Exercício Programa 2 - Computação III
Equação de Laplace e
Cálculo de Campo Elétrico

Bruno Daiki YAMADA

16 de outubro de 2016

Data do procedimento: 7 de outubro de 2016
Professor: Renato Vicente

1 Introdução

Cálculo de potenciais elétricos com dada a distribuição de carga ou regiões equipotenciais, é um problema muito comum no eletromagnetismo, que permite o cálculo do campo elétrico.
Calcular o campo elétrico através da Lei de Coulomb é uma possibilidade, representado a seguir:

$$\vec{E} = k\frac{dQ}{r^3}\vec{r}$$

Com essa equação, é possível calcular o campo elétrico através da distribuição de carga. Entretanto uma aproximação mais fácil para determinar campo elétrico através de superfícies equipotenciais é calcular o campo elétrico através do potencial. Como potencial elétrico é uma grandeza escalar, calculá-lo pode ser uma tarefa mais simples, como ilustrado a seguir:

$$\phi_{12} = \int_1^2 \vec{E}(x)\vec{dl}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{1}$$

Nesse caso, usaremos método das diferenças finitas para calcular o campo elétrico através do potencial. Como apresentado a seguir.

2 Método

2.1 Método das diferenças finitas

Consideremos primeiro a equação de Laplace para o potencial elétrico:

$$\nabla^2\phi(x,y) = \phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y) = 0 \tag{2}$$

Então realizamos a expansão de Taylor para $\phi(x+\delta,y)$, $\phi(x-\delta,y)$, $\phi(x,y+\delta)$ e $\phi(x,y-\delta)$:

$$\phi(x+\delta,y) = \phi(x,y) + \frac{\phi_x(x,y)\delta}{2!} + \frac{\phi_{xx}(x,y)\delta^2}{3!} + \mathcal{O}(\delta)^4 \tag{3}$$

$$\phi(x-\delta,y) = \phi(x,y) - \frac{\phi_x(x,y)\delta}{2!} + \frac{\phi_{xx}(x,y)\delta^2}{3!} + \mathcal{O}(\delta)^4 \tag{4}$$

$$\phi(x,y+\delta) = \phi(x,y) + \frac{\phi_y(x,y)\delta}{2!} + \frac{\phi_{yy}(x,y)\delta^2}{3!} + \mathcal{O}(\delta)^4 \tag{5}$$

$$\phi(x,y-\delta) = \phi(x,y) - \frac{\phi_y(x,y)\delta}{2!} + \frac{\phi_{yy}(x,y)\delta^2}{3!} + \mathcal{O}(\delta)^4 \tag{6}$$

Das equações 3, 4, 5 e 6 podemos desconsiderar o termo $\mathcal{O}(\delta)^4$ e ainda, ao somá-las, os segundos termos se cancelam dois a dois. E considerando a equação 2, os terceiros termos de cada equação se anulam dois a dois também na soma, assim temos:

$$\phi(x+\delta,y) + \phi(x-\delta,y) + \phi(x,y+\delta) + \phi(x,y-\delta) = 4\phi(x,y) \tag{7}$$

$$\phi(x,y) = \frac{\phi(x+\delta,y) + \phi(x-\delta,y) + \phi(x,y+\delta) + \phi(x,y-\delta)}{4} \tag{8}$$

Fazendo o uso da equação 8, podemos nos aproximar da solução dividindo o espaço de estudo por uma grade quadrada de pontos e a assim construiremos um sistema linear.

2.2 Construção do Sistema Linear

Para a resolução do sistema linear resultante da equações resultantes da expressão 8 para cada ponto, uma matriz pode ser construída para resolver o problema por método iterativo. Para construir essa matriz, é levado em conta a simetria bilateral do sistema de estudo:

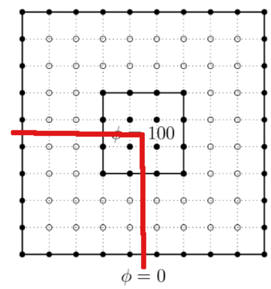

Figura 1: Sistema estudado com a unidade de simetria destacada

Desta maneira, reduzimos para 1/4 do problema original. O script desenvolvido leva em conta adjacências para produzir a matriz para um dada densidade de pontos. Uma matriz gerada para o sistema desejado com densidade de pontos `10x10`:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \\ \phi_{4,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{3,2} \\ \phi_{4,2} \\ \phi_{1,3} \\ \phi_{2,3} \\ \phi_{1,4} \\ \phi_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

2.3 Resolução do Sistema Linear

Considerando o tamanho da matriz, métodos como substituição de Gauss tornam o problema insolucionável. Portanto nesse caso foi aplicado o método do gradiente conjugado, utilizando um scipt do livro Numerical Methods in Engineering With Python.

2.4 Determinação do Campo Elétrico

Da equação 1, podemos calcular o campo elétrico utilizando a expressão seguinte, podemos estimar a derivada apesar da discretização do sistema:

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x+\delta) - \phi(x-\delta)}{2\delta} \tag{9}$$

No caso, 9 é a fórmula das diferenças centradas.
Com cada potencial e campo calculado, utilizando `matplotlib` , temos os resultados.

