundial dos 100 metros rasos, no campeonato mundial de atletismo.

A reta vertical apresenta a velocidade do corredor em metros por segundo (m/s), e a reta horizontal mostra a distância percorrida em metros.

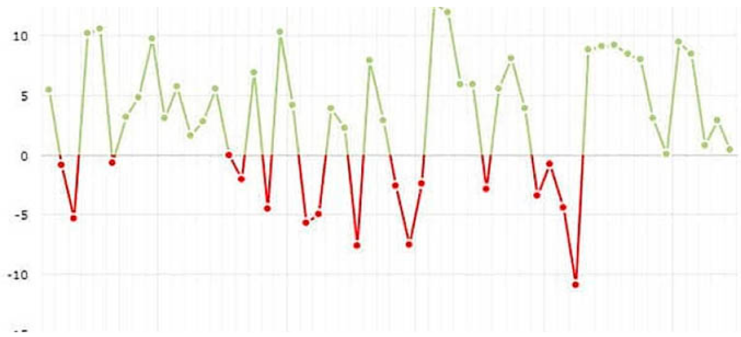
O gráfico é uma função que mede a velocidade do corredor em cada momento da trajetória.



Exemplo B

Já esta imagem mostra o crescimento do PIB argentino, do início dos anos 1960 até a década de 2010.

O gráfico apresenta o histórico do desenvolvimento econômico argentino. A partir dele, podemos apresentar uma tendência, auxiliando um futuro investidor.

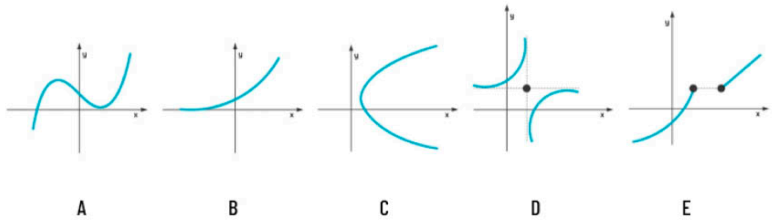


Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Qual das opções a seguir não apresenta um gráfico de função?



Marque a opção correta:

A A

B B

C C

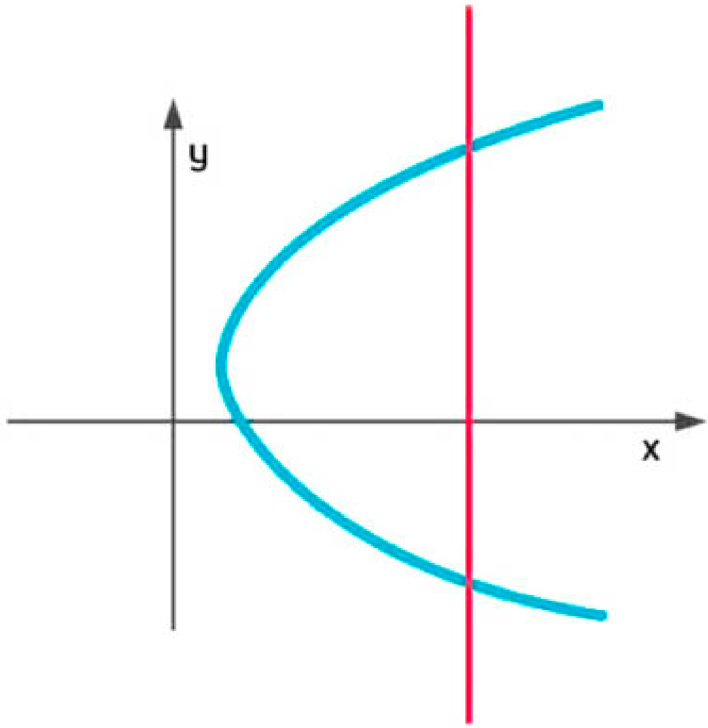
D D

E E

Parabéns! A alternativa C está correta.

Os itens A, B, D e E são funções, e o item C não é uma função, de acordo com o que foi visto neste módulo, pois a reta vertical toca o gráfico em mais de um ponto.

Em relação à alternativa E, o ponto é que, na "tabela" que apresenta o gráfico, o que ocorreu foi que ela pulou alguns valores. De acordo com a definição de função, podemos entender que, em momento algum, é relatado que não é possível pularmos valores. Sendo assim, o item E não contradiz em nada a definição de função. Logo, também se trata de um gráfico de função.



Alternativa C.

Questão 2

Em 2020, houve uma pandemia global provocada pelo vírus SARS-CoV-2. Tal pandemia trouxe danos incalculáveis às economias globais e provocou milhares de mortes pelo mundo inteiro. O estudo do epidemiologista Neil Ferguson, do Imperial College, apresentou um gráfico mostrando requisitos de leito de cuidados intensivos (UTI) por 100 mil habitantes em diferentes cenários:

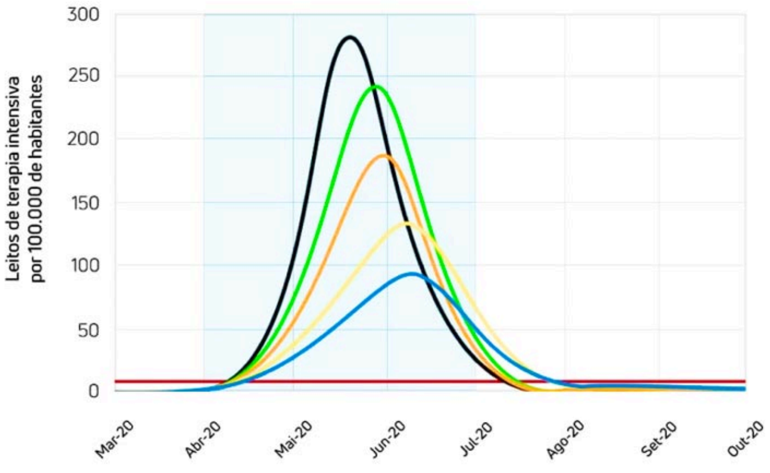


Figura A

- Mostra o número de leitos de UTI por 100 mil habitantes que a Inglaterra possuía em 2019, antes do surto.
- Mostra a epidemia não mitigada.
- Mostra o isolamento do caso.
- Mostra o isolamento dos casos e a quarentena das famílias.
- Mostra uma estratégia de mitigação com o fechamento de escolas e universidades.
- Mostra o isolamento de casos, a quarentena doméstica e o distanciamento social das pessoas com mais de 70 anos.

Figura B

Assinale a alternativa correta:

A Nenhum dos gráficos apresentados nas figuras é função.

B Os picos em todos os cenários ocorrem em maio.

C Em todos os cenários, em junho, na Inglaterra, serão necessários 150 leitos de UTI a cada 100 mil habitantes.

D O sistema de saúde inglês volta ao normal em todos os cenários em agosto.

E Os picos de todos os cenários na Grã-Bretanha ocorrem no mês de junho.

Parabéns! A alternativa D está correta.

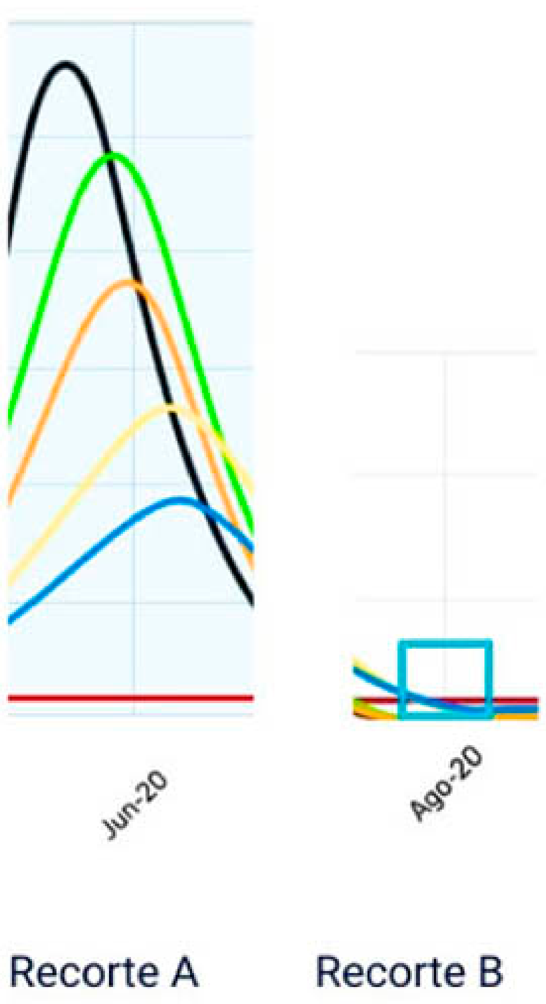
A letra A é falsa, pois não há ambiguidade nos pontos, portanto todos os cenários são funções.

Para responder se o item B é verdadeiro ou falso, temos duas opções: fazer o recorte do mês de maio ou fazer o recorte dos picos. O mesmo vale pra avaliarmos o item E. Optamos por fazer o recorte dos picos, como ilustra a Recorte A.