3 Resultados

3.1 Resolução 10x10

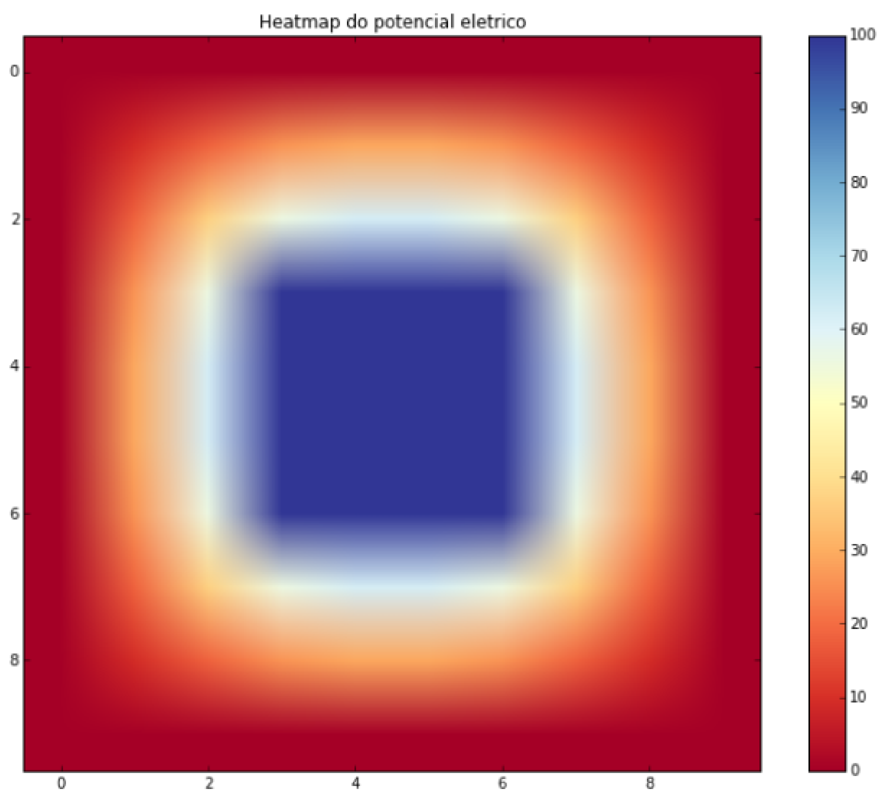

Figura 2: Resultado do potencial elétrico para resolução `10x10`

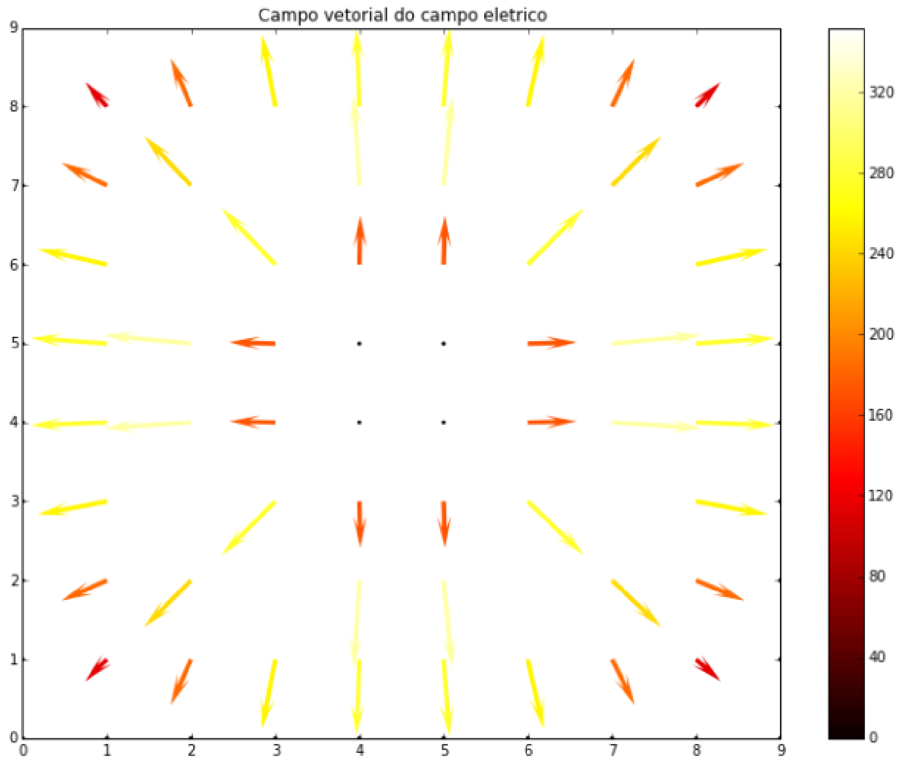

Figura 3: Resultado do campo elétrico para resolução `10x10`

3.2 Resolução 50x50

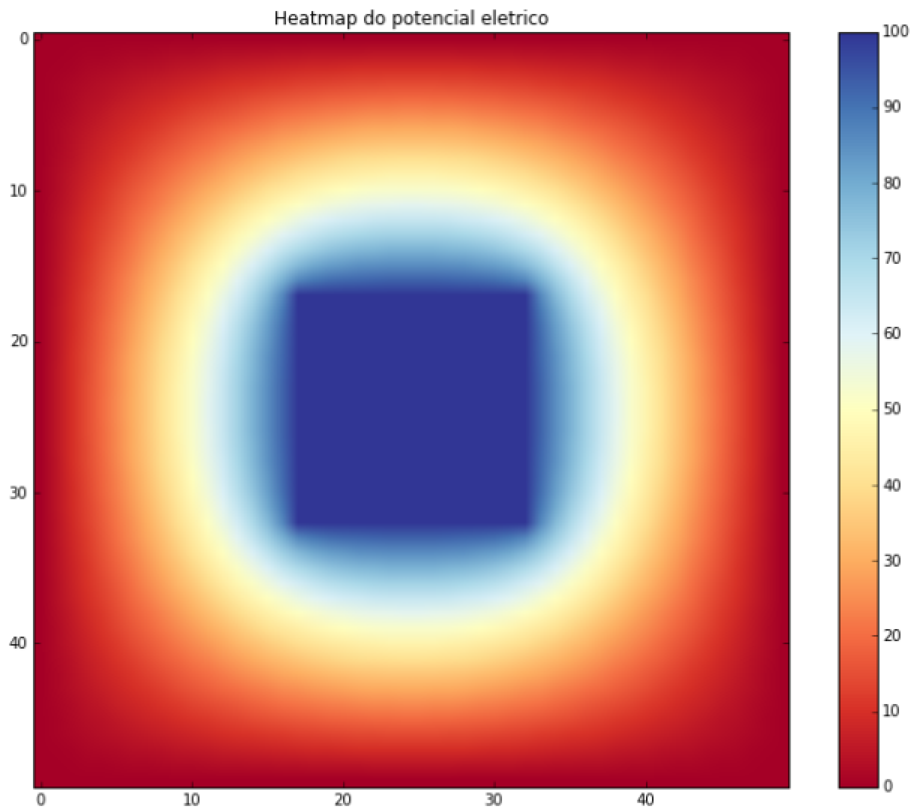

Figura 4: Resultado do potencial elétrico para resolução `50x50`

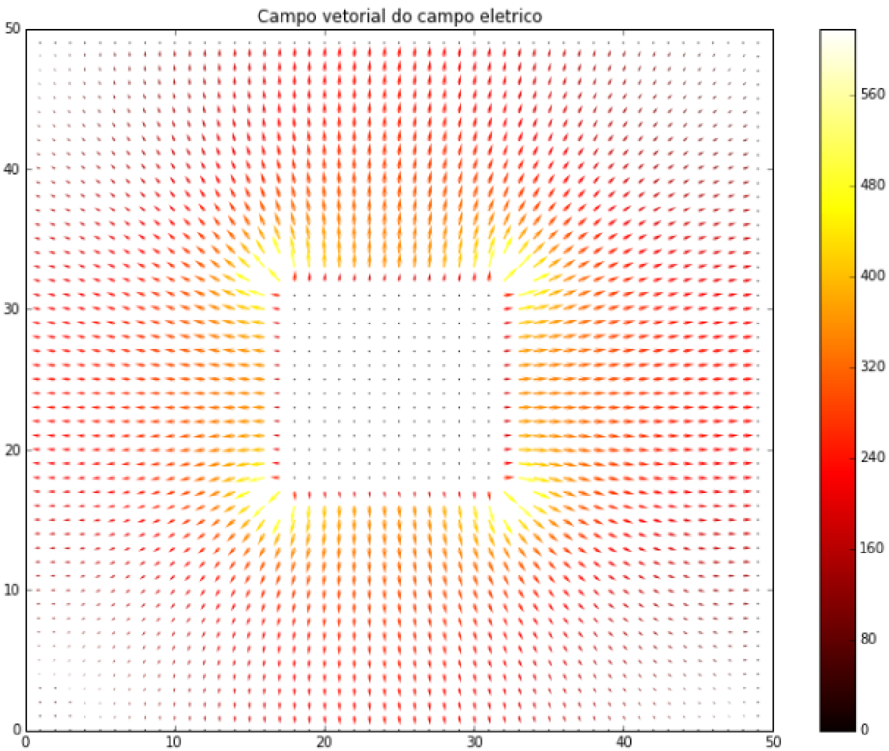

Figura 5: Resultado do campo elétrico para resolução `50x50`

4 Conclusão

Com os resultados apresentados, é possível concluir que com as ferramentas adequadas é possível reduzir o problema do cálculo do campo elétrico para um sistema linear. E com o uso de argumentos de simetria, é possível reduzir consideravelmente o tempo de processamento.

5 Referências

[1] J. Kiusalaas *Numerical Methods in Engineering With Python.*