O gráfico deixa claro que os picos se concentram durante os meses de maio e junho é não só em maio ou só em junho.

No caso do item C, percebemos que os cenários amarelo e azul não chegam aos 150 leitos de UTI por 100 mil habitantes.

Esse raciocínio evidencia que a resposta é a letra D. O recorte a seguir (Recorte B) deixa claro que em todos os cenários o sistema de saúde inglês volta à normalidade no mês de agosto.



Recorte A e Recorte B.

4 - Máximos, mínimos e raízes de uma função

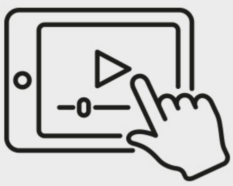
Ao final deste módulo, você será capaz de identificar pontos notáveis de um gráfico.

Vamos começar!

Exemplos de gráficos de modelos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Raízes ou zeros

As **raízes ou zeros** de uma função f **serão os valores no eixo OX**, que também fazem parte da sua função/tabela (x, y), onde $y = f(x)$. Isto é, correspondem aos valores x que são associados ao valor zero, $(x, 0)$.

Você, provavelmente, encontrará a seguinte representação nos livros de cálculo:são os valores de x tais que $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

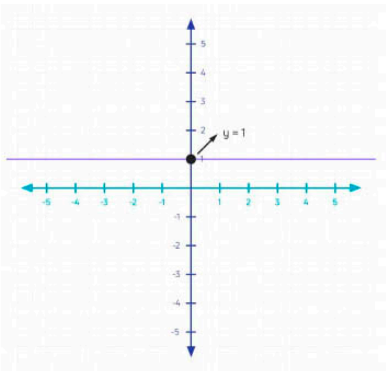
Graficamente, são os valores da função que se encontram sobre a reta horizontal (eixo OX).

Vejamos alguns exemplos a seguir:

Exemplo 1

Descreveremos o conjunto das raízes apresentadas no gráfico das funções a seguir.

O gráfico das funções a serem consideradas está em roxo.



Exemplo 1.

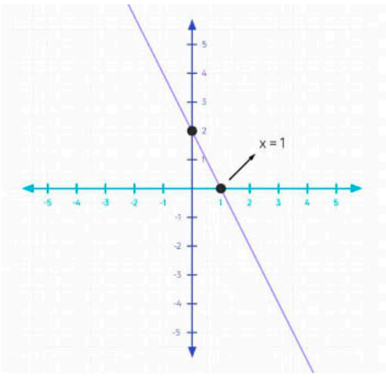
Neste gráfico, podemos perceber que o gráfico da função nunca toca o eixo OX.

Esse tipo de gráfico é comumente conhecido como gráfico de uma **função constante**.

Sendo assim, o conjunto de todas as suas raízes é **vazio**.

Exemplo 2

As raízes de uma função são os valores da primeira coordenada, cujo gráfico da função f está sobre o eixo OX.



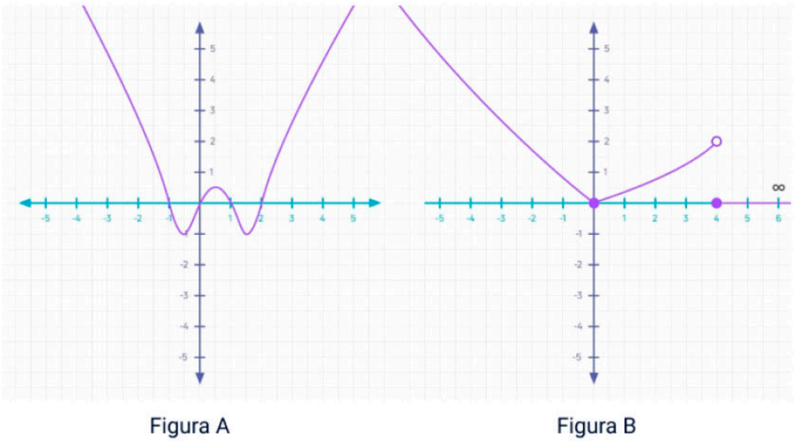
Exemplo 2.

Neste caso, temos uma única raiz, $x = 1$.

Agora que você já compreendeu os exemplos, analise os gráficos a seguir e responda:

Atividade discursiva

Quais são as raízes das funções a seguir?



Função A (esquerda) e Função B (direita).

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Função A:

Podemos ver os valores na reta horizontal que são tocados pelo gráfico da função, isto é, $\{-1, 0, 1, 2\}$.

Dessa forma, temos que a função em questão possui 4 raízes.

Função B:

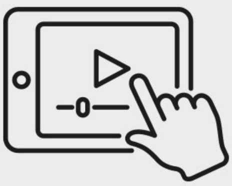
Os valores no eixo OX fazem parte da sua tabela/gráfico da função. Nesse sentido, podemos ver o valor $x = 0$ e $x = 4$.

O caso aqui é que todos os valores de x maiores que 4 fazem parte da nossa tabela e estão sobre o eixo horizontal. Portanto, as raízes da função dada pelo gráfico são 4 e $[4, \infty)$. Ou seja, a função pode ter uma infinidade de raízes.

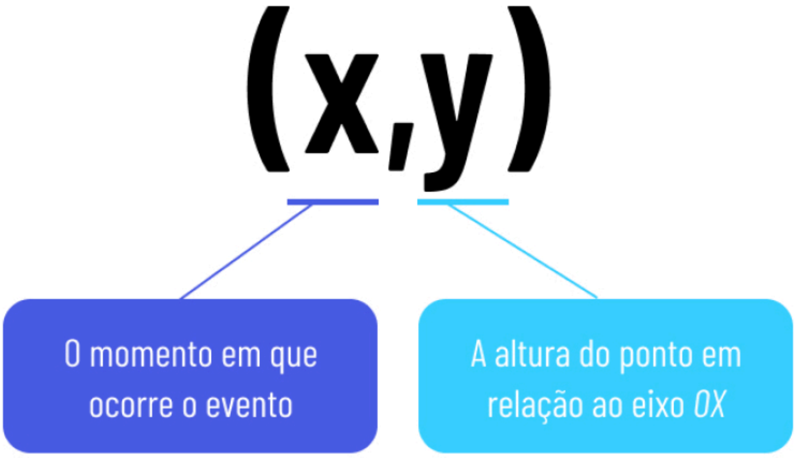
Máximos e mínimos de um gráfico

Reconhecendo máximos e mínimos locais e globais

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Devemos sempre ter em mente que, quando falamos em ponto de máximo ou mínimo de um gráfico, este é um par ordenado, um elemento da nossa tabela, e, por isso, possui **dois valores associados**.



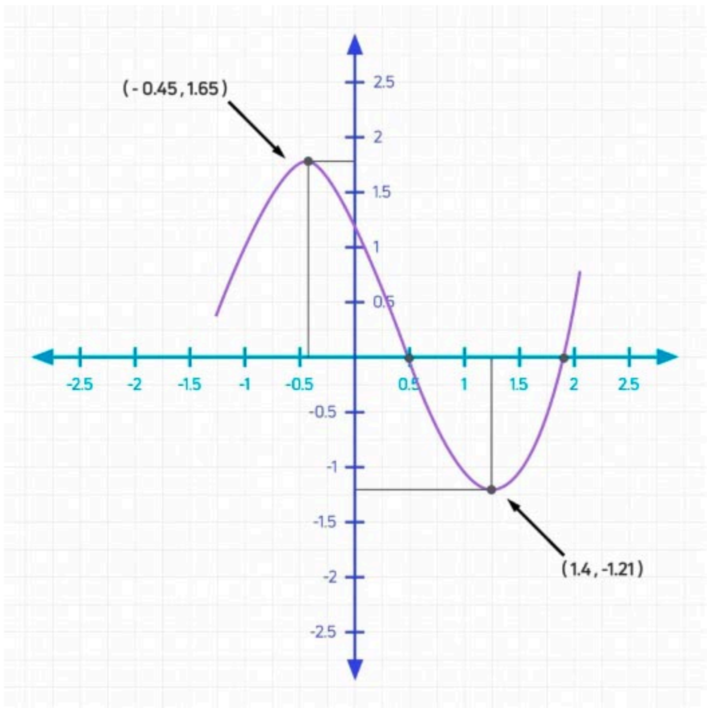
O valor de x é o que geralmente chamamos na literatura de **máximo** ou **mínimo**.
O valor de $y = f(x)$ é o **valor máximo** ou **valor mínimo**.

Muitas vezes, podemos nos confundir com o que o problema pede quando essas ideias não estão claras.

Exemplo

De acordo com o gráfico temos:

O máximo da função ocorre em $x = -0.45$, e o seu valor máximo é $y = f(-0.45) = 1.65$.
O mínimo ocorre em $x = 1.4$, e o seu valor mínimo é $y = f(1.4) = -1.21$.



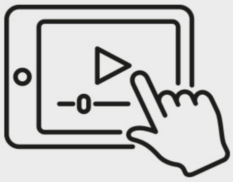
Gráfico

Trata-se do que chamamos na literatura de **máximos** e **mínimos globais**.

Trata-se do que chamamos na literatura de máximos e mínimos globais. Dado o gráfico de uma função f, o ponto de máximo (ou mínimo) $(x, f(x))$ tem a propriedade de ser o ponto mais alto (ou mais baixo) do gráfico. Em linguagem matemática, é o ponto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ e $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x admissível.

Pontos notáveis de um gráfico

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

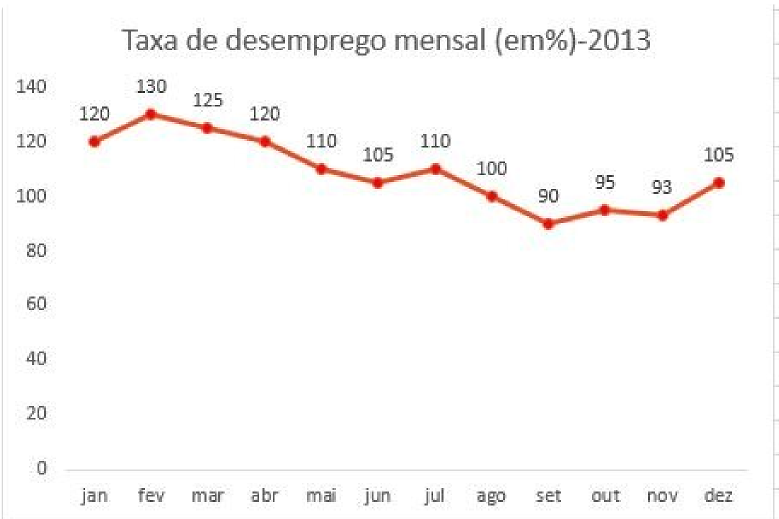


Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

O gráfico abaixo apresenta a taxa de desemprego de 2013.



Taxa de desemprego mensal (em%) - 2013.

Em quais meses há o maior índice de desemprego e o menor índice?

A Maior índice: dezembro; menor índice: junho.

B Maior índice: fevereiro; menor índice: setembro.

C Maior índice: agosto; menor índice: setembro.

D Maior índice: janeiro; menor índice: setembro.

E Maior índice: janeiro; menor índice: dezembro.

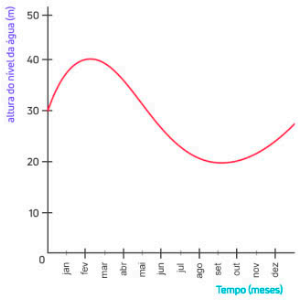
Parabéns! A alternativa B está correta.

A taxa mais alta do gráfico é 130, ou seja, ponto mais alto do gráfico. Portanto, o maior índice de desemprego ocorre no mês de fevereiro, e o menor índice, em setembro, onde se encontra o ponto mais baixo do gráfico, 90.

Questão 2

O gráfico a seguir mostra o nível de água em um reservatório durante o ano de 2015.

Se os níveis de água no reservatório dependem dos níveis de chuva na região, assinale, respectivamente, os meses do ano em que mais choveu e em que menos choveu no ano de 2015.



Altura do nível da água (m) em função do tempo (meses).

A Janeiro e dezembro.

B Fevereiro e novembro.

C Março e outubro.

D Fevereiro e setembro.

E Janeiro e agosto.

Parabéns! A alternativa D está correta.

O mês de fevereiro teve o maior volume de chuvas. Além disso, podemos perceber que, em outubro, choveu mais que em setembro.

Considerações finais

A Matemática é, a rigor, uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Como toda língua, ela possui seus conceitos mais elementares, que abrem caminho para toda a beleza, cultura e os mistérios que circundam civilizações antigas e as mais modernas tecnologias.

Este tema buscou apresentar as funções a partir de conceitos elementares, como intervalos e o plano cartesiano, e desmistificar o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela onde o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

Podcast

No podcast a seguir, veremos um breve resumo sobre o tema.

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.

Explore +

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, de Tatiana Roque.

Pesquise na Internet o projeto **Um livro aberto**, que conta com a colaboração de professores universitários de todo o Brasil.

Pesquise sites de calculadoras científicas e aplicativos que ajudem a fazer contas.

Procure na Internet o livro **Biomechanic of sprinting**.

Consulte o **Portal do Saber**, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Referências

CONNALLY, E. *et al.* **Functions Modeling Change**: A Preparation for Calculus. Nova York: Wiler, 2010.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I**. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise** – Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SPIVAK, M. **Calculus**: cálculo infinitesimal. Barcelona: Reverté, 1970.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